KK モデル

蓮見 亮

2012 年 4 月 10 日

1　状態空間モデル（一般）

$$y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t \tag{1}$$

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\eta_t \tag{2}$$

$$\alpha_1 \sim N(a_1, P_1) \tag{3}$$

2　状態空間モデル（KK モデル）

$$y_t = d + Z\begin{bmatrix}\alpha_t \\ \alpha_{t-1}\end{bmatrix} + \epsilon_t, \quad t \geq 2 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_{t+1} \\ \alpha_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T & 0 \\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_t \\ \alpha_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}R \\ 0\end{bmatrix}\eta_t \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_2 \\ \alpha_1\end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix}a_1 \\ a_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}P_1 & 0 \\ 0 & P_1\end{bmatrix}\right) \tag{6}$$

※状態変数の初期値の平均、分散については検討の余地あり。

3 SV モデル（一般, Kim et al. 1998）

$$y_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$
$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t \tag{8}$$
$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right) \tag{9}$$
$$\varepsilon_t \sim i.i.d.\ N(0,1), \quad \eta_t \sim i.i.d.\ N(0,1) \tag{10}$$

Gibbs サンプラー

1. $\boldsymbol{s}, \phi, \sigma_\eta^2, \mu$ を初期化
2. $\boldsymbol{h}$ をサンプリング（simulation smoother）
3. $\boldsymbol{s}$ をサンプリング（$s_t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$）
4. ϕ, σ_η^2, μ をサンプリング
5. 2 に戻る

4 DSGE SV モデル（KK モデルの JP 型拡張）

$$y_t = d + Z \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \end{bmatrix} + \epsilon_t, \quad t \geq 2 \tag{11}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1} \\ \alpha_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\theta}) \\ 0 \end{bmatrix} \eta_t \tag{12}$$
$$\log \eta_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} & \ldots & 0 \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{m,t} \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, I) \tag{13}$$
$$\log \sigma_{i,t} = (1 - \rho_{\sigma_i}) \log \sigma_i + \rho_{\sigma_i} \log \sigma_{i,t-1} + \nu_{i,t} \tag{14}$$
$$\nu_{i,t} \sim N(0, \omega_i^2) \tag{15}$$

Kim et al. [1998] のノーテンションとの関係では、

$$\log \eta_t = y_t \tag{16}$$
$$\log \sigma_{i,t} = h_t/2 \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{i,t} = \exp(h_t/2) \tag{18}$$
$$\log \sigma_i = \mu/2 \tag{19}$$
$$\rho_{\sigma_i} = \phi \tag{20}$$
$$\omega_i = \sigma_\eta/2 \tag{21}$$

Gibbs サンプラー

1. $\boldsymbol{s}, \{\rho_{\sigma_i}\}, \{\omega_i\}, \{\sigma_i\}, \boldsymbol{\theta}$ を初期化
2. $\boldsymbol{\eta}$ をサンプリング（simulation smoother）
3. $\{\sigma_{i,t}\}$ をサンプリング（simulation smoother）
4. $\boldsymbol{s}$ をサンプリング（$s_t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$）
5. $\{\rho_{\sigma_i}\}, \{\omega_i\}, \{\sigma_i\}$ をサンプリング（SV モデルのディープパラメータ）
6. $\boldsymbol{\theta}$ をサンプリング（DSGE モデルのディープパラメータ）
7. 2 に戻る