Chương 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

GV: ThS. Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - ĐHGTVT

2022

Mục lục

Định nghĩa 1.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Tức là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Tức là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

- x là biến độc lập $(x \in D)$,
- $y = y(x)$ là hàm chưa biết (còn gọi là ẩn hàm),

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Tức là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

- x là biến độc lập $(x \in D)$,
- $y = y(x)$ là hàm chưa biết (còn gọi là ẩn hàm),
- $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là đạo hàm cấp $1, 2, \cdots, n$ của hàm $y = y(x)$.

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Tức là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

- x là biến độc lập $(x \in D)$,
- $y = y(x)$ là hàm chưa biết (còn gọi là ẩn hàm),
- $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là đạo hàm cấp $1, 2, \cdots, n$ của hàm $y = y(x)$.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình ấy.

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Tức là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

- x là biến độc lập $(x \in D)$,
- $y = y(x)$ là hàm chưa biết (còn gọi là ẩn hàm),
- $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là đạo hàm cấp $1, 2, \cdots, n$ của hàm $y = y(x)$.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình ấy.

Ví dụ 1.1.

1. Phương trình $y' - x^3 = \cos x + y^2$ là PTVP cấp 1,
2. Phương trình $y'' + y = 3x^5$ là PTVP cấp 2.

Chú ý 1.

1. Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là hàm bậc nhất đối với $y,\ y', y'', \cdots, y^{(n)}$.

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Chú ý 1.

1. Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là hàm bậc nhất đối với $y,\ y', y'',\ \cdots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

với $a_1,\ a_2, \cdots, a_n,\ f$ là các hàm cho trước của biến x.

1. Tổng quát về phương trình vi phân

Chú ý 1.

1. Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là hàm bậc nhất đối với $y,\ y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

   với $a_1,\ a_2, \cdots, a_n,\ f$ là các hàm cho trước của biến x.

2. Nếu hàm chưa biết phụ thuộc vào nhiều biến thì ta có phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Chú ý 1.

1. Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là hàm bậc nhất đối với $y,\ y', y'',\ \cdots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

   với $a_1,\ a_2, \cdots, a_n,\ f$ là các hàm cho trước của biến x.

2. Nếu hàm chưa biết phụ thuộc vào nhiều biến thì ta có phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Trong chương trình, chúng ta chỉ xét các phương trình vi phân mà hàm chưa biết y chỉ phụ thuộc vào một biến độc lập x (gọi là phương trình vi phân thường) và cũng hạn chế chủ yếu xét các phương trình vi phân cấp 1, cấp 2.

Định nghĩa 1.2.

1. Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình, tức là khi thay y cùng với các đạo hàm của nó vào phương trình ta được đồng nhất thức.

Định nghĩa 1.2.

1. Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình, tức là khi thay y cùng với các đạo hàm của nó vào phương trình ta được đồng nhất thức.
2. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Định nghĩa 1.2.

1. Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình, tức là khi thay y cùng với các đạo hàm của nó vào phương trình ta được đồng nhất thức.
2. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Chú ý 2.

1. Phương trình vi phân cấp n có lớp các nghiệm $y = y(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$ với $C_1, C_2, \cdots C_n$ là các hằng số tùy ý. Khi đó ta gọi đây là nghiệm tổng quát của phương trình.

Định nghĩa 1.2.

1. Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình, tức là khi thay y cùng với các đạo hàm của nó vào phương trình ta được đồng nhất thức.
2. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Chú ý 2.

1. Phương trình vi phân cấp n có lớp các nghiệm $y = y(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$ với $C_1, C_2, \cdots C_n$ là các hằng số tùy ý. Khi đó ta gọi đây là nghiệm tổng quát của phương trình.
2. Trong nhiều trường hợp, ta tìm được nghiệm của phương trình dưới dạng hàm ẩn $y = y(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$ xác định bởi: $\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0$
   Khi đó ta gọi phương trình xác định nghiệm tổng quát dưới dạng hàm ẩn là tích phân tổng quát của phương trình.

Dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0,$$

trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ là đạo hàm của hàm $y(x)$.

Dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0,$$

trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ là đạo hàm của hàm $y(x)$.
Phương trình vi phân cấp 1 còn được cho dưới dạng

$$y' = f(x, y),$$

hoặc

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0,$$

trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ là đạo hàm của hàm $y(x)$.
Phương trình vi phân cấp 1 còn được cho dưới dạng

$$y' = f(x, y),$$

hoặc

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là hàm

$$y = \varphi(x, C)$$

thỏa mãn phương trình với mọi biến x, với mọi hằng số C.

Tích phân tổng quát có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

trong đó x là biến, C là hằng số, $y = y(x)$ là nghiệm cho dưới dạng hàm ẩn.

Tích phân tổng quát có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

trong đó x là biến, C là hằng số, $y = y(x)$ là nghiệm cho dưới dạng hàm ẩn.
Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

là bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện ban đầu (2).

Dạng 1.

$$f(x)dx = g(y)dy$$

2.1. Phương trình tách biến (có biến phân ly)

Dạng 1.

$$f(x)dx = g(y)dy$$

Cách giải: Tích phân 2 vế: $\displaystyle\int f(x)dx = \int g(y)dy$

$$\Longleftrightarrow F(x) = G(y) + C$$

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

- Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0$ (tách biến).

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

- Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0$ (tách biến).
- Tích phân 2 vế phương trình: $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C.$

Ví dụ 2.1.

Giải phương trình:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

- Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0$ (tách biến).
- Tích phân 2 vế phương trình: $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C.$
- Tích phân tổng quát của phương trình là $\ln\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = C.$

Ví dụ 2.2.

Giải phương trình vi phân

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Ví dụ 2.2.

Giải phương trình vi phân

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Ta thấy $y = 1$ và $y = -1$ là hai nghiệm của phương trình.
Xét $y \neq \pm 1$, phương trình đưa được về dạng tách biến

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Ví dụ 2.2.

Giải phương trình vi phân

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Ta thấy $y = 1$ và $y = -1$ là hai nghiệm của phương trình.
Xét $y \neq \pm 1$, phương trình đưa được về dạng tách biến

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-ydy}{\sqrt{1-y^2} =} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$$

Chú ý 3.

Nếu phương trình có dạng $y' = f(ax + by + c)$ với $a,\ b,\ c$ là các hằng số thì ta đặt $z = ax + by + c$. Từ đó $z' = a + by'$, đưa phương trình về ẩn hàm $z = z(x)$:

$$z' = a + bf(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx, \text{ nếu } a + bf(z) \neq 0.$$

Chú ý 3.

Nếu phương trình có dạng $y' = f(ax + by + c)$ với $a,\ b,\ c$ là các hằng số thì ta đặt $z = ax + by + c$. Từ đó $z' = a + by'$, đưa phương trình về ẩn hàm $z = z(x)$:

$$z' = a + bf(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx, \text{ nếu } a + bf(z) \neq 0.$$

Ví dụ 2.3.

Giải phương trình: $y' = \cos(y + x)$

Đặt $z = y + x$, ta có $z' = y' + 1$, ta đưa về phương trình đối với $z = z(x)$:

$z' = \cos z + 1 \Leftrightarrow \dfrac{dz}{dx} = \cos z + 1 \Leftrightarrow \dfrac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = dx$ (nếu $1 + \cos z \neq 0$)

Chú ý 3.

Nếu phương trình có dạng $y' = f(ax + by + c)$ với $a,\ b,\ c$ là các hằng số thì ta đặt $z = ax + by + c$. Từ đó $z' = a + by'$, đưa phương trình về ẩn hàm $z = z(x)$:

$$z' = a + bf(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx, \text{ nếu } a + bf(z) \neq 0.$$

Ví dụ 2.3.

Giải phương trình: $y' = \cos(y + x)$

Đặt $z = y + x$, ta có $z' = y' + 1$, ta đưa về phương trình đối với $z = z(x)$:

$z' = \cos z + 1 \Leftrightarrow \dfrac{dz}{dx} = \cos z + 1 \Leftrightarrow \dfrac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = dx$ (nếu $1 + \cos z \neq 0$)

Tích phân 2 vế $\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{d(z/2)}{\cos^2(z/2)} = \int dx \Leftrightarrow \tan\frac{z}{2} = x + C$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{x+y}{2} = x + C$ (với C là hằng số tùy ý).

Xét $1 + \cos z = 0$.

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình:

$$y' = (x + y + 1)^2$$

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình:

$$y' = (x + y + 1)^2$$

Đặt $x + y + 1 = z$, ta có $z' = 1 + y'$, đưa về phương trình đối với ẩn hàm $z = z(x)$:

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình:

$$y' = (x + y + 1)^2$$

Đặt $x + y + 1 = z$, ta có $z' = 1 + y'$, đưa về phương trình đối với ẩn hàm $z = z(x)$:

$$z' = 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{1 + z^2} = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \arctan z = x + C$$

Ví dụ 2.4.

Giải phương trình:

$$y' = (x+y+1)^2$$

Đặt $x+y+1 = z$, ta có $z' = 1+y'$, đưa về phương trình đối với ẩn hàm $z = z(x)$:

$$z' = 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \arctan z = x + C$$

Tích phân tổng quát của phương trình là: $\arctan(x+y+1) = x + C$ với C là hằng số.

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

2.2. Phương trình vi phân đẳng cấp

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$, ta đưa về phương trình với ẩn hàm $u = u(x)$:

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$, ta đưa về phương trình với ẩn hàm $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx}.x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = f(u) - u$$

2.2. Phương trình vi phân đẳng cấp

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$, ta đưa về phương trình với ẩn hàm $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx}.x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = f(u) - u$$

1. Xét trường hợp $f(u) - u = 0$ có thể cho nghiệm của phương trình.

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$, ta đưa về phương trình với ẩn hàm $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx}.x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = f(u) - u$$

1. Xét trường hợp $f(u) - u = 0$ có thể cho nghiệm của phương trình.
2. Xét trường hợp $f(u) - u \neq 0$, ta đưa về phương trình tách biến:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Dạng 2.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải: Đặt $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$, ta đưa về phương trình với ẩn hàm $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx}.x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = f(u) - u$$

1. Xét trường hợp $f(u) - u = 0$ có thể cho nghiệm của phương trình.
2. Xét trường hợp $f(u) - u \neq 0$, ta đưa về phương trình tách biến:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Từ đây ta sẽ tìm được tích phân tổng quát của phương trình.

Ví dụ 2.5.

Giải phương trình vi phân $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

Ví dụ 2.5.

Giải phương trình vi phân $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = u'.x + u$. Phương trình trở thành:

$$u'.x + u = e^{-u} + u$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = e^{-u}$$

$$\Leftrightarrow e^{u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{u}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{y/x} = \ln|x| + C, \text{ với C hằng số.}$$

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \sin \dfrac{y}{x}$

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân: $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

- Đặt $u = \frac{y}{x} \Longrightarrow y' = u'.x + u$. Phương trình trở thành:
  $\frac{du}{dx}.x + u = u + \sin u \Longleftrightarrow \frac{du}{dx}.x = \sin u$

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = u'.x + u$. Phương trình trở thành:
  $\dfrac{du}{dx}.x + u = u + \sin u \Longleftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \sin u$
- Nhận thấy $u = k\pi \Leftrightarrow y = k\pi x, k \in \mathbb{Z}$ là các nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = u'.x + u$. Phương trình trở thành:
  $\dfrac{du}{dx}.x + u = u + \sin u \Longleftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \sin u$
- Nhận thấy $u = k\pi \Leftrightarrow y = k\pi x, k \in \mathbb{Z}$ là các nghiệm của phương trình.
- Xét $u \neq k\pi$, phương trình trở thành $\dfrac{du}{\sin u} = \dfrac{dx}{x} \Longleftrightarrow \ln|\tan\dfrac{u}{2}| = \ln|x| + \ln C$

Ví dụ 2.6.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = u'.x + u$. Phương trình trở thành:
$$\frac{du}{dx}.x + u = u + \sin u \Longleftrightarrow \frac{du}{dx}.x = \sin u$$
- Nhận thấy $u = k\pi \Leftrightarrow y = k\pi x, k \in \mathbb{Z}$ là các nghiệm của phương trình.
- Xét $u \neq k\pi$, phương trình trở thành $\dfrac{du}{\sin u} = \dfrac{dx}{x} \Longleftrightarrow \ln|\tan\dfrac{u}{2}| = \ln|x| + \ln C$
- Tích phân tổng quát của phương trình là: $\tan\dfrac{y}{2x} = C.x$.

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u'.x + u$, phương trình trở thành:

  $u'.x + u = \dfrac{1+u}{u-1} \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$.

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u'.x + u$, phương trình trở thành:
  $u'.x + u = \dfrac{1+u}{u-1} \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$.
- Nếu $1 + 2u - u^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u & = 1-\sqrt{2} \\ u & = 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = & (1-\sqrt{2})x \\ y = & (1+\sqrt{2})x \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u'.x + u$, phương trình trở thành:

  $u'.x + u = \dfrac{1+u}{u-1} \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$.

- Nếu $1 + 2u - u^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u & = 1-\sqrt{2} \\ u & = 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = & (1-\sqrt{2})x \\ y = & (1+\sqrt{2})x \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình.

- Nếu $1 + 2u - u^2 \neq 0$:

  $\displaystyle\int \frac{(u-1)du}{u^2-2u-1} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(u^2-2u-1\right) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln C.$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u - 1 = \frac{C}{Cx^2} \Longleftrightarrow \left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1\right)x^2 = C$$

Ví dụ 2.7.

Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

- Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u'.x + u$, phương trình trở thành:
  $u'.x + u = \dfrac{1+u}{u-1} \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx}.x = \dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$.
- Nếu $1 + 2u - u^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u & = 1-\sqrt{2} \\ u & = 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = & (1-\sqrt{2})x \\ y = & (1+\sqrt{2})x \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình.
- Nếu $1 + 2u - u^2 \neq 0$:
  $\displaystyle\int \frac{(u-1)du}{u^2-2u-1} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(u^2-2u-1\right) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln C.$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u - 1 = \frac{C}{Cx^2} \Longleftrightarrow \left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1\right)x^2 = C$$

- Tích phân tổng quát của phương trình là: $y^2 - 2xy - y^2 = C$.

Dạng 3.

$$y' + p(x).y = f(x) \text{ với } p(x), f(x) \text{ là các hàm đã biết}$$

Dạng 3.

$$y' + p(x).y = f(x) \text{ với } p(x), f(x) \text{ là các hàm đã biêt}$$

1. $f(x)$ được gọi là vế phải của phương trình.
2. Nếu vế phải $f(x) = 0$ thì ta có phương trình thuần nhất.
3. Nếu vế phải $f(x) \neq 0$ thì ta có phương trình không thuần nhất.

Dạng 3.

$$y' + p(x).y = f(x) \text{ với } p(x), f(x) \text{ là các hàm đã biết}$$

1. $f(x)$ được gọi là vế phải của phương trình.
2. Nếu vế phải $f(x) = 0$ thì ta có phương trình thuần nhất.
3. Nếu vế phải $f(x) \neq 0$ thì ta có phương trình không thuần nhất.

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

, C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.8.

Giải phương trình vi phân

$$y' + 2xy = x^3 + x$$

Ví dụ 2.8.

Giải phương trình vi phân

$$y' + 2xy = x^3 + x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với $p(x) = 2x, f(x) = x^3 + x$.
Áp dụng công thức nghiệm phương trình tuyến tính ta có:

Ví dụ 2.8.

Giải phương trình vi phân

$$y' + 2xy = x^3 + x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với $p(x) = 2x, f(x) = x^3 + x$.
Áp dụng công thức nghiệm phương trình tuyến tính ta có:

- $y = e^{\int -2xdx}\left(C + \int e^{\int 2xdx}(x^3 + x)dx\right)$
- $y = e^{-x^2}\left(C + \int e^{x^2}(x^3 + x)dx\right)$
- $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 + 1) - \int \frac{1}{2}e^{x^2}2xdx\right)$
- $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 + 1) - \frac{1}{2}e^{x^2}\right) = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2}.$

Ví dụ 2.9.

Giải phương trình vi phân: $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, $y(2) = 1$.

Ví dụ 2.9.

Giải phương trình vi phân: $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}, \; y(2) = 1.$

- Đây là PT vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = 1, f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

Ví dụ 2.9.

Giải phương trình vi phân: $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}, \ y(2) = 1.$

- Đây là PT vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = 1, f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
- Nghiệm tổng quát là:$y = e^{-\int dx}\left(C + \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1-x} e^{\int dx} dx\right)$
- $y = e^{-x}\left(C + \displaystyle\int \frac{dx}{1-x}\right)$
- $y = e^{-x}(C - \ln|1-x|)$
- Từ $y(2) = 1$ suy ra $C = e^2$. Vậy nghiệm của bài toán là $y = e^{-x}(e^2 - \ln|1-x|)$.

2.4. Phương trình Becnoulli

Dạng 4.

$$y' + p(x).y = f(x).y^{\alpha}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm, α là đã biêt và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$.

2.4. Phương trình Becnoulli

Dạng 4.

$$y' + p(x).y = f(x).y^{\alpha}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm, α là đã biêt và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$.

1. Xét $y = 0$ có thể là nghiệm của phương trình.

Dạng 4.

$$y' + p(x).y = f(x).y^{\alpha}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm, α là đã biêt và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$.

1. Xét $y = 0$ có thể là nghiệm của phương trình.
2. Xét $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^{α} ta được:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x).$$

Dạng 4.

$$y' + p(x).y = f(x).y^{\alpha}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm, α là đã biêt và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$.

1. Xét $y = 0$ có thể là nghiệm của phương trình.
2. Xét $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^{α} ta được:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x).$$

Đặt $y^{1-\alpha} = z \Rightarrow (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$. Nhân cả 2 vế của phương trình với $1-\alpha$ và thay z, z' vào ta có:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x).$$

Dạng 4.

$$y' + p(x).y = f(x).y^{\alpha}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm, α là đã biêt và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$.

1. Xét $y = 0$ có thể là nghiệm của phương trình.
2. Xét $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^{α} ta được:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x).$$

Đặt $y^{1-\alpha} = z \Rightarrow (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$. Nhân cả 2 vế của phương trình với $1-\alpha$ và thay z, z' vào ta có:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với hàm $z = z(x)$. Áp dụng công thức nghiệm, ta tìm được $z(x)$ rồi suy ra tích phân tổng quát của phương trình ban đầu.

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 5$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 5$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phần trình trở thành y^5: $\dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{1}{2y^4} = 5x^2 \quad (*)$

  Đặt $t = \dfrac{1}{y^4} \Rightarrow t' = \dfrac{-4y'}{y^5}$.

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 5$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phần trình trở thành y^5: $\dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{1}{2y^4} = 5x^2 \quad (*)$

  Đặt $t = \dfrac{1}{y^4} \Rightarrow t' = \dfrac{-4y'}{y^5}$. Phương trình $(*)$ có dạng :

  $-\dfrac{t'}{4} - \dfrac{t}{2x} = 5x^2 \Leftrightarrow t' + \dfrac{2}{x}t = -20x^2$

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 5$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phần trình trở thành y^5: $\dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{1}{2y^4} = 5x^2 \quad (*)$

  Đặt $t = \dfrac{1}{y^4} \Rightarrow t' = \dfrac{-4y'}{y^5}$. Phương trình $(*)$ có dạng :

  $-\dfrac{t'}{4} - \dfrac{t}{2x} = 5x^2 \Leftrightarrow t' + \dfrac{2}{x}t = -20x^2$
- $\Leftrightarrow t = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\displaystyle\int -20x^2 e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + C\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(C - 4x^5\right)$

Ví dụ 2.10.

Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 5$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phần trình trở thành y^5: $\dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{1}{2y^4} = 5x^2 \quad (*)$

  Đặt $t = \dfrac{1}{y^4} \Rightarrow t' = \dfrac{-4y'}{y^5}$. Phương trình $(*)$ có dạng :

  $-\dfrac{t'}{4} - \dfrac{t}{2x} = 5x^2 \Leftrightarrow t' + \dfrac{2}{x}t = -20x^2$
- $\Leftrightarrow t = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\displaystyle\int -20x^2 e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(C - 4x^5\right)$
- Tích phân tổng quát của phương trình là: $\Leftrightarrow \dfrac{1}{y^4} = \dfrac{1}{x^2}\left(C - 4x^5\right)$

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân: $y' - y\tan x = y^4 \cos x$

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân: $y' - y\tan x = y^4 \cos x$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 4$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân: $y' - y\tan x = y^4 \cos x$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 4$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành $y^{-4}y' - \tan x.y^{-3} = \cos x$. Đặt $z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$ và thay vào phương trình, ta có $z' + 3\tan x.z = -3\cos x$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân: $y' - y\tan x = y^4\cos x$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 4$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành $y^{-4}y' - \tan x.y^{-3} = \cos x$. Đặt $z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$ và thay vào phương trình, ta có $z' + 3\tan x.z = -3\cos x$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.
- Áp dụng công thức nghiệm $z = e^{-3\int \tan x dx}\left(C - \int 3\cos x e^{3\int \tan x dx}.dx\right)$.

Ví dụ 2.11.

Giải phương trình vi phân: $y' - y\tan x = y^4 \cos x$

Đây là phương trình Becnoulli với $\alpha = 4$.

- $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành $y^{-4}y' - \tan x.y^{-3} = \cos x$. Đặt $z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$ và thay vào phương trình, ta có $z' + 3\tan x.z = -3\cos x$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.
- Áp dụng công thức nghiệm $z = e^{-3\int \tan x dx}\left(C - \int 3\cos x e^{3\int \tan x dx}.dx\right)$.
- Tích phân tổng quát của phương trình là $\dfrac{1}{y^3} = \cos^3 x(C - 3\tan x)$.

Dạng 5.

Phương trình có dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,
trong đó vế trái $Pdx + Qdy$ là biểu thức vi phân toàn phần của một hàm hai biến nào đó.
Tức là tồn tại một hàm $u(x,y)$ sao cho

$$du = Pdx + Qdy \Longleftrightarrow \begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$$

Dạng 5.

Phương trình có dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,
trong đó vế trái $Pdx + Qdy$ là biểu thức vi phân toàn phần của một hàm hai biến nào đó.
Tức là tồn tại một hàm $u(x,y)$ sao cho

$$du = Pdx + Qdy \Longleftrightarrow \begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$$

Định lý 2.1.

Biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm hai biến trong miền D (tập xác định) khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ tại } \forall (x,y) \in D$$

1.5. Phương trình vi phân toàn phần

Để giải phương trình vi phân toàn phần $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ta làm như sau:

1.5. Phương trình vi phân toàn phần

Để giải phương trình vi phân toàn phần $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ta làm như sau:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x, \ \forall (x,y) \in D$.
2. Tìm hàm $u(x,u)$ theo một trong hai công thức:

Để giải phương trình vi phân toàn phần $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ta làm như sau:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x, \; \forall (x, y) \in D$.
2. Tìm hàm $u(x, u)$ theo một trong hai công thức:

   1. hoặc $u(x, y) = \int\limits_{x^0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$

Để giải phương trình vi phân toàn phần $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ta làm như sau:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x, \ \forall (x,y) \in D$.
2. Tìm hàm $u(x,u)$ theo một trong hai công thức:
   1. hoặc $u(x,y) = \displaystyle\int_{x^0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$
   2. hoặc $u(x,y) = \displaystyle\int_{x^0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$

1.5. Phương trình vi phân toàn phần

Để giải phương trình vi phân toàn phần $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ta làm như sau:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x,\ \forall (x,y) \in D$.
2. Tìm hàm $u(x,u)$ theo một trong hai công thức:
    1. hoặc $u(x,y) = \int\limits_{x^0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$
    2. hoặc $u(x,y) = \int\limits_{x^0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$

    Khi đó ta có: $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$
3. Phương trình trở thành $du = 0$. Tích phân tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = C,\ \text{với } C \text{ hằng số tùy ý.}$$

Ví dụ 2.12.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \;\; y(0) = 2.$$

Ví dụ 2.12.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \;\; y(0) = 2.$$

- Đặt $P = (x + e^{x/y}), \;\; Q = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$, ta có $P'_y = Q'_x = -\frac{x}{y^2}.e^{x/y}$.

Ví dụ 2.12.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$(x+e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0,\ \ y(0) = 2.$$

- Đặt $P = (x+e^{x/y}),\ \ Q = e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, ta có $P'_y = Q'_x = -\frac{x}{y^2}.e^{x/y}$.
- Hàm $u(x,y) = \int\limits_0^x (x+e^{x/y}).dx + \int\limits_1^y e^{0/y}\left(1-\frac{0}{y}\right).dy = \frac{x^2}{2} + ye^{x/y} + 1.$

Ví dụ 2.12.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$(x+e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0,\ \ y(0) = 2.$$

- Đặt $P = (x+e^{x/y}),\ \ Q = e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$, ta có $P'_y = Q'_x = -\dfrac{x}{y^2}.e^{x/y}$.
- Hàm $u(x,y) = \displaystyle\int_0^x (x+e^{x/y}).dx + \int_1^y e^{0/y}\left(1-\frac{0}{y}\right).dy = \frac{x^2}{2} + ye^{x/y} + 1.$
- Khi đó $du = P.dx + Q.dy$ và phương trình trở thành $du = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{2} + ye^{x/y} - 1 = C$

Ví dụ 2.12.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \;\; y(0) = 2.$$

- Đặt $P = (x + e^{x/y}), \;\; Q = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$, ta có $P'_y = Q'_x = -\frac{x}{y^2}.e^{x/y}$.
- Hàm $u(x,y) = \int\limits_0^x (x + e^{x/y}).dx + \int\limits_1^y e^{0/y}\left(1 - \frac{0}{y}\right).dy = \frac{x^2}{2} + ye^{x/y} + 1.$
- Khi đó $du = P.dx + Q.dy$ và phương trình trở thành $du = 0 \iff \frac{x^2}{2} + ye^{x/y} - 1 = C$
- Từ điều kiện ban đầu: $y(0) = 2 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{2} + ye^{x/y} = 2.$

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân:

$$(\cos x - x \sin x)y dx + (x \cos x - 2y) dy = 0$$

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân:

$$(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$$

- Đặt $P = (\cos x - x\sin x)y,\ Q = x\cos x - 2y$
  $\Rightarrow P'_y = Q'_x = \cos x - x\sin x \Rightarrow$ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân:

$$(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$$

- Đặt $P = (\cos x - x\sin x)y,\ Q = x\cos x - 2y$
$\Rightarrow P'_y = Q'_x = \cos x - x\sin x \Rightarrow$ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.
- Chọn $x_0 = y_0 = 0$, hàm $u(x, y) = \int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y (x\cos x - 2y)dy = xy\cos x - y^2$.

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân:

$$(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$$

- Đặt $P = (\cos x - x\sin x)y,\ Q = x\cos x - 2y$
$\Rightarrow P'_y = Q'_x = \cos x - x\sin x \Rightarrow$ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.
- Chọn $x_0 = y_0 = 0$, hàm $u(x,y) = \int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y (x\cos x - 2y)dy = xy\cos x - y^2$.
- Khi đó $du = P.dx + Q.dy$ và phương trình trở thành $du = 0$.

Ví dụ 2.13.

Giải phương trình vi phân:

$$(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$$

- Đặt $P = (\cos x - x\sin x)y,\ Q = x\cos x - 2y$
$\Rightarrow P'_y = Q'_x = \cos x - x\sin x \Rightarrow$ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.
- Chọn $x_0 = y_0 = 0$, hàm $u(x,y) = \int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y (x\cos x - 2y)dy = xy\cos x - y^2$.
- Khi đó $du = P.dx + Q.dy$ và phương trình trở thành $du = 0$.
- Tích phân tổng quát: $xy\cos x - y^2 = C$

- Phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

- Phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

- Trong một số trường hợp, ta có thể đưa về dạng: $y'' = f(x, y, y')$
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là hàm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình với mọi hằng số C_1, C_2.

- Phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

- Trong một số trường hợp, ta có thể đưa về dạng: $y'' = f(x, y, y')$
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là hàm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình với mọi hằng số C_1, C_2.
- Tích phân tổng quát của phương trình có dạng

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

- Phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

- Trong một số trường hợp, ta có thể đưa về dạng: $y'' = f(x, y, y')$
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là hàm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình với mọi hằng số C_1, C_2.
- Tích phân tổng quát của phương trình có dạng

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

- Bài toán Cauchy của phương trình vi phân cấp 2 là bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' = f(x, y, y')$ thỏa mãn điều kiện ban đầu: $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$

3.1. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

Dạng 1.

Vế phải của phương trình chỉ phụ thuộc vào x:

$$y'' = f(x)$$

Dạng 1.

Vế phải của phương trình chỉ phụ thuộc vào x:

$$y'' = f(x)$$

Cách giải: Tích phân cả 2 vế của phương trình ta được:

$$\iff y' = \int f(x)dx$$

$$\iff y' = F(x) + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1)\, dx + C_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

Ví dụ 3.1.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' = \sin x$ thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.1.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' = \sin x$ thỏa mãn điều kiện ban đầu
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

- Tích phân 2 vế của phương trình ta có:

$$y' = \int \sin x dx \Leftrightarrow y' = -\cos x + C_1$$

Ví dụ 3.1.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' = \sin x$ thỏa mãn điều kiện ban đầu
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

- Tích phân 2 vế của phương trình ta có:

$$y' = \int \sin x dx \Leftrightarrow y' = -\cos x + C_1$$

- Tích phân lần nữa, ta được

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx \Leftrightarrow y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

Ví dụ 3.1.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' = \sin x$ thỏa mãn điều kiện ban đầu
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

- Tích phân 2 vế của phương trình ta có:

$$y' = \int \sin x dx \Leftrightarrow y' = -\cos x + C_1$$

- Tích phân lần nữa, ta được

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx \Leftrightarrow y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

- Từ điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_2 + 0 = 0 \\ C_1 - 1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' = \sin x$ thỏa mãn điều kiện ban đầu
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

- Tích phân 2 vế của phương trình ta có:

$$y' = \int \sin x dx \Leftrightarrow y' = -\cos x + C_1$$

- Tích phân lần nữa, ta được

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx \Leftrightarrow y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

- Từ điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_2 + 0 = 0 \\ C_1 - 1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$
- Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện là: $y = -\sin x + 2x$.

3.1. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

Dạng 2.

Vế phải của phương trình không chứa y:

$$y'' = f(x, y')$$

Dạng 2.

Vế phải của phương trình không chứa y:

$$y'' = f(x, y')$$

Cách giải: Đặt $y' = p(x)$, khi đó $y'' = p'$. Phương trình trở thành

$$y' = f(x, p)$$

3.1. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

Dạng 2.

Vế phải của phương trình không chứa y:

$$y'' = f(x, y')$$

Cách giải: Đặt $y' = p(x)$, khi đó $y'' = p'$. Phương trình trở thành

$$y' = f(x, p)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1 đối với ẩn hàm $p = p(x)$. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát của nó là

$$y' = p = \varphi(x, C_1)$$

3.1. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

Dạng 2.

Vế phải của phương trình không chứa y:

$$y'' = f(x, y')$$

Cách giải: Đặt $y' = p(x)$, khi đó $y'' = p'$. Phương trình trở thành

$$y' = f(x, p)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1 đối với ẩn hàm $p = p(x)$. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát của nó là

$$y' = p = \varphi(x, C_1)$$

Tích phân 2 vế, ta được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

Ví dụ 3.2.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(2) = 1 \\ y'(2) = -1 \end{cases}$

Ví dụ 3.2.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(2) = 1 \\ y'(2) = -1 \end{cases}$

- Đặt $y' = p$, PT trở thành PTVT tuyến tính cấp 1 $p' - \dfrac{p}{x-1} = x(x-1)$

Ví dụ 3.2.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(2) = 1 \\ y'(2) = -1 \end{cases}$

- Đặt $y' = p$, PT trở thành PTVT tuyến tính cấp 1 $p' - \dfrac{p}{x-1} = x(x-1)$
- Áp dụng công thức nghiệm tổng quát ta có:

$$p = e^{\int \frac{dx}{x-1}} \left(C_1 + \int x(x-1)e^{-\int \frac{dx}{x-1}} dx \right) = (x-1)\left(\int x dx + C_1 \right)$$

$$y' = p = (x-1)\left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1 x - C_1$$

Ví dụ 3.2.

Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(2) = 1 \\ y'(2) = -1 \end{cases}$

- Đặt $y' = p$, PT trở thành PTVT tuyến tính cấp 1 $p' - \dfrac{p}{x-1} = x(x-1)$
- Áp dụng công thức nghiệm tổng quát ta có:
  $p = e^{\int \frac{dx}{x-1}} \left(C_1 + \int x(x-1)e^{-\int \frac{dx}{x-1}} dx \right) = (x-1)\left(\int x dx + C_1 \right)$
  $y' = p = (x-1)\left(\dfrac{x^2}{2} + C_1 \right) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 x - C_1$
- Tích phân 2 vế, ta được

$$y = \int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1 x - C_1 \right) dx$$

- Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 x + C_2,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 x + C_2,$$

  với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
- Từ điều kiện ban đầu $y'(2) = -1$ suy ra $C_1 = -3$ nên

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + C_2$$

- Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 x + C_2,$$

  với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
- Từ điều kiện ban đầu $y'(2) = -1$ suy ra $C_1 = -3$ nên

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + C_2$$

- Từ điều kiện $y(2) = 1$ suy ra $C_2 = \frac{1}{3}$ nên nghiệm riêng cần tìm là:

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}$$

3.2. PT vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

trong đó p, q là các hằng số đã biết; $f(x)$ (vế phải) là hàm cho trước.

- Nếu vế phải $f(x) = 0$, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$.
- Nếu vế phải $f(x) \neq 0$ thì ta có phương trình không thuần nhất.

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

trong đó p, q là các hằng số đã biết; $f(x)$ (vế phải) là hàm cho trước.

- Nếu vế phải $f(x) = 0$, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$.
- Nếu vế phải $f(x) \neq 0$ thì ta có phương trình không thuần nhất.

Định lý 3.1.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1):

$$\boxed{y = \overline{y} + Y}$$

- $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng;
- Y là một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2), ta sẽ đi tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó dạng $y = e^{kx}$ với k là hằng số.

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2), ta sẽ đi tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó dạng $y = e^{kx}$ với k là hằng số.
Thay $y = e^{kx}, y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$ vào phương trình ta được:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2), ta sẽ đi tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó dạng $y = e^{kx}$ với k là hằng số.
Thay $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ vào phương trình ta được:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

Như vậy nếu k thỏa mãn phương trình (3) thì $y = e^{kx}$ sẽ là một nghiệm của phương trình thuần nhất (2).

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình đặc trưng (3) có $\Delta = p^2 - 4q$, có 3 trường hợp xảy ra:

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình đặc trưng (3) có $\Delta = p^2 - 4q$, có 3 trường hợp xảy ra:

1. Nếu (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$ ($\Delta > 0$) thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình đặc trưng (3) có $\Delta = p^2 - 4q$, có 3 trường hợp xảy ra:

1. Nếu (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$ ($\Delta > 0$) thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

2. Nếu (3) có nghiệm kép $k_1 = k_2$ ($\Delta = 0$) thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\bar{y} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình đặc trưng (3) có $\Delta = p^2 - 4q$, có 3 trường hợp xảy ra:

1. Nếu (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$ $(\Delta > 0)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

2. Nếu (3) có nghiệm kép $k_1 = k_2$ $(\Delta = 0)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\overline{y} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}}$$

3. Nếu (3) có nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(\Delta < 0)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}$$

Ví dụ 3.3.

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

Ví dụ 3.3.

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

1. Phương trình đặc trưng là $k^2 - 5k + 6 = 0 \Longleftrightarrow k_1 = 2, k_2 = 3$.
   Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Ví dụ 3.3.

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

1. Phương trình đặc trưng là $k^2 - 5k + 6 = 0 \iff k_1 = 2, k_2 = 3$.
   Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. Phương trình đặc trưng là $k^2 - 6k + 9 = 0 \iff k_1 = k_2 = 3$.
   Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:
$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$$

Ví dụ 3.3.

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

1. Phương trình đặc trưng là $k^2 - 5k + 6 = 0 \iff k_1 = 2, k_2 = 3$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. Phương trình đặc trưng là $k^2 - 6k + 9 = 0 \iff k_1 = k_2 = 3$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

3. Phương trình đặc trưng là $k^2 + 2k + 5 = 0 \iff k_{1,2} = -1 \pm 2i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:
$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Ta gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Ta gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

Trường hợp 1: Vế phải có dạng $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, a là hằng số.
Ta so sánh a với hai nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì có 3 khả năng xảy ra:

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Ta gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

Trường hợp 1: Vế phải có dạng $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, a là hằng số.

Ta so sánh a với hai nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì có 3 khả năng xảy ra:

1. a không là nghiệm (là nghiệm bội $s = 0$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 \neq a \neq k_2$.

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Ta gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

Trường hợp 1: Vế phải có dạng $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, a là hằng số.

Ta so sánh a với hai nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì có 3 khả năng xảy ra:

1. a không là nghiệm (là nghiệm bội $s = 0$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 \neq a \neq k_2$.
2. a là nghiệm đơn (nghiệm bội $s = 1$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 = a \neq k_2$.

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Ta gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3}$$

Trường hợp 1: Vế phải có dạng $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, a là hằng số.

Ta so sánh a với hai nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì có 3 khả năng xảy ra:

1. a không là nghiệm (là nghiệm bội $s = 0$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 \neq a \neq k_2$.
2. a là nghiệm đơn (nghiệm bội $s = 1$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 = a \neq k_2$.
3. a là nghiệm kép (nghiệm bội $s = 2$) của phương trình đặc trưng (3), hay $k_1 = a = k_2$.

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Giả sử a là nghiệm bội $s(= 0, \ 1, \ 2)$ của phương trình đặc trưng (3), ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) dạng:

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Giả sử a là nghiệm bội $s(=0,\ 1,\ 2)$ của phương trình đặc trưng (3), ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) dạng:

$$\boxed{Y(x) = x^s e^{ax}.Q_n(x)}$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n biến x với các hệ số chưa biết. Ta đi tìm các hệ số của đa thức $Q_n(x)$ bằng cách thay $Y(x),\ Y'(x),\ Y''(x)$ vào phương trình (1) và đồng nhất hai vế.

Ví dụ 3.4.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Giả sử a là nghiệm bội $s(=0,\ 1,\ 2)$ của phương trình đặc trưng (3), ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) dạng:

$$\boxed{Y(x) = x^s e^{ax}.Q_n(x)}$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n biến x với các hệ số chưa biết. Ta đi tìm các hệ số của đa thức $Q_n(x)$ bằng cách thay $Y(x),\ Y'(x),\ Y''(x)$ vào phương trình (1) và đồng nhất hai vế.

Ví dụ 3.4.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

1. Xét phương trình thuần nhất: $y'' - 2y' + y = 0$.
   Phương trình này có phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0$.
   Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^x$$

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

2 Tìm nghiệm riêng

Xét vế phải của phương trình $f(x) = x + 1 = e^{0x}(x + 1)$ có $a = 0$ và đa thức $P_1(x) = x + 1$ bậc 1.

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

2 Tìm nghiệm riêng

Xét vế phải của phương trình $f(x) = x + 1 = e^{0x}(x+1)$ có $a = 0$ và đa thức $P_1(x) = x + 1$ bậc 1.

Ta nhận thấy $a = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta đi tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$Y = x^0 e^{0x}(Ax + B) = Ax + B, \text{ với } A, B \text{ là hằng số.}$$

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

2 Tìm nghiệm riêng

Xét vế phải của phương trình $f(x) = x + 1 = e^{0x}(x+1)$ có $a = 0$ và đa thức $P_1(x) = x + 1$ bậc 1.

Ta nhận thấy $a = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta đi tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$Y = x^0 e^{0x}(Ax + B) = Ax + B, \text{ với } A, B \text{ là hằng số.}$$

Từ đó $Y' = A$ và $Y'' = 0$. Thay Y, Y', Y'' vào phương trình, ta được:

$$-2A + Ax + B = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B - 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Ta tìm được nghiệm riêng $Y = x + 3$.

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$

2 Tìm nghiệm riêng

Xét vế phải của phương trình $f(x) = x + 1 = e^{0x}(x+1)$ có $a = 0$ và đa thức $P_1(x) = x + 1$ bậc 1.

Ta nhận thấy $a = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta đi tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$Y = x^0 e^{0x}(Ax + B) = Ax + B, \text{ với } A, B \text{ là hằng số.}$$

Từ đó $Y' = A$ và $Y'' = 0$. Thay $Y,\ Y', Y''$ vào phương trình, ta được:

$$-2A + Ax + B = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B - 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Ta tìm được nghiệm riêng $Y = x + 3$.

3 Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3.$$

Ví dụ 3.6.

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y'' - y' = x(x-1)$.

Ví dụ 3.6.

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y'' - y' = x(x-1)$.

- Phương trình thuần nhất $y'' - y' = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^x + C_2$.

Ví dụ 3.6.

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y'' - y' = x(x-1)$.

- Phương trình thuần nhất $y'' - y' = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^x + C_2$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

Ví dụ 3.6.

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y'' - y' = x(x-1)$.

- Phương trình thuần nhất $y'' - y' = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^x + C_2$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng
  $y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.
- Thay y^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{2}, C = -1$.

  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x$.

Ví dụ 3.6.

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y'' - y' = x(x-1)$.

- Phương trình thuần nhất $y'' - y' = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^x + C_2$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.
- Thay y^* vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{2}, C = -1$.

  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x$

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân: $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = -3.$

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân: $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = -3.$

- PT thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- NR của PT không thuần nhất dạng $y^* = Ae^x$. Thay y^* vào PT và đồng nhất các hệ số ta được $A = 2$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = 2e^x$.

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân: $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = -3.$

- PT thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- NR của PT không thuần nhất dạng $y^* = Ae^x$. Thay y^* vào PT và đồng nhất các hệ số ta được $A = 2$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = 2e^x$.
- NTQ của phương trình là
  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x \Rightarrow y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x$

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân: $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 0; \; y'(0) = -3.$

- PT thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- NR của PT không thuần nhất dạng $y^* = Ae^x$. Thay y^* vào PT và đồng nhất các hệ số ta được $A = 2$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = 2e^x$.
- NTQ của phương trình là
  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x \Rightarrow y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x$
- Từ điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -5 \end{cases}$

Ví dụ 3.7.

Giải phương trình vi phân: $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = -3.$

- PT thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- NR của PT không thuần nhất dạng $y^* = Ae^x$. Thay y^* vào PT và đồng nhất các hệ số ta được $A = 2$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = 2e^x$.
- NTQ của phương trình là
  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x \Rightarrow y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x$
- Từ điều kiện ban đầu $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -5 \end{cases}$
- Nghiệm thỏa mãn điều kiện là: $y = -2\cos x - 5\sin x + 2e^x$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Trường hợp 2: Vế phải của phương trình có dạng

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + P_m(x)\sin bx\right],$$

trong đó $P_n(x)$ và $P_m(x)$ là hai đa thức có bậc n, m của biến x; a và b là cá hằng số đã biết.

Trường hợp 2: Vế phải của phương trình có dạng

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + P_m(x)\sin bx\right],$$

trong đó $P_n(x)$ và $P_m(x)$ là hai đa thức có bậc n, m của biến x; a và b là cá hằng số đã biết.
Khi đó, có hai khả năng xảy ra:

Trường hợp 2: Vế phải của phương trình có dạng

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + P_m(x)\sin bx\right],$$

trong đó $P_n(x)$ và $P_m(x)$ là hai đa thức có bậc n, m của biến x; a và b là cá hằng số đã biết. Khi đó, có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu $a \pm bi$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, thì ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$\boxed{Y = e^{ax}\left[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx\right]}$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Trường hợp 2: Vế phải của phương trình có dạng

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + P_m(x)\sin bx\right],$$

trong đó $P_n(x)$ và $P_m(x)$ là hai đa thức có bậc n, m của biến x; a và b là cá hằng số đã biết.
Khi đó, có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu $a \pm bi$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, thì ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$\boxed{Y = e^{ax}\left[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx\right]}$$

2. Nếu $a \pm bi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, thì ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$\boxed{Y = xe^{ax}\left[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx\right]}$$

Trường hợp 2: Vế phải của phương trình có dạng

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + P_m(x)\sin bx\right],$$

trong đó $P_n(x)$ và $P_m(x)$ là hai đa thức có bậc n, m của biến x; a và b là cá hằng số đã biết. Khi đó, có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu $a \pm bi$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, thì ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$\boxed{Y = e^{ax}\left[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx\right]}$$

2. Nếu $a \pm bi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, thì ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$\boxed{Y = xe^{ax}\left[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx\right]}$$

trong đó $Q_l(x)$ và $R_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max\{m, n\}$ còn các hệ số của chúng thì chưa biết và được xác định khi ta thay $Y,\ Y',\ Y''$ vào phương trình (1) rồi dùng phương pháp đồng nhất thức.

Ví dụ 3.8.

Giải phương trình vi phân $y'' + 9y = 4\cos 3x$ (1)

Ví dụ 3.8.

Giải phương trình vi phân $y'' + 9y = 4\cos 3x \qquad (1)$

- Xét $y'' + 9y = 0 \ \ (2)$. Phương trình đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i$

Ví dụ 3.8.

Giải phương trình vi phân $y'' + 9y = 4\cos 3x$ (1)

- Xét $y'' + 9y = 0 \ \ (2)$. Phương trình đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i$
- Nghiệm tổng quát của (2): $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

Ví dụ 3.8.

Giải phương trình vi phân $y'' + 9y = 4\cos 3x$ (1)

- Xét $y'' + 9y = 0 \quad (2)$. Phương trình đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i$
- Nghiệm tổng quát của (2): $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$
- Nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng
  $y* = x(A\cos 3x + B\sin 3x); y*' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$
  $y*'' = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$

Ví dụ 3.8.

Giải phương trình vi phân $y'' + 9y = 4\cos 3x$ (1)

- Xét $y'' + 9y = 0$ (2). Phương trình đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3i$
- Nghiệm tổng quát của (2): $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$
- Nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng
  $y* = x(A\cos 3x + B\sin 3x); y*' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$
  $y*'' = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$
- Thay vào (1) ta được $y* = \dfrac{2x}{3}\sin 3x \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình (1):

  $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{2x}{3}\sin 3x$

Ví dụ 3.9.

Giải phương trình: $y'' - 4y = e^{2x} \sin x.$

Ví dụ 3.9.

Giải phương trình: $y'' - 4y = e^{2x} \sin x$.

- Phương trình thuần nhất $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Ví dụ 3.9.

Giải phương trình: $y'' - 4y = e^{2x}\sin x.$

- Phương trình thuần nhất $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $y^* = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$

Ví dụ 3.9.

Giải phương trình: $y'' - 4y = e^{2x} \sin x.$

- Phương trình thuần nhất $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $y^* = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$.
- Thay $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ vào phương trình đã cho và đồng nhất hệ số ta được $A = -4/17, B = -1/17$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = e^{2x}\left(-\dfrac{4}{17}\cos x - \dfrac{1}{17}\sin x\right)$.

Ví dụ 3.9.

Giải phương trình: $y'' - 4y = e^{2x}\sin x.$

- Phương trình thuần nhất $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $y^* = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$
- Thay $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ vào phương trình đã cho và đồng nhất hệ số ta được $A = -4/17, B = -1/17$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y^* = e^{2x}\left(-\dfrac{4}{17}\cos x - \dfrac{1}{17}\sin x\right).$
- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{2x}\left(-\dfrac{4}{17}\cos x - \dfrac{1}{17}\sin x\right).$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Trường hợp 3: Nếu vế phải của phương trình (1) có dạng

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

thì ta tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất (1) dưới dạng

$$\boxed{Y = Y_1 + Y_2}$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Trường hợp 3: Nếu vế phải của phương trình (1) có dạng

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

thì ta tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất (1) dưới dạng

$$\boxed{Y = Y_1 + Y_2}$$

trong đó

1. Y_1 là nghiệm riêng của phương trình ứng với vế phải $f_1(x)$

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

2. Tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

Trường hợp 3: Nếu vế phải của phương trình (1) có dạng

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

thì ta tìm nghiệm riêng của PT không thuần nhất (1) dưới dạng

$$\boxed{Y = Y_1 + Y_2}$$

trong đó

1. Y_1 là nghiệm riêng của phương trình ứng với vế phải $f_1(x)$

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

2. Y_2 là nghiệm riêng của phương trình ứng với vế phải $f_2(x)$

$$y'' + py' + qy = f_2(x)$$

Ví dụ 3.10.

Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' - 4y = \sin x + e^x$

Ví dụ 3.10.

Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' - 4y = \sin x + e^x$

- Phương trình thuần nhất $y'' = 3y' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Ví dụ 3.10.

Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' - 4y = \sin x + e^x$

- Phương trình thuần nhất $y'' = 3y' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng
  $y* = A\cos x + B\sin x + Cxe^x$

Ví dụ 3.10.

Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' - 4y = \sin x + e^x$

- Phương trình thuần nhất $y'' = 3y' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng
  $y* = A\cos x + B\sin x + Cxe^x$
- Thay $y*$ vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = \dfrac{-3}{34}$, $B = \dfrac{-5}{34}$, $C = \dfrac{1}{5}$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là
  $y* = -\dfrac{3}{34}\cos x - \dfrac{5}{34}\sin x + \dfrac{1}{5}x.e^x$.

Ví dụ 3.10.

Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' - 4y = \sin x + e^x$

- Phương trình thuần nhất $y'' = 3y' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng
  $y* = A\cos x + B\sin x + Cxe^x$
- Thay $y*$ vào phương trình và đồng nhất các hệ số ta được $A = \dfrac{-3}{34}$, $B = \dfrac{-5}{34}$, $C = \dfrac{1}{5}$
  Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là
  $y* = -\dfrac{3}{34}\cos x - \dfrac{5}{34}\sin x + \dfrac{1}{5}x.e^x$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là
  $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \dfrac{3}{34}\cos x - \dfrac{5}{34}\sin x + \dfrac{1}{5}x.e^x$

Ví dụ 3.11.

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 2y' = 3x + e^{-2x}$$

Ví dụ 3.11.

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 2y' = 3x + e^{-2x}$$

- PT đặc trưng: $k^2 + 2k = 0 \Longleftrightarrow k_{1,2} = 0; -2.$
  Nghiệm của PT thuần nhất: $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2$

Ví dụ 3.11.

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 2y' = 3x + e^{-2x}$$

- PT đặc trưng: $k^2 + 2k = 0 \iff k_{1,2} = 0; -2.$
  Nghiệm của PT thuần nhất: $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2$
- Nghiệm riêng của PT: $y'' + 2y' = 3x$ là $Y_1 = \dfrac{3}{4}(x^2 - x)$

Ví dụ 3.11.

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 2y' = 3x + e^{-2x}$$

- PT đặc trưng: $k^2 + 2k = 0 \Longleftrightarrow k_{1,2} = 0; -2.$
  Nghiệm của PT thuần nhất: $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2$
- Nghiệm riêng của PT: $y'' + 2y' = 3x$ là $Y_1 = \frac{3}{4}(x^2 - x)$
- Nghiệm riêng của PT: $y'' + 2y' = e^{-2x}$ là $Y_2 = -\frac{1}{2}xe^{-2x}$

Ví dụ 3.11.

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 2y' = 3x + e^{-2x}$$

- PT đặc trưng: $k^2 + 2k = 0 \iff k_{1,2} = 0; -2.$
  Nghiệm của PT thuần nhất: $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2$
- Nghiệm riêng của PT: $y'' + 2y' = 3x$ là $Y_1 = \frac{3}{4}(x^2 - x)$
- Nghiệm riêng của PT: $y'' + 2y' = e^{-2x}$ là $Y_2 = -\frac{1}{2}xe^{-2x}$
- Nghiệm của PT là: $y = \bar{y} + Y_1 + Y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 + \frac{3}{4}(x^2 - x) - \frac{1}{2}xe^{-2x}$