マクロ計量経済学

第3回　講義ノート
マクロ動学モデルの解法　その3の補足

2025年5月07日

飯星　博邦

マクロ経済の動学モデルの解法

- 解法その1: 確率的ベルマン方程式　Stochastic Bellman Equation
  → 応用範囲が広いが、数値的解法で時間がかかる。
  - 状態変数の動学は、マルコフ決定過程
  - ラグランジュ方程式に置き換えることが可能。

- 解法その2: 合理的期待モデル　Rational Expectation Model
  ⇒　数値的解法での負担が少ない。
  - Uhlig (1997)
  - Blanchard & Kahn (1980)
  - Schmit-Grohe & Uribe (2004)

- 均衡解の動学式はマルコフ決定過程
  - 行列Pは　固有値が1以下で安定

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t,$$ 均衡解

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t.$$

Bellman Equation の応用例

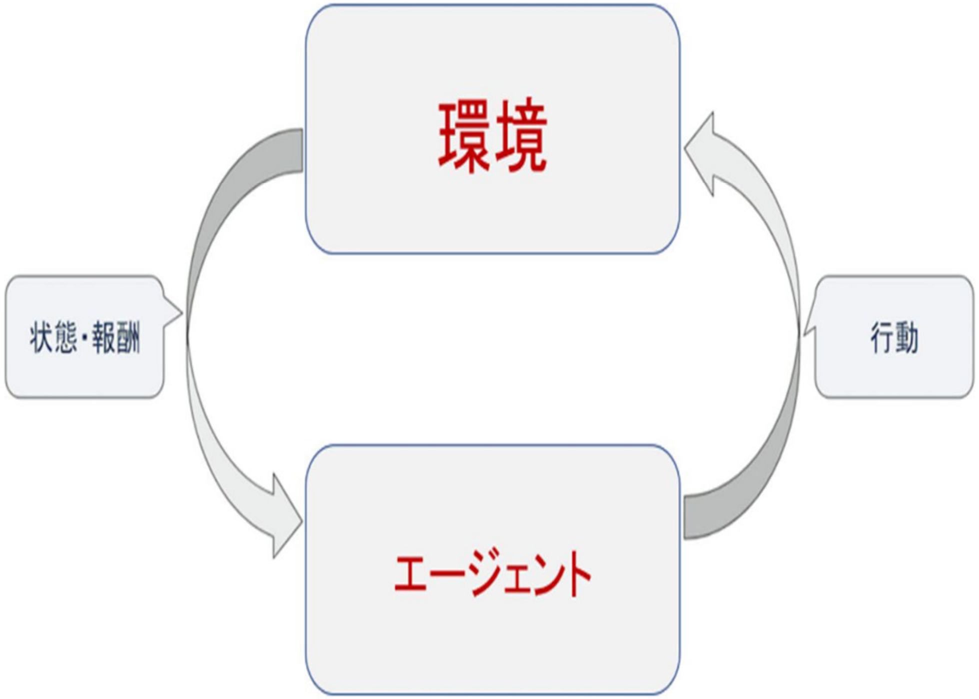
- 強化学習
  - Q学習
  - E-Greedy
  - 深層強化学習
  - マルチエージェント深層強化学習
- ダイナミック・ゲーム
  - Markov Perfect Equilibrium

強化学習

機械学習の中でも、教師あり学習に分類されるニューラルネットワーク(Deep Learning)、そして強化学習、さらに強化学習内に分類されるQ学習について触れていきます。

強化学習は、以下の手順を繰り返し行います。

- 1. エージェントが環境に対して行動を起こす。
- 2. 環境がエージェントに更新された状態と報酬を与える。
- 3. エージェントは報酬をもとに行動の方策を修正し、1に戻る。



強化学習で出てくる用語

用語	意味
エージェント(Agent)	環境に対して行動を起こす学習者のような立場です。強化学習ではこのエージェントが環境に対して様々な試行を繰り返し、状態ごとに行動を最適化していきます。
環境(Enviroment)	エージェントの行動に対して状態の更新と報酬の付与を行う、観測者のような立場です。
行動(Action)	エージェントがある状態sにおいて取ることができる行動のことです。
状態(State)	環境が保持する環境の様子です。エージェントが起こす行動に応じて更新されます。
報酬(Reward)	エージェントの行動に対する環境からの報酬です。この報酬はエージェントが環境に対して望ましい結果を作用させた時に与えられます。
方策(Policy)	エージェントが行動する際の指標となるルールです。後記するQ学習では、行動価値関数において最も価値の高い行動が選択されます。
行動価値関数(Value Function)	ある状態での行動の評価値を定める関数です。状態数が少ない時にはテーブル(表)で表記できます。主な手法に、Q学習におけるQ関数などがあります。

Q学習

- 強化学習を実現する方法として、**Q学習**がある
- ある場面において次にとるべき行動を選択するための指標 → **Q値**
- Q値に従って行動を選択する

価値関数

Q値更新の計算

$$Q_{s_t,a_t} = Q_{s_t,a_t} + \alpha(r + \gamma \cdot max \cdot Q s_{t+1}, a_{t+1} - Q_{s_t,a_t})$$

- s_t: 時刻tにおける状態
- a_t: s_tにおいて選択した行動を表す
- $max \cdot Q_{s_{t+1},a_{t+1}}$: 次の時刻において選択できる行動に対するQ値の中で最大の値
- r: 報酬（得られなければ0）
- α: 学習係数（0.1程度）
- γ: 割引率（0.9程度）

貪欲法

ε-グリーディ法

行動選択はQ値の大きい行動を優先する
→ 初期のランダムに決まったQ値がたまたま大きな値となった行動だけが常に選択されてしまう

そこで

- ある適当な定数を用意（ε = 0.3）
- 行動選択の際、0~1の間の乱数を生成し、その値がε以下であればランダムに行動を選択する
- εより大きければQ値の大きい行動を選択する

こうすることで
　Q値の初期値に依存することなく、様々な行動に対する適切なQ値の学習が可能となる

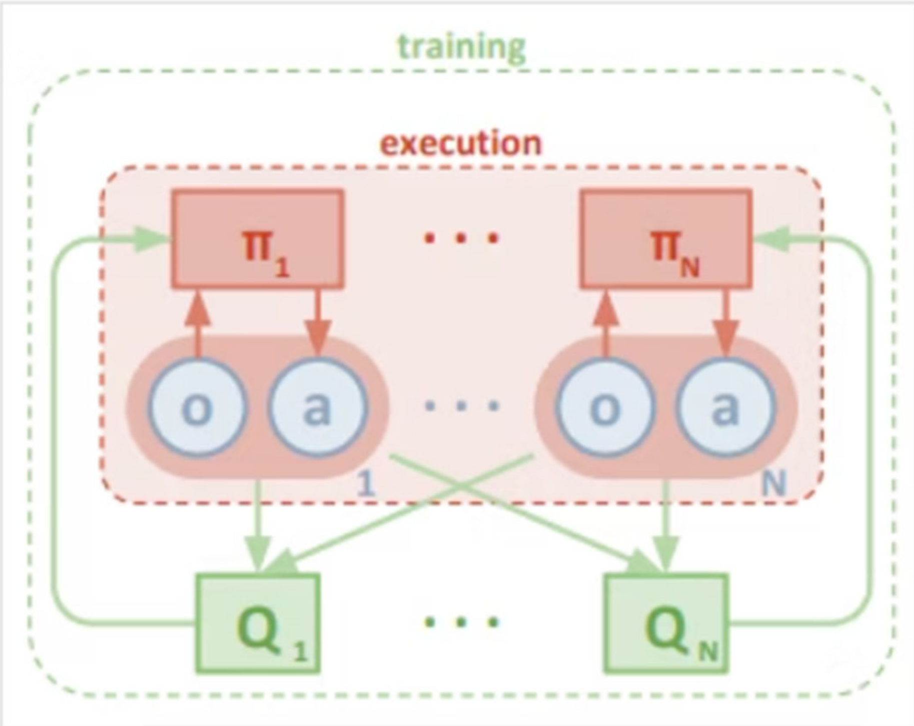
確率εでランダムに選択　　確率$1-\varepsilon$でQ値最大を選択

ε-greedy法の方策関数を$K(s)$は式(2)で表されます。

$$K(s) = \begin{cases} \arg\max_{a \in A} Q(s,a), \theta > \varepsilon \\ a_{\text{rand}}, \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

$\theta \sim \mathrm{U}_{\mathbb{R}}(0,1)$は$[0,1]$から一様に選ばれた乱数、$a_{\text{rand}} \sim \mathrm{U}(A)$は行動集合$A$から一様に選ばれた行動です。

マルチエージェント深層強化学習



マルチエージェント強化学習の応用例

MARLは、さまざまな分野での応用が期待されています。
以下にいくつかの具体例を示します。

1.ロボティクス
複数のロボットが協力して物体を運ぶ作業を行う場合、
協力的設定が利用されます。

2.自動運転
車両間の通信を通じて交通の流れを最適化するためには、
混合設定が求められます。

3.ゲームAI
複数のキャラクターが対戦するゲームでは、競争的設定
が適用されます。

Dynamic Game (Acemoglu, 2009, p937)

Best Response

$$BR(\sigma_{-i}(t) \mid h^{t-1}, k(t)) = \left\{\sigma_i(t) \in S_i(t) : \sigma_i(t) \text{ maximizes (C.1) given } \sigma_{-i}(t) \in S_{-i}(t)\right\}.$$

Definition C.1 *A* Subgame Perfect Equilibrium (SPE) *is a strategy profile* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*) \in S$ *such that* $\sigma_i^*(t) \in BR(\sigma_{-i}^*(t) \mid h^{t-1}, k(t))$ *for all* $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$, *for all* $i \in \mathcal{N}$, *and for* $t = 0, 1, \ldots$.

The law of motion of vector $k(t)$ is given by the following Markovian transition function

$$q(k(t+1) \mid k(t), a(t)), \tag{C.2}$$

Definition C.2 *A* Markov Perfect Equilibrium (MPE) *is a profile of Markovian strategies* $\hat{\sigma}^* = (\hat{\sigma}_1^*, \ldots, \hat{\sigma}_N^*) \in \hat{S}$ *such that the extension of these strategies satisfies* $\hat{\sigma}_i'^*(t) \in BR(\hat{\sigma}_{-i}'^*(t) \mid h^{t-1}, k(t))$ *for all* $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$, *for all* $i \in \mathcal{N}$, *and for all* $t = 0, 1, \ldots$.

It should also be clear that an MPE is an SPE, since the extended Markovian strategy satisfies $\hat{\sigma}_i'^*(t) \in BR(\hat{\sigma}_{-i}'^*(t) \mid h^{t-1}, k(t))$, ensuring that $\hat{\sigma}_i'^*$ is a best response to $\hat{\sigma}_{-i}'^*$ in all subgames, that is, for all $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$ and for all t.

For the next result, let $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}^* \in \hat{S}: \hat{\sigma}^* \text{ is an MPE}\}$ be the set of MPE strategies and $\Sigma^* = \{\sigma \in S: \sigma^* \text{ is an SPE}\}$ be the set of SPE strategies. Let $\hat{\Sigma}'$ be the extension of $\hat{\Sigma}$ to include conditioning on histories. In particular, recall that $\hat{\sigma}_i' : K \times H^{t-1} \to \Delta(A_i)$ is such that $\hat{\sigma}_i'(k, h^{t-1}) = \hat{\sigma}_i(k)$ for all $h^{t-1} \in H^{t-1}$ and $k(t) \in K$, and let

$$\hat{\Sigma}' = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\sigma}' \in S: \hat{\sigma}_i'(k, h^{t-1}) = \hat{\sigma}_i(k) \text{ for all } h^{t-1} \in H^{t-1}, k(t) \in K, \\ \text{and } i \in \mathcal{N}, \text{ and } \hat{\sigma} \text{ is an MPE} \end{array} \right\}.$$

Theorem C.3 (Markov versus Subgame Perfect Equilibria) $\hat{\Sigma}' \subset \Sigma^*$.

Proof. This theorem follows immediately by noting that since $\hat{\sigma}^*$ is an MPE strategy profile, the extended strategy profile, $\hat{\sigma}'^*$, is such that $\hat{\sigma}_i'^*$ is a best response to $\hat{\sigma}_{-i}^*$ for all $h^{t-1} \in H^{t-1}$, $k(t) \in K$, and for all $i \in \mathcal{N}$ and thus is subgame perfect. ■

アウトライン

- Ch6　Sec 6.3.1 のモデルの合理的均衡解の
  Uhlig(1997)による解法

- 対数線形化されたモデル(FOC)から行列への変換
  - Matlab Toolbox: Symbolic math
  - Ch6_model_631_log_linear.m

- 原モデルの対数線形化への変換
  - Matlab Toolbox: Symbolic math
  - Ch6_model_631.m

線形対数化されたモデル(FOC)のコーディング　page 101, Ch6. Sec 6.3.1
Matlab Toolbox: Symbolic math

$$0 \approx \tilde{C}_t - E_t\tilde{C}_{t+1} + \beta\bar{r}E_t\tilde{r}_{t+1},$$

where $\tilde{C}_t = \ln C_t - \ln \bar{C}$. In this simplification, we used the fact that $1/\beta = \bar{r} + (1-\delta)$ in a stationary state equilibrium.

Applying the log linearization techniques to the second equation gives

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \frac{\tilde{H}_t}{1-\bar{H}} - \tilde{C}_t.$$

The next three equations are

$$0 \approx \bar{Y}\tilde{Y}_t - \bar{C}\tilde{C}_t + \bar{K}\left[(1-\delta)\tilde{K}_t - \tilde{K}_{t+1}\right],$$

$$0 \approx \tilde{\lambda}_t + \theta\tilde{K}_t + (1-\theta)\,\tilde{H}_t - \tilde{Y}_t,$$

and

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t,$$

where $\bar{r} = \theta\bar{Y}/\bar{K}$.

The stochastic process,

$$\lambda_{t+1} = \gamma\lambda_t + \varepsilon_{t+1},$$

```
%% Set FOC of Model: Page 100
eq1 = ct - cf + BETTA*r_ss*rf ;

eq2 = yyt - ht/(1-h_ss)-ct;

eq3 = y_ss*yyt - c_ss*ct + k_ss*((1-DELTA)*kt - kp);

eq4 = lamt + THETA*kt + (1-THETA)*ht - yyt ;

eq5 = yyt - kt - rt;

%% Create function f
f = [eq2; eq3; eq4; eq5];
```

合理的期待モデル
Matlab Toolbox: Symbolic math

In the example economy, we could choose

$$x_t = \left[\tilde{K}_{t+1}\right]$$

State Variables

as the one element vector of endogenous state variables and

$$y_t = \left[\tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \tilde{H}_t, \tilde{r}_t\right]'$$

Control Variables

as the vector of other endogenous variables. Separating equations that include expectations from those that do not, the linear version of the model can be written as

合理的期待モデル

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t,$$

$$0 = E_t\left[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t\right],$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1} \quad E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0.$$

```
% State Variables
xf = [kpf];
x = [kp];
xb = [kt];

% control variables
yf = [yyf, cf, hf, rf];
yt = [ yyt, ct ht, rt];
yb= [ yyb, cb hb, rb];

% exogenous variables
z= lamt;
zf = lamf;
```

線形モデル(FOC)から合理的期待モデルへ変換

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t,$$

$$0 = E_t\left[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t\right],$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1} \quad E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0.$$

```
%% Create function f
f = [eq2; eq3; eq4; eq5];
```

```
%% Compute the first  derivatives of f
fx=jacobian(f,x);
fxb=jacobian(f,xb);
fyt=jacobian(f,yt);
fz=jacobian(f,z);
```

```
eq1xf=jacobian(eq1,xf);
eq1x =jacobian(eq1,x);
eq1xb =jacobian(eq1,xb);
eq1yf=jacobian(eq1,yf);
eq1yt =jacobian(eq1,yt);
eq1zf =jacobian(eq1,zf);
```

Matlab Command

jacobian

シンボリック関数のヤコビ行列

ページ内を

構文

```
jacobian(f,v)
```

説明

jacobian(f,v) は、シンボリック関数 f のヤコビ行列を v に対して計算します。

結果の (i,j) 要素は $\frac{\partial f(i)}{\partial v(j)}$ です。

例

ベクトル関数のヤコビアン

ベクトル関数のヤコビアンは、その関数の偏導関数の行列です。

Cop Comma

ヤコビ行列 [x*y*z,y^2,x + z] を [x,y,z] について計算します。

```
syms x y z
jacobian([x*y*z,y^2,x + z],[x,y,z])
```

ans =

$$\begin{pmatrix} y\,z & x\,z & x\,y \\ 0 & 2\,y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、ヤコビアン [x*y*z,y^2,x + z] を [x;y;z] について計算します。

```
jacobian([x*y*z,y^2,x + z], [x;y;z])
```

ans =

$$\begin{pmatrix} y\,z & x\,z & x\,y \\ 0 & 2\,y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ヤコビ行列は 2 番目の位置に入力するベクトルの方向に対して不変です。

Matlab Toolbox: Symbolic math

$$A = [\,0 \quad -\bar{K} \quad 0 \quad 0\,]' ,$$

$$B = [\,0 \quad (1-\delta)\bar{K} \quad \theta \quad -1\,]' ,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-\bar{H}} & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = [\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,]' ,$$

$$F = [0] , \quad G = [0] , \quad H = [0] ,$$

$$J = [\,0 \quad -1 \quad 0 \quad \beta\bar{r}\,] ,$$

$$K = [\,0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\,] ,$$

$$L = [0] , \quad M = [0] , N = [\gamma] .$$

計算結果

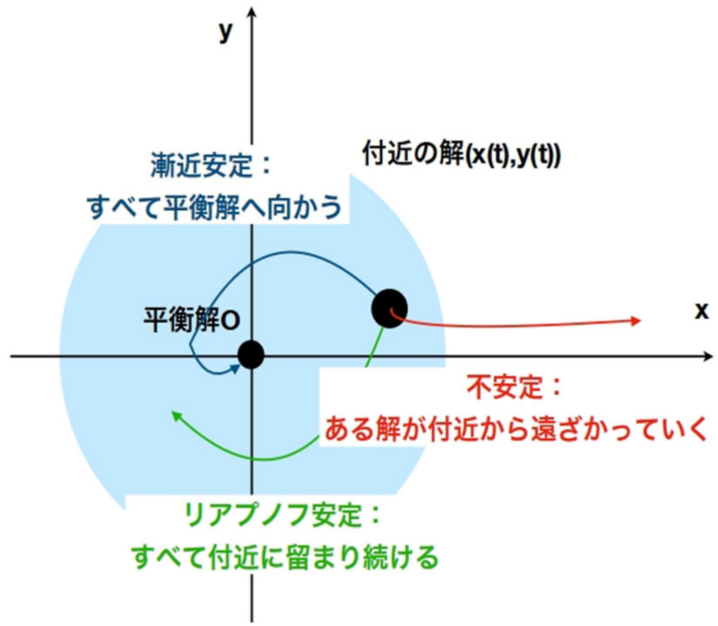
```
df/dx (A) =
     0
-k_ss
     0
     0
```

```
df/dxb (B) =
                   0
-k_ss*(DELTA - 1)
               THETA
                  -1
```

```
df/dy (C) =
[    1,     -1, 1/(h_ss - 1),  0]
[y_ss, -c_ss,              0,  0]
[   -1,      0,     1 - THETA,  0]
[    1,      0,              0, -1]
```

```
df/dyf (J) =
[0, -1, 0, BETTA*r_ss]
```

均衡(安定)解・発散解・鞍点
と　固有値 の関係



The solution for this economy is a set of matrices, P, Q, R, and S, that describe the equilibrium laws of motion,

State Variables = 安定解

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t,$$

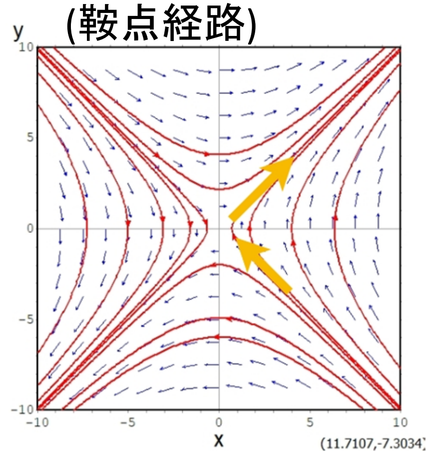
Xの挙動が収束するために
行列 P の固有値は1 未満

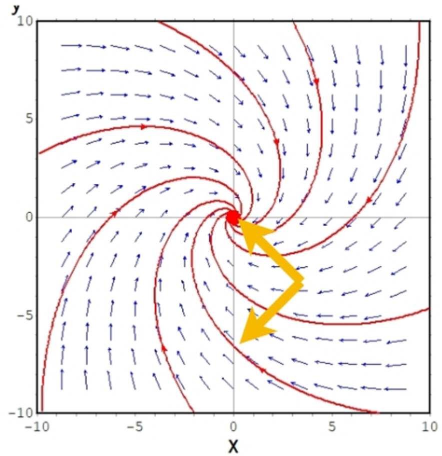
and

Control Variables　=発散解

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t.$$

Saddle point path
(鞍点経路)





合理的期待モデル

均衡解

$$x_t = P x_{t-1} + Q z_t,$$

$$y_t = R x_{t-1} + S z_t.$$

$$0 = A x_t + B x_{t-1} + C y_t + D z_t,$$

上の式に、均衡解の式を代入する。

$$0 = [AP + B + CR]\, x_{t-1} + [AQ + CS + D]\, z_t$$

恒等式として成立するために各項はゼロであるので
ここから、RとSが導出できる。

$$R = -C^{-1}[AP + B],$$

$$S = -C^{-1}[AQ + D].$$

$$0 = E_t\left[F x_{t+1} + G x_t + H x_{t-1} + J y_{t+1} + K y_t + L z_{t+1} + M z_t\right],$$

上の式に均衡解を代入する。

$$0 = [FPP + GP + H + JRP + KR]\, x_{t-1}$$
$$+ [FPQ + FQN + GQ + JRQ + JSN + KS + LN + M]\, z_t.$$

恒等式として成立するために各項はゼロである。
RとSの式を代入するとQが得られる

$$0 = FP^2 + GP + H + JRP + KR$$

$$0 = FP^2 + GP + H - J\Big[\underbrace{C^{-1}[AP + B]}_{=R}\Big] P - K\Big[\underbrace{C^{-1}[AP + B]}_{=R}\Big],$$

$$0 = \left[F - JC^{-1}A\right] P^2 - \left[JC^{-1}B - G + KC^{-1}A\right] P - KC^{-1}B + H.$$

上の2次方程式からPを解く

$$0 = FPQ + FQN + GQ + JRQ -$$
$$J\Big[\underbrace{C^{-1}[AQ + D]}_{=S}\Big] N - K\Big[\underbrace{C^{-1}[AQ + D]}_{=S}\Big] + LN + M,$$

上の式からQを解く

$$\operatorname{vec}(Q) = \left(N' \otimes (F - JC^{-1}A) + I_k \otimes (FP + G + JR - KC^{-1}A)\right)^{-1}$$
$$\times \operatorname{vec}\left(\left(JC^{-1}D - L\right) N + KC^{-1}D - M\right).$$

図6.4と図6.5の再現

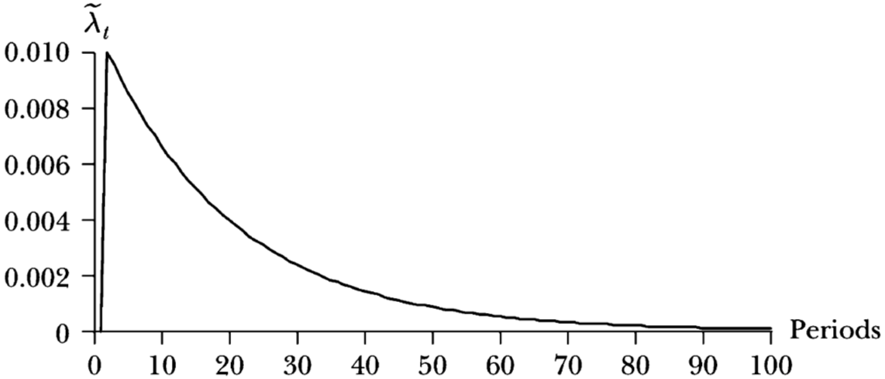


FIGURE 6.4 Response of technology to a .01 impulse

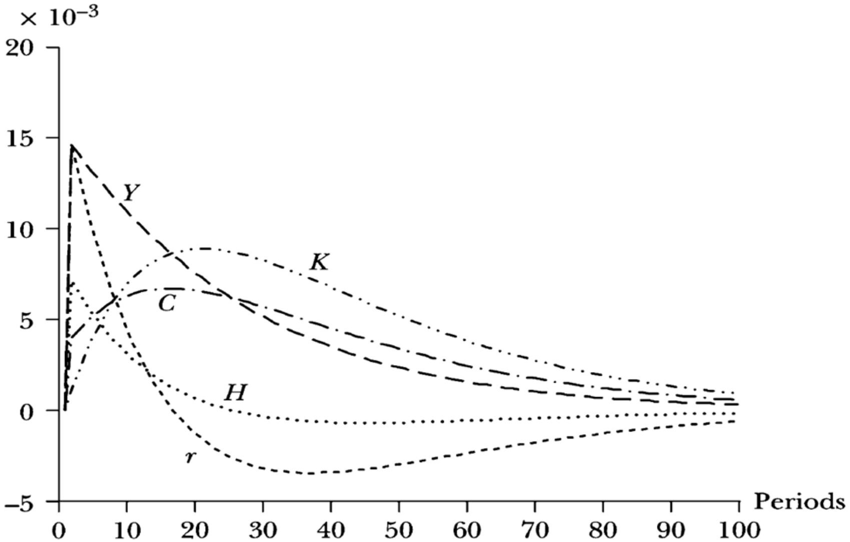
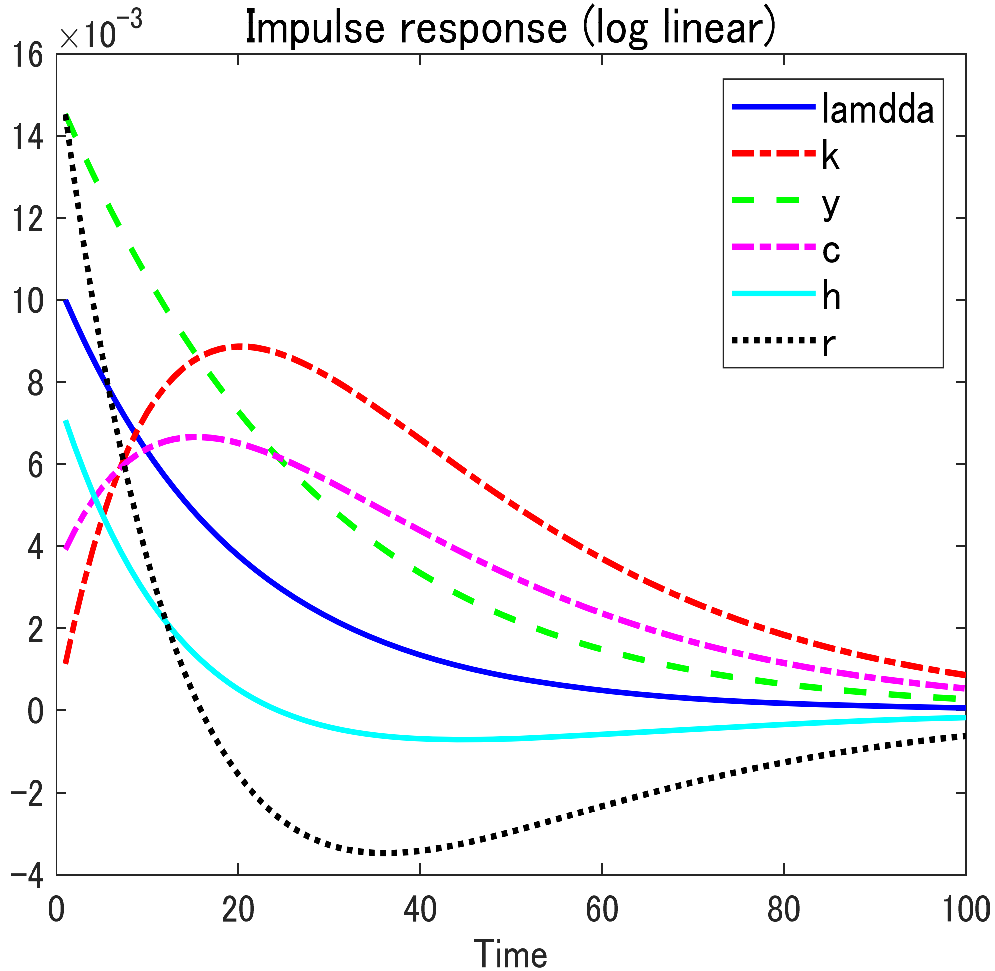


FIGURE 6.5 Responses of Hansen's basic model



非線形モデルの対数線形化

The five equations of the Hansen model are

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} \left(r_{t+1} + (1 - \delta) \right) \right],$$

$$AC_t = (1 - \theta) \left(1 - H_t \right) \frac{Y_t}{H_t},$$

$$C_t = Y_t + (1 - \delta) K_t - K_{t+1},$$

$$Y_t = \lambda_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta},$$

$$r_t = \theta \frac{Y_t}{K_t}.$$

```
%% Set FOC of Model: Page 100
eq1 = BETTA*(exp(ct)/exp(cf))*(exp(rf)+(1-DELTA)) -1 ; % Euler equation

eq2 = (1- THETA)*(1-exp(ht))*exp(yyt)/exp(ht)- AA*exp(ct);

eq3 = exp(yyt) + (1-DELTA)*exp(kt) - exp(kp)- exp(ct);

eq4 = exp(lamt)*exp(kt)^THETA*exp(ht)^(1-THETA) -exp(yyt) ;

eq5 = THETA*exp(yyt)/exp(kt) - exp(rt);
```

線形モデルと非線形モデルのインパルス応答の比較