Chương 1: HÀM NHIỀU BIẾN

GV: Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - ĐHGTVT

2024

Mục lục

Định nghĩa 1.

Cho D là một miền trong $\mathbb{R}^2$. Một quy tắc $f : D \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp $(x, y) \in D$ với một số thực duy nhất $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm hai biến, ta ký hiệu $z = f(x, y)$.

- D được gọi là miền xác định của hàm số f;
- x, y là các biến độc lập,
- z hay f là hàm số (biến phụ thuộc).

Định nghĩa 1.

Cho D là một miền trong $\mathbb{R}^2$. Một quy tắc $f : D \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp $(x, y) \in D$ với một số thực duy nhất $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm hai biến, ta ký hiệu
$z = f(x, y)$.

- D được gọi là miền xác định của hàm số f;
- x, y là các biến độc lập,
- z hay f là hàm số (biến phụ thuộc).

!

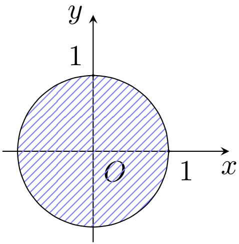
1. Hoàn toàn tương tự, ta có định nghĩa hàm 3 biến, 4 biến,...
2. Nếu hàm số f được cho bởi biểu thức $z = f(x, y)$ thì quy ước tập xác định D là tập hợp các điểm $M(x, y)$ sao cho biểu thức $f(x, y)$ là tồn tại.

Ví dụ 1.1.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Khi đó:

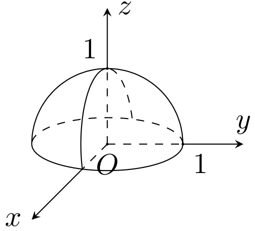
1. x, y là các biến độc lập.
2. z, f là hàm hai biến.
3. Tập xác định là $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
(là hình tròn tâm O, bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy).



Ví dụ 1.2.

Cho hàm hai biến $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

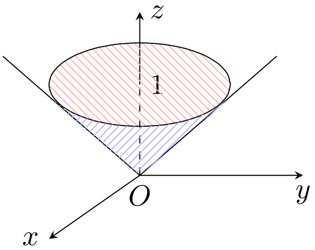
1. Ứng với $M_o = (1,0)$, ta được $z_0 = f(1,0) = 0$ là giá trị của hàm số tại $M_o = (1,0)$.
2. Tập giá trị (tập hợp tất cả các giá trị) là $E = \{z = f(x,y) \mid (x,y) \in D\} = [0,1]$.
3. Đồ thị hàm số $G = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ \forall (x,y) \in D\}$ là nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1 trong không gian $Oxyz$.

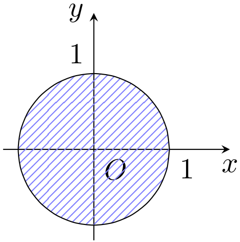


Ví dụ 1.3.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Tập xác định $D = \{\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ là toàn bộ mặt phẳng Oxy.
2. Tập giá trị $E = [0, +\infty)$
3. Đồ thị là mặt nón.





Định nghĩa 2.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$, hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ hội tụ về M_0 ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$.

Giới hạn của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ hội tụ về M_0 ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$.

!

- Dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ được gọi là hội tụ về M_0, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ nếu
$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$
- Hoàn toàn tương tự ta có định nghĩa giới hạn của hàm 3 biến, 4 biến, ...

Ví dụ 1.4.

Tìm $A = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Hướng dẫn: Điểm $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ thay đổi và $M_o(1,2)$ cố định. Khi đó $d = d(M, M_o) = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$. Ta có $M \to M_o \Leftrightarrow d \to 0$. Giới hạn được chuyển thành giới hạn của hàm 1 biến d

$$A = \lim_{d\to 0} \frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d^2} = \lim_{d\to 0} \frac{d^2}{d^2\left(\sqrt{1+d^2}+1\right)} = \lim_{d\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+d^2}+1} = \frac{1}{2}$$

2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

Định nghĩa 3.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$.

2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

Định nghĩa 3.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$.

- Nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 3.

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0,y_0)$.

- Nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x,y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x,y)$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và ký hiệu là $f'_x(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.
- Nếu hàm số một biến $y \mapsto f(x_0,y)$ có đạo hàm tại y_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm hai biến $f(x,y)$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và ký hiệu là $f'_y(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Định nghĩa 3.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$.

- Nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Nếu hàm số một biến $y \mapsto f(x_0, y)$ có đạo hàm tại y_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

Định nghĩa 3.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$.

- Nếu hàm số một biến $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Nếu hàm số một biến $y \mapsto f(x_0, y)$ có đạo hàm tại y_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm hai biến $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu là $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Ví dụ 2.1.

Cho hàm hai biến $z = f(z, y) = \sqrt[3]{xy}$ và $M_0(0, 0)$. Tính các đạo hàm riêng $f'_x(0, 0)$ và $f'_y(0, 0)$ bằng định nghĩa.

Hướng dẫn: Theo định nghĩa

1. $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0;$
2. $f'_y(0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$

Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng

1. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến x, ta coi y là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.

Đạo hàm riêng

1. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến x, ta coi y là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.
2. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến y, ta coi x là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến y.

Đạo hàm riêng

1. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến x, ta coi y là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.
2. Khi tính đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ theo biến y, ta coi x là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến y.
3. Hoàn toàn tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm 3 biến, 4 biến, ... và khi tính đạo hàm riêng của $f(x, y, z)$ theo biến x, ta coi y và z là hằng số và áp dụng các công thức, quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến x.

Ví dụ 2.2.

Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4y + e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3+y^2} + \sin(4x^2+5y).$$

Ví dụ 2.2.

Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4y + e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3+y^2} + \sin(4x^2+5y).$$

Hướng dẫn:

1. $f'_x = 4x^3y + 2e^{2x+y^3} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}} + 8x\cos(4x^2+5y);$

Ví dụ 2.2.

Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4y + e^{2x+y^3} + \sqrt{x^3+y^2} + \sin(4x^2+5y).$$

Hướng dẫn:

1. $f'_x = 4x^3y + 2e^{2x+y^3} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}} + 8x\cos(4x^2+5y);$
2. $f'_y = x^4 + 3y^2e^{2x+y^3} + \dfrac{2y}{2\sqrt{x^3+y^2}} + 5\cos(4x^2+5y).$

Hàm khả vi và vi phân toàn phần

Định nghĩa 4.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0). Cho các số gia $\Delta x, \Delta y$, đặt $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ và gọi là số gia toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0). Nếu có thể biểu diễn được

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

Hàm khả vi và vi phân toàn phần

Định nghĩa 4.

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0). Cho các số gia $\Delta x, \Delta y$, đặt $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ và gọi là số gia toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0). Nếu có thể biểu diễn được

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

trong đó A, B là các hằng số (không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$) và $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì hàm số $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó, biểu thức $df(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0).

Hàm khả vi và vi phân toàn phần

Định lý 1.

Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và

$$\begin{cases} A &= f'_x(x_0,y_0), \\ B &= f'_y(x_0,y_0). \end{cases}$$

Định lý 1.

Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và

$$\begin{cases} A &= f'_x(x_0, y_0), \\ B &= f'_y(x_0, y_0). \end{cases}$$

Như vậy,

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$$

Hàm khả vi và vi phân toàn phần

Định lý 1.

Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và
$$\begin{cases} A &= f'_x(x_0,y_0), \\ B &= f'_y(x_0,y_0). \end{cases}$$

Như vậy,
$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

Định lý 2.

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ liên tục tại (x_0,y_0) thì $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0)

Vi phân toàn phần

!

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy$$

$$df = df(x, y) = f'_x(x, y).dx + f'_y(x, y).dy$$

Vi phân toàn phần

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy$$

$$df = df(x, y) = f'_x(x, y).dx + f'_y(x, y).dy$$

Tương tự, đối với hàm 3 biến:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z).dx + f'_y(x, y, z).dy + f'_z(x, y, z).dz$$

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$.

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Hướng dẫn:

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Hướng dẫn:

1. $$f'_x = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Hướng dẫn:

1. $$f'_x = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

2. $$f'_y = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-x)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+x^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Ví dụ 2.3.

Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Hướng dẫn:

1. $$f'_x = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$
2. $$f'_y = \frac{\dfrac{1.(1-xy)-(-x)(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+x^2}{(x+y)^2+(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$
3. $$df(x,y) = f'_x.dx + f'_y.dy = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}.$$

Tính gần đúng bằng vi phân

Tính gần đúng bằng vi phân

1. Cho hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé, ta có

1. Cho hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) và $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé, ta có

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

Tính gần đúng bằng vi phân

1. Cho hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) và $|\Delta x|,|\Delta y|$ khá bé, ta có

   $$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0).\Delta x+f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

2. Tương tự, đối với hàm 3 biến, ta cũng có

Tính gần đúng bằng vi phân

1. Cho hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) và $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé, ta có

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

2. Tương tự, đối với hàm 3 biến, ta cũng có

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx f(M_0) &+ f'_x(M_0).\Delta x \\ &+ f'_y(M_0).\Delta y + f'_z(M_0).\Delta z, \end{aligned}$$

1. Cho hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé, ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$$

2. Tương tự, đối với hàm 3 biến, ta cũng có

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(M_0) &+ f'_x(M_0).\Delta x \\ &+ f'_y(M_0).\Delta y + f'_z(M_0).\Delta z, \end{aligned}$$

với $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z|$ khá bé.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v)$ khả vi tại $[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$ và $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v)$ khả vi tại $[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$ và $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0). Khi đó hàm hợp $z(x, y) = f\,[u(x, y), v(x, y)]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v)$ khả vi tại $[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$ và $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0). Khi đó hàm hợp $z(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u,v)$ khả vi tại $[u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)]$ và $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0). Khi đó hàm hợp $z(x,y) = f\,[u(x,y), v(x,y)]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) và
$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$

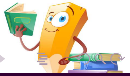
2. $z(x,y) = f\,[u(x,y), v(x,y), w(x,y)]$, ta có

Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u,v)$ khả vi tại $[u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)]$ và $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0). Khi đó hàm hợp $z(x,y) = f\,[u(x,y), v(x,y)]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) và
$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$

2. $z(x,y) = f\,[u(x,y), v(x,y), w(x,y)]$, ta có
$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y. \end{cases}$$

1. Cho $z = f(u,v)$ khả vi tại $[u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)]$ và $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0). Khi đó hàm hợp $z(x,y) = f\left[u(x,y), v(x,y)\right]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) và
$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$
2. $z(x,y) = f\left[u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right]$, ta có
$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y. \end{cases}$$
3. $g(x,y,z) = f\left[u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\right]$, ta có



Đạo hàm riêng của hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v)$ khả vi tại $[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$ và $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0). Khi đó hàm hợp $z(x, y) = f\left[u(x, y), v(x, y)\right]$ cũng có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y. \end{cases}$$

2. $z(x, y) = f\left[u(x, y), v(x, y), w(x, y)\right]$, ta có

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ z'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y. \end{cases}$$

3. $g(x, y, z) = f\left[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\right]$, ta có

$$\begin{cases} g'_x &= f'_u.u'_x + f'_v.v'_x + f'_w.w'_x, \\ g'_y &= f'_u.u'_y + f'_v.v'_y + f'_w.w'_y, \\ g'_z &= f'_u.u'_z + f'_v.v'_z + f'_w.w'_z. \end{cases}$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt của hàm hợp

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt của hàm hợp

1. $z(x,y) = f[u(x,y)]$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt của hàm hợp

1. $z(x,y) = f[u(x,y)]$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} & = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

2. $z(x) = f\left[u(x), v(x)\right]$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{dv}{dx}.$$

Ta xét một vài trường hợp đặc biệt của hàm hợp

1. $z(x,y) = f[u(x,y)]$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = \dfrac{df}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

2. $z(x) = f\left[u(x), v(x)\right]$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{dv}{dx}.$$

3. $z(x) = f\left[x, y(x)\right]$, ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}.$$

Định nghĩa 5.

Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y xác định trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0). Khi đó, nếu các hàm hai biến $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ lại có các đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) thì chúng được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f(x, y)$ tại điểm x_0, y_0 và được ký hiệu:

$$(f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$

$$(f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = f''_{xy}$$

$$(f'_y)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} = f''_{yx}$$

$$(f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$

Định nghĩa 5.

Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x,\ f'_y$ xác định trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0). Khi đó, nếu các hàm hai biến $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ lại có các đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) thì chúng được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f(x, y)$ tại điểm x_0, y_0 và được ký hiệu:

$$(f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$

$$(f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = f''_{xy}$$

$$(f'_y)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} = f''_{yx}$$

$$(f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$

Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là các đạo hàm riêng cấp 3, ... Chẳng hạn,

$$\left(f''_{xy}\right)'_x = f^{(3)}_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x.\partial y.\partial x}, \ \left(f''_{xx}\right)'_y = f^{(3)}_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2.\partial y}, \dots$$

Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là các đạo hàm riêng cấp 3, ... Chẳng hạn,

$$\left(f''_{xy}\right)'_x = f^{(3)}_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x.\partial y.\partial x}, \quad \left(f''_{xx}\right)'_y = f^{(3)}_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2.\partial y}, \ldots$$

! Nếu f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là các đạo hàm riêng cấp 3, ... Chẳng hạn,

$$(f''_{xy})'_x = f^{(3)}_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x.\partial y.\partial x}, \quad (f''_{xx})'_y = f^{(3)}_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2.\partial y}, \dots$$

!

Nếu f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Tương tự, $f^{(3)}_{x^2y} = f^{(3)}_{xyx} = f^{(3)}_{yx^2}$, $f^{(3)}_{y^2x} = f^{(3)}_{yxy} = f^{(3)}_{xy^2}, \cdots$

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1, 2)$.

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

- Viết lại $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

- Viết lại $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$
- $f'_x = \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$, $\quad f'_y = \dfrac{y-3x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(1,2) = \dfrac{7}{5}, f'_y(1,2) = -\dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

- Viết lại $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$
- $f'_x = \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$, $\quad f'_y = \dfrac{y-3x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(1,2) = \dfrac{7}{5}, f'_y(1,2) = -\dfrac{1}{5}$.
- $df(1,2) = f'_x(1,2).dx + f'_y(1,2).dy = \dfrac{7}{5}dx - \dfrac{1}{5}dy$.

Ví dụ 2.4.

Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

Hướng dẫn:

- Viết lại $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$
- $f'_x = \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \dfrac{y-3x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(1,2) = \dfrac{7}{5}$, $f'_y(1,2) = -\dfrac{1}{5}$.
- $df(1,2) = f'_x(1,2).dx + f'_y(1,2).dy = \dfrac{7}{5}dx - \dfrac{1}{5}dy$.
- $f''_{xx} = \dfrac{-x^2+y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f''_{xx}(1,2) = -\dfrac{9}{25}$, $f''_{xy} = \dfrac{3x^2-3y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

  $\Rightarrow f''_{xy}(1,2) = -\dfrac{13}{25}$, $f''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2+6xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f''_{yy}(1,2) = \dfrac{9}{25}$.

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Hướng dẫn:

1. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Hướng dẫn:

1. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ và $u'_x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$.

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Hướng dẫn:

1. $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ và $u'_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$.
2. $u''_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$

$$\Longrightarrow u''_{xx} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}.$$

Ví dụ 2.5.

Cho hàm số $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Hướng dẫn:

1. $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ và $u'_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$.
2. $u''_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$
   $$\Longrightarrow u''_{xx} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}.$$
3. Tương tự $u''_{yy} = \dfrac{2y^2-x^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$, $u''_{zz} = \dfrac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$.
4. Vậy $A = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

3. Đạo hàm của hàm ẩn

3.1. Hàm ẩn của 1 biến

Cho phương trình $F(x, y) = 0$. Nếu với mỗi $x \in D$ tìm được duy nhất $y = y(x)$ thỏa mãn $F[x, y(x)] = 0$ thì ta nói phương trình xác định một hàm ẩn (1 biến) $y = y(x)$ và nếu $F'_y \neq 0$ thì đạo hàm của hàm ẩn

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

3.1. Hàm ẩn của 1 biến

Cho phương trình $F(x, y) = 0$. Nếu với mỗi $x \in D$ tìm được duy nhất $y = y(x)$ thỏa mãn $F[x, y(x)] = 0$ thì ta nói phương trình xác định một hàm ẩn (1 biến) $y = y(x)$ và nếu $F'_y \neq 0$ thì đạo hàm của hàm ẩn

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

3.2. Hàm ẩn của 2 biến

Cho phương trình $F(x, y, z) = 0$. Nếu với mỗi $(x, y) \in D$ tìm được duy nhất $z = z(x, y)$ thỏa mãn $F[x, y, z(x, y)] = 0$ thì ta nói phương trình xác định một hàm ẩn (2 biến) $z = z(x, y)$ và nếu $F'_z \neq 0$ thì đạo hàm của hàm ẩn

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- Tính $F'_x = y \cos x + \sin(x - y)$, $F'_y = \sin x - \sin(x - y)$.

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- Tính $F'_x = y \cos x + \sin(x - y)$, $F'_y = \sin x - \sin(x - y)$.
- $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}$.

Ví dụ 3.1.

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

Tính $y'(0)$ biết $y(0) = \pi/2$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- Tính $F'_x = y \cos x + \sin(x - y)$, $F'_y = \sin x - \sin(x - y)$.
- $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}$.
- $y'(0) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x,y) = xe^y + ye^x - 1 \Longrightarrow$ phương trình trở thành $F(x,y) = 0$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = xe^y + ye^x - 1 \Longrightarrow$ phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- $F'_x = e^y + ye^x; F'_y = xe^y + e^x$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = xe^y + ye^x - 1 \Longrightarrow$ phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- $F_x^{'} = e^y + ye^x; F_y^{'} = xe^y + e^x$.
- $y^{'}(x) = -\dfrac{F_x^{'}}{F_y^{'}} = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$.

Ví dụ 3.2.

Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y) = xe^y + ye^x - 1 \Longrightarrow$ phương trình trở thành $F(x, y) = 0$.
- $F_x^{'} = e^y + ye^x; F_y^{'} = xe^y + e^x$.
- $y^{'}(x) = -\dfrac{F_x^{'}}{F_y^{'}} = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$.
- Khi $x = 0$, thay vào phương trình ta được $y(0) = 1$
  $\Longrightarrow y^{'}(0) = -e^{y(0)} - y(0) = -e - 1$.

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y, z) = 2x + 3y + z - e^{xyz}$, phương trình đã cho trở thành $F(x, y, z) = 0$.

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y, z) = 2x + 3y + z - e^{xyz}$, phương trình đã cho trở thành $F(x, y, z) = 0$.
- $F'_x = 2 - yze^{xyz}, F'_y = 3 - xze^{xyz}, F'_z = 1 - xye^{xyz}$

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y, z) = 2x + 3y + z - e^{xyz}$, phương trình đã cho trở thành $F(x, y, z) = 0$.
- $F'_x = 2 - yze^{xyz}, F'_y = 3 - xze^{xyz}, F'_z = 1 - xye^{xyz}$
- $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2 - yze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$
- $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{3 - xze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$

Ví dụ 3.3.

Tìm vi phân toàn phần dz của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi:

$$2x + 3y + z = e^{xyz}.$$

Hướng dẫn:

- Đặt $F(x, y, z) = 2x + 3y + z - e^{xyz}$, phương trình đã cho trở thành $F(x, y, z) = 0$.
- $F'_x = 2 - yze^{xyz}, F'_y = 3 - xze^{xyz}, F'_z = 1 - xye^{xyz}$
- $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2 - yze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$
- $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{3 - xze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}$
- Vi phân toàn phần $dz = -\dfrac{2 - yze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}dx - \dfrac{3 - xze^{xyz}}{1 - xye^{xyz}}dy$

4. Cực trị của hàm nhiều biến

4.1.Cực trị không điều kiện

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 6.

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0,y_0)$.

Định nghĩa 6.

1. M_0 được gọi là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực đại chặt.

4.1.Cực trị không điều kiện

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 6.

1. M_0 được gọi là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực đại chặt.
2. M_0 được gọi là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \geq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực tiểu chặt.

4.1.Cực trị không điều kiện

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 6.

1. M_0 được gọi là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực đại chặt.
2. M_0 được gọi là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \geq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực tiểu chặt.
3. Các điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D và điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 6.

1. M_0 được gọi là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực đại chặt.
2. M_0 được gọi là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho $f(M) \geq f(M_0), \forall M \in V$. Nếu dấu bằng không xảy ra thì M_0) gọi là điểm cực tiểu chặt.
3. Các điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

Nếu $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của hàm số thì $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số.Tương tự ta cũng có giá trị cực tiểu.

Định lý 3.

Định lý 3.

Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm trong $M_0(x_0, y_0)$ của D và có các đạo hàm riêng tại

đó thì

Định lý 3.

Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm trong $M_0(x_0,y_0)$ của D và có các đạo hàm riêng tại đó thì
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) & = 0. \end{cases}$$

Định lý 3.

Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm trong $M_0(x_0, y_0)$ của D và có các đạo hàm riêng tại đó thì
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0. \end{cases}$$

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đều bằng 0 được gọi là điểm dừng của hàm số. Từ định lý trên, nếu một điểm trong của D là điểm cực trị thì nó là điểm dừng. Điều ngược lại của định lý chưa chắc đúng.

Định lý 4.

Định lý 4.

Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

Định lý 4.

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x, y)$,

Định lý 4.

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x, y)$,
2. Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x, y)$,

Định lý 4.

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x, y)$,
2. Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x, y)$,
3. Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$,

Định lý 4.

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của M_0. ta đặt

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x, y)$,
2. Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x, y)$,
3. Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$,
4. Nếu $\Delta = 0$ thì ta chưa thể kết luận được gì về điểm M_0.

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = \dfrac{xy}{8} + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = \dfrac{xy}{8} + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x \neq 0, y \neq 0$.

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = \frac{xy}{8} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x \neq 0, y \neq 0$.

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2:
  $f'_x = \frac{y}{8} - \frac{1}{x^2}$, $f'_y = \frac{x}{8} - \frac{1}{y^2}$, $f''_{xx} = \frac{2}{x^3}$, $f''_{xy} = \frac{1}{8}$, $f''_{yy} = \frac{2}{y^3}$

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \dfrac{xy}{8} + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x \neq 0, y \neq 0$.

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2:
  $f'_x = \dfrac{y}{8} - \dfrac{1}{x^2}$, $f'_y = \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{y^2}$, $f''_{xx} = \dfrac{2}{x^3}$, $f''_{xy} = \dfrac{1}{8}$, $f''_{yy} = \dfrac{2}{y^3}$
- Tìm tọa độ điểm dừng, ta giải hệ: $\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng là $M = (2, 2)$.

Ví dụ 4.1.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=\dfrac{xy}{8}+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x\neq 0, y\neq 0$.

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2:
  $f'_x=\dfrac{y}{8}-\dfrac{1}{x^2},\ f'_y=\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{y^2},\ f''_{xx}=\dfrac{2}{x^3},\ f''_{xy}=\dfrac{1}{8},\ f''_{yy}=\dfrac{2}{y^3}$
- Tìm tọa độ điểm dừng, ta giải hệ: $\begin{cases} f'_x & = & 0\\ f'_y & = & 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{y}{8}-\dfrac{1}{x^2}=0\\ \dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{y^2}=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng là $M=(2,2)$.
- Xét tại điểm dừng $M(2,2)$:
  $A=f''_{xx}(M)=\dfrac{2}{2^3},\ B=f''_{xy}(M)=\dfrac{1}{8},\ C=f''_{yy}(M)=\dfrac{2}{2^3}\Rightarrow B^2-AC<0,\ A>0.$
  Hàm số đạt cực tiểu tại M và $f_{\text{ct}}=f(2,2)=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

Hướng dẫn:Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7,$

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7,$

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4.$$

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7,$

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4.$$

+) Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 &= 0 \\ -4y + \sqrt{x} + 7 &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y$.

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1$, $\quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7$,

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4.$$

+) Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 & = & 0 \\ -4y + \sqrt{x} + 7 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

+) Xét tại $M(1,2)$, ta có $A = f''_{xx}(M) = -\dfrac{1}{2}$, $B = f''_{xy}(M) = \dfrac{1}{2}$, $C = f''_{yy}(M) = -4$

Ví dụ 4.2.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5.$

Hướng dẫn:Hàm số xác định khi $x > 0, \forall y.$

+) Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 : $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \quad f'_y = -4y + \sqrt{x} + 7,$

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4.$$

+) Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 & = & 0 \\ -4y + \sqrt{x} + 7 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

+) Xét tại $M(1,2)$, ta có $A = f''_{xx}(M) = -\dfrac{1}{2}, \; B = f''_{xy}(M) = \dfrac{1}{2}, \; C = f''_{yy}(M) = -4$

- Ta thấy $B^2 - AC < 0, \; A < 0$, nên M là điểm cực đại của hàm số.
- Giá trị cực đại là $f(1,2) = 12.$

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là:

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = 2x - \dfrac{1}{2x}$, $z'_y = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$,

   $z''_{xx} = 2 + \dfrac{1}{2x^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2y^2}$.

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = 2x - \dfrac{1}{2x}$, $z'_y = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$,
   $z''_{xx} = 2 + \dfrac{1}{2x^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2y^2}$.
2. Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} z'_x & = 0 \\ z'_y & = 0 \end{cases}$ Vì $xy > 0$ nên hàm số có hai điểm dừng là $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = 2x - \dfrac{1}{2x}$, $z'_y = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$, $z''_{xx} = 2 + \dfrac{1}{2x^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2y^2}$.
2. Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} z'_x & = 0 \\ z'_y & = 0 \end{cases}$ Vì $xy > 0$ nên hàm số có hai điểm dừng là $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.
3. Tại $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Ví dụ 4.3.

Tìm cực trị của hàm số $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln(xy)}{2}$.

Hướng dẫn:

1. Với $xy > 0$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 là: $z'_x = 2x - \dfrac{1}{2x}$, $z'_y = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$, $z''_{xx} = 2 + \dfrac{1}{2x^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2y^2}$.
2. Tọa độ các điểm dừng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{cases}$ Vì $xy > 0$ nên hàm số có hai điểm dừng là $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.
3. Tại $M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.
4. Tại $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ có $A = 4, B = 0, C = 1, B^2 - AC < 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{CT} = z(M_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}.$

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$

2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng
$M_1(1,3),\ M_2(3,1),\ M_3(-1,-3),\ M_4(-3,-1)$.

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= 10 \\ xy &= 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(1, 3)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(-1, -3)$, $M_4(-3, -1)$.
3. Xét tại các điểm dừng:

Ví dụ 4.4.

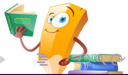
Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng
   $M_1(1,3),\ M_2(3,1),\ M_3(-1,-3),\ M_4(-3,-1)$.
3. Xét tại các điểm dừng:
   1. Tại $M_1(1,3)$, ta có $A = 6,\ B = 18,\ C = 6$, $B^2 - AC > 0$, nên M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(1, 3)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(-1, -3)$, $M_4(-3, -1)$.
3. Xét tại các điểm dừng:
   1. Tại $M_1(1, 3)$, ta có $A = 6$, $B = 18$, $C = 6$, $B^2 - AC > 0$, nên M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số.
   2. Tại $M_2(3, 1)$, ta có $A = 18$, $B = 6$, $C = 18$, $B^2 - AC < 0$, nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số. Giá trị cực tiểu là $f(3, 1) = -72$



Ví dụ 4.4.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

1. Các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 :
   $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y = 6xy - 18, \quad f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$
2. Tìm các điểm dừng: $\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ xy & = 3 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(1,3)$, $M_2(3,1)$, $M_3(-1,-3)$, $M_4(-3,-1)$.
3. Xét tại các điểm dừng:
   1. Tại $M_1(1,3)$, ta có $A = 6$, $B = 18$, $C = 6$, $B^2 - AC > 0$, nên M_1 không phải là điểm cực trị của hàm số.
   2. Tại $M_2(3,1)$, ta có $A = 18$, $B = 6$, $C = 18$, $B^2 - AC < 0$, nên M_2 là điểm cực tiểu của hàm số. Giá trị cực tiểu là $f(3,1) = -72$
   3. $M_3(-1,-3)$ không phải là điểm cực trị của hàm số.
   4. $M_4(-3,-1)$ là điểm cực đại của hàm số. Giá trị cực đại là $f(-3,-1) = 72$

4.2.Cực trị có điều kiện

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x & = x(t) \\ y & = y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$
   - Tìm điểm dừng của hàm F: $\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$
   - Tìm điểm dừng của hàm F: $\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$
   - Xét tại $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$, tính $d^2F(M_0) = F''_{xx}(M_0)dx^2 + 2F''_{xy}(M_0)dxdy + F''_{yy}(M_0)dy^2$

4.2.Cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$
   - Tìm điểm dừng của hàm F: $\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$
   - Xét tại $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$, tính $d^2F(M_0) = F''_{xx}(M_0)dx^2 + 2F''_{xy}(M_0)dxdy + F''_{yy}(M_0)dy^2$
   - Nếu $d^2F(M_0) > 0, \forall (dx, dy) \neq 0$ thì (x_0, y_0) là cực tiểu có điều kiện của $f(x,y)$.

Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
Có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

1. Từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ ta đưa về $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ thì bài toán trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f[x(t), y(t)]$.
2. PP nhân tử Lagrange: đặt $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$
   - Tìm điểm dừng của hàm F: $\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$
   - Xét tại $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$, tính $d^2F(M_0) = F''_{xx}(M_0)dx^2 + 2F''_{xy}(M_0)dxdy + F''_{yy}(M_0)dy^2$
   - Nếu $d^2F(M_0) > 0, \forall(dx, dy) \neq 0$ thì (x_0, y_0) là cực tiểu có điều kiện của $f(x, y)$.
   - Nếu $d^2F(M_0) < 0, \forall(dx, dy) \neq 0$ thì (x_0, y_0) là cực đại có điều kiện của $f(x, y)$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Hàm F có hai điểm dừng là $M_1 = \left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ và $M_2 = \left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Hàm F có hai điểm dừng là $M_1 = \left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ và $M_2 = \left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét biểu thức

$d^2F(x,y,\lambda) = F''_{xx}dx^2 + 2F'' + xydxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Hàm F có hai điểm dừng là $M_1 = \left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ và $M_2 = \left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét biểu thức

$d^2F(x,y,\lambda) = F''_{xx}dx^2 + 2F'' + xydxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$.

- Tại M_1, $d^2F(M_1) = dx^2 + dy^2 > 0$, $\forall(dx,dy) \neq (0,0)$ nên $-1, -2$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số, $f_{ct} = f(-1,-2) = -5$.

Ví dụ 4.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lập hàm bổ trợ $F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Tìm các điểm dừng $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Hàm F có hai điểm dừng là $M_1 = \left(-1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ và $M_2 = \left(1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét biểu thức
$d^2F(x,y,\lambda) = F''_{xx}dx^2 + 2F'' + xydxdy + F''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$.

- Tại M_1, $d^2F(M_1) = dx^2 + dy^2 > 0$, $\forall (dx, dy) \neq (0,0)$ nên $-1, -2$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số, $f_{ct} = f(-1,-2) = -5$.
- Tại M_1, $d^2F(M_1) = -dx^2 - dy^2 > 0$, $\forall (dx, dy) \neq (0,0)$ nên $1, 2$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số, $f_{c\varnothing} = f(1,2) = 5$.