Записки по Дискретни структури

17 октомври 2022 г.

Съдържание

1 Тема 1

1.1 Съждителна логика - съждения, логически съюзи

В съждителната логика не се допускат "междинни възможности"на частична истинност, т.е. дадено съждение е или истина, или лъжа, друга възможност няма.

Просто съждение е просто разказвателно изречение (още се нарича логическа променлива), което е или истина, или лъжа. Въпросителните изречения и възклицанията не са съждения, както и разказвателните изречения, за които не можем да твърдим, че са или истина, или лъжа. Пример: "Това изречение е лъжа."
Бележим истината с T (или 1), а лъжата с F (или 0), където T и F са **логически константи**.

Съставни съждения се образуват от прости съждения, други съставни съждения и логически константи чрез логически съюзи.

Видове логически съюзи
Нека p и q са съждения.

1. Дизюнкция (съответства на "или"от естествения език)
   Бележи се с '$\vee$'. Дизюнкцията на p и q е $p \vee q$. Тя е съставно съждение, което е:

   - лъжа, ако и p, и q са лъжа,
   - истина, във всеки останал случай.

   Тоест дизюнкцията е истина тогава и само тогава, когато поне едно от участващите съждения е истина.

   Друг начин да се определи е чрез таблица на истинност, в която на всеки ред на таблицата отговаря точно една възможна комбинация от F и T за p и q. Всяко такова "раздаване"на конкретни стойности (F или T) на променливите, се нарича **валюация**. Броят на валюациите при n променливи е 2^n.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. Изключващо или
   Бележи се с '$\oplus$'. Изключващото или на p и q е $p \oplus q$, което за да бъде истина се изисква точно едно от участващите съждения да е истина, а другото лъжа.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3. Конюнкция (съответства на 'и' от естествения език)
   Бележи се с '$\wedge$'. Конюнкцията на p и q е $p \wedge q$. Тя е съставно съждение, което е:

   - истина, ако и p, и q са истина,
   - лъжа във всеки останал случай.

   Тоест конюнкцията е истина тогава и само тогава, когато и двете участващи съждения са истина.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. Импликация (съответства на "ако ..., то ...")
   Бележи се с '$\rightarrow$' (или ' $\Longrightarrow$ '). Импликацията на p и q е $p \rightarrow q$ (чете се "p импликация q"). Тя е съставно съждение, което е:

   - лъжа, ако p е истина и q е лъжа,
   - истина във всеки останал случай.

   Съждението p се нарича антецедент и е свързан с достатъчността, q се нарича консеквент и е свързан с необходимостта.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Би-импликация
   Бележи се с ' $\iff$ '. Би-импликацията на p и q е $p \iff q$ (чете се "p тогава и само тогава, когато q"). Тя е съставно съждение, което е:

   - истина, когато p и q имат една и съща логическа стойност,
   - лъжа във всеки останал случай.

p	q	$p \iff q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. Отрицание (негация)
   Бележи се с '¬'. Прилага се към едно съждение. Отрицанието на p е $\neg p$, което е:

   - лъжа, ако p е истина,
   - истина,ако p е лъжа.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Приоритети на логическите съюзи (в намаляващ порядък):

1. отрицание
2. конюнкция, дизюнкция
3. импликация, би-импликация

1.2 Еквивалентност на съставни съждения

Съставно съждение, чиято стойност е T за всяка валюация на простите му съждения, се нарича **тавтология**.
Пример: $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Съставно съждение, чиято стойност е F за всяка валюация на простите му съждения, се нарича **противоречие**.
Пример: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Съставно съждение, чиято стойност е T за поне една валюация и F за поне една валюация на простите му съждения, се нарича **условност**.
Пример: $p \to q$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Определение
За всеки две съставни съждения s и t казваме, че s и t са еквивалентни тогава и само тогава, когато $s \iff t$ е тавтология. Бележим с '$s \equiv t$' ('$\equiv$' не е логически съюз, така че $s \equiv t$ не е съставно съждение).

1.3 Методи за доказателство на еквивалентност

Пример: $(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$

- Табличен метод

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

- Метод чрез еквивалентни преобразувания
  $(p \to q) \wedge p \equiv$ // св-во на импликацията
  $(\neg p \vee q) \wedge p \equiv$ // дистрибутивност
  $(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \equiv$ // св-во на отрицанието
  $F \vee (q \wedge p) \equiv$ // св-во на константите
  $(q \wedge p) \equiv$ // комутативност
  $(p \wedge q) \equiv$

1.4 Основни свойства на логическите съюзи

Нека p, q и r са произволни съждения. Тогава следните свойства са в сила:

1. Свойство на константите
   - $p \wedge T \equiv p$
   - $p \wedge F \equiv F$
   - $p \vee T \equiv T$
   - $p \vee F \equiv p$
2. Свойство на отрицанието
   - $p \vee \neg p \equiv T$
   - $p \wedge \neg p \equiv F$
3. Идемпотентност
   - $p \vee p \equiv p$
   - $p \wedge p \equiv p$
4. Закон за двойното отрицание
   - $\neg(\neg p) \equiv p$
5. Комутативност
   - $p \vee q \equiv q \vee p$
   - $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
   - $p \oplus q \equiv q \oplus p$
   - $p \to q \not\equiv q \to p$
   - $p \iff q \equiv q \iff p$
6. Асоциативност
   - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$
   - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$
7. Дистрибутивност
   - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

8. Закони на де Морган
   - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
   - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
9. Закон за поглъщането
   - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
10. Свойство на импликацията
    - $p \to q \equiv \neg p \vee q$
11. Свойствона би-импликацията
    - $p \iff q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

1.5 Основи на предикатната логика

Определение

Едноместен предикат е съждение, в което има "празно място в което празно място се слага обект от някаква предварително зададена област, наречена **домейн**. За всеки обект от домейна предикатът е или истина, или лъжа. Бележим с $P(x)$ (или други главни латински букви), където x е обект от домейна. Сам по себе си $P(x)$ не е нито истина, нито лъжа. Истина или лъжа се получава само след заместване на x с някой обект от областта, като има два случая на такова заместване:

- когато има поне един обект, за който предикатът е истина.
  Това бележим с $\exists x : P(x)$, където '$\exists$' е **екзистенциален квантор**. Ако обектите от областта са краен брой, да речем $a_1, a_2, ..., a_n$, то $\exists x : P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$

- когато за всеки обект предикатът е истина.
  Това бележим с $\forall x : P(x)$, където '$\forall$' е **универсален квантор**. Ако обектите от областта са краен брой, да речем $a_1, a_2, ..., a_n$, то $\forall x : P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$

Когато е използван квантор върху някаква променлива, казваме, че тя е **свързана**. В противен случай, казваме, че тя е свободна. Предикат, в който всички променливи са свързани, е съждение.

В израза $\forall x \underbrace{(P(x) \to Q(x))}_{\text{обхват на квантора}}$, x е свързана променлива.

В израза $\forall x \quad \underbrace{P(x)}_{\text{обхват на квантора}} \quad \to Q(x)$, x е свободна променлива в $Q(x) \implies$ $Q(x)$ не е нито истина, нито лъжа.

Отрицания на изрази с едноместни предикати:

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Определение

Предикатите могат да имат повече от едно "празно място"за попълване, т.е. да са двуместни, триместни и т.н.

В израза $\forall x \forall y P(x, y)$ казваме, че кванторите (които може да са от различен вид) са вложени.

Еднотипни квантори могат да бъдат размествани без това да се отразява на истинността, тоест винаги:

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

От друга страна, разнотипни квантори не може да бъдат разместваны, тоест, в общия случай:

- $\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$
- $\exists x \forall y P(x, y) \not\equiv \forall x \exists y P(x, y)$

В израза $\forall x P(x, y), y$ е свободна променлива $\implies$ $P(x, y)$ не е нито истина, нито лъжа.

1.6 Свойства на отрицанието в предикатната логика

Пример за негация на израз с много квантори:
$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon))$
$\equiv$
$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| >= \epsilon)$

2 Тема 2

Определение
Множество е първично понятие, което не се дефинира. Интуитивно го определяме като колекция от различни обекти. Обикновено, но не винаги, имената на множествата са главни латински букви: $A, B, ...$ При изреждане на елементите се ползват фигурните скоби '' '', а имената на елементите са разделени със запетаи, например $A = a, b, c$.

Принадлежността към множество се бележи с '$\in$', а непринадлежността с '$\notin$', например $a \in \{a, b, c\}; d \notin \{a, b, c\}$.

Множества може да са елементи на други множества.

2.1 Аксиома за обема

Две множества са равни тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи елементи, т.е. $\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \iff z \in Y) \to X = Y)$.

От аксиомата за обема следва, че редът в който са записани елементите на дадено множество, както и наличието на повторения на елементи, е без значение. Например: $\{a, b, c\} = \{a, a, b, b, b, c\} = \{a, b, c, b, a\} = \{c, b, a\}$.

2.2 Аксиома за отделянето

С предикат може да отделим подмножество от множество.

Ако X е множество и π е предикат с домейн X, то съвкупността Y от елементите на X, които имат свойството π, е множество:
$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff \pi(z))$

Нека X е множество, π е предикат над него и $Y = \{x \in X : \pi(x)\}$. Казваме, че Y е **подмножество (надмножество)** на X и пишем $Y \subseteq X (X \supseteq Y)$.
Имаме следните 2 случая:

- $\forall x \in X : \pi(x)$
  Тогава $Y = X$. Виждаме, че всяко множество е подмножество на себе си.

- $\neg \exists x \in X : \pi(x) \equiv \forall x \in X : \neg \pi(x)$
  Тогава Y е празното множество. Пишем $Y = \emptyset$. Празното множество е подмножество на всяко множество, включително и на себе си.

Когато $Y \subseteq X$ ($X \supseteq$ Y), но $Y \neq X$ казваме, че Y е
<u>същинско подмножество (надмножество)</u> на X и пишем $Y \subset X (X \supset Y)$, което за да бъде изпълнено трябва да съществува елемент $x \in X$, такъв че $x \notin Y$.

2.3 Аксиома за степенното множество

За всяко множество X съществува множеството от всички негови подмножества, което наричаме степенното множество на X, т.е.
$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff z \subseteq X)$.
Бележем го с 2^X.

Примери:

- $X = \emptyset \implies 2^X = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$
- $X = \{a, b, c\} \implies 2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

2.4 Минималност и максималност по включване

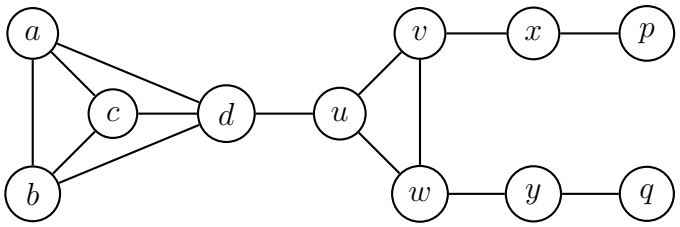
Нека е дадено множество A и предикат σ върху 2^A. За всяко множество $B \subset A$, казваме, че B е максимално [минимално] по включване по отношение на σ, ако:

1. $\sigma(B)$
2. $\forall C : (B \subset C \subseteq A \to \neg\sigma(C))$ $[\forall C : (C \subset B \to \neg\sigma(C))]$

Максимално [минимално] по включване подмножество е такова, за което предикатът е в сила, но той не е в сила за никое негово същинско надмножество [подмножество].

За да говорим за максималност и минималност по включване, трябва да имаме предвид предикат. Без предикат, тези понятия нямат смисъл.

Пример: разграничение между "максимално по включване"(maximal) и "глобално максимално"(maximum) чрез клика в граф



Клика в граф е множество от върхове, всеки два от които са свързани с ребро.
Всеки връх е тривиална клика.
Примерни клики са $\{x, p\}, \{v, x\}, \{u, v, w\}, \{a, b, c, d\}$.
Тук $\{a, b, c, d\}$ е най-голямата клика (т.е. максимална клика - отговаря на "глобално максимално") - друга клика с 4 върха няма. Към $\{u, v, w\}$ не може да се добави връх, запазвайки свойството множеството да е клика, т.е. $\{u, v, w\}$ отговаря на "максимално по включване".

2.5 Операции върху множества

Нека X и Y са множества.

- Обеденението на X и Y е $X \cup Y = \{x | x \in X \vee x \in Y\}$.
- Сечението на X и Y е $X \cap Y = \{x | x \in X \wedge x \in Y\}$.
- Разликата X и Y е $X \setminus Y = \{x | x \in X \wedge x \notin Y\}$.
- Симетричната разлика то на X и Y е $X \Delta Y = \{x | x \in X \oplus x \in Y\}$.
- Допълнението на X до даден универсум U е $\overline{X^U} = \{x | x \in U \wedge x \in X\}$.

2.6 Основни свойства на операциите върху множества

Нека X, Y и Z са множества и U е универсум.

1. Свойство на константите
   - $X \cup \emptyset = X$
   - $X \cup U = U$
   - $X \cap \emptyset = \emptyset$
   - $X \cap U = X$
2. Свойство на отрицанието
   - $X \cup \overline{X} = U$
   - $X \cap \overline{X} = \emptyset$
3. Идемпотентност

- $X \cup X = X$
- $X \cap X = X$

4. Закон за двойното отрицание
   - $\overline{\overline{X}} = X$
5. Комутативност
   - $X \cup Y = Y \cup X$
   - $X \cap Y = Y \cap X$
   - $X \Delta Y = Y \Delta X$
   - $X \setminus Y \neq Y \setminus X$
6. Асоциативност
   - $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z$
   - $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z$
7. Дистрибутивност
   - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
   - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
8. Закони на де Морган
   - $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$
   - $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
9. Закон за поглъщането
   - $X \cup (X \cap Y) = X$
   - $X \cap (X \cup Y) = X$
10. Свойство на импликацията
    - $p \to q \equiv \neg p \vee q$
11. Свойство на би-импликацията
    - $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \iff X = Y$

2.7 Покриване и разбиване на множество

Определение

Протоелементите са първични елементи, не са множества. Множествата изграждаме от протоелементи и/или други множества.
Множеството от протоелементите, които може да се появяват, се нарича **опорно множество**.
Множество от множества се нарича **фамилия**.

Пример: $A = \{a, b, c\}$ е опорно множество, а фамилии над него са $X = \{\{a, b\}, \{c\}\}, Y = \{\{a, c\}\}$

Нека X е непразно множество. **Покриване** на X е всяка фамилия $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ такава, че $k \geq 1$ и:

1. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \subseteq X$
2. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \neq \emptyset$
3. $\cup_{i=1}^{k} X_i = X$

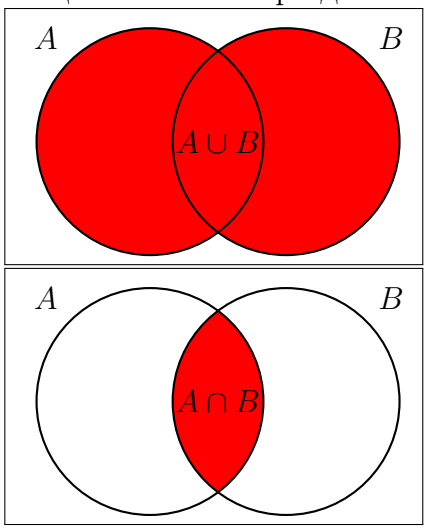
Ако освен това е вярно и $\forall i \forall j (1 \leq i < j \leq k \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$ казваме, че X е **разбиване** на X.

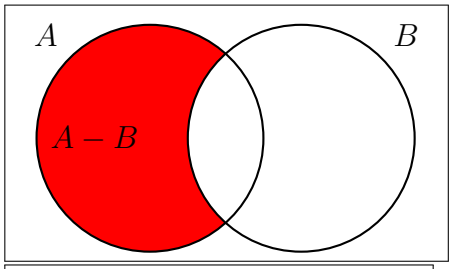
Пример: нека $X = \{x, y, z, t\}$, покриване на X е $\{\{x, y\}, \{y, z, t\}, \{x, z, t\}\}$, разбиване на X е $\{\{x, z\}, \{y\}, \{t\}\}$.

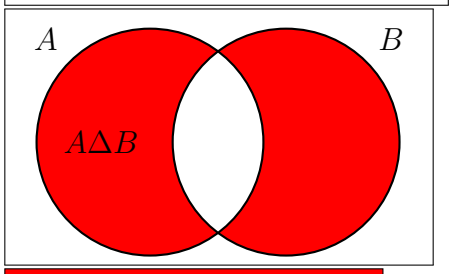
2.8 Диаграми на Venn

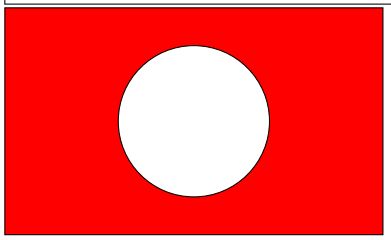
В пълните диаграми на Venn, универсумът винаги присъства. Районите са точно 2^n при n множества.

Общо положение при две множества:




A
B
A − B


A
B
AΔB



3 Тема 3

3.1 Индуктивно дефенирани множества

Аксиома за индукцията

За тази аксиома е удачно да мислим за нея като за конструкция или безкрайна процедура, която генерира множество, стартирайки от някаква база и прилагайки итеративно някакви операции.

Нека е дадена непразно множество M_0, което наричаме **базово множество**, и непразно множество от операции F, приложими в тази конструкция.

- Включваме елементите на M_0 в M, т.е. $M \leftarrow M_0$.
- Прилагаме неограничено следното:
  - нека M' е множеството от елемнитите, които се получават при всевъзможните прилагания на операциите от F върху текущото M
  - добавяме M' към M, т.е. $M \leftarrow M \cup M'$

Така полученото M е множество. Пишем $M = (M_0, F)$.

Множества, генерирани чрез безкрайната процедура от аксиомата за индукцията, наричаме индуктивно генерирани множества.

Пример: множеството на естествените числа $\mathbb{N}$
При него $M_0 = \{0\}$, а F съдържа една единствена операция - добавяне на единица.

3.2 Доказателства по индукция - обикновена, силна, структурна. Примери

Нека е даден предикат $P(n)$ и трябва да докажем $\forall x \in \mathbb{N} : P(n)$.

Обикновена индукция

Схемата на доказателствата по индукция върху естествените числа е следната:

(База) доказваме $P(0)$, като просто проверяваме истинността на предиката за $n = 0$

(И.П.) допускаме $P(n)$ за произволно $n \in \mathbb{N}$ и въз основа на това допускане доказваме $P(n+1)$ (И.С.)

Пример:

Силна индукция

Схемата на доказателствата със силна индукция върху естествените числа е следната:

(База) доказваме $P(0)$, като просто проверяваме истинността на предиката за $n = 0$

(И.П.) допускаме, че за произволно $n \in \mathbb{N}$ са изпълнени $P(0), P(1), ..., P(n)$

(И.С.) въз основа на тези допускания доказваме $P(n+1)$

Пример:

Структурна индукция

В по-общия случай доказваме предикат $P(x)$, където домейнът е някакво индуктивно дефенирано множество $M = (M_0, F)$. Схемата на доказателство е следната:

(База) за всеки елемент x от M_0 проверяваме истинността на $P(x)$.

(И.П.) допускаме $P(x)$ за произволно $x \in M$

(И.С.) въз основа на това допускане доказваме, че за всеки елемент y, който се получава при прилагането на операциите от F върху текущото M, то $P(y)$ е вярно

Пример:

3.3 Наредена двойка. Декартово произведение

(Дефиниция на Kuratowski) Всяко множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ наричаме **наредена двойка** с първи елемент a и втори елемент b. Бележим "(a, b)".

Нека A и B са множества. **Декартовото произведение** на A и B е множеството $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

4 Тема 4

4.1 Релации

Определение Нека $n \geq 1$ и $A_1, A_2, ..., A_n$ са множество, наречена съответно първи домейн домейн, втори домейн, ..., n-ти домейн. Релация над декартовото произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ е всяко множество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Казваме, че R е n-местна или n-арна.

Пример за релации: $<, \leq, >, \geq, =$ са релации над декартовия квадрат $\mathbb{R}^2$. Нека S е множество, $\subseteq_S$ е релация над $2^S \times 2^S$, дефенирана така: $\forall a, b \in 2^S : (a, b) \in \subseteq_S \iff a \subseteq b$

Примерно, нека $S = \{a, b\}$. Тогава $(\{a\}, \{a, b\}) \in \subseteq_S, (\{a, b\}, \{a\}) \notin \subseteq_S$ и т.н.

4.2 Двуместни релации над декартови квадрати и представяне чрез матрици и графи (диаграми)

Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $R \subseteq A^2$. Например, $A = \{a, b, c, d\}, R = \{(a, a), (a, b), (c, c), (d, a)\}$.

Представяне чрез матрици

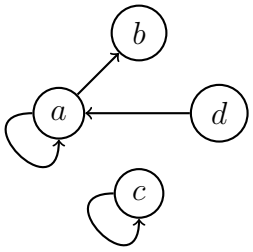
Можем да представим R чрез булева матрица $n \times n$, в която на ред i и колона j е:

- 1, ако $a_i R a_j$
- 0, в противен случай

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	0

Представяне чрез графи

Можем да представим R чрез диаграма от точки и графи, в която на всяко a_i съответства отделна точка, наречена връх, а ребро от връх a_i до върха a_j има тогава и само тогава, когато $a_i R a_j$.



4.3 Свойства на двуместни релации

Нека $R \subseteq A^2$.

1. Рефлексивност
   R е рефлексивна тогава и само тогава, когато $\forall a \in A : aRa$.

2. Антирефлексивност
   R е антирефлексивна тогава и само тогава, когато $\forall a \in A : \neg aRa$.

3. Симетричност
   R е симетрична тогава и само тогава, когато $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$.

4. Антисиметричност
   R е антисиметрична тогава и само тогава, когато $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$.

5. Силна антисиметричност
   R е силно антисиметрична тогава и само тогава, когато $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$.

6. Транзитивност
   R е транзитивна тогава и само тогава, когато $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$.

4.4 Затваряния на релации

Рефлексивното/симетричното/транзитивното затваряне на R е минималното множество $R' \subseteq A^2$, такова че $R \subseteq R'$ и R' е рефлексивна/симетрична/транзитивна релация.

"R' е минималното множество"означава, че за всяко $R'' \subseteq A^2$, такова че $R \subseteq R''$ и R'' е рефлексивна/симетрична/транзитивна, е вярно, че $R' \subseteq R''$.

Релация е рефлексивна/симетрична/транзитивна тогава и само тогава, когато съвпада с рефлексивното/симетричното/транзитивното си затваряне.

Допълнение

Нека A е крайно и релациите над A са представени с матрици.

Рефлексивното затваряне се получава с едно сканиране на главния диагонал и обръщане на всяка 0 в 1. Симетричното затваряне се получава чрез сканиране за двойки $(0;1)$ и $(1;0)$, които са симетрично спрямо главния диагонал, и обръщане на 0-та от двойката в 1-ца.

4.5 Релации на еквивалентност

Релация е релация на еквивалентност тогава и само тогава, когато рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример: $=$

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всеки елемент $a \in A$ дефенираме множеството $[a] = \{b \in A | aRb\}$.

4.6 Теорема за класовете на еквивалентност

Фамилията $\{[a] | a \in A\}$ е разбиване на A. Елементите на тази фамилия се наричат **класове на еквивалентност**.

Доказателство.

- Всеки елемент на A е в поне един елемент на фамилията, понеже в $\{[a] | a \in A\}$ a взема последователно стойностите на всички елементи от A.
- Всеки елемент на фамилията е непразен, понеже R е рефлексивна.
- Всеки два различни елемента на фамилията имат празно сечение.

  Лема. $[a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

  Доказателство.
  Контрапозитивното е $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$.
  Да допуснем, че $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ за някои $a, b \in A$.
  Щом $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, то $\exists c \in A : c \in [a] \cap [b]$.
  Да разгледаме елемент $d \in [a]$. Визуално:
  Знаем, че $a \in [a]$ и $b \in [b]$.
  От допускането имаме, че $(1)(c \in [a] \implies aRc)$ и $(2)(c \in [b] \implies$

bRc).
По дефиниция $[a] = \{x \in A | aRx\}$.
Тогава:
$aRd \to dRa$ (симетричност)
$dRa \wedge aRc \to dRc$ (транзитивност)
cRb (симетричност и (2))
$dRc \wedge cRb \to dRb$ (транзитивност)
$dRb \implies bRd$ (симетричност)
$bRd \implies d \in [b]$
Доказахме, че $d \in [a] \to d \in [b]$ за произволен елемент d.
Следователно $[a] \subseteq [b]$.
Аналогично доказваме, че $[b] \subseteq [a]$ и от аксиомата за обема получаваме, че $[a] = [b]$. □

□

5 Тема 5

5.1 Частични наредби

Определение. *Релация е релация на частична наредба тогава и само тогава, когато е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.*

Пример. $=, \leq, \geq$ *над* $\mathbb{R}^2$

При частичните наредби може (но не непременно) да има несравними елементи (примерно наредените двойки $(4,5)$ и $(5,4)$). Елементи a и b са несравними, ако $\neg aRb$ и $\neg bRa$.

5.2 Линейни наредби

Определение. *Релация е релация на линейна наредба тогава и само тогава, когато е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.*

Не може да има несравними елементи заради силната антисиметричност. Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба и $A = \{a_1, ..., a_n\}$, то R има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента.

ЛН-и са частен случай на ЧН-и.

5.3 Вериги и контури в релации

Ако $R \subseteq A^2$ е произволна релация и $A = \{a_1, ..., a_n\}$, **верига** в R е всяка редица $a_{i_0}, ..., a_{i_k}$, където $i_0, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ за $0 \leq j \leq k-1$. Ограничение за k няма, тоест $k \geq 0$. Тогава един единствен елемент е верига.

Ако $a_{i_0} = a_{i_k}$ и $k > 0$, то веригата е **контур**. Тогава $k > 0$ налага $k > 1$. Един единствен елемент не е контур.

Пример.

5.4 Теорема за контурите

Теорема. *Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна релация. Тогава R е частична наредба тогава и само тогава, когато няма контури.*

Доказателство.
$\Rightarrow$) : Нека R е частична наредба.
Ще докажем, че R няма контури.

Да допуснем, че R има контур $a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, a_{i_k} = a_{i_0}$.
От определението за контур и транзитивността на R имаме, че:

$$\begin{aligned} a_{i_0}Ra_{i_1} \wedge a_{i_1}Ra_{i_2} &\implies a_{i_0}Ra_{i_2} \\ a_{i_0}Ra_{i_2} \wedge a_{i_2}Ra_{i_3} &\implies a_{i_0}Ra_{i_3} \\ &\dots \\ a_{i_0}Ra_{i_{k-2}} \wedge a_{i_{k-2}}Ra_{i_{k-1}} &\implies a_{i_0}Ra_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

Но тогава имаме, че $a_{i_0}Ra_{i_{k-1}}$ и $a_{i_{k-1}}Ra_{i_0}$ (понеже $a_{i_k} = a_{i_0}$ от определението за контур).
Следователно R не е антисиметрична
$\implies$ не е частична наредба
$\implies$ ↯

$\Leftarrow$) : Нека R е няма контури.
Ще докажем, че R е частична наредба.
Допускаме противното - R не е частична наредба.
В началото сме допуснали, че R е рефлексивна и транзитивна и това допускане е в сила.
Тогава за да не е частична наредба, тя не трябва да е антисиметрична.
Щом не е антисиметрична, то задължително съществуват $a, b \in A$, такива че $a \neq b$: $aRb \wedge bRa$ (не е антисиметрична: $\neg(aRb \to \neg bRa) \equiv \neg(\neg aRb \vee \neg bRa) \equiv aRb \wedge bRa$).
Но тогава a, b, a е контур $\implies$ противоречие с това, че R няма контури. □

5.5 Влагане на частична наредба в линейна наредба – дефиниция

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че R се влага в R' (или че R' е линейно разширение на R).

При $A = \{a_1, ..., a_n\}$, броят на линейните разширения варира от 1 (самата R е линейна наредба) до $n!$ (няма несравними елементи в R).

5.6 Допълнение

Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки елемент $a \in A$ казваме, че a е **минимален** в R, ако $\neg\exists b \in A, b \neq a : bRa \equiv \forall b \in A, b \neq a : \neg bRa$.

Аналогично, a е **максимален** в R, ако $\neg\exists b \in A, b \neq a : aRb \equiv \forall b \in A, b \neq a : \neg aRb$.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент или да няма нито минимален, нито максимален.

6 Тема 6

6.1 Функции – частични и тотални

Нека X и Y са множества.

Определение. ***Частична функция*** *с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$, т.е.*

$\forall x \in X : ((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)))$

Определение. ***Тотална функция*** *с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$, т.е.*

$\forall x \in X : ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z))$

При дадени X и Y, тоталните функции са строго подмножество на частичните. Всяка функция (тотална) е частична функция, но обратното не е вярно.

Формално, функция е вид релация.

6.2 Еднозначна функция, сюрекция, биекция, обратна функция

Нека $f : X \rightarrow Y$. Тогава:

- f е инекция, ако $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
- f е сюрекция, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$. Неформално - кодомейнът да бъде "покрит"от изображинието.
- f е биекция, ако е инекция и сюрекция. Още се казва взаимноеднозначно изображиние.

Пример. *Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол, възможно е да има правостоящи.*

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Тогава броят на столовете е равен на броя на хората.

Нека $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ и $f : X \to Y$.
Необходима условие f да е:

- инекция е $m \leq n$
- сюрекция е $m \geq n$
- биекция е $m = n$

Иначе казано, при:

- $m > n$ няма инекция
- $m < n$ няма сюрекция
- $m \neq n$ няма биекция

Определение. *Нека $f : X \to Y$ е биекция. **Обратната функция** на f се бележи с f^{-1}. Тя е с домейн Y и кодомейн X и се дефинира така: $\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x$, където x е уникалният елемент на X, такъв че $f(x) = y$.*

6.3 Крайни множества и брой на елементите. Безкрайни изброими множества

Кардиналност (мощност) на множество A е броят на елементите му и се бележи с $|A|$.

Определение. *Множество A е **крайно**, ако:*

- *$A = \emptyset$, тогава $|A| = 0$*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$. Тогава $|A| = n$.*

Определение. *Множество е **безкрайно**, ако не е крайно.*

Определение. *Множество е **изброимо безкрайно**, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.*

Определение. *Множество е **изброимо**, ако е крайно или изброимо безкрайно.*

Определение. *Множество е **неизброимо**, ако не е изброимо.*

6.4 Теорема за съществуване на неизброимо (безкрайно) множество

Теорема. *Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$, т.е. $2^{\mathbb{N}}$ е неизброимо.*

Доказателство. Да допуснем, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, т.е. съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. Ще опровергаем, че характеристичните редици на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени.

Допускаме изброяване на характеристичните редици: $A_0, A_1, ...$, като всяка характеристична редица се появява точно веднъж.
Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, ...)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, ...)$ и т.н.
Представяме си ги написани в безкрайна колона:
$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, ...)$
$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, ...)$
$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, ...)$
$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, ...)$
...
Разглеждаме главния диагонал: редицата $X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, ...)$.
Образуваме нейната "побитова инверсия т.е. редицата
$\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, ...)$.
За всеки $i, j : \overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$ и обратно. Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0, защото се различават в поне една позиция - нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$ и ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.
Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1, защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2, защото се различават във втората позиция и т.н.
Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната, иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. □

Алтернативно доказателство:

Теорема. *За всяко множество A, не съществува сюрекция $g : A \to 2^A$.*

Доказателство. Да допуснем противното - съществува множество A, такова че съществува сюрекция $g : A \to 2^A$.
Разглеждаме множеството $S = \{a \in A | a \notin g(a)\}$ (1)
Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$. Тогава:

- ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1) $\implies$ противоречие
- ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1) $\implies$ противоречие

□

6.5 Бележки

Определение.

Определение. *Характеристична редица*

7 Тема 7

7.1 Теорема за мощността на декартовото произведение на две изброимо безкрайни множества

Теорема. *Нека A и B са множества, $|A| = n, |B| = m$. Тогава $|A \times B| = n * m$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n - броя на елементите на множеството A.
База: $n = 0$
Тогава $A = \emptyset$ и $\emptyset \times B = \emptyset$.
Следователно $|\emptyset \times B| = 0 = 0 * m$.

Индукционно предположение (ИП): нека твърдението е в сила за множество с n елемента, т.е. $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_m\}$, където m е произволно. Тогава $|A \times B| = n * m$.

Индукционна стъпка: ще докажем твърдението за множество с $n + 1$ елемента, т.е. нека $A = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$ и $B = \{b_1, ..., b_m\}$, където m е произволно.

Тогава $A \times B = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\} = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\} \cup \{a_{n+1}\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.
Съгласно ИП, $|\{a_1, a_2, ..., a_n\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\}| = n * m$
Броят на елементите в множеството $\{a_{n+1}\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\} =$
$\{(a_{n+1}, b_1), (a_{n+1}, b_2), ..., (a_{n+1}, b_m)\}$ е m.
Множествата $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и $\{a_{n+1}\} \times \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ са непресичащи се, защото елементите на първото множество са наредени двойки с първи елемент различен от a_{n+1}, а елементите на второто множество са наредени двойки с първи елемент a_{n+1}.

Тогава $|A \times B| = n * m + m = (n + 1) * m$. □

7.2 Теорема за за мощността на степенното множество на изброимо безкрайно множество

Теорема. *Нека A е множество с n на брой елемента. Тогава 2^A има 2^n на брой елемента, т.е. $|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n.
База: $n = 0$

Тогава $A = \emptyset$ и $2^\emptyset = \{\emptyset\}$. Следователно $|2^A| = |2^\emptyset| = 2^{|\emptyset|} = 2^0 = 1$.

Индукционно предположение (ИП): нека твърдението е изпълнено за множество с n елемента, т.е. $|A| = n$.

Индукционна стъпка: ще докажем твърдението за множество с $n+1$ елемента, т.е. $|A| = n+1$.

Нека $x \in A$. Ще разделим 2^A на две непресичащи се множества: $U_0 = \{B | B \subseteq A \wedge x \notin B\}$ и $U_1 = \{B | B \subseteq A \wedge x \in B\}$.
Така $2^A = U_0 \cup U_1$ и съгласно принципа за събирането $|2^A| = |U_0| + |U_1|$.

Имаме, че $B \in U_0 \iff B \subseteq A \setminus \{x\}$. Следователно $U_0 = 2^{A \setminus \{x\}}$, като $A \setminus \{x\}$ е множество с n елемента и съгласно ИП $|U_0| = 2^n$.

Всеки елемент $B \in U_1$ може да се представи като $B = \{x\} \cup C$, където $C \in U_0$. Следователно броят на елементите на U_1 е равен на броя на елементите на U_0.

Така $|2^A| = |U_0| + |U_1| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

7.3 Теорема за за съществуване на минимален и максимален елемент във всяка крайна частична наредба

Теорема. *Нека A е крайно множество и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един максимален елемент.*

Доказателство. Да допуснем, че съществува крайно A и поне една частична наредба R над A, такава че R няма минимален елемент.
Избираме произволно $a \in A$. По допускане a не е минимален, така че $\exists b \in A : b \neq a \wedge bRa$.
По допускане b не е минимален, така че $\exists c \in A : c \neq b \wedge cRb$ и т.н.
В общия случай, веригата p, завършваща на a, изглежда така:
$p = z, ..., \underbrace{x, ..., x}_{\text{контур}}, ..., c, b, a$.
Може x да е a, или b, или c, или z.
Тогава в R има контур, което противоречи на това, че в частичните наредби няма контури.
Следователно противоречие с допускането. □

7.4 Теорема за за разширяване (влагане) на крайна частична наредба до пълна

Теорема. *Нека A е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение R' на R.*

Доказателство. (чрез алгоритъма "Топологично сортиране")
Ще построим масив $B[1, ..., n]$, в който ще разположим елементите на A. Разполагането на елементите на множество в масив задава еднозначно линейна наредба.
Формално, B и R' се съвършено различни обекти - най-малкото $|R'| = \frac{n*(n+1)}{2}$. Но R' може да бъде конструирана лесно от B.

Вход: крайно множество $A, |A| = n$, частична наредба $R \subseteq A^2$
Изход: масив B, реализиращ линейно разширение R' на R

1: $i \leftarrow 1$
2: избираме произволно $a \in A$, който е минимален елемент на R
3: $B[i] \leftarrow a$, изтриваме a от A и от R, правим $i++$
4: ако $i = n + 1$, върни B, в противен случай иди на 2)

□

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент, а при всяко следващо достигане на ред 2) пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува цикъл, тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред 3).

8 Тема 8

8.1 Принципи на изброителната комбинаторика

Принцип (на Дирихле). *Ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$.*

Алтернативна формулировка: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.
Обобщение: ако има $k * n + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Принцип (на биекцията). *Нека X и Y са крайни множества. Тогава $|X| = |Y|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : X \to Y$.*

Принцип (на събирането (разбиването)). *Нека е дадено множество X и разбиване $Y = \{Y_1, ..., Y_k\}$ на X. Тогава $|X| = |Y_1| + ... + |Y_k|$.*

Това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, ...Y_k$ да са празни, защото мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Принцип (на изваждането). *Нека е дадено множество X в универсум U. Тогава $|X| = |U| - |\overline{X}|$.*

Очевидно $\{X, \overline{X}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на събирането имаме, че $|U| = |X| + |\overline{X}|$. Не е възможно $\overline{X}$ да е празно, но дори тогава твърдението остава в сила.

Принцип (на умножението). *Нека X и Y са множества. Тогава $|X \times Y| = |X| * |Y|$.*

Принцип (на делението). *Нека X е множество и $R \subseteq X^2$ е релация на еквивалентност. Нека X има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има мощност m. Тогава $m = \frac{|X|}{k}$.*

8.2 Принцип на включването и изключването

Принцип (на включването и изключването). *Нека е дадено покриване на множество и търсим мощността на множеството, като събираме и изваждаме мощностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и т.н.*

Обща формулировка:
За всяко $n \geq 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$|A_1 \cup ... \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}| \tag{1}$$

Доказателство с индукция по n:
База: $n = 1$
Тогава (1) става $|A_1| = |A_1|$.

Индукционно предположение: нека твърдението е изпълнено за всеки $n - 1$ множества, т.е.

$$|A_1 \cup ... \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}| \tag{2}$$

$$|A_1 \cup ... \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}|$$

Индукционна стъпка: ще докажем твърдението за всеки n множества.

□

9 Тема 9

9.1 Основни комбинаторни конфигурации и формули за броя на елементите им

Определение (Конфигурации с наредба и повтаряне)**.** *Множеството от конфигурациите с наредба и повтаряне с големина m (т.е. броят на елементите в нея) над опорно множество X с мощност n означаваме с "$K_{н,\ n}(n,m)$". Елементите му са наредените m-торки (вектори с дължина m), чиито елементи са от опорното множество X. Тогава $K_{н,\ n}(n,m) = X^m$.*
От обобщения принцип на умножението: $|K_{н,\ n}(n,m)| = |X^m| = n^m$

Пример. *Нека* $X = \{a,b,c\}, m = 2$.
Тогава $K_{н,\ n}(3,2) = \{(a,a);(a,b);(a;c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$ *и* $|K_{н,\ n}(3,2)| = 3^2 = 9$.

Определение (Конфигурации с наредба без повтаряне)**.** *Множеството от конфигурациите с наредба без повтаряне с големина m над опорно множество X с мощност n означаваме с "$K_н(n,m)$". Елементите му са наредените m-торки без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество X.*

Процеса на изграждането на някой от тези вектори е следния:

- за първата позиция можем да изберем всеки елемент от X, т.е. имаме n възможности
- за втората позиция имаме $n-1$ възможности, защото елементът от X, избран за първа позиция, вече не може да се ползва
- аналогично за третата позиция има само $n-2$ възможности
- и т.н., за m-тата позиция има само $n-(m-1)$ възможности

Тогава

$$\begin{aligned}|K_{\text{н}}(n,m)| &= n*(n-1)*(n-2)*...*(n-(m-1)) \\ &= n*(n-1)*...*(n-m+1) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1}(n-k) = n^{\underline{m}}\end{aligned}$$

[1] $n^{\underline{m}}$ - "n на падаща степен m"

Този резултат не се получава от принципа на умножението. Резултатът остава в сила и при $m > n$, тогава дясната страна ще е 0.

Пример. *Нека* $X = \{a, b, c\}, m = 2$
Тогава $K_н(3, 2) = \{(a, b); (a, c); (b, a); (b, c); (c, a); (c, b)$ *и* $|K_н(3, 2)| = 3 * ... * (3 - 2 + 1) = 3 * 2 = 6$.
Тук $K_н(3, 2)$ *не е Декартово произведение нито на 3-елементно и 2-елементно множество, нито на 6-елементно и 1-елементно множество. Както на първа, така и на втора позиция се срещат и трите елемента на* X.

Пример. *Нека* $X = \{a, b, c\}, m = 4$
Тогава $K_н(3, 2) = \emptyset$, *тъй като е невъзможно да не повторим елемент от* X *съгласно принципа на Дирихле.*
Следователно $|K_н(3, 4)| = 3^{\underline{4}} = 3 * 2 * 1 * 0 = 0$.

Частен случай е $n = m$, тогава векторите се наричат пермутации. Пермутациите на n на брой, два по два различни обекта, са разполаганията в линейна наредба на тези обекти. Така $|K_н(n, m)| = |K_н(n, n)| = n!$

Определение (Конфигурации без наредба и без повтаряне)**.** *Множеството от конфигурациите без наредба и без повтаряне с големина* m *над опорно множество* X *с мощност* n *означаваме с "*$K(n, m)$*". Елементите му са наредените* m*-елементните подмножества на опорното множество. Наричат се още комбинации.*

Въвеждаме релация $R \subseteq K_н(n, m) \times K_н(n, m)$ така: $\forall X, Y \in K_н(n, m)$: $XRY \iff X$ и Y имат едни и същи елементи.

R е релация на еквивалентност и всеки нейн клас на еквивалентност има мощност $m!$, а $|K(n, m)|$ е броят на класовете на еквивалентност, като $|K(n, m)| = \frac{K_н(n,m)}{m!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!*(n-m)!}$, което се нарича биномен коефициент.

Пример. *Колко са възможните фишове при тото 6/49?*
Отговор: $\frac{49*48*47*46*45*44}{6!} = \frac{10068347520}{720} = 13983816$
Причината да делим на $6! = 720$ *е, че няма значение в какъв ред се изтеглят числата.*

Определение (Конфигурации без наредба с повтаряне)**.** *Множеството от конфигурациите без наредба с повтаряне с големина* m *над опорно множество* X *с мощност* n *означаваме с "*$K_n(n, m)$*". Елементите му са мултимножества с големина* m *на опорното множество.* $|K_n(n, m)| = \binom{n-1+m}{n-1} = \binom{n-1+m}{m}$

Пример. *Нека* $X = \{a, b, c\}, m = 5$. *Тогава*

$$\begin{aligned} K_n(3,5) = \{&\{a,a,a,a,a||\},\\ &...,\\ &\{|b,b,b,b,b|\},\\ &\{a,a,a,a,||c\},\\ &...,\\ &\{a,|b,b|,c,c\},\\ &\{||c,c,c,c,c\}\} \end{aligned}$$

$|K_n(3,5)| = \binom{3-1+5}{3-1} = \binom{7}{2} = 7 * 3 = 21$

Пример. *12 еднакви билета се раздават на 10 човека. По колко начина може да стане това?*
Р-е: множеството от хората е опорното множество. Броят на билетите е големината на конфигурацията, т.е. $n = 10, m = 12$.
Отговорът е: $\binom{12-1+10}{12} = \binom{12-1+10}{10-1} = 239930$
Едно от раздаванията може да бъде: $**||||***||*|*****|*|$, *където първият човек е с 2 билета, 2-ят, 3-ят и 4-ят са с по 0 билета, 5-ят е с 3, 6-ят е с 0, 7-ят е с 1, 8-ят е с 5, 9-ят е с 1 и 10-ят е без билети.*

Пример. *Колко са фишовете в 6/49, ако след изтегляне на топка, тя бива връщана отново в сферата?*
Отговор: $\binom{49-1+6}{6} = 25827165$

9.2 Биномен коефициент. Основни свойства

Дефинираме е $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!*(n-m)!} = \frac{n*(n-1)*...*(n-m+1)}{m!}$ за $n, m \in \mathbb{N}$, което се нарича биномен коефициент.

Основни свойства:

- ако $m > n$, то $\binom{n}{m} = 0$, което има комбинаторен смисъл на "има 0 начини да изберем m-елементно подмножество на X, ако $|X| = n$ и $m > n$"
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, което има комбинаторен смисъл на "има точно 1 начин да изберем 0 нещо от n - не избираме нищо, т.е.избираме $\emptyset$"и "има точно 1 начин да изберем n неща от n - избираме всичко, т.е. X"
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, което има комбинаторен смисъл на "има n начина да изберем 1 нещо от n"и "има n начина да изберем $n-1$ неща от n"

- изобщо, при $m \leq n$, е в сила $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
- при фиксиран горен индекс n, сумата от всички биномни коефициенти е 2^n:
  $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{n}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n*(n-1)}{2}} + ... + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n*(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{n}} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} =$
  2^n, което има комбинаторен смисъл на "дясната страна брои всички подмножества на n-елементно множество - те са 2^n, а лявата страна брои разбиването на всички подмножества по мощности". Това се извежда с броене на характеристичните вектори с дължина n, които са $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$.
- ако $n, m \geq 1$ е в сила $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ - триъгърник на Паскал

9.3 Теорема на Нютон

Теорема. $\forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * x^k * y^{n-k}$

Доказателство. Лявата страна е $\underbrace{(x+y)*(x+y)*...*(x+y)*(x+y)}_{n \text{ множителя}}$
След отварянето на скобите, ще се получи сума от 2^n събираеми от вида $x^k * y^{n-k}$ по всички $k \in \{0, ..., n\}$. Разбиваме множеството от събираемите в $n+1$ множества по степента на x(която диктува степента на y): $x^0 * y^n, x^1 * y^{n-1}, ..., x^n * y^0$. Коефициентът пред $x^k * y^{n-k}$ е броят на появите това събираемо, като съобразяваме, че x^k "идва"от k на брой множителя (останалите множители дават y^{n-k}). Тези k множителя можем да изберем от всички n множителя по $\binom{n}{k}$ начина. Примерно, $x^n * y^0$ се появява само веднъж, понеже за него трябва да "дойде"x от всеки множител, $x^{n-1} * y^1$ се появява точно n пъти, защото от един множител "идва"y, а от останалите - x, като този един множител може да изберем по n начина и т.н. □

Обобщение: $(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n} \binom{n!}{n_1!n_2!...n_k!} x_1^{n_1}...x_k^{n_k}$ Изразът $\binom{n!}{n_1!...n_k!}$, където $n_1+...+n_k = n$, има същата стойност като $\binom{n}{n_1} * \binom{n-n_1}{n_2} * ... * \binom{n-n_1-...-n_{k-1}}{n_k}$ и се нарича мултиномен коефициент. Той брои пермутации с повторения (на мултимножество).

9.4 Доказателства на комбинаторни тъждества с комбинаторни разсъждения

Пример. *Ще докажем, че* $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$
Задачата се свежда до "по колко начина можем да сложим p *единици и* q *нули в редица?".*
Общо $p+q$ *булеви цифри. Това са характеристичните вектори с дължина* $p+q$ *и точно* p *единици. Те съответстват биективно на* p*-елементните подмножества на* $p+q$*-елементно множество. Тези подмножества са* $\binom{p+q}{p}$*. Тогава и въпросните характеристичните вектори са толкова.*

10 Тема 10

10.1 Рекурентни уравнения (РУ) - линейни с константни коефициенти и крайна история – хомогенни и нехомогенни. Примери.

Определение. *Уравнението* $a_n = c_1.a_{n-1} + c_2.a_{n-2} + ... + c_k.a_{n-k}$, *където* $c_1, ..., c_k$ *са (целочислени) константи,* $c_k \neq 0, k = const$, *се нарича линейно (хомогенно) рекурентно уравнение (ЛХРУ) от k-ти ред с константни коефициенти и крайна история.*

Началните условия са k на брой - $a_1 = q_1, ..., a_k = q_k$, където q_i са цели числа.

Бележка. *Уравнението*

$$T_n = \begin{cases} n * T_{n-1} & \text{ако } n \geq 1 \\ 1 & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

не е с константни коефициенти.
Уравнението

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} + S_{n-2} + ... + S_1 + S_0 & \text{ако } n \geq 1 \\ 1 & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

не е с крайна история.

Такива уравнения не могат да се решат със следния алгоритъм:

1. Конструираме характеристичното у-е на даденото ни ЛХРУ
   - заместваме a_i с x^i за $i \in n-k, ..., n$ и получаваме $x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_{k-1}x^{n-k+1} + c_kx^{n-k}$
   - делим на x^{n-k} и получаваме $x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + ... + c_{k-1}x + c_k$

Съгласно основната теорема на алгебрата, характеристичното у-е има k на брой, не непременно различни, комплексни корени.
Нека $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}_M$ е мултимножеството от корените.

- ако корените са два по два различни, то общото решение е $a_n = A_1\alpha_1^n + ... + A_k\alpha_k^n$, където $A_1, ..., A_k$ са неизвестни константи.
  - ако началните условия не са дадени, то не можем да намерим тези константи и решението именно горното у-е

– ако началните условия са дадени (k на брой), то можем да намерим $A_1, ..., A_k$, замествайки n със стойностите на аргумента в началните условия. Получаваме система от k линейни уравнения с k неизвестни. Решаваме системата, намираме константите и заместваме в горното у-е.

- нека различните корени са $\beta_1, ..., \beta_t$ за $t \leq k$. Нека β_i има кратност r_i за $1 \leq i \leq t$, като $r_1 + ... + r_t = k$.
  Тогава общото решение е

$$\begin{aligned} a_n = & A_{1,1}\beta_1^n + A_{1,2}n\beta_1^n + ... + A_{1,r_1}n^{r_1-1}\beta_1^n + \\ & A_{2,1}\beta_2^n + A_{2,2}n\beta_2^n + ... + A_{2,r_2}n^{r_2-1}\beta_2^n + \\ & ... + \\ & A_{t,1}\beta_t^n + A_{t,2}n\beta_1^n + ... + A_{t,r_1}n^{r_t-1}\beta_t^n \end{aligned}$$

Двойно индексираните константи $A_{i,j}$ са точно k на брой и може да бъдат намерени от началните условия.

Пример. *Нека* $a_n = 12a_{n-1} - 51a_{n-2} + 92a_{n-3} - 60a_{n-4}$ *с начални условия* $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 6$.
Характеристичното у-е е $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0 \iff (x - 2)^2(x - 3)(x - 5) = 0$.
Мултимножеството от корените му е $\{2, 2, 3, 5\}_M$.
Тогава общото му решение е $a_n = A2^n + Bn2^n + C3^n + D5^n$ *за константите* A, B, C, D.
Константите получаваме от началните условия:

$$\begin{aligned} a_1 &= A.2^1 + B.1.2^1 + C.3^1 + D.5^1 \\ a_2 &= A.2^2 + B.2.2^2 + C.3^2 + D.5^2 \\ a_3 &= A.2^3 + B.3.2^3 + C.3^3 + D.5^3 \\ a_4 &= A.2^4 + B.4.2^4 + C.3^4 + D.5^4 \end{aligned}$$

Знаем началните условия и ги заместваме:

$$\begin{aligned} 1 &= 2.A + 2.B + 3.C + 5.D \\ 2 &= 4.A + 8.B + 9.C + 25.D \\ 4 &= 8.A + 24.B + 27.C + 125.D \\ 6 &= 16.A + 64.B + 81.C + 625.D \end{aligned}$$

Получаваме, че константите са $A = \frac{2}{9}, B = \frac{-1}{6}, C = \frac{1}{3}, D = \frac{-1}{45}$.
Тогава решението е $a_n = \frac{2^{n+1}}{9} - \frac{n.2^n}{6} + 3^{n-1} - \frac{5^n}{45}$.

Определение. *Уравнението*
$a_n = \underbrace{c_1.a_{n-1} + c_2.a_{n-2} + ... + c_k.a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n).b_1^n + ... + p_l(n).b_l^n}_{\text{нехомогенна част}}$,
където $k, l, c_1, ..., c_k$ *са константи,* $b_1, ..., b_l$ *са две по две различни константи, а* $p_1(n), ..., p_l(n)$ *са полиноми на* n*, се нарича линейно (нехомогенно) рекурентно уравнение (ЛНХРУ) от* k*-ти ред с константни коефициенти и крайна история.*

Алгоритъм за решаване:

1. Съставя са характеристичното у-е само от хомогенната част и се намира мултимножеството X от корените му.

2. Нека Y е мултимножеството от числата $b_1, ..., b_l$, всяко от които има кратност колкото е степента на съответния полином + 1

3. Обединяваме мултимножествата X и Y и съставяме общото решение спрямо това обединение

Неизвестните константи се намират чрез началните условия, които са k на брой. Обединението на X и Y има мощност $k+l$, така че неизвестните константи са $k + l$ на брой. За да ги намерим си правим още l начални условия от даденото ни първоначално уравнение.

Пример. *Нека*

$$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n & \text{ако } n \geq 1 \\ 1 & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

Тогава $L(n) = \underbrace{L(n-1)}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{n^1.1^n}_{\text{нехомогенна част}}$

1. *Характеристичното у-е е* $x - 1 = 0$ *и мултимножеството от корените е* $X = \{1\}_M$

2. *От нехомогенната част образуваме мултимножеството* $Y = \{1, 1\}_M$*, което съдържа 1-ци, защото основата на експонентата е 1-ца, а броят им е две, защото степента на полинома е едно + още 1.*

3. *Обединението на* X *и* Y *е* $\{1, 1, 1\}_M$

Общото решение е $L(n) = A.1^n + B.n.1^n + C.n^2.1^n = A + B.n + C.n^2$.
За да намерим A, B *и* C *трябва да направим още 2 начални условия, освен даденото, т.е.* $L(1) = 2, L(2) = 4$ *и съставяме системата:*

$$\begin{aligned} 1 &= A + B.0 + C.0^2 = A \\ 2 &= A + B.1 + C.1^2 = A + B + C \\ 4 &= A + B.2 + C.4 \end{aligned}$$

Намираме, че $A = 1, B = C = \frac{1}{2}$.
Тогава $L(n) = 1 + \frac{n+n^2}{2} = 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$.

10.2 Примери за броене в комбинаториката чрез рекурентни уравнения

11 Тема 11

11.1 Крайни мултиграфи и графи – ориентирани и неориентирани. Дефиниции

Определение. *Краен неориентиран граф е наредена двойка $G = (V, E)$, където $V = \{v_1, ..., v_n\}$ е крайно непразно множество от върхове, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ е крайно множество от ребра, като $E \subseteq \{X \subseteq V : |X| = 2\}$.*

Определение. *Краен неориентиран мултиграф е наредена тройка $G = (V, E, f_G)$, където $V = \{v_1, ..., v_n\}$ е крайно непразно множество от върхове, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ е крайно множество от ребра, $V \cap E = \emptyset$ и $f_G : E \to \{X \subseteq V : |X| = 2\}$ е свързваща функция.*

Определение. *Краен ориентиран граф е наредена двойка $G = (V, E)$, където $V = \{v_1, ..., v_n\}$ е крайно непразно множество от върхове, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ е крайно множество от ребра, като $E \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) : v \in V\}$.*

Определение. *Краен ориентиран мултиграф е наредена тройка $G = (V, E, f_G)$, където $V = \{v_1, ..., v_n\}$ е крайно непразно множество от върхове, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ е крайно множество от ребра, $V \cap E = \emptyset$ и $f_G : E \to V \times V$ е свързваща функция.*

Бележка. *Примери за графи.*

11.2 Полустепени на входа и изхода, маршрути и контури в ориентирани графи

Определение. *Нека $G = (V, E)$е ориентиран граф.*
За всеки връх $v \in V$, входната степен (или полустепен на входа) на v е $|\{e \in E : ve$ край на $e|$, а изходната степен (или полустепен на изхода) на v е $|\{e \in E : ve$ начало на $e|$. Бележим с $d^-(v)$ входната степен, а с $d^+(v)$ изходната степен за $v \in V$.

Определение. *Ориентиран път (маршрут) в граф G наричаме всяка алтернираща редица от върхове и ребра за някое $t \geq 0$:*
$p = (v_{i_0}, e_{k_0}, v_{i_1}, e_{k_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, v_{i_t})$, където $v_{i_p} \in V$ за $0 \leq p \leq t, e_{k_p} \in E$ за $0 \leq p \leq t-1$ и е изпълнено, че $f_G(e_{k_p}) = (v_{i_p}, v_{i_{p+1}})$ за $0 \leq p \leq t-1$. Казваме, че p е път от v_{i_0} до v_{i_t}.

Определение. *Контур е маршрут, в който първият и последният връх съвпадат.*

11.3 Степени, пътища и цикли в неориентирани графи. Лема за ръкостисканията

Определение. *Нека $G = (V, E)$е граф.*
Неориентиран път (или само път) в G наричаме всяка алтернираща редица от върхове и ребра за някое $t \geq 0$:
$p = (v_{i_0}, e_{k_0}, v_{i_1}, e_{k_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, v_{i_t})$, *където* $v_{i_p} \in V$ *за* $0 \leq p \leq t, e_{k_p} \in E$ *за* $0 \leq p \leq t-1$ *и е изпълнено, че* $e_{k_p} = (v_{i_p}, v_{i_{p+1}})$ *за* $0 \leq p \leq t-1$.

Бележка. *Връх v_{i_0} се нарича начало на пътя, а връх v_{i_t} се нарича край на пътя. Останалите върхове са вътрешните върхове на пътя.*
Дължината на пътя е броят на ребрата в него. Бележим я с $|p|$. Ако всички елементи на пътя - върхове и ребра са уникални, казваме, че p е прост (не)ориентиран път.

Определение. *Нека $G = (V, E)$е граф и p е път в него, като:*
$p = (v_{i_0}, e_{k_0}, v_{i_1}, e_{k_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, v_{i_t})$. *Казваме, че p е цикъл, ако $v_{i_0} = v_{i_t}$.*
Казваме, че p е прост цикъл, ако p е цикъл с поне едно ребро и освен това - всички елементи са уникални освен $v_{i_0} = v_{i_t}$.

Лема. *Нека $G = (V, E)$е граф с поне 2 върха. Тогава съществуват поне 2 различни върха $u, v \in V$, такива че $d(u) = d(v)$.*

Доказателство. Знаем, че за всеки връх $\forall v \in V : d(v) \in \{0, ..., n-1\}$. Това са n различни стойности.
Да допуснем, че в графа има поне един изолиран връх.
Тогава редицата от степените на върховете в графа започва с 0. Също така няма връх от степен $n-1$ - ако има такъв, то той е съсед на всички останали върхове (включително на изолираните), което противоречи с допускането ни (че имаме изолирани върхове). Показахме, че няма връх от степен $n-1$.
Тогава $\forall v \in V : d(v) \in \{0, ..., n-2\}$, което са $n-1$ на брой стойности, а ние имаме n върха.
Тогава от принципа на Дирихле следва, че има поне 2 върха u и v, такива че $d(u) = d(v)$. □

11.4 Теорема за броя на маршрутите със зададена дължина в крайни ориентирани мултиграфи

Теорема. *За всеки ориентиран мултиграф G и за всяко $k \geq 0$ е вярно, че $M^k[i, j]$ е броят на (ориентираните) пътища с дължина k от i до j в G, където M е матрицата на съседство на G.*

Доказателство. С индукция по k.
База: $k = 0$
Тогава M^0 е единичната матрица с единици по главния диагонал и нули извън него.
Тогава за всички $i, j \in \{1, ..., n\}$, $M^0[i, j]$ е броят на пътищата с дължина 0 от i до j:

- ако $i \neq j$, такива пътища няма, което точно отговаря на факта, че $M^0[i, j] = 0$
- ако $i = j$, има точно 1 такъв път, а именно самият връх i, което точно отговаря на факта, че $M^0[i, j] = M^0[i, i] = 1$

Индукционно предположение: да допуснем, че твърдението е вярно за стойност на аргумента k, т.е. $M^k[i, j]$ е броят на пътищата с дължина k от i до j.
Индукционна стъпка: ще докажем твърдението за стойност на аргумента $k + 1$.
Нека с $T^l_{i,j}$ означим множеството от пътищата от i до j с дължина $l \geq 0$.
Ще докажем, че $M^k[i, j] = |T^k_{i,j}|$ влече $M^{k+1}[i, j] = |T^{k+1}_{i,j}|$ за всички $i, j \in \{1, ..., n\}$.
(От къде? Защо?) За лявата страна имаме, че $M^{k+1}[i, j] = \sum_{1 \leq s \leq n} M^k[i, s].M[s, j]$ (1)
Да разгледаме дясната страна $|T^{k+1}_{i,j}|$.
Тъй като $k + 1 \geq 1$, всеки път от множеството $T^{k+1}_{i,j}$ има предпоследен връх, при това точно един. Тогава $T^{k+1}_{i,j}$ се разбива на n множества (може да са празни) по предпоследен връх.
Нека с $W^l_{i,j,s}$ означим множеството от пътищата от i до j с предпоследен връх s и дължина $l \geq 1$ за $i, j, s \in \{1, ..., n\}$. Така $T^{k+1}_{i,j}$ има разбиване $\{W^{k+1}_{i,j,1}, W^{k+1}_{i,j,2}, ..., W^{k+1}_{i,j,n}$, като някои (или всички) дялове на това разбиване може да са празни.
Съгласно принципа на разбиването следва, че $|T^{k+1}_{i,j}| = \sum_{1 \leq s \leq n} |W^{k+1}_{i,j,s}|$ (2)

Илюстрация на разбиването на множеството $W^{k+1}_{i,j,s}$:

Тогава $W^{k+1}_{i,j,s}$ се явява като Декартово произведение на $T^k_{i,j}$ и множеството от ребрата от s до j. Така всеки път от $W^{k+1}_{i,j,s}$ се явява комбинация на един път от $T^k_{i,s}$ и едно ребро от s до j. Тоест броят на начините да стигнем от i до j с точно $k + 1$ ребра и s за предпоследен връх е произведението от:

- броя на начините да стигнем от i до s с точно k ребра

- броя на начините да стигнем от s до j с точно 1 ребро

Тогава броят на ребрата от s до j е $M[s,j]$.
Следователно $|W^{k+1}_{i,j,s}| = |T^k_{i,s}|.M[s,j]$. (3)
От (2) и (3) следва, че $|T^{k+1}_{i,j}| = \sum_{1\leq s\leq n} |T^k_{i,s}|.M[s,j]$. (4)
От И.П. имаме, че $|T^k_{i,s}| = M^k[i,s]$.
Тогава $|T^{k+1}_{i,j}| = \sum_{1\leq s\leq n} M^k[i,s].M[s,j] = M^{k+1}[i,j]$. □

12 Тема 12

12.1 Подграфи. Индуцирани подграфи

12.2 Свързаност и свързани компоненти в неориентирани графи

12.3 Силна и слаба свързаност, силно свързани компоненти в ориентирани графи

12.4 Оцветяване на графи

Нека $G = (V, E)$е граф.

Определение. *Оцветяване на върховете на G (или просто оцветяване на G) е функция $f : V \to C$, където C е множество от цветове и е изпълнено, че $\forall (u, v) \in E : f(u) \neq f(v)$.*

Бележка. *Има смисъл оцветяването да е сюрекция, за да няма неизползвани цветове.*

Определение. *Минималният брой цветове, с които можем да оцветим даден граф G, се нарича хроматично число на G (бележим го с $\chi(G)$).*

Определение. *Оцветяване на ребрата на G е ф-я $h : E \to C$, където C е множество от цветове и е изпълнено, че $\forall e \in E \forall e' \in J(e) : h(e) \neq h(e')$.*

Определение. *Минималният брой цветове, с които можем да оцветим ребрата на даден граф G, се нарича хроматичен индекс на G и се бележи с $\chi^{'}(G)$.*

12.5 Планарност на графи

Определение. *Планарно вписване на мултиграф е всяка наредена двойка (U, E), където $U = \{u_1, ..., u_n\}$ е непразно множество от точки в равнината, наречени планарни върхове, а $E = \{s1, ..., s_m\}$ е множество от отворени или затворени криви в равнината, наречени планарни ребра, като трябва да бъдат изпълнени следните условия:*

- *за всяко планарно ребра, ако е отворена крива, то двата му края съвпадат с точно два от планарните върхове, а ако е затворена крива, то точно една точка от него съвпада с някой планарен връх*

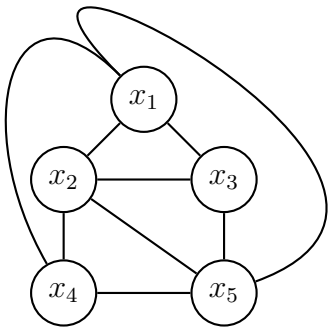
- *планарните ребра не се пресичат с изключение на това, че може да имат общи планарни върхове*

Определение. *Нека $G = (V, E)$е мултиграф. G е планарен тогава и само тогава, когато съществува планарно вписване на мултиграф (U, S) такова, че:*

- *съществува биекция $\Phi : V \to U$*
- *съществува биекция $\Psi : E \to S$, такава че $\forall e \in E$:*
  - *ако реброто е не е примка и е инцидентно с върховете x и y, то $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ са краищата на $\Psi(e)$ в равнината.*
  - *ако реброто е е примка, инцидентна с върха x, то единственият планарен връх, принадлежащ на $\Psi(e)$, е $\Phi(x)$*
- *за всеки две различни планарни ребра е изпълнено, че нямат общи точки с изключение на общи планарни върхове ???*

Определение. *Нека G е планарен граф и B е някое негово планарно вписване. Премахването на всички всички планарни върхове и ребра от равнината води до разпадането ѝ на свързани райони, които наричаме лицата на B. Точно едно от лицата е неограничено - външното, а останалите са вътрешните лица.*

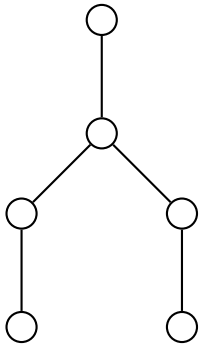
Пример. *Например, следното планарно вписване на K_5 – е има лица $f_1, ..., f_6$. Външното лице е f_1:*

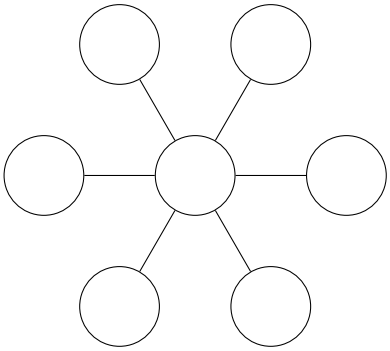


13 Тема 13

13.1 Дървета. Индуктивна и неиндуктивна дефиниция на „дърво“. Еквивалентност на тези две дефиниции

Определение (не-индуктивна дефиниция)**.** *Дърво е всеки граф, който е свързан и ацикличен.*





Определение (индуктивна дефиниция)**.** *Множеството от дърветата се дефинира така:*
База*: всеки тривиален граф е дърво*
Индуктивна стъпка*: ако $T = (V, E)$ е дърво и u е връх в T и w е връх, който не е в T, то $T' = (V \cup \{w\}, \{(u, w)\} \cup E)$ е дърво.*

Лема. *Индуктивна и не-индуктивна дефиниция са еквивалентни.*

Доказателство.
I) Ще докажем, че всеки граф, генериран от индуктивната дефиниция, е свързан и ацикличен.
База: разглеждаме граф $(\{u\}, \emptyset)$, който очевидно е свързан и ацикличен.
Индукционно предположение: допускаме, че $T = (V, E)$ от индуктивната стъпка е свързан и ацикличен.
Индукционна стъпка: за да бъде свързан, трябва за всеки два върха $x, y \in V(T')$ да е изпълнено, че има път между тях. Но $V(T') = V \cup \{w\}$, тогава:

- нито един от x, y не е връх от w. Но тогава е вярно, че $x, y \in V$. Съгласно индуктивното предположение, между всеки два върха в T има път, от което следва, че в T' има път между всеки два върха от V

- точно единият от x и y е връх w. Б.О.О., нека това е връх x. Тогава задължително $y \in V$. Но тогава и y, и w са върхове в T. Съгласно И.П., в T има път p между тях. Тогава p е път между y и u в T', от което следва, че при слепването на p, реброто (u, w) и върха w се получава път между y и x = w в T'.

- x = y = w. Тогава между x и y има тривиален път с дължина 0.

Така доказахме, че T' е свързан.
Нито един връх от T' не може да участва в цикъл, понеже:

- връх w е от степен 1, а всеки връх, който е в цикъл, е от степен поне 2

- останалите върхове на T' са върховете на T, а съгласно И.П. T е ацикличен и добавянето на реброто (u, w) не може да създаде цикъл от върховете на $V(T)$.

Така доказахме, че T' е свързан.
Следователно T' е дърво.
II) Ще докажем, че всяко дърво може да бъде коструирано от процедурата на индуктивната дефиниция.
Нека D е произволно дърво съгласно неиндуктивната дефиниция.
Ако D има точно един връх, то D е може да бъде коструирано от базата на индуктивната дефиниция. В противен случай, в D има поне един висящ връх u_1.
Нека $D_1 = D - u_1$. Ако D_1 има точно един висящ връх, то D_1 може да бъде коструирано от базата на индуктивната дефиниция. В противен случай, в D_1 има поне един висящ връх u_2.
Нека $D_2 = D_1 - u_2$. Ако D_2 има точно един връх, то D_2 може да бъде коструирано от базата на индуктивната дефиниция. И т.н.
При всяко от изтриванията на висящ връх, графът остава свързан и ацикличен, тоест дърво. Следователно има редица от дървета D, D_1, D_2, ..., D_k за някое k. Последователното изтриване на върхове може да се направи само краен брой пъти, защото началното дърво D има краен брой върхове. И така за някое k е вярно, че D има точно един връх. Изтритите върхове са $u_1, ..., u_k$ в реда на триенето. Тогава графът с точно един връх D_k може да бъде коструирано от базата на индуктивната дефиниция, а след това $|V(D)| - 1$ пъти добавяме изтритите върхове в обратния ред на изтриването им, като свързваме всеки от тях към точно този връх, който е бил единственият му съсед точно преди изтриването. Така получаваме началното дърво D. □

13.2 Теореми за: връзката между броя на ребрата и на върховете и за единственост на път между два върха в дърво

Теорема (за единственост на път между два върха)**.** *Граф е дърво тогава и само тогава, когато между всеки два върха има точно един път.*

Доказателство.
$\Rightarrow$) Да разглеждаме произволно дърво T и произволни $u, v \in V(T)$. Ще докажем, че има точно един път $u - v$ път.
От свързаността на T следва, че има $u-v$ път, а от това, че е ацикличен следва, че няма повече от един $u - v$ път.
Да допуснем, че между u и v има поне два пътя p и q. Връх u се явява край и на p, и на q. Разглеждаме p и q като крайни редици от върхове, като търсим първия връх от u нататък, който е различен за p и q. Такъв трябва да има, иначе p и q биха били един и същи път. Б.О.О., нека w е първият връх от u нататък в p, който не се среща в q. Нека a е върхът преди w в посока от u нататък в p, тоест a е последният от u нататък в p, който е общ за p и q. Нека b е първият връх след a в p в посока от u нататък, който е връх и в q. Такъв общ връх трябва да има, понеже p и q имат друг (освен u) общ край, а именно връх v, така че няма как след a, в посока от u нататък, да имат само върхове, които не са общи. Така в p има подпът p' с краища a и b, който не е подпът на q. Аналогично, в q има подпът q' с краища a и b, който не е подпът на p. Единият от p' и q' може да няма вътрешни върхове, но това няма значение. Тогава $p' \cup q'$ е цикъл в T, а в дърветата няма цикли.
Следователно, допускането, че има поне два различни $u-v$ пътя, е грешно.
$\Rightarrow$) Да разглеждаме произволен граф G, в който между всеки два върха има точно един път. Оттук следва, че G е свързан.
Ако допуснем, че в G ива поне един цикъл следва, че в G има поне два върха, между които има два различни пътя, което е невъзвожно спрямо направеното допускане, че между всеки два върха има точни един път.
Тогава допускането, че в G съществува цикъл е погрешно. Следователно G е ацикличен, а оттам и дърво. □

Теорема (за връзката между броя на ребрата и на върховете)**.** *Във всяко дърво е изпълнено, че $m = n - 1$. (n - брой върхове, m - брой ребра).*

Доказателство. (със структурна индукция)
<u>База:</u> разглеждаме граф само с един връх ($n = 1$) без ребра ($m = 0$).

Индукционно предположение: нека твърдението е изпълнено за дървото T, т.е. $|E(T)| = |V(T)| - 1$
Индукционна стъпка: ще докажем твърдението за дървото T', т.е. $|E(T')| = |V(T')| - 1$.
Имаме, че $|E(T') = |E(T)| + 1$ и $|V(T') = |V(T)| + 1$, откъдето получаваме, че $|E(T)| + 1 = |V(T)| + 1 - 1 \implies |E(T)| = |V(T)| - 1$, което е точно изпълнено за дървото T от И.П. □

13.3 Коренови дървета. Височина и разклоненост на кореновите дървета. Представяния на дървета

13.4 Покриващо дърво. Теорема за съществуване на покриващо дърво

Определение. *Нека $G = (V, E)$ е свързан граф. Покриващо дърво на G е всяко дърво $T = (V, E')$, където $E' \subseteq E$.*

Теорема. *За всеки граф $G = (V, E)$ има поне едно покриващо дърво тогава и само тогава, когато G е свързан.*

Доказателство.
$\Rightarrow$) Ако G има покриващо дърво, то G е свързан, понеже между всеки два върха има път, което влече съществуване на път между тези два върха на G.
$\Leftarrow$) Ако G е свързан, то следният алгоритъм строи покриващо дърво на G:
Вход: свързан граф $G = (\{v_1, ..., v_n\}, E)$
Изход: покриващо дърво на G

1. Ако G няма цикли, върни G и край
2. В противен случай, нека c е произволен цикъл в G и e е произволно ръбро от c
3. Правим $G \leftarrow G - e$ и отиваме на 1)

(Д-во за коректност?) □

14 Тема 14

Алгоритмична схема за обхождане на графи.
Вход: ориентиран мултиграф G
Променливи: м-во от върхове S, връх x и булев масив $visited[1, ..., n]$
Инициализирай $visited$ с $FALSE$: $S \leftarrow \{1\}, visited[1] \leftarrow TRUE$

1. Ако $S = \emptyset$, прекрати алгоритъма
2. В противен случай, извади елемент от S и го сложи в x
3. За всяко ребро (x, y), ако $visited[y] = FALSE$:
   (а) то слагаме y в S и правим $visited[y] \leftarrow TRUE$
   (б) иначе, прескачаме y
4. Отиваме на 1)

14.1 Обхождания на графи – в дълбочина и ширина. Дърво на обхождането

Breadth-First Search (BFS) е алгоритъм за обхождане на графи в ширина. Изграден е от алгоритмичната схема за обхождане на графи, като м-вото S е реализирано чрез абстрактен тип данни опашка (FIFO). Алгоритъвът започва от даден стартов връх, обхожда неговите съседи, като при това обхожда ребрата, с които ги достига, после обхожда съседите на съседите (различни от стартовия връх), и т.н., обхождайки върховете по нарастване на разстоянията от стартовия връх.

BFS изгражда така нареченото дърво на обхождане. Ако графът е неориентиран, то това е покриващо дърво за свързаната компонента, съдържаща стартовия връх, което е кореново дърво с корен стартовия връх, а ребро e от графа влиза в дървото тогава и само тогава, когато BFS открива непосетен връх чрез e. С други думи, дървото на обхождане показва как BFS е откривал непосетени върхове. Това дърво касае само обхождането на върховете. Всяко ребро бива обхождано от BFS, но не всяко ребро влиза в дървото на обхождане.

Depth-First Search (DFS) е алгоритъм за обхождане за на графи (и по-специално дървета) в дълбочина. При него се избира даден връх, който се обозначава като корен (връх без предшественици) и обхождането започва от него. Последователно се посещават всички следващи върхове до достигането на връх без наследници (листо), след което се осъществява търсене с връщане назад до достигане на нова крайна точка или цялостно реализирано обхождане - към корена.

14.2 Ойлерови/Хамилтонови обхождания/графи

Определение. *Нека G е неориентиран свързан мултиграф.*
Ойлеров цикъл в G е цикъл (не непременно прост), който съдържа всяко ребро точно веднъж.
Ойлеров път е в G е път (не непременно прост), който съдържа всяко ребро точно веднъж.
Граф G е Ойлеров, ако има Ойлеров цикъл.

Определение. *Нека е даден граф G.*
Хамилтонов цикъл в G е всеки цикъл в G, който съдържа всички върхове на G.
Хамилтонов път в G е всеки път в G, който съдържа всички върхове на G.
Граф G е Хамилтонов, ако има Хамилтонов цикъл.

Бележка. *Няма как в един граф едновременно да има Ойлеров път и Ойлеров цикъл.*
Ойлеров път (НДУ: графът да е свързан и всички върхове да имат четна степен с изключение на два от тях)
$\neq$
Ойлеров цикъл (НДУ: графът да е свързан и всички върхове да са с четна степен)

14.3 Теореми за съществуване на Ойлеров цикъл и Ойлеров път в неориентиран и ориентиран мултиграф

Теорема (за съществуване на Ойлеров цикъл в неориентиран свързан мултиграф)**.** *Неориентиран свързан мултиграф G има Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато всеки връх има четна степен.*

Доказателство.
$\Rightarrow$) Да допуснем, че G има Ойлеров цикъл.
Да разгледаме произволен връх $w \in V(G)$. Тогава $w \in V(c)$, където c е Ойлеров цикъл в G.

1. Ако w няма примки, то няма как два съседни върха в c да са w. Следователно, на всяка поява на w в c съответстват точно 2 ребра - съседните елементи на w в цикъла - като за всеки 2 различни появи на w, двете бройки ребра нямат общ елемент. Следователно, множеството от всички тези двойки ребра, върху всички появи на

w в c, е точно $J(w)$. Нека w се появява точно t пъти в c. Тогава $|J(w)| = 2.t$. От $d(w) = |J(w)|$ следва, че степента на w е четно число.

2. Нека w има q примки $e_1, ..., e_q$ и w се поява точно t пъти в c. Тогава $t \geq q$. При наличието на примки на w има съседни появи на w в c, тоест в c има точно q подредици $we_iw, 1 \leq i \leq q$, като някои от тези подредици може да имат общ край w. Всяка такава триелеминтна подредица, отговаряща на дадена примка, има принос $+2$ към степента на w. Максималните по включване подредици са от вида $we_{j_1}, ..., e_{j_r}w$, където $e_{j_1}, ..., e_{j_r} \in \{e_1, ..., e_q\}$, са точно $t - q$ на брой. Нека E' е м-вото от всички ребра, инцидентни с w, които не са примки. Тъй като теци максимални по включване подредици никога не са съседни, тоест между всеки две от тях в c има поне един връх, който не е w, като $|E'| = 2.(t - q)$. Но $d(w) = |E'| + 2.q = 2.(t - q) + 2.q = 2.t$, което е четно число.

$\Leftarrow$) Да допуснем, че всеки връх в G е от четна степен.
Ще докажем, че съществува Ойлеров цикъл конструктивно чрез следния алгоритъм (на Hierholtzer):
Вход: свързан мултиграф G с поне едно ребро
Изход: Ойлеров цикъл c в G
Променливи: w и x - върхове, s - цикъл

1. $c \leftarrow \epsilon$ (празната редица). Маркирай всички ребра на G като неизползвани
2. Избери произволен връх a, инцидентен с неизползвано ребро
3. Присвои $x \leftarrow a, w \leftarrow a, s \leftarrow a$
4. Ако w има поне едно инцидентно неизползвано ребро $e = (w, v)$:
   (а) присвои $s \leftarrow s, e, v$ и маркирай e като използвано
   (б) присвои $w \leftarrow v$ и иди на 4)
5. В противен случай, вмъкни s в c, тоест:
   - ако c е празен, то присвои $c \leftarrow s$
   - в противен случай c съдържа поне една поява на върха y, който е начало и край на s. Замени коя да е поява на y в c с редицата s

6. Ако няма неизползвани ребра, върни c и прекрати алгоритъма

7. В противен случай, избери произволен връх b от c, инцидентен с неизползвано ребро

8. Присвои $x \leftarrow b, w \leftarrow b, s \leftarrow b$ и иди на 4)

□

Бележка. *Идеята на алгоритъма е следната - в началото е неизползвано, а с е празен (празната редица). Използваме временен цикъл s и текущ връх w. Започвайки от произволен връх x, който е инцидентен с поне едно неизползвано ребро, инициализираме $w \leftarrow x, s \leftarrow x$. После изпълняваме, докато е възможно, следното: избираме произволно неизползвано ребро $e \in J(w)$, маркираме е като използвано и "преминаваме"през е, тоест, ако другият край на е е v, добавяме е и v към s като $s \leftarrow s, e, v$, текущият връх w става v, тоест правим $w \leftarrow v$. Правим това, докато можем, а не докато стигнем до текущ връх w, който няма инцидентно необходено ребро. Тъй като ребрата са краен брой и ние променяме статусите на ребрата от неизползвани в използвани, то рано или късно ще се окажем във връх w, който няма неизползвани инцидентни ребра. В този момент wе точно този връх x, от който започнахме обхождането. В този момент s е цикъл. Вмъкваме s в c. Ако всички ребра са използвани, връщаме c и терминираме алгоритъма. В противен случай продължаваме по следния начин - тъй като G е свързан, в c задължително има връх b, който е инцидентен с поне едно необходено ребро. Тогава присвояваме $w \leftarrow b, s \leftarrow b$ и отново изпълняваме итерираното добавяне на ребра и върхове към s, докато можем.*

Теорема (за съществуване на Ойлеров път в неориентиран свързан мултиграф)**.** *Свързан неориентиран мултиграф G има Ойлеров път, който не е цикъл, тогава и само тогава, когато точно 2 върха са от нечетна степен.*

Доказателство.
$\Rightarrow$) Нека G има път p, който съдържа всяко ребро точно веднъж и има различни краища u и v. Ще покажем, че $d(u)$ и $d(v)$ са нечетни, а всички останали върхове имат четни степени.
Имаме $p = u, ..., v$. Добавяме едно ново ребро e между u и v, получавайки мултиграф G'. Тогава G' има Ойлеров цикъл c, състоящ се от p и новото ребро e, т.е. $c = p, e, u$. Тогава всички върхове в G' са от четна степен. Имаме, че $d_{G'}(u) = d_G(u) + 1, d_{G'}(v) = d_G(v) + 1$ и $\forall x \in V(G) \setminus \{u, v\} : d_{G'}(x) = d_G(x)$, откъдето следва, че $d_G(u)$ и $d_G(v)$ са

нечетни, а останалите върхове в G са с четни степени.
$\Leftarrow$) Нека в G има точно два върха от нечетна степен. Ще покажем, че в G има Ойлеров $u - v$ път.
Добавяме едно ново ребро e между u и v, получавайки мултиграф G''. Тогава в G'' всички върхове са от четна степен, откъдето следва, че G'' има Ойлеров цикъл c. Изтриваме e от c и получаваме Ойлеров $u - v$ път. □

Теорема (за съществуване на Ойлеров цикъл в ориентиран свързан мултиграф)**.** *Краен ориентиран свързан мултиграф $G = (V, E, f_G)$ е Ойлеров тогава и само тогава, когато за всеки връх полустепента на входа и изхода съвпадат.*

Доказателство. (???) Нека ребрата на G образуват Ойлеров цикъл. Тогава за всеки връх полустепента на входа и изхода съвпадат, защото графът е Ойлеров, а ако не съвпадат, то няма да могат да се обходят всички ребра. □

Теорема (за съществуване на Ойлеров път в ориентиран свързан мултиграф)**.** *Краен ориентиран свързан мултиграф $G = (V, E, f_G)$ съдържа Ойлеров път тогава и само тогава, когато само за два от върховете му полустепените на входа и изхода не съвпадат, като в единия връх полустепента на изхода е с единица по-голяма от полустепента на входа, а при другия обратно.*

Доказателство. Нека ребрата на G образуват Ойлеров път от v_i до v_j. Добавяме реброто $e \notin E$ и додефинираме $f_{G'}(e) = (v_i, v_j)$. Пътят се превръща в Ойлеров цикъл за новополучения мултиграф G' и следователно в него всички върхове имат еднаква полустепен на входа и изхода. Добавянето на реброто (v_i, v_j) е увеличило с 1 само полустепента на изхода на v_j и полустепента на входа на v_i. Следователно в G всички върхове имат еднаква полустепен на входа и изхода, освен два от върховете, за които единия има с единица по-голяма полустепен на входа отколкото на изхода, а при другия обратно. □

14.4 Бележки

15 Тема 15

15.1 Тегловни графи. Минимално покриващо дърво на тегловен граф. МПД свойство.

Определение. *Тегловен ориентиран мултиграф е наредена четворка $G = (V, E, f_G, w)$, където V е непразно множество от върхове, E е множество от ребра, $V \cap E = \emptyset$, $f_G : E \to V \times V$ е свързваща функция и $w : E \to \mathbb{R}$ е тегловната функция.*

Бележка. *Стойността $w(e)$ за $e \in E$, наричаме цена или тегло на реброто e.*
Цена на покриващо дърво $T = (V, E'), E' \subseteq E$, е сумата $w(T) = \sum_{e \in E'} w(e)$

Определение. *Покриващото дърво T на G, наричаме минимално (максимално), ако $w(T) \leq w(T')$ (съответно $w(T') \geq w(T)$) за всяко друго покриващо дърво T' на G.*

Теорема (МПД-свойство)**.** *Нека $G = (V, E)$е свързан граф с тегловна функция $w : E \to \mathbb{R}$ и $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ е $e = \{u, v\} \in E$ е такова, че $u \in U, v \in V \setminus U$ и измежду всички ребра $e' = \{u', v'\}$ за $u' \in U, v' \in V \setminus U$, реброто е е с най-ниска цена, т.е. $w(e) \leq w(e')$. Тогава G има минимално покриващо дърво, в което участва e.*

Доказателство. Нека $D(V, E_0)$ е минимално покриващо дърво. Да допуснем, че e не участва в E_0. Тогава в D има път от u до v - $u = u_0, u_1, ..., u_k = v$. В този път участва поне едно ребро $e' = \{u_i, u_{i+1}\}$ такова, че $u_i \in U$ и $u_{i+1} \in V \setminus U$. Така в графа $D' = (V, E_0 \cup \{e\})$ има цикъл $v, u = u_0, u_1, ..., u_k = v$. Тогава графът $D'' = (V, (E_0 \cup \{e\}) \setminus \{e'\})$ е свързан и има покриващо дърво V, E_1, където $e \in E_1 \subseteq (E_0 \setminus \{e\}) \setminus \{e'\}$. По условие $w(e) \leq w(e')$, следователно:

$$\sum_{e \in E_1} w(e) \leq \sum_{e \in (E_0 \cup \{e\}) \setminus \{e'\}} w(e) \leq \sum_{e \in E_0} w(e)$$

□

15.2 Алгоритми на Прим и Крускал. Коректност на тези алгоритми.

Алгоритъм (на Прим)**.** *Алгоритъмът на Прим строи МПД на G.*
Вход: свързан граф $G = (V, E)$ и ф-я $w : E \to \mathbb{R}$, задаваща тегла на ребрата му
Изход: МПД $D(V, E')$ с корен зададен връх $r \in V$ на G

1. *Построяваме дървото* $D_0(V_0, E_0), V_0 = \{r\}, E_0 = \emptyset, k = 0$

2. *Нека сме построили* $D_k(V_k, E_k)$. *Търсим реброто* $e = (v_i, v_j), v_i \in V_k, v_j \in V \backslash V_k$ *с минимално тегло и построяваме* $D_{k+1}(V_{k+1}, E_{k+1}), V_{k+1} = V_k \cup \{v_j\}, E_{k+1} = E_k \cup \{e\}, k = k + 1$

3. *Ако* $V_k = V$, *то полученото дърво* $D(V, E'), E' = E_k$ *е оптималното и терминираме алгоритъма, иначе отиваме на 2).*

Д-во за коректност??? За първата стъпка на алгоритъма избираме $U = \{r\}$. Тогава трябва да изберем най-лекото ребро, излизащо от r и алгоритъмът прави точно това. Щом избраното ребро на тази стъпка може да участва в МПД, значи то образува сигурно за G м-во, а от друга страна е дърво - началото на бъдещото МПД. От тук нататък, нека на всяка стъпка избираме за м-во U върховете V_i на построената до момента част от МПД, а за A - участващите в него ребра E_i. Тогава най-лекото ребро от U към $V \setminus U$ е сигурно за $A = E_i$ и може да продължим с него построяването на МПД. Това гарантира, че построеното от алгоритъма дърво е минимално. □

Алгоритъм (на Крускал)**.** *Алгоритъмът на Крускал строи МПД на* G.
Вход:свързан граф $G = (V, E)$ *и ф-я* $w : E \to \mathbb{R}$, *задаваща тегла на ребрата му*
Изход: МПД $D = (V, E')$ *на* G

1. *Сортираме ребрата на* G *в нарастващ ред по цената им и нека този ред е* $e_1, ..., e_m$

2. *От всеки връх* v *на графа образуваме тривиално дърво* $D_V(\{v\}, \emptyset)$.

3. *За всяко ребро* $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2}), i \in I_m$ *правим следното: ако* v_{i_1}, v_{i_2} *са в различни дървета,* $D'(V', E')$ *и* $D''(V'', E'')$ *съответно, съединяваме двете в дървото* $D(V' \cup V'', E' \cup E'' \cup \{(v_{i_1}, v_{i_2})\})$.

Д-во за коректност. Да допуснем, че алгоритъмът не е коректен, т.е. не съществува дърво с по-малка тегловност от този в алгоритъма.
Нека алгоритъмът бърка за реброто e_t, което е било добавено и свърза две дървета T' и T''.

1. Алгоритъмът е взел e_t, защото между двете дървета няма друго ребро с по-малка тежест от полученото $\implies$ противоречие с допускането

2. Ако $w(e_i) \neq w(e_j)$ за всяко $i \neq j \implies$ съществува единствено МПД, но ако има ребра с еднаква тежест, то ще има м-во от дървета.

□

16 Тема 16

16.1 Най-къси пътища в графи.

Определение. *Нека $G = (V, E)$ е свързан граф, а $w : E \to \mathbb{R}^+$ е тегловна ф-я на ребрата с положителни стойности. Претеглена дължина на пътя $p = v_{i_0}, v_{i_1}, ..., v_{i_t}$ в графа ще наричаме*

$$w(p) = \sum_{j=0}^{t-1} w(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$$

Пътят от v_{i_0} до v_{i_t} с най-малка претеглена дължина наричаме най-къс път от v_{i_0} до v_{i_t}.

Бележка. *За тривиалния път от v до v за всяко $v \in V$ имаме претеглена дължина 0.*

16.2 Най-къси пътища в тегловни граф.

Теорема. *Нека $G = (V, E)$ е свързан граф с тегловна ф-я $w(e) = 1, \forall e \in E$ и D е покриващо дърво на G с корен v_0, построено в ширина. Пътищата в D от корена до останалите върхове на G са най-къси пътища от върха v_0 до тези върхове.*

Доказателство. С индукция по нивата $L_i, i = 0, 1, ..., t$ на построеното в ширина дърво ще докажем, че дължината на минималния път от корена v_0 до всеки връх от ниво L_i е точно i.
База: Дължината на най-късия път от v_0 до v_0 е 0 и тъй като той е единствен връх в L_0, то твърдението е в сила за L_0.
Индукционно предположение: Да допуснем верността за нивата $L_0, L_1, ..., L_i$.
Индукционна стъпка Ще покажем, че най-късите пътища от v_0 до всеки връх от L_{i+1} в покриващото дърво са с дължина $i + 1$.
Да допуснем, че $\exists v \in L_{i+1}$, такъв че $v_0, ..., w, v$ е най-къс път от v_0 до v с дължина $k < i + 1$. Тогава $v_0, ..., w$ е най-къс път от v_0 до w и дължината му е $k - 1 < i$. Съгласно И.П. $w \in L_{k-1}$ и алгоритъмът трябваше да постави v в $L_k, k < i + 1$, което е противоречие с $v \in L_{i+1}$. Следвателно, твърдението е в сила и за L_{i+1}. □

16.3 Алгоритъм на Дейкстра.

Алгоритъм (на Дейкстра)**.**
Вход: свързан граф $G = (V, E)$ с тегловна ф-я по ребрата $w : E \to \mathbb{R}^+$ и

начален връх $v_0 \in V$
Изход: дърво на минималните пътища от v_0 *до всички останали върхове в* G

1. *Разширяваме* $w : E \to \mathbb{R}^+$ *до* $w^* : V \times V \to \mathbb{R}^+$
2. *Нека* $dist[0] = 0, part[0] = -1$ *и* $U = \{0\}$, *а* $dist[i] = w^*(0, i)$ *и* $part[i] = 0$ *за* $i \in I_n$
3. *Повтаряме* $n - 1$ *пъти следните стъпки:*
   (а) *Избираме връх* $j \notin U$, *за който* $dist[j]$ *е минимално и* $U = U \cup \{j\}$
   (б) *За всяко* $k \notin U$ *пресмятаме* $dist[k] = min(dist[k], dist[j] + w * (j, k))$. *Ако* min *е* $dist[j] + w * (j, k)$, *тогава* $part[k] = j$.

17 Тема 17

17.1 Булеви функции (на една и две променливи). Съществени и несъществени променливи.

Бележка. $J_2 = \{0,1\}, J_2^n = \underbrace{J_2 \times J_2 \times ... \times J_2}_{n \text{ множителя}}$

Определение. *Булева ф-я на n променливи е всяка ф-я $f : J_2^n \to J_2$ за някое $n \geq 1$.*

Булевите ф-ии на 0 променливи се отъждествяват с булевите константи 0 и 1, защото 0-кратното декартово произведение е (), откъдето домейнът е едноелементен и има точно две булеви ф-ии на 0 променливи.

Определение. *Нека $f = (x_1, ..., x_n)$ е булева ф-я. Променливата x_i се нарича фиктивна (несъществена), ако*

$$f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$$

за всяка стойност на $(n-1)$-вектора $x_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}...x_n$. Променлива, която не е фиктивна, се нарича съществена.

17.2 Формула над множество булеви функции. Булева функция, съответна на дадена формула.

17.3 Свойства на функциите на една и две променливи.

1. Комутативност

$$xy = yx$$
$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \oplus y = y \oplus x$$

2. Асоциативност

$$(xy)z = x(yz)$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

3. Идемпотентност

$$xx = x$$
$$x \oplus x = \tilde{0}$$
$$x \vee x = x$$

4. Свойство на отрицанието

$$x\overline{x} = \tilde{0}$$
$$x \vee \overline{x} = \tilde{1}$$
$$x \oplus \overline{x} = \tilde{1}$$
$$\overline{\overline{x}} = x$$

5. Свойство на константите

$$x\tilde{0} = \tilde{0}$$
$$x\tilde{1} = \tilde{1}$$
$$x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$$
$$x \oplus \tilde{1} = \overline{x}$$
$$x \oplus \tilde{0} = x$$
$$x \vee \tilde{0} = x$$

6. Закони на де Морган

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

17.4 Допълнителни бележки

М-вото от всички булеви ф-ии на n променливи е F_2^n.
М-вото от всички булеви ф-ии е $F_2 = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_2^n$.
Елементите на J_2^n са булевите вектори с дължина n. Записваме ги като $a = (a_1, ..., a_n)$ или $a = a_1 a_2 ... a_n$.
Нека $x, y \in J_2, x = \overline{y}$ тогава и само тогава, когато

18 Тема 18

18.1 Пълни множества БФ. Теорема на Бул.

Определение (неформално). *М-вото $F \subseteq F_2$ е пълно, ако всяка булева ф-я $f \in F_2$ може да бъде представена като композиция на ф-иите от F.*

Определение (формално). *Нека $[F]$ означава затварянето на F спрямо композиция, което може да се дефинира чрез следната индуктивна дефиниция - $[F]$ е най-малкото м-во, такова че:*

- *$[F]$ съдържа всички ф-ии от F*
- *Нека f е ф-я, която се съдържа в $[F]$ и има $n \geq 1$ променливи. Нека идентифицираме някои от променливите на f. Получената ф-я се съдържа в $[F]$.*
- *Нека f и g са произволни ф-ии от $[F]$ и f има $n \geq 1$ променливи. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f също се съдържа в $[F]$ за $1 \leq i \leq n$.*

Така F е пълно м-во, ако $[F] = F_2$.

Теорема (на Бул). *М-вото от 3-те булеви ф-ии конюнкция, дизюнкция и отрицание $F = \{\vee, \wedge, \neg$ е пълно.*

18.2 Пълнота на множество БФ чрез свеждане до известно пълно множество.

Лема. *Нека $F, G \subseteq F_2$ са такива, че $F \subseteq [G]$. Тогава $[F] \subseteq [G]$ и G е пълно м-во.*

Доказателство. Нека $[F] = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, където $F_0 = F \cup \{I_k^n | 1 \leq k \leq n\}$ и $F_{n+1} = F_n \cup \{h | \exists f, g_1, ..., g_k \in F_n (h(x_1, ..., x_n) = f(g_1(x1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n)))\}$.
Нека $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, където $G_0 = G \cup \{I_k^n | 1 \leq k \leq n\}$ и $G_{n+1} = G_n \cup \{h | \exists f, g_1, ..., g_k \in G_n (h(x_1, ..., x_n)) = f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))\}$.
Ще докажем, че $\forall n : F_n \subseteq [G]$.
По условие имаме, че $F \subseteq [G]$, тогава $\{I_k^n | 1 \leq k \leq n\} \in G_0 \subseteq [G]$.
Следователно $F_0 \subseteq [G]$.
Нека $F_n \subseteq [G]$ и $h(x_1, ..., x_n) = f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$, където $f, g_1, ..., g_k \in F_n$.
Съгласно И.П. $f \in [G] = \cup_{n\in\mathbb{N} G_n}$. Следователно съществува m_0, такова че $f \in G_{m_0}$. Аналогично, $g_1, ..., g_k \in [G]$, следователно съществуват

$m_1, ..., m_k$, такива че $g_i \in G_{m_i}$ за $i = 1, ..., k$.
Нека $m = max(m_0, ..., m_k)$. Тогава $f, g_1, ..., g_k \in G_m$ и $h \in G_{m+1}$.
Следователно $h \in [G]$ и $F_{n+1} \subseteq [G]$. □

18.3 Литерали, конюнктивни и дизюнктивни клаузи, съвършена ДНФ.

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи $x_1, ..., x_n, n \geq 1$.

Определение. *Литерал ще наричаме всяко име на променлива (без или с черта отгоре - отрицание). Тези без черта отгоре се наричат положителни, а другите - отрицателни.*

Литералите са формули и като такива са качествено различни от самите променливи, понеже формулите са понятия от синтактичното ниво, а променливите са от по-високото - семантичното ниво.

Пример. *Положителни литерали са x_1, x_2 и т.н., а отрицателни - $\overline{x_1}, \overline{x_3}$ и т.н.*

Определение. *Конюктивна клауза е всяка непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж (без значение като положителна или отрицателна).*

Пример. *Ако $x_1, ..., x_6$ са променливи, то конюнктивни клаузи са*

$$x_1x_3x_5,$$
$$x_1\overline{x_6}$$
$$\overline{x_2x_4x_6}$$

и т.н.

Определение. *Дизюнктивна клауза е всяка непразна формула, която се състои от литерали, свързани чрез дизюнкция, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж (без значение като положителна или отрицателна).*

Пример. *Примери са*

$$x_1 \vee x_2$$
$$x_1 \vee \overline{x_4}$$
$$x_3$$

и т.н.

Определение. *Пълна конюктивна клауза е конюктивна клауза, която съдържа точно n литерала. Тя е непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се среща точно веднъж (без значение като положителна или отрицателна).*

Пример. *Ако $x_1, ..., x_6$ са променливи, то конюнктивни клаузи са*

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$
$$x_1x_2x_3x_4x_5\overline{x_6}$$

и т.н.

Определение. *Пълна дизюнктивна клауза е дизюнктивна клауза, която съдържа точно n литерала. Тя е непразна формула, която се състои литерали, свързани чрез дизюнкция, такива че всяко име на променлива се среща точно веднъж (без значение като положителна или отрицателна).*

Пример. *Примери са*

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5 \vee \overline{x_6}$$
$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6$$

Определение. *Конюктивна нормална форма (КНФ) е формула, която се състои от една или повече различни конюнктивни клаузи, свързани чрез конюнкция. (Ако дизюнктивните клаузи са повече от една, то всяка от тях се огражда в скоби).*

Пример. *Примери са*

$$x_1 \vee x_2 \vee x_6$$
$$(x_1 \vee \overline{x_5})(\overline{x_6} \vee x_1)$$

и т.н.

Определение. *Дизюнктивна нормална форма (ДНФ) е формула, която се състои от една или повече различни конюнктивни клаузи, свързани чрез дизюнкция.*

Пример. *Примери са*

$$x_2\overline{x_3}x_4$$
$$x_1x_4 \vee x_2\overline{x_5} \vee \overline{x_3}$$

и т.н.

Определение. *Съвършена конюктивна нормална форма (СъвКНФ)* е конюктивна нормална форма, в която участват само пълни дизюнктивни клаузи.

Пример. *Примери са*

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{x_6})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5} \vee x_6)$$

и т.н.

Определение. *Съвършена дизюнктивна нормална форма (СъвДНФ)* е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни конюнктивни клаузи.

Пример. *Примери са*

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5}x_6$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5}x_6 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5\overline{x_6}$$

и т.н.

Бележка. *Семантиката на литералите, конюнктивните клаузи, ДНФ и КНФ е следната:*

- *семантиката на всеки положителен литерал x_i е ф-ята идентитет - x_i, а на всеки отрицателен литерал $\overline{x_i}$ е ф-ята отрицание на x_i.*
- *семантиката на всяка конюктивна клауза $\lambda_1\lambda_2...\lambda_k$, където λ_i са литерали за $1 \leq i \leq k$, е композицията на $f_{con}(f_1, f_2, ..., f_k)$, където f_{con} е обобщената конюнкция на k променливи, а f_i е семантиката на λ_i за $1 \leq i \leq k$.*
- *семантиката на всяка дизюнктивна клауза $\lambda_1 \vee \lambda_2 \vee ... \vee \lambda_k$, където λ_i са литерали за $1 \leq i \leq k$, е композицията на $f_{dis}(f_1, f_2, ..., f_k)$, където f_{dis} е обобщената дизюнкция на k променливи, а f_i е семантиката на λ_i за $1 \leq i \leq k$.*
- *семантиката на всяка КНФ $(\phi_1)(\phi_2)...(\phi_k)$, където ϕ_i е дизюнктивна клауза за $1 \leq i \leq k$, е $f_{con}(f_1, f_2, ..., f_k)$, където f_{con} е обобщената конюнкция на k променливи, а f_i е семантиката на ϕ_i за $1 \leq i \leq k$.*
- *семантиката на всяка ДНФ $\phi_1 \vee \phi_2 \vee ... \vee \phi_k$, където ϕ_i е конюктивна клауза за $1 \leq i \leq k$, е $f_{dis}(f_1, f_2, ..., f_k)$, където f_{dis} е обобщената дизюнкция на k променливи, а f_i е семантиката на ϕ_i за $1 \leq i \leq k$.*

18.4 Полиноми на Жегалкин – съществуване, единственост и алгоритми за получаване.

Определение. *Ф-я от вида* $f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_{1 \le i \le n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \oplus ... \oplus a_{12...n} x_1 x_2 ... x_n$, *където* $a_i \in \{0, 1\}$, *наричаме* <u>*полином на Жегалкин*</u>.

0	0
1	1
x	x (или $x \oplus 1$)
xy	xy
$x \vee y$	$xy \oplus x \oplus y$
$x \to y$	$xy \oplus x \oplus 1$
$x \iff y$	$x \oplus y \oplus 1$
$x \oplus y$	$x \oplus y$
$x \mid y$	$xy \oplus 1$
$x \downarrow y$	$xy \oplus x \oplus y \oplus 1$

Теорема (за съществуване и единственост на полинома на Жегалкин)**.** *Всяка булева ф-я може да се представи по единствен начин чрез полинома на Жегалкин (т.е. има единствен полином на Жегалкин).*

Доказателство.
I) Комбинаторно д-во
Нека разгледаме общия вид на полинома на Жегалкин на n променливи:

$$a_0 \oplus \bigoplus_{1 \le i \le n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \oplus ... \oplus a_{12...n} x_1 x_2 ... x_n$$

Различните ф-ии на n аргумента имат различни представяния чрез полинома на Жегалкин, като различните полиноми се получават от различните стойности на коефициентите, чиито брой е:

- 1 - свободния член
- n - коефициента пред линейните събираеми
- $\binom{n}{3}$ - по един коефициент за всяка тройка променливи
- ...
- $\binom{n}{k}$ - по един за всяка k-торка променливи
- ...
- $\binom{n}{n} = 1$ - пред $x_1 x_2 ... x_n$

Общо $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} = 2^n$, съгласно теоремата на Нютон. Всеки коефициент може да има стойност 0 или 1. Общо различните полиноми на Жегалкин са 2^{2^n}, колкото и булевите ф-ии. Следователно всяка булева ф-я има единствен полином на Жегалкин.
II)Да допуснем, че f има две различни представяния:

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= a_0 \oplus \bigoplus_{1\le i\le n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j \oplus ... \oplus a_{12...n}x_1x_2...x_n \\ &= b_0 \oplus \bigoplus_{1\le i\le n} b_i x_i \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j \oplus ... \oplus b_{12...n}x_1x_2...x_n \end{aligned}$$

Нека $a_{i_1...i_k}$ и $b_{i_1...i_k}$ са първата двойка различни коефициенти. Заместваме в двете представяния с вектора $c_1,...,c_n$, където

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{, ако } j \in \{i_1,...,i_k\} \\ 0 & \text{, ако } j \notin \{i_1,...,i_k\} \end{cases}$$

Събираемите до това с индекс $i_1...i_k$ и в двете представяния са еднакви, нека те са с обща стойност C.
Всички събираеми след това с индекс $i_1...i_k$ се нулират, защото в тях участва като множител c_j за някое $j \notin \{i_1,...,i_k\}$.
Така $f(c_1,...,c_n) = C \oplus a_{i_1...i_k} = C \oplus b_{i_1...i_k}$, което противоречи на допускането, че $a_{i_1...i_k} \neq b_{i_1...i_k}$. □

Алгоритъм (за получаване на полинома на Жегалкин)**.**
I) от СъвДНФ
Негираните променливи се заместват съответно с тяхната ненегирана форма, като всяка от променливите се събира по модул 2 с единица, за да се запази смисълът на формулата (т.е. използва се еквивалентност на негация за $\{\tilde{1}, \tilde{2}, \wedge, \oplus\}$). Тъй като в СъвДНФ има само един елемент със стойност единица е допустимо замистването на дизюнкцията със сума по модул 2.

Пример.

$$\begin{aligned} \overline{xy} \vee \overline{x}y \vee xy &= (1 \oplus x)(1 \oplus y) \vee ((1 \oplus x)y) \vee xy \\ &= (1 \oplus x)(1 \oplus y) \oplus (1 \oplus x)y \oplus xy \\ &= 1 \oplus x \oplus y \oplus y \oplus xy \\ &= 1 \oplus x \oplus xy \end{aligned}$$

II) Чрез заместване

Замествайки всички възможни вектори за променливите в общата формула на полинома на Жегалкин се получават коефициентите пред променливите и след това се заместват в общата формула.

Пример.

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 1 \\ f(0,0) = a_0 \oplus a_1.0 \oplus a_2.0 \oplus a_3.0.0 = a_0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a_0 = 1$$

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(0,1) = 1 \oplus a_1.0 \oplus a_1 \oplus a_3.1.0 = 1 \oplus a_2 = a_2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a_2 = 0$$

$$\begin{cases} f(1,0) = 0 \\ f(1,0) = 1 \oplus a_1.1 \oplus a_2.0 \oplus a_3.1.0 = 1 \oplus a_1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a_1 = 1$$

$$\begin{cases} f(1,1) = 1 \\ f(1,1) = 1 \oplus 1.1 \oplus 0.1 \oplus a_3.1.1 = 1 \oplus 1 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a_3 = 1$$

Следователно полинома на Жегалкин е $1 \oplus x \oplus xy$.

III) Чрез еквивалентни преобразувания
Дадените операции се заместват с техните съответсващи от $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$.

Пример.

$$\begin{aligned} x \to y &\equiv // \text{ св-во на импликацията} \\ \overline{x} \vee y &\equiv // \text{ закон за двойното отрицание} \\ \overline{\overline{\overline{x} \vee y}} &\equiv // \text{ закон на де Морган} \\ \overline{\overline{\overline{x}}\overline{y}} &\equiv // \text{ закон за двойното отрицание} \\ \overline{x\overline{y}} &\equiv \overline{x(1 \oplus y)} \equiv 1 \oplus (x(1 \oplus y)) \\ &= 1 \oplus x \oplus xy \end{aligned}$$

19 Тема 19

19.1 Функционални елементи. Дефиниция на схема от ФЕ. Построяване на схема от ФЕ от съвършена ДНФ.

19.2 Пример с двоичен суматор

Булевите функции в СъвДНФ:

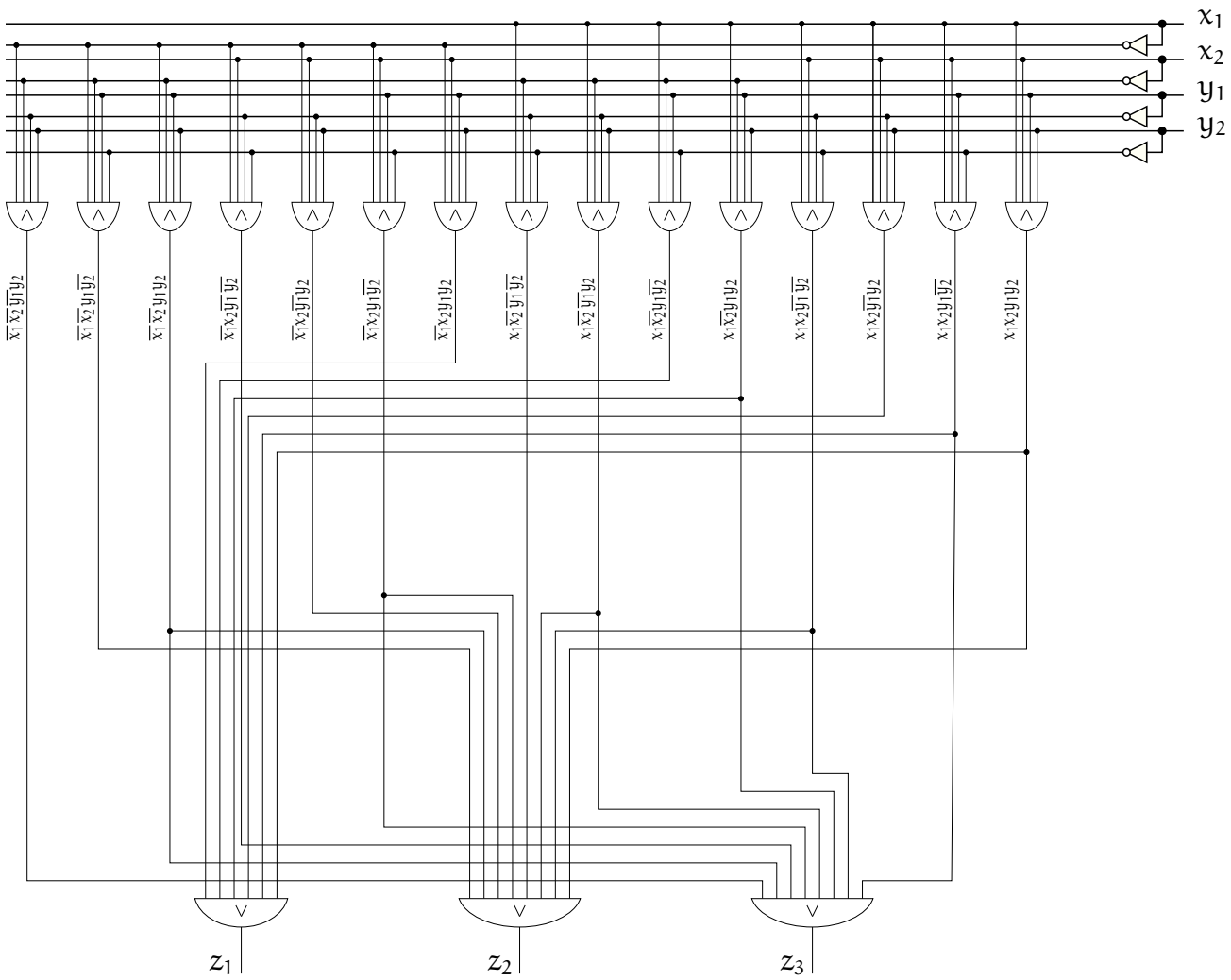
x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

$$z_1 = \overline{x_1}x_2y_1y_2 \vee x_1\overline{x_2}y_1\overline{y_2} \vee x_1\overline{x_2}y_1y_2 \vee x_1x_2\overline{y_1}y_2 \vee x_1x_2y_1\overline{y_2} \vee x_1x_2y_1y_2$$

$$z_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}y_1\overline{y_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}y_1y_2 \vee \overline{x_1}x_2\overline{y_1}y_2 \vee \overline{x_1}x_2y_1\overline{y_2} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{y_1}\,\overline{y_2} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{y_1}y_2 \vee x_1x_2\overline{y_1}\,\overline{y_2} \vee x_1x_2y_1y_2$$

$$z_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{y_1}y_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}y_1y_2 \vee \overline{x_1}x_2\overline{y_1}\,\overline{y_2} \vee \overline{x_1}x_2y_1\overline{y_2} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{y_1}\,y_2 \vee x_1\overline{x_2}\,y_1y_2 \vee x_1x_2\overline{y_1}\,\overline{y_2} \vee x_1x_2y_1\overline{y_2}$$

Двоичният суматор:



20 All you need to know...