

基于多目标优化的系泊系统设计模型

摘要

本文针对系泊系统的设计问题,通过对不同情况下系泊系统运行情况分析,建立系泊系统设计的多目标优化模型,设计遍历寻找最优设计方案算法,得到不同情况下系泊系统的最优设计。

第一问,首先对具体情况下的钢桶、钢管、锚链和浮标的值进行了求解。首先,先对系泊系统中的浮标、钢管、钢桶、重物球和锚链进行受力分析以及对钢管和钢桶的力矩平衡分析,得到多个等价关系。接着为了求出锚链的形状,寻找到用悬链线函数来表示锚链形状的方法,通过进一步对锚链进行分析,得到多个关于锚链的等价关系。然后利用换元法对得到的 22 个方程求解,最后分别带入风速为 12m/s 和 24m/s,得到两种情况下各指标的数值:风速为 12m/s: 浮标吃水深度: 0.6867m; 游动区域: 以锚为中心,半径最小为 8.8774m,最大为 13.0655m 的圆形区域。从上到下四节钢管的倾斜角度: 1.1447 度、1.1523 度、1.1601 度和 1.1679 度; 钢桶的倾斜角度: 1.1857 度; 锚链的形状是部分的悬链线,具体见图 11、12。风速为 24m/s: 浮标吃水深度: 0.6823m; 游动区域: 以锚为中心,半径为 17.9116m 的圆形。从上到下四节钢管的倾斜角度: 4.6394 度、4.6706 度、4.7021 度和 4.7341 度; 钢桶的倾斜角度: 4.8068 度,此时设备的工作效果较差; 锚链的形状是部分的悬链线,具体见图 13。

在问题一的假设下,首先利用第一问的方法对风速为 36m/s 的情况进行求解,结果为: 浮标吃水深度: 0.7055m; 游动区域: 由于锚链夹角过大导致锚被拖走,无法确定浮标游动区域。从上到下四节钢管的倾斜角度: 9.5796 度、9.6392 度、9.6992 度和 9.7606 度; 钢桶的倾斜角度: 9.8993 度,此时设备的工作效果较差。接着为了求解重物球合适的的质量范围,分别从钢桶倾斜角度、锚链倾斜角度和浮标不沉没的角度寻找约束条件建立重物球质量的约束模型。通过换元法和遍历求解的方法求解出重物球质量的范围为 2256kg 到 5500kg,其中当质量处于 2256kg 到 2800kg 之间时,锚链处于完全拉伸状态; 当质量大于 2800kg 小于 5500kg 时,锚链处于部分无拉力状态,即锚链下端接触海床。

在系泊系统实际设计时,水深、风速和水速会处于一个范围变化,所以需要针对不同的水深、风速和水速分别进行分析。风速和水速的方向不确定,只针对风速水速同向和反向进行讨论分析。风速水速同向的情况,先对系泊系统的每个部分进行受力和力矩平衡的分析,接着以吃水深度小、钢桶倾斜角度小、游动区域小为目标函数,以锚链型号、长度和中重物球质量为决策变量建立最优系泊系统设计的目标优化方程。然后利用遍历的方法对最优方案进行寻找,并求解出不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。风速水速反向的情况,同样进行受力和力矩平衡的分析,然后求解,得到不同情况下系泊系统的最优设计方案: 当水深 18m, 风速 36m/s, 表层水速 1.5m/s, 且与风速同向,系泊系统最优的设计方案是: 选用 27.7m 的 III 号锚链,重物球质量为 1998kg。其余结果见正文。

最后对重力球不同密度的灵敏度进行分析,验证了重物球的密度对系泊系统的设计影响很小。

关键字: 刚体力学方程组 多重搜索算法 悬链线 多目标优化

一、问题重述

随着近几年人们对环保的重视，对海洋的观测也在进一步加强，近浅海观测网的建设中的系泊系统设计便是其中重要的一环。系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。基于此完成以下问题：

1. 某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m，选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。
2. 在问题 1 的假设下，计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。
3. 由于潮汐等因素的影响，布放海域的实测水深介于 16m 20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，并分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二、问题分析

系泊系统的设计问题首先要求在给定设计参数下，求解钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。然后要根据不同风速和水速的数据，设计系泊系统的参数，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角尽可能小，且应该满足锚链左侧与海平面夹角 16 度。

2.1 基于力学分析的系泊系统参数计算

第一问要求计算出钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。当海面风速一定且海水静止时，钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域，与锚链线的方程、系泊系统各部分之间的受力平衡和力矩平衡的约束密切相关。首先可以分别对浮标、钢管、钢桶、重物球、锚链进行受力分析，便能得到关于这几个物体水平和垂直方向上的分力的等式，因为他们在稳定后的状态不再改变。接着应对可能倾斜的钢管和钢桶进行力矩的分析，得到多个等式。然后考虑表示锚链形状的函数表达式，同时寻找受力平衡的等式。最后结合得到的多个等式对多个未知量求解，便可以得到浮标吃水深度、游动区域，钢桶倾斜角度，锚链形状即为找到的函数表达式，游动区域则为以锚为中心，浮标游动的一个区域，显然是一个圆形区域，所以只需要根据之前求出的各个值来求出锚与浮标的水平距离即可。

2.2 海水静止时系泊系统的设计分析

首先应利用第一问求出的各项数据对风力等于 36m/s 时的情况进行求解，求出钢管的倾斜角度、钢桶的倾斜角度、浮标系统的吃水深度、锚链下端与海床的夹角。如果夹角大于 16 度，则游动区域无法确定；如果小于 16 度，则能正常计算。

为了重新确定重物球的质量，以满足钢桶倾斜角和锚链下端夹角的要求，考虑建立求解重物球质量范围的不等式约束模型。分别从钢桶倾斜角小于 5 度，锚链下端与海床的夹角小于 16 度两个角度来寻找重物球的质量范围的不等式。考虑将给定参数数据代

入解析式，利用 Matlab 求解方程组的数值解，能够得到受力平衡时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域

2.3 考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计

由于水深、流速和风速不确定，而又要求解不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标吃水深度和游动区域，应将这三个量先用字母表示，当作已知量。初步分析可以将其分为风速流速同向，风速流速反向和有一定夹角，由于有一定夹角的情况过于复杂，所以能先对同向和反向进行研究。对于每个情况，都可以使用与第一问相同的方法，对系泊系统的各个部分进行受力和力矩的分析，然后找到足够的等价关系。接着由系泊系统设计的要求，考虑建立相应的优化模型，使吃水深度、游动区域和钢桶倾斜角度尽量小。由于决策变量较多，考虑使用遍历的算法进行最优系泊系统设计方案的寻找。

三、模型假设

1. 假设不考虑锚链与海底平面的摩擦力，浮标在水面上漂浮时不倾斜；
2. 假设锚链是质量均匀的刚体，不考虑自身弹性伸长；
3. 假设重力加速度 $g = 9.8m/s^2$ ；
4. 不考虑锚链与海底平面的摩擦力。

四、变量说明

变量名称	含义
α	钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）
θ	钢管的倾斜角度
β	锚链末端与锚的连接处的切线方向与海床的夹角
h_2	浮标吃水深度
F_v	作用在连接点相互作用力竖直分量的大小
F_p	作用在连接点相互作用力水平分量的大小
W	水流力
M_u	支点上段水流力提供的力矩
M_d	支点下段水流力提供的力矩
F_{wind}	风对物体的作用力
F_{float}	浮力
R_{buoy}	浮标游动区域半径
v	风速
u_0	表层水流速度

五、模型的建立与求解

近浅海观测网的建设在现代化的海洋环保进程中有着不可替代的地位，一个优秀的系泊系统的设计能够使近海监测工作更加高效。

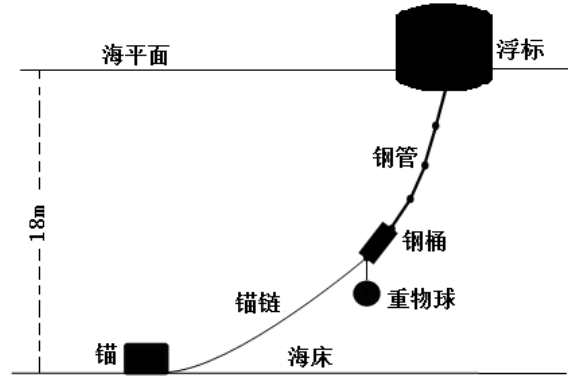


图 1 传输节点示意图

5.1 问题一

针对海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域的计算问题。首先对题中出现的浮标、钢管、钢桶和重物球进行物理上的受力分析，由于整个系统是稳定的，便可以通过水平方向和竖直方向上的受力平衡以及力矩平衡得到多个定量解析式。接着利用悬链线建立锚链的模型，将上述未知量进行求解即可得到相应的系泊系统参数。

5.1.1 锚链规格

电焊锚链是用符合要求的圆钢材料弯制并焊接而成，具有生产工艺先进、简单，成本低，质量好等优点。通过查找相关资料 [1]，计算出五种不同型号锚链的密度：

表 1 五种锚链型号和参数

型号	长度 /mm	单位长度质量/($kg \cdot m^{-1}$)	直径 /mm	密度 kg/m^3
I	105	7	34	7709.928
II	120	12.5	45	7859.503
III	150	19.5	56	7917.146
IV	180	28.12	68	7742.971
V	78	3.2	23	7702.016

5.1.2 浮标、钢管、钢桶、重物球、锚链分析

为了从系泊系统中各个物体的关系求解出钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域，首先需要对每一个物体进行受力分析，从上自下依次是浮标、钢管、钢桶、重物球、锚链和锚。

(1) 浮标

整个系泊系统的最上端是浮标系统。通过题目信息，浮标系统简化为底面直径 2m、高 2m 的圆柱体，且浮标的质量为 1000kg。由于风力不过浮标的重心，第一根钢管对浮标的作用力也不过重心，导致产生了使浮标顺时针旋转的力矩，但若考虑浮标的旋转，吃水深度和浮力的关系并不是线性关系，过于复杂，因此此处忽略顺时针力矩对浮标的影响。对浮标系统的受力分析如图：

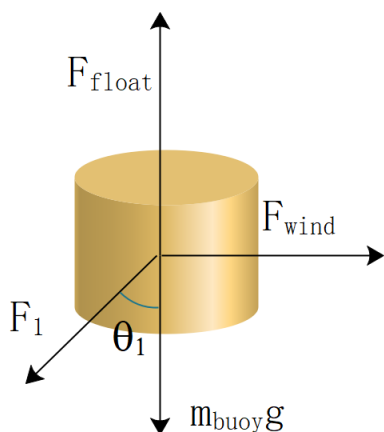


图 2 浮标系统的受力分析

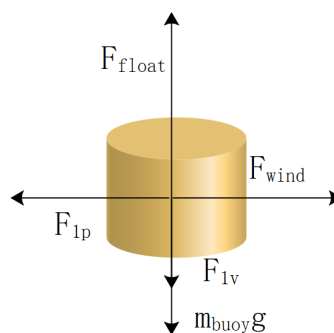


图 3 浮标系统受力的正交分解

当水流力为零时，共受到四个力作用，分别为 1 号钢管的拉力 F_1 ，自身重力 $m_{float}g$ ，水面风力 F_{wind} 以及自身浮力 F_{float} 。而且拉力 F_1 的对浮标作用可以等价于 F_1 正交分解到平行于海面和垂直于海面的两个力对浮标的作用，分别为 F_{1p} 和 F_{1v} ，则正交分解后的受力分析如图 3。这两个力大小分别为：

$$F_{1p} = F_1 \sin \theta_1$$

$$F_{1v} = F_1 \cos \theta_1$$

当不考虑浮标倾斜时，浮标吃水深度最终将稳定为长度 h_2 ，浮标在四个力的作用下保持平衡。浮标系统的浮力和风力的计算公式为：

$$F_{float} = \rho g \times h_2 \pi R^2$$

$$F_{wind} = 374 h_1 R v^2$$

其中， $h_1 + h_2 = h$ ， h_1 表示浮标系统水面上的高度， h_2 表示浮标系统水面下的高度， h 表示浮标系统的总高度，为 2m； ρ 代表海水密度； g 代表重力加速度；。

通过图 3，可以列出水平方向和竖直方向上的受力平衡的等式：

$$\begin{cases} F_{wind} = F_{1p} \\ m_{buoy}g + F_{1v} = F_{float} \\ h_1 + h_2 = h \end{cases} \quad (1)$$

(2) 钢管

浮标系统下方连接的是四根相同长度的钢管，钢管共 4 节，每节长度 1m，直径为 50mm，每节钢管的质量为 10kg。且钢管之间的连接部分可以自由活动，即铰链式的连接。四根钢管的受力分析情况大同小异，如图 4。

同样的，将钢管受到的拉力分别分解到水平和竖直方向上，如图??。各个结点水平方向分力的大小为 F_{ip} ，竖直方向分力的大小为 F_{iv} 。对钢管进行受力分析，钢管受力平衡，意味着水平方向力平衡，竖直方向力平衡，力矩平衡。

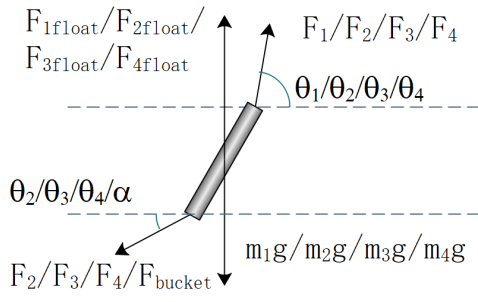


图 4 四根钢管受力分析

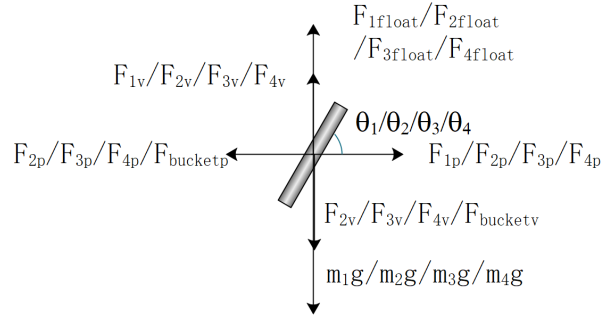


图 5 四根钢管受力正交分解

第一根钢管上端受浮标系统的拉力，沿钢管方向向上，下端受第二根钢管的拉力，沿钢管方向向下，竖直方向上还有向上的浮力和向下的重力。最终可以得到如下受力分析平衡等式：

$$\begin{cases} F_{1v} + F_{1float} = F_{2v} + m_1g \\ F_{2p} = F_{1p} \end{cases} \quad (2)$$

根据力矩定义： $M = L \times F = LF \sin \lambda$ 。其中 M 为力矩， F 为受力； L 为力臂； λ 为 F 与 L 的矢量夹角。对于钢管，选取钢管重心为支点，重力和浮力经过支点因此不提供力矩，两端结点沿钢管方向的分力不提供力矩，由于两端结点与支点等长，因此，两端结点沿垂直钢管方向的分力必须大小相等，方向相同。因此钢管的力矩平衡式如下：

$$F_{1v}L \cos \theta_1 - F_{1p}L \sin \theta_1 = F_{2v}L \cos \theta_1 - F_{2p}L \sin \theta_1 \quad (3)$$

第二三根钢管上下两端都受邻接钢管的力，以及竖直方向上的浮力和重力；第二根钢管的受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} F_{2v} + F_{2float} = F_{3v} + m_2g \\ F_{3p} = F_{2p} \\ F_{2v}L \cos \theta_2 - F_{2p}L \sin \theta_2 = F_{3p}L \sin \theta_2 - F_{3v}L \cos \theta_2 \end{cases} \quad (4)$$

同理，第三根钢管的受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} F_{3v} + F_{3float} = F_{4v} + m_3g \\ F_{4p} = F_{3p} \\ F_{3v}L \cos \theta_3 - F_{3p}L \sin \theta_3 = F_{4p}L \sin \theta_3 - F_{4v}L \cos \theta_3 \end{cases} \quad (5)$$

第四根钢管上端受钢管的拉力，下端受钢桶的拉力，竖直方向上与前面钢管情况相同。第四根钢管的受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} F_{4v} + F_{4float} = F_{bucketv} + m_4g \\ F_{bucketp} = F_{4p} \\ F_{4v}L \cos \theta_4 - F_{4p}L \sin \theta_4 = F_{bucketp}L \sin \theta_4 - F_{bucketv}L \cos \theta_4 \end{cases} \quad (6)$$

其中力臂长度 L 均相等，钢管与水平方向的夹角分别记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ；每一段钢管的重力为 $m_i g$ ；浮力为 F_{ifloat} 。

(3) 钢桶

四个钢管下面连接的是装着水声通讯系统的一个长 1m、外径 30cm 的密封圆柱形钢桶，设备和钢桶总质量为 100kg。钢桶在两端锚链和钢管的牵引下倾斜一定的角度。具体的受力分析情况如图 6。同样，钢桶也处于力矩平衡的状态，两端结点沿垂直钢桶方向的分力大小相等，方向相同。锚链的拉力可以等效为垂直于钢桶的一个力和平行于钢桶的一个力之和；第四根钢管对钢桶的拉力同样可以正交分解，如图 7。

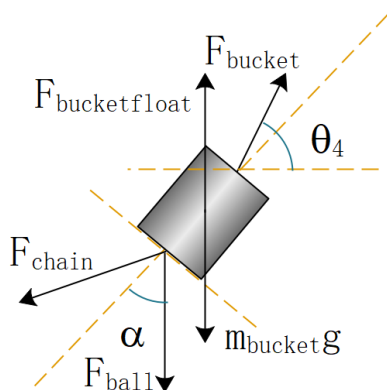


图 6 钢桶受力分析

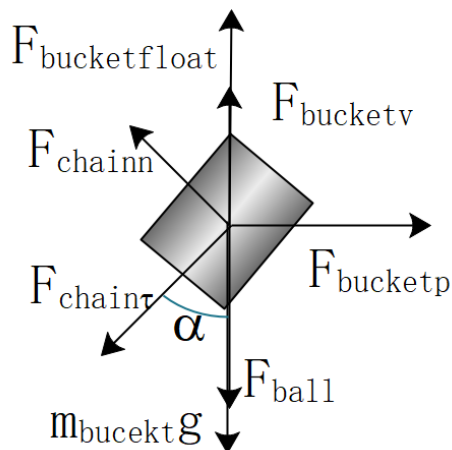


图 7 钢桶受力分解

钢桶竖直方向上受一个向上的浮力 $F_{bucketfloat}$ ，向下的重力 $m_{bucket}g$ ，重物球的拉力 F_{ball} ，第四根钢管给钢桶的拉力 F_{4p} 和 F_{4v} ，锚链给钢桶的拉力和 $F_{bucketn}$ 。相同的受力分析可以得到如下等式：

$$\begin{cases} F_{bucketp} = F_{bucketn} \cos \alpha + F_{bucketr} \sin \alpha \\ F_{bucketv} + F_{bucketfloat} + F_{bucketn} \sin \alpha = F_{ball} + m_{bucket}g + F_{bucketr} \cos \alpha \end{cases} \quad (7)$$

由于钢桶可以绕质心旋转，应对该整体进行力矩分析。为使该整体处于平衡状态，需要各个力达到力矩平衡。因为钢桶重力、浮力均可认为作用在质心，不产生力矩，而重物球重力、锚链的拉力、第四根钢管的拉力均会产生力矩。则能够得到力矩平衡的表达式：

$$F_{bucketv} \sin \alpha - F_{bucketp} \cos \alpha = F_{bucketn} - F_{ball} \sin \alpha \quad (8)$$

(4) 重物球

若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）超过 5 度时，设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度，钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。所以受力分析情况如图 8：

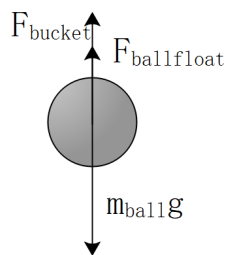


图 8 重物球的受力分析

重物球水平方向上没有力的作用，竖直方向上有向上的钢桶的拉力 F_{bucket} 和水的浮力 $F_{ballfloat}$ ，向下的是重物球的重力 $m_{ball}g$ ，可以得到如下等式：

$$F_{bucket} + F_{ballfloat} = m_{ball}g \quad (9)$$

5.1.3 锚链分析

由于题目要求分析得到锚链的形状，所以需要找到和锚链形状一致的函数表达式。通过查阅相关文献 [2][3]，得知锚链即是悬链线的一部分。悬链线是一种常用曲线，物理上用于描绘悬在水平两点间的因均匀引力作用下的软绳的形状，因此而得名。

5.1.3.1 锚链悬链线模型建立

首先考虑一根最低点受力为水平方向的悬链曲线，如图 9。建立坐标系，设悬链线函数为 $y(x)$ ，其最低点为 D，取 y 轴通过点 D 铅直向上，x 轴水平向右，点 D 到原点 O 的距离为一定值 a ($a \neq 0$ 待定)，悬链线在点 D 处的切线斜率为零，且悬链线上的每一个点受的力都沿切线方向。设 M(x,y) 为延长锚链上任一点，DM 的弧长为 s ，锚链的线密度为 ρ ，F 为 DM 段受 M 点后面锚链的拉力，H 为 D 点受到的 D 点左面锚链对 DM 的拉力。分析 DM 段锚链的受力情况则有竖直和水平方向的平衡：

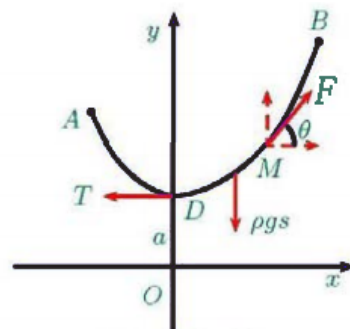


图 9 锚链延长得到的悬链线

$$\begin{cases} F \sin \theta = \rho g s \\ F \cos \theta = T \end{cases}$$

两式相除可得：

$$\tan \theta = \frac{\rho g s}{T}$$

又因为悬链线受的力总沿切线方向，所以悬链线的导数 $y' = \tan \theta = \frac{\rho g s}{T}$ 。根据弧长公式，可求得 DM 段锚链长：

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

将锚链长度 s 带入上式，得：

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \quad (10)$$

并且有 $y(0) = a, y'(0) = 0$ ，其中 $a = \frac{T}{\rho g}$ 。

为了将二阶方程化简成一阶方程求解，设 $y' = p(x)$ ，则 $y'' = p'$ 。于是 (10) 式可以

化为：

$$\begin{cases} p' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2} \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

通过分离变量求出 $p(x)$ 后，再由 $y' = p(x)$ 得到悬链线的函数表达式为：

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (11)$$

其中 $a = \frac{T}{\rho g}$ ， T 表示锚链受到水平力。

可以由悬链线的函数发现，悬链线的函数表达式只由水平力和线密度决定，因此，对于任意一段悬链线，只要悬链线的水平受力 H 和线密度 ρ 确定，那么悬链线的形状必然是 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 中的一段曲线，曲线的起点和终点由悬链线两端受力的方向决定。

5.1.3.2 锚链悬链线进一步分析

将系泊系统中锚链上端的物体看作一个整体，水平方向只受风力和锚链向左的拉力，两个力大小相等，方向相反。而锚链水平方向上只受上端整体的向左的拉力和向右的拉力，并且由于系统静止，易分析这两个力的大小和风力大小相等，所以：

$$T = F_{wind} = 374h_1 Rv^2$$

设锚链对应的悬链线的范围为 $[x_2, x_1]$ ，锚链与钢桶在连接点上的相互作用力大小为 $F_{bucket\tau}$ 和 $F_{bucketn}$ 。对于锚链连接钢桶的一端，钢桶的拉力沿 x_2 处的切线向上，此点的斜率等价于铁桶竖直方向和水平方向的比值，通过等价分析，可以得到：

$$y'(x_1) = \frac{F_{bucketv}}{F_{bucketp}} = \frac{F_{bucket\tau} \cos \alpha - F_{bucketn} \sin \alpha}{F_{bucketn} \cos \alpha + F_{bucket\tau} \sin \alpha} \quad (12)$$

锚链顶端到底端的竖直距离可以利用锚链的函数表达式，表示为 $y(x_1) - y(x_2)$ ，这个竖直距离可以用海水的深度减去锚链上端到海面的距离求解。便可以得：

$$y(x_1) - y(x_2) = H - [l_{bucket} \cos \alpha + l_{tube}(\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4)] \quad (13)$$

对锚链进行受力分析，锚链上端受到铁桶的拉力，下端受到锚的拉力，竖直方向上都有自己的重力。如图 10。

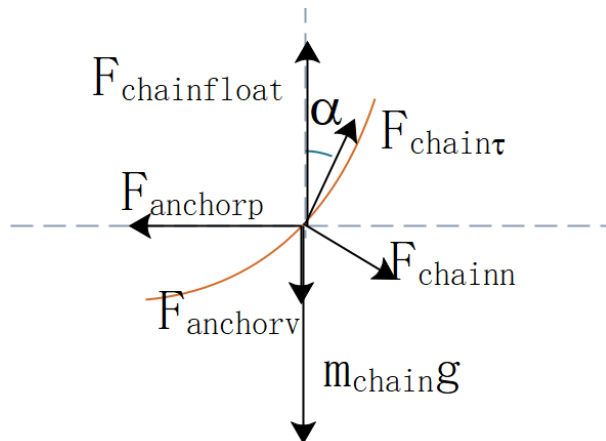


图 10 锚链整体的受力分析

锚链的质量可以由弧长公式和锚链密度计算出。且根据悬链线的性质，每个点在水平方向上的拉力分力大小相等，所以 $F_{\text{底}p} = T$ ，根据竖直方向上的受力平衡，可列出：

$$F_{\text{bucket}n} \sin \alpha + F_{\text{bucket}\tau} \cos \alpha = \rho g \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx + F_{\text{wind}} y'(x_2) \quad (14)$$

得到锚链对应的悬链线的函数表达式后，便能够求出锚链的长度，由于锚链可能有一部分在水平面上拖着，因此对于锚链有一部分拖着的情况，有方程 $x_2 = 0$ ，弦长小于 22.05m：

$$\int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} < 22.05 \quad (15)$$

对于没有拖着的，完全拉伸的情况，弦长即为 22.05，即：

$$\int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} = 22.05 \quad (16)$$

5.1.4 方程组汇总

通过对每一个物体的分析，共得到了 22 个刚体力学方程。其中 22 个方程分别是前文中的 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(10)(11)(12)(13)(14) 式，未知量的个数等于等式个数，能够对每一个未知数进行求解。通过求解这 22 个方程构成的刚体力学方程组可以得到钢桶的倾斜角度 α ，各节钢管的倾斜角度、锚链形状 $y(x)$ 、浮标的吃水深度 d 和一些中间变量。通过对前面所求出变量的组合，可以求出浮标的游动区域半径 R 等式的汇总具体见附录 B。

5.1.5 模型求解算法

由于 MATLAB 和 LINGO 均无法利用内置函数准确求解此方程组，于是设计了以下搜索算法来寻找准确解，算法如下，代码见附录 A。

Step1 根据前面分析得到的方程，首先假设浮标系统吃水深度 h_2 已知。

Step2 如果某个未知量能由 h_2 与其他的已知量推出，则可以认为是新的已知量。

Step3 继续使用新的已知量推导求解其他未知量，直到所有变量都用 h_2 和已知量表示。

Step4 由于假设 h_2 为已知量，所以会多出多个方程，将这些方程作为检验方程。

Step5 设置步长，将 h_2 从 0 到 2m 进行遍历，推出各变量对应的的数值。

Step6 将推出的变量的值以及 h_2 带入检验方程。

Step7 若检验方程成立，则此时各变量的值即为方程组的解；若不成立， h_2 增加一个步长，回到 Step5。

5.1.6 模型求解结果及分析

5.1.6.1 风速为 12m/s 时

风速为 12m/s，即 $v=12\text{m/s}$ 。带入方程组求解得到的 22 个未知数的具体值如下：

表 2 风速为 12m/s 时，未知量求解结果

h_1	h_2	F_{1p}	F_{1v}	F_{2p}	F_{2v}	F_{3p}	F_{3v}	F_{4p}	F_{4v}	$F_{bucketp}$
1.3133	0.6867	236.3976	11869.7655	236.3976	11791.4888	236.3976	11713.2122	236.3976	11634.9355	236.3976
$F_{bucketp}$	$F_{bucketn}$	$F_{bucket\rho}$	F_{ball}	x_1	x_2	α	$\frac{\pi}{2} - \theta_1$	$\frac{\pi}{2} - \theta_2$	$\frac{\pi}{2} - \theta_3$	$\frac{\pi}{2} - \theta_4$
11556.6588	214.3662	1066.9037	10224.4586	8.776	0	0.0207	1.5508	1.5507	1.5505	1.5504

(1) 浮标吃水深度、钢管倾斜角度、钢桶倾斜角度

浮标的吃水深度 h_2 已通过方程组求解，为 0.6867m。

倾斜角度为弧度制，可通过下面的公式转化成角度制：

$$deg = rad \times \frac{180}{\pi} \quad (17)$$

由于设的倾斜角度 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 是与水平方向的夹角，需要通过取补角得到，转换后钢管的倾斜角度从上到下依次为：1.1447 度、1.1523 度、1.1601 度和 1.1679 度；钢桶的倾斜角度 α 转换后为 1.1857 度。

(2) 锚链形状

为了得到锚链的形状，即对应悬链线的函数表达式，根据式 (11)，可知需要先求出风力 F_{wind} ：

$$F_{wind} = 374h_1 Rv^2$$

$$F_{wind} = 227.7849$$

则根据悬链线函数表达式 (11)，最终可以求出悬链线的函数表达式为：

$$y = 3.3205 \cosh \frac{x}{3.3205}$$

计算得出锚链上端对应的横坐标为 8.776，下端横坐标为 0，说明锚链没有完全拉伸。未受拉力的部分锚链可能完全伸直，也可能蜷在一起，两种情况分别如下图：

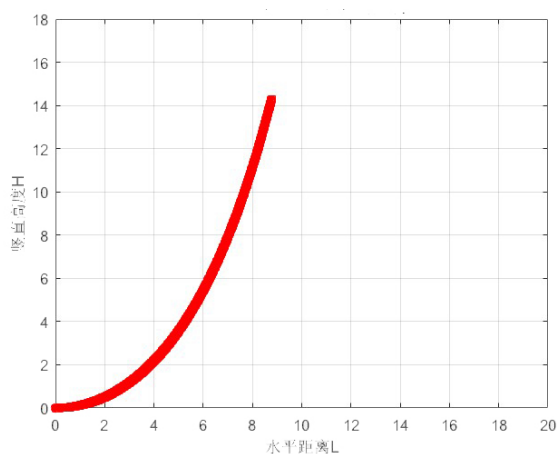


图 11 锚链完全伸直

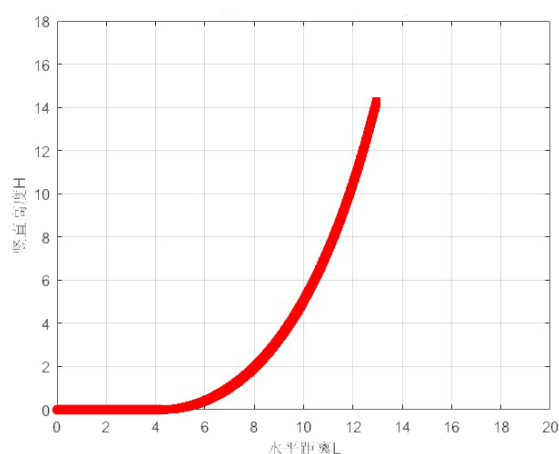


图 12 锚链部分蜷缩

(3) 浮标游动区域

浮标的游动区域为以锚为中心，以浮标稳定时距离锚的水平距离为半径的一个圆形区域。由于锚链未被完全拉伸，所以锚不可能被拖走。最终半径等于未受拉力的锚链部分的长度加上有拉力的锚链水平长度以及锚链上端钢桶、钢管在水平面上投影的长度。

$$R_{buoy} = [22.05 - \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 - y'^2} dx] + (x_1 - x_2) + (l_{bucket} \sin \alpha + l_{tube} \sum_{i=1}^4 \cos \theta_i) \quad (18)$$

考虑锚链未受拉力的部分可能存在多种状态，对应的浮动区域也不同：

- 当未受拉力的锚链完全伸直的时候，浮标的游动半径为 13.0655m。
- 当未受拉力的锚链蜷在一起时，浮标游动的半径为 8.8774m。

5.1.6.2 风速为 24m/s 时

风速为 24m/s，即 $v=24\text{m/s}$ 。带入方程组求解得到的 22 个未知数的具体值如下：

表 3 风速为 24m/s 时，未知量求解结果

h_1	h_2	F_{1p}	F_{1v}	F_{2p}	F_{2v}	F_{3p}	F_{3v}	F_{4p}	F_{4v}	$F_{bucketp}$
0.6823	1.3177	948.7663	11730.5663	948.7663	11652.2896	948.7663	11574.0129	948.7663	11495.7362	948.7663
$F_{bucketv}$	$F_{bucketn}$	$F_{bucketp}$	F_{ball}	x_1	x_2	α	$\frac{\pi}{2} - \theta_1$	$\frac{\pi}{2} - \theta_2$	$\frac{\pi}{2} - \theta_3$	$\frac{\pi}{2} - \theta_4$
11417.4595	868.0821	999.2968	10224.4586	18.7752	1.2742	0.0839	1.4898	1.4893	1.4887	1.4882

(1) 浮标吃水深度、钢管倾斜角度、钢桶倾斜角度

浮标的吃水深度 h_2 已通过方程组求解，为 0.6823m。

利用同样的方法通过取补角得到转换后钢管的倾斜角度，从上到下依次为：4.6394 度、4.6706 度、4.7021 度和 4.7341 度；钢桶的倾斜角度 α 转换后为 4.8068 度。

(2) 锚链形状

为了得到锚链的形状，先求出风力 F_{wind} ：

$$F_{wind} = 374h_1Rv^2 = 891.7081N$$

然后可以求出悬链线的函数表达式为：

$$y = 12.9986 \cosh \frac{x}{12.9986}$$

计算得出锚链上端对应的横坐标为 18.7752，下端横坐标为 1.2742，说明锚链完全拉伸，如下图：

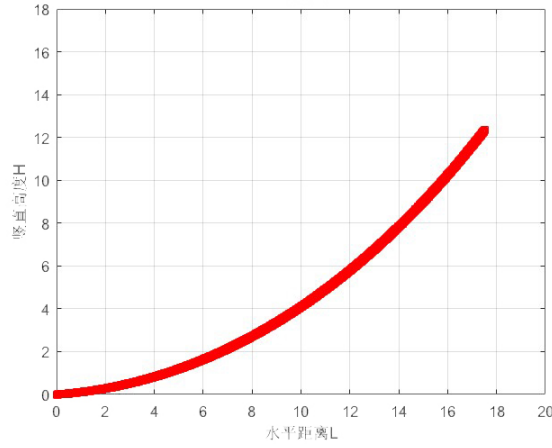


图 13 锚链形状

(3) 浮标游动区域

锚链在当前情况下没有不受拉力的部分，则首先需要考虑锚是否被拖走。锚与锚链连接部分的夹角 β 即为悬链线函数 x_2 处的切线与横坐标的夹角：

$$y'(x_2) = 12.9986^2 \sinh \frac{x_2}{12.9986} = \tan \beta$$

$$\beta = \arctan 12.9986^2 \sinh \frac{x_2}{12.9986}$$

于是可以求出 β ，化成角度制为 4.5720 度，小于 16 度，锚不会被拖走。

由于锚链完全拉伸，没有不受拉力的部分，所以游动范围的半径由锚链两端水平距离以及铁桶和浮标系统的水平距离组成。

$$R_{buoy} = (x_1 - x_2) + (l_{bucket} \sin \alpha + l_{tube} \sum_{i=1}^4 \cos \theta_i) \quad (19)$$

将相应的值带入上式，求出游动区域的半径为 17.9116m。

5.1.7 结果说明

通过对浮标、钢管、钢桶、重力球和锚链的分析，得到了在选用 II 型锚链的情况下，海面风速为 12m/s 和 24m/s 时，钢桶和钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

- 风速为 12m/s:
 - 浮标吃水深度：0.6867m；游动区域：以锚为中心，半径最小为 8.8774m，最大为 13.0655m 的圆形区域。
 - 从上到下四节钢管的倾斜角度：1.1447 度、1.1523 度、1.1601 度和 1.1679 度；
 - 钢桶的倾斜角度：1.1857 度；
 - 锚链的形状是部分的悬链线，具体见图 11、12。
- 风速为 24m/s:
 - 浮标吃水深度：0.6823m；游动区域：以锚为中心，半径为 17.9116m 的圆形。
 - 从上到下四节钢管的倾斜角度：4.6394 度、4.6706 度、4.7021 度和 4.7341 度；
 - 钢桶的倾斜角度：4.8068 度，此时设备的工作效果较差；
 - 锚链的形状是部分的悬链线，具体见图 13。

5.2 问题二

针对问题二，首先需要在第一问假设的前提下，利用第一问求出的结果计算出海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。然后将重物球的质量设为变量，重新对系泊系统各部分进行分析，将各个物体连接角度的限制，寻找找到相应的约束条件，之后将约束条件转化成关于重物球的不等式，便能够求解出重物球质量的范围。

5.2.1 海风为 36m/s 时相关信息的求解

为了求解海风为 36m/s 时的各项指标数据，同样利用第一问建立的对系泊系统分析得到相等关系，建立方程组利用 LINGO 求解，求解结果如下：

表 4 风速为 36m/s 时，未知量求解结果

h_1	h_2	F_{1p}	F_{1v}	F_{2p}	F_{2v}	F_{3p}	F_{3v}	F_{4p}	F_{4v}	$F_{bucketp}$
1.2945	0.7055	2097.0479	12464.4944	2097.0479	12386.2177	2097.0479	12307.9410	2097.0479	12229.6643	2097.0479
$F_{bucketv}$	$F_{bucketn}$	$F_{bucketp}$	F_{ball}	x_1	x_2	α	$\frac{\pi}{2} - \theta_1$	$\frac{\pi}{2} - \theta_2$	$\frac{\pi}{2} - \theta_3$	$\frac{\pi}{2} - \theta_4$
12151.3876	1780.9647	1992.8167	10224.4586	31.3118	13.1373	0.1728	1.4036	1.4026	1.4015	1.4004

(1) 浮标吃水深度、钢管倾斜角度、钢桶倾斜角度

通过上表，可以直接得到浮标吃水深度 h_2 : 0.7055m。同样利用式 (17)，将钢桶和钢管的倾斜角度由弧度制转变成角度制。钢桶的倾斜角度为 9.8993 度。钢管自上而下的倾斜角分别为：9.5796 度、9.6392 度、9.6996 度和 9.7606 度。

(2) 锚链形状

首先求出风力大小：

$$F_{wind} = 374h_1Rv^2 = 1221.966N$$

之后便能得出锚链对应的悬链线的函数：

$$y = 17.8129 \cosh \frac{x}{17.8129}$$

锚链下端对应横坐标为 13.1373，锚链上端对应横坐标为 31.3118，锚链完全拉伸，如下图：

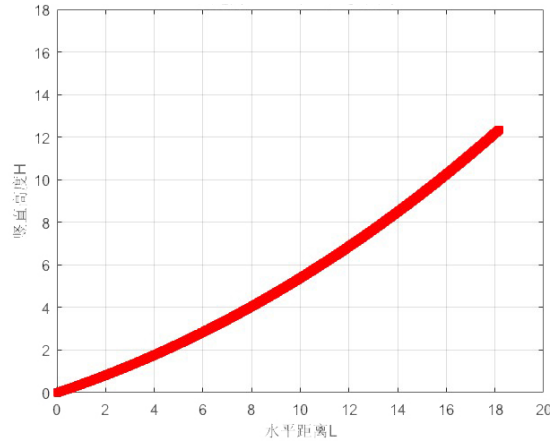


图 14 锚链形状

(3) 浮标游动区域

锚链完全拉伸，首先考虑锚是否移动。利用和式 (5.2.2) 相同的方法对锚与锚链连接部分的夹角 β 进行求解。得 $\beta = 20.8718^\circ$ ，大于 16° ，所以这个系泊系统在风速为 36m/s 的情况下，锚会被拖走，无法对浮标的游动区域进行求解。

5.2.2 重物球质量约束模型的建立

重物球的质量间接的影响了钢桶的倾斜角和锚链的倾斜角，为了让系泊系统正常工作，且不会被拖走，需要将钢桶和锚链的倾斜角度保持在一个范围内；同时，也要保证系泊系统上端的浮标系统能够保持在水面上，能够起到指示锚位置的作用。所以分别从钢桶倾斜角度、锚链倾斜角度和浮标不沉没的角度寻找约束条件建立重物球质量的约束模型。

(1) 钢桶倾斜角的约束

钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度 α （钢桶与竖直线的夹角）超过 5° 时，设备的工作效果较差。由第一问的方程组联立可以求出钢桶倾斜角 α ，分析由于重力球的质量 m 的改变，使得方程组方程的形式不变，但钢桶左侧受力的大小发生变化，从而引起刚体力学的 22 个方程的求解结果发生改变，因而钢桶的倾斜角由于受到钢桶受力平衡和力矩平衡方程所影响，也同样发生变化。

按照问题 1 假设，锚链长度和型号、水深及海水密度均已知。因此当重物球质量 m 确定时，相关方程中各参数和结果均已确定， α 仅受重物球质量 m 影响。

所以钢桶的倾斜角度的约束可以表示为：

$$\alpha \leq 5^\circ \quad (20)$$

(2) 锚链在锚点与海平面夹角的约束

为了使沉于海床上的锚保持原始的位置不发生移动，锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角 β 不超过 16° 。如果夹角 β 大于 16° ，锚会被锚链拖行，导致钢桶节点移位，严重甚至导致系泊系统丢失。于是可得到约束条件：

$$\beta \leq 16^\circ$$

根据锚链对应的悬链线曲线方程可以求出夹角 β ，方法同第一问求解游动区域时计算 β ：

$$y'(x_2) = 17.8129^2 \sinh \frac{x_2}{17.8129} = \tan \beta$$

$$\beta = \arctan 17.8129^2 \sinh \frac{x_2}{17.8129}$$

综上，锚链在锚点与海平面夹角的约束为：

$$\arctan 17.8129^2 \sinh \frac{x_2}{17.8129} \leq 16^\circ \quad (21)$$

(3) 浮标不沉水的约束

浮标系统近似为圆柱状，为了能有效监测传输节点的位置，需要保持浮标漂浮在水面上，即浮标系统的吃水深度 h_2 要小于浮标系统的高度 2m。 h_2 处于方程中，不能独立求解。由优化目标一中的分析可知由于重力球质量 m 的改变，钢桶倾斜角度改变，刚体力学方程组求解的四根钢管倾斜角度也发生改变，第四根钢管倾斜角度的改变会使得浮标竖直方向受力发生改变，即浮标浮力发生改变，故浮标的吃水深度发生改变。故这时浮标吃水深度的变化也完全取决于重物球质量的变化。

同样利用问题 1 提供的数据，当重物球质量确定式，各参数和结果均可以确定，故吃水深度 h_2 仅受重物球质量 m 影响。该约束可以表示为：

$$h_2 \leq 2 \quad (22)$$

5.2.3 模型求解算法

(1) 算法分析

为了求解出重物球的质量范围，可以利用遍历的方法寻找符合条件的结果。根据前面的计算，当海面风速为 36m/s 且重物球的质量为 1200kg/s，锚链的倾斜角度过大，导致锚被拖走，所以需要加大重物球的质量以达到系泊系统正常工作的需求。通过从 1200 开始遍历寻找符合情况的重物球质量范围，直到浮标恰好沉入水中为止。具体代码见附录 C。

(2) 算法步骤

Step1 设置遍历初始值（重物球质量）为 $m=1200$ ，步长为 1。

Step2 将当前重物球的质量 m 带入第一问的求解算法中，得到钢桶的倾斜角 θ 和锚链的倾斜角 β ，以及吃水深度 h_2 。

Step3 判断钢桶的倾斜角度是否满足不超过 5 度，如果满足，继续下一步判断；如果不满足，步长加 1，回到 Step2。

Step4 判断锚链的夹角是否满足不超过 16 度，如果满足，则储存此组数据结果，记录重物球质量；否则，步长加 1，回到 Step2。

Step5 判断浮标系统吃水深度 h_2 是否不超过 2，如果 $h_2 < 2$ ，回到 Step2；否则结束循环。

5.2.4 模型求解结果及分析

首先利用 MATLAB 绘制了重物球与每个约束条件的变化情况，分析三个约束条件的灵敏性，如图 (15)(16)(17)。

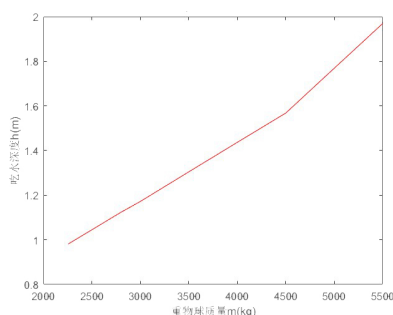


图 15 吃水深度

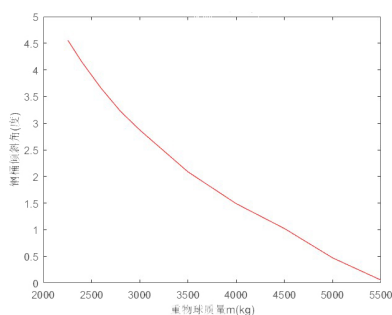


图 16 钢桶倾斜角

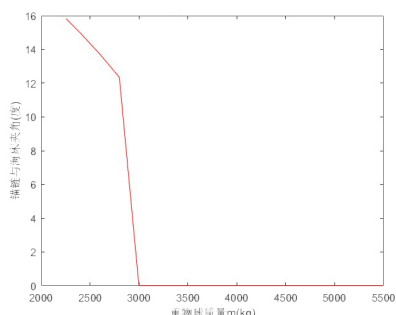


图 17 锚链倾斜角

通过观察三个因素随着重物球质量的增加而变化的情况，可以知道：浮标系统吃水深度与重物球质量成正比，并在重物球质量达到 5500kg 时完全浸入水中；钢桶倾斜角与重物球的质量呈反比，随着重物球质量增大，钢桶倾斜角逐渐减小，在重物球达到 5500kg 时倾斜角度趋近于 0；锚链的夹角随着重物球质量的增加而减小，在重物球质量接近 3000kg 时，锚链夹角急速变小，在 3000kg 之后时夹角都为 0，说明锚链下端已经接触海床。

通过遍历算法以及上面的分析，综合找到了符合条件的重物球质量范围如下：

表 5 重物球质量范围

	最小质量	最大质量
完全拉伸阶段	2256kg	2800kg
不完全拉伸阶段	2800kg	5500kg

其中完全拉伸阶段指锚链各部分皆受力，且 $\beta > 0$ ；不完全拉伸阶段指锚链下端有部分接触海床，不受拉力，锚链的倾斜夹角为 0。

其中锚链完全拉伸和不完全拉伸时候的形状，重物球为 2256kg 时和 5500kg 时对应锚链的形状如图 (18)(19)，其余情况形状见附录 D。

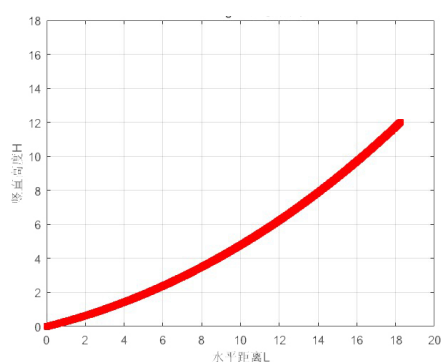


图 18 重物球为 2256kg 时锚链形状

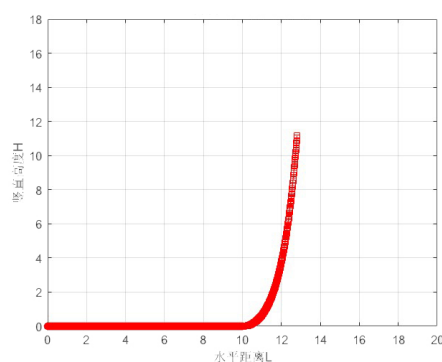


图 19 重物球为 5500kg 时锚链形状

5.2.5 结果说明

通过与第一问相同的方法，计算出海风为 36m/s 时，钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的游动区域如下：

- 浮标吃水深度：0.7055m；游动区域：由于锚链夹角过大导致锚被拖走，无法确定浮标游动区域。

- 从上到下四节钢管的倾斜角度：9.5796 度、9.6392 度、9.6992 度和 9.7606 度；
- 钢桶的倾斜角度：9.8993 度，此时设备的工作效果较差。

重物球质量的范围为 2256kg 到 5500kg，其中当质量处于 2256kg 到 2800kg 之间时，锚链处于完全拉伸状态；当质量大于 2800kg 小于 5500kg 时，锚链处于部分无拉力状态，即锚链下端接触海床。

5.3 问题三

本问针对不同水深、不同海水速度、不同风速的情况下设计最优系泊系统的问题，对典型的水流方向和风向相同相反两种情况分别进行了定量分析，对系泊系统的各部分进行重新的分析，寻找等价关系，建立最优系泊系统设计的目标优化方程。然后利用遍历的方法对最优方案进行寻找，并求解出不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

为了方便求解水深、水速和风速不同的各个情况时钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域，将水深、水面水速和风速分别设为 H 、 u 和 v 。由题可知： $H \in [16, 20]$ ， $u_0 \in [0, 1.5]$ ， $v \in [0, 36]$ 。

水流方向和风向共同决定了系泊系统的运动情况，主要分为：水流方向和风向相同、相反和呈一定夹角。本文主要针对前两种情况进行了讨论。

模型准备：海水不同层流速度

通过查阅相关文献 [4]，发现水流的速度在不同深度是不同的，水流速度和高度的关系如下：

$$u = \frac{gJ}{\nu} \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right)$$

其中， $\frac{gJ}{\nu}$ 表示一个系数，设为 k ， y 表示从海床到当前水层的高度。

当 $y = H$ 时， u 等于水面速度 u_0 ，于是便可以解出系数 $\frac{gJ}{\nu}$ 的值：

$$u = \frac{gJ}{\nu} \left(H^2 - \frac{H^2}{2} \right)$$

$$k = \frac{gJ}{\nu} = \frac{2u_0}{H^2}$$

所以不同层海水流速的计算公式为：

$$u = k \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (23)$$

5.3.1 水流方向和风向相同

5.3.1.1 受力分析

水流方向和风向相同的情况相对于第一问只多出了水流对系泊系统的一个力。首先对系泊系统的组成进行受力分析，因为锚链单位体积较小，且由于它是镂空的形状，所以忽略水流对其的影响。水力对重力球的影响也微乎其微，故省略。

首先，设从海床到浮标下端的高度为 H_1 ，到第一段钢管下端的高度为 H_2 ，到第二段钢管下端的高度为 H_3 ，到第三段钢管下端的高度为 H_4 ，到第四段钢管下端的高度为 H_5 ，到钢桶下端的高度为 H_6 。

分别对浮标系统、四根钢管和钢桶进行受力分析：

(1) 浮标系统的分析

由于水流方向和风向相同，根据第一问，可以相似分析得到受力分析图以及对应的等式。

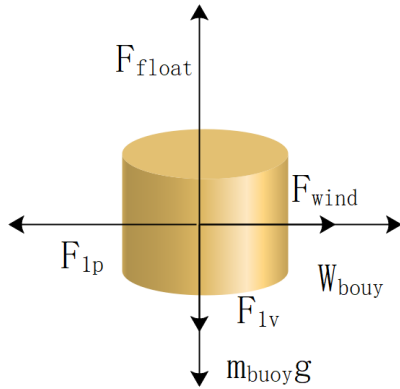


图 20 浮标受力分解

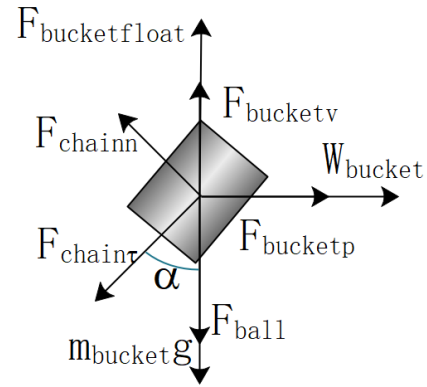


图 21 钢桶受力分解

$$\begin{cases} F_{wind} + W_{buoy} = F_{1p} \\ m_{buoy}g + F_{1v} = F_{float} \\ h_1 + h_2 = h \end{cases} \quad (24)$$

其中 W_{buoy} 表示水流对浮标的力。由于深度不同，水的速度也不同，利用微元的方法计算浮标系统受到的近海水流力 W_{buoy} 。

截取一段长度为 dy 浮标，对应的高度为 y 。根据题干中给出的近海水流力的计算公式，可以计算它受到的水流力 dW_{buoy} ：

$$dW_{buoy} = 374 \times (dy \cdot d_{buoy}) \times [k(Hy - \frac{y^2}{2})]^2 \quad (25)$$

其中， d_{buoy} 表示浮标的底面直径，对其两边进行积分，上界为海面高度 H ，下界为浮标下端离海床的高度 H_1 ：

$$W_{buoy} = \int_{H_1}^H 374 d_{buoy} [k(Hy - \frac{y^2}{2})]^2 dy \quad (26)$$

(2) 钢管分析

同样先对钢管进行加入水流力后的受力和力矩分析，可以得到如下等式：

$$\begin{cases} F_{1v} + F_{1float} = F_{2v} + m_1g \\ F_{2p} = F_{1p} + W_1 \\ \frac{l_{tube}}{2} F_{1v} \cos \theta_1 + \frac{l_{tube}}{2} F_{2v} \cos \theta_1 + M_{1d} = \frac{l_{tube}}{2} F_{1p} \sin \theta_1 + \frac{l_{tube}}{2} F_{2p} \sin \theta_1 + M_{1u} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} F_{2v} + F_{2float} = F_{3v} + m_2g \\ F_{3p} = F_{2p} + W_2 \\ \frac{l_{tube}}{2}F_{2p} \sin \theta_2 + \frac{l_{tube}}{2}F_{3p} \sin \theta_2 + M_{2u} = \frac{l_{tube}}{2}F_{2v} \cos \theta_2 + \frac{l_{tube}}{2}F_{3v} \cos \theta_2 + M_{2d} \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} F_{3v} + F_{3float} = F_{4v} + m_3g \\ F_{4p} = F_{3p} + W_3 \\ \frac{l_{tube}}{2}F_{3p} \sin \theta_3 + \frac{l_{tube}}{2}F_{4p} \sin \theta_3 + M_{3u} = \frac{l_{tube}}{2}F_{3v} \cos \theta_3 + \frac{l_{tube}}{2}F_{4v} \cos \theta_3 + M_{3d} \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} F_{4v} + F_{4float} = F_{bucketv} + m_4g \\ F_{bucketp} = F_{4p} + W_4 \\ \frac{l_{tube}}{2}F_{4p} \sin \theta_4 + \frac{l_{tube}}{2}F_{bucketp} \sin \theta_4 + M_{4u} = \frac{l_{tube}}{2}F_{4v} \cos \theta_4 + \frac{l_{tube}}{2}F_{bucketv} \cos \theta_4 + M_{4d} \end{cases} \quad (30)$$

其中 M_u 表示对应钢管上半部分的水流力提供的力矩， M_d 表示对应钢管下半部分的水流力提供的力矩。分别对钢管的上半段和下半段进行力矩分析，同样利用微元的方法，计算水流力提供的力矩。

在计算水流力时，由于钢管倾斜会导致钢管在水流速度法平面的面积因底面倾斜而增大，但由于直径相对于长度来说很小，可以省略，所以钢管在水流速度法平面的面积为：

$$S = l_{tube} \sin \theta \times d_{tube}$$

求出整段钢管以及上下两半段的水流力为：

$$W_1 = \int_{H_2}^{H_1} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 dy \quad (31)$$

$$M_{1u} = \int_{\frac{H_1+H_2}{2}}^{H_1} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (y - \frac{H_1+H_2}{2}) dy \quad (32)$$

$$M_{1d} = \int_{H_2}^{\frac{H_1+H_2}{2}} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (\frac{H_1+H_2}{2} - y) dy \quad (33)$$

$$W_2 = \int_{H_3}^{H_2} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 dy \quad (34)$$

$$M_{2u} = \int_{\frac{H_2+H_3}{2}}^{H_2} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (y - \frac{H_2+H_3}{2}) dy \quad (35)$$

$$M_{2d} = \int_{H_3}^{\frac{H_2+H_3}{2}} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (\frac{H_2+H_3}{2} - y) dy \quad (36)$$

$$W_3 = \int_{H_4}^{H_3} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 dy \quad (37)$$

$$M_{3u} = \int_{\frac{H_3+H_4}{2}}^{H_3} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (y - \frac{H_3+H_4}{2}) dy \quad (38)$$

$$M_{3d} = \int_{H_4}^{\frac{H_3+H_4}{2}} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (\frac{H_3+H_4}{2} - y) dy \quad (39)$$

$$W_4 = \int_{H_5}^{H_4} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 dy \quad (40)$$

$$M_{4u} = \int_{\frac{H_4+H_5}{2}}^{H_4} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (y - \frac{H_4+H_5}{2}) dy \quad (41)$$

$$M_{4d} = \int_{H_5}^{\frac{H_4+H_5}{2}} 374d_{tube} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (\frac{H_4+H_5}{2} - y) dy \quad (42)$$

(3) 钢桶分析

利用同样的方法对钢桶进行分析。首先，对钢桶进行受力和力矩分析，可以列出以下等式：

$$\begin{cases} F_{bucketp} + W_{bucket} = F_{bucketn} \cos \alpha + F_{bucket\tau} \sin \alpha \\ F_{bucketv} + F_{bucketfloat} + F_{bucketn} \sin \alpha = F_{ball} + m_{bucket}g + F_{bucket\tau} \cos \alpha \\ \frac{l_{tube}}{2} F_{bucketp} \cos \alpha + \frac{l_{tube}}{2} F_{bucketn} + M_{bucketu} = \frac{l_{tube}}{2} F_{bucketv} \sin \alpha + \frac{l_{tube}}{2} F_{ball} \sin \alpha + M_{bucketd} \end{cases} \quad (43)$$

钢桶的底面半径相对于长度来说同样可以忽略，所以钢桶在水流速度法平面的面积为：

$$S = l_{bucket} \cos \alpha \times d_{bucket}$$

接着利用微元法计算铁桶的水流力：

$$W_{bucket} = \int_{H_5}^{H_6} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 dy \quad (44)$$

$$M_{bucketu} = \int_{\frac{H_5+H_6}{2}}^{H_5} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (y - \frac{H_5+H_6}{2}) dy \quad (45)$$

$$M_{bucketd} = \int_{H_5}^{\frac{H_5+H_6}{2}} 374d_{bucket} [k(Hy) - \frac{y^2}{2}]^2 (\frac{H_5+H_6}{2} - y) dy \quad (46)$$

5.3.1.2 系泊系统设计目标优化模型的建立

在对浮标、钢管和钢桶进行进一步分析后，便需要确定锚链的型号、长度和重物球的质量来设计系泊系统，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。以锚链型号、长度和重物球的质量为决策变量建立优化模型。

(1) 决策变量

此目标优化模型的决策变量就是设计系泊系统需要确定的变量：锚链型号、长度和重物球质量。而每种锚链型号的不同之处在线密度，可以用线密度代替锚链型号。所以决策变量为：锚链密度 ρ 、长度 l_{bucket} 和重物球的质量 m_{bucket} 。

(2) 优化目标

目标一：浮标吃水深度小

题目要求系泊系统的设计要使得浮标的吃水深度 h_2 尽可能小， h_2 处于力学方程组中、锚链单位长度的学方程中，分析由于重物球质量 m 、锚链密度 ρ_{anchor} 和锚链长度 l_{anchor} 的改变。当重物球质量 m 和锚链长度 l_{anchor} 确定时，各参数和结果均可通过力学式确定，故吃水深度仅受 m ， ρ_{anchor} 和 l_{anchor} 影响。所以优化目标为：

$$\min h_2(m, \rho, l_{anchor}) \quad (47)$$

目标二：浮标游动区域小

系泊系统的设计中同样要求浮标的游动区域要尽可能小，浮标的浮动区域表示为以锚为起点的最大半径为 R 的圆内，浮标的游动区域用其半径 R_{buoy} 来代表，根据式 (18)，可以分析知游动区域仅受重物球质量 m 、锚链密度 ρ_{anchor} 和锚链长度 l_{anchor} 影响，通过力学方程组联立可以求解。该优化目标可以表示为：

$$\min Z = [l_{bucket} - \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 - y'^2} dx] + (x_1 - x_2) + (l_{bucket} \sin \alpha + l_{tube} \sum_{i=1}^4 \cos \theta_i) \quad (48)$$

目标三：钢桶倾斜角度小

按题目所述，保证钢桶倾斜角度最小是系泊系统正常工作的重要条件。钢桶倾斜角度可由力学方程组联立求解得到，分析由于 ρ ， m 和 l_{anchor} 的改变，力学方程组形式完全不变，但是钢桶左侧受重物球力的大小发生变化， ρ 使得锚链曲线方程发生改变，锚链长度同样影响了锚链在竖直方向的投影长度，从而引起刚体力学方程组的求解结果发生改变，因而钢桶的倾斜角度由于受到钢桶受力平衡和力矩平衡方程所影响，也同样发生变化。钢桶的倾斜角度为 α ，所以目标函数为：

$$\min \alpha(m, \rho, l_{anchor}) \quad (49)$$

多目标转换为单目标

先对三个目标函数进行无量纲化处理，再采用线性加权法对三个目标函数进行归一化处理，将多目标函数化归为单目标函数：

$$\min \left[\frac{h_1 - h_{1min}}{h_{1max} - h_{1min}} \right]^2 + \left[\frac{Z - Z_{min}}{Z_{max} - Z_{min}} \right]^2 + \left[\frac{\alpha - \alpha_{min}}{\alpha_{max} - \alpha_{min}} \right]^2 \quad (50)$$

(3) 约束条件

为了设计出能够运行良好的系泊系统，需要满足系泊系统正常工作的条件：要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度；钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）不超过 5 度时；浮标能够浮在水面，而不是沉下水。所以三个约束条件同第二问的式 (20)(21)(22) 为：

$$\alpha \leq 5^\circ \quad (51)$$

$$\arctan\left(\frac{T}{\rho g}\right)^2 \sinh \frac{x_2}{\left(\frac{T}{\rho g}\right)} \leq 16^\circ \quad (52)$$

$$h_2 \leq 2 \quad (53)$$

其中, T 表示锚链受到的水平拉力, 它等于整个系泊系统受到的水流力以及风力之和:

$$T = F_{wind} + W_{buoy} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_{bucket}$$

5.3.1.3 模型求解算法

(1) 算法思想

要对不同情况下风速水速同向的情况进行分析, 只需要将具体的水深 H 、风速 F_{wind} 和表层水速 u_0 带入上面分析得到的多个式子, 最后进行优化求解。

(2) 算法步骤

Step1 遍历重物球质量, 锚链型号, 锚链长度;

Step2 在符合钢桶倾角范围内遍历 α , 然后根据 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 之间的的关系以及与 α 的关系缩小范围对 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 进行遍历;

Step3 若能找到符合检验方程的解, 则将次作为方程的解, 若没有符合检验方程的解, 则说明这种系泊系统设计不满足要求: 钢桶倾斜角 $< 5^\circ$, 锚链与海床夹角 $< 16^\circ$;

Step4 对于满足约束条件的所有解, 分别求钢桶倾斜角, 重物质量, 浮动距离最大最小值。之后分别消除量纲再相加求最优值, 即为最优设计方案。

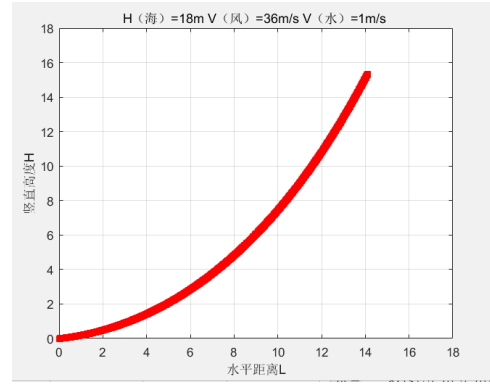
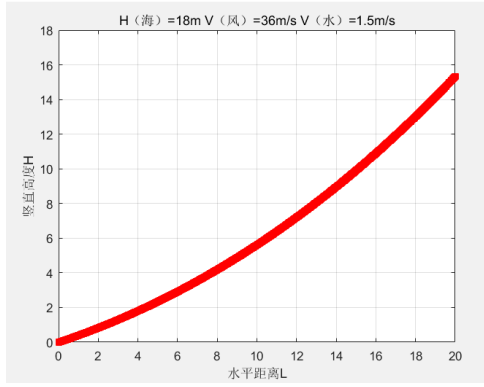
5.3.1.4 模型求解结果及分析

以五种不同的情况为例, 五种情况下水深、风速和水速各不相同。求解结果如下表:

表 6 风速水速同向五种具体情况求解结果

	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组
水深 H	18	18	16	16	20
风速 v	36	36	24	12	24
水速 u_0	1.5	1	1.5	0.5	1
重力球质量 m	1998	1921	1843	1350	1956
型号	III	II	III	II	II
锚链长度 l_{bucket}	27.7	26.9889	23.2167	22.0963	24.056
吃水深度 h_2	1.81	1.09	1.15	1.03	1.07
钢桶夹角 α	4.7773	4.8544	4.9953	3.5230	2.6108
钢管 1 夹角 $(90^\circ - \theta_1)$	3.1044	2.7408	2.5151	0.2343	1.2923
钢管 2 夹角 $(90^\circ - \theta_2)$	3.7619	3.0162	3.3745	0.7937	1.6595
钢管 3 夹角 $(90^\circ - \theta_3)$	4.2993	4.2396	4.7152	0.8240	2.0628
钢管 4 夹角 $(90^\circ - \theta_4)$	4.3205	4.9553	4.7725	0.9872	2.1868
锚链上端横坐标 x_1	32.9709	15.4004	28.4343	26.5643	16.3624
锚链下端横坐标 x_2	11.8434	1.2954	8.5421	3.5896	1.8454
游动半径 R_{buoy}	25.2015	24.5215	19.5646	18.4647	22.1255

五种不同情况下得出的结果, 钢桶夹角都小于 5° , 设备能够正常工作; 浮标的吃水深度都没有超过浮标高度。对应锚链的形状如下图 (第一组、第二组, 其他组见附录 E):



5.3.2 水流方向和风向相反

浮标漂移的方向会受到水流方向和风向的影响，所以当这两个方向相反时，可以分为两种情况：水流力大于风力以及水流力小于风力。需要分别进行讨论。

5.3.2.1 水流力大于风力

对于水流力大于风力的情况，浮标先向水流的方向移动，最后静止或者沿着水流方向被拖走。假设最后趋于静止，则对浮标的受力分析如下：

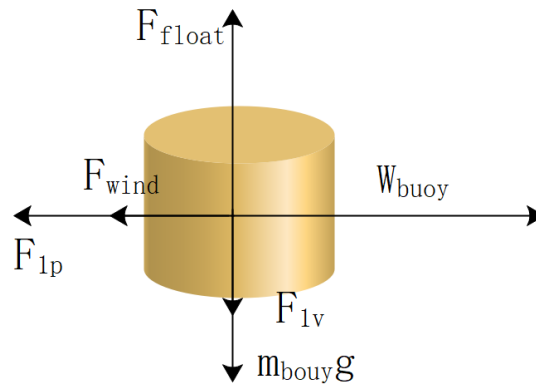


图 22 浮标受力分析图

于是便可以得到如下等价关系：

$$\begin{cases} F_{wind} + F_{1p} = W_{buoy} \\ m_{buoy}g + F_{1v} = F_{float} \\ h_1 + h_2 = h \end{cases} \quad (54)$$

浮标系统静止时，水平方向上水流力的大小与风力和第一根钢管水平方向上的分力之和相等，方向相反。

对于系泊系统的其他部分的分析，与水流方向和风向相同时的情况一致，只需要以相同的方式求解即可，不再作赘述。

5.3.2.2 水流力小于风力

当水流力小于风力时，浮标向风力方向移动，最后静止或者沿着风的方向被拖走。假设在没拖走的情况下，对其进行受力分析如图：

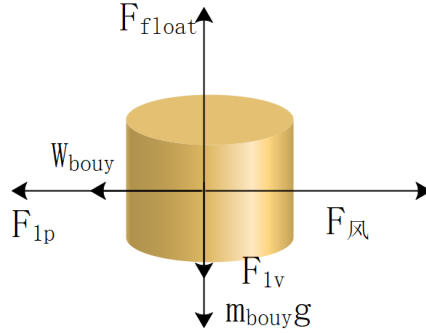


图 23 浮标受力分析图

根据受力分析图，可以得到如下等价关系：

$$\begin{cases} W_{buoy} + F_{1p} = F_{wind} \\ m_{buoy}g + F_{1v} = F_{float} \\ h_1 + h_2 = h \end{cases} \quad (55)$$

浮标系统静止时，水平方向上水流力和第一根钢管水平方向上的分力之和与风力的大小相等，方向相反。

对于系泊系统其他部分的分析大致与风速水速同向的情况相同，唯一不同的是，水流力的方向和水流力提供的力矩的方向相反。

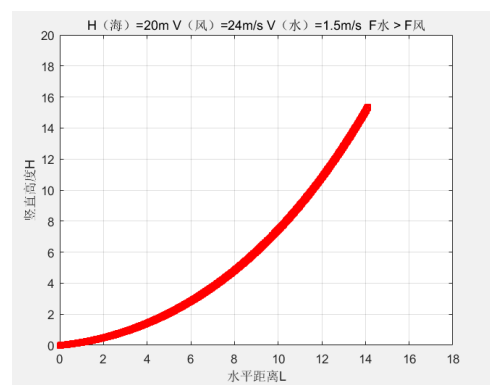
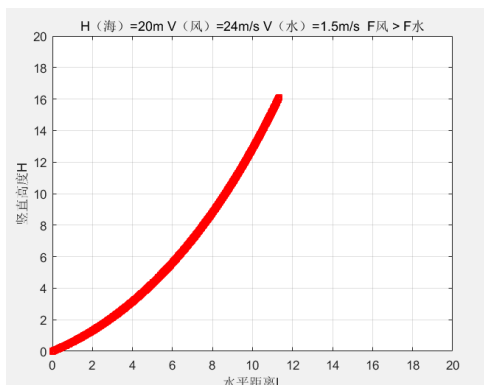
5.3.2.3 风速水速反向求解结果

利用同样的方法对优化模型进行求解，以两个风速水速反向的情况为例，一个风力大于表层水流力，另一个风力小于表层水流力。得到的结果如下：

表 7 风速水速反向两种情况求解结果

	H	v	u_0	风力 F_{wind}	水流力 W_{float}	m_0	型号	l_{bucket}	h_2	α	$90 - \theta_1$	$90 - \theta_2$	$90 - \theta_3$	$90 - \theta_4$	x_1	x_2	R_{buoy}
第六组	20	24	1.5	903.6	1631.505	2058	3	20.0686	0.7450	3.9179	3.1042	3.8322	4.3591	4.3877	25.1566	4.8434	16.6451
第七组	18	36	1	1909.332	777.1467	1945	2	26.9889	0.8214	4.9756	2.7641	3.1766	3.7439	4.3566	15.4004	1.2954	18.5655

表中第一种情况风力小于水流力，符合第一种情况，求解出的最优系泊系统设计方案中，钢桶夹角小于 5 度，浮标吃水深度为 0.7m，没超过浮标高度，此系泊系统能正常运行；表中的第二种情况属于风力大于水流力的情况，求解出的钢桶夹角小于 5 度，吃水深度小于 1m，没有超过浮标高度，此系泊系统能正常运行。两种情况对应的锚链形状如下：



5.3.3 结果说明

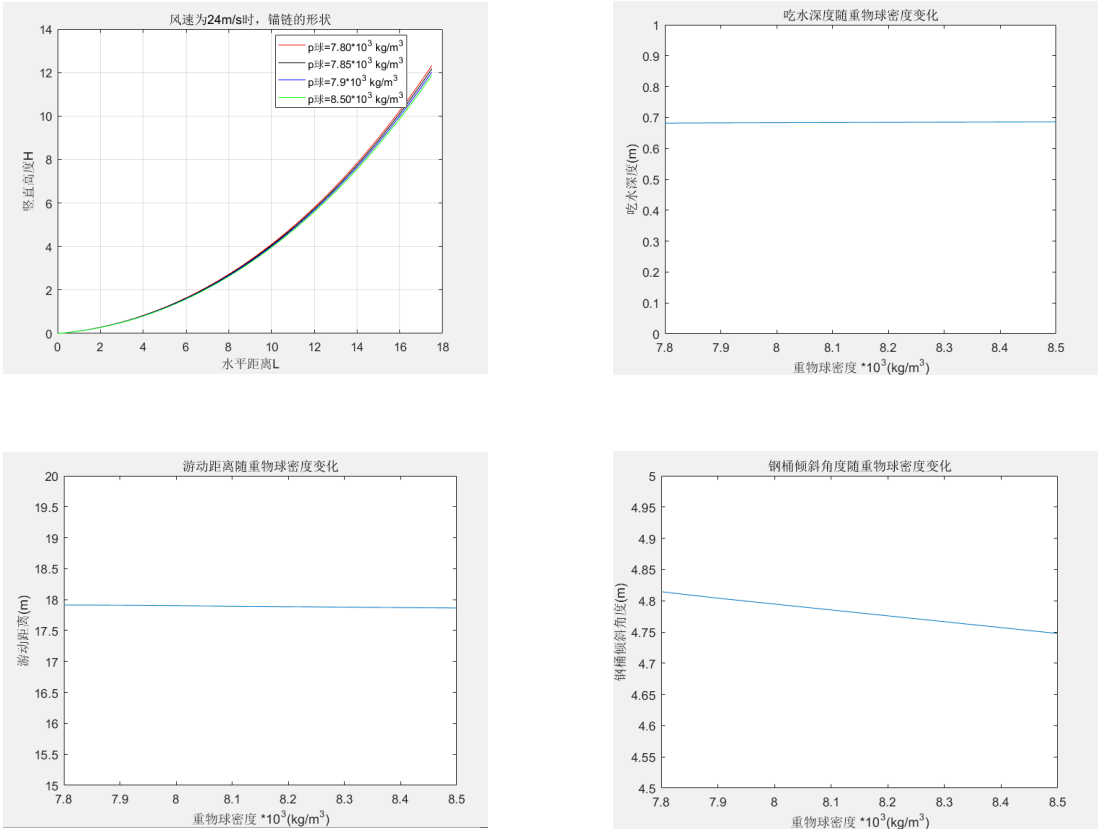
本问主要研究了风速水速同向和反向两种特殊情况，分别针对同向举了五个例子，反向的举了两个例子，对应的系泊系统最优设计结果如下：

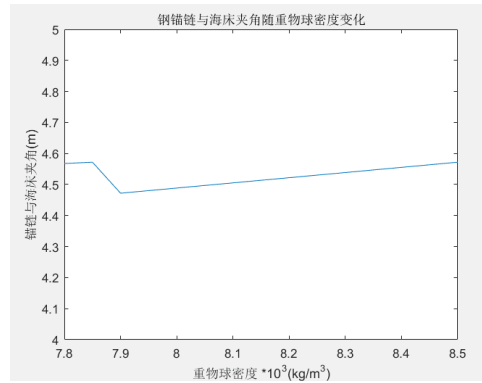
表 8 系泊系统不同情况下的最优设计方案

	同向					反向	
	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组	第六组	第七组
H	18	18	16	16	20	20	18
v	36	36	24	12	24	24	36
u_0	1.5	1	1.5	0.5	1	1.5	1
型号	III	II	III	II	II	III	II
l_{bucket}	27.7	26.9889	23.2167	22.0963	24.056	20.0686	26.9889
m	1998	1921	1843	1350	1956	2058	1945

5.4 灵敏度分析

在问题一风速为 24m/s 的背景下，针对重物球的密度，我们分别取了 $7.8 \times 10^3 kg/m^3$ 、 $7.85 \times 10^3 kg/m^3$ 、 $7.9 \times 10^3 kg/m^3$ 、 $8.5 \times 10^3 kg/m^3$ ，求得这几种密度下浮标吃水深度、钢桶倾斜角、锚链与海床夹角、浮标游动距离以及锚链的形状。





发现结果都很相近，说明重物球的密度对结果影响很小，因此对于所有问题，重物球密度均取 $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

六、模型的评价及改进

6.1 模型优点

1. 由于数学软件求解不准确，因此使用遍历的方法较为准确对方程进行求解；
2. 由于数学软件求解不准确，因此使用遍历的方法较为准确对方程进行求解。

6.2 模型的缺点

1. 忽略浮标由于力矩平衡的原因导致的旋转；
2. 由于重物球的绳长未知，不能确定重物球深度，不能计算水流力对重物球的影响；
3. 由于锚链的面积未知，因此未考虑水流力对锚链的影响；
4. 未考虑风向和水流方向不平行的情况。

6.3 模型的改进

考虑风向和水流方向不同的情况，设出钢桶和各钢管的与 x 轴正向的夹角，以及钢桶和各钢管的与 x-y 平面的高度角，在对系泊系统进行空间力系平衡分析，对于每一个受力平衡的物体，都有 x 方向力平衡、y 方向力平衡、z 方向力平衡、x 轴力矩平衡、y 轴力矩平衡、z 轴力矩平衡，列出方程，然后考虑风向和水流方向不同的情况下的系泊系统的设计。

参考文献

- [1] 百度百科. 圆钢规格. <https://baike.baidu.com/item/%E5%9C%86%E9%92%A2>. Sept 1, 2018.
- [2] 维基百科. 悬链线. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%82%AC%E9%93%BE%E7%BA%BF>. Aug 4, 2018.
- [3] 邱为钢. 悬链线的几何特征. 物理与工程, (4):28–29, 2015.
- [4] 何建京赵振兴. 水力学. 清华大学出版社, 2005.

附录清单

编号	名称
A	求解方程组（风速为 12m/s 时）的源代码
B	等式汇总
C	确定重物球质量的 matlab 代码
D	不同重物球质量对应的锚链形状图
E	第三组到第五组锚链形状

附录 A matlab 遍历搜索求解方程组的源代码

```

clc,clear
%遍历
%参数
H=18;%水深
k_feng=0.625;%风力系数
v_feng=12;%风速
g=9.8;%重力加速度
p=1.025*10^3;%水的密度
m_biao=1000;%浮标的质量
h_biao=2;%浮标的高
d_biao=2;%浮标的直径
m_guan=10;%钢管的质量
L_guan=1;%钢管的长度
d_guan=0.05;%钢管的直径
m_tong=100;%桶的质量
L_tong=1;%桶的长度
d_tong=0.3;%桶的直径
m_qiu=1200;%球的质量
L_mao=22.05;%锚链长度
p_mao=7;%锚链线密度
p_qiu=7.8*10^3;%重力球的密度
p_lian=7.709*10^3;%锚链的密度
g_mao=g*(1-p/p_lian);%锚链的等效重力加速度
F_qiu=p*g*m_qiu/p_qiu;%重力球的浮力
%物理量
% h1;%浮标吃水深度
% F_feng=k_feng*d_biao*h2*v_feng^2;%风力
G_biao=m_biao*g;%浮标的重力
% F_biao=p*g*pi*(d_biao/2)^2*h1;%浮标的浮力
G_guan=m_guan*g;%钢管的重力
F_guan=p*g*pi*(d_guan/2)^2*L_guan;%钢管的浮力
G_tong=m_tong*g;%钢桶的重力
F_tong=p*g*pi*(d_tong/2)^2*L_tong;%钢桶的浮力
G_qiu=m_qiu*g;%球的重力

%遍历求解
k=0.000001;%步长
min=inf;

for h1=0:k:h_biao
h2=h_biao-h1;%漏出水面的高度%f3
F_feng=k_feng*d_biao*h2*v_feng^2;%风力
f1_ping=F_feng;%f1
F_biao=p*g*pi*(d_biao/2)^2*h1;%浮标的浮力
f1_chui=F_biao-G_biao;%f2
f2_chui=f1_chui+F_guan-G_guan;%f4
f2_ping=f1_ping;%f5
theta1=atan((f1_chui+f2_chui)/(f1_ping+f2_ping));%f6
f3_chui=f2_chui+F_guan-G_guan;%f7
f3_ping=f2_ping;%f8
theta2=atan((f2_chui+f3_chui)/(f2_ping+f3_ping));%f9
f4_chui=f3_chui+F_guan-G_guan;%f10
f4_ping=f3_ping;%f11
theta3=atan((f3_chui+f4_chui)/(f3_ping+f4_ping));%f12
f5_chui=f4_chui+F_guan-G_guan;%f13
f5_ping=f4_ping;%f14
theta4=atan((f4_chui+f5_chui)/(f4_ping+f5_ping));%f15
alpha=atan(2*f5_ping/(2*f5_chui+F_tong-G_tong));%f16
F_la=G_qiu-F_qiu;%f19
F_mao_n=f5_chui*sin(alpha)+F_la*sin(alpha)-f5_ping*cos(alpha);%f17
F_mao_t=(f5_chui+F_tong+sin(alpha)*(f5_chui*sin(alpha)+F_la*...

```

```

sin(alpha)-f5_ping*cos(alpha))-G_tong-F_la)/cos(alpha);%f18
x1=F_feng/(p_mao*g_mao)*asinh(tan((F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha))/...
(F_mao_n*cos(alpha)+F_mao_t*sin(alpha)))));%f20
a=tan((F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha))/...
(F_mao_n*cos(alpha)+F_mao_t*sin(alpha)));
x2=F_feng/(p_mao*g_mao)*acosh(cosh(p_mao*g_mao/F_feng*x1)-p_mao*g_mao/F_feng*(H-L_tong*cos(alpha)...
-L_guan*(sin(theta1)+sin(theta2)+sin(theta3)+sin(theta4))-h1));
fval2=abs(F_feng/(p_mao*g_mao)*(sinh(p_mao*g_mao/F_feng*x1)-sinh(p_mao*g_mao*x2/F_feng))-22.05);
fval1=abs(F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha)-F_feng*sinh(p_mao*g_mao*x1/F_feng));
if fval1<min && x1>x2 &&x1>=0 &&x2>=0 &&theta1<=pi/2 &&theta2 <=pi/2 && theta3<=pi/2 && ...
theta4<=pi/2 && theta1>0 && theta2>0 &&theta3>0 &&theta4>0 &&fval2<0.1;
min=fval1;
x=[h1,h2,f1_ping,f1_chui,f2_ping,f2_chui,f3_ping,f3_chui,f4_ping,f4_chui,...
f5_ping,f5_chui,theta1,theta2,theta3,theta4,alpha,F_mao_n,F_mao_t,...
F_la,x1,x2];
end
end

F_feng=k_feng*d_biao*h2*v_feng^2;%风力L1=F_feng/(p_mao*g)*(sinh(p_mao*g*x1/F_feng)-sinh(p_mao*g*0/F_feng));
L2=L_mao-L1;
% L2=0;
x=0:0.01:L2;
y=0;
plot(x,y,'--ro')
hold on
xx=x2:0.01:x1;
yy=F_feng/(p_mao*g)*cosh((p_mao*g*xx)/F_feng)-F_feng/(p_mao*g)*cosh((p_mao*g*0)/F_feng);
xxx=x2+L2:0.01:x1+L2
plot(xxx,yy,'-rs')
grid on
xlabel('水平距离L')
ylabel('竖直高度H')
title('风速为12m/s时, 锚链的形状')
axis([0 20 0 18])

theta1= 1.550817154;
theta2= 1.550684118;
theta3= 1.550549299;
theta4= 1.550412661;
alpha=0.020694;
L=1*(cos(theta1)+cos(theta2)+cos(theta3)+cos(theta4))+1*sin(alpha)+x1-x2+L2;
theta1=90-theta1*180/pi;
theta2=90-theta2*180/pi;
theta3=90-theta3*180/pi;
theta4=90-theta4*180/pi;
alpha=alpha*180/pi;

```

附录 B 等式汇总

$$\begin{aligned}
 F_{wind} &= F_{1p} \\
 F_{2p} &= F_{buoyp} \\
 F_{3p} &= F_{1p} \\
 F_{4p} &= F_{2p} \\
 F_{bucketp} &= F_{3p} \\
 F_{bucket} &= m_{ball}g \\
 h_1 + h_2 &= h \\
 m_{buoy}g + F_{1v} &= F_{float} \\
 F_{buoyv} + F_{1float} &= F_{2v} + m_1g \\
 F_{1v} + F_{2float} &= F_{3v} + m_2g \\
 F_{2v} + F_{3float} &= F_{4v} + m_3g \\
 F_{3v} + F_{4float} &= F_{bucketv} + m_4g \\
 F_{4p} &= F_{bucketn} \cos \alpha + F_{bucket\tau} \sin \alpha \\
 y'(x_1) &= \frac{F_{bucket\tau} \cos \alpha - F_{bucketn} \sin \alpha}{F_{bucketn} \cos \alpha + F_{bucket\tau} \sin \alpha} \\
 F_{4v} \sin \alpha - F_{4p} \cos \alpha &= F_{bucketn} - F_{ball} \sin \alpha \\
 F_{1v} \cos \theta_2 - F_{1p} \sin \theta_2 &= F_{3p} \sin \theta_2 - F_{3v} \cos \theta_2 \\
 F_{2v} \cos \theta_3 - F_{2p} \sin \theta_3 &= F_{4p} \sin \theta_3 - F_{4v} \cos \theta_3 \\
 F_{3v} \cos \theta_4 - F_{3p} \sin \theta_4 &= F_{bucketp} \sin \theta_4 - F_{bucketv} \cos \theta_4 \\
 F_{buoyv} \cos \theta_1 - F_{buoyp} \sin \theta_1 &= F_{2p} \sin \theta_1 - F_{2v} \cos \theta_1 \\
 F_{4v} + F_{bucketfloat} + F_{bucketn} \sin \alpha &= F_{ball} + m_{bucket}g + F_{bucket\tau} \cos \alpha \\
 F_{bucketn} \sin \alpha + F_{bucket\tau} \cos \alpha &= \rho g \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx + F_{windy}(x_2) \\
 y(x_1) - y(x_2) &= H - [l_{bucket} \cos \alpha + l_{tube} \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4]
 \end{aligned}$$

附录 C 确定重物球质量的 matlab 代码

```

clc,clear
%遍历
%参数
H=18;%水深
k_feng=0.625;%风力系数
v_feng=36;%风速
g=9.8;%重力加速度
p=1.025*10^3;%水的密度
m_biao=1000;%浮标的质量
h_biao=2;%浮标的高
d_biao=2;%浮标的直径
m_guan=10;%钢管的质量
L_guan=1;%钢管的长度
d_guan=0.05;%钢管的直径
m_tong=100;%桶的质量
L_tong=1;%桶的长度
d_tong=0.3;%桶的直径

```

```

% m_qiu=1200;%球的质量
L_mao=22.05;%锚链长度
p_mao=7;%锚链线密度
p_qiu=7.85*10^3;%重力球的密度
p_lian=7.709*10^3;%锚链的密度
g_mao=g*(1-p/p_lian);%锚链的等效重力加速度

%物理量
% h1;%浮标吃水深度
% F_feng=k_feng*d_biao*h2*v_feng^2;%风力
G_biao=m_biao*g;%浮标的重力
% F_biao=p*g*pi*(d_biao/2)^2*h1;%浮标的浮力
G_guan=m_guan*g;%钢管的重力
F_guan=p*g*pi*(d_guan/2)^2*L_guan;%钢管的浮力
G_tong=m_tong*g;%钢桶的重力
F_tong=p*g*pi*(d_tong/2)^2*L_tong;%钢桶的浮力

%遍历求解
k=0.0001;%步长
flag=0;
x=[];
xx=[];
for m_qiu=3000;1:3000
F_qiu=p*g*m_qiu/p_qiu;%重力球的浮力
G_qiu=m_qiu*g;%球的重力
min=inf;
for h1=0:k:h_biao
h2=h_biao-h1;%漏出水面的高度%f3
F_feng=k_feng*d_biao*h2*v_feng^2;%风力
f1_ping=F_feng;%f1
F_biao=p*g*pi*(d_biao/2)^2*h1;%浮标的浮力
f1_chui=F_biao-G_biao;%f2
f2_chui=f1_chui+F_guan-G_guan;%f4
f2_ping=f1_ping;%f5
theta1=atan((f1_chui+f2_chui)/(f1_ping+f2_ping));%f6
f3_chui=f2_chui+F_guan-G_guan;%f7
f3_ping=f2_ping;%f8
theta2=atan((f2_chui+f3_chui)/(f2_ping+f3_ping));%f9
f4_chui=f3_chui+F_guan-G_guan;%f10
f4_ping=f3_ping;%f11
theta3=atan((f3_chui+f4_chui)/(f3_ping+f4_ping));%f12
f5_chui=f4_chui+F_guan-G_guan;%f13
f5_ping=f4_ping;%f14
theta4=atan((f4_chui+f5_chui)/(f4_ping+f5_ping));%f15
alpha=atan(2*f5_ping/(2*f5_chui+F_tong-G_tong));%f16
F_la=G_qiu-F_qiu;%f19
F_mao_n=f5_chui*sin(alpha)+F_la*sin(alpha)-f5_ping*cos(alpha);%f17
F_mao_t=(f5_chui+F_tong+sin(alpha)*(f5_chui*sin(alpha)+F_la*...
sin(alpha)-f5_ping*cos(alpha))-G_tong-F_la)/cos(alpha);%f18
x1=F_feng/(p_mao*g_mao)*asinh(tan((F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha))/...
(F_mao_n*cos(alpha)+F_mao_t*sin(alpha))));%f20
a=tan((F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha))/...
(F_mao_n*cos(alpha)+F_mao_t*sin(alpha)));
x2=0;
fval2=abs(F_feng/(p_mao*g_mao)*(sinh(p_mao*g_mao/F_feng*x1)-sinh(p_mao*g_mao*x2/F_feng))-22.05);
fval1=abs(F_mao_t*cos(alpha)-F_mao_n*sin(alpha)-F_feng*sinh(p_mao*g_mao*x1/F_feng));

beta=sinh(p_mao*g*x2/F_feng);
if fval1<min &&x1>x2 &&x1>=0 &&x2>=0 &&theta1<=pi/2 &&theta2 <=pi/2 && theta3<=pi/2 && ...
theta4<=pi/2 && theta1>0 && theta2>0 &&theta3>0 &&theta4>0
if fval2<0.1
min=fval1;
x=[m_qiu h1,h2,f1_ping,f1_chui,f2_ping,f2_chui,f3_ping,f3_chui,f4_ping,f4_chui,...

```

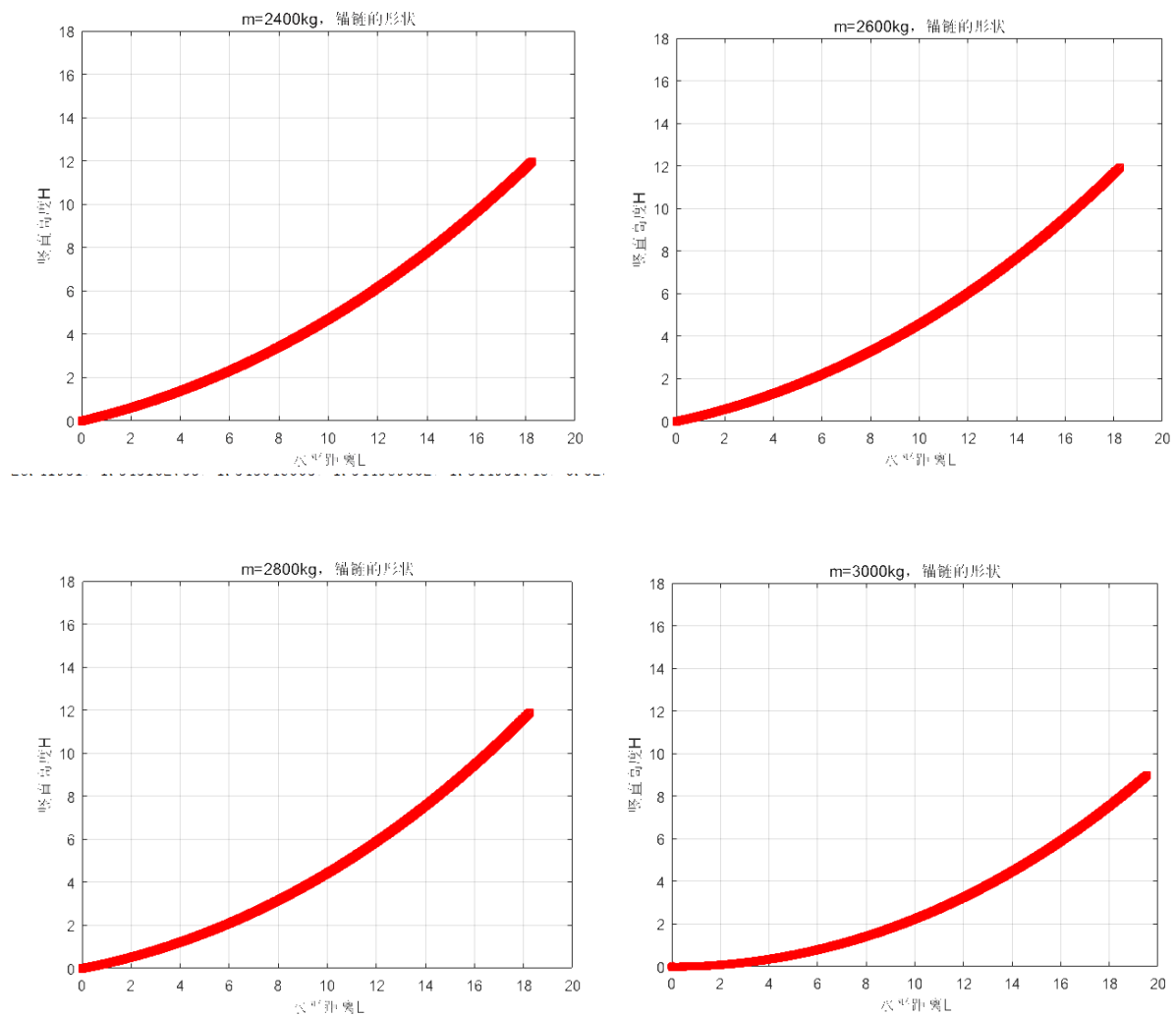


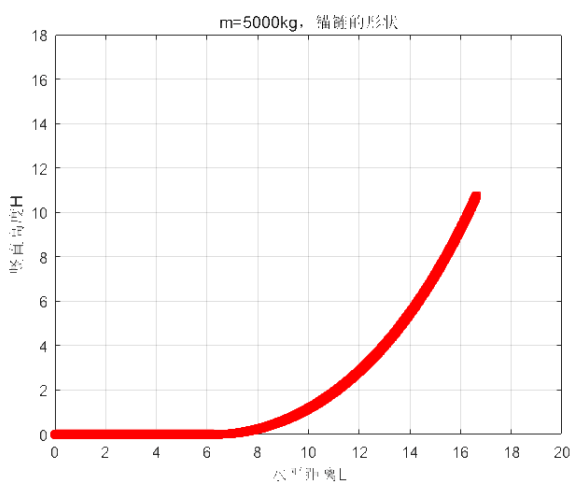
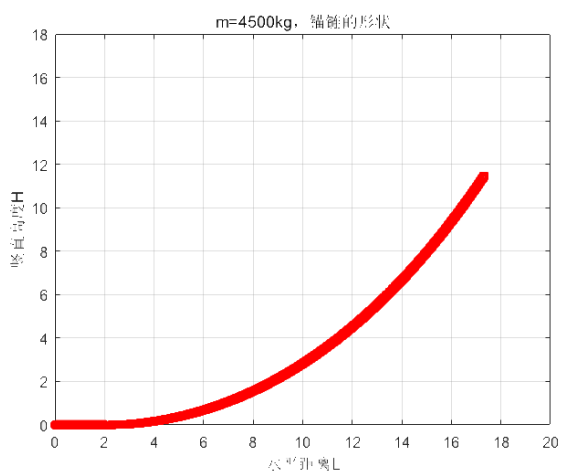
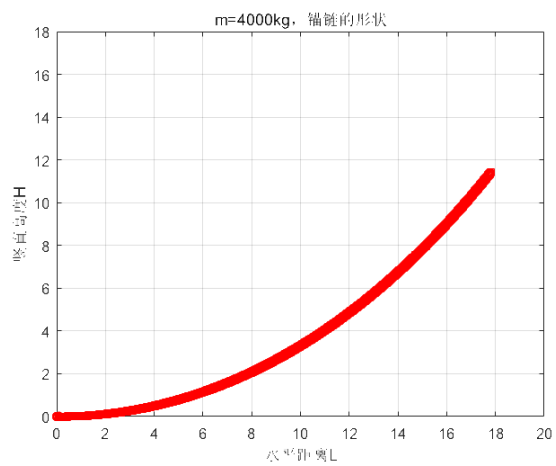
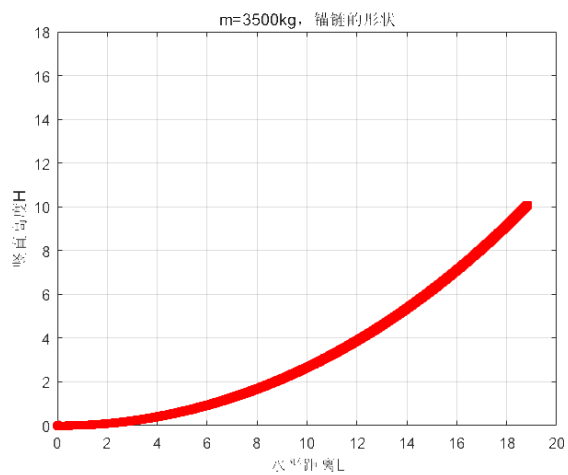
```

f5_ping,f5_chui,theta1,theta2,theta3,theta4,alpha,F_mao_n,F_mao_t,...
F_la,x1,x2];
X2=x2;
X1=x1;
F_FENG=F_feng;
end
end
end
if min~=inf
xx=[xx;min x];
end
end
beta=atan(sinh(p_mao*g_mao*X2/F_FENG))*180/pi
L=F_FENG/(p_mao*g_mao)*(sinh(p_mao*g_mao/F_FENG*X1)-sinh(p_mao*g_mao*X2/F_FENG))

```

附录 D 不同重物球质量对应的锚链形状图





附录 E 第三组到第五组锚链形状

