论文评阅编号：__________

电子科技大学

2018 年数学建模训练

题目：基于矩阵分析的校园小黄车资源配置与调度方案

	队员 1	队员 2	队员 3
姓名	杨旭	吴嘉津	江科成
学号	2016060202023	2016020906006	2016060202011
学院	计算机科学与工程学院	电子科学与工程学院	计算机科学与工程学院
专业	信息安全	电子信息工程	信息安全
电话	15520776910	18026822232	17761264631
Email	106795673@qq.com	188067382@qq.com	494371860@qq.com

基于矩阵分析的校园小黄车资源配置与调度方案

摘要

本文针对校园小黄车问题，通过收集小黄车实际行驶数据，分析得出小黄车实际需求量和一天内的动态变化情况，以及调度车最佳行驶路程，建立了小黄车一天内的动态变化模型和夜间车辆的调度方案模型。

针对问题一和问题二，我们首先按照全校小黄车使用次数划分出 12 个高频使用区域，然后用 Python 对 ofo 软件爬虫获取一天内 12 个时间点的师生的出行数据，以此作为本校师生每个时间点从 i 地向 j 地移动的概率。再用此概率来估计 12 个地点 12 个时间点小黄车数量的变化情况，以每个时间点每个地点车辆数大于等于 0 为约束条件列出 132 个约束方程来求解最初时间点每个地点车辆需要配置的数量。作为模型的改进，我们又考虑了师生在 5 分钟的忍耐时间内能否等到小黄车，即在前面的 132 个约束方程中加入系数 Q 来进行判断，然后再通过计算比较模型改进前后公司每日利润和回本时间，发现回本时间只比改进前慢了 6 天，但却能更好的满足师生用车需求。最后只需要把每个地点最初时间点需要的小黄车的数量相加即得到全校小黄车的实际需求量，为 22070 辆。12 个地点最初时间点车辆配置情况依次为：1335，1764，2069，1164，1463，2970，1174，7230，4259，0，54，0 辆。

针对问题三，我们根据第一问的有骑车需求师生流动变化的矩阵，结合小黄车每天早上的初始分配情况，迭代计算出每天不同时间点小黄车的分布情况，即为小黄车在实际运营中的动态变化情况，最后用折线图呈现 12 个地点 12 个时间点小黄车数量变化情况。

针对问题四，我们为了节约人力物力，只以单一调度车单一人员为准，利用遗传算法，经过多次“繁衍”和“变异”，得到了 4 中相同代价的调度路径，经过距离皆为 8888m。

关键字　Python 爬虫　Dijkstra 算法 矩阵分析 遗传算法 最优路径

一、问题重述

随着“互联网＋”经济的兴起，ofo、摩拜等完全市场化的共享单车很有可能解决高校内同学们的问题，不仅有利于推行绿色环保出行，而且没有了自行车丢失的担忧，深受老师同学们欢迎。但也经常出现闲时车辆扎堆，忙时一车难求的窘境。请结合我校师生的实际情况，和目前小黄车运营的实际问题，搜集数据，建立模型分析和求解：

1. 请从公司的经济效益和师生的需求分析我校小黄车的实际需求量；
2. 分析小黄车在运营初期的车辆配置；
3. 建模并模拟小黄车在实际运营中的动态变化情况；
4. 为优化配置小黄车，请给出合理的工作人员人数和实际的调配方案。

二、问题分析

2.1 对于问题一的分析

为了从公司的经济效益和师生的需求分析我校小黄车的实际需求量，我们可以从收集到的数据中，以小黄车的流动方向来估计我校有骑车需求师生的流动方向，得到每个时间段每个地点的有骑车需求师生向其他地点流动的概率组成的矩阵。然后我们可以用每天早上初始时间多个地点人数组成的矩阵，通过此矩阵与概率矩阵迭代相乘得到有骑车需求师生流动变化的矩阵。由此矩阵可以确定每个地点小黄车的师生需求量。

但是从公司角度来说，公司希望能够达到自己利益最大化，即考虑有部分小黄车可以在短时间内重复利用，能够配置尽量少的车来满足师生需求量，即公司配置量等于师生实际需求量，以此来得到小黄车实际需求量的约束条件，通过约束条件求解出小黄车实际需求量。

2.2 对于问题二的分析

通过第一问求得的实际需求量，结合每天早上初始时间校园内师生的分布情况，按比例在对应的地点配置相应数量的小黄车，即为小黄车初期的车辆配置方法。

2.3 对于问题三的分析

根据第一问的有骑车需求师生流动变化的矩阵，结合小黄车每天早上的初始分配情况，可以迭代计算出每天不同时间点小黄车的分布情况，即为小黄车在实际运营中的动态变化情况。

2.4 对于问题四的分析

由于小黄车经过一天的流动，末状态与每天初始状态产生了较大的差异，为了能让师生正常用车，公司需要在每天末状态后对小黄车进行调度。由于校园面积不大，我们可以先把所有的需要调度的车辆装上调度车，然后再去需要配置小黄车的地点放置车辆。运用遗传算法可以很容易的找出最优路径，即为最优调配方案。

三、名词解释与变量符号说明

符号	说明
t	第 t 个时间点
$\mathbf{x_i}(\boldsymbol{t})$	t 时间点在第 i 个区域内师生人数
$\mathbf{t}'$	第 t’个时间段
$\mathbf{P_{ij}}\left(\mathbf{t}'\right)$	t’时间段内，师生从 i 地往 j 地移动的概率
$\mathbf{y_i}(\boldsymbol{t})$	t 时间点 i 地小黄车的数量
A	公司日收益
k	一辆小黄车的成本
M	净利润
T	运营天数
Q	表示是否能在等待时间内有小黄车使用

四、基本假设

1. 假设小黄车在运营期间不产生损坏。
2. 解题过程中所使用的师生人数皆代表有骑车需求的师生的人数
3. 假设师生在用车高峰期同时骑车出发，且速度相同。
4. 假设在用车高峰期时师生才会骑小黄车。
5. 假设调度车能装上所有需要调度的小黄车。

五、模型建立和求解

5.1 数据的预处理

我们为了能够准确的预测师生出行情况和规划出本校的小黄车车辆配置方案，利用 Python 对 ofo 软件进行间断爬虫，得到了全校范围内小黄车数量上和空间上的变化情况。为了分析各个地点之间小黄车数量的变化情况，我们还需要对学校地图的抽象化，计算每个集中停车点之间的距离。

5.1.1 学校地图抽象化

首先我们利用高德地图取得学校的地图（图 1），观察可知学校大致为一个菱形，但是考虑到校园西方的角落和东方的大半区域为人迹罕至的区域，所以我们把学校区域取为矩形（图 2），并且利用高德地图记录下此矩形左上角和右下角的经纬度。

图 1 电子科技大学清水河校区地图

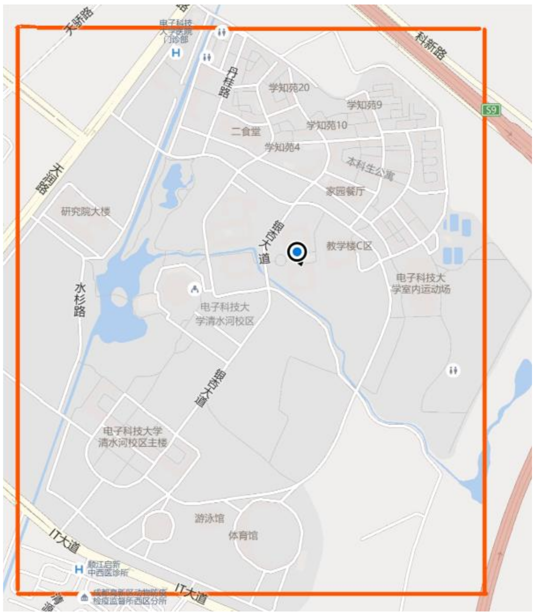

图 2 校区数据采集区域

利用我们在学校生活的经验，把同学们停车用车的高频区域用矩形标出，即可大致找到 12 个停车用车区域，并且记录相应矩形左上角和右下角的经纬度，由于商业街、成电会堂、学生的中心、西门桥头和西门的距离较近，所以我们归为一个区域，宿舍区由于分布较散，使用车辆密集，所以按照三个食堂来划分成三个区域。具体分区见图 3 和表 1。

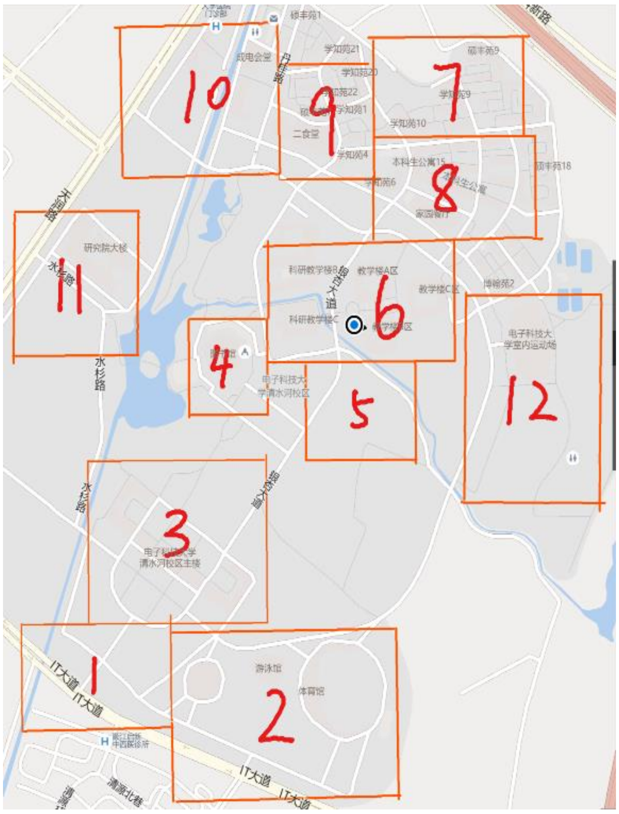

图 3 停车用车高频区域划分

编号	地点	左上角(纬度/经度)	右下角(纬度/经度)
0	电子科技大学清水河校区	30.758627,103.922248	30.74133,103.936581
1	南门	30.745008,103.923877	30.742542 ,103.926905
2	南二门、综合体育馆、体育场、游泳馆	30.744418 ,103.927075	30.740859,103.932568
3	主楼	30.747848 ,103.924264	30.744860,103.929586
4	图书馆	30.750873 ,103.927397	30.749361,103.929478
5	立人楼	30.749748 ,103.930830	30.747738 ,103.933491
6	品学楼、科研楼、基础实验楼	30.752533 ,103.929522	30.750007 ,103.934285
7	朝阳餐厅、学知三、七组团，硕丰三、四、六组团	30.756894 ,103.931930	30.754359 ,103.935835
8	学子餐厅、学知五组团，硕丰五组团，博翰二组团	30.754211 ,103.933098	30.752385 ,103.936955
9	银桦清真餐厅、学知一、二组团，	30.75505 0,103.929687	30.753224 ,103.932991
10	学生活动中心、成电会堂、校医院、商业街、西门	30.757042 ,103.925765	30.754128 ,103.929745
11	西二门、航空航天学院大楼、经管学院大楼	30.753243 ,103.922965	30.750108 ,103.926098
12	综合训练馆、室外体育场、塑胶球场、田径场、游泳场	30.751233 ,103.935529	30.746793 ,103.937645

表 1 停车用车的高频区域经纬度

对地图进行基本划分后，我们将地图抽象成点线图。首先根据实际情况，将每个地点之间能够直接到达的相连，通过地图软件计算出骑行距离，然后将每个地点用一个小圆表示，可直接到达的两地则用直线相连，并标注之前计算出的距离，最后得到抽象地图（图 4）和停车用车高频地点的邻接矩阵。

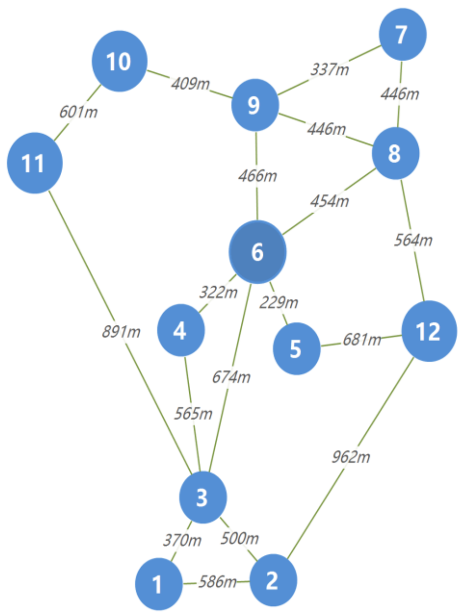

图 4 骑、停单车高峰区分布及距离

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

5.1.2 利用 Python 对 ofo 进行爬虫

为了得到学校范围内一个工作日内小黄车的运行情况，我们利用 Python 对 ofo 的网页源进行爬虫操作（具体程序见附件 1）。因为小黄车软件会在你所在位置显示附件半径约 400m 内的小黄车，所以我们通过遍历学校内的点，去除重复的车辆，即刻得到当前时刻学校内每个小黄车的位置（即经纬度）。算法步骤如下：

① 通过表 1 能得到我们选取的学校的范围，设置为遍历区域（矩形）。

② 从矩形的左上角开始向右向下进行遍历操作，记录下遍历时间、每个小黄车的编号和经纬度。

③ 便利完成以后，对每组数据进行比较，去除编号相同的重复数据。

④ 把得到的去重后的小黄车编号和经纬度输出成 csv 文件导出。

为了能够得到多组数据，我们需要在这个工作日内设置合适的节点进行多次爬虫操作，考虑到师生上下课的时间，我们选取了一天中的如下 12 个时刻进行数据收集（表 2）：

时间点	6：00	8：00	10：00	11：30	13：30	15：00
对应 t	1	2	3	4	5	6
时间点	16：00	17：00	18：30	21：00	21：30	23：00
对应 t	7	8	9	10	11	12

表 2 骑车高峰时间点分割表

5.1.3 单车数据处理

通过前面两个步骤，我们得到了一个工作日内，每个的时间点校内小黄车的分布。为了在之后的解题过程更加方便，我们需要确定每个时间小黄车所在区域的编号，且对于在过程中从校外骑进来和骑出校外的小黄车不予计算，以此来得到每辆小黄车一天的大致位置变化趋势。

5.2 问题一和问题二的求解

我们为了求解小黄车的实际需求量和配置方式，需要对师生需求进行考虑，同时也要考虑到公司的经济效益以及回本时间。

5.2.1 师生需求及人数变化矩阵的求解

我们把 t 时间点在第 i 个区域师生人数设为：

$$\mathrm{x_i}(t), i = 1,2,\dots,12, t = 1,2,\dots,12$$

接着可以把 t 时间点所有地区的师生人数设为如下矩阵：

$$[\mathrm{x}_1(t) \quad \mathrm{x}_2(t) \quad \dots \quad \mathrm{x}_{12}(t)], t = 1,2,\dots,12$$

所以可以得到 12 个师生人数矩阵，则 t 时间点所有地区的师生人数为如下矩阵：

$$[\mathrm{x}_1(t) \quad \mathrm{x}_2(t) \quad \dots \quad \mathrm{x}_{12}(t)] \tag{2}$$

每个时间节点每个地点都会有师生人员流动，所以我们设$\mathrm{P_{ij}(t')}, \mathrm{t'} =$

表 3 t_1时间点到t_2时间点师生从 i 位置移动到 j 位置的概率

$1,2,\dots,11$为 t 到 t+1 时间点师生从 i 地到 j 地流动的概率。为了得到$\mathrm{P_{ij}(t')}$，我们使用收集来的小黄车流动数据来估计校内师生流动走向。所以$\mathrm{P_{ij}(t')}$的计算方式为：

$$\mathrm{P_{ij}(t')} = \frac{\text{第 } \mathrm{t'} \text{时间段内小黄车从 i 地流向 j 地的数量}}{\text{i 地 t 时间节点小黄车数量}} \tag{3}$$

通过 Matlab 进行批量计算得到由$\mathrm{P_{ij}}(\mathrm{t'})$组成的 11 个矩阵，第 t 个时间段内的矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} P_{0101}(t) & P_{0102}(t) & \dots & P_{0112}(t) \\ P_{0201}(t) & & \ddots & P_{0212}(t) \\ \dots & & & \dots \\ P_{1201}(t) & P_{1202}(t) & \dots & P_{1212}(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

所有的矩阵见附件 2。

把（1）矩阵与（3）矩阵相乘得到师生流动变化的矩阵：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1(t)P_{0101}(t) & \mathrm{x}_1(t)P_{0102}(t) & \dots & \mathrm{x}_1(t)P_{0112}(t) \\ \mathrm{x}_2(t)P_{0201}(t) & & \ddots & \mathrm{x}_2(t)P_{0212}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{x}_{12}(t)P_{1201}(t) & \mathrm{x}_{12}(t)P_{1202}(t) & \dots & \mathrm{x}_{12}(t)P_{1212}(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中，每一行之和减去$\mathrm{x_i}(t)P_{ii}(t)$表示 i 地有想骑车前往其他区域的人总数，即为此刻此地师生需求量：

$$\text{i 地 t 时间点师生需求量} = \sum_{j=1,i\neq j}^{12} x_i(t)P_{ij}(t)$$

由此可得到 t 时间点学生需求矩阵：

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{12} x_1(t)P_{01j}(t) \\ \sum_{j=1,j\neq 2}^{12} x_2(t)P_{02j}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1,j\neq 12}^{12} x_{12}(t)P_{12j}(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

每一列之和则为下个时间点各地点车辆的数目：

$$\text{j 地 t + 1 时间点小黄车车辆数量} = \sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{ij}(t)$$

由此可得到 t+1 时间点车辆分布矩阵：

$$\left[\sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i01}(t) \quad \sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i02}(t) \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i12}(t)\right] \tag{7}$$

因为小黄车的移动状态与师生移动状态大致一致，所以上面矩阵也式 t 时间点师生人数分布矩阵，即：

$$\left[\sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i01}(t) \quad \sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i02}(t) \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{12} x_i(t)P_{i12}(t)\right] = [\mathrm{x}_1(t+1) \quad \mathrm{x}_2(t+1) \quad \dots \quad \mathrm{x}_{12}(t+1)] \tag{8}$$

5.2.2 约束模型的建立和求解

设小黄车在 i 点 t 时间点的数量为$\mathrm{y_i}(t)$,每辆小黄车的造价为 k，校内小黄车总量就为$\mathrm{y} = \sum_{i=1}^{12} y_i(t)$。

小黄车 i 点 t+1 时间点的数量与 t 时刻的数量、t′ 时间段内被骑到 i 点的小黄车数量和被骑走的数量有关，并且每次变化后小黄车的数量大于等于 0，

所以可得小黄车 i 点 t+1 时间点的数量为：

$$\mathrm{y_i}(t+1)=y_i(t)-\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(t)P_{ij}(t)+\sum_{i=1,j\neq i}^{12}x_j(t)P_{ji}(t)\geq 0 \tag{9}$$

从公司角度看，公司的日收益与每天小黄车被骑的次数成正比，并且由于在校内骑行路程较短，时间皆不会超过 30min，小黄车的收费标准为 0.5 元/30min，所以我们将每次骑行的收入看作 0.5 元。所以公司的日收益 A 就为：

$$\mathrm{A}=\sum_{t=1}^{12}\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1,i\neq j}^{12}x_i(t)P_{ij}(t)\times 0.5 \tag{10}$$

公司从正式运营起，T 天内总利润 M 为 T 日收益减去配置小黄车成本$\mathrm{k}\times\mathrm{y}$。通过查找资料得到小黄车成本 k 为 300 元，则公司收益为（没有考虑调度费用）：

$$\mathrm{M}=\mathrm{A}\times\mathrm{T}-\mathrm{k}\times\mathrm{y} \tag{11}$$

由（9）（10）式子，且因为从晚上最后一个时刻到第二天早上数量变化是由人工调动，所以我们可由地点和时间递归得出 12×11 个约束条件,约束方程构成的矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} y_1(1)\geq\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(1)P_{ij}(1)-\sum_{j=1,j\neq i}^{12}x_j(1)P_{j01}(1) & \cdots & y_1(12)\geq\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(12)P_{ij}(12)-\sum_{j=1,j\neq i}^{12}x_j(12)P_{j01}(12) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{11}(1)\geq\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(1)P_{ij}(1)-\sum_{j=1,j\neq i}^{12}x_j(1)P_{j11}(1) & \cdots & y_{11}(12)\geq\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(12)P_{ij}(12)-\sum_{j=1,j\neq i}^{12}x_j(12)P_{j11}(12) \end{bmatrix} \tag{12}$$

通过 matlab 计算，我们就可以得到小黄车的实际需求量：

$$\mathrm{y}=\sum_{i=1}^{12}y_i(1)$$

$$\mathrm{y}=22070\text{ 辆}$$

则公司每日的收入为：

$$\mathrm{A}=\sum_{t=1}^{12}\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1,i\neq j}^{12}x_i(t)P_{ij}(t)\times 0.5$$

$$\mathrm{A}=66543\text{ 元}$$

回本时，即净利润为 0：

$$0=\mathrm{A}\times\mathrm{T}-\mathrm{k}\times\mathrm{y}$$

$$66543\times\mathrm{T}=300\times 22070$$

$$\mathrm{T}=99\text{ 天}$$

所以公司在正式运营 99 天后可以回本。

5.2.3 约束模型的改进

但是为了满足师生需求，我们需要考虑在 t+1 时间点时，t′ 时间段内骑过来的车辆是否能够到达 i 点，所以要满足每个地点每个时刻小黄车的数量大于等于 0，即：

$$y_i{}'(t)-\sum_{i=1,i\neq j}^{12}x_i(t)P_{ij}(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{12}Q_{ji}x_j(t)P_{ji}(t)\geq 0 \tag{14}$$

其中$\mathrm{Q_{ji}}$表示 t 时间点正在从 j 地开来 i 地的小黄车能否在师生能承受的等

待时间内到达。若能够在等待时间内到达，则$\mathrm{Q_{ji}}$=1，否则为 0。

通过查资料，我们得到校内骑自行车的速度大约为 10km/h，人的平均等待时间约为 5min。为了确定小黄车能否在等待时间内到达 i，我们要求出每个地点到 i 地的时间，要求出时间则要先求出距离。

所以我们利用 dijkstra 算法来求出其他地点到 i 地的最短距离$\mathrm{d_{ji}}(j=1,2,\dots,12,\text{且 }\mathrm{j}\neq i)$，得到最短路径矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 586 & 370 & 935 & 1273 & 1044 & 1847 & 1498 & 1510 & 1862 & 1261 & 1548 \\ 586 & 0 & 500 & 1065 & 1403 & 1174 & 1972 & 1526 & 1640 & 1992 & 1391 & 962 \\ 370 & 500 & 0 & 565 & 903 & 674 & 1477 & 1128 & 1140 & 1492 & 891 & 1462 \\ 935 & 1065 & 565 & 0 & 551 & 322 & 1125 & 776 & 788 & 1197 & 1456 & 1232 \\ 1273 & 1403 & 903 & 551 & 0 & 229 & 1032 & 683 & 695 & 1104 & 1705 & 681 \\ 1044 & 1174 & 674 & 322 & 229 & 0 & 803 & 454 & 466 & 875 & 1476 & 910 \\ 1847 & 1972 & 1477 & 1125 & 1032 & 803 & 0 & 446 & 337 & 746 & 1347 & 1010 \\ 1498 & 1526 & 1128 & 776 & 683 & 454 & 446 & 0 & 783 & 1192 & 1793 & 564 \\ 1510 & 1640 & 1140 & 788 & 695 & 466 & 337 & 783 & 0 & 409 & 1010 & 1347 \\ 1862 & 1992 & 1492 & 1197 & 1104 & 875 & 746 & 1192 & 409 & 0 & 601 & 1756 \\ 1261 & 1391 & 891 & 1456 & 1705 & 1476 & 1347 & 1793 & 1010 & 601 & 0 & 2353 \\ 1548 & 962 & 1462 & 1232 & 681 & 910 & 1010 & 564 & 1347 & 1756 & 2353 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

然后就可以根据预处理得到的停车用车高频地点的距离矩阵、自行车速度和等待时间来确定每一个$\mathrm{Q_{ji}}$：

$$\mathrm{Q_{ji}}=\begin{cases} 1, \dfrac{d_{ji}}{10km/h} \leq 5min \\ 0, \dfrac{d_{ji}}{10km/h} \geq 5min \end{cases}$$

最终得到 Q 的 0-1 矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

同理可得约束方程构成的矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} y_1{}'(1) \geq \sum_{i=1,i\neq j}^{12} x_i(1)P_{ij}(1) - \sum_{j=1,j\neq i}^{12} Q_{j01}x_j(1)P_{j01}(1) & \cdots & y_1{}'(12) \geq \sum_{i=1,i\neq j}^{12} x_i(12)P_{ij}(12) - \sum_{j=1,j\neq i}^{12} Q_{j01}x_j(12)P_{j01}(12) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{11}{}'(1) \geq \sum_{i=1,i\neq j}^{12} x_i(1)P_{ij}(1) - \sum_{j=1,j\neq i}^{12} Q_{j11}x_j(1)P_{j11}(1) & \cdots & y_{11}{}'(12) \geq \sum_{i=1,i\neq j}^{12} x_i(12)P_{ij}(12) - \sum_{j=1,j\neq i}^{12} Q_{j11}x_j(12)P_{j11}(12) \end{bmatrix}$$

初始配置的矩阵：

$$[1335 \quad 1764 \quad 2069 \quad 1164 \quad 1463 \quad 2970 \quad 1174 \quad 7230 \quad 4259 \quad 0 \quad 54 \quad 0] \tag{17}$$

考虑等待时间后小黄车的实际需求量：

$$y' = \sum_{i=1}^{12} y_i'(1)$$

$$y' = 23477 \text{ 辆}$$

则公司每日的收入为：

$$A = \sum_{t=1}^{12}\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1,i\neq j}^{12} x_i(t)P_{ij}(t)\times 0.5$$

$$A = 66543 \text{ 元}$$

回本时，即净利润为 0：

$$0 = A\times T - k\times y'$$

$$66543\times T = 300\times 23477$$

$$T = 105 \text{ 天}$$

所以在考虑等待时间的前提下，公司在正式运营 105 天后可以回本。

综上所述，在考虑等待时间的前提下，改进的模型回本时间与之前模型回本时间相比较晚（如图 5）。

但是相对于之前的模型能够更为准确的预测小黄车运行情况。所以我们从公司的经济效益和师生的需求的角度，分析出我校小黄车的实际需求量为 23477 辆。小黄车在运营初期的车辆配置矩阵如下：

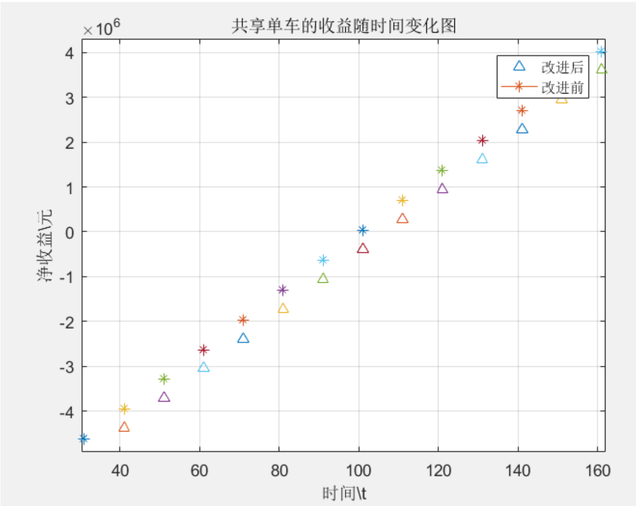

图 5 共享单车的收益随时间变化图

$$[1335\quad 1764\quad 2069\quad 1164\quad 1463\quad 2970\quad 1174\quad 7230\quad 4259\quad 0\quad 54\quad 0]$$

5.3 问题三的求解

我们为了模拟小黄车一天的动态变化情况，需要利用第一问求得的小黄车每天的初始配置状态还有人员流动的概率矩阵，通过相乘得到一天内多个时间点的小黄车分布情况，即得到小黄车的动态变化情况。

考虑等待时间后得到的初始配置矩阵为：

$$[y_1(1)\quad y_2(1)\quad y_3(1)\quad y_4(1)\quad y_5(1)\quad y_6(1)\quad y_7(1)\quad y_8(1)\quad y_9(1)\quad y_{10}(1)\quad y_{11}(1)\quad y_{12}(1)]$$
$$= [1335\quad 1764\quad 2069\quad 1164\quad 1463\quad 2970\quad 1174\quad 7230\quad 4259\quad 0\quad 54\quad 0]$$

第 1 个时间段内小黄车流动概率的矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} P_{0101}(1) & P_{0102}(1) & \dots & P_{0112}(1) \\ P_{0201}(1) & & \ddots & P_{0212}(1) \\ \dots & & & \dots \\ P_{1201}(1) & P_{1202}(1) & \dots & P_{1212}(1) \end{bmatrix}$$

相乘得到小黄车流动变化的矩阵：

$$\begin{bmatrix} y_1(1)P_{0101}(1) & y_1(1)P_{0102}(1) & \cdots & y_1(1)P_{0112}(1) \\ y_2(1)P_{0201}(1) & & \ddots & y_2(1)P_{0212}(1) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{12}(1)P_{1201}(1) & y_{12}(t)P_{1202}(t) & \cdots & y_{12}(1)P_{1212}(1) \end{bmatrix}$$

其中，每一列之和则为下个时间点各地点车辆的数目：

$$j\text{ 地第 2 个时间点小黄车车辆数量} = \sum_{i=1}^{12} y_i(1)P_{ij}(1)$$

由此可得到第 2 个时间点车辆分布矩阵：

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{12} x_i(1)P_{i01}(1) & \sum_{i=1}^{12} x_i(1)P_{i02}(1) & \dots & \sum_{i=1}^{12} x_i(1)P_{i12}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(2) & y_2(2) & \dots & y_{12}(2) \end{bmatrix}$$

同理，我们可以求得剩下的 10 个时间点各个地点的小黄车的数量，最终得到结果如下：

地点	t_1单车数量	t_2单车数量	t_3单车数量	t_4单车数量	t_5单车数量	t_6单车数量
1	1335	1533	1329	1384	1901	1906
2	1764	1851	2156	2360	2608	2607
3	2069	1846	1521	1325	1258	1270
4	1164	1378	1310	1304	9643	873
5	1463	1463	1714	1838	1159	1167
6	2970	3091	3612	3605	3059	3046
7	1174	1253	3334	2728	2091	2140
8	7230	6820	3972	3494	2853	2836
9	4259	3635	2080	1756	2080	2030
10	0	416	1723	2491	3371	3468
11	54	195	528	871	1750	1750
12	0	0	204	326	389	389

地点	t_7单车数量	t_8单车数量	t_9单车数量	t_{10}单车数量	t_{11}单车数量	t_{12}单车数量
1	1729	1779	2368	2691	2632	2289
2	2803	3112	3314	2990	2918	2529
3	2197	2159	1743	1472	1522	1227
4	1216	968	3362	2124	182	210
5	2162	1742	1046	1146	1170	1004
6	3630	3335	1954	1751	1537	1175
7	1154	1210	784	993	1354	2825
8	1549	1105	901	911	1043	1767
9	786	827	1346	1195	1315	1726
10	3320	3920	4844	4658	4565	4164
11	2115	2267	4126	4890	4731	4126
12	852	1059	720	574	514	440

表 3 各时间点各个地点的小黄车的数量

通过上述结果，我们以时间为横轴，小黄车数量为纵轴，画出 12 个地点小黄车数量随时间变化的折线图（图 6）：

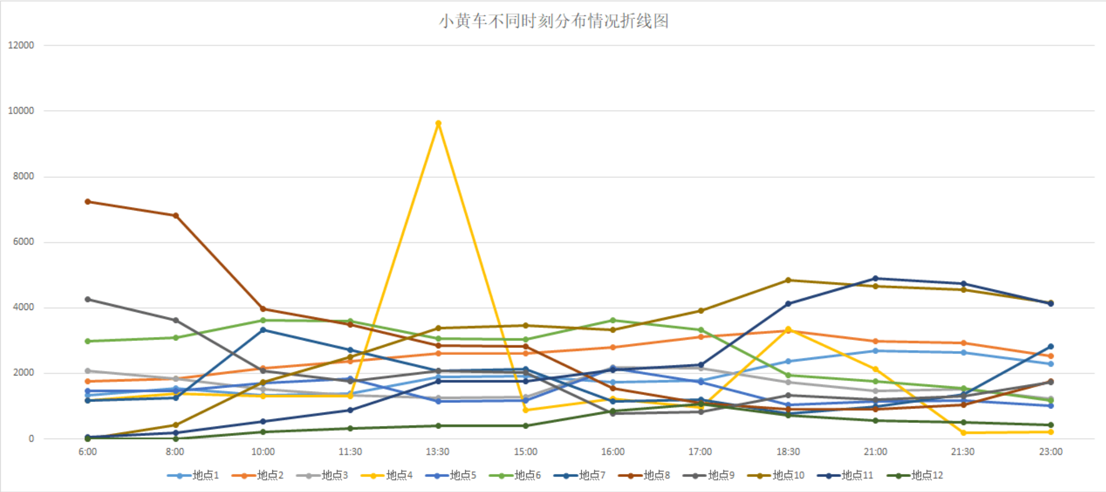

图 6 小黄车不同时刻分布情况折线图

5.4 问题四的求解

为了满足学校师生的正常用车需求，我们选择在每天最后一个时间点过后进行小黄车的调配工作，使得第二天初始状态和第一天初始状态一致。运用遗传算法可求解最优路径。

5.4.1 遗传算法的基本思想

遗传算法, 是一种借鉴生物界自然选择和自然遗传机制的随机化搜索算法, 其主要特点是群体搜索策略和群体中个体之间的信息交换。

- 初始种群

遗传算法是从代表问题可能潜在的解集的一个种群开始的。种群的每一个体, 都对应于问题的某个解, 称之为“染色体”。因此, 该算法的第一步就是实现从问题领域解的形式到“染色体”形式的映射, 即编码。由于仿照基因编码的过程很复杂, 在实际中往往会进行简化, 如简单常用的二进制编码法。按照某种编码方法, 生成一定规模的个体的工作, 称之为初始种群。

- 设计适应度函数

适应度函数用来验证某一个体的适应能力。显然, 适应度越高的个体对应的解越符合优化准则, 越有可能得到保留, 进入下一代组成新的群体。

遗传算法在进化搜索时基本不利用外部信息, 仅依据种群中每一个体的适应度值。因此适应度函数的选取至关重要, 直接决定算法的收敛速度以及能否找到最优解。

适应度函数的设计要结合求解问题的要求而定, 通常是目标函数本身, 也可能需要作一定的变换, 以更好地适宜遗传操作。

- 定义遗传操作

遗传算法依照适者生存和优胜劣汰的原理, 通过逐代演化产生出越来越好的近似解。在每一代, 根据在问题域中个体的适应能力挑选适应度高的个体, 并借助类似于自然遗传学的遗传算子进行组合交叉和变异操作, 产生出代表新的解集的种群。这个过程必然会导致种群向自然进化一样, 后生代比前代更加适应环境

(更加接近最优解)。末代种群的最优个体经过解码,就可作为问题的最优解或近似最优解。

由此可见,遗传操作主要有选择、交叉、变异三种。

- 算法流程和终止条件

运行流程如图 7 所示。遗传算法以是否符合优化准则作为终止条件的。

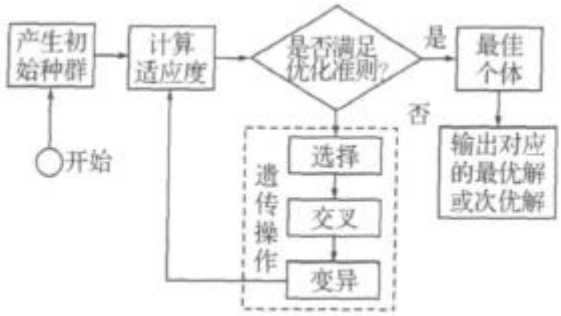

图 7 遗传算法流程图

终止条件要根据具体情况来确定,通常采用以下准则之一来进行判断:

1)种群中个体的最大适应度超过预先设定值;

2)种群中个体的平均适应度超过预先设定值;

3)世代数超过预先设定值。

5.4.2 遗传算法应用于调度车路径规划

首先我们要找出调度前和调度后的差距，即用末时间点（23：00）的小黄车数量减去初时间点（6：00）的小黄车数量，如下表：

地点	6:00	23:00	早晚差值（23 点-6 点）
地点 1	1335	2289	954
地点 2	1764	2529	765
地点 3	2069	1227	-842
地点 4	1164	210	-954
地点 5	1463	1004	-459
地点 6	2970	1175	-1795
地点 7	1174	2825	1651
地点 8	7230	1767	-5463
地点 9	4259	1726	-2533
地点 10	0	4164	4164
地点 11	54	4126	4072
地点 12	0	440	440

表 4 小黄车调度信息表

由上表，我们可以得知：地点 1，2，7，10，11，12 需要调走多余的车辆，地点 3，4，5，6，8，9 需要配置车辆。12 个地点皆可以作为调度车站点，调度车起点和终点相同，调度方案为先遍历小黄车多余的地点，回到站点，然后再遍历需要配置小黄车的地点，最后回到站点。

我们首先进行调走工作，把 6 个需要调走小黄车的地点设为 a,b,c,d,e,f。然后随机确定 24 个初始群体（调度路径）：

$$起\ a \to b \to c \to d \to e \to f\ 终$$

$$起\ f \to e \to d \to c \to b \to a\ 终$$

$$起\ a \to b \to d \to c \to f \to e\ 终$$

……

然后计算初始群体每一个个体经过的总路程并按照从小到大排序。我们设定每一个群体的自适应值（权值）为：

$$自适应值(权值) = \frac{1}{d}$$

其中 d 为每条路径的总路程。则选取排序后第 k 个个体的概率(P_k)就为：

$$P_k = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_{24}}$$

然后，我们以此概率分别选取个体产生后代（12 次，即产生 12 个后代），产生后代的方法为：

① 分别计算 1 到 2 代，2 到 3 代，……，5 到 6 代的距离D_{ij}

② 对所有的D_{ij}按照从大到小排序，选出最大的D_{ij}。

③ 对最大的D_{ij}进行位置交换，交换最大的D_{ij}对应的两个地点的顺序，即为后代。

之后，我们便要对后代进行“变异”，变异的概念为：随机选取个体的基因随机插入一个位置。对于不同的群体，变异概率也有所不同，所以我们要确定后代变异概率：

首先计算初代群体的总适应度：

$$总适应度 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{24}}$$

则初代群体的平均适应度就为：

$$f = \frac{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{24}}}{24}$$

第 k 个个体的后代变异的概率就为：

$$P = \begin{cases} P_{min}, & \frac{1}{d_k} \le f \\ P_{max} - \frac{(P_{max} - P_{min})(m_k - m_{24})}{f - m_{24}}, & \frac{1}{d_k} \ge f \end{cases}$$

我们取定不同 f 对应的不同P_{min}和P_{max}值如下表：

	P_{min}	P_{max}
$f \in [100f(1), +\infty]$	0.00	0.00

$f\in[10f(1),100f(1)]$	0.01	0.05
$f\in[f(1),10f(1)]$	0.05	0.10
$f\in[0.1f(1),f(1)]$	0.10	0.20
$f\in[0.01f(1),0.1f(1)]$	0.20	0.40
$f\in[-\infty,0.01f(1)]$	0.40	0.60

后代个体适应度比平均适应度高，变异概率越小；后代个体适应度比平均适应度小，变异概率越大。

最后要做的就是更新群体，取前 12 个优秀的群体不变直接作为后代，另外 12 个群体则由优秀的 12 个群体通过上述算法产生后代。

我们由此方法通过 Matlab 软件分别计算出收回小黄车和放置小黄车的最优路线，结果如下：

站点	拿车地点						
1	11	10	7	12	2	1	1
3	11	10	7	12	2	1	3
7	12	2	1	11	10	7	7
8	12	2	1	11	10	7	8
9	10	11	1	2	12	7	9
放车地点							距离
1	9	8	6	5	4	3	8888
3	9	8	6	5	4	3	8888
7	9	6	5	4	3	8	8888
8	9	6	5	4	3	8	8888
9	9	8	6	5	4	3	8888

最终得到四个优秀的调配路径，需要的工作人员和车辆都为 1。

六、模型的评价与改进方向

6.1 模型的评价

1. 本题所使用的约束模型很好的利用了各个地点各个时间的约束关系来求解初始时间每个地点的小黄车需求量。
2. 本题分割出了 12 个区域，不仅对复杂的数据进行了简化，还很具代表性表现出学校师生的使用情况。

6.2 模型的改进方向

1. 由于小黄车在学校内的使用比例在降低，所以本模型中以小黄车移动的数据来代表师生出行数据便会产生一定的误差。此问题可通过统计多种共享单车数据来解决。
2. 在解决调度问题的时候，我们只使用了一辆调度车和一个工作人员，可能增加调度车和工作人员的数量能够得到更加优秀的调配方案。

七、参考文献

[1] 佚名，同济大学，共享单车市场分析综合评价模型，2016
[2] 佚名，2017 共享单车大数据报告，
https://blog.csdn.net/qq_19600291/article/details/78953966，2018.1.2
[3] 赵国忠，陈靖一，凌韬，遗传算法求最优路径的设计与实现，《计算机与数字工程》，2010 年第 12 期，总第 254 期，27～28

八、附件清单

附件一：Python 爬虫 ofo 的工程文件
附件二：t_m时间点到t_{m+1}时间点师生从 i 位置移动到 j 位置的概率
附件三：相关的 Matlab 题目计算源文件