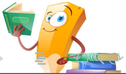
Chương 2: TÍCH PHÂN NHIỀU LỚP

GV: Nguyễn Thị Huyên

BM Toán Giải tích - ĐHGTVT

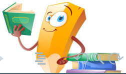
2022



Mục lục

1. Tích phân hai lớp
   - Định nghĩa và các tính chất của tích phân hai lớp
   - Cách tính tích phân hai lớp
   - Đổi biến trong tích phân hai lớp
   - Tích phân hai lớp trong tọa độ cực

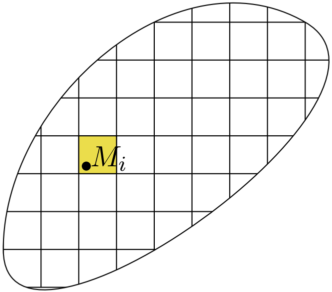
2. Tích phân ba lớp
   - Định nghĩa và các tính chất
   - Tích phân ba lớp trong tọa độ Đề các
   - Tích phân ba lớp trong tọa độ trụ
   - Tích phân ba lớp trong tọa độ cầu



Cho $z = f(x,y)$ xác định trong miềm đóng, bị chặn $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Chia miền D tùy ý thành n phần nhỏ, gọi tên và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$. Lấy tùy ý $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i (\forall i = \overline{1,n})$ và lập tổng tích phân:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i,$$

Cho $n \to +\infty$, sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính của các mảnh nhỏ $\Delta S_i (\forall i = \overline{1,n})$ dần tới không, mà $I_n \to I$ (xác định, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn M_i, thì giới hạn đó được gọi là tích phân hai lớp của hàm $f(x,y)$ trong miền D.

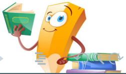


Miền D

Định nghĩa tích phân hai lớp

Ký hiệu là $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{n\to+\infty,\max d_i\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$

1. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân,
2. D được gọi là miền lấy tích phân,
3. x, y được gọi là các biến lấy tích phân.
4. Nếu tích phân tồn tại thì hàm f được gọi là khả tích trên miền D.



Định nghĩa tích phân hai lớp

Ký hiệu là $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{n\to+\infty, \max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$

1. Hàm $f(x,y)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân,
2. D được gọi là miền lấy tích phân,
3. x, y được gọi là các biến lấy tích phân.
4. Nếu tích phân tồn tại thì hàm f được gọi là khả tích trên miền D.

Chú ý 1.

1. Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì nó khả tích trên miền D.
2. Tích phân hai lớp không phụ thuộc vào biến lấy tích phân:
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(u,v)dudv.$$

Các tính chất của tích phân hai lớp

Tích phân hai lớp có các tính chất tương tự như của tích phân xác định.

1. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

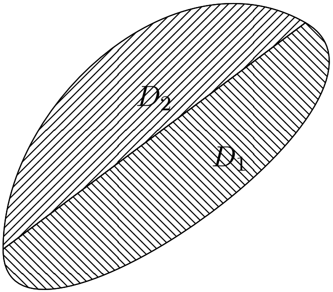
Các tính chất của tích phân hai lớp

Tích phân hai lớp có các tính chất tương tự như của tích phân xác định.

1. $$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

1. $$\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$
   $k =$ hằng số.

2. Nếu $D = D_1 \cup D_2$, hai miền không dẫm nhau thì
   $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$
   $$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$



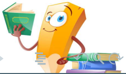
Các tính chất của tích phân hai lớp

1. $\displaystyle\iint\limits_D dxdy =$ Diện tích của miền D.

Các tính chất của tích phân hai lớp

1. $\iint\limits_D dxdy =$ Diện tích của miền D.
2. Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$ tại $\forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

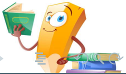


Các tính chất của tích phân hai lớp

1. $\displaystyle\iint\limits_D dxdy =$ Diện tích của miền D.

2. Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$ tại $\forall(x,y) \in D$ thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3. Nếu m và M là giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của $f(x,y)$ trên miền D thì
$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS_D$$
trong đó S_D là diện tích của miền D.



1.2. Cách tính tích phân hai lớp

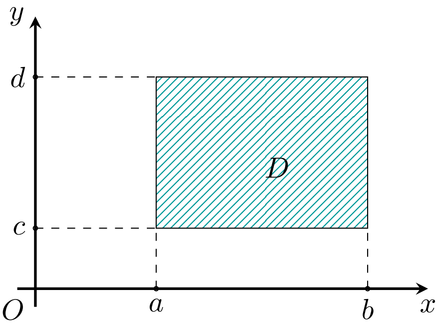
Xét tích phân hai lớp $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

1.2. Cách tính tích phân hai lớp

Xét tích phân hai lớp $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

TH1. Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với trục tọa độ. $D = \begin{cases} a \leq & x \leq & b, \\ c \leq & y \leq & d, \end{cases}$ và hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền D. Khi đó:

$$I = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

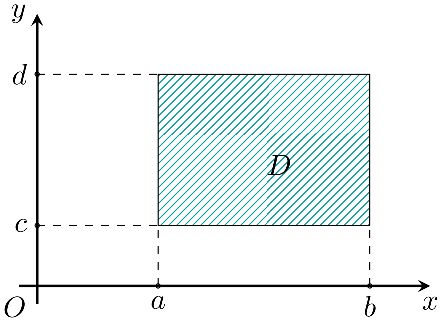


Chú ý: Khi tính tích phân đơn $\int\limits_c^d f(x,y)dy$, ta coi x là hằng số.

TH1. Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với trục tọa độ. $D = \begin{cases} a \leq & x \leq & b, \\ c \leq & y \leq & d, \end{cases}$

và hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền D.
Tích phân cũng có thể tính bằng cách

$$I = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$



Khi tính tích phân đơn $\int_a^b f(x,y)dx$, ta coi y là hằng số.

Ví dụ 1.1.

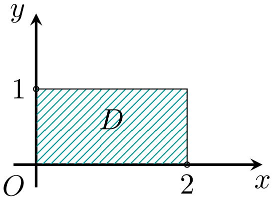
Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, với D là hình chữ nhật $D = \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

Ví dụ 1.1.

Tính $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, với D là hình chữ nhật $D = \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^2 (x^2+y^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^2 dy$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 2y^2\right) dy = \left(\frac{8y}{3} + \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{3}$$

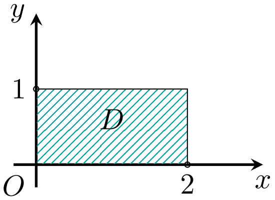


Ví dụ 1.1.

Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, với D là hình chữ nhật $D = \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^2 (x^2 + y^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^2 dy$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 \right) dy = \left(\frac{8y}{3} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{10}{3}$$



Hoặc $I = \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)dy = \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{10}{3}$

Ví dụ 1.2.

Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$, với D là hình chữ nhật $D = \begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le y \le 3. \end{cases}$

$$I = \int\limits_2^5 \left(\int\limits_1^3 xy.dy \right) dx = I = \int\limits_2^5 x.dx \int\limits_1^3 y.dy$$

$$I = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_2^5 \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_1^3 \right) = 42.$$

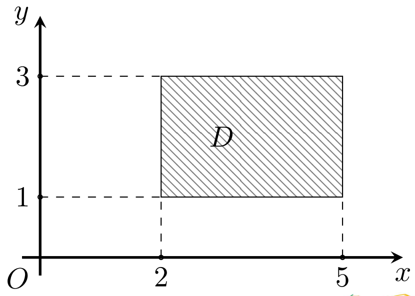
Ví dụ 1.2.

Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$, với D là hình chữ nhật $D = \begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le y \le 3. \end{cases}$

$$I = \int\limits_2^5 \left(\int\limits_1^3 xy.dy \right) dx = I = \int\limits_2^5 x.dx \int\limits_1^3 y.dy$$

$$I = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_2^5 \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_1^3 \right) = 42.$$

Chú ý: Trong tích phân này, hai tích phân đơn độc lập với nhau nên ta có thể tính đồng thời cả hai tích phân và nhân kết quả với nhau.

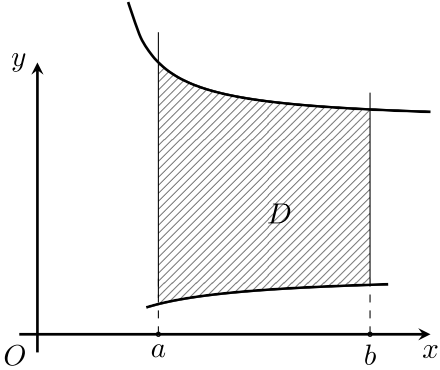


TH2. Miền D là hình thang cong:

$$D = \begin{cases} a \leq & x \leq & b, \\ y_1(x) \leq & y \leq & y_2(x), \end{cases}$$

và các hàm $y_1(x), y_2(x)$ liên tục và đơn trị, $y_1(x) \leq y_2(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



Khi tính tích phân đơn $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, ta coi x là hằng số.

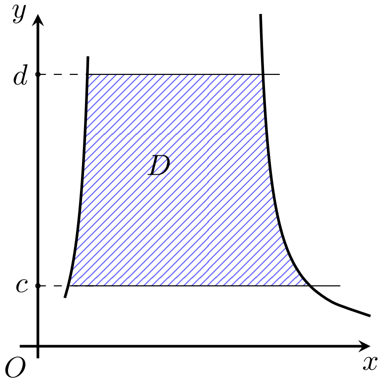
1.2. Cách tính tích phân hai lớp

TH3. Miền D là hình thang cong:

$$D = \begin{cases} c \leq \quad y \leq \quad d, \\ x_1(y) \leq \quad x \leq \quad x_2(y), \end{cases}$$

và các hàm $x_1(y), x_2(y)$ liên tục và đơn trị, $x_1(y) \leq x_2(y)$ với mọi $y \in [c, d]$.

$$I = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$



Khi tính tích phân đơn $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, ta coi y là hằng số.

Ví dụ 1.3.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D (3x + 4y).dx.dy$,

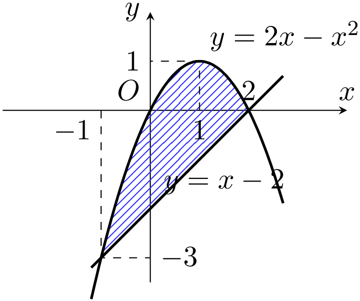
D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = x - 2$.

Ví dụ 1.3.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D (3x + 4y).dx.dy$,

D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = x - 2$.

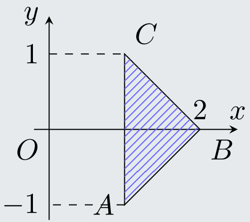
- Tọa độ giao điểm của hai đường $(-1, -3)$ và $(2, 0)$.
- Vẽ hình, xác định $D = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ x - 2 \leq y \leq 2x - x^2. \end{cases}$
- $I = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x-2}^{2x-x^2} (3x + 4y).dy = \int\limits_{-1}^{2} (3xy + 2y^2)\Big|_{x-2}^{2x-x^2}.dx$
- $I = \int\limits_{-1}^{2} (2x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 14x - 8).dx = \dfrac{81}{20}.$



Ví dụ 1.4.

Tính tích phân 2 lớp $\iint\limits_D (3x^2 + 4y^3)dxdy$,

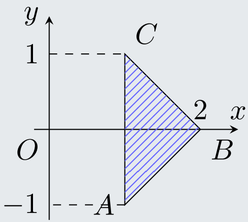
D là miền tam giác ABC với $A(1,-1)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.



Ví dụ 1.4.

Tính tích phân 2 lớp $\iint\limits_D (3x^2 + 4y^3)dxdy$,

D là miền tam giác ABC với $A(1,-1)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

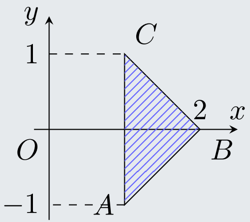


- $AB : y = x - 2, BC : y = 2 - x$ và xác định $D = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2 \leq y \leq 2 - x. \end{cases}$

Ví dụ 1.4.

Tính tích phân 2 lớp $\iint\limits_D (3x^2+4y^3)dxdy$,

D là miền tam giác ABC với $A(1,-1)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

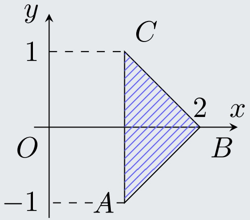


- $AB: y = x-2, BC: y = 2-x$ và xác định $D = \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x-2 \le y \le 2-x. \end{cases}$
- $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-2}^{2-x} (3x^2+4y^3)dy = \int\limits_1^2 \left(3x^2y+y^4\right)\Big|_{x-2}^{2-x} .dx$

Ví dụ 1.4.

Tính tích phân 2 lớp $\displaystyle\iint\limits_D (3x^2 + 4y^3)dxdy,$

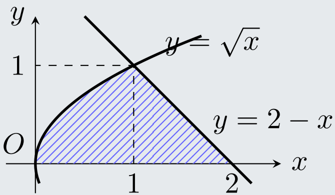
D là miền tam giác ABC với $A(1,-1),\ B(2,0),\ C(1,1).$



- $AB: y = x - 2, BC: y = 2 - x$ và xác định $D = \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x - 2 \le y \le 2 - x. \end{cases}$
- $\displaystyle I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-2}^{2-x} (3x^2 + 4y^3)dy = \int\limits_1^2 \left(3x^2 y + y^4\right)\Big|_{x-2}^{2-x} .dx$
- $\displaystyle I = \int\limits_1^2 \left(12x^2 - 6x^3\right) dx = \left(4x^3 - 6\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 = \frac{11}{2}.$

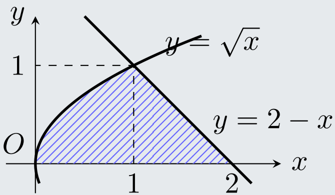
Ví dụ 1.5.

Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $y=0$.



Ví dụ 1.5.

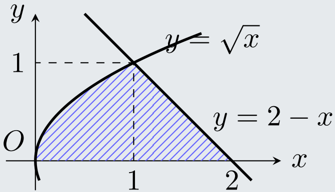
Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$



- Vẽ hình và xác định cận của tích phân $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le 2-y. \end{cases}$

Ví dụ 1.5.

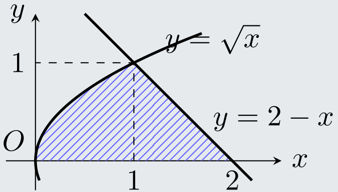
Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$



- Vẽ hình và xác định cận của tích phân $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le 2-y. \end{cases}$
- $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} (2x+3y)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2+3xy\right)\Big|_{y^2}^{2-y} .dy$

Ví dụ 1.5.

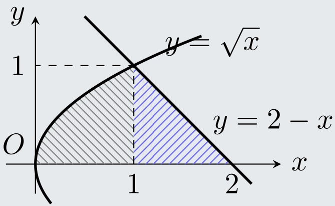
Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$



- Vẽ hình và xác định cận của tích phân $D=\begin{cases}0\le y\le 1,\\ y^2\le x\le 2-y.\end{cases}$
- $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y}(2x+3y)dx=\int\limits_0^1 \left(x^2+3xy\right)\Big|_{y^2}^{2-y}.dy$
- $I=\int\limits_0^1\left(-y^4-3y^3-2y^2+2y+4\right)dy=\left(-\frac{y^5}{5}-3\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}+y^2+4y\right)\Big|_0^1=\frac{203}{60}.$

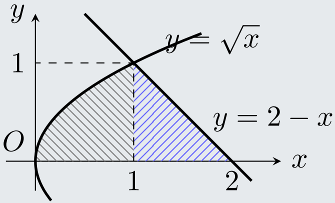
Ví dụ 1.6.

Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $y=0$.
(Tính theo y trước , x sau).



Ví dụ 1.6.

Tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$
(Tính theo y trước , x sau).



- Xác định $D = D_1 \cup D_2 = \begin{cases} 0 \le 0 \le 1, \\ 0 \le x \le \sqrt{x}. \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$

- $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} (2x+3y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (2x+3y)dy$

$$I = \int\limits_0^1 \left(2xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}} .dx + \int\limits_1^2 \left(2xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-x} .dx = \frac{203}{60}.$$

1.3. Đổi biến trong tích phân hai lớp

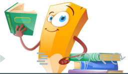
Xét tích phân với hai biến là x và y

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \iff \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ sao cho mỗi $(x,y) \in D$ ứng với một $(u,v) \in \Delta$ và các hàm $x(u,v), y(u,v)$ khả vi liên tục trên Δ. Khi đó định thức Jacobi:

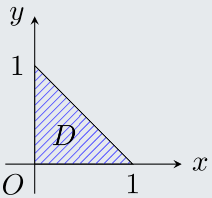
$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

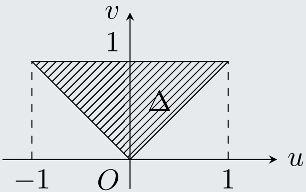
$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f\left[x(u,v), y(u,v)\right] |J(u,v)| dudv$$



Ví dụ 1.7.

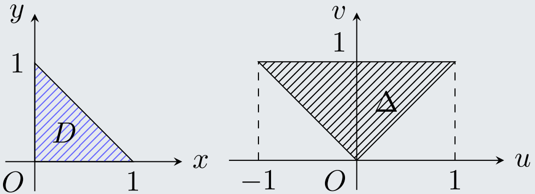
Tính $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, trong đó miền D được xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 1. \end{cases}$





Ví dụ 1.7.

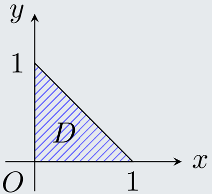
Tính $\displaystyle\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$, trong đó miền D được xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 1. \end{cases}$

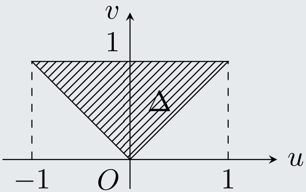


Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow J(u,u) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}.$

Ví dụ 1.7.

Tính $\displaystyle\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$, trong đó miền D được xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 1. \end{cases}$



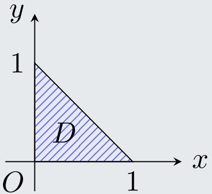


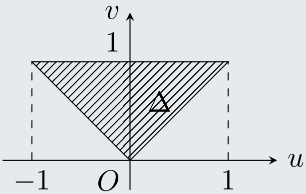
Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow J(u,u) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}.$

Khi đó, miền lấy tích phân được xác định là $u + v \geq 0;\ v - u \geq 0;\ v \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ -v \leq u \leq v. \end{cases}$

Ví dụ 1.7.

Tính $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, trong đó miền D được xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x+y \leq 1. \end{cases}$





Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow J(u,u) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}.$

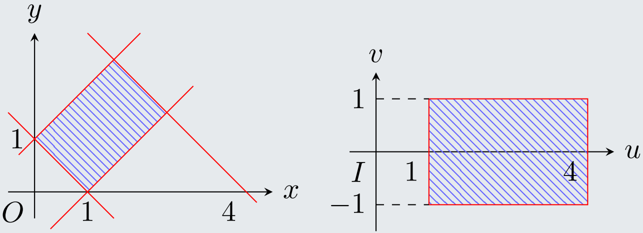
Khi đó, miền lấy tích phân được xác định là $u+v \geq 0;\ v-u \geq 0;\ v \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ -v \leq u \leq v. \end{cases}$

$$I = \iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_\Delta e^{\frac{u}{v}}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dv \int\limits_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})\int\limits_0^1 vdv = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Ví dụ 1.8.

Tính $I = \iint\limits_D (x^3 - y^3)\, dxdy$,

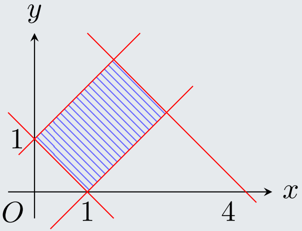
với D là miền giới hạn bởi $x + y = 1, x + y = 4, x - y = 1, x - y = -1$

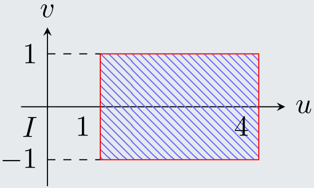


Ví dụ 1.8.

Tính $I = \iint\limits_D (x^3 - y^3)\,dxdy$,

với D là miền giới hạn bởi $x + y = 1, x + y = 4, x - y = 1, x - y = -1$





Đặt $\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$ và $\Delta = \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$.

1.4. Tích phân hai lớp trong tọa độ cực

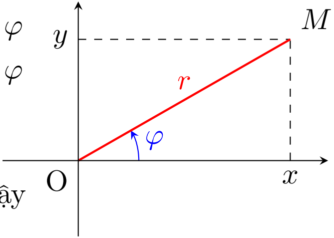
Xét tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

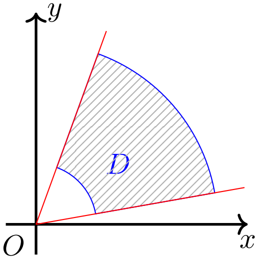
Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$

Ngược lại $x^2 + y^2 = r^2$ và $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$. Vậy

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$





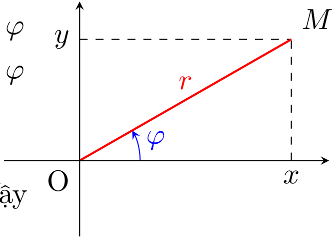
Xét tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

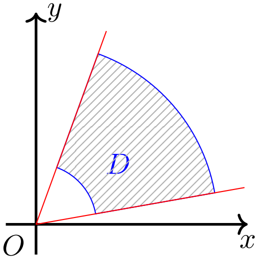
Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$

Ngược lại $x^2 + y^2 = r^2$ và $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$. Vậy

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$





Nếu $D = \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$ thì $I = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi$

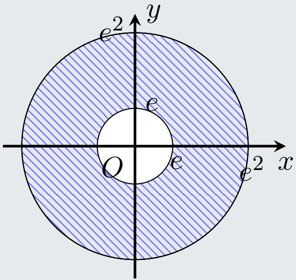
Ví dụ 1.9.

Tính tích phân hai lớp: $\displaystyle\iint_D (x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy;$

trong đó $D = \left\{(x,y) : e^2 \le x^2+y^2 \le e^4\right\}.$

Đặt: $\begin{cases} x &= & r\cos\varphi \\ y &= & r\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow D = \begin{cases} 0 & \le \varphi \le & 2\pi \\ e & \le r \le & e^2 \end{cases}$

$J = r \ge 0.$



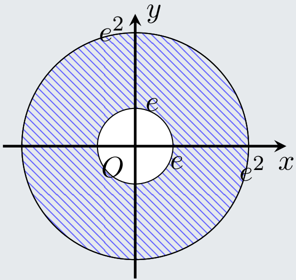
Ví dụ 1.9.

Tính tích phân hai lớp: $\iint\limits_D (x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy;$

trong đó $D=\left\{(x,y): e^2 \le x^2+y^2 \le e^4\right\}.$

Đặt: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow D = \begin{cases} 0 & \le \varphi \le & 2\pi \\ e & \le r \le & e^2 \end{cases}$

$J = r \ge 0.$



$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2}\left[(r\cos\varphi + r\sin\varphi)\ln(r^2)\right] r.dr = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_e^{e^2}\left[2r^2\ln r\right]dr$$

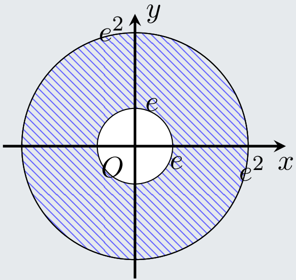
Ví dụ 1.9.

Tính tích phân hai lớp: $\iint\limits_D (x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy;$

trong đó $D = \left\{(x,y) : e^2 \le x^2+y^2 \le e^4\right\}.$

Đặt: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow D = \begin{cases} 0 & \le \varphi \le & 2\pi \\ e & \le r \le & e^2 \end{cases}$

$J = r \ge 0.$

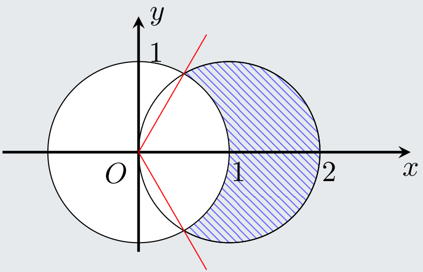


$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_e^{e^2} \left[(r\cos\varphi + r\sin\varphi)\ln(r^2)\right] r.dr = \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int\limits_e^{e^2} \left[2r^2\ln r\right] dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi.\frac{2}{3}.\int\limits_e^{e^2} \ln r d(r^3) = \frac{2}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}.\left(r^3.\ln r - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_e^{e^2} = 0$$

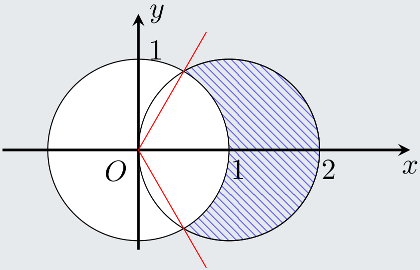
Ví dụ 1.10.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D (1+xy)\,dxdy$; trong đó $D = \left\{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\right\}$



Ví dụ 1.10.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D (1 + xy)\,dxdy$; trong đó $D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}$



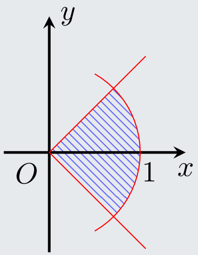
Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r \ge 0, \Rightarrow D = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$

$$I = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{1}^{2\cos\varphi} (1 + r^2\cos\varphi\sin\varphi) r dr = \ldots.$$

Ví dụ 1.11.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy;$

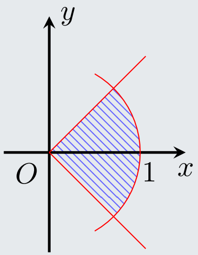
trong đó $D = \left\{x = \sqrt{1-y^2},\ y = x,\ y = -x\right\}$



Ví dụ 1.11.

Tính tích phân hai lớp: $I = \iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$;

trong đó $D = \left\{x = \sqrt{1-y^2},\ y = x,\ y = -x\right\}$



Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r \geq 0, \Rightarrow D = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \leq \varphi \leq & \frac{\pi}{4} \\ 0 & \leq r \leq & 1 \end{cases}$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^1 r^3 \cdot r dr = \ldots.$$

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, $V \subset Oxyz$. Chia vật thể V thành n phần tùy ý, gọi tên và thể tích của các khối nhỏ ấy lần lượt là

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n.$$

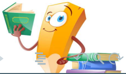
2. Tích phân ba lớp

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, $V \subset Oxyz$. Chia vật thể V thành n phần tùy ý, gọi tên và thể tích của các khối nhỏ ấy lần lượt là

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n.$$

Trong mỗi khối nhỏ, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i, \forall i = \overline{1, n}$. Lập tổng tích phân:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i.$$



2. Tích phân ba lớp

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, $V \subset Oxyz$. Chia vật thể V thành n phần tùy ý, gọi tên và thể tích của các khối nhỏ ấy lần lượt là

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n.$$

Trong mỗi khối nhỏ, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i, \forall i = \overline{1, n}$. Lập tổng tích phân:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i.$$

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, nếu I_n dần tới một giới hạn xác định I (không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn các điểm M_i) thì giới hạn đó được gọi là tích phân ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V và được ký hiệu là

2. Tích phân ba lớp

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, $V \subset Oxyz$. Chia vật thể V thành n phần tùy ý, gọi tên và thể tích của các khối nhỏ ấy lần lượt là

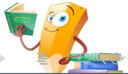
$$\Delta V_1,\ \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n.$$

Trong mỗi khối nhỏ, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i, \forall i = \overline{1, n}$. Lập tổng tích phân:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i.$$

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, nếu I_n dần tới một giới hạn xác định I (không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn các điểm M_i) thì giới hạn đó được gọi là tích phân ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V và được ký hiệu là

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz.$$



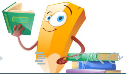
Vậy

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$$

Vậy

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$$

- $f(x,y,z)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân;
- V là miền (vật thể) lấy tích phân;
- x, y, z là các biến;
- $dxdydz = dV$ là yếu tố thể tích.



Vậy

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot \Delta V_i$$

- $f(x,y,z)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân;
- V là miền (vật thể) lấy tích phân;
- x,y,z là các biến;
- $dxdydz = dV$ là yếu tố thể tích.

Chú ý 2.

1. Nếu tích phân tồn tại thì nói rằng hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên V.

Vậy

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i$$

- $f(x,y,z)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân;
- V là miền (vật thể) lấy tích phân;
- x, y, z là các biến;
- $dxdydz = dV$ là yếu tố thể tích.

Chú ý 2.

1. Nếu tích phân tồn tại thì nói rằng hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên V.
2. Nếu $f(x,y,z)$ liên tục trên miền đóng, giới nội V thì nó khả tích trên V.

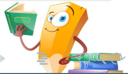
Vậy

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty, \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i$$

- $f(x,y,z)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân;
- V là miền (vật thể) lấy tích phân;
- x, y, z là các biến;
- $dxdydz = dV$ là yếu tố thể tích.

Chú ý 2.

1. Nếu tích phân tồn tại thì nói rằng hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên V.
2. Nếu $f(x,y,z)$ liên tục trên miền đóng, giới nội V thì nó khả tích trên V.
3. Tích phân ba lớp cũng có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp.



Tích phân ba lớp trong tọa độ Đề các

Giả sử vật thể lấy tích phân V là khối hình trụ đứng có đáy dưới $z = z_1(x, y)$, đáy trên là $z = z_2(x, y)$, có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy và miền phẳng $D \subset Oxy$.

Giả sử vật thể lấy tích phân V là khối hình trụ đứng có đáy dưới $z = z_1(x, y)$, đáy trên là $z = z_2(x, y)$, có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy và miền phẳng $D \subset Oxy$.Khi đó

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

Tích phân ba lớp trong tọa độ Đề các

Giả sử vật thể lấy tích phân V là khối hình trụ đứng có đáy dưới $z = z_1(x, y)$, đáy trên là $z = z_2(x, y)$, có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy và miền phẳng $D \subset Oxy$.Khi đó

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

Viết,

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Nếu miền $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$ thì $V = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases}$

Nếu miền $D = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$ thì $V = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$

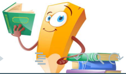
$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Nếu miền $D = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$ thì $V = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Đặc biệt nếu V là hình hộp $V = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ e \le z \le f \end{cases}$ thì

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x,y,z)dz.$$



Ví dụ 2.1.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sin(xy)xz\,dx\,dy\,dz$; V là hình hộp $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3. \end{cases}$

Ví dụ 2.1.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sin(xy)xzdxdydz$; V là hình hộp $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3. \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 xz\sin(xy)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{9}{2} x\sin(xy)dy = \frac{9}{2}\int\limits_0^1 dx \int_0^2 \sin(xy)d(xy)$$

Ví dụ 2.1.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sin(xy)xz\,dxdydz$; V là hình hộp $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3. \end{cases}$

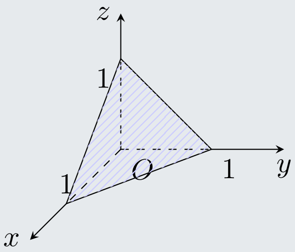
$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 xz\sin(xy)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{9}{2}x\sin(xy)dy = \frac{9}{2}\int\limits_0^1 dx \int_0^2 \sin(xy)d(xy)$$

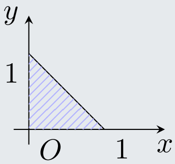
$$I = \int\limits_0^1 \left(-\cos(xy)\Big|_0^2 \right) dx = \frac{9}{2}\int\limits_0^1 (1-\cos 2x)dx = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{2}(1-\sin 2).$$

Ví dụ 2.2.

$$I = \iiint\limits_V x dx dy dz;$$

$$V = \{x + y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0\ \}.$$

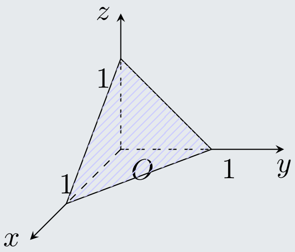


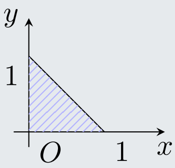


Ví dụ 2.2.

$$I = \iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz;$$

$$V = \{x + y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0\}.$$



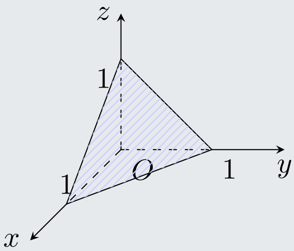


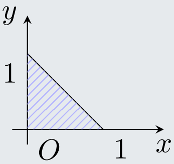
$$V = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases} \text{ và } I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,d(1-x-y).$$

Ví dụ 2.2.

$$I=\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz;$$

$$V=\{x+y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0\ \}.$$





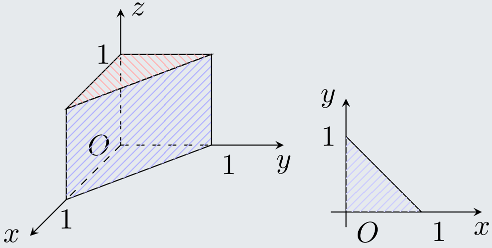
$$V=\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}\quad \text{và } I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}x\,dz=-\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}x(1-x-y)\,d(1-x-y).$$

$$I=\int\limits_0^1\frac{x(1-x)^2}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{24}$$

Ví dụ 2.3.

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;$$

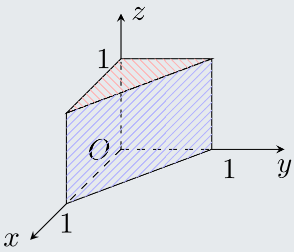
$$V = \{x=0;\ y=0;\ z=0;\ z=1;\ x+y=1\}.$$

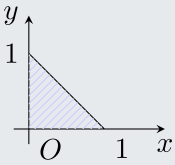


Ví dụ 2.3.

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;$$

$$V = \{x=0;\ y=0;\ z=0;\ z=1;\ x+y=1\}.$$



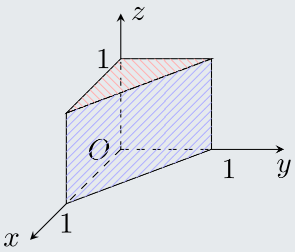


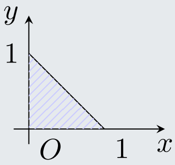
$$V = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \text{ và } I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^1 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy.$$

Ví dụ 2.3.

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;$$

$$V = \{x=0;\ y=0;\ z=0;\ z=1;\ x+y=1\}.$$

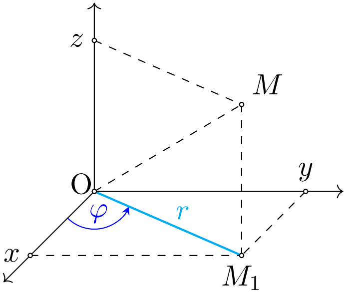




$$V = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \text{ và } I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^1 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy.$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{12}.$$

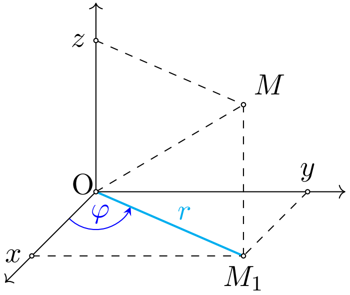
$M(x,y,z) \in Oxyz$, Gọi $M_1(x,y,0)$ là hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng Oxy. Đặt $|OM_1| = r \geq 0$ và $g(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi \in [0, 2\pi]$.



Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r \geq 0.$

Giả sử D là hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng Oxy và $D = \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases}$ vật thể V xác định bởi $z_1(r,\varphi) \leq z \leq z_2(r,\varphi)$ thì

$M(x, y, z) \in Oxyz$, Gọi $M_1(x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng Oxy. Đặt $|OM_1| = r \geq 0$ và $g(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi \in [0, 2\pi]$.



Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r \geq 0.$

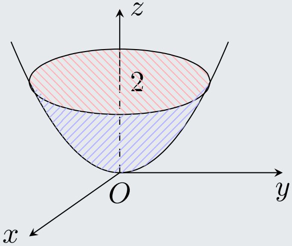
Giả sử D là hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng Oxy và $D = \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases}$ vật thể V xác định bởi $z_1(r, \varphi) \leq z \leq z_2(r, \varphi)$ thì

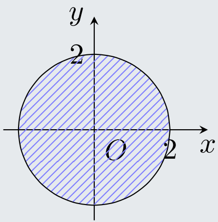
$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdz.$$

Ví dụ 2.4.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 2z \text{ và } z = 2.$$

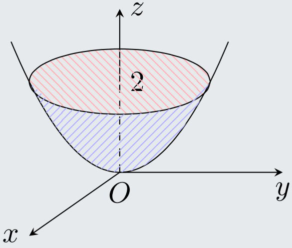


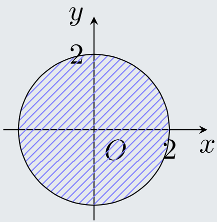


Ví dụ 2.4.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2+y^2=2z \text{ và } z=2.$$



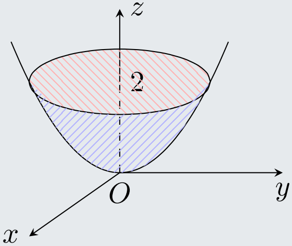


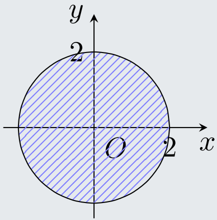
Chuyển sang tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \dfrac{r^2}{2} \le z \le 2 \end{cases}$

Ví dụ 2.4.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2+y^2 = 2z \text{ và } z = 2.$$





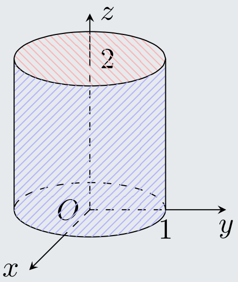
Chuyển sang tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \dfrac{r^2}{2} \le z \le 2 \end{cases}$

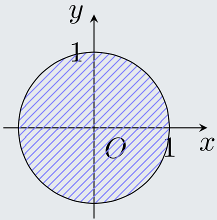
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^{2} r^2.rdz = 2\pi \int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr = \frac{16\pi}{3}.$$

Ví dụ 2.5.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 1; z = 0 \text{ và } z = 2.$$

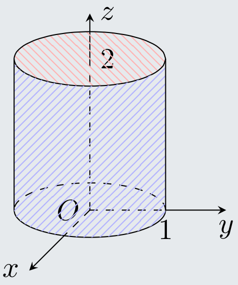


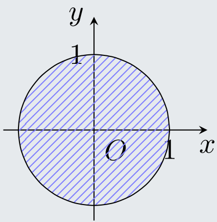


Ví dụ 2.5.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2+y^2=1; z=0 \text{ và } z=2.$$



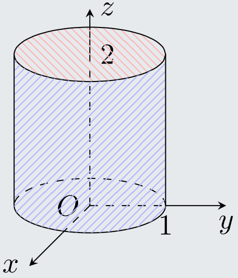


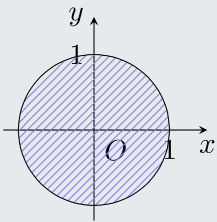
Chuyển sang tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

Ví dụ 2.5.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; V là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$x^2+y^2=1; z=0 \text{ và } z=2.$$



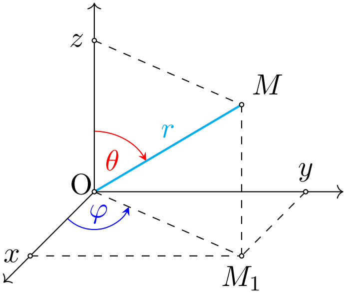


Chuyển sang tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 zr.rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2dr \int_0^2 zdz = \frac{4\pi}{3}.$$

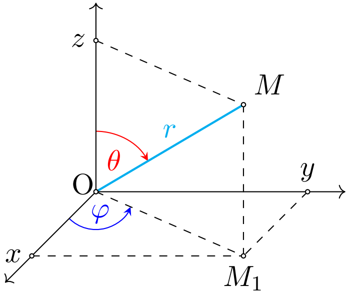
$M(x,y,z) \in Oxyz$, Gọi $M_1(x,y,0)$ là hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng Oxy. Đặt $|OM| = r \geq 0$; $g(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi \in [0, 2\pi]$ và $g(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) = \theta \in [0, \pi]$.

Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta \geq 0.$



Giả sử D là hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng Oxy và $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ vật thể V xác định bởi $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; r_1(\varphi,\theta) \leq r \leq r_2(\varphi,\theta)$ thì

$M(x, y, z) \in Oxyz$, Gọi $M_1(x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng Oxy. Đặt $|OM| = r \geq 0$; $g(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi \in [0, 2\pi]$ và $g(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) = \theta \in [0, \pi]$.



Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta \geq 0.$

Giả sử D là hình chiếu của vật thể V xuống mặt phẳng Oxy và $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ vật thể V xác định bởi $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; r_1(\varphi, \theta) \leq r \leq r_2(\varphi, \theta)$ thì

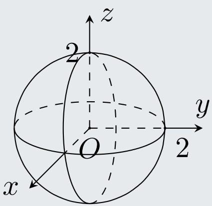
$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot r^2\sin\theta dr$$

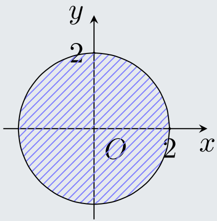
Ví dụ 2.6.

Tính

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$

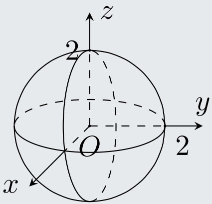
$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}.$$

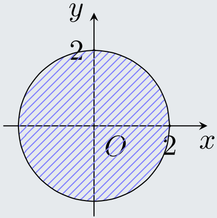




Ví dụ 2.6.

Tính
$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$
$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

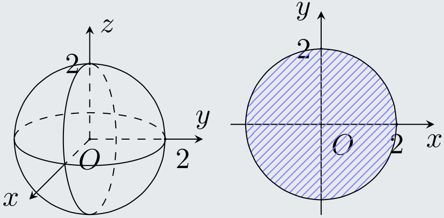




Chuyển sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta$ và $V = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

Ví dụ 2.6.

Tính
$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$
$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}.$$



Chuyển sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$

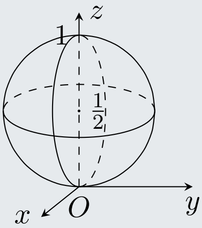
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2} r^2 \cdot r^2\sin\theta dr = \left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\cdot\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2}\right) = \frac{128\pi}{5}$$

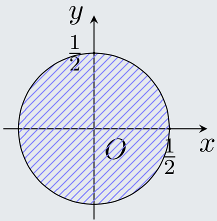
Ví dụ 2.7.

Tính

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz,$$

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le z\}.$$



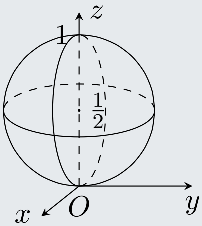


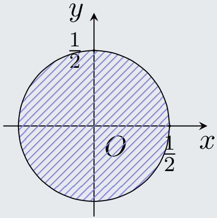
Ví dụ 2.7.

Tính

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

$$V = \{x^2+y^2+z^2 \le z\}.$$

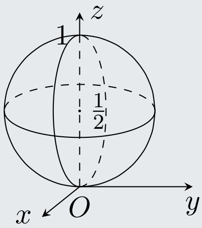


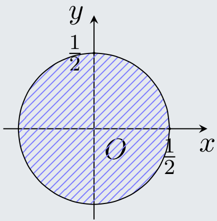


Chuyển sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \cos\theta \end{cases}$

Ví dụ 2.7.

Tính
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$
$$V = \{x^2+y^2+z^2 \le z\}.$$





Chuyển sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = r^2\sin\theta$ và $V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \cos\theta \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin\theta\cos^4\theta\right)d\theta = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}$$