

# BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Năm học 2023 - 2024

## Chương 1. Hàm nhiều biến

### Bài 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

1. Cho  $z = \sqrt[3]{xy}$ , tính  $z'_x(0,0)$ ,  $z'_y(0,0)$ .
2.  $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
3.  $z = \ln \tan \frac{x}{y}$
4.  $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$
5.  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$ .
6.  $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ .
7.  $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$
8.  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
9.  $u = x^{y^2z}$

### Bài 2. Tính các đạo hàm của hàm số hợp:

1. Cho  $z = \ln(u^2 + v^2)$ ,  $u = xy$ ,  $v = e^{x+y}$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
2. Cho  $z = \ln(3x + 2y - 1)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \sin t$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ .
3. Cho  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

4. Cho  $z = f(xy + y^2)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$ .
5. Cho  $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức  $B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ .

### Bài 3. Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1. Tính  $y'(x)$  biết  $y = y(x)$  hàm ẩn xác định hệ thức:  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ .
2. Tính  $y'(x)$  của hàm ẩn xác định bởi phương trình  $xe^y + ye^x = 1$  và từ đó tính  $y'(0)$ .
3. Tính  $z'_x$ ,  $z'_y$  và  $dz$  biết  $z = z(x, y)$  là hàm ẩn xác định bởi
  - (a)  $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ .
  - (b)  $\arctan z + z^2 = e^{xy}$
  - (c)  $z - ye^{x/z} = 0$

$$(d) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$$

$$(f) 2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

$$(g) xyz = \cos(x + y + z)$$

$$(e) x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$(h) 3x + 2y + z = e^{-x-y-z}.$$

4. Tính  $u'_x, u'_y$  biết  $u = x^2 + y^2 + xyz$  và  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $ze^z = ye^x + xe^y$ .

#### Bài 4. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1. Cho hàm số  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Cho  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Chứng minh rằng:  $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$ .

3. Tính  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  biết  $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

4. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số  $f(x, y) = x \cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$ .

5. Tính  $d^2 f(1, 1)$ , biết:  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$ .

6. Tính  $d^2 f(0, 1)$ , biết:  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ .

7. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y) = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 3 \arctan \frac{x}{y}$  tại điểm  $(1, 2)$ .

8. Tìm  $d^2 z$  biết:

$$(a) z = x^2 \ln(x + y)$$

$$(b) z = \arctan \frac{y}{x}$$

#### Bài 5. Tìm cực trị của hàm nhiều biến

$$1. f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

$$5. f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$$

$$2. f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$$

$$6. f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$$

$$3. f(x, y) = xy + 1000 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$7. f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2 \ln(xy).$$

$$8. f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

$$4. f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

$$9. f(x, y) = (x - y)(1 - xy).$$

## Chương 2. Tích phân nhiều lớp

### Bài 1. Tính các tích phân hai lớp sau:

1.  $I = \iint_D (x - y) dx dy$ ;  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x, y = 2 - x^2$
2.  $I = \iint_D (x^2 + 2y) dx dy$ ;  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 1, y = x + 1$ .
3.  $I = \iint_D (x + y) dx dy$ ;  $D$  là miền phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x, y = 0, x + y = 2, x + y = 4$ .
4.  $I = \iint_D (x^3 + 4y) dx dy$ ,  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = 0; x = \sqrt{y}; y = 2 - x$ .
5.  $I = \iint_D xy dx dy$ ,  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $x = 0, y = 1, x^2 + y^2 = 2x$ .
6.  $I = \iint_D (3x + 4y) dx dy$ ,  $D$  là tam giác  $OBC$ ,  $O(0,0), B(-2,2), C(2,0)$ .
7.  $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ,  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $x = 2, xy = 1, y = x$ .
8.  $I = \iint_D xy dx dy$ ,  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$
9.  $I = \iint_D x^2 y dx dy$ ,  $D$  là miền phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, y = 1$
10.  $I = \iint_D (x + 2y) dx dy$ ,  $D$  là tam giác  $ABC$ , với  $A(1,1), B(2,2), C(4,-2)$ .

### Bài 2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:

1.  $I = \iint_D (x^3 - y^3) dx dy$ ;  $D$  giới hạn bởi  $x + y = 1, x + y = 4, x - y = 1, x - y = -1$ .
2.  $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$ ;  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = \sqrt{1 - y^2}, y = x, y = -x$ .

$$3. I = \iint_D (1 + xy) dx dy; \text{ với } D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$4. I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ với } D = \{x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$$

$$5. I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy; \text{ trong đó } D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}.$$

### Bài 3. Tính các tích phân ba lớp sau:

$$1. I = \iiint_V x dx dy dz; V \text{ là tứ diện được giới hạn bởi các mặt } x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$2. I = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz; V \text{ được giới hạn bởi các mặt } z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1.$$

$$3. I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz; V \text{ giới hạn bởi } z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4. I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz; \text{ trong đó } V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$$

$$5. I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; \text{ trong đó } V = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

## Chương 3. Tích phân đường và tích phân mặt

### Bài 1. Tính tích phân đường loại 1

$$1. I = \int_{\widehat{AB}} x^2 ds, \widehat{AB} \text{ là cung } y = \ln x \text{ và } A(1, 0), B(e, 1).$$

$$2. I = \int_{\widehat{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}, \widehat{OA} \text{ là đoạn thẳng nối gốc } O(0, 0) \text{ với điểm } A(1, 2).$$

$$3. I = \int_L (x^2 + y^2) ds, L \text{ là biên của tam giác } OAB \text{ với } O(0, 0), A(1, 1), B(-1, 1).$$

$$4. I = \int_L (x + y) ds; L : x^2 + y^2 = ax, a > 0$$

$$5. I = \int_L (x + y + z) ds; L \text{ là đường cong } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$6. I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds; \quad C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0$$

$$7. I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds; \quad C: x^2 + y^2 = 2y.$$

## Bài 2. Tính tích phân đường loại 2

$$1. I = \int_L ye^{xy} dx + x^4 e^{xy} dy; \text{ trong đó } L: y = x^2 \text{ đi từ } A(0,0) \rightarrow B(1,1).$$

$$2. I = \int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}; \text{ trong đó: } L: \begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$3. I = \oint_L |x| dx + |y| dy; \quad L \text{ là đường gấp khúc nối các điểm } A(1,0) \rightarrow B(0,2) \rightarrow C(-1,0) \rightarrow D(0,-2) \rightarrow A(1,0).$$

$$4. I = \oint_{L^+} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy, \quad L \text{ là biên của tam giác } \triangle LMN, \quad L(1,1), \quad M(2,2), \quad N(1,3).$$

$$5. I = \oint_{L^+} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy; \text{ trong đó } L: x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0.$$

$$6. I = \int_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy} (1 + xy) dx + x^2 e^{xy} dy.$$

$$7. I = \oint_{L^+} (-x^2 y) dx + xy^2 dy; \quad L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

$$8. I = \oint_{L^+} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}; \quad L: x^2 + y^2 = 4.$$

$$9. I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y) dx + (x - y) dy.$$

$$10. I = \int_L (x + y + z) dx - x dy + xy dz; \text{ trong đó } L \text{ là đoạn thẳng đi từ } A(1,2,3) \text{ đến } B(2,4,5).$$

### Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1

1.  $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$ ;  $S$  là phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .
2.  $I = \iint_S (x^2 + z^2) dS$ ; trong đó  $S$  là phần mặt  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z \geq 1$ .
3.  $I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$ ;  $S$  là phần mặt  $x + y + z = 1$  nằm trong góc phần tám thứ nhất.
4.  $\iint_S xyz dS$ ,  $S$  là phần mặt  $z = x^2 + y^2$  giới hạn bởi  $z = 1$ .
5.  $I = \iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$ ; trong đó  $S$  là phần mặt  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  nằm trong góc phần tám thứ nhất.

### Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2

1.  $I = \iint_S z dx dy$ ;  $S$  là phía ngoài mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$ .
2.  $I = \iint_S yz dx dy$ ;  $S$  là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .
3.  $I = \iint_S y^2 dx dz + z^2 dx dy$ ;  $S$  là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2, z = 1$ .

## Chương 4. Phương trình vi phân

### Bài 1. Giải các phương trình tách biến:

1.  $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$
2.  $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$
3.  $y' = (x + y + 1)^2$
4.  $y' = \cos(x - y - 1)$

### Bài 2. Giải các phương trình đẳng cấp:

1.  $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
2.  $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$
3.  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
4.  $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$

$$5. y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$$

$$6. y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$$

**Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:**

$$1. y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

$$4. (x^2 + y)dx = xdy$$

$$2. y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, \quad y(2) = 1.$$

$$5. (y + \ln x)dx - xdy = 0$$

$$3. y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$6. y' \cos y + \sin y = x$$

**Bài 4. Giải các phương trình Bernoulli:**

$$1. y' - 2xy = 3x^3y^2$$

$$3. y' + 2y = y^2e^x$$

$$2. 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

$$4. xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$$

$$5. xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$$

**Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần:**

$$1. (x+y)dx + (x-y)dy = 0; \quad y(0) = 0.$$

$$3. \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

$$2. (1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$4. (1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$$

**Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng:**

$$1. y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$$

$$8. y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

$$2. y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$$

$$9. y'' + 9y = \cos 3x + e^x$$

$$3. 2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$$

$$10. y'' + y = 4xe^x$$

$$4. y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$$

$$11. y'' + y = 6 \sin x$$

$$5. y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2; \\ y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$12. y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$6. y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, \\ y(2) = y'(2) = 0$$

$$13. y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$$

$$7. 4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$$

$$14. y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$$