Chương 3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

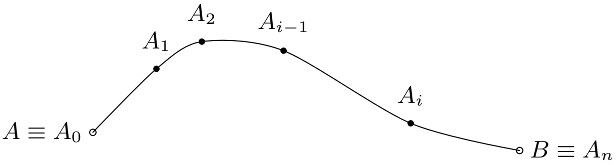
GV: **Nguyễn Thị Huyên**

BM Toán Giải tích - ĐHGTVT

2021

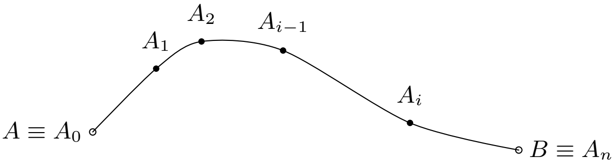
Mục lục

Cho cung đường cong $\mathbb{L}$ đi từ điểm A tới điểm B và hàm $f(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia



$$A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n \equiv B.$$

Cho cung đường cong $\mathbb{L}$ đi từ điểm A tới điểm B và hàm $f(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia



$$A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n \equiv B.$$

Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và đặt $|\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}| = \Delta s_i$, $\forall i = \overline{1,n}$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$,

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$,ký hiệu

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \lim_{n \to +\infty, \lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\widetilde{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\widetilde{AB}$,ký hiệu

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \lim_{n \to +\infty, \lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

- $\widetilde{AB}$ là đường cong lấy tích phân.
- ds là vi phân theo độ dài cung.

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$,ký hiệu

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \lim_{n\to+\infty,\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong lấy tích phân.
- ds là vi phân theo độ dài cung.
- Nếu tích phân này tồn tại thì ta nói rằng hàm $f(x, y)$ khả tích trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$.

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$,ký hiệu

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \lim_{n \to +\infty, \lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong lấy tích phân.
- ds là vi phân theo độ dài cung.
- Nếu tích phân này tồn tại thì ta nói rằng hàm $f(x, y)$ khả tích trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (tại mọi điểm đều có tiếp tuyến biến thiên liên tục) và hàm $f(x, y)$ liên tục trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân tồn tại.

Cho $n \to +\infty$, sao cho $\lambda = \max \Delta s_i \to 0$, nếu I_n dần tới giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$,ký hiệu

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \lim_{n\to+\infty,\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong lấy tích phân.
- ds là vi phân theo độ dài cung.
- Nếu tích phân này tồn tại thì ta nói rằng hàm $f(x, y)$ khả tích trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (tại mọi điểm đều có tiếp tuyến biến thiên liên tục) và hàm $f(x, y)$ liên tục trên đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân tồn tại.
- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm là $f(x, y)$ thì khối lượng của cả dây cung là $m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$ = khối lượng của dây cung $\overset{\frown}{AB}$.

Các tính chất

- $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds =$ độ dài của đường cong $\overset{\frown}{AB}$.

Các tính chất

- $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds =$ độ dài của đường cong $\overset{\frown}{AB}$.
- $\displaystyle\int\limits_{L} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{L} f(x,y)ds \pm \int\limits_{L} g(x,y)ds.$

Các tính chất

- $\displaystyle\int\limits_{\widetilde{AB}} ds =$ độ dài của đường cong $\widetilde{AB}$.
- $\displaystyle\int\limits_{L} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{L} f(x,y)ds \pm \int\limits_{L} g(x,y)ds.$
- $\displaystyle\int\limits_{L} [kf(x,y)]ds = k\int\limits_{L} f(x,y)ds$ (với k là hằng số).

Các tính chất

- $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds =$ độ dài của đường cong $\overset{\frown}{AB}$.
- $\int\limits_{L} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{L} f(x,y)ds \pm \int\limits_{L} g(x,y)ds.$
- $\int\limits_{L} [kf(x,y)]ds = k \int\limits_{L} f(x,y)ds$ (với k là hằng số).
- Nếu $L = L_1 \cup L_2$ (không dẫm lên nhau) thì $\int\limits_{L} f(x,y)ds = \int\limits_{L_1} f(x,y)ds + \int\limits_{L_2} f(x,y)ds.$

- $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds =$ độ dài của đường cong $\overset{\frown}{AB}$.
- $\displaystyle\int\limits_{L} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{L} f(x,y)ds \pm \int\limits_{L} g(x,y)ds.$
- $\displaystyle\int\limits_{L} [kf(x,y)]ds = k\int\limits_{L} f(x,y)ds$ (với k là hằng số).
- Nếu $L = L_1 \cup L_2$ (không dẫm lên nhau) thì $\displaystyle\int\limits_{L} f(x,y)ds = \int\limits_{L_1} f(x,y)ds + \int\limits_{L_2} f(x,y)ds.$
- Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)ds.$$

Cách tính

Xét

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds.$$

1. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

Xét

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds.$$

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$ thì $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$ và đưa tích phân về 1 biến x

$$I = \int\limits_a^b f\left[x, y(x)\right] \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

Cách tính

Xét

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds.$$

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ thì $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$ và đưa tích phân về 1 biến x

$$I = \int\limits_a^b f\left[x, y(x)\right] \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

2. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y)$, $c \leq x \leq d$

Cách tính

Xét

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds.$$

1. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$ thì $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$ và đưa tích phân về 1 biến x

$$I = \int\limits_a^b f\left[x, y(x)\right] \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

2. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình $x = x(y)$, $c \le x \le d$ thì $ds = \sqrt{1 + x'(y)^2} \cdot dy$ và đưa tích phân về 1 biến y

$$I = \int\limits_c^d f\left[x(y), y\right] \sqrt{1 + x'(y)^2} \cdot dy$$

Cách tính

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ thì

Cách tính

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$ thì $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$ và đưa tích phân về 1 biến t

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt.$$

Cách tính

1. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ thì $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$ và đưa tích phân về 1 biến t

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt.$$

2. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì

Cách tính

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ thì $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$ và đưa tích phân về 1 biến t

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt.$$

2. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì $ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi$ và đưa tích phân về 1 biến φ

Cách tính

1. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ thì

$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$ và đưa tích phân về 1 biến t

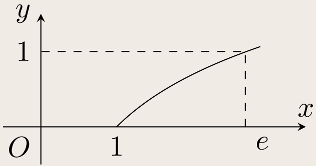
$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt.$$

2. Nếu $\widetilde{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì
$ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi$ và đưa tích phân về 1 biến φ

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[r\cos\varphi, r\sin\varphi\right] \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi$$

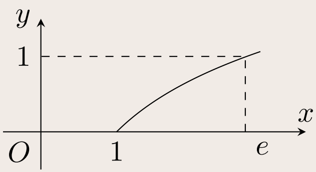
Ví dụ 1.1.

Tính $I = \int\limits_{\widehat{AB}} x^2 ds$, $\widetilde{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1, 0)$, $B(e, 1)$.



Ví dụ 1.1.

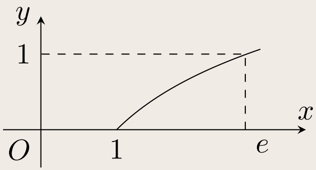
Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2 ds$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.



- Phương trình của đường cong $\overset{\frown}{AB}$ là $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.

Ví dụ 1.1.

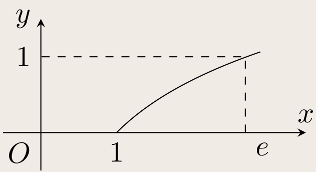
Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2 ds$, $\widetilde{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.



- Phương trình của đường cong $\widetilde{AB}$ là $y = \ln x$, $1 \le x \le e$.
- $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot dx.$

Ví dụ 1.1.

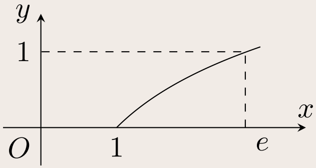
Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2 ds$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.



- Phương trình của đường cong $\overset{\frown}{AB}$ là $y = \ln x$, $1 \le x \le e$.
- $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot dx$.
- $I = \int\limits_1^e x^2 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot dx = \int\limits_1^e \sqrt{x^2+1} \cdot x dx = \dfrac{1}{2} \int\limits_1^e \sqrt{x^2+1} \cdot d(1+x^2)$.

Ví dụ 1.1.

Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2 ds$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.

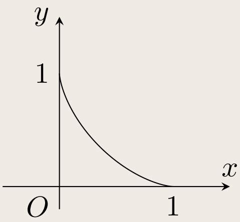


- Phương trình của đường cong $\overset{\frown}{AB}$ là $y = \ln x$, $1 \le x \le e$.
- $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot dx.$
- $I = \int\limits_1^e x^2 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot dx = \int\limits_1^e \sqrt{x^2+1} \cdot x dx = \dfrac{1}{2} \int\limits_1^e \sqrt{x^2+1} \cdot d(1+x^2).$
- $I = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]\Big|_1^e = \dfrac{1}{3}\left[(e^2+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right].$

Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x + 2y)ds$;

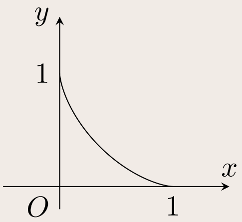
L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.



Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x + 2y)ds$;

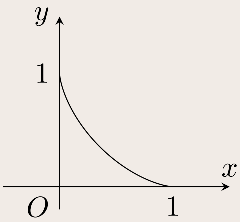
L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.



Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x + 2y)ds$;

L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

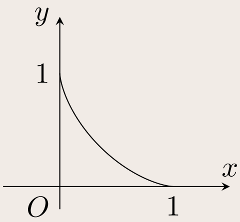


- $x^{'}(t) = -3\cos^2 t \sin t;\ y^{'}(t) = 3\sin^2 t \cos t;\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x+2y)ds$;

L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

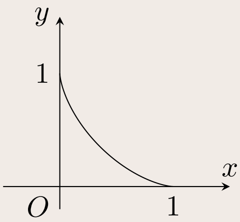


- $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t;\ y'(t) = 3\sin^2 t \cos t;\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
- $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}dt = 3\sin t \cos t dt$

Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x+2y)ds$;

L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

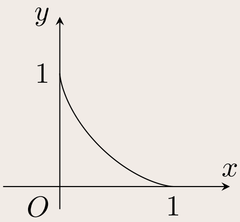


- $x^{'}(t) = -3\cos^2 t \sin t;\ y^{'}(t) = 3\sin^2 t \cos t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
- $ds = \sqrt{(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2}dt = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}dt = 3\sin t \cos t dt$
- $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t + 2\sin^3 t) 3\sin t \cos t dt = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \sin t + \sin^4 t \cos t)dt$

Ví dụ 1.2.

Tính tích phân đường $I = \int\limits_L (x + 2y)ds$;

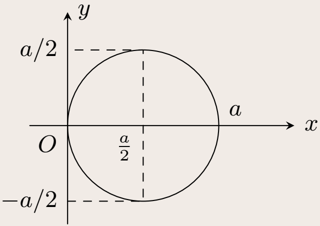
L là cung $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right).$



- $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t;\ y'(t) = 3\sin^2 t \cos t;\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
- $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt = 3\sin t \cos t dt$
- $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t + 2\sin^3 t) 3\sin t \cos t dt = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \sin t + \sin^4 t \cos t) dt$
- $I = 3\left(-\dfrac{1}{5}\cos^5 t + \dfrac{2}{5}\sin^5 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{9}{5}.$

Ví dụ 1.3.

Tính $I = \int\limits_L (x+y)ds;\quad L:\ x^2+y^2 = ax,\ a>0.$

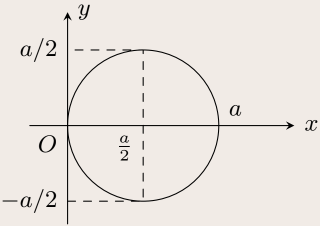


Phương trình tham số của đường cong L $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t \\ y = \dfrac{a}{2}\sin t, \end{cases}$

$(0 \le t \le 2\pi)$.

Ví dụ 1.3.

Tính $I = \int\limits_L (x+y)ds; \quad L: \; x^2+y^2 = ax, \; a>0.$



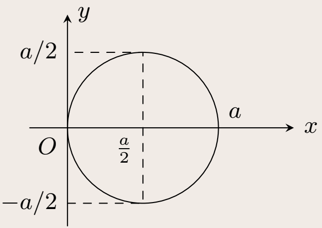
Phương trình tham số của đường cong L $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t \\ y = \dfrac{a}{2}\sin t, \end{cases}$

$(0 \le t \le 2\pi)$.

- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}\sin^2 t + \dfrac{a^2}{4}\cos^2 t} \cdot dt = \dfrac{a}{2} \cdot dt.$

Ví dụ 1.3.

Tính $I = \int\limits_L (x+y)ds; \quad L: \; x^2 + y^2 = ax, \; a > 0.$



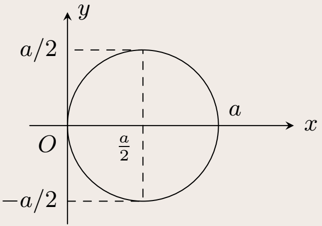
Phương trình tham số của đường cong L $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t \\ y = \dfrac{a}{2}\sin t, \end{cases}$

$(0 \le t \le 2\pi)$.

- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}\sin^2 t + \dfrac{a^2}{4}\cos^2 t} \cdot dt = \dfrac{a}{2} \cdot dt.$
- $I = \int\limits_0^{2\pi} \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t + \dfrac{a}{2}\sin t \right) \cdot \dfrac{a}{2} dt.$

Ví dụ 1.3.

Tính $I = \int\limits_L (x+y)ds$; $L:\ x^2+y^2 = ax,\ a>0.$



Phương trình tham số của đường cong L $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t \\ y = \dfrac{a}{2}\sin t, \end{cases}$

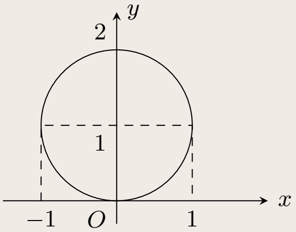
$(0 \le t \le 2\pi)$.

- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\cdot dt = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}\sin^2 t + \dfrac{a^2}{4}\cos^2 t}\cdot dt = \dfrac{a}{2}\cdot dt.$
- $I = \int\limits_0^{2\pi} \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t + \dfrac{a}{2}\sin t\right)\cdot \dfrac{a}{2}dt.$
- $I = \dfrac{a^2}{4}\left[t + \sin t - \cos t\right]\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{\pi a^2}{2}.$

Ví dụ 1.4.

Tính $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$; $C:\ x^2 + y^2 = 2y$.

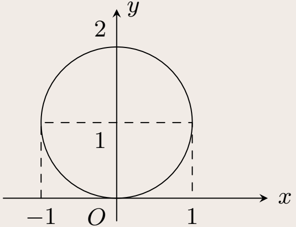
Phương trình trong tọa độ cực của đường cong C $\begin{cases} r = 2\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$



Ví dụ 1.4.

Tính $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds; \quad C: \; x^2 + y^2 = 2y.$

Phương trình trong tọa độ cực của đường cong C $\begin{cases} r = 2\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$

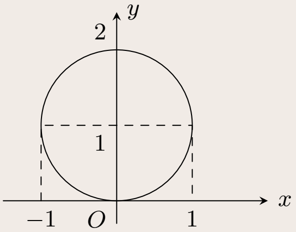


- $ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi = \sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (-2\cos\varphi)^2} \cdot d\varphi = 2d\varphi.$

Ví dụ 1.4.

Tính $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds;\quad C:\ x^2 + y^2 = 2y.$

Phương trình trong tọa độ cực của đường cong C $\begin{cases} r = 2\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$

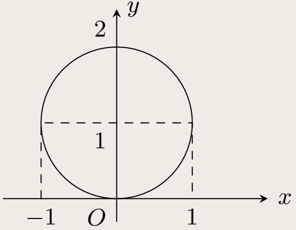


- $ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi = \sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (-2\cos\varphi)^2} \cdot d\varphi = 2d\varphi.$
- $x^2 + y^2 = r^2 = (2\sin\varphi)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sin\varphi.$

Ví dụ 1.4.

Tính $I = \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\, ds$; $C: \ x^2+y^2 = 2y$.

Phương trình trong tọa độ cực của đường cong C $\begin{cases} r = 2\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$



- $ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot d\varphi = \sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (-2\cos\varphi)^2} \cdot d\varphi = 2d\varphi.$
- $x^2+y^2 = r^2 = (2\sin\varphi)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\sin\varphi.$
- $I = \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int\limits_0^\pi (2\sin\varphi)\cdot 2d\varphi = -4\cos\varphi\Big|_0^\pi = 8.$

Bài tập

Tính các tích phân đường loại 1

(2) $I = \displaystyle\int\limits_{\widehat{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $\widehat{OA}$ là đoạn thẳng nối gốc $O(0,0)$ với điểm $A(1,2)$.

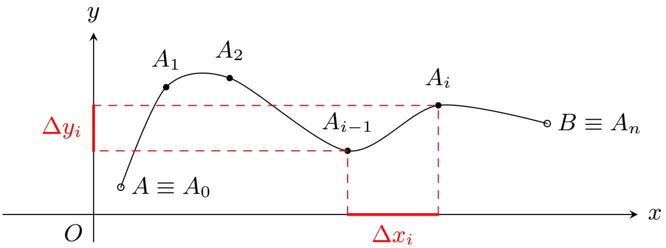
(3) $I = \displaystyle\int\limits_{L} (x^2+y^2)ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

(5) $I = \displaystyle\int\limits_{L} (x+y+z)ds$; L là đường cong $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

(6) $I = \displaystyle\int\limits_{C} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$; $C: \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0$.

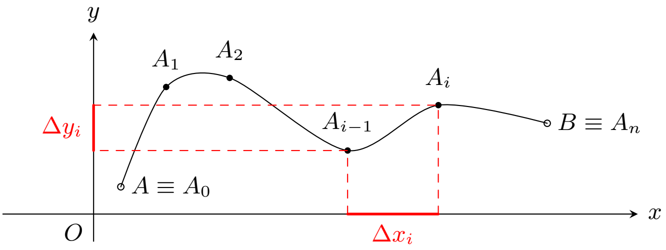
Cho cung đường cong $\mathbb{L}$ đi từ điểm A tới điểm B và hai hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia

$$A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n \equiv B.$$



Cho cung đường cong $\mathbb{L}$ đi từ điểm A tới điểm B và hai hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia

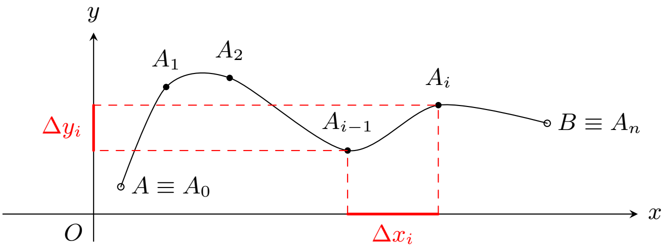
$$A \equiv A_0, A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n \equiv B.$$



Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và gọi Δx_i, Δy_i lần lượt là hình chiếu của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ xuống các trục Ox, Oy $\forall i = \overline{1, n}$.

Cho cung đường cong $\mathbb{L}$ đi từ điểm A tới điểm B và hai hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia

$$A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n \equiv B.$$



Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và gọi Δx_i, Δy_i lần lượt là hình chiếu của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ xuống các trục Ox, Oy $\forall i = \overline{1,n}$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i]$$

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ và $\max \Delta y_i \to 0$, nếu tổng I_n dần tới một giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ và $\max \Delta y_i \to 0$, nếu tổng I_n dần tới một giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ gọi là đường cong lấy tích phân.

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ và $\max \Delta y_i \to 0$, nếu tổng I_n dần tới một giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ gọi là đường cong lấy tích phân.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và các hàm $P(x, y)$; $Q(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại hai tồn tại.

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ và $\max \Delta y_i \to 0$, nếu tổng I_n dần tới một giới hạn I xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- $\overset{\frown}{AB}$ gọi là đường cong lấy tích phân.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và các hàm $P(x, y)$; $Q(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại hai tồn tại.
- Tích phân đường loại hai cũng có các tính chất tương tự như tích phân xác định.

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân,

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân,

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Nếu $A \equiv B$ (điểm đầu trùng với điểm cuối) thì đường cong kín.

$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = -\oint\limits_{L^-} Pdx + Qdy.$$

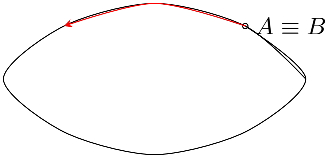
- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân,

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

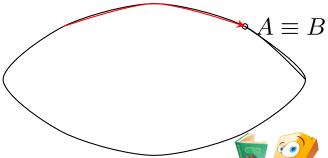
- Nếu $A \equiv B$ (điểm đầu trùng với điểm cuối) thì đường cong kín.

$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = -\oint\limits_{L^-} Pdx + Qdy.$$

- Quy ước



Chiều dương L^+: ngược chiều KĐH



Chiều âm L^-: cùng chiều KĐH

Cách tính tích phân đường loại 2

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $x : x_A \to x_B$ thì $dy = y'(x) \cdot dx$ và

$$I = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x) \right] dx.$$

Cách tính tích phân đường loại 2

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $x : x_A \to x_B$ thì $dy = y'(x) \cdot dx$ và

$$I = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right] dx.$$

2. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y)$, $y : y_A \to y_B$ thì $dx = x'(y) \cdot dy$ và

$$I = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)\right] dy.$$

Cách tính tích phân đường loại 2

1. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $x : x_A \to x_B$ thì $dy = y'(x) \cdot dx$ và

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right] dx.$$

2. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y)$, $y : y_A \to y_B$ thì $dx = x'(y) \cdot dy$ và

$$I = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)\right] dy.$$

3. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t : t_A \to t_B)$ thì $\begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$ và

$$I = \int_{t_A}^{t_B} \{P\left[x(t), y(t)\right] x'(t) + Q\left[x(t), y(t)\right] y'(t)\} dt.$$

Ví dụ 2.1.

Tính tích phân đường: $I = \int\limits_L (e^x + y)dx + (y + 2)dy$;

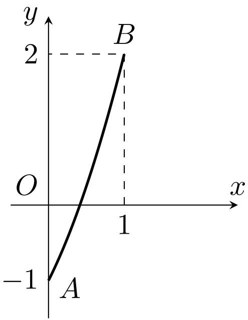
trong đó L là cung đường cong $x^2 - y + 2x = 1$ từ $A(0, -1)$ đến $B(1, 2)$.

Ví dụ 2.1.

Tính tích phân đường: $I = \int\limits_L (e^x + y)dx + (y+2)dy$;

trong đó L là cung đường cong $x^2 - y + 2x = 1$ từ $A(0,-1)$ đến $B(1,2)$.

- Đường cong có phương trình $y = x^2 + 2x - 1$; x từ 0 đến 1
- $dy = (2x+2)dx$
- $I = \int\limits_0^1 \left[(e^x + x^2 + 2x - 1) + (x^2 + 2x - 1 + 2)(2x+2)\right] dx$
- $I = \left[e^x + \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + \dfrac{(x+1)^4}{2}\right]\Bigg|_0^1 = e + \dfrac{41}{6}$



Ví dụ 2.2.

Tính tích phân đường:

$$I = \int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy;$$

L là đoạn thẳng từ $A(0,1)$ đến $B(2,5)$.

Ví dụ 2.2.

Tính tích phân đường:

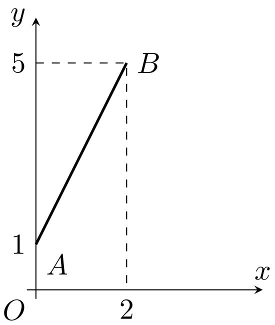
$$I = \int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy;$$

L là đoạn thẳng từ $A(0,1)$ đến $B(2,5)$.

Đoạn thẳng AB có phương trình $y = 2x + 1$; x từ 0 đến 2, $dy = 2dx$.

$$I = \int\limits_0^2 \left[x^2(2x+1) + x^3.2\right] dx$$

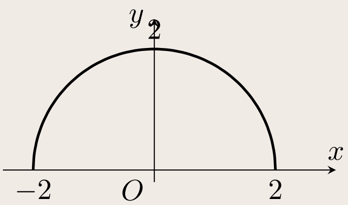
$$I = \int\limits_0^2 \left[4x^3 + x^2\right] dx = \left[4.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2 = \frac{56}{3}$$



Ví dụ 2.3.

Tính tích phân đường $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$,

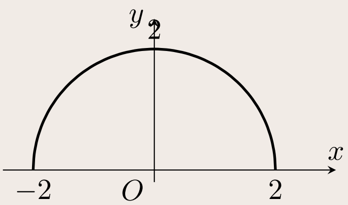
C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ từ $A(2,0)$ đến $B(-2,0)$.



Ví dụ 2.3.

Tính tích phân đường $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$,

C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ từ $A(2, 0)$ đến $B(-2, 0)$.

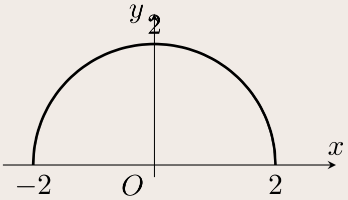


- Phương trình tham số của C là $\begin{cases} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{cases},\quad 0 \leq t \leq \pi \Longrightarrow \begin{cases} dx &= -2\sin t dt \\ dy &= 2\cos t dt \end{cases}$

Ví dụ 2.3.

Tính tích phân đường $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$,

C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ từ $A(2,0)$ đến $B(-2,0)$.

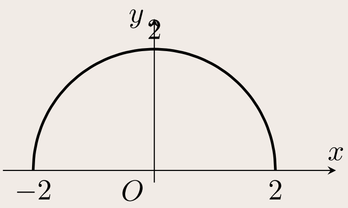


- Phương trình tham số của C là $\begin{cases} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi \Longrightarrow \begin{cases} dx &= -2\sin t dt \\ dy &= 2\cos t dt \end{cases}$
- $I = \int\limits_0^\pi \left[(2\cos t)(2\sin t)^2(2\cos t) - (2\cos t)^2(2\sin t)(-2\sin t)\right] dt = 2^5 \int\limits_0^\pi \cos^2 t.\sin^2 t.dt$

Ví dụ 2.3.

Tính tích phân đường $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$,

C là nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ từ $A(2,0)$ đến $B(-2,0)$.



- Phương trình tham số của C là $\begin{cases} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{cases},\quad 0 \leq t \leq \pi \Longrightarrow \begin{cases} dx &= -2\sin t dt \\ dy &= 2\cos t dt \end{cases}$
- $I = \int\limits_0^\pi \left[(2\cos t)(2\sin t)^2(2\cos t) - (2\cos t)^2(2\sin t)(-2\sin t)\right] dt = 2^5 \int\limits_0^\pi \cos^2 t.\sin^2 t.dt$
- $I = 2^5 \int\limits_0^\pi \frac{(\sin 2t)^2}{4}.dt = 4\int\limits_0^\pi (1 - \cos 4t)dt = (4t - \sin 4t)\Big|_0^\pi = 8\pi.$

Ví dụ 2.4.

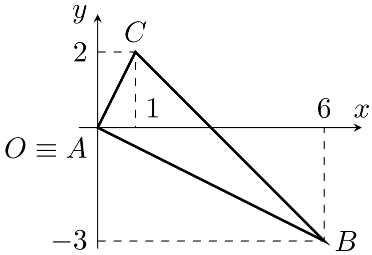
Tính tích phân đường $\int\limits_{L^+} (x+y)dx + (3x-2y)dy$, L^+ là biên của tam giác ABC với $A(0,0)$, $B(6,-3)$, $C(1,2)$.

Ví dụ 2.4.

Tính tích phân đường $\int\limits_{L^+} (x+y)dx + (3x-2y)dy$, L^+ là biên của tam giác ABC với $A(0,0),\ B(6,-3),\ C(1,2)$.

Viết phương trình 3 cạnh của tam giác ABC

- Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y: 0 \to -3$
- Phương trình của cạnh BC là $y = 3 - x,\ x: 6 \to 1$
- Phương trình của cạnh CA là $y = 2x,\ x: 1 \to 0$
- $\mathbb{L}^+ = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ và $I = I_1 + I_2 + I_3$.



+) Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y : 0 \to -3$

$$\Longrightarrow I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} = \int\limits_0^{-3} \{-2\left(-2y + y\right) + \left(-6y - 2y\right)\}dy = \int\limits_0^{-3} (-6y)dy = -27$$

+) Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y : 0 \to -3$

$$\Longrightarrow I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} = \int\limits_0^{-3} \{-2(-2y + y) + (-6y - 2y)\}dy = \int\limits_0^{-3} (-6y)dy = -27$$

+) Phương trình của cạnh BC là $y = 3 - x,\ x : 6 \to 1$

$$\Longrightarrow I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} = \int\limits_6^{1} \{(x + 3 - x) - (3x - 6 + 2x)\}dx = \int\limits_6^{1} (-5x + 9)dx = \frac{85}{2}$$

+) Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y : 0 \to -3$

$$\Longrightarrow I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} = \int\limits_0^{-3} \{-2\,(-2y + y) + (-6y - 2y)\} dy = \int\limits_0^{-3} (-6y) dy = -27$$

+) Phương trình của cạnh BC là $y = 3 - x,\ x : 6 \to 1$

$$\Longrightarrow I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} = \int\limits_6^{1} \{(x + 3 - x) - (3x - 6 + 2x)\} dx = \int\limits_6^{1} (-5x + 9) dx = \frac{85}{2}$$

+) Phương trình của cạnh CA là $y = 2x,\ x : 1 \to 0$

$$\Longrightarrow I_3 = \int\limits_{\overline{CA}} (x + y) dx + (3x - 2y) dy = \int\limits_1^{0} \{(x + 2x) + (3x - 2.2x)\,2\} dx = \int\limits_1^{0} x dx = -\frac{1}{2}$$

+) Phương trình của cạnh AB là $x = -2y,\ y : 0 \to -3$

$$\Longrightarrow I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} = \int\limits_0^{-3} \{-2(-2y + y) + (-6y - 2y)\}dy = \int\limits_0^{-3} (-6y)dy = -27$$

+) Phương trình của cạnh BC là $y = 3 - x,\ x : 6 \to 1$

$$\Longrightarrow I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} = \int\limits_6^{1} \{(x + 3 - x) - (3x - 6 + 2x)\}dx = \int\limits_6^{1} (-5x + 9)dx = \frac{85}{2}$$

+) Phương trình của cạnh CA là $y = 2x,\ x : 1 \to 0$

$$\Longrightarrow I_3 = \int\limits_{\overline{CA}} (x + y)dx + (3x - 2y)dy = \int\limits_1^{0} \{(x + 2x) + (3x - 2.2x)\,2\}dx = \int\limits_1^{0} xdx = -\frac{1}{2}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = 15.$

Ví dụ 2.5.

Tính tích phân đường: $\oint\limits_{\mathbb{L}^+} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy$,

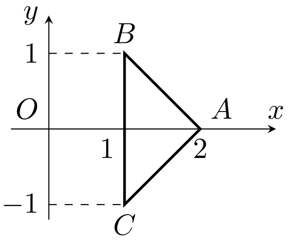
$\mathbb{L}^+$ là biên của ΔABC với $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$, theo chiều dương.

Ví dụ 2.5.

Tính tích phân đường: $\oint\limits_{\mathbb{L}^+} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy$,

$\mathbb{L}^+$ là biên của ΔABC với $A(2,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$, theo chiều dương.

- Vẽ hình và viết phương trình 3 cạnh của tam giác
  $AB : y = 2 - x,\ \ x : 2 \to 1,$
  $BC : x = 1,\ \ y : 1 \to -1,$
  $CA : y = x - 2,\ \ y : 1 \to 2.$
  $\mathbb{L}^+ = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ và $I = I_1 + I_2 + I_3$.



- $I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_2^1 (-x^2 + 8x - 12)dx = \dfrac{7}{3}.$

- $I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_2^1 (-x^2 + 8x - 12)dx = \dfrac{7}{3}.$
- $I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_1^{-1} (y^2 + 4y + 5)dy = -\dfrac{32}{3}.$

- $I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_2^1 (-x^2 + 8x - 12)dx = \dfrac{7}{3}.$

- $I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_1^{-1} (y^2 + 4y + 5)dy = -\dfrac{32}{3}.$

- $I_3 = \int\limits_{\overline{CA}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_1^2 (3x^2 + 6x - 4)dx = 12.$

- $I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_2^1 (-x^2 + 8x - 12)dx = \dfrac{7}{3}.$

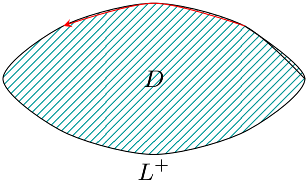
- $I_2 = \int\limits_{\overline{BC}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_1^{-1} (y^2 + 4y + 5)dy = -\dfrac{32}{3}.$

- $I_3 = \int\limits_{\overline{CA}} (3x + x^2 + xy)dx + (4y + y^2 + 5x)dy = \int\limits_1^2 (3x^2 + 6x - 4)dx = 12.$

- $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{7}{3} + 12 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{11}{3}.$

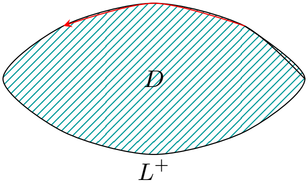
Nếu các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ xác định liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên D (liên thông, bị chặn) thì

$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$



với L là đường cong kín, là biên của miền D lấy theo chiều dương.

Nếu các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ xác định liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên D (liên thông, bị chặn) thì



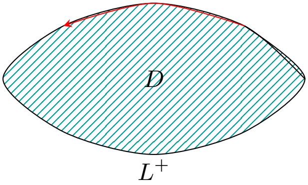
$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

với L là đường cong kín, là biên của miền D lấy theo chiều dương.

Chú ý 1.

- Công thức Green cho ta liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân 2 lớp.

Nếu các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ xác định liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên D (liên thông, bị chặn) thì



$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

với L là đường cong kín, là biên của miền D lấy theo chiều dương.

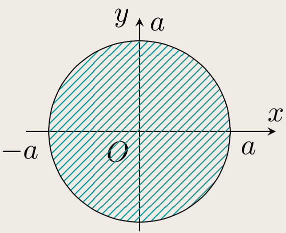
Chú ý 1.

- Công thức Green cho ta liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân 2 lớp.
- Điều kiện để áp dụng được công thức Green là đường cong L^+ kín và lấy theo chiều dương, các hàm P, Q liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên miền D.

Ví dụ 2.6.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} xy^2dy - x^2ydx,$

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều dương.
Đặt $P(x,y) = -x^2y$ và $Q(x,y) = xy^2$
và miền $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.



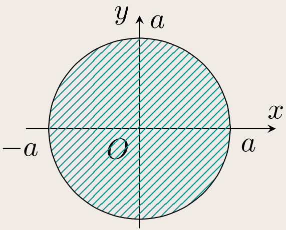
Ví dụ 2.6.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$,

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều dương.

Đặt $P(x, y) = -x^2y$ và $Q(x, y) = xy^2$

và miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

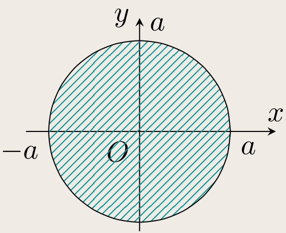


- Áp dụng công thức Green, ta có $I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (y^2 + x^2)dxdy$.

Ví dụ 2.6.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$,

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều dương.
Đặt $P(x, y) = -x^2y$ và $Q(x, y) = xy^2$
và miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

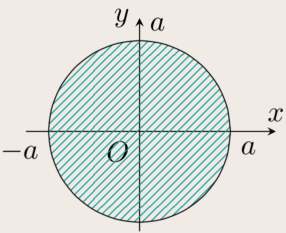


- Áp dụng công thức Green, ta có $I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (y^2 + x^2)dxdy$.
- Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $D = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a. \end{cases}$

Ví dụ 2.6.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$,

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều dương.
Đặt $P(x, y) = -x^2y$ và $Q(x, y) = xy^2$
và miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

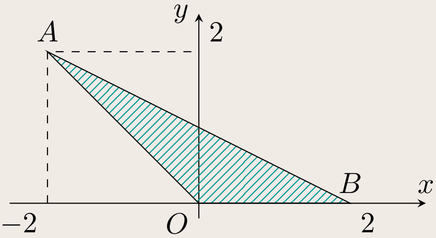


- Áp dụng công thức Green, ta có $I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (y^2 + x^2)dxdy$.
- Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $D = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a. \end{cases}$
- $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cdot rdr = 2\pi \cdot \dfrac{r^4}{4}\Big|_0^a = \dfrac{\pi a^4}{2}$.

Ví dụ 2.7.

Tính tích phân đường : $\oint\limits_{C^+} (x + 2y)dx + (x^2 + 3y)dy$,

C là biên của ΔOAB với $O(0,0)$, $A(-2,2)$, $B(2,0)$.
Phương trình các cạnh $OA : y = -x$,
$AB : x + 2y - 2 = 0$.



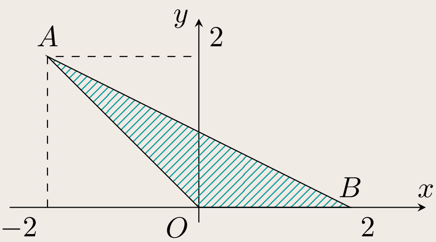
Ví dụ 2.7.

Tính tích phân đường : $\displaystyle\oint\limits_{C^+}(x+2y)dx+(x^2+3y)dy$,

C là biên của ΔOAB với $O(0,0)$, $A(-2,2)$, $B(2,0)$.

Phương trình các cạnh $OA: y=-x$,

$AB: x+2y-2=0$.



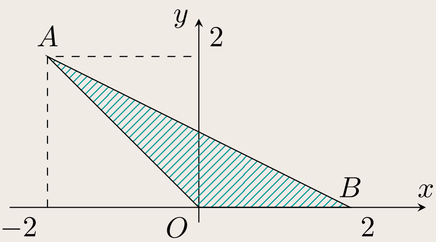
Áp dụng công thức Green ta có

- $\displaystyle I=\iint\limits_{\Delta OAB}(Q'_x-P'_y)dxdy=\iint\limits_{\Delta OAB}(2x-2)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-y}^{2-2y}(2x-2)dx$

Ví dụ 2.7.

Tính tích phân đường : $\oint\limits_{C^+} (x+2y)dx + (x^2+3y)dy$,

C là biên của ΔOAB với $O(0,0)$, $A(-2,2)$, $B(2,0)$.
Phương trình các cạnh $OA : y = -x$,
$AB : x + 2y - 2 = 0$.



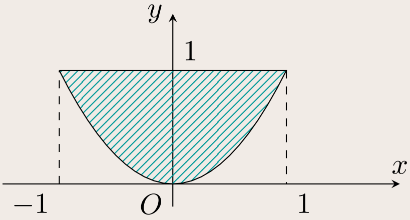
Áp dụng công thức Green ta có

- $I = \iint\limits_{\Delta OAB} (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_{\Delta OAB} (2x-2)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-y}^{2-2y} (2x-2)dx$
- $I = \int\limits_0^2 (x^2-2x)\Big|_{-y}^{2-2y} dx = \int\limits_0^2 (3y^2-6y)dy = (y^3-3y^2)\Big|_0^2 = -4$

Ví dụ 2.8.

Tính tích phân $\oint\limits_{C^+} (e^x - x^2y + y)dx + (2xy + x - \sin y)dy$,

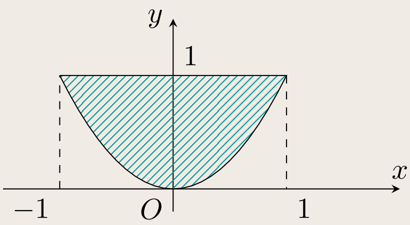
trong đó C là biên hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2, y = 1$ theo chiều dương.



Ví dụ 2.8.

Tính tích phân $\oint\limits_{C^+} (e^x - x^2y + y)dx + (2xy + x - \sin y)dy$,

trong đó C là biên hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2, y = 1$ theo chiều dương.

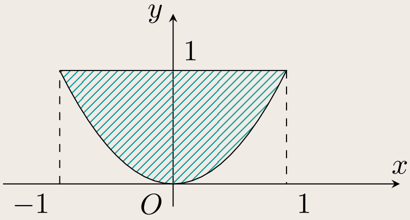


- Gọi D là miền trong có biên C, ta có: $D = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1. \end{cases}$

Ví dụ 2.8.

Tính tích phân $\oint\limits_{C^+} (e^x - x^2y + y)dx + (2xy + x - \sin y)dy$,

trong đó C là biên hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2, y = 1$ theo chiều dương.

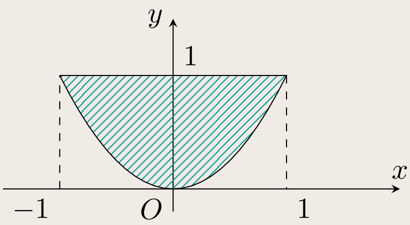


- Gọi D là miền trong có biên C, ta có: $D = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1. \end{cases}$
- Đặt $P(x,y) = (e^x - x^2y + y); Q(x,y) = (2xy + x - \sin y)$.
  Ta có $P'_y = -x^2 + 1; Q'_x = 2y + 1$

Ví dụ 2.8.

Tính tích phân $\oint\limits_{C^+} (e^x - x^2y + y)dx + (2xy + x - \sin y)dy$,

trong đó C là biên hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2, y = 1$ theo chiều dương.



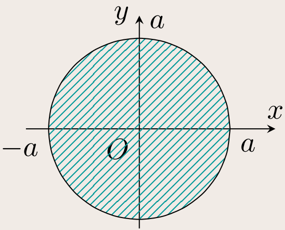
- Gọi D là miền trong có biên C, ta có: $D = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1. \end{cases}$
- Đặt $P(x,y) = (e^x - x^2y + y); Q(x,y) = (2xy + x - \sin y)$.
  Ta có $P'_y = -x^2 + 1; Q'_x = 2y + 1$
- $I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (2y + x^2)dy = \int\limits_{-1}^{1} (1 + x^2 - 2x^4)dx = \dfrac{28}{15}$.

Ví dụ 2.9.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$;

$L: \ x^2 + y^2 = a^2$.

Chú ý: Mặc dù đường cong kín, nhưng bài này không áp dụng được Công thức Green.

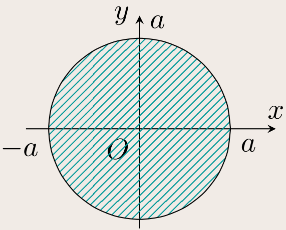


Ví dụ 2.9.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$;

$L: \ x^2 + y^2 = a^2$.

Chú ý: Mặc dù đường cong kín, nhưng bài này không áp dụng được Công thức Green.



Tính trực tiếp

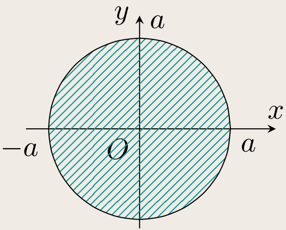
- L có phương trình dạng tham số: $x = a\cos t; y = a\sin t; 0 \le t \le 2\pi$
- $dx = -a\sin t.dt; dy = a\cos t.dt$

Ví dụ 2.9.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{L^+} \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$;

$L: \ x^2 + y^2 = a^2$.

Chú ý: Mặc dù đường cong kín, nhưng bài này không áp dụng được Công thức Green.



Tính trực tiếp

- L có phương trình dạng tham số: $x = a\cos t; y = a\sin t; 0 \le t \le 2\pi$
- $dx = -a\sin t.dt; dy = a\cos t.dt$
- $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{a(\cos t - \sin t).(-a\sin t) + a(\cos t + \sin t).a\cos t}{a^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$

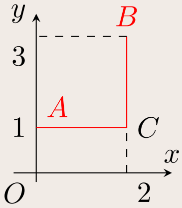
Định lý 4 mệnh đề tương đương

Giả sử các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó trên miền D (kín, đơn liên). Khi đó 4 mệnh đề sau là tương đương:

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in D.$
2. $\displaystyle\oint_{L^+} Pdx + Qdy = 0$ dọc theo mọi đường cong kín L^+ nằm trong miền D.
3. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào hình dạng đường cong lấy tích phân, chỉ phụ thuộc vào hai điểm nút A và B.
4. Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm hai biến $u(x,y)$ nào đó.

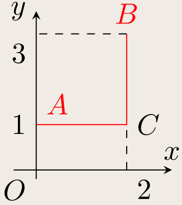
Ví dụ 2.10.

Tính $I = \int\limits_{A(0,1)}^{B(2,3)} (2x + 3y - 1)dx + (3x + 4y - 5)dy.$



Ví dụ 2.10.

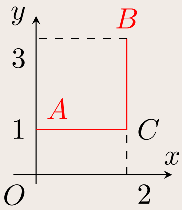
Tính $I = \displaystyle\int_{A(0,1)}^{B(2,3)} (2x + 3y - 1)dx + (3x + 4y - 5)dy.$



- $P = 2x + 3y - 1; Q = 3x + 4y - 5 \Rightarrow P'_y = Q'_x$ (tích phân không phụ thuộc đường đi).

Ví dụ 2.10.

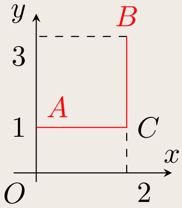
Tính $I = \int\limits_{A(0,1)}^{B(2,3)} (2x + 3y - 1)dx + (3x + 4y - 5)dy.$



- $P = 2x + 3y - 1; Q = 3x + 4y - 5 \Rightarrow P'_y = Q'_x$ (tích phân không phụ thuộc đường đi).
- Gọi $C(2,1) \Rightarrow I = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$

Ví dụ 2.10.

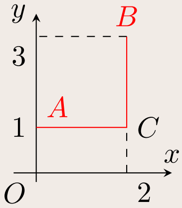
Tính $I = \int\limits_{A(0,1)}^{B(2,3)} (2x + 3y - 1)dx + (3x + 4y - 5)dy.$



- $P = 2x + 3y - 1; Q = 3x + 4y - 5 \Rightarrow P'_y = Q'_x$ (tích phân không phụ thuộc đường đi).
- Gọi $C(2,1) \Rightarrow I = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$
- $I = \int\limits_0^2 (2x + 2)dx + \int\limits_1^3 (1 + 4y)dy = (x^2 + 2x)\Big|_0^2 + (y + 2y^2)\Big|_1^3 = 26.$

Ví dụ 2.10.

Tính $I = \int\limits_{A(0,1)}^{B(2,3)} (2x + 3y - 1)dx + (3x + 4y - 5)dy.$



- $P = 2x + 3y - 1; Q = 3x + 4y - 5 \Rightarrow P'_y = Q'_x$ (tích phân không phụ thuộc đường đi).
- Gọi $C(2,1) \Rightarrow I = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$
- $I = \int\limits_0^2 (2x+2)dx + \int\limits_1^3 (1+4y)dy = (x^2+2x)\Big|_0^2 + (y+2y^2)\Big|_1^3 = 26.$

Tích phân mặt loại 1

Cho mặt cong S hữu hạn trong $Oxyz$ và hàm ba biến $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S.

Tích phân mặt loại 1

Cho mặt cong S hữu hạn trong $Oxyz$ và hàm ba biến $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt S thành n phần nhỏ. Gọi tên các mảnh nhỏ cùng với diện tích của chúng là ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = \overline{1, n})$.

Tích phân mặt loại 1

Cho mặt cong S hữu hạn trong $Oxyz$ và hàm ba biến $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt S thành n phần nhỏ. Gọi tên các mảnh nhỏ cùng với diện tích của chúng là ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = \overline{1, n})$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

Cho $n \to \infty$, sao cho $\max d_i \to 0$, nếu giới hạn I_n dần đến I hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia S và cách chọn M_i) thì giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x, y)$ trên mặt cong S.

Cho mặt cong S hữu hạn trong $Oxyz$ và hàm ba biến $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt S thành n phần nhỏ. Gọi tên các mảnh nhỏ cùng với diện tích của chúng là ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = \overline{1, n})$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

Cho $n \to \infty$, sao cho $\max d_i \to 0$, nếu giới hạn I_n dần đến I hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia S và cách chọn M_i) thì giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x, y)$ trên mặt cong S. Kí hiệu là

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)dS = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

S được gọi là mặt cong lấy tích phân.

Cách tính tích phân mặt loại 1

Để tính tích phân mặt loại 1, ta đưa về tích phân 2 lớp.

Cách tính tích phân mặt loại 1

Để tính tích phân mặt loại 1, ta đưa về tích phân 2 lớp.

- Giả sử mặt cong S có phương trình $z = z(x, y)$.

Cách tính tích phân mặt loại 1

Để tính tích phân mặt loại 1, ta đưa về tích phân 2 lớp.

- Giả sử mặt cong S có phương trình $z = z(x, y)$.
- Hình chiếu của mặt cong S xuống mặt phẳng Oxy là miền phẳng $D \subset Oxy$.

Cách tính tích phân mặt loại 1

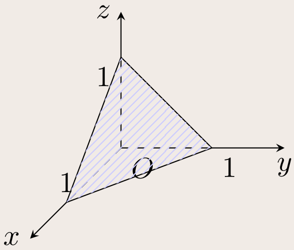
Để tính tích phân mặt loại 1, ta đưa về tích phân 2 lớp.

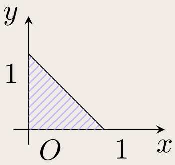
- Giả sử mặt cong S có phương trình $z = z(x, y)$.
- Hình chiếu của mặt cong S xuống mặt phẳng Oxy là miền phẳng $D \subset Oxy$.
- $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$.
- $I = \iint\limits_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$.

Ví dụ 3.1.

Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S z dS$, trong đó S là phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Như vậy, phương trình của mặt S là $z = 1 - x - y$.

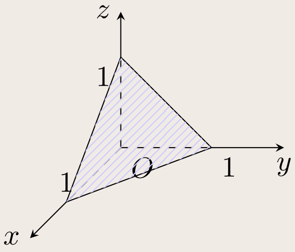


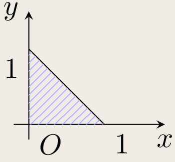


Ví dụ 3.1.

Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S z dS$, trong đó S là phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Như vậy, phương trình của mặt S là $z = 1 - x - y$.

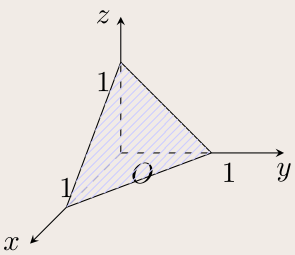


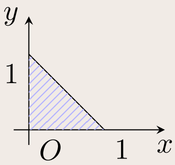


- Tính $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \sqrt{3} dxdy$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D (1 - x - y) \sqrt{3} dxdy$, với $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \}$.

Ví dụ 3.1.

Tính tích phân mặt $I = \iint_S z dS$, trong đó S là phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
Như vậy, phương trình của mặt S là $z = 1 - x - y$.



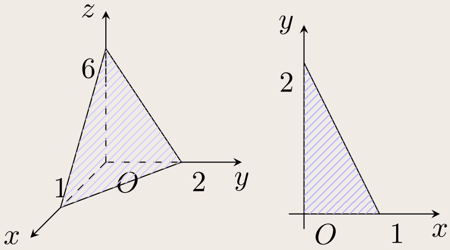


- Tính $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \sqrt{3} dxdy$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint_D (1 - x - y)\sqrt{3} dxdy$, với $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$.
- Tính $I = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(1 - x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 3.2.

Tính $I = \iint\limits_S x(z+6x+3y)dS$;

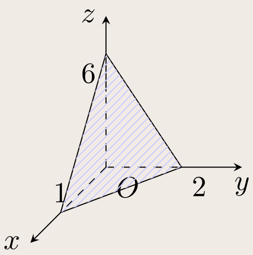
S là phần của mặt phẳng $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{6} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

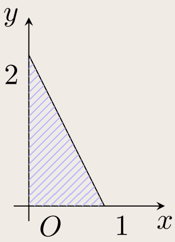


Ví dụ 3.2.

Tính $I = \iint\limits_S x(z + 6x + 3y)dS$;

S là phần của mặt phẳng $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.



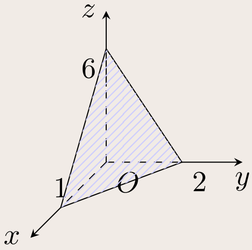


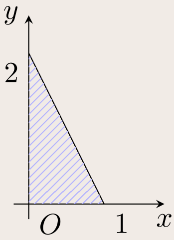
- Hình chiếu của (S) xuống Oxy: $D = \left\{x + \frac{y}{2} \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\right\}$
- $z = 6 - 6x - 3y; z'_x = -6; z'_y = -3 \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (-6)^2 + (-3)^2}dxdy = \sqrt{46}dxdy.$

Ví dụ 3.2.

Tính $I = \iint\limits_S x(z + 6x + 3y)dS$;

S là phần của mặt phẳng $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.





- Hình chiếu của (S) xuống Oxy: $D = \left\{x + \frac{y}{2} \le 1; x \ge 0; y \ge 0\right\}$
- $z = 6 - 6x - 3y; z'_x = -6; z'_y = -3 \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (-6)^2 + (-3)^2}dxdy = \sqrt{46}dxdy.$
- Đưa về tích phân 2 lớp

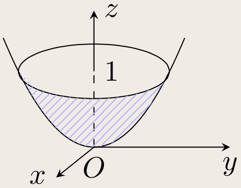
$$I = 6\sqrt{46}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xdy = 6\sqrt{46}\int_0^1 x(2-2x)dx = 6\sqrt{46}(x^2 - \frac{2x^3}{3})\Big|_0^1 = 2\sqrt{46}$$

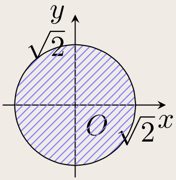
Ví dụ 3.3.

Tính $\quad I = \iint\limits_S z dS,$

S là phần mặt paraboloit tròn xoay

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),\ 0 \leq z \leq 1.$



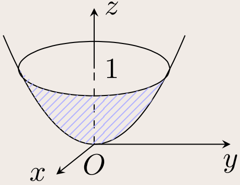


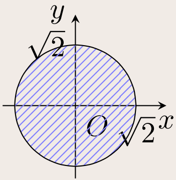
Ví dụ 3.3.

Tính $I = \iint\limits_S z dS$,

S là phần mặt paraboloit tròn xoay

$z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ 0 \leq z \leq 1.$





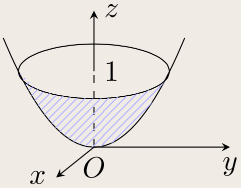
- Tính $z'_x = x,\ z'_y = y$ và $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$, với $D = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$.

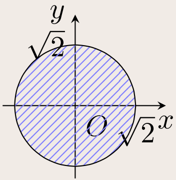
Ví dụ 3.3.

Tính $I = \iint\limits_S z dS$,

S là phần mặt paraboloit tròn xoay

$z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ 0 \le z \le 1.$





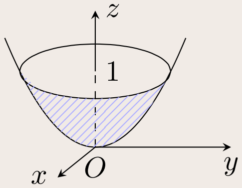
- Tính $z'_x = x,\ z'_y = y$ và $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$, với $D = \{x^2 + y^2 \le 2\}$.
- Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$ $\quad I = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2}.rdr.$

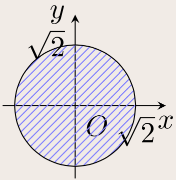
Ví dụ 3.3.

Tính $I = \iint\limits_S z dS,$

S là phần mặt paraboloit tròn xoay

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \; 0 \le z \le 1.$





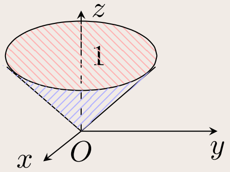
- Tính $z'_x = x, \; z'_y = y$ và $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$, với $D = \{x^2 + y^2 \le 2\}.$
- Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases} \quad I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2}.rdr.$

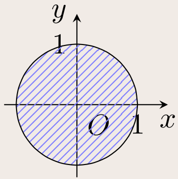
  Đặt $t = \sqrt{1 + r^2}$. Khi đó $I = 2\pi.\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}} t^2(t^2 - 1)dt = \frac{(12\sqrt{3} + 2)\pi}{15}.$

Ví dụ 3.4.

Tính tích phân $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z)dS$;

S là mặt biên của vật thể giới hạn bởi
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.

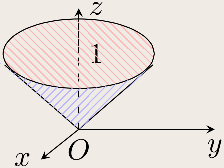


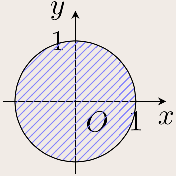


Ví dụ 3.4.

Tính tích phân $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z)dS$;

S là mặt biên của vật thể giới hạn bởi
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.



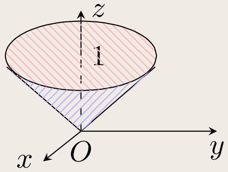


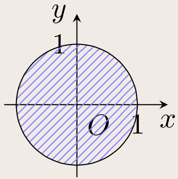
- $S = S_1 \cup S_2$ với $S_1 = \{z = 1; x^2 + y^2 \leq 1\}; S_2 = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq z \leq 1\}$. Ta có:
  $I = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2 + z)dS + \iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2 + z)dS = I_1 + I_2$

Ví dụ 3.4.

Tính tích phân $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z)dS$;

S là mặt biên của vật thể giới hạn bởi
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.



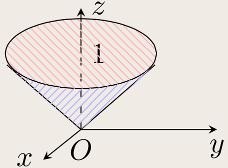


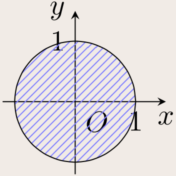
- $S = S_1 \cup S_2$ với $S_1 = \{z = 1; x^2 + y^2 \leq 1\}; S_2 = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq z \leq 1\}$. Ta có:
$I = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2 + z)dS + \iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2 + z)dS = I_1 + I_2$
- Đưa về tp 2 lớp $I_1 = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy;\ I_2 = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}dxdy.$

Ví dụ 3.4.

Tính tích phân $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z)dS$;

S là mặt biên của vật thể giới hạn bởi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$.





- $S = S_1 \cup S_2$ với $S_1 = \{z = 1; x^2 + y^2 \le 1\}$; $S_2 = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \le z \le 1\}$. Ta có:
$$I = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2 + z)dS + \iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2 + z)dS = I_1 + I_2$$
- Đưa về tp 2 lớp $I_1 = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy$; $I_2 = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}dxdy$.
- Chuyển sang tọa độ cực $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[(1 + \sqrt{2})r^2 + \sqrt{2}r + 1\right] rdr = \dfrac{(9 + \sqrt{2})\pi}{6}$

4. Tích phân mặt loại 2

Cho mặt cong S (hữu hạn) trong không gian $Oxyz$, S là mặt định hướng, ứng với phía của véc tơ pháp tuyến của mặt, tại mỗi điểm $M \in (S)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_M}$.

4. Tích phân mặt loại 2

Cho mặt cong S (hữu hạn) trong không gian $Oxyz$, S là mặt định hướng, ứng với phía của véc tơ pháp tuyến của mặt, tại mỗi điểm $M \in (S)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_M}$. Cho ba hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S. Chia nhỏ mặt cong S thành n phần ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = 1, \cdots, n)$.

Cho mặt cong S (hữu hạn) trong không gian $Oxyz$, S là mặt định hướng, ứng với phía của véc tơ pháp tuyến của mặt, tại mỗi điểm $M \in (S)$ có véc tơ pháp tuyến $n_{\vec{M}}$. Cho ba hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S. Chia nhỏ mặt cong S thành n phần ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = 1, \cdots, n)$.
Gọi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ lần lượt là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$, với $\alpha = g(\vec{n}, \vec{Ox})$, $\beta = g(\vec{n}, \vec{Oy})$, $\gamma = g(\vec{n}, \vec{Oz})$.

4. Tích phân mặt loại 2

Cho mặt cong S (hữu hạn) trong không gian $Oxyz$, S là mặt định hướng, ứng với phía của véc tơ pháp tuyến của mặt, tại mỗi điểm $M \in (S)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_M}$. Cho ba hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S. Chia nhỏ mặt cong S thành n phần $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ lấy $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ $(\forall i = 1, \cdots, n)$.
Gọi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ lần lượt là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$, với $\alpha = g(\vec{n}, \vec{Ox})$, $\beta = g(\vec{n}, \vec{Oy})$, $\gamma = g(\vec{n}, \vec{Oz})$. Khi đó các tích phân sau gọi là các tích phân mặt loại 2:

$$I_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha \cdot dS = \pm \iint\limits_S P(x,y,z) \cdot dydz,$$

$$I_2 = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta \cdot dS = \pm \iint\limits_S Q(x,y,z) \cdot dzdx,$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma \cdot dS = \pm \iint\limits_S R(x,y,z) \cdot dxdy.$$

4. Tích phân mặt loại 2

Vậy tích phân mặt loại 2 tổng quát có dạng

$$I = \iint\limits_S P(x, y, z) \cdot dydz + Q(x, y, z) \cdot dzdx + R(x, y, z) \cdot dxdy,$$

trong đó S là mặt cong lấy tích phân ứng với phía của véc tơ pháp tuyến.

Vậy tích phân mặt loại 2 tổng quát có dạng

$$I = \iint_S P(x,y,z)\cdot dydz + Q(x,y,z)\cdot dzdx + R(x,y,z)\cdot dxdy,$$

trong đó S là mặt cong lấy tích phân ứng với phía của véc tơ pháp tuyến.

Chú ý:

- Nếu S là mặt cong trơn, P, Q, R là các hàm liên tục thì tích phân tồn tại.

Vậy tích phân mặt loại 2 tổng quát có dạng

$$I = \iint_S P(x,y,z)\cdot dydz + Q(x,y,z)\cdot dzdx + R(x,y,z)\cdot dxdy,$$

trong đó S là mặt cong lấy tích phân ứng với phía của véc tơ pháp tuyến.

Chú ý:

- Nếu S là mặt cong trơn, P, Q, R là các hàm liên tục thì tích phân tồn tại.
- Tích phân mặt loại 2 phụ thuộc vào phía của mặt cong lấy tích phân. Nếu đổi phía của mặt cong thì tích phân đổi dấu.
  Nếu mặt cong S là kín, ta qui ước phía ngoài là phía dương, phía trong là phía âm.

$$I = \iint_{S^+} P\cdot dydz + Q\cdot dzdx + R\cdot dxdy = -\iint_{S^-} P\cdot dydz + Q\cdot dzdx + R\cdot dxdy,$$

Cách tính tích phân mặt loại 2

Để tính tích phân mặt loại 2 tổng quát

$$I = \iint\limits_S P(x, y, z) \cdot dydz + Q(x, y, z) \cdot dzdx + R(x, y, z) \cdot dxdy,$$

ta tính riêng từng số hạng và đưa về tích phân 2 lớp.
Để tính $I_3 = \iint\limits_S R(x, y, z) \cdot dxdy$, ta đưa về tích phân hai lớp với biến là x và y.
Giả sử biết phương trình mặt cong $(S) : z = z(x, y)$, hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng Oxy là D_{xy}, góc $\gamma = g(\vec{n}, Oz)$.
Khi đó

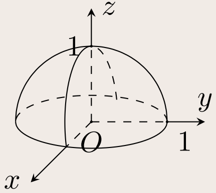
$$I_3 = \pm \iint\limits_{D_{x,y}} R\left[x, y, z(x, y)\right] \cdot dxdy$$

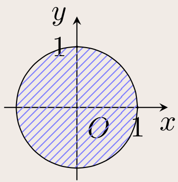
Lấy dấu " $+$ " trước tích phân nếu γ là góc nhọn, lấy dấu " $-$ " trước tích phân nếu γ là góc tù.

Ví dụ 4.1.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S z^2 \cdot dxdy$,

S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

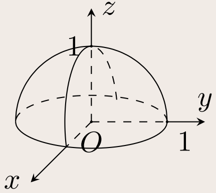


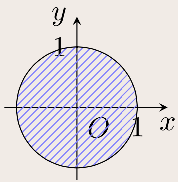


Ví dụ 4.1.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S z^2 \cdot dxdy$,

S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.



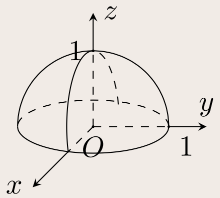


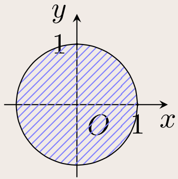
- Phương trình của mặt S là $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng Oxy là miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$; góc $\gamma = g(\vec{n}, \overrightarrow{Oz}) < \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 4.1.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S z^2 \cdot dxdy$,

S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.



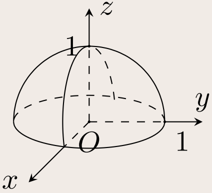


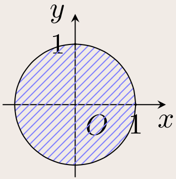
- Phương trình của mặt S là $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng Oxy là miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$; góc $\gamma = g(\vec{n}, \overrightarrow{Oz}) < \dfrac{\pi}{2}$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2) \cdot dxdy$

Ví dụ 4.1.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S z^2 \cdot dxdy$,

S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.





- Phương trình của mặt S là $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng Oxy là miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$; góc $\gamma = g(\vec{n}, \overrightarrow{Oz}) < \dfrac{\pi}{2}$.
- Đưa về tích phân 2 lớp $I = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2) \cdot dxdy$
- Tính tích phân 2 lớp trong tọa độ cực

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Công thức Ostrogradski

Cho V là vật thể hữu hạn, đóng trong không gian có biên S là mặt cong kín, lấy phía ngoài. Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trong miền V. Khi đó

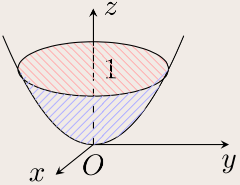
$$I = \iint\limits_{S^+} P \cdot dydz + Q \cdot dzdx + R \cdot dxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

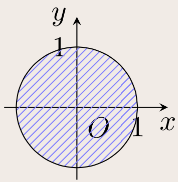
Công thức này gọi là công thức Ostrogradski, cho ta tính tích phân mặt loại 2 bằng cách đưa về tích phân 3 lớp (tương tự như công thức Green).
Chú ý: Khi áp dụng phải kiểm tra điều kiện mặt cong kín, lấy phía ngoài, các hàm phải liên tục cùng các đạo hàm riêng trên toàn miền V.

Ví dụ 4.2.

Tính $I = \iint\limits_S z^2ydydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$,

S là phía ngoài của biên vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$.

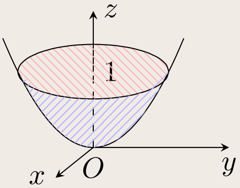


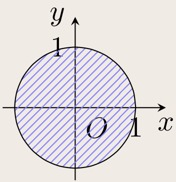


Ví dụ 4.2.

Tính $I = \iint\limits_S z^2 y dydz + x^2 y dzdx + y^2 z dxdy$,

S là phía ngoài của biên vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$.



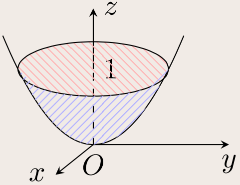


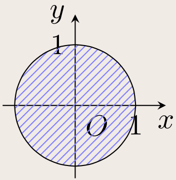
- Áp dụng công thức Ostrogradski, đưa về tích phân 3 lớp
  $I = \iint\limits_S z^2 y dydz + x^2 y dzdx + y^2 z dxdy = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dxdydz.$

Ví dụ 4.2.

Tính $I = \iint\limits_S z^2ydydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$,

S là phía ngoài của biên vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$.



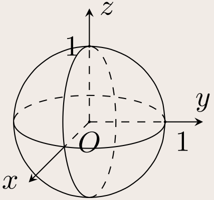


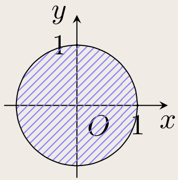
- Áp dụng công thức Ostrogradski, đưa về tích phân 3 lớp
$$I = \iint\limits_S z^2ydydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz.$$
- Tính tích phân 3 lớp trong tọa độ trụ
$$V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{r^2}^1 r^3 dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3\left(1 - r^2\right)dr = \frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 4.3.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S xy^2dydz + yz^2dxdz + zx^2dxdy$,

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

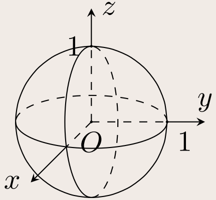


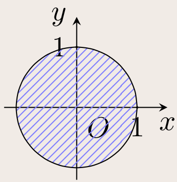


Ví dụ 4.3.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S xy^2dydz + yz^2dxdz + zx^2dxdy$,

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.





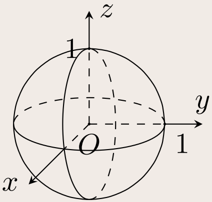
Áp dụng công thức Ostrogradski, đưa về tích phân 3 lớp:

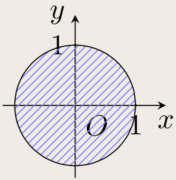
- $I = \iiint\limits_V (y^2 + z^2 + x^2)dxdydz$, trong đó $V = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- Tính tích phân 3 lớp trong tọa độ cầu, xác định cận $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1$

Ví dụ 4.3.

Tính tích phân: $I = \iint\limits_S xy^2dydz + yz^2dxdz + zx^2dxdy$,

S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.





Áp dụng công thức Ostrogradski, đưa về tích phân 3 lớp:

- $I = \iiint\limits_V (y^2 + z^2 + x^2)dxdydz$, trong đó $V = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- Tính tích phân 3 lớp trong tọa độ cầu, xác định cận $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1$
- $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^4 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{5}$