УДК 536.92: 536.93

О статистиках Максвелла, Бозе, Ферми

Приложение VI к статье «Теория вероятностей: «*само совершенство*» *или его видимость*?

Часть I: критика исходных понятий теории событий; создание новой исходной системы

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

25 февраля 2019 г.

На основе метода ячеек Больцмана проведен анализ: 1. Вероятностной постановки задачи, основанной на методе ячеек. 2. Влияние физической модели задачи на вероятностную модель и взаимосвязь моделей. Анализ влияния физической модели задачи на вероятностную модель привел к некоторым неожидаемым результатам. Во-первых, он показал, что физическая модель, созданная Максвеллом, обуславливает 2-е разные постановки вероятностной задачи: 1) определение среднего числа частиц, скорости которых лежат между данными пределами; 2) определение среднего числа частиц, находящихся в некоторой части объема, занимаемого газом. Во-вторых, анализ выявил противоречия между некоторыми «декларируемыми» утверждениями статистической физики и результатами, полученными на основе метода ячеек с применением моделей существующей теории вероятностей.

Источником вдохновения этих исследований стала замечательная работа В. Феллера [1], которая была прочтена с большим опозданием. Упоминания о статистической физике есть и в других работах по теории вероятностей (например [2]), но они «тусклы и невнятны», потому эта тема осталась вне зоны внимания.

Содержание.

***<u>Примечания</u>.* 1. Ссылки на цитируемые работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. При ссылке на не несколько работ, они разделяются точкой с запятой. 2. Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, ... Некоторые положения, следующие из анализа, обозначены номерами в фигурных скобках {A.1}, {A.2}, ..., чтобы обратить на них внимание Читателя. 3. При анализе применяется в основном существующая теория событий: новая сходная система упоминается только по мере необходимости. При этом ссылки даются в первую очередь на работу [5] как более понятную, чем [10]: по крайней мере, нам так кажется.**

Предисловие

Основные законы распределения статистической (**классической**) физики выведены, исходя *из связи скоростей* (***импульсов, энергий***) *частиц с координатами.*

При выводе распределения Максвелла связь используется непосредственно [3,52: 4,311], а распределения Гиббса – в «завуалированной форме»: в виде фазового пространства [3,102].

Все просто: уравнения Лагранжа заменяется уравнениями Гамильтона [3,98] и полагается, что найдено их решение. Естественно, что при решении вероятностной задачи физиками применялось то, что «предлагала» теория вероятностей. С другой стороны, Больцман [3,209] разработал метод ячеек, который тоже широко применяется в статистической физике.

Метод ячеек Больцмана оказался очень подходящим *для анализа* задачи с позиции *теории событий* (**без обращения к теории случайных величин**)): при анализе в основном применяется существующая теория (**примечание 3, стр.1**).

> ***Результаты анализа*** **с позиции** ***применяемых математических*** **моделей, были неожидаемыми и привели автора в замешательство: Было решено провести** ***анализ физической*** **модели задачи и взаимосвязи моделей. Анализ (он оказался трудным) привел к тому, что приложение «приобрело самостоятельность».**

Выводы, следующие из анализа, *существенно влияют на некоторые положения статистической физики*, а это требует, ясного понимания что, почему и как изменено, и серьезного обсуждения того, к чему приводят эти изменения. Поэтому анализ дается преднамеренно подробно. А правильны или нет наши рассуждения – судить Читателю.

Введение

В конце XVIII века возникла дискуссия [2,405], начатая Даламбером.

Мотивируя тем, что при бросании 2-х монет возможны лишь три события: "*герб-герб*"; "*герб-число*"; "*число-число*", он определил вероятность их появления равной *1/3* . Другая мотивация: события "*герб-число*" реализуется 2-мя способами: на 1-й монете "*герб*", а на 2-й – "*число*"; на 1-й – "*число*", а на 2-й – "*герб*". В этом случае вероятность появления события "*герб-число*" равна *1/2*.

Чем закончилась дискуссия, история «умалчивает», но этот и подобные ему примеры встречаются в современных работах иногда, мягко говоря, со странными пояснениями. Например [6, 25-26]:

Бросаются «... две *физически различные* монеты ... Модель I казалась бы более естественной, если бы можно было себе представить монеты *физически неразличимыми*. Опыт показывает, что в действительности монеты *ведут* себя как *различимые*. Однако, этот достаточно *очевидный факт* для монет, оказывается неверным для некоторых типов частиц. Бозе и Эйнштейн доказали, что некоторые типы частиц ведут себя как *неразличимые*. Рассмотренный пример показывает, что нельзя слишком полагаться на интуицию: подходящей моделью может оказаться совершенно неожиданная». Модель I – мотивация Даламбера.

Сложно понять, что понимается под *физической различимостью* монет при *одновременном* бросании. Если *одновременно* бросаются 2-е *новенькие одинаковые* монеты, то *можно ли отличить их после падения*?

Применяя высокоточные инструменты, конечно же, можно: но, во-первых, это весьма утомительное занятие – после каждого бросания проводить измерения, а во-вторых, *в этом нет какого-либо смысла*. Эта мысль прекрасно выражена В. Феллером [1,29]: «*Различимы ли шары на самом деле, для нашей теории несущественно*. Если это даже и так, мы можем условиться считать их *неразличимыми*». Что же касается монет, то: 1. Бросая одну монету много раз, будем наблюдать «герб» или «число» и ничего другого. 2. Комбинации, о которых говорилось выше, появляются только при *одновременном* бросании монет. При *одинаковых* монетах, мы будем наблюдать в *экспериментах* 3 комбинации. Однако появление в *эксперименте* на одной монете «герба», а на другой – «числа», *исключает одновременное* появление «числа» на 1-ой и «герба» на 2-ой монете (как и любой другой комбинации [5,40]). *Одинаковые* монеты или *разные* не имеет значения: *в любом* случае будет 4-е комбинации.

Т.е. «*очевидный факт* для монет» как-то не очень очевиден. Однако монеты, вообще говоря, здесь не причем, ибо внимание к дискуссии привлечено в связи с «совершенно неожиданной» моделью, о которой говорится в комментариях (**данным в [1], на которую ссылается автор [6]**) к двум задачам:

«***Пример*** а). **Размещение 3-х шаров по 3-м ящикам[1]. Таблица[2] 1 содержит все возможные исходы «опыта», состоящего в размещении 3-х шаров по 3-м ящикам. Каждое из этих размещений представляет неразложимый исход эксперимента, т.е. элементарное событие [1,26]. . . .** ***Пример*** в). **Случай *неразличимых* шаров. Вернемся к примеру а) и предположим теперь, что все 3-и шара одинаковы. ... В этом случае табл.1 сводится к табл.2, которая определяет новое пространство элементарных событий» [1,29].**

Комментарии. **1. «В примере а) представляется естественным предположение о том, что все элементарные события равновероятны, т.е. что каждое из них имеет вероятность 1/27. Мы можем, отправляясь от этого определения, изучать его следствия»[1,27].**

2. «Соответствующее "естественное" распределение вероятностей представлялось совершенно очевидным каждому и принималось физиками без колебаний. Однако оказалось, что физические частицы не обладают "здравым смыслом", и "естественное" распределение Больцмана пришлось, в одних случаях, заменить распределением Бозе-Эйнштейна, а в других – распределением Ферми-Дирака. Не существовало никаких интуитивных доводов, почему фотоны ведут себя иначе, чем протоны и почему частицы обоих типов не подчиняются "априорным" законам» [1,22].

3. «Обратимся теперь к примеру в), связанному с размещением 3-х неразличимых шаров по 3-м ящикам. Можно рассуждать так: невозможность различать шары не отражается на сущности физического эксперимента, и остается по-прежнему 27 исходов, хотя только 10 из них оказываются различимыми. Эти рассуждения показывают, что 10 точкам табл.2 надлежит приписать следующие вероятности: 1/27, 1/27, 1/27, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 2/9. Следует отметить, что по отношению к большей части приложений, перечисленных в примере 2,b), такое рассуждение звучит убедительно, и это оправдывает указанный способ задания вероятностей, соответствующих точкам табл.2. Исторически это рассуждение долгое время принималось, как безусловно верное и в статистической механике служило основанием статистики Максвелла-Больцмана для размещения частиц по ячейкам. Тем большее было удивление, когда Бозе и Эйнштейн показали, что определенные типы частиц подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна . . . . В рассматриваемом случае модель Бозе-Эйнштейна сопоставляет каждому из 10 элементарных событий вероятность 1/10. Этот пример показывает, что *в одном и том же пространстве элементарным событиям вероятности можно приписывать по-разному.* Он поясняет трудное для понимания взаимное действие друг на друга теории и практики и учит нас, в частности, не надеяться особенно на априорные аргументы и быть готовыми принять новые и непредвиденные схемы» [1,39-40].

Последнее предложение в цитате полностью созвучно с нашим пониманием соотношения теории и практики. Если по существу, то в основной части работы [5,4-40] мы только тем и занимались, что приводили *теорию в согласие с экспериментами.* «Двигаясь в том же направлении», зададим себе вопрос: *является ли модель, созданная Бозе, неожиданной, по крайней мере, с точки зрения математики*?

Мы не знаем, чем именно руководствовался Бозе при выводе распределения фотонов по энергиям (**иметь бы перевод работы, близкий к оригиналу, а не «ее пересказы со слов»**), но то, что *исходил из рассуждений*, приведенных

---

[1] **Далее вместо слова «ящик» будем употреблять слово «урна»**

[2] **Таблицы даны на стр.6. Мы использовали представление таблиц в виде, данном в работе [2,36]. Оно удобнее и нагляднее чем таблица в работе [1,27]**

в цитате 3, вызывает *сомнения*. Во-вторых, *аксиоматическая* теория с ее *неопределенным* «пространством элементарных событий», которым можно «*приписывать вероятности*» и *не менее непонятными* «сложными событиями» [5,17-27] в то время «еще не родилась».

Чтобы получить ответ на вопрос проведем подробный анализ задач: 1) с *позиции применяемых математических моделей*; 2) влияние *физической модели* задачи на *математическую модель*.

1. Размещение шаров по урнам и комбинаторика

Начнем с расстановки шаров по урнам, которая проводится в соответствии с 3-мя видами комбинаций [7,199-203]:

1. Перестановка $\mathbf{P_n} = n!$ – последовательность n *разных* предметов *с учетом порядка*. 2. Размещения $\mathbf{A_n^m} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1)$ – любая группа m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *с учетом порядка* в группе. 3. Сочетания $\mathbf{C_n^m} = \mathbf{A_n^m} / \mathbf{P_m}$ – любая группа из m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *без учета порядка* в группе.

Рассмотрим отдельно комбинации, связанные с шарами и с урнами.

I.1. *Неразличимые шары*. В соответствии с определением, комбинации составляются только для *разных* предметов. Именно поэтому мы выделили в определениях видов комбинаций слово «разные». Для *неразличимых* шаров, вообще говоря, *комбинаций не существует*: тем не менее, из них можно составить только N групп b,n по числу $n = 1, 2, ..., N$ шаров в группе. Из групп можно составить много разных комбинаций, однако при данном числе шаров осуществить можно только те комбинации, в которых сумма шаров в группах не превышает числа шаров.

Определение **1**. *Комбинации групп* b,n шаров, которые *отвечают условию* $b,1+b,2+\cdots+b,n$ $(b,k>0)$, будем называть *допустимыми комбинациями групп* шаров (**или просто *допустимыми комбинациями***).

I.2. *Различимые шары* (например, с *разными* номерами). Число *допустимых комбинаций* групп b,n *не изменяется*, однако, *различимыми* становятся группы с *одинаковым* числом b,n $(2 \le n < N)$ шаров в *допустимой комбинации*. Для каждой группы b,n можно составить *комбинации* с *разными* шарами, учитывая, что *порядок в группе нас* не интересует.

Число z=*1*, *2*, ..., Z урн не связано с числом шаров N. Урны, сами по себе, не отличаются друг от друга: они *различимы* только тогда, когда в них *помещаются* шары. *Различимость* урн определяется *числами*

n=*1*, *2*, ..., N шаров в группе $\mathbf{b, n}$ и *различимостью* шаров.

II.1. ***Неразличимые шары. Различимость*** **урн определяется только числами шаров в группе. При расстановке шаров по урнам следует соблюдать условия. Во-первых, *в одной урне* может находиться *только одна группа*** b, n **шаров. Во-вторых, так как необходимо разложить все** N **шаров, то мы можем использовать только *допустимые комбинации групп*[3] шаров. При размещении *допустимых комбинаций* групп** b, n **по** Z **урнам, их можно дополнять только соответствующим числом групп** $b, 0$ **(пустыми урнами). При значении** $Z = 1$ **имеем размещение одной *допустимой комбинации*** b, N**. Если значение** $Z = 2$**, то имеем *размещения комбинаций*[4]: 1)** $b, N-k$**; или** b, k **(**k=*0*, *1*, *2*, ..., N**). Увеличение числа урн на число** z **приводит к дополнению комбинаций (1). 1. Каждой комбинации таким же числом пустых урн** $b, 0$**. 2. *Допустимыми комбинациями* с другими группами** b, n**. Например:** $Z = 3$**. 1) b, N − 2; b, 1; b, 1. 2) b, N − 3; b, 2; b, 1. 3) b, N − 4; b, 3; b, 1. 4) b, N − 4; b, 2; b, 2 и т.д. (табл.3,** $N = 4$ **).** $Z = 4$**. 1) b, N − 3; b, 1; b, 1; b, 1. 2) b, N − 4; b, 2; b, 1; b, 1 и т.д.**

Таблица. 1

abc			*	ab	ab		c	c		-	ac	ac		b	b		-	bc	bc		a	a		*	a	-	a	-	b	-	b	-	c	-	c
	abc		*	c		ab	ab		c	-	b		ac	ac		b	-	a		bc	bc		a	*	b	-	c	-	a	-	c	-	a	-	b
		abc	*		c	c		ab	ab	-		b	b		ac	ac	-		a	a		bc	bc	*	c	-	b	-	c	-	a	-	b	-	a

Таблица. 2

3			*	2	2		1	1		*	1
	3		*	1		2	2		1	*	1
		3	*		1	1		2	2	*	1

Таблица. 3

4			*	3	3		1	1	1	*	2	2		*	2	1	1
	4		*	1		3	3		1	*	2		2	*	1	2	1
		4	*		1	1		3	3	*		2	2	*	1	1	2

Таблица. 4

4				*	3	3	3				1	1	1				*	2	2	2				*	2	2	2		1	1	1		1	1	1		*	1
	4			*	1			3	3		3			1	1		*	2			2	2		*	1	1		2	2	2		1	1	1		1	*	1
		4		*		1		1		3		3		3		1	*		2		2		2	*	1		1	1	1		2	2	2		1	1	*	1
			4	*			1		1	1			3		3	3	*					2	2	*		1	1	1		1	1	1		2	2	2	*	1

Увеличение *допустимых комбинаций групп* продолжается до значения $Z = N$ **(табл.2** $N = 3$**, табл.4** $N = 4$**). В этом случае *впервые* появляется *размещение с допустимой комбинацией, состоящей только из групп*** $b, 1$ **(т.е. в каждой из** Z **урн находится по одному шару).**

При значениях $Z > N$ ***комбинации*, полученные при значении** $Z = N$**, будут дополняться только группами** $b, 0$**. Общее число *размещений неразличимых* шаров −** $(\mathbf{N+Z-1})!/\{\mathbf{N}!(\mathbf{Z-1})!\}$ **[1,59; 2,36].**

II.2. ***Различимые шары.Различимость*** **урн по числам шаров в *допустимой комбинации групп*, дополняется *различимостью* шаров: *различимыми* становятся *группы*** b, n ***с одинаковым* числом шаров (без учета порядка шаров в группах** $(n > 1)$**), что приводит к *увеличению* числа *размещений допустимых комбинаций групп* по урнам. В табл.1 эти размещения** (N=*3*, Z=*3*) **отделены ячейками с тире. Общее число *размещений различимых* шаров −** $\mathbf{Z^N}$ **[1,47; 2,35].**

Примечание. Определение *числа* размещений *допустимой комбинации групп неразличимых и различимых* шаров, рассмотрим при анализе связи *вероятностной и физической* моделей задачи.

Номера урн и *номера* размещений *допустимых комбинаций* групп шаров по урнам *не приведены* в таблицах *намеренно*: *число размещений не зависит ни от номеров* урн, *ни от номеров* размещений. Но в работах

---

[3] **Группы** b, n **называют числами заполнения: мы применять его не будем**

[4] **В табл.2-4 даны: 1) числа шаров в урнах, ибо в этом заключено отличие урн; 2) размещения по урнам, полученные для соответствующей комбинации групп шаров отделены ячейкой с 3-мя «звездочками»**

дается другая трактовка:

«В приведенном выше примере мы рассматривали *неразличимые* шары, но в табл.2 еще *различаются* 1-й, 2-й и 3-й ящики, и их порядок существен. Мы можем пойти еще дальше и считать, что даже ящики *неразличимы* (например, ящики можно выбирать наудачу независимо от их содержимого). Если и шары, и ящики неразличимы, то возможны только три размещения, а именно: $|***|-|-|$, $|**-|-*-|-|$ и $|-*-|-*-|-*-|$» [1,30].

Покажем, что *неразличимость* урн не измененяет числа *размещений*.

Таблица 5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
A	3			2	2		1	1		1
B		3		1		2	2		1	1
C			3		1	1		2	2	1

***Пример* 1. Размещение шаров можно осуществить реально, хотя это может быть «накладно». Положим шары *неразличимыми* и ограничимся случаем** $(N{=}Z{=}3)$. **Нам потребуется 30 шаров и 30 урн. Разделим урны на 10 групп (римские цифры в табл.5) по 3 урны в каждой. Расставим шары по группам урн в соответствии с табл.2. Т.е. ячейки в табл.1-4 – это *виртуальные* урны, *мысленно* объединенные в группы по числу** N **урн в каждой. Номера урн в табл.1-4 ставят перед 1-м столбцом. Номеру соответствуют все ячейки (*виртуальные* урны) данной строки. В табл.5 буквами «A, B и C» обозначены номера реальных урн в каждой из групп. Перестановка урны с номером A (B или C) означает, что перемещаются все урны с этим номером во всех группах. Число групп урн не изменяется, а просто изменяется порядок *размещения* групп шаров для данной *допустимой комбинации*. Перестановка групп урн с номерами I-X приведет к «перемешиванию» размещений *допустимых комбинаций* групп, но ни число групп, ни общее число размещений не изменится.**

Реально размещение шаров по урнам подчиняются 2-м правилам:

W.1. *В одной из* Z **урн может находиться *<u>или</u> 0, <u>или</u> 1, <u>или</u> 2, . . . , <u>или</u>*** N **шаров.**

W.2. *Сумма* шаров *в группе из* Z **урн (т.е. в одном размещении) *равна*** N**.**

Номера урн мы пишем (**или проговариваем**) только для того, чтобы *упростить выполнение* правил и *подсчет числа* размешений для данной *допустимой комбинации групп* шаров, не более. Из анализа следует:

W.3. Комбинаторика определяет два *естественных* размещения: для *различимых* и *неразличимых* шаров. Следовательно, в примере в) (стр.4) *предположение*, что каждое из «элементарных событий» имеет вероятность 1/10 *такое же естественное*, как вероятность 1/27 в примере а).

Для ответа на вопрос хватило, всего-то, анализа задачи с позиций комбинаторики. Здесь нет физики – одна математика (**п.I.1, стр.5**).

2. Размещение шаров по урнам и теория событий

До сих пор мы целенаправленно не говорили о *возможных* комбинациях потому, чтобы не было «путаницы» между комбинациями и *возможными* исходами опыта (**или элементарных событий [5,20]**). Хотя развитие комбинаторики непосредственно связано с теорией вероятностей [1,386-400], но это не означает, что она связана с событиями и операциями с ними. *Исходные системы понятий и математические модели теории вероятностей и комбинаторики разные.* Комбинаторика – «инструмент» *для непосредственного вычисления вероятностей* событий: однако, чтобы применить его *надо сначала определить события, вероятности которых необходимо вычислить.*

Приведем два примера из работы [1], которые связаны с событиями.

<u>*Пример*</u> <u>2</u>. «Игра в кости. *Возможному* исходу *эксперимента*, состоящему в бросании N^5 **игральных костей, соответствует распределение** N **шаров по** $Z = 6$ **ящикам. Если *бросают монеты*, то имеют дело с** $Z = 2$**» [1,27].** **<u>*Пример*</u> <u>3</u>. «При стрельбе по** Z **мишеням пули соответствуют шарам, а мишени – ящикам» [1,28].**

Пока ограничимся разговором об игре в кости.

Таблица 6

1,1	1,2	1,3	1,4	*1,5*	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	*2,5*	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	*3,5*	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	*4,5*	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	*5,5*	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	*6,5*	6,6

Таблица 7

2						*	1	1	1	1	1										
	2					*	1					1	1	1	1						
		2				*		1				1				1	1	1	1		
			2			*			1				1			1			1	1	
				2		*				1				1			1		1		1
					2	*					1				1			1		1	1

А.1. При *одновременном* бросании 2-х игральных костей образуются 36 *естественных «комбинаций»*, данных в табл.6 (числа очков, отделенные запятой). *Ее структура значительно отличается от* табл. 1-5. По сути, «комбинации» – это *произведение* множеств *элементарных* событий 2-х *опытов* [5,22-23]. **2. Используем понятие *пар* в комбинаторике: «Из** m **элементов** $a_1, ..., a_m$ **и** n **элементов** $b_1, ..., b_n$ **можно образовать** $m \cdot n$ **пар[6]** (a_j, b_k)**, содержащих по одному *элементу* из каждой группы» [1,46]. *Числа очков*** $j = 1, 2, ..., 6$ ***на одной* и** $k = 1, 2, ..., 6$ ***на другой* кости – это *элементы*, из которых образуются *пары*** j, k**. *"Элементы" – числа очков* не зависят от *различимости* или *неразличимости* костей, поэтому *число пар*** j, k **будет одинаковым. Не следует «подменять» понятие пар понятием сочетаний, не учитывающих порядок элементов в группе (стр.5).**

В.1. Можно исходить из «образа шаров и урн», тогда: 1. Табл. 6 следует дополнить (например, сверху и слева) ячейками с номерами урн, а во всех ячейках написать "ab" **(или** "aa" **при *неразличимых* костях – «шарах»). Но и в этом случае сочетание букв**"ab" **(или** "aa"**) в соответствующей ячейке будет**

---

[5]**Здесь и далее при цитировании работ используются обозначения принятые нами**

[6] **Если *типов элементов больше 2-х*, то *группы*, содержащие *по одному элементу каждого типа*, называют *комбинациями* [1,47], но комбинации – слишком широкое понятие, поэтому, возможно, их лучше называть тройками, четверками и т.д., как это делается в теории множеств. В теории вероятностей они соответствуют *произведению* множеств *элементарных* событий 3-х и более *опытов***

означать, что при *одновременном* бросании 2-х костей могут появиться пары (произведения) j, k с числами очков $j, k = 1, 2, ..., 6$ на гранях. 2. Можно также составить таблицу, подобную табл.1, в которой тоже будет 36 размещений. При *неразличимых* костях («шарах») получим только 21 размещение (табл.7). Именно в этом случае справедливо утверждение: «Существует C^N_{N+5} *различимых* исходов бросания *неразличимых* игральных костей» [1,59].

На основе анализа:

1. Определена связь *произведения* множеств *элементарных* событий 2-х *опытов* (п.А.1) с *парами* (или комбинациями, сноска 5) и подтвержден результат (п.А.2) для событий *совмещенного опыта* [5,32,43]. 2. Дана правильная интерпретация (п.В.1) размещения комбинаций групп в табл.6, следующее из «образа шаров и урн». 3. Показано, что структура табл.6, определяемая *произведениями* (*парами*) *элементарных* событий, существенно отличается от структуры табл.1-4,7, образованных размещением шаров по урнам.

«Загвоздка» только в одном моменте: *имеет ли какое-либо отношение представление пар* (**произведений**) *в виде табл. 6 к решаемой задаче*?

Очевидно, что между событиями и *размещениями*, приведенными в табл.1-4,7 (**а именно они интересуют нас**) следует провести такую же «параллель» как между табл.6 и *парами*. Однако *как получить эти размещения на основе теории событий*?

Ответы «скрыты» в теории вероятностей, однако анализа задачи с позиции теории событий (**как и с позиции комбинаторики**) в работах нет[7].

В *классической* теории [2,35], вводится *предположение*: **шар может находиться в одной из Z урн с вероятностью** $1/Z$. Но оно не используется.

<u>*Замечание*</u> <u>2</u>. Размещения просто *считаются равновероятными*, но как они образуются на основе *предположения* – ни слова. Пояснений к равновероятности размещений много, но они либо сводятся к данному в работе[8] [4,326], либо не совсем понятны.

В аксиоматической теории *всем размещениям допустимых комбинаций* групп шаров <u>*приписываются*</u> <u>*равные*</u> <u>вероятности</u>[9] (**комментарий 1, стр.4: более подробно в работе [1,50]**). Приписывать размещениям равные (**впрочем, и любые другие**) вероятности, конечно можно, *однако чему они соответствуют в реальных задачах теории событий*?

<u>*Пример*</u> <u>4</u>. В табл.5 (стр.7) представлены *реальные размещения* 30 шаров в 30 урнах (10 групп по 3 урны в каждой). 1.При выборе наугад

---

[7] Впрочем, исходя только из существующего варианта теории событий, без ее изменения, данного в основной части работы [5], мы тоже вряд ли смогли бы это сделать

[8] О нем попозже

[9] Очень удобно: не надо никаких пояснений. Это и стало основой вывода W.3 (стр.7)

одной группы, вероятность появления каждой из групп равна $1/10$. 2.При выборе наугад одной из 3-х урн в I-III, или в IV-IX, или X группах, вероятности того, что в урне окажутся шары, соответственно равны $1/3$, $2/3$ и 1.

Таким образом: <u>A.</u> При выборе наугад одной из 30 урн вероятности того, что в урне окажутся шары, для отмеченных групп урн равны $3/30$, $12/30$ и $3/30$. Вероятность отбора пустой урны – $12/30$. <u>B.</u> *Группы* урн I-III, или IV-IX, или X определяют *число размещений каждой из допустимых комбинаций групп* шаров по 3-м урнам (п.II.1, стр.6). Вероятности появления *допустимых комбинаций групп* шаров равны $3/10$, $6/10$ и $1/10$ соответственно.

Этот простой анализ показывает:

1. Равновероятны группы размещений, в которых содержится: 3 шара, либо 2 шара в одной и 1 в другой, либо по 1-му шару в каждой из 3-х урн.

2. Вероятность $1/\mathbf{C^N_{N+Z-1}}$ (для различимых шаров Z^{-N}) относится к выбору наугад одного из $\mathbf{C^N_{N+Z-1}}$ (или Z^N) размещений (*виртуальных* групп урн), а вероятность $1/Z$ – к выбору наугад одной из Z урн в отобранной группе.

3. *Размещение допустимых комбинаций групп* шаров по Z урнам *не являются равновероятными.*

4. Запись в виде $|3|0|0|$, $|2|1|0|$ и $|1|1|1|$ применима для определения вероятности появления шаров в равновероятных группах размещений.

При анализе мы связали *реальное* размещение шаров по урнам с простой задачей теории событий. Теперь рассмотрим примеры 1 и 2, в которых события – **«появление одного шара в одной из урн»**– изначально связаны с вероятностями. Пример с бросанием игральных костей приводится практически во всех учебниках.

III.1. При бросании игральной кости, вероятность появления грани с данным числом очков $j = 1, 2, ..., 6$ (*элементарного* события a_j) равна $1/6$. Пары j, k ($j, k = 1, 2, ..., 6$) в комбинаторике (п.A.1, стр.8) соответствуют *произведениям элементарных* событий $\mathbf{A_{j,k} = a_j \cdot b_k}$ при *совмещении* 2-х *опытов* в теории вероятностей [5,29]. Вероятность появления одного *произведения* равна $\mathbf{P(A_{j,k})} = (1/6)^2$, т.е. *равновероятность* размещения пар (табл.6) следует из *равновероятности* появления граней. Никакого *предположения* вводить не требуется.

Пример со стрельбой дается намного реже, но он гораздо интереснее.

Мишень можно представить как 2 урны: одна соответствует попаданию (событие a_1), а другая - промаху (событие a_2) при выстреле («пуле»). Пусть по мишени производится три выстрела («пули»), т.е. имеем 6 событий: $\mathbf{a_1^w}$ и $\mathbf{a_2^w}$ ($w = 1, 2, 3$). Рассмотрим два варианта:

C1. «Пули» *разные*: $\mathbf{P(a_1^w)} = p_w$ и $\mathbf{P(a_2^w)} = q_w$ ($p_w + q_w = 1$).

С2. «Пули» ***одинаковые***[10]**: $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1^{\mathbf{w}}) = p$ и $\mathbf{P}(\mathbf{a}_2^{\mathbf{w}}) = q$ ($p + q = 1$).**

III.2. Начнем с задачи, которая, по сути, решена (1713г.) еще Я. Бернулли: ***определить вероятность того, что при 3-х выстрелах будет ровно n=0,1,2,3*** **попаданий. Далее рассматривается вариант (С2). Нас интересует попадание «*и при 1-м, и при 2-м, и при 3-м* выстреле[11]». Т.е. имеем** ***произведение*** **множеств** ***элементарных*** **событий 3-х** ***опытов*** **[5,21]. Его результат – 8** ***произведений*** **$\mathbf{a}_j^1\mathbf{a}_k^2\mathbf{a}_m^3$ $(j,k,m = 1,2)$ (при N выстрелах число произведений 2^N). Заменим** ***элементарные*** **события их вероятностями и сложим** ***произведения*** **в которых вероятность p имеет одинаковую степень $0, 1, 2, 3$. Получим искомые вероятности: q^3, $3pq^2$, $3p^2q$ и p^3. При $N > 2$ выстрелах они вычисляются по формуле Бернулли $\mathbf{P_N(n)} = \mathbf{C_N^n}p^nq^{N-n}$ (их совокупность называют биноминальным распределением[12]).**

Именно это решение, ***в предположении*** **$p = q = 1/2$ (т.е. для *неразличимых* «шаров» (С2.))** ***применено при пояснении равновероятности*** **размещений [4,326]. Однако:**

А. При N выстрелах ***число произведений*** **2^N равно** ***общему числу*** **размещений (п.II.2, стр.6) N *различимых* шаров по 2-м урнам.**

> **{А.1}** ***А шары то – неразличимы!*** **Результат никак «не вяжется»** ***с общим числом*** **$C_{N+1}^N = N + 1$ (п.II.1, стр.6) и вероятностью $1/(N + 1)$** ***размещений N неразличимых*** **шаров по 2-м урнам.**

Может быть, необъяснимость «этого парадокса» с точки зрения вероятностей – одна из причин, определившая «неожиданность» модели Бозе.

В. В более общем виде: «мишень» разделяется на Z «урн» (одна из урн соответствует промаху); «пуля» попадает в урну с номером $z = 1, 2, \ldots, Z$ с вероятностью p_z. Определить вероятность того, что при $N \geq Z$ выстрелах в урне 1 будет ровно $m,1$, в урне 2 – $m,2$, ..., в урне Z – m,Z «пуль» (где $m,z = 0, 1, \ldots, N$ $(z = 1, 2, \ldots, Z)$– целые числа, такие что $m,1 + m,2 + ... + m,Z = N$). Т.е. ***повторяется*** **N раз** ***опыт*** **с** ***элементарными*** **событиями $\mathbf{a}_j^{\mathbf{w}}$ $(j = 1, 2, \ldots, Z)$. Запишем произведение в виде $(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + ... + \mathbf{a_Z})^{\mathbf{N}}$. Решение этой задачи (суммируются произведения, в которых вероятности p_z имеют одинаковую степень $mz = 0, 1, \ldots, N$ $(m,1 + m,2 + ... + m,Z = N)$) определяется полиномиальным[13] распределением $\mathbf{P_N(m,1; m,2; \ldots; m,Z) = N!/(m,1!m,2! \ldots m,Z!)}p_1^{m,1}p_2^{m,2}\ldots p_Z^{m,Z}$ [2,74]. Число Z^N произведений, как выше, соответствует числу размещений (п. II.2, стр.6) N различимых шаров по Z урнам. Если $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1^{\mathbf{w}}) = \mathbf{P}(\mathbf{a}_2^{\mathbf{w}}) = \ldots = \mathbf{P}(\mathbf{a}_Z^{\mathbf{w}}) = 1/Z$, то вероятность любого произведения равна $1/Z^N$. Вывод в п.А верен и в общем случае, но**

---

[10] **Под «разными пулями» понимается изменение условий стрельбы при каждом выстреле, которые приводят к изменению вероятности попадания в мишень (разные стрелки, оружие, мишени, дальность до мишени и т.п.). «Одинаковые пули» – все выстрелы производятся при неизменных условиях (один стрелок, одно оружие, одна мишень и т.д.)**

[11] **Это предположение существенно отличается от предположения размещения шаров по урнам (вывод W.1, стр.7)**

[12] **А. Муавр искусственными преобразованиями [9,82-86] свел его к нормальному распределению**

[13] **Название было принято потому, что вероятности представлялись коэффициентами при степенях $x_1^{m,1}x_2^{m,2}...,x_Z^{m,Z}$ в разложении полинома $(p_1x_1+p_2x_2+...+p_zx_Z)^N$ по степеням $x_1, x_2, ..., x_Z$. Значение $Z = 2$ определяет** ***биноминальное*** **распределение**

отсюда также следует:

Увеличение числа Z урн приводит к изменению вида распределения. Странно, конечно же: *какое из полиноминальных $Z \geq 2$ распределений считать правильным*?

С. При числе $Z = 2$, $Z = 3$ «урн» и 3-х «пулях» *произведение элементарных* событий представляются в виде *трехмерной кубической* таблицы ($(2 \cdot 2 \cdot 2)$ и $(3 \cdot 3 \cdot 3)$ ячеек), *в каждой из ячеек* которой находится *по одному произведению* $\mathrm{a}_j^1 \mathrm{a}_k^2 \mathrm{a}_m^3$ $(j, k, m = 1, 2)$ и $(j, k, m = 1, 2, 3)$. Говоря «языком шаров и урн»: – *в каждой* урне *находится по 3-а* шара.

Имеем *явные противоречия* как между *решениями*, так и размещениями *допустимых комбинаций* групп шаров по 2-м и 3-м урнам.

{A.2} Чтобы разрешить их, необходимо ответить на вопрос: *определяется ли решение задачи размещения шаров по урнам какое-либо из распределений и, в принципе, является ли оно вообще таковым?*

О других аспектах, связанных с пояснением, речь пойдет после анализа влияния физической постановки задачи на вероятностную модель.

III.3. Из решений, приводимых в учебниках можно получить: Вероятности того, что 3 «пули» окажутся окажутся *или* в 1-й, *или* во 2-й урне: $p_1p_2p_3$ *или* $q_1q_2q_3$ (C1); p^3 *или* q^3 (C2). Вероятности того, что 2 «пули» окажутся *или* в 1-й, *или* во 2-й урне: p_1p_2 *или* q_1q_2, p_1p_3 *или* q_1q_3, p_2p_3 *или* q_2q_3 (C1); p^2 *или* q^2 (C2). Вероятности того, что одна «пуля» будет *или* в 1-й, *или* во 2-й урне: p_1 *или* q_1, p_2 *или* q_2, p_3 *или* q_3 (C1); p *или* q (C2).

III.4. Решение, которого нет в работах[14]: Вероятности того, что *или* 1-я, *или* 2-я, *или* 3-я «пуля» окажутся *или* в 1-й, *или* во 2-й урне: $(p_1 + p_2 + p_3)/3$ *или* $(q_1 + q_2 + q_3)/3$ (C1); p *или* q (C2). Вероятности того, что *или* 1-я, *или* 2-я (*или* 1-я, *или* 3-я; *или* 2-я, *или* 3-я) «пуля» окажутся *или* в 1-й, *или* во 2-й урне: $(p_1 + p_2)/2$ *или* $(q_1 + q_2)/2$ ($(p_1 + p_3)/2$ *или* $(q_1 + q_3)/2$, $(p_2 + p_3)/2$ *или* $(q_2 + q_3)/2$) (C1); p *или* q (C2). Вероятности того, что одна «пуля» будет *или* в 1-й, *или* во 2-й урне такие же, как и в п. III.3. При значениях $p = q = 1/2$ получим *равные вероятности* появления шаров в урнах.

На основе анализа можно сделать следующие выводы:

W.4. В общем случае не *равновероятны* не только *размещения* с *разными допустимыми* комбинациями групп шаров, но и группы шаров в данной комбинации. Т.е. противоречия серьезнее, чем отмеченные в примере 4 (стр.9)

W.5. *Варианты решений* III.3 и III.4 *соответствуют правилам комбинаторики* (выводы W.1-2, стр.7), *по которым проводится расстановка* шаров по урнам.

W.6. *Отличие вариантов* III.3 и III.4 – *в вычислении вероятностей сложных* событий.

Результаты анализа противоречат «постулируемой» (**в статистической**

[14] **Оно получается на основе *2-го типа объединения опытов* [5,24]**

физике) равновероятности размещений. Разрешить их на основе существующей теории событий не представляется возможным.

<u>*Замечание*</u> <u>**3**</u>. **Из нее следует: размещения шаров по урнам *равновероятны* при *предположениях*: 1. Шары *неразличимы*. 2. В одной урне может находиться один, или ни одного шара. 3. Каждый шар может находиться в одной из Z урн с одной и той же вероятностью $1/Z$. 4. О вероятностях размещений можно говорить при условии $Z > N$[15].**

Эти *предположения*– основа статистики Ферми-Дирака. Физики, конечно же, с этим выводом не согласятся. Мы тоже, но совсем не потому, что в физике применяются и другие статистики. Причины чисто математические. Начнем с «размещения шаров по урнам»:

IV. 1. Размещения *допустимых* комбинаций групп шаров по урнам можно составлять для значений чисел $N, Z \geq 2$ шаров и урн. 2. Шары могут состоять из числа $k = 1, 2, ..., K$ *различимых* групп: в каждой группе шары *неразличимы* между собой. При значениях $K = N$ или $K = 1$ получим: все шары *различимы* или *неразличимы*. 3. Можно полагать, что в одной урне может находиться число $1 \leq n_p \leq N$ шаров. Значения $n_p = N$ и $n_p = 1$ определяют крайние варианты. 4. В общем случае шары имеют конечные размеры. Это может приводить к ограничениям: 1. *Размеры* урн не могут быть *меньше размера наибольшего* из шаров. 2. *Число* n_p шаров в урне *зависит от их размера*. Например: если в одну кубическую урну с размером ребра a помещается один шар диаметра $d = a$, то при диаметре $d \leq a/2$ – не менее 16-и шаров.

Теперь о событиях и их вероятностях.

**V. 1. *Элементарное* событие – появление *одного* из N шаров в *одной* из Z урн[16]. 2. Вероятности *элементарных* событий могут быть *разными* для *различимых* и *неразличимых* шаров. 3. Так как в группе, состоящей из Z урн, размещаются все шары, то: появление любого из N шаров в любой из Z урн есть *достоверное* событие; если шары разделены на число $k = 1, 2, ..., K$ групп, то появление любого из шаров, входящих в группу с номером $k = 1, 2, ..., K$, в любой из Z урн тоже *достоверное* событие.
4. Из N шаров составляются группы b, n по числу $n = 0, 1, 2, ..., N$ шаров. Значение $b, 0$ соответствует пустой урне, вероятность появления которой в любой комбинации равна $1/Z$. Значения $b, 1$ соответствуют *элементарным* событиям, вероятности которых определяются вероятностями появления одного шара в одной из урн. 5. При значениях $2 \leq n \leq N$ группы b, n являются *сложными* событиями, вероятности которых вычисляются с применением вариантов III.3 или III.4 по вероятностям *элементарных* событий. 6. Пока нет веских причин для того, чтобы «сбросить со счетов» варианты решения задачи в п.III.2.**

Условия (IV) определяют *число допустимых комбинаций групп* $\mathbf{b}, \mathbf{n}$

[15] **При числе $Z = N$ урн вероятность равна 1**

[16] **Каждому элементарному событию соответствует один возможный исход**

шаров, для данного числа Z урн и *число возможных размещений*[17] групп шаров по урнам для каждой *допустимой комбинации.* Условия (V) определяют значения вероятностей *возможных* размещений для каждой *допустимой комбинации.* С чисто *формальной математической* позиции условия (IV) и (V) можно применять в разных комбинациях и получить очень много вариантов[18] постановок и решений задач о «размещении шаров по урнам».

{A.3} *Комбинации условий* (IV) и (V) определяются *постановкой* задачи.

Этого многообразия вариантов возможных постановок и соответствующих решений мы совсем не ожидали: можно сказать, что оно вызвало некоторую «панику»: *как во всем этом разобраться?*

Теория событий, определяемая *новой исходной* системой, позволяет получить эти решения. Вряд ли это возможно на базе существующей системы. Даже пояснить, как получены существующие весьма сложно.

3. Математика и физика

Исходя только из одной *математической* модели и не учитывая ее связь с другими (**математическими, физическими и т.п.**) моделями, иногда можно доказать положения, которых просто *не существует ни в математике, ни в физике*[19]. Поэтому рассмотрим соотношение математики (**«то бишь» – условий (IV), (V)**) и физики.

Прежде всего, отметим: попытка ответить на вопрос в положении **{A.2}** (**стр.12**) «увенчалась неудачей». По крайней мере, ни существующая, ни новая теория событий «не дали такой возможности». Не будем «зацикливаться» на этом вопросе: это не мешает проведению последующего анализа построения *моделей* на основе *метода ячеек* Больцмана.

Будем говорить о газах, которые вокруг нас (**в воздухе, природном газе и т.п.**). В некоторой области температур и давлений к ним применима модель, впервые детально разработанная Дж.К. Максвеллом.

VI. В изолированном объеме D находится постоянное число N атомов (молекул) одного или разных газов (не вступающих в химические реакции).

---

[17] **При анализе примеров 1 и 2 мы связали размещения с событиями и их вероятностями. Поэтому здесь и далее будем говорить о *возможных* размещениях. Но будем говорить *группы* шаров и *допустимые комбинации* групп для того, чтобы подчеркивать, что *комбинаторика* и *теория событий* – это *разные математические* модели**

[18] **По сути, при анализе существующих понятий [5,14-25] мы, в основном, применяли «язык шаров и урн». Это и привело к *разработке новой исходной* системы [5,25-33] теории событий**

[19] **Пример подобного рода дан в приложении V [5,65]**

Полагается, что их размеры много меньше среднего расстояния между ними. *Реальное взаимодействие* между частицами заменяется *моделью классической* механики: *<u>соударение</u> <u>пар</u> <u>абсолютно</u> <u>упругих</u> шаров* [8,387]. Характеризуется тем, что *время соударения ограниченно* и, как следствие, *расстояние* s_V, на котором оно происходит. Если расстояние s между шарами становится больше него $s > s_V$, то далее шары будут в «свободном полете» до столкновения со следующим шаром. Среднее расстояние s_C «свободного полета» шаров называется *средней длинной свободного пробега* частицы. Полагая, что s_C значительно больше s_V значением s_V при расчетах пренебрегают. Это не означает, что взаимодействия нет.

На этом *идеализация физической* модели[20] завершена. Построение *вероятностной* модели Максвелл начинает с *предположений* [8,405]:

1. Все направления движения в газе *равновероятны*.

2. Ни одно значение скорости не является *привилегированным* или запрещенным.

3. Каждый газ, предоставленный самому себе, приходит, в конце концов, в *стационарное состояние*, в котором устанавливается *определенное распределение скоростей* между молекулами, постоянное во времени.

Рассмотрим третье.

VII. Хаотичность движения и столкновений частиц определяет: 1. *Одновременность движение* частиц в объеме. 2. *Различие скоростей* частиц *в данный момент времени*, как *во всем* объеме , так и в *любой его конечной части*. 3. *Случайное «блуждание»* («дрейф») *каждой* частицы по объему. Если по сути, то «дрейф» – это *броуновское движение*, но только *каждой из молекул* (или/и атомов) газа. Именно «дрейф» определяет *возможность* нахождения *любой* из частиц в *любой части* объема. Порядок «посещения» частей объема не менее хаотичен, чем движение частиц. 4. Средняя скорость «дрейфа» частиц по объему существенно меньше средней скорости частиц (по крайней мере, не больше скорости диффузии).

Отсюда следует:

W.7. Каждая частица, в момент времени t, имеет одно значение скорости v_j^t, из множества скоростей[21] на интервале $0 < v_j^t < v_{\max}$.

W.8. В любой момент времени t, частицы распределяются практически равномерно по объему D.

Мы говорим практически, ибо это не совсем так. 1. Разделив объем на малые части, в которой находится сравнительно небольшое число частиц, можно показать, что в этих частях объема равномерного распределения не будет. 2. Если число частиц в объеме сравнительно небольшое, то и по всему объему частицы будут распределены неравномерно.

Далее Максвелл ставит задачу [8,405]: **1) «определить *среднее число***

---

[20] **Ее называют *идеальным* газом**

[21] **Полагается: абсолютное значение (модуль) v изменяется на интервале $0 \leq v < \infty$. Но значение v ограничено также сверху некоторым максимальным значением $v_{\max}$**

частиц, *скорости* которых лежат *между данными пределами*, после большого числа столкновений между большим числом одинаковых[22] частиц».

VIII. Из постановки задачи следует: нас интересует событие, заключающееся в том, что в некоторой части[23] объема (абсолютно неважно какой), в данный момент времени t, появится частица с конкретным значением скорости v_j^t, $(0 < v_1^t < v_2^t < ... < v_N^t < v_{\max})$.

Мы не знаем, в какой части d_z объема, какая частица, и в какой конкретно момент времени примет данное значение скорости v_j^t, поэтому не связываем (это в приципе неосуществимо) ее ни с координатами, ни с какой-либо частью объема, ни с конкретным временем. Если по сути, то *виртуальные* «урны» – это не части d_z объема, а пределы, в которых «лежит скорость частицы» в данный момент времени. Разделим отрезок $0 \le v \le v_{\max}$ на N равных частей $\Delta v_j = v_{\max}/N$ и будем считать, что скорость v_j^t принадлежит одному из интервалов Δv_j. .

Из анализа задачи Максвелла следует:

W.9. «Шар» – это *скорость* v_j^t частицы в *данный момент времени*. «Урна» – это *интервал* $\Delta v_j = v_{\max}/N$ $(j = 1, 2, ..., N)$, в котором может находиться скорость частицы.

W.10. *Элементарным* событием является появление, в данный момент времени t, шара с значением скорости v_j^t $(j = 1, 2, ..., N)$ в одной из Z виртуальных урн.

W.11. При *размещении допустимых* комбинаций групп шаров, следует исходить из *различимости* шаров (п. II.2, стр.6).

W.12. Для определения вероятности появления значения v_j^t скорости шара можно ввести *предположение*[24]: в одной из Z урн может находиться: <u>*или*</u> *ни одного* шара; <u>*или*</u> 1 шар, <u>*или*</u> 2 шара, . . . , <u>*или*</u> N «шаров» *со скоростью* v_j^t $(j = 1, 2, ..., N)$. При попадании в данный интервал двух и более шаров их скорости полагаем одинаковыми.

W.13. Появление двух и более *элементарных* событий в одной из Z *виртуальных* урн происходят *одновременно* (но не в одной части объема)): вероятности *сложных* событий *вычисляются* по варианту в п.III.3 (стр.12).

Таким образом, *физическая* задача, поставленная Максвеллом, приведена к *вероятностной* задаче *теории* событий[25].

В рамках модели Максвелла рассмотрим другую задачу:

---

[22]**Мы не знаем, когда и почему сложилось мнение, что статистика Максвелла основана на *различимости* частиц. Из данного перевода следует: Максвелл полагал *различимыми скорости* частиц, которые *неразличимы***

[23]**Полагаем части объема одинаковыми $d_z = D/Z$ $(Z > N)$**

[24]**Его не отличить от предположения о размещении шаров по урнам (вывод W.1, стр.7)**

[25]**Для перехода к теории случайных величин, необходимо сначала определиться с тем, что же все-таки понимается под случайной величиной**

2) определить *среднее число* частиц, *находящихся* в некоторой (неважно какой) *части* d_z объема D.

Основное отличие *этой постановки* в том, что: **«шар» - это *частица*** (**а не *ее скорость***)**; «урна» – *часть* d_z объема D.** Отсюда следует:

W.14. *Элементарное* событие – появление *одного из* N шаров *в одной из* Z *частей* $d_z = D/Z$ $(z = 1, 2, ..., Z)$ объема D.

Другое понимание элементарного события приврдит к *изменению решения вероятностной* задачи.

IX. Появление частицы в какой-то части объема связано с ее «дрейфом» по объему (п. VII.3, стр.15). В конкретной части d_z объема, куда попадает частица, уже могут находиться другие частицы, которые «прибыли» туда раньше, какие-то из частиц могут «покинуть» его и т.д. Т.е. *одновременность движения* частиц вовсе не означает, что *они одновременно* попадают *в одну* часть объема. Мы не знаем, в какой части d_z объема, и в какой конктретно момет времени будет *данная* частица, поэтому не связываем (это в принципе невозможно) ее ни с координатами (т.е. конкретной частью объема), ни с конкретным значением времени.

Из анализа следует:

W.15. Определение вероятности появления шара в одной из *частей* d_z $(z = 1, 2, ..., Z)$ объема связано с *предположением*[26]: в одной урне может находиться: *<u>или</u> ни одного* шара; *<u>или</u>* 1 шар, *<u>или</u>* 2 шара, . . . , *<u>или</u>* N «шаров».

W.16. Частицы в *части* d_z появляются *не одновременно*: вероятности *сложных* событий *вычисляются* по варианту в п.III.4 (стр.12).

Различие в построении решений при *1-й* и *2-й постановке* задачи определяется *отличием вычисления вероятностей сложных* событий, образованных группой b, n шаров при значениях $n > 1$ (**п.V.5, стр.13**).

Выводы **W.13** (**стр.16**) и **W.16** (**стр.17**), дают нам, по крайней мере, некоторую уверенность в том, что *вероятностные модели решения физической* задачи могут быть построены *на основе метода ячеек.* Однако на этом пути «есть подводные камни»: чтобы «не напороться на них, плывя по течению», рассмотрим подробнее *физическую* модель и *трактовку применения метода ячеек* в существующей теории вероятностей.

Различимость шаров в физике – это *различимость свойств* частиц.

[26]Мы повторяем его, чтобы подчеркивать отличие задачи о размещении шаров по урнам от задачи, данной в п. III.2 (стр.11), ибо оно определяет отличие решений этих задач

В модели[27] Максвелла – это *отличие масс* молекул (**о размерах «вспоминают» при вычислении длины свободного пробега, числа столкновений и т.п.**).

X. 1. *Равенство масс* шаров $m_j = m_1 (j = 2, 3, ..., N)$ (т.е. один газ – частицы *неразличимы*) определяет *равенство средних скоростей* и *средних скоростей «дрейфа»* шаров. Из этого следует: *предположение*, что каждый из N шаров может находиться с одной и той же вероятностью $1/Z$ в *одной из Z урн* приемлемо.

2. Отличие массы $m_2 \neq m_1$ хотя бы одного шара, с учетом равенства кинетических энергий, следует отличие его средней скорости и скорости «дрейфа» от средних скоростей остальных шаров. Следовательно, *вероятность* появления *этого* шара в *одной из Z* урн будет *отличаться* от *остальных* шаров. Можно, например, положить: *вероятности* p_1 и p_2 появления шаров *разной массы в одной из Z урн* отвечают отношению $p_1/p_2 = \bar{V}_1/\bar{V}_2 = \sqrt{m_2/m_1}$, где $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ – *средние скорости* частиц.

При вычислении вероятностей следует применять *2-й тип объединения опытов* [5,28] и *учитывать условия* в п.V.3 (стр.13).

Из данного анализа (**с учетом отличий в постановках физической задачи и применения разных вариантов вычисления сложных событий**) следует:

W.17. При *1-й постановке* размещение *допустимых комбинаций* групп по урнам всегда проводится *по схеме* размещения *различимых* «шаров» (вывод вывод W.11, стр.16). Поэтому *отличие масс* приводит *только к отличию вероятностей элементарных* событий.

W.18. При *2-й постановке* размещение *допустимых комбинаций* групп по урнам проводится: для шаров *одинаковой массы по схеме* размещения *неразличимых* шаров (п. п. II.1, стр.6). *Отличие масс* шаров приводит *не только к отличию вероятностей элементарных* событий, но и *к привлечения схемы* размещения *различимых* шаров (п. II.2, стр.6).

В физике *предположения* о *различимости* шаров применяется (**при любом числе частиц**) в 2-х вариантах: шары *различимы*, или *неразличимы*.

XI.1. Математика этого не запрещает. Но число физических частиц ограниченно, а если говорить о газах в рассматриваемых условиях, то сильно ограниченно. С этой точки зрения правильнее говорить о *различимых* группах частиц (условие (IV.2), стр.13).

Казалось бы, что второе крайнее *предположение* более естественно. С точки зрения физики с этим можно согласиться: оно удобно при определенных теоретических исследованиях. Вопрос только в том, как это *предположение* осуществить на практике.

---

[27] Максвелл рассматрел парные столкновения шаров, имеющих различные массы и радиусы, что соответствовало наличию в газе молекул различного рода [8,388], и доказал, что кинетическая энергия частиц разной массы одинакова

XI.2. В любом газе имеется определенная доля примесей (по крайней мере, других газов). Их наличие приводит к существенному увеличению числа возможных размещений по ячейкам. Число размещений для разных *допустимых комбинаций* групп частиц будет увеличиваться по-разному. А это окажет влияние на вероятность появления каждой *допустимой комбинации.* Мы опять приходим к тому, что правильнее говорить о различимых группах частиц.

На основе теории событий, определяемой *новой* исходной системой, можно объяснить подходы к решению для обеих постановок задачи и провести анализ решений. Но об этом в другой работе[28]. Сейчас обратим внимание на некоторые понятия, применяемые в статистической физике, которые *непосредственно* связаны с *вероятностной моделью* задачи, построенной *на основе существующей теории* вероятностей.

Анализ будем проводить *на основе теории* событий, но его результаты переносятся на теорию случайных величин. Отметим, что построение вероятностной модели выполнено Максвеллом (**в термодинамике – Гиббсом**) именно с применением случайных величин: *метод ячеек Больцмана* связал *статистическую теорию с теорией* событий.

Замечание 4. Для справки: сосуд с заключенными в нем частицами иногда называют *статистической системой.* Применяются также (*особенно современных в работах*): *статистический*, *микроканонический*, *канонический* и некоторые другие *ансамбли,* которые мы упоминаем только здесь. По нашему мнению, они скорее «запутывают» понимание вопроса, а не «проясняют» его.

Состояние* газа, *характеризуемое объемом*, *давлением* и *температурой* называется *макроскопическим.

Состояние* газа, *характеризуемое состояниями всех его молекул*, называется *микросостоянием.

Замечание 5. Часто дается определение: *состояние* газа, заданное *координатами* и *скоростями* всех молекул называется *микроскопическим.* О невозможности такого описания состояния можно почитать в работе [3,97]. Тем не менее, оно используется в виде так называемого *фазового пространства* [3,102-108]. Мы же считаем, что это принципиально невозможно: для этого необходимо знать, в каком состоянии газ оказался в сосуде, как было получено состояние до помещения его в сосуд и т.д. Т.е. всю «историю» движения, вплоть до сотворения вселенной или «большого взрыва» (был ли он на самом деле?). По сути одно и то же, но это уже философия. Мы же исследуем некоторый «конечный результат»: например, сосуд наполнили газом, поместили в термостат и «подождали», пока в нем установилось равновесное состояние.

---

[28]Здесь и далее, говоря о другой работе, мы подразумеваем, что она посвящена теме, рассматриваемой в этом приложении

Всякое *макросостояние* может быть осуществлено *разными* способами, каждому из которых соответствует некоторое *микросостояние.*

***Число различных микросостояний,* которыми может быть *реализовано данное макросостояние* называется <u>*статистическим*</u> <u>*весом*</u> или <u>*термодинамической*</u> <u>вероятностью</u>. Одно из основных в статистической физике.**

Вводится некоторое *новое понимание* вероятности, но не ясно: *как трактовать статистический вес исходя из 2-х первых понятий, и по отношению к чему он определяется*? Приведем некоторые пояснения:

«Любому равновесному *макроскопическому* состоянию газа при постоянной температуре и давлении соответствует множество различных положений и скоростей молекул» [3,100]. «Таким образом, одному состоянию с *макроскопической* точки зрения, соответствует огромное число ее состояний с *микроскопической* (молекулярной) точки зрения. Причем эти состояния системы меняются непрерывно, а *макроскопическое* состояние остается практически неизменным. Значит, любые *макроскопические* параметры являются функциями *микроскопических* параметров. ... Совокупность различных микросостояний, соответствующих одному макросостоянию называется статистическим ансамблем. ... Статистическим ансамбль представляет как бы набор различных реальных систем, находящихся в разных микросостояниях, соответствующих одному макросостоянию. Однако, *различные макросостояния* могут быть реализованы через *разное число микросостояний.* При этом отдельные макросостояния будут тем устойчивее, чем большим числом микросостояний они могут быть реализованы. На основании этих представлений вводится понятие *термодинамической вероятности* ...», которая «... выражается числом, всегда большим единицы ...». *Объясняется тем*, что « ... в задачах статистической физики общее *число возможных микросостояний* определить трудно *из-за их огромного* числа» [3,101].

1-й абзац вроде бы понятен, даже «статистический ансамбль». Однако 2-й абзац несколько «запутывает» и вызывает вопросы, ибо в нем нет однозначности. Ясности это не добавляет, но допускает разные трактовки понятий. Вернемся к уже упоминавшемуся пояснению (**п.III.2.C, стр.11**).

XII. Сосуд делится на две половины. Состояние газа характеризуется числами шаров, находящихся в левой n и правой (урны 1 и 2) $N-n$ половинах [4,326]. Для примера дается таблица размещений по 2 урнам $N=4$ *различимых* шаров [4,327].

**||1,2,3,4:0||1,2,3:4|1,2,4:3|1,3,4:2|2,3,4:1||1,2:3,4|1,3:2,4|1,4:2,3|2,3:1,4|2,4:1,3|3,4:1,2||4:1,2,3|
3:1,2,4|2:1,3,4|1:2,3,4||0:1,2,3,4|| |||| ||4:0||3:1||2:2||1:3|| 0:4**

Она изображена строкой. *Номера* шаров *в одной урне* отделены запятой. Шары, находящиеся в 1-й и 2-й урнах отделены двоеточием. *Микросостояния* разделены 1-ой, а *макросостояния* – 2-мя линиями. Справа от 4 линий размещение *неразличимых* шаров: в работах «оно не повстречалось». В обоих случаях имеем 5 *возможных макросостояний*, но при *различимых* шарах имеем 16, а при *неразличимых* – 5 *микросостояний.*

<u>*Замечание*</u> <u>6</u>. Понятие *микросостояния* связывают с понятием фазового пространства [3,102-107] в механике. Так как в любом микросостоянии размещаются все частицы, то, по-видимому, подразумевается связь их координат и скоростей (импульсов, энергий), и их принадлежность ячейке, в которой находятся частицы. А макросостояния, по-видимому, и есть «...как бы набор различных реальных систем», реализуемых «через *разное число микросостояний*».

Это пояснение дает однозначное понимание понятий. Но первое, что возникает из *этих определений*, так это вопросы: *Какое отношение имеют микросостояния к координатам и скоростям* (***импульсам, энергиям***) *частиц? Как соотнести макросостояния с равновесным состоянием?* **Например, макросостояния** $b, N-k$;b, k **при значениях** $k \ll N$ **(или близких к числу** N**).**

На 1-й вопрос ответ дан в п.VII (**стр.15**) и замечании 5 (**стр.19**) – *микросостояния не связаны ни с координатами, ни с временем.* От ответа на 2-й вопрос тоже зависит правильность решения задачи. Выше, на основе метода ячеек Больцмана, *физическая* задача приведена к 2-м *разным вероятностным* задачам *теории событий.* Их связь определяется *физической моделью* и *методом* построения решения *вероятностных* задач. Любое из *микросостояний* или *макросостояний* является *только возможным* (**вероятным, но не реальным**): естественно для построения *вероятностной модели* необходимо рассмотреть *все возможные случаи* (**исходы**), которые могут быть в *данном испытании.* Таким образом:

W.19. ***Равновесное состояние*** **системы определяется** ***совокупностью статистических весов всех возможных макросостояний*****, т.е.** ***полным числом микросостояний.***

На основе свойств размещения N шаров по Z урнам уточним понятия.

<u>*Определение*</u> <u>2</u>. *Возможное микросостояние* – <u>*одно*</u> из всех <u>*возможных*</u> <u>*размещений*</u> N частиц по Z ячейкам (**п. II, стр.6**).

Напомним: 1) в ***любом из возможных микросостояний сумма*** *целых* ***чисел*** $n, z = b, n \geq 0$ ***равна числу*** **частиц** $n, 1 + n, 2 + \ldots + n, Z = N$**; 2) Общее** ***число возможных микросостояний*** **равно** $W = Z^N$ **(1) для** ***различимых*** **и** $W = C_{N+Z-1}^{N}$ **(2) для** ***неразличимых*** **частиц.**

<u>*Определение*</u> <u>3</u>. *Возможное макросостояние* – *возможные* размещения (**микросостояния**) *одной допустимой комбинации* (**п. II.1, стр.6**) *групп* b, n частиц по Z ячейкам для *данного набора* чисел $n, z = b, n \geq 0$ частиц и *конкретного порядка* размещения *групп* b, n по ячейкам.

При ***неразличимых*** **частицах отличие макросостояний определяется только порядком размещения** ***групп*** b, n **по** Z **урнам. Следовательно,** ***конкретный порядок*** **размещения** ***групп*** b, n **определяет** ***одно макросостояние*****, которое состоит из** ***одного микросостояния.*** **При** ***различимых*** **шарах учитывается** ***отличие*** **шаров в** ***группах*** b, n**,** ***без учета порядка в данной группе*** **с числом шаров** $n \geq 2$.

<u>*Определение*</u> <u>4</u>. *Статистический вес* – *число возможных микросостояний*, из которых состоит *возможное макросостояние.*

Например: в урне с номером 1 находится $n, 1$**, в урне с номером 2 –** $n, 2$**, ..., в урне с номером** Z **–** n, Z **шаров. В общем случае** $Z \geq 2$**,** ***статистический вес любого возможного макросостояния*** **для** ***различимых*** **шаров определяется полиноминальными** $N!/(n,1!n,2!...n,Z!)$ **{3} (п.III.2.B, стр.11), а частном случае** $Z = 2$ **–** ***биноминальными*** $C_N^{n,1} = N!/(n,1!n,2!)$ **{4} коэффициентами (п.III.2.A, стр.11).** ***Любое изменение порядка*** **размещения** ***групп*** b, n **с разными числами шаров** n, z**, например, в 1-й урне находится** $n, 2$**, а во 2-й –** $n, 1$ **шаров** ***изменяет возможное макросостояние*** **(п.II.1, стр.6). Из**

формул (3,4) легко видно, что при этом *статистический вес не изменяется.* Отсюда следует:

W.20. Все *возможные макросостояния*, образованные размещением *данной допустимой комбинации групп* $b, n = n, z$ $(n, 1 + n, 2 + \ldots + n, Z = N)$ частиц, имеют *одинаковый статистический вес.*

Замечание 7. Далее будем использовать уточненные определения. Если использовать понятие *равновесного состояния* газа, характеризуемого *объемом*, *давлением* и *температурой*, то слово «возможный» можно опустить, а вместо *равновесного состояния* можно говорить *состояние*. Тогда не будет «путаницы», связанной с понятием *макросостояния*.

С учетом замечания, далее будем говорить *макросостояние*, *микросостояние* и *равновесное состояние*.

Это не просто «дань» механике, в которой они появились впервые. Их применение позволяет существенно упростить вывод некоторых выражений, относящихся к размещению «шаров по урнам» и проводить их анализ. И, конечно же, согласитесь, гораздо проще, корче и нагляднее употреблять эти понятия, чем каждый раз произносить фразы, их определяющие.

Анализ, данный в п. III.2, показал *противоречия*, следующие из пояснения равновероятности размещений (*микросостояний*). Дополним его.

XIII. Утверждается: при большом числе (например $N = 10^{20}$) молекул вероятность *макросостояний* b, N; $b, 0$ и $b, 0$; b, N «настолько мала, что практически ее можно считать равной нулю» [4,329]. Рассмотрим примеры.

Неразличимые шары. Размещение 4-х шаров. A. По 2 урнам. Имеем 5 *макросостояний* (п. XII, стр.20): 1) 2 состоят из 1-й группы $b, 4$ и 1-й – $b, 0$; 2) 2 из 1-й группы $b, 3$ и 1-й – $b, 1$; 3) 1 из 2-х групп $b, 2$. B. По 3 урнам (табл.3, стр.6). Имеем 15 макросостояний: 1) 3 состоят из 1-й группы $b, 4$ и 2-х – $b, 0$; 2) 6 – из 1-й группы $b, 3$, 1-й – $b, 1$ и 1-й – $b, 0$; 3) 3 – из 2-х групп $b, 2$ и 1-й – $b, 0$; 4) 3 – 1-й группы $b, 2$ и 2-х – $b, 1$. C. По 4 урнам. Имеем 35 *макросостояний* (табл.4, стр.6): 1) 4 состоят из 1-й группы $b, 4$ и 3-х – $b, 0$; 2) 12 из 1-й группы $b, 3$, 1-й – $b, 1$ и 2-х – $b, 0$; 3) 6 из 2-х групп $b, 2$ и 2-х – $b, 0$; 4) 12 1-й группы $b, 2$, 2-х – $b, 1$ и 1-й – $b, 0$; 5) одно из 4-х групп $b, 1$. D. По 5 урнам. Имеем 70 *макросостояний*: 1) 5 состоят из 1-й группы $b, 4$ и 4-х – $b, 0$; 2) 20 из 1-й группы $b, 3$, 1-й – $b, 1$ и 3-х – $b, 0$; 3) 10 из 2-х групп $b, 2$ и 3-х – $b, 0$; 4) 30 из 1-й группы $b, 2$, 2-х – $b, 1$ и 2-х – $b, 0$; 5) 5 из 4-х групп $b, 1$ и 1-й – $b, 0$.

Из примеров видно: 1.1. Число *допустимых комбинаций групп* b, n шаров при увеличении числа Z урн растет только при числе урн $Z < N$ (п.II.1 стр.6). 1.2. Число *макросостояний*, соответствующее *размещению каждой из допустимой комбинации групп* шаров увеличивается *неравномерно.*

Различимые шары. A. По 2 урнам. Имеем также 5 *макросостояний* (п. XII), однако: 1) 1-е и 5-е содержат по 1-му *микросостоянию*: 2) 2-е и 4-е – по 4-е *микросостояния*; 3) 3-е – 6 *микросостояний.* B. По 3 урнам (табл.3, стр.6). Имеем 15 макросостояний: 1) 3-и содержат по 1-му *микросостоянию*; 2) 6 – по 4 *микросостояния*; 3) 3 – по 6 *макросостояний*; 4) 3 по 12 микросостояний. C. По 4 урнам. Имеем 35 *макросостояний*: 1) 4-е содержат по 1-му *микросостоянию*; 2) 12 – по 4

***микросостояния*; 3) 6 – по 6 *микросостояний*; 4) 12 по 12 *микросостояний*; 5) 1-но – 24 *микросостояния.* <u>D.</u> По 5 урнам. Имеем 70 *макросостояний*: 1) 5-ть содержат по 1-му *микросостоянию*; 2) 20 – по 4 *микросостояния*; 3) 10 – по 6 *микросостояний*; 4) 30 – по 12 *микросостояний*; 5) 5 – по 24 микросостояния.**

1.3. Отличие *числа размещений допустимых комбинаций групп* b, n шаров, дополняется *отличием числа микросостояний*, которые при увеличении числа Z урн также увеличиваются *неравномерно.* 1.4. *Макросостояния*, входящие в *данную допустимую комбинацию групп* шаров, состоят из *одинакового числа микросостояний*, т.е. имеют *равные статистические веса.* 1.5. Общее число *микросостояний* в примерах <u>A</u>, <u>B</u>, <u>C</u> и <u>D</u> равно: 5, 15, 35, 70 *при неразличимых* и 16, 81, 256, 625 *при различимых* шарах соответственно. 1.6. Разделив на эти числа *возможные размещения допустимых комбинаций групп*, получим вероятности их появления в каждом из примеров. При *различимых* частицах можно вычислить вероятности *статистических весов.* Очевидно, что *сумма* этих вероятностей в каждом примере равна 1.

В примере **<u>A</u>** рассмотрено размещение 4-х шаров, однако *результат не изменится*, если взять N *неразличимых* шаров: получим $N+1$ *макросостояний*, каждому из которых соответствует *одно микросостояние.*

W.21. Из гипотезы *равновероятности микросостояний* следует: при *неразличимых* шарах *все макросостояния равновероятны.* Это *противоречит утверждению*, данному в начале пункта XIII, которое *основано* на размещении *различимых* частиц.

2-й необъяснимый «парадокс» с точки зрения вероятностей – возможно, это 2-я причина, определившая «неожиданность» модели Бозе.

Более важны другие выводы, следующие из примеров:

W.22. При *неразличимых* частицах число *возможных макросостояний* равно числу *возможных микросостояний. Отличаются числа размещений допустимых комбинаций групп* b, n $(n = 0, 1, \ldots, N)$ частиц.

W.23. *Общее число возможных макросостояний не зависит от различимости или неразличимости частиц* и равно $(\mathbf{N}+\mathbf{Z}-1)!/\{\mathbf{N}!(\mathbf{Z}-1)!\}$ *общему числу возможных микросостояний* при *неразличимых* частицах.

W.24. При *постоянном числе* N *различимых* частиц *увеличение числа* Z ячеек $Z' > Z$ приводит: 1. К *неравномерному увеличению чисел макросостояний*, входящих *в каждую из допустимых комбинаций групп* частиц. 2. При *различимых* частицах к появлению *макросостояний*, *статистические веса* которых для *данной допустимой комбинации групп* частиц *одинаковы.*

W.25. *Статистические веса*, как и *математические* вероятности, *суммируются*: их *сумма* равна *общему числу микросостояний, а сумма вероятностей – единице.*

Проведем анализ того, как применяются эти понятия.

«Рассмотрим систему N частиц в объеме V с полной энергией U. Разделим фазовое пространство, соответствующее этой системе, на конечное число Z ячеек ($Z \ll N$) с различной энергией $\varepsilon, 1; \varepsilon, 2; ...; \varepsilon, Z$. Пусть частицы произвольно распределены по этим ячейкам с числами заполнения $n, 1; n, 2; ...; n, Z$, где n, z – число частиц в ячейке с энергией ε, z. Любые отличные распределения N частиц по Z ячейкам соответствуют разным микросостояниям, при этом каждое микросостояние может быть получено разными способами. Полное число микросостояний, т.е. способов размещения N частиц по Z ячейкам, определяется выражением $N!/(n, 1!n, 2!...n, Z!)$» [3, 209].

«Продолжая этот процесс, придем к выражению $N!/(n, 1!n, 2!...n, Z!)$. . . . Это число представляет собой "пространственную"[29] часть статистического веса» [4,335]. Для ее определения, как и в [3], применяется условие ($Z \ll N$) : «Тогда в каждую ячейку будет попадать в среднем много молекул» [4,334]. При определении «скоростной» части также используется формула {3}, однако, в отличие от первой, «число ячеек теперь бесконечно велико» [4,336].

Налицо две трактовки полиноминальных коэффициентов.

XIV.1. В 1-й работе коэффициенты, вычисляемые по формуле {3}, трактуются как полное число *микросостояний.*

Полное *число микросостояний* (замечание к определению 1, стр.56) при любых значениях $Z \geq 2$ и $N \geq 2$ для *различимых* и *неразличимых* частиц определяется формулами {1} и {2} соответственно. Т.е. общее число микросостояний в принципе определимо. Отсюда следует:

W.26. *Объяснение введения* понятия *термодинамической вероятности*, данное в работе [3] (цитата на стр.20), *несостоятельно.*

1. При большом числе N частиц намного сложнее определить (п.II.1, стр.6) *число допустимых комбинаций групп* b, n ($n = 0, 1, \dots, N$) частиц по Z ячейкам[30], которые не зависят от *различимости* частиц (п.I.1, стр.5).

2. <u>*Неразличимые*</u> частицы. Определение *числа макросостояний*, соответствующих *размещению <u>известной</u> допустимой комбинации групп* b, n *неразличимых* частиц по Z ячейкам определяется применением формулы $N!/(k, 1!k, 2!...k, Z!)$, где k, z – числа одинаковых групп b, n, включая число групп $b, 0$, входящих в эту *допустимую комбинацию.* 3. <u>*Различимые*</u> частицы. *Различимость* урн *по числам* частиц в *допустимой комбинации групп*, дополняется *различимостью* частиц (п.II.2, стр.6). Естественно, что дополнительно к решению задачи 2 решается вторая задача: по формуле {3} вычисляется *число размещений*, определяемое *отличим* частиц. В этом случае числа k, z означают числа частиц в группах b, n, определяющих *допустимую комбинацию.* Результаты, полученные решением задач 2-3, *перемножаются.*

Подробнее о решении задач 2-3 можно посмотреть в [1,60].

<u>*Предупреждение!*</u> При решении задачи 2 формула 3 при значениях $Z < N$ «не работает»: правильное решение определяется при условии $Z \geq N$.

---

[29] **«Скоростная» часть определяется на основе распределения Максвелла**

[30] **В статистической физике она не ставилась. Таблицы дают наглядное представление о размещениях. Но для решения задач необходим подход, позволяющий провести подробный анализ размещений для произвольного сочетания чисел шаров и урн. Он будет дан в другой работе, но, возможно, решение существует в других областях знаний**

В работах [3; 4] речь идет о *статистических весах макросостояний различимых* частиц. Далее, применяя принцип Больцмана – *равновесному состоянию* соответствует *максимальная энтропия* – определяются значения чисел n, z в полиноминальных коэффициентах {3}, при которых *достигается максимум энтропии*. Отметим два момента.

Во-первых, связь максимума с числом ячеек Z при данном числе N частиц. Уже из примера **A** для *различимых* частиц (стр.22) видно, что *максимальный статистический вес* имеет *макросостояние* с размещениями 2-х пар частиц, а не с 4-мя частицами. При увеличении числа ячеек, *максимальный статистический вес* имеют *макросостояния*: **B** – с 1-й группой $b, 2$ и 2-мя – $b, 0$; **C** – с 4-мя группами $b, 1$; **D** – с 4-мя группами $b, 1$ и 1-й – $b, 0$.

Т.е. *макросостояния с максимальным статистическим весом смещаются* в «сторону» групп b, n *с малыми числами* частиц в группе.

Во-вторых. Из тех же примеров следует, что все *макросостояния*, образованные *возможными размещениями одной допустимой комбинацией групп* частиц, имеют *одинаковый статистический вес* Числа *макросостояний с разными допустимыми комбинациями групп* частиц существенно отличаются.

В-третьих. В [3] используется только условие $Z \ll N$, в [4] оно применяется только при определении «пространственной» части статистического веса: при определении «скоростной» части – «число ячеек бесконечно велико».

{A.4} 1. Условие $Z \ll N$ *неопределенное* (« Тогда в каждую ячейку будет попадать в среднем много частиц»[4,334]) и *некорректное*: *без какого-либо обоснования* из рассмотрения исключаются все *макросостояния с малыми числами* частиц в ячейках (в том числе, имеющие *больший статистический вес*). 2. Число *макросостояний с одинаковым статистическим* весом *не учитывается*, что приводит к не совсем правильным результатам. 3. Соотношение числа частиц и ячеек требует обоснования и уточнения.

числа заполнения	число размещений равно 7!×7!		вероятность – число размещений деленное на	
	деленному на	результат деления	C^{N}_{Z+N-1}	7^7
1,1,1,1,1,1,1	7!×1!	1×5040=5040	0,000 583	0,006 120
2,1,1,1,1,1,0	5!×2!	42×2520=105840	0,024 476	0,128 518
2,2,1,1,1,0,0	2!3!2!×2!2!	210×1260=264600	0,122 378	0,321 197
2,2,2,1,0,0,0	3!3!×2!2!2!	140×630=88200	0,081 585	0,107 098
3,1,1,1,1,0,0	4!2!×3!	105×840=88200	0,061 189	0,107 098
3,2,1,1,0,0,0	2!3!×3!2!	420×420=176400	0,244 755	0,214 197
3,2,2,0,0,0,0	2!4!×3!2!2!	105×210=22050	0,061 189	0,026 775
3,3,1,0,0,0,0	2!4!×3!3!	105×140=14700	0,061 189	0,017 850
4,1,1,1,0,0,0	3!3!×4!	140×210=29400	0,081 585	0,035 699
4,2,1,0,0,0,0	4!×4!2!	210×105=22050	0,122 378	0,026 775
4,3,0,0,0,0,0	5!×4!3!	42×35=1470	0,024 476	0,001 785
5,1,1,0,0,0,0	2!4!×5!	105×42=4410	0,061 189	0,005 355
5,2,0,0,0,0,0	5!×5!2!	42×21=882	0,024 476	0,001 071
6,1,0,0,0,0,0	5!×6!	42×7=294	0,024 476	0,000 357
7,0,0,0,0,0,0	6!×7!	7×1=7	0,004 079	0,000 008

В-четвертых. При *неразличимых* частицах *все макросостояния имеют одинаковый статистический вес* (вывод W.22, стр. 23); *отличаются* числа *размещений допустимых групп*. При *различимых* частицах *число макросостояний с одинаковым статистическим весом* также определяется *данной допустимой комбинации групп* шаров по урнам. С точки зрения теории вероятностей *абсолютно неважно*, в какой из урн находится *конкретная группа* b, n в данном *возможнои размещении допустимой комбинации*:

все *макросостояния с одинаковым статистическим весом равноправны и все они должны учитываться при вычислении* вероятностей.

Очевидно, что учесть *макросостояния с одинаковым статистическим весом* можно только с применением *всех возможных размещений допустимой комбинации*, в которую входят эти *макросостояния*. Разделив *числа возможных размещений допустимых комбинаций групп* в примерах A, B, C, и D на общее число возможных значений, получим вероятности их появления, как для *неразличимых*, так и *различимых* шаров каждом из примеров.

Отсюда следует, что *основную роль при вычислении* вероятностей играют *допустимые комбинации*, а *не статистические веса макросостояний*.

Для большей наглядности приведем пример, позаимствованный из работы [1,60]. В таблице приведены числа размещений 7-ми различимых шаров по 7-ми урнам для всех допустимых комбинаций групп (чисел заполнения) и вероятности допустимых групп шаров. Для сравнения таблица дополнена нами столбцом с результатом деления и столбцом вероятностей допустимых групп при неразличимых шарах. Деление числа 7! на произведение чисел перед знаком умножения «×» определяет число размещений допустимой группы (макросостояний для неразличимых шаров). После знака – увеличение числа размещений, определяемое различимостью шаров.

Этот пример является очень хорошей иллюстрацией к анализу, данному в пункте XIV.1.

Отметим, что в этой работе дается другая интерпретация: «В ряде случаев необходимо пойти дальше и рассматривать сами ящики как неразличимые: этим достигается то, что порядок чисел заполнения становится несущественным» [1,59]. Подобная интерпретация уже рассмотрена в примере 1 (стр.7) и показано, что номера урн. не имеют никакого значения: их отличие определяется только помещенными в них шарами, а примере 4 (стр.9) впервые было показано, что допустимые комбинации групп имеют разные вероятности.

На основе анализа, приведенного в п.XIV.1, можно утверждать:

{А.5} *Основными* событиями, *вероятности* которых *подлежат вычислению*, являются *размещения допустимых комбинаций групп* частиц, а *не статистические веса макросостояний*.

XIV. 2. 2-я трактовка появилась, возможно (утверждать это мы не можем) потому, что биноминальное распределение «уже занято распределением скоростей».

Это, по крайней мере, попытка отделить распределение частиц по объему от распределения скоростей. По этому поводу отметим следующее. Любое размещение N шаров по Z урнам содержит в себе размещение N шаров по $Z-1$ урнам, которое дополняется пустыми урнами, а при значении $Z \leq N$ – *допустимыми комбинациями групп* b, n, *которые не могут быть образованы* при их размещении по $Z-1$ урнам. Например (п.II.1, стр.5): при размещении по 3-м урнам имеем размещение *допустимых комбинаций* $b, N-k$; b, k $(k = 0, 1, ..., N)$, соответствующих размещению шаров по 2-м урнам: каждая дополняется пустой урной $b, 0$. Также появляются *допустимые комбинации, невозможные* при 2-х урнах: 1) $b, N-2$; $b, 1$; $b, 1$. 2) $b, N-3$; $b, 2$; $b, 1$. 3) $b, N-4$; $b, 3$; $b, 1$. 4) $b, N-4$; $b, 2$; $b, 2$ и т.д. Т.е. размещение N шаров по $Z > 2$ урнам содержит в себе их размещение по 2-м урнам, которое дополняется числом $Z-2$ пустых урн. Отсюда, с учетом трактовки, следует:

{A.6} «Пространственная» часть *статистического веса* содержит в себе «скоростную часть *статистического веса*». Это, конечно же, невозможно, ибо они, как показано ранее, не связаны между собой.

Существующая теория вероятностей трактует их как «независимые» [4,335]. Но это не совсем так, что будет показано в другой работе.

Кратко о положении, определяющего понятие *статистического веса*, как одного из основных. Сначала классика.

«... вероятность макросостояния (в дальнейшем ... просто – состояние) пропорциональна его статистическому весу Ω .... Поэтому в качестве характеристики вероятности состояния можно было бы взять само это число, т.е. Ω. Однако такая характеристика не обладала бы свовством аддитивности. Чтобы убедиться в этом, разобьем систему на две практически не взаимодействующие подсистемы. Пусть эти подсистемы находятся в *макросостояниях* со *статистическими весами* Ω_1 и Ω_2. Число способов, которыми может осуществиться соответствующее *макросостояние* системы, равно произведению чисел способов, которыми могут быть осуществлены *макросостояния* каждой из подсистем в отдельности $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$» [4,332].

XV. 1. Вероятности *макросостояний пропорциональны статистическим весам* Ω_k потому, что их *математические* вероятности *пропорциональны* Ω_k / Z^N одному числу – *общему числу микросостояний.*

При пояснении «равновероятности» микросостояний в работе [4,227] эти вероятности приводятся. Отсюда следует вывод W.24 (стр.23), и это очевидно! Но он почему-то не делается: может быть потому, что он противоречит последующему утверждению, в принципе, и понятию термодинамической вероятности.

Дело в том, что далее без каких-либо объяснений утверждается: *статистические веса перемножаются.* Рассмотрим примеры, данные в п. XIII (стр.22).

Исходя из утверждения, получим:

***Различимые* шары. Из *произведения статистических весов* следует, что системы в примерах A, B, C и D 1-2 характеризуются: 96 (их 16), 15552 (их 81) 23887872 (их 256) и 1036800000 (их 625) *возможными микросостояниями* соответственно.**

Неразличимые* шары. Из *произведения статистических весов* следует, что системы в этих примерах характеризуются 1-м *микросостоянием*, но реально их 5, 15, 35 и 70 соответственно, ибо каждое *макросостояние* соответствует *одному микросостоянию.

Т.е. «декларируемое» утверждение дает *совершенно неверную оценку общего числа возможных микросостояний.* Таким образом:

W.27. Утверждение о *произведении статистических весов* неверно: *статистические веса суммируются* (вывод W.24, стр.23).

В квантовой механике «не менее интересно», чем в классике.

1. Основа вывода распределения Бозе-Эйнштейна: «Число способов, какими n_j неразличимых объектов можно разместить по нумерованным ячейкам. определяется формулой $W_j = (n_j + z_j - 1)!/\{n_j!(z_j - 1)!\}$. Оно и характеризует число возможных состояний для заданных n_j и z_j. Для других значений n_k и z_k число воз-

можных состояний будет другим. Всего же возможных состояний будет $W = \prod_j W_j = \prod_j (n_j + z_j - 1)!/\{n_j!(z_j - 1)!\}$» [3,214].

2. Основа вывода распределения Ферми-Дирака: «В этом случае в одном квантовом состоянии не может быть больше одной частицы, следовательно, $z_j > n_j$. Тогда число всевозможных размещений n_j систем по z_j ячейкам равно $W_j = z_j!/\{n_j!(z_j - n_i)!\}$. А полное число всех возможных состояний при любом числе систем и любом числе ячеек будет определяться выражением вида $W = \prod_j W_j = z_j!/\{n_j!(z_j - n_i)!\}$» [3,215].

XV. 2. В цитируемой работе об этом не говорится, но в других работах числа W_j называют *статистическими весами*. Т.е. утверждается то же, что и в классической теории, но опять без обоснования, как само собой разумеющееся.

По формуле (цитата 2) $W = Z!/[N!(Z - N)!]$ {5}, как и формуле $W = C^N_{N+Z-1}$ {2} (замечание к определению 2, стр.21), вычисляется *общее* (*полное*) *число возможных микросостояний неразличимых* частиц. В отличие от формулы {2} это *число ограничено условием*: в одной ячейке может находиться либо ни одной, либо одна частица.

Таким образом, в обоих случаях по числам n_j и z_j определяется *полное число микросостояний* (вывод W.23, стр.23), соответствующих *одному равновесному состоянию*. А это вызывает только вопросы. *Какое отношение имеет это число к статистическому весу*? *По отношению к чему он определяется*? *Или это другое понимание макросостояния*?

Результат такого *произведения* зависит от соотношения числел n_j и z_j каждого из состояний. При большом числе и разнообразии значений n_j и z_j он непредсказуем. Поэтому вопросы не имееют ответов.

Пояснение можно найти в рассуждениях, приведенных в работе, которые предваряют вывод рассматриваемых распределений:

«. . . мы рассмотрим большое число равноценных систем со спектром собственных значений энергии $\varepsilon, 1; \varepsilon, 2; ...; \varepsilon, j, ...$, находящихся в состоянии теплового равновесия. Тогда число систем, которые будут иметь энергию ε, j, и определит термодинамическую вероятность состояния системы с энергией ε, j» [3,213].

По-видимому (утверждать этого мы не можем), под «равноценными системами» понимаются системы, находящиеся в равновесных состояниях, т.е. при одинаковых температурах, давлениях, концентрациях частиц. Они отличаются только объемом V (следствие разного числа частиц N, что будет показано попозже) и соответственно полной энергией E. Рассмотрим простой пример.

<u>Пример</u> **<u>5</u>.** Сосуд с объемом V наполнен газом с числом частиц N находится в термостате. Пусть в том же термостате находится сосуд, (с таким же объемом и числом частиц), который разделен очень тонкой непроницаемой упругой перегородкой на 2 части. Положим, что число частиц в частях сосуда пропорционально их объемам $N_1 = V_1 / V$ и $N_2 = V_2 / V$. Очевидно, что в них будет равновесное состоянии с одинаковыми параметрами: Только полная энергия E во 2-м сосуде будет определяться суммой $E_1 + E_2 = E$. *Что будет, если убрать в нем перегородку*? Почти ничего: газ будет в

равновесном состоянии с теми же параметрами. Единственное, что все-таки произойдет **(если бы только это мы могли это увидеть): через какое-то время** ***частицы, находившиеся в разных частях, перемешаются и распределятся практически равномерно по всему*** **объему.**

Можно попробовать дать ответы на два вопроса и пояснить их.

1. *Если распределение скоростей в 1-м сосуде описывается функцией* $f(v)$, то *будут ли функции* $f_1(v)$ *и* $f_2(v)$ *в 2-х частях 2-го сосуда отличаться от функции* $f(v)$? **2.** *Если во 2-м сосуде убрать перегородку, то будет ли функция* $f'(v)$ *отличаться от функции* $f(v)$?

В соответствии с существующей теорией функция $f'(v)$ равна произведению функций $f'(v) = f_1(v) \cdot f_2(v)$, т.е. существенно отличается от функции $f(v)$. Это легко проверить, перемножив 2-е одинаковые дискретные функции. Мало того, если применить существующее понимание «так называемой суммы случайных величин[31]», то тоже получим другое распределение.

<u>Пример</u> **<u>6</u>. Согласно существующей теорией вероятностей, сумма двух нормальных («независимых») законов не зависит от взаимного расположения случайных величин: она определяет нормальный закон с математическим ожиданием и дисперсией, которые равны сумме исходных характеристик** $M(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = M(\mathbf{X}) + M(\mathbf{Y})$ **и** $D(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = D(\mathbf{X}) + D(\mathbf{Y})$**. Т.е. получаем закон, отличающийся от исходных законов математическим ожиданием и дисперсией.**

По этому поводу скажем: физиками *применялось* (**и до сих пор применяется**) то, что *«предлагала и предлагает» существующая теория случайных величин.* Рассмотрим исходные положения, которые используются при выводе распределения Гиббса, и покажем с чем связано утверждение о *произведении статистических весов.*

<u>Пример</u> **<u>7</u>. «Разобьем рассматриваемую часть системы (или систему в термостате) на две подсистемы** x' **и** x''**. Как и раньше будем считать, что функции распределения** $w(x)$ **для первой и второй подсистем будут зависеть от полной энергии подсистемы** $H(x,a)$**, т.е.** $w(x') = \phi\{H'(x',a')\}$, $w(x'') = \phi\{H''(x'',a'')\}$**. ... Таким образом, сделав допущение о малости энергии взаимодействия, имеем** $H = H' + H''$ **. Теперь, используя теорему об умножении вероятностей для независимых подсистем** x' **и** x''**, получим выражение** $\phi(H'+H'') = \phi(H') \cdot \phi(H'')$**» [3,119-120].**

Примеры 5 и 7 практически не отличаются. Вопрос один и, конечно же, не к механике, а к теории вероятностей: *на каком основании применяется теорема об умножении вероятностей*? Все весьма просто: и Максвелл, и Гиббс использовали для решения задачи теорию вероятностей Лапласа, в

[31] Об этом – в [10,49-63]: подробнее в продолжении работы [5], которая близится к завершению

которой, по-видимому, впервые дана «теорема о распределении вероятностей *суммы независимых* случайных (этого названия тогда не было) величин (последняя формула в цитате)». Она и является «обоснованием», однако, хотя в этой теореме и есть суммы, но отношения к сумме случайных величин они не имеют (сноска 31). Что получается из такой «суммы» показано в примере 6. «Все прелести», следующие из «обоснования», показаны при анализе в п.XV.1 (стр.27) и п.XV.2 (стр.28).

Анализ положений, используемых для определения распределений в квантовой механике, подтверждает положения **{A.4}** (**стр.25**) и вывод **W.27** (**стр.27**). Рассмотрим решение одной задачи, данное в [2,35]:

***Пример* 8.** **«Имеются N частиц, каждая из которых может находиться с одной и той же вероятностью $1\,/\,Z$ в одной из $Z(Z > N)$ ячеек. Найти вероятность того, что: I. В определенных N ячейках окажется по одной частице. II. В каких-то N ячейках окажется по одной частице»[32] [2,35].**

XVI. Вторая искомая вероятность определяет *математическую вероятность возможных* размещений *допустимой комбинации* из N *групп* $b,1$ *и* $Z-N$ *групп* $b,0$ (пустых урн). Т.е. каждый из шаров занимает одну урну. Эти вероятности равны $p_2 = Z!\big/[(Z-N)!Z^N]$ для *различимых* [2,35] и $p_2 = Z!(Z-1)!\,/[(Z+N-1)!(Z-N)!]$ для *неразличимых* частиц [2,36].

Постановка и решение задачи подтверждает вывод W.24 (стр.23), но из этого решения следует весьма интересное продолжение. Преобразуем вероятности к другому виду.

Число *возможных* размещений N шаров по Z урнам для этой *допустимой комбинации* равно $A_Z^N = Z(Z-1)...(Z-N+1)$ {5} для *различимых* и $C_Z^N = A_Z^N\big/N!$ {6} для *неразличимых* шаров. Общее число *возможных* размещений определяется формулами {1} и {2} (п.XIV.1, стр.23). Формулы {5} и {2} приводятся к виду: $A_Z^N = Z^N(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]$, $Z^N[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]/N!$.

Отношение *чисел* A_Z^N *и* C_Z^N к общим числам размещений определяет *математические* вероятности: $p_2 = (1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]$ {7} для *различимых* частиц и $p_2 = \{(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]\}/\{[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {8} и *неразличимых* шаров. Для сравнения приведем вероятность появления *допустимой комбинации* из одной группы $b,2$, $N-2$ *групп* $b,1$ и $Z-N+1$ *групп* $b,0$ *различимых* $p_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/(2Z)$ {9} и *неразличимых* частиц $p_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/\{Z[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {10}.

Приведем также вероятность *возможных* размещений *допустимой комбинации* из одной группы b,N и $Z-1$ *групп* $b,0$. Она равна $p_{\min} = 1\big/Z^{N-1}$ {11} для *различимых* и $p_{\min} = 1\big/\{Z^{N-1}[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {12} для *неразличимых* частиц. Вероятность минимальна и много меньше вероятностей вероятностей, определяемых формулами 7-10.

> **{A.7} Из формул {7} и{8} очевидно: при *конечном числе* N частиц и *увеличении числа* Z ячеек вероятности p_2 увеличиваются, а при *неограниченном увеличении* – приближаются к 1. Это означает, что вероятности всех остальных *статистических весов* приближаются к нулю. Это хорошо видно из формул {9}-{12}.**

[32] **Подробное решение подобной задачи, в несколько отличающееся постановке, дано в работе [9,60]**

Замечание 8. **Решение при *2-й постановке* задачи находится с применением только *2-го типа объединения опытов*[33] [5,28]. При *неразличимых* частицах (выводы W.16, стр.17 и W.18, стр.18) все размещения *равновероятны*, что *соответствует принятой гипотезе* в статистической физике. Если положить, что все шары *различимы*, но появляются *в любой из частей* $d_z(z = 1, 2, ..., Z)$ с одинаковой вероятностью $1 / Z$ (физика «вроде бы протестует», но теория вероятностей «против ничего не имеет»), то все размещения будут также *равновероятны*.**

{A.8} Учитывая замечание, последующий анализ будем *относить ко 2-й постановке* задачи (вообще говоря, это относится ко всему анализу, начиная с п.XIII, стр.22), ибо *1-я постановка имеет некоторые особенности*, связанные с определением вероятностей *сложных* событий (вывод W.13, стр.16).

Из анализа следует:

W.28. Если *число* Z ячеек *много больше числа* $Z \gg N$ частиц, то *каждая частица* будет *находиться в одной ячейке с вероятностью близкой к единице*. Т.е. вероятность размещения этой допустимой комбинации имеет максимальное значение.

Вывод основан на *предположении* $Z \gg N$, но оно тоже не обосновано. Снова возник вопрос (**положение A.4.3, стр.25**) о *соотношении чисел* частиц и ячеек. Он связан с размерами частиц.

Замечание 9. **При столкновении молекулы газа сближаются до некоторого наименьшего расстояния, которое условно считается суммой радиусов взаимодействующих молекул. Столкновение между одинаковыми молекулами может произойти только в том случае, если их центры сблизятся на расстояние, меньшее или равное эффективному (газокинетическому) диаметру молекулы. Отметим, что они, вообще говоря, зависят от температуры.**

Мы уже говорили (**стр.18**), что в существующей теории о размерах молекул «вспоминают» при вычислении *длины свободного пробега, числа столкновений, коэффициента диффузии* и т.п.

Однако при выводе распределений Максвелла, Гиббса и других распределений размеров вовсе «не существует»: используется понятие фазового пространства, в котором *микросостояние* изображается: в *классической* теории *одной точкой*; в *квантовой* – *минимальным фазовым объемом* [3,103]. Но нас интересуют «*реальные размеры*»[34] частиц, а не *некоторые математические* образы, не существующие в *реальности*.

При анализе *математической* (**вероятностной**) модели задачи показано, что взаимосвязь размеров шаров и урн приводит к двум *ограничениям* (**условия IV.4, стр.13**). Рассмотрим их подробнее с «привлечением»

---

[33] **Напомним, существующая теория вероятностей этого понятия «не знает»**

[34] **В кавычках, ибо для описания размеров атома (молекулы) используются с десяток различного рода понятий условных атомных (молекулярных) размеров. Их связавают с взаимодействием частиц**

физики. Далее полагаем, что *температура газа постоянна.*

XVII. 1. Размер ячейки не может быть *меньше* размера шара. С точки зрения физики ограничение определяет *максимальное* число $Z_{\max}$ ячеек, на которое разделяется данный объем V.

Увеличение числа ячеек больше числа $Z > Z_{\max}$ означает, что мы увеличиваем объем V, занимаемый газом. При неограниченном увеличении числа Z неограниченно увеличивается объем V, а вероятность нахождения каждой частицы в своей ячейке приближается к единице. Это полностью согласуется с физикой (термодинамикой).

W.29. *Ограничение $Z \ll N$ исключает возможные* размещения *этой допустимой группы, т.е. оно противоречит* физике. Очевидно, что *число ячеек должно отвечать*, по крайней мере, *отношению* $N \leq Z < Z_{\max}$.

Число возможных размещений (**микросостояний**) «шаров по урнам» определяет, с *математической* позиции , все *возможные* случаи (**исходы**), которые могут быть в *данном испытании* и соответствуют (**вывод W.19, стр.21**) *равновесному состоянию* газа при данной температуре и в данном объеме. Это одно из *необходимых условий правильного* построения вероятностной модели. Рассмотрим, что определяют размещение «шаров по урнам» в физическом понимании. Для этого обратимся к *основам физической* модели.

XVII. 2. Модель идеального газа, основана на модели классической механики: соударение пар абсолютно упругих шаров (п. VI, стр.14).

Пусть в ячейку помещается *ровно* 2 частицы («плотная упаковка»). С точки зрения физики это значит, что если в ячейке находится 2 частицы, то *между ними происходит соударение*. Аналогично, если в ячейку помещается 3 частицы, то при нахождении в этой ячейке 3 частиц происходит *соударение между 3-мя* частицами. И т.д. вплоть до числа частиц N, помещаемых в одну ячейку.

С другой стороны, при числе ячеек Z *близком к максимально возможному числу* $Z \cong Z_{\max}$ *размер ячейки минимальный*, следовательно, *каждая частица будет находиться в своей* ячейке. В этом случае, если 2-е частицы находятся *в 2-х соседних ячейках*, то *между ними происходит соударение*. Аналогично, если 3 частицы находятся *в 3-х соседних ячейках*, то *соударение между 3-мя* частицами. И т.д. вплоть до числа N частиц, находящихся в N *соседних ячейках*. Если число частиц близко к максимально возможному числу ячеек , то размер ячейки минимальный, а каждая частица будет находиться в своей ячейке. Имеем также «плотную упаковку». Из анализа физической модели задачи следует:

{A.9} Нахождение $n, z = 2, 3..., N$ $(z = 1, 2, ..., Z)$ частиц в одной ячейке означает, что происходит соударение между n, z частицами. При *минимальном размере* ячеек (т.е. $Z \cong Z_{\max}$) *соударение происходит между* частицами, *находящимися в соседних ячейках.*

Находятся ли частицы в одной ячейке, или в разных ячейках, имеющих минимальный размер, абсолютно неважно: соударения между частицами происходит в обоих случаях. Но если в 1-м случае требуется увеличение размера ячейки, то во 2-м в этом нет необходимости. Следовательно, всегда можно положть $Z \cong Z_{\max}$. Теория вероятностей оперирует с событиями, которые не являются действительными величинами. Геометрически их можно представить в виде точек [5,59]. Соударения частиц, как и их скорости (импульсы, энергии) также не имеют геометрических размеров, поэтому

вполне естественно полагать их, как и события точками. Следовательно:

W.30. *Зависимость размера* **ячейки** *от числа* **частиц** *не связана с решением вероятностной* **задачи, определяемой постановкой физической задачи.**

Ограничение $N \leq Z < Z_{\max}$ на число «урн» остается в силе (вывод W.29, стр.31), ибо рассматривается изолированный конечный объем V газа..

В п. XVII.1. рассмотрено поведение вероятностей *при неограниченном увеличении числа* **ячеек.** *При ограниченном числе* **ячеек поведение вероятностей существенно отличается.**

Сравним вероятности: $p_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/(2Z)$**{9}** и $p_2 = (1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]$**{7}**. При числе ячеек $Z \leq Z_0 = (N-1)(N+2)/2$ вероятность $p_3 \geq p_2$. Наличие *минимального* значения вероятности $p_{\min} = 1\Big/Z^{N-1}$**{11}** позволяет утверждать:

W.31. При числе ячеек $Z \leq Z_0$, вероятности возможных размещений допустимых комбинации групп имеют максимум.

Чем меньше отношение Z/Z_0, тем больше смещение максимума к значению вероятности $p_{\min}$. При числе $Z = N$ смещение максимально.

XVII. 3. Будем *изменять число* **частиц при** *постоянном числе* **ячеек.** *Уменьшение числа* N **частиц** (вплоть до значения $N \geq 2$) **в объеме означает** *уменьшение объема* V_N**, занимаемого частицами.**

Можно возразить: при малом числе частиц состояние газа не будет равновесным. Конечно же, некоторое положения, следующие из кинетической теории, в этом случае «не работают», например, давление в объеме не будет равномерным. Однако и такая система, «предоставленная самой себе, придет, в конце концов, в стационарное состояние, в котором установится определенное распределение скоростей между частицами, постоянное во времени» (предположение 3, стр.15).

> **{A.10}** Если при малом числе частиц положить число ячеек $Z = N$, то получим неверное представление о вероятностях *возможных* размещений *допустимых комбинаций групп* b, n $(n = 0, 1, ..., N)$ частиц в объеме V. *Правильные значения вероятностей* будут при *числе* ячеек, которое приблизительно *равно* $Z \cong Z_{\max}$ (вывод W.28, стр.31).

Например, при 3-х *различимых* частицах и Z ячейках имеем *возможные* размещения 3-х *допустимых комбинаций*: **1.** $b, 3$ и $Z-1$ *групп* $b, 0$. **2.** $b, 2$; $b, 1$ и $Z-2$ *групп* $b, 0$. **3.** $b, 1$; $b, 1$; $b, 1$ и $Z-3$ *групп* $b, 0$. Их вероятности равны $1/Z^2$, $[3(1-1/Z)]/Z$ и $(1-1/Z)(1-2/Z)$ соответственно. При нормальных условиях в $4cm^3$ воздуха находится $\sim 10^{20}$ молекул. Объем V_N, занимаемый молекулами, в $10^4 \div 10^5$ раз меньше. Сравните вероятности при числах $Z = 3$ и $Z \cong 10^{24} \div 10^{25}$. Чтобы при малом числе частиц вероятности размещения всех допустимых комбинаций были значимыми, необходимо в очень много раз уменьшить объем, в котором находятся частицы. Число ячеек будет малым, а между частицами будут происходить столкновения.

Из проведенного анализа можно сделать вывод:

W.32. *Максимальное число* $Z_{\max}$ **ячеек** («плотная упаковка») **связано** *с объемом* V**, в котором находится газ, и** *размерами* **частиц.** *Независимо от числа* $N < Z$ **частиц,** *число* **ячеек следует принимать равным** $Z \cong Z_{\max}$**.**

Учитывая вывод, будем увеличивать число частиц в объеме V от значения $N \geq 2$ при постоянном числе ячеек $Z \cong Z_{\max}$.

При *малых* значениях N *соударения* между частицами *практически отсутствуют* (вывод W.28, стр.31): они свободно «гуляют» от стенки к стенке сосуда. При числе $N > N_0 \cong \sqrt{2Z_{\max}}$ (следует из условия $Z < Z_0 = Z_{\max}$, вывод W.31, стр.33) могут появляться *парные соударения*, а при некотором значении $N = N_1$ их появление становится *преобладающим* и *появляются соударения между 3-мя* (и более) частицами. При некотором значении $N = N_2$ *преобладающим* становится появление *соударений между 3-мя* частицами, и *появляются соударения между 4-мя* (и более) частицами. И т.д. При приближении числа частиц к значению $Z_{\max}$, *смещение максимума* вероятности *возможных* размещений *допустимых комбинаций* приближается *к наибольшему* значению (замечание к выводу W.31).

XVIII. С другой стороны, *увеличение числа* частиц в объеме V означает *увеличение объема* V_N, занимаемого частицами (конечно же, и *давления*) и *уменьшению длины свободного пробега* частицы.

При *числе* частиц $N < N_0$ *длина свободного пробега* частицы больше размера сосуда, а *объем* V_N, занимаемый частицами, мал по отношению к объему V. В этом случае некоторые явления (прежде всего – явления переноса) протекают иначе, чем при большом числе частиц. Определенные положения, следующие из кинетической теории, оказываются неверными. Они становятся применимыми при числе частиц $N = N_1$, когда *преобладающим* становится появление *парных соударений* и значительно увеличивается *объем* V_N, занимаемый частицами. При значении $N = N_2$ *преобладающим* становится появление *соударений между 3-мя и более*частицами. Законы, которым подчиняется *идеальный* газ *нарушаются*: начинают «играть роль» *реальные взаимодействия* частиц. Необходим учет этого взаимодействия при построении физической модели: вполне естественно, что это повлечет и изменение вероятностной модели. Если числа *числа* частиц $N = N_3$ (или $N = N_4$), *достаточно близки к значению* $Z_{\max}$, *объем* V_N, занимаемый частицами, близок к максимальному, то происходит переход к *жидкому* (или *твердому*) состоянию. При приближении к жидкому состоянию, кроме отталкивающих сил появляются силы «притяжения» между молекулами (и/или атомами).

> **{A.11}** ***Объем*** **V_N, занимаемый частицами, определяется размерами частиц, а *отношение* числа N частиц к *объему* V, в котором они находятся, определяет *концентрацию* $n = N/V$ частиц *в единице* объема. *Концентрация* $n_j = N_j/V$ $(j = 0, 1, ..., 4)$ частиц в единице объема определяет *применимость той или иной физической модели состояния.***

Из анализа, приведенного в пунктах XVI-XVIII очевидно, что *концентрация* частиц в объеме *никоим образом* не связана *с искусственным делением* объема на ячейки, которое *применено для постановки и решения вероятностной* задачи.

Таким образом, анализ *математических ограничений с позиций физической* модели показал, что *математические* условия определяют *одно естественное ограничение* (**п.XVII.1, стр.32**), следующее из физики: – *максимального числа* ячеек $Z_{\max}$, *на которое можно разделить объем*, в котором находится газ. При *любом числе* частиц $N < Z$, *число* ячеек $Z \cong Z_{\max}$ *всегда* определяется *только размерами сосуда и частиц.*

{A.12} ***Разработка физических*** **моделей, учитывающих** ***изменение взаимодействия*** **между частицами** ***при их сближении*****, определение** ***максимального числа*** $Z_{\max}$ **ячеек, на которое** ***можно разделить*** **объем** V**, занимаемый газом, и** ***значений*** $n_j = N_j/V$ $(j = 0, 1, ..., 4)$**, конечно же, за физиками.**

Естественно, что *изменение взаимодействия между* частицами приводит *к изменению характера движения* частиц, что должно учитываться при построении *вероятностной модели.*

4. Краткий итог исследований

Вообще говоря, подводить *итог преждевременно*, ибо выполнен только *начальный этап* работы. На основе метода ячеек проведен анализ:

1. ***Вероятностной постановки*** **задачи,** ***основанной на методе ячеек.*** **2.** ***Влияние физической модели задачи*** **на** ***вероятностную модель и взаимосвязь моделей.***

Если первый показал (**положение А.3, стр.14**) *многообразие вариантов возможных* постановок и соответствующих решений *вероятностной* задачи о размещении частиц по ячейкам, то второй существенно *ограничил варианты возможных* постановок.

Анализ *влияния физической модели* задачи на *вероятностную* модель привел к некоторым *неожидаемым* результатам.

Во-первых, он показал, что *физическая модель* Максвелла обуславливает *постановку и решение 2-х вероятностных задач* (**стр.15-18**):

1. ***Среднего числа*** **частиц,** ***скорости*** **которых лежат** ***между данными пределами.*** **2.** ***Среднего числа*** **частиц, находящихся** ***в некоторой части*** d_z **объема** D**, занимаемого газом.**

В принципе, ***вероятностные*** **задачи** ***в обеих постановках*** **решаемы** ***на основе метода ячеек с применением новой исходной*** **системы теории событий, по крайней мере, определен подход к их решению. Но прежде необходимо решить задачу 1, поставленную в замечании к выводу W.26 (стр.24). Эти исследования необходимы для построения распределений скоростей (1-я постановка задачи) и частиц по ячейкам (2-я постановка задачи), а также анализа полученных решений. Скажем так: есть идея осуществления ее решения и даже начато ее воплощение, но это требует кропотливой (вообще говоря – «муторной») работы. Имеется некоторая уверенность, что должно получиться, но – «все бывает – от ошибок «не застрахован» никто.**

Во-вторых, выявлены *противоречия* (**стр.10-12,20-32**) между некоторыми «декларируемыми» утверждениями статистической физики и результатами, полученными на основе метода ячеек с применением моделей существующей теории вероятностей (**новая исходная система теории событий хотя**

и упоминалась при анализе по мере необходимости, но применялась в исключительных случаях). Основным является:

> **Утверждение** ***о произведении статистических весов, основанное на существующем*** **понимании «суммы» случайных величин,** ***не соответствует реальности.***

Остальные «неприятности» связаны в основном с этим противоречием. Некоторые вопросы пока остались невыясненными. Например, мы пока точно не знаем, что делать с понятием термодинамической вероятности и связанного с ней понятием энтропии. В принципе, его можно сохранить, используя подход, изложенный в работе [4,§103]: по крайней мере есть понимание, как это сделать, учитывая, что «пространственная и скоростная части» реально являются произведением. Но она пока не осуществлена.

Мы практически не затрагивали вопросов, связанных с *различием построения решений для 1-й и 2-й постановок* задачи: мало того, не приводили даже формул, определяющих *числа размещений очень малого* числа N частиц по Z ($N \leq Z$) ячейкам, хотя уже они позволяют сделать некоторые выводы. Дело в том, что они тесно связаны с вопросами, которые возникают при рассмотрении физической стороны процесса. Большая часть вопросов связана именно с взаимодействием частиц: мы пока не готовы даже «более или менее сносно» сформулировать их и объяснить, почему они заданы.

Эти группы вопросов рассмотрим в другой работе.

Остался также не выясненным вопрос: *может ли быть хотя бы какое-то одно из полиноминальных распределений решением задачи или нет*?

Пока есть интуиция, основанная на проведенном анализе, что правильное построение решения должно следовать из метода ячеек с применением новой исходной системы теории событий [5].

Надеемся, что по завершению работы над подробным изложением анализа существующего понятия случайной величины, которая будет вскоре изложена в интернете, это можно будет показать более убедительно.

Список литературы

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с 7. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с

2. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с

3. В.Ф. Ноздрев, А.А. Сенкевич. Курс статистической физики. Учебное пособие. М.: «Высшая школа». 1966. - 288 с.

4. И. В. Савельев. Курс общей физики, т. 1. Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие.— изд. 2-е. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 432 с.

5. И.И. Бондарчук. Насколько «совершенно здание современной теории вероятностей? Часть I: критика исходных понятий: новая исходная система

6. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с

7. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. Наука, 1980г. – 976с

8. М. А. Елъяшевич, Т. С. Протъко. Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов. – Успехи физических наук. т.135, вып.3. – 1981. стр.381-423

9. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.-Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с

10. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. East-West Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с