ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ФУНКЦИЯ, ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. **Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика. Операции над множествами**
2. **Понятие функции. Способы задания функций одной переменной**
3. **Свойства функций одной переменной**
4. **Элементарные функции**
5. **Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек**
6. **Понятие предела функции. Односторонние пределы. Арифметические свойства пределов**
7. **Бесконечно малые и бесконечно большие функции**
8. **Вычисление пределов. Раскрытие некоторых видов неопределенностей**
9. **Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке**
10. **Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке**
11. **Точки разрыва функции и их классификация**

1. Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика. Операции над множествами

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Под ***множеством*** понимается совокупность объектов произвольной природы. Эти объекты называются ***элементами*** множества.

Множества обозначаются обычно заглавными латинскими буквами: A, B, C и т.д., а их элементы – строчными: a, b, c, ...

При описании множеств их элементы, как правило, заключаются в фигурные скобки, например запись

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, ..., a_n, \ldots$

В случае, когда объект a является элементом или объект b не является элементом множества A, то используются соответствующие обозначения $a \in A, b \notin A$, что читается: элемент a принадлежит множеству A, элемент b не принадлежит множеству A, например $1 \in \{-1, 0, 1\}, 5 \notin \{-1, 0, 1\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

Множества обычно задают перечислением или описанием свойств его элементов. Например, $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ - множество цифр; S - множество студентов первого курса.

При описании множеств, состоящих из элементов x некоторого множества X, обладающих определенным общим для этих элементов свойством $F(x)$, часто используются обозначения

$$\{x \mid F(x), x \in X\} \text{ или } \{x : F(x),\, x \in X\},$$

например, $\left\{x \middle| x^2 > 2, x \in \mathbf{R}\right\}$.

Множества A и B называются ***равными***, что обозначается $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Основные числовые множества:

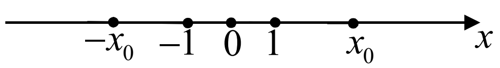
$\mathbf{N} = \{1,2,...,n,...\}$ – множество ***натуральных*** чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$ – множество ***целых*** чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$ – множество ***рациональных*** чисел, т.е. множество обыкновенных дробей вида $\frac{m}{n}$, где m – целое, n – натуральное; или, что равносильно, множество конечных и периодических десятичных дробей;

I – множество ***иррациональных*** чисел, т. е. множество бесконечных непериодических десятичных дробей;

$\mathbb{R}$ – множество ***действительных*** чисел, т. е. периодических и непериодических десятичных дробей (изображаются точками на числовой прямой (оси):



$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\, x > 0\}$ – множество положительных действительных чисел;

$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R},\, x < 0\}$ – множество отрицательных действительных чисел.

Если мы будем рассматривать часть чиловой оси, то получим следующие множества: ограниченные промежутки, а именно

$(a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a<x<b\}$ – ***интервал*** (открытый числовой промежуток);

$[a,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b\}$ – ***отрезок*** (замкнутый числовой промежуток);

$[a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a\le x<b\}$ и $(a,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ a<x\le b\}$ – ***полуинтервалы*** соответственно замкнутый слева и открытый справа и наоборот;

а также неограниченные промежутки - интервалы и полуинтервалы вида $(-\infty;+\infty);(a;+\infty);(-\infty;b);[a;+\infty);(-\infty;b]$

Если множество состоит из *конечного* числа элементов, оно называется ***конечным***, в противном случае – ***бесконечным***.

Если элементы бесконечного множества можно пересчитать – пронумеровать, т. е. однозначно сопоставить с элементами множества натуральных чисел, то такое множество называется ***счетным***. Можно показать, что множества целых и рациональных чисел являются счетными, а множество действительных чисел не является счетным.

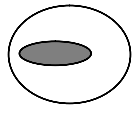
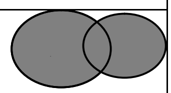
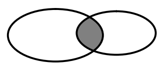
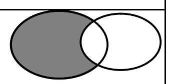
Важнейшее свойство действительных чисел – свойство непрерывности (принцип вложенных промежутков): если имеется множество замкнутых промежутков, каждый последующий из которых является подмножеством предыдущего, то найдется по крайней мере одно действительное число, принадлежащее всем промежуткам.

Логическая символика

Символ	Название	Пример применения	Читается
$\wedge$	*конъюнкция*	$A\wedge B$ истинно, когда и *A* и *B* истинны	«*A* и *B*»
$\vee$	*дизъюнкция*	$A\vee B$ истинно, когда *A* или *B, или A* и *B* истинны	«*A* или *B*»
$\Rightarrow$	*импликация, следование*	$A\Rightarrow B$ (если *A* истинно, то истинно *B*)	«из *A* следует *B*», «*B* – следствие *A*»
$\Leftrightarrow$	*эквивалентность, равносильность*	$A\Leftrightarrow B$ (А равносильно В)	«*A* тогда и только тогда, когда *B*», «*A* эквивалентно *B*»
$\forall$	*квантор общности*	$\forall x:\ A(x)$	«Для любого *x* справедливо $A(x)$»
$\exists$	*квантор суще-*	$\exists x: A(x)$	«Существует такое *x*

	ствования		(хотя бы одно), что справедливо $A(x)$»

Операции над множествами

1. Множество A называется ***подмножеством*** множества B (обозначается $A \subset B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае также говорят, что множество A *содержится* во множестве B (или множество B *содержит* множество A). *Пример*: $\{1,7\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathbb{R}$. *Замечание.* Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.	
2. ***Объединение (сумма)*** множеств A и B – это множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (часто читается A или B).	
3. ***Пересечение (произведение)*** множеств A и B – это множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих и множеству A, и множеству B (часто читается A и B).	
4. ***Разностью*** множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$, состоящее из элементов принадлежащих A, но не принадлежащих B.	

Замечание. Если множество $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется ***дополнением*** множества B до множества A и обозначается $\overline{B}$, тогда $B \cup \overline{B} = A, B \cap \overline{B} = \varnothing$.

Пример. Для множеств $\mathrm{X} = \{1,2,3,0,9\}$ и $\mathrm{Y} = \{1,3,4,5,7\}$ имеем: $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \{0,1,2,3,4,5,7,9\}$, $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \{1,3\}$, $\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y} = \{2,0,9\}$.

Определение. ***Декартовым произведением*** $X \times Y$ множеств X и Y называется множество упорядоченных пар их элементов:

$$X \times Y = \{ (x,y) \mid x \in \mathrm{X},\ y \in Y \}.$$

Замечание. Аналогично определяется декартово произведение любого конечного числа множеств:

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathrm{X}_i, i = 1,\ldots,n\}.$$

Примеры.

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ – множество упорядоченных пар действительных чисел- числовая плоскость;

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^3$ – множество упорядоченных троек действительных чисел – трехмерное пространство;

$\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}=\mathbb{R}^n=\left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right)\middle|\, x_i\in\mathbb{R},\, i=1,\ldots,n\right\}$ – n-мерное числовое (*евклидово*) пространство.

Множество $A\subset\mathbb{R}$ считается ***ограниченным сверху***, если существует число $b\in\mathbb{R}$, называемое ***верхней границей множества*** A, такое, что $a\le b$ для всех $a\in A$.

Очевидно, что существует бесконечное множество верхних границ, т. к. любое число $b_1>b$ тоже является верхней границей множества A. Наименьшая среди верхних границ ограниченного сверху множества называется ***точной верхней гранью*** множества A и обозначается sup A (от лат. *supremum* – наивысшее). Например, множество A правильных дробей ограничено сверху числом единица, причем $\sup A=1$.

Аналогично определяется множество, ***ограниченное снизу***, а также его нижняя и точная нижняя грани. Обозначается точная нижняя грань $\inf A$ (от лат. *infimum* – наинизшее).

Множество называется ***ограниченным,*** если оно ограничено и снизу, и сверху.

Если множество A не ограничено сверху, то, по определению, полагаем, что $\sup A=+\infty$; если множество A не ограничено снизу, то полагаем $\inf A=-\infty$. Эти понятия можно ввести и формальным образом как формальные символы, удовлетворяющие следующим условиям (постулатам):

$$\boxed{\begin{array}{l}
1)\ -\infty<x<+\infty,\ \forall x\in\mathbb{R};\\
2)\ x+\left(\pm\infty\right)=\pm\infty;\ x-\left(\pm\infty\right)=\mp\infty;\\
3)\ x\cdot\left(\pm\infty\right)=\begin{cases}\pm\infty, & 0<x<+\infty,\\ \mp\infty, & -\infty<x<0;\end{cases}\\
4)\ \dfrac{x}{\pm\infty}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.
\end{array}}$$

Аналогично вводится формально символ ∞ как удовлетворяющий условиям:

1) $\dfrac{x}{\infty}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

2) $x\cdot\infty=\infty,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

3) $\dfrac{x}{0}=\infty,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Выражения $\infty-\infty$ (разность бесконечностей одного знака), $0\cdot\infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0, 0^0 считаются неопределенными (***неопределенностями***) и обычно обозначаются $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и т. д.

Иногда бывает удобно расширить числовую прямую, рассматривая в качестве ее элементов наряду с числами (конечными точками) и символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ (вместе или по отдельности) – несобственные (бесконечные точки). Все такие числовые множества объединяются под общим названием ***расширенной числовой прямой***.

2. Понятие функции. Способы задания функций одной переменной

Определение. Пусть даны два непустых числовых множества X и Y. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие (по некоторому закону f) единственный элемент у множества Y, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** $y=f(x)$ со значениями из множества Y.

Остановимся на функции одной действительной переменной $y=f(x)$, где $x\in X\subset\mathbb{R}$. Здесь:

x – ***независимая переменная*** (***аргумент***);

у – ***зависимая переменная*** (***функция***);

множество $X=D_f=D(y)$ – ***область определения функции;***

множество $Y=E_f=E(y)=\left\{y\,\middle|\,y=f(x),\ x\in D_f\right\}$ – ***область значений функции***.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения понимают *естественную область определения*, т. е. множество всех действительных значений x, для которых функция имеет смысл.

*Примеры.*1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $D(y)=(0;2)$.

2) $y=arctgx$, $D(y)=R,\ E(y)=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Функция $y=y(n)=y_n,\ n\in\mathbf{N}$, натурального аргумента, т. е. функция, определенная на множестве натуральных чисел, называется ***последовательностью*** и записывается $\{y_1,y_2,...y_n,...\}$ или кратко $\{y_n\}$. Элементы $y_1,y_2,...y_n,...$ этого множества называются ***членами последовательности***. Если значения $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...$ – числа, то такая последовательность называется ***числовой***.

Примеры:

1) $\{-1,1,-1,...,-1,1,...\}$ или $y_n=(-1)^n,\ n\in\mathbf{N}$;

2) $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}$.

Зачастую функция задается только зависимостью $y=f(x)$. Тогда под ее множеством определения понимают *естественную область определения* D_f^E, т. е. множество всех тех действительных x, для которых $f(x)$ имеет смысл.

Задать функцию – это, по существу, указать множество ее определения и правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находятся соответствующие ему значения функции. Распространены три основных ***способа задания функции***:

1) ***табличный*** – с помощью таблицы, при котором перечисляются значения независимой переменной и соответствующие им значения функции, например

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	1	4	9	3,14	2010

Правило f: каждому $x\in X=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ соответствует, согласно таблице, единственное число y из $\{1,\ 0,\ 4,\ 9,\ 3{,}14,\ 2010\}$.

Такие функции часто получаются в результате записи эмпирических исследований.

2) ***графический*** – с помощью графика, при котором непосредственно задают график функции в соответствующей системе координат и по значению независимой переменной находят значение функции (рис. 1)

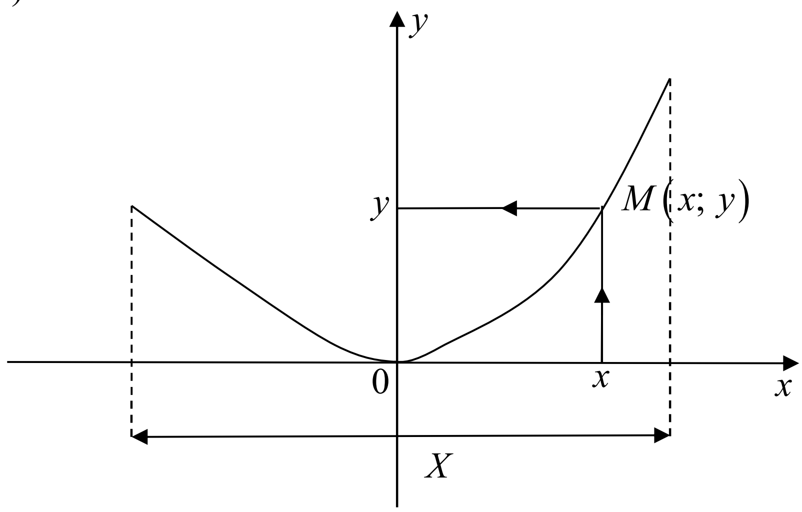


Рис. 1. Графический способ задания функции

В этом способе правило f заключается в следующем: на оси Ox берется любая точка с абсциссой $x \in X$, через которую параллельно оси Oy проводится прямая до пересечения с графиком функции в точке M, через точку M параллельно оси Ox проводится прямая до пересечения с осью Oy в точке с координатой y, в результате получаем зависимость $y = y(x), x \in X \subset \mathbb{R}$.

3) ***аналитический***, т.е. с помощью формулы. Можно выделить следующие три разновидности аналитического способа задания функции:

– ***явный*** (способ задания) – с помощью одного или нескольких аналитических выражений $y = y(x), x \in X \subset \mathbb{R}$, например

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in X = [0, 1]$; 2) $y = |x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} x^2, \ |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{x}, \ |x| \ge 1. \end{cases}$

– ***неявный***, т. е. с помощью уравнения $F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y$, решая которое относительно y или x, получим неявно заданную функцию $y = y(x)$, или $x = x(y)$ соответственно, например,

1) $x^2+y^2-1=0,\ x\in X=[0,1],\ y\in Y=[0,1]$ (задает $y=y(x)$ как неявную функцию x и $x=x(y)$ как неявную функцию y);

2) $x^2+y^2=1,\ x\in X=[-1,1],\ y\in Y=[-1,0]$ (задает $y=y(x)$ как неявную функцию x);

3) $x+y^2=1,\ x\in X=[0,1],\ y\in Y=[0,1]$ (задает $y=y(x)$ как неявную функцию x и $x=x(y)$ как неявную функцию y).

– ***параметрический*** – с помощью системы $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in T=[t_0,t_1]$, содержащей переменные x, y и параметр t, исключая который, получаем $y=y(x)$ как функцию x или $x=x(y)$ как функцию y, например,

1) $\begin{cases} x=t, \\ y=\sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ $t\in[0,1]$ ($y=\sqrt{1-x^2}$ – функция $x,\ x\in[0,1]$);

2) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $t\in[\pi,2\pi]$ ($y=-\sqrt{1-x^2}$ – функция $x,\ x\in[-1,1]$);

3) $\begin{cases} x=t^4+1, \\ y=t^2, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ ($x=y^2+1$ – функция $y,\ y\in[0,+\infty]$).

Замечание 1. От явно способа задания функциивсегда можно перейти к неявному:

$$y=16+x^2 \Rightarrow y-16-x^2=0$$

или параметрическому:

$$y=16+x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=t, \\ y=16+t^2. \end{cases}$$

Обратный переход возможен далеко не всегда.

Замечание 2. Отметим, что выражение $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$ и $x^2+y^2=1$ для $x\in[0,1],\ y\in[0,1]$, а также $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, равносильны и задают одну и ту же функцию, но в первом случае явно, во втором – неявно, в третьем – параметрически.

Рассмотрим далее выражение $x^2+y^2=1,\ x\in[-1,1],\ y\in[-1,1]$. В этом (общем) случае оно не определяет ни y как неявную функцию x, ни x как неявную функцию y. Существует бесконечное число функций вида $y = y(x)$ таких, что $x^2 + (y(x))^2 = 1,\ x \in [-1, 1]$, в частности $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$; $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 0], \\ -\sqrt{1-x^2},\ x \in (0, 1]. \end{cases}$

Встречается также *словесный* способ задания функции, например,

$f(x) = [x]$ - целая часть действительного числа x;

$g(x) = \{x\}$ - дробная часть действительного числа x;

$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathrm{Q}, \\ y, x \in \mathrm{I} \end{cases}$ – функция Дирихле, которая задается следующим образом: функция равна 1 для всех рациональных значений аргумента x и 0 - для всех иррациональных значений x. Такая функция не может быть задана ни табличным способом (так как она определяется на всей числовой оси и множество значений ее аргумента бесконечно), ни графическим.

Определение. Пусть функция $y = \varphi(x)$ отображает числовое множество $X = D_\varphi$ в множество $Y = E_\varphi$, а функция $z = f(y)$ отображает множество $R_\varphi = D_f$ в множество E_f. Тогда функция

$$z = f(\varphi(x))$$

называемая ***сложной*** функцией, или ***суперпозицией (композицией)*** функций φ и f, определена на множестве X и отображает его в множество E_f. При этом функция $y = \varphi(x)$ считается промежуточным аргументом (переменной) для функции $z = f(\varphi(x))$.

Например, функцию $z = \sin 2x$ можно рассматривать как сложную, образованную суперпозицией функций $y = 2x$ и $z = \sin y$.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством определения D_f и множеством значений E_f, т. е. каждому числу $x \in D_f$ соответствует единственное число $y \in E_f$, и наоборот. Т. к. при этом каждому числу $y \in E_f$ ставится в соответствие единственное число $x \in D_f$, то можно говорить, что на множестве R_f определена функция $x = f^{-1}(y)$, ***обратная*** по отношению к данной функции $y = f(x)$, $x \in D_f$.

Поскольку графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ совпадают, то графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$, т. к. при переходе от прямой функции к обратной оси абсцисс и ординат меняются местами.

Например, функция $y = x^2$, $D_f = [-2,0]$, $E_f = [0,4]$ на отрезке $[-2,0]$ имеет обратную функцию $y = -\sqrt{x}$, $D_f = [0, 4]$, $E_f = [-2, 0]$ (рис. 2).

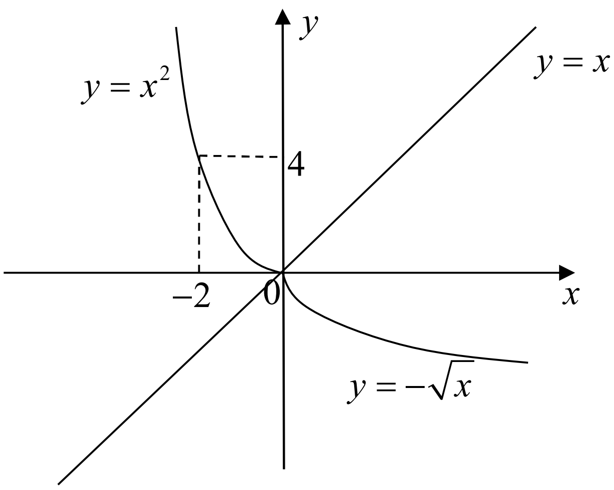


Рис. 2. Взаимное расположение графиков прямой и обратной функций

Отметим, что функция $y = x^2$ на промежутке $[-2, 2]$ не имеет обратной, т. к., например, значению $y = 1{,}8$ соответствуют два значения $x = \pm\sqrt{1{,}8}$, что нарушает однозначность соответствия между множествами D_f и E_f.

3. Свойства функций одной переменной

1. ***Четность и нечетность функции.*** Пусть область определения D_f функции f симметрична относительно начала отсчета. Если при этом

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f,$$

то функция называется ***четной,*** если же

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D_f,$$

то функция называется ***нечетной***.

Из определения четности функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Например, функция $y = x^2,\ x \in [-1, 1]$, является четной (см. ее график на рис. 3).

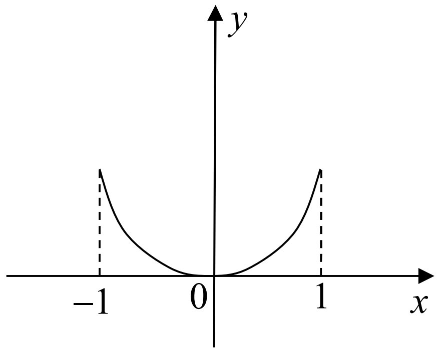


Рис. 3. График функции $y = x^2,\ x \in [-1, 1]$

Функция $y = x^3,\ x \in \mathbf{R}$, является нечетной (см. ее график на рис. 4); функция $y = x^2 + 2x + 1,\ x \in [-1, 1]$, не является ни четной, ни нечетной.

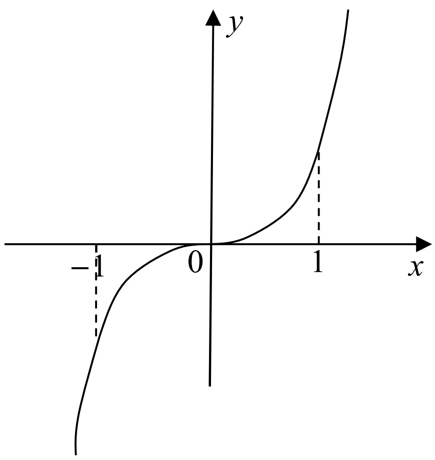


Рис. 4 График функции $y = x^3,\ x \in \mathbf{R}$

Замечание 1. Произвольная функция $f:[-X;X]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ может быть единственным образом представлена в виде суммы нечётной и чётной функций: $f(x)=g(x)+h(x)$,

где $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Замечание 2. Функция $f(x)\equiv 0$ — единственная функция, одновременно являющаяся нечётной и чётной.

2. ***Периодичность функции.*** Функция $y=f(x)$ называется периодической, если для нее существует такое число $T>0$, называемое ***периодом функции***, что при любых x из области определения функции числа $x+T$ и $x-T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg}x$ с наименьшими периодами 2π и π соответственно (см. рис. 5, 6).

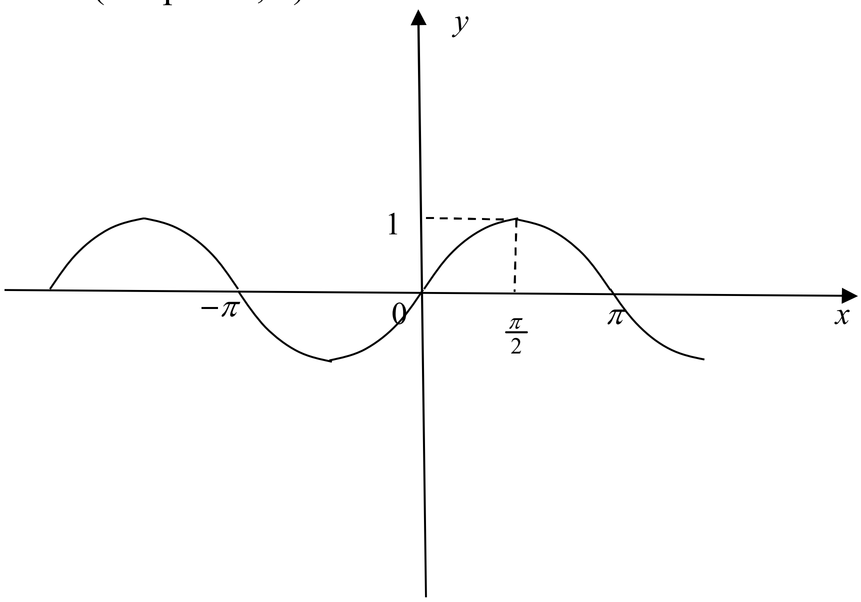


Рис. 5. График функции $y=\sin x$

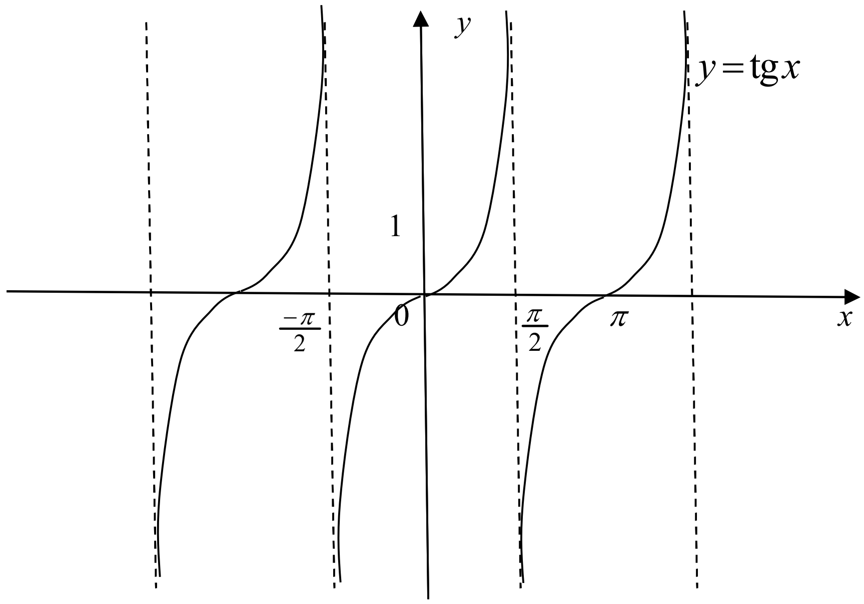


Рис. 6. График функции $y = \operatorname{tg} x$

3. ***Монотонность функции***.

Функция $y = f(x)$ на некотором множестве $X \subset D(y)$ называется ***возрастающей*** (пишут $f \nearrow$), если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции (см. рис. 7а), т. е.

$$f \nearrow \text{ на } X \Leftrightarrow \forall x_1,\, x_2 \in X,\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Функция $y = f(x)$ на некотором множестве $X \subset D(y)$ называется ***убывающей*** (пишут $f \searrow$), если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции (см. рис. 7б), т. е.

$$f \searrow \text{ на } X \Leftrightarrow \forall x_1,\, x_2 \in X,\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Аналогично вводятся понятия неубывающей и невозрастающей функций (см. рис. 8):

$y = f(x)$ - ***неубывающая*** на $X \Leftrightarrow \forall x_1,\, x_2 \in X,\, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$;

$y = f(x)$ - ***невозрастающая*** на $X \Leftrightarrow \forall x_1,\, x_2 \in X,\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными***, причем возрастающие и убывающие - ***строго монотонными***.

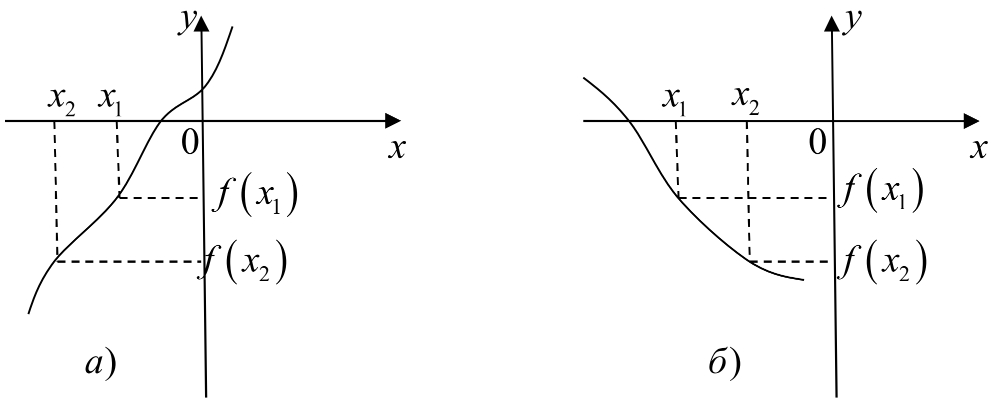


Рис. 7. Возрастающая а) и убывающая б) функции

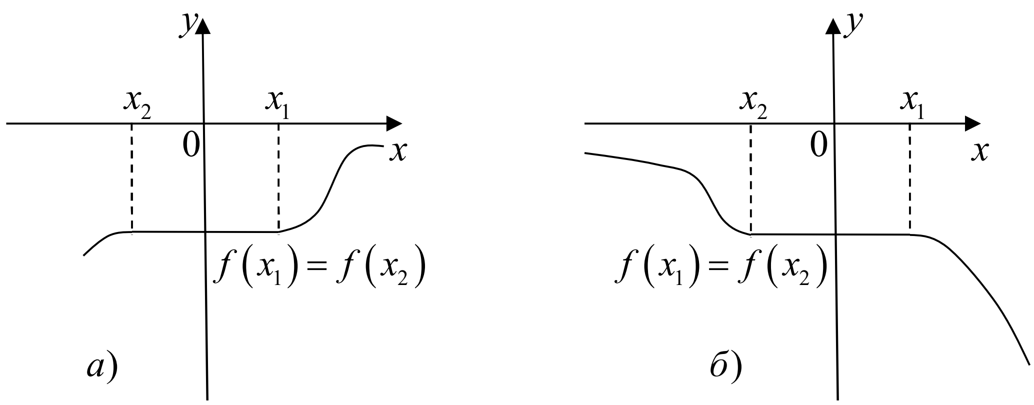


Рис. 8. Неубывающая а) и невозрастающая б) функции

4. **О*граниченность функции.*** Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)*** на множестве $X\subset D_f$, если существует такое число *M*, что для любых *x* из этого множества выполняется условие

$$f(x)\le M \quad \left(f(x)\ge M\right).$$

Функция $y=f(x)$ считается ***ограниченной*** на множестве $X\subset D_f$, если существует положительное число *M*, что

$$\left|f(x)\right|\le M,\ \ \forall x\in X.$$

Функция, не являющаяся ограниченной, называется ***неограниченной***.

Примеры:

1) функция $y=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, ограничена снизу на всей числовой оси;

2) $y=x$ ограничена сверху на множестве $(-\infty, 0]$;

3) $y=\sin x$ ограничена на множестве $\mathbb{R}$.

4.Элементарные функции

Основные элементарные функции:

1) ***степенная функция*** $y = x^{\alpha}, x \in D_f^E, \alpha \in \mathbf{R}$ (см. рис. 9);

2) ***показательная функция*** $y = a^x,\ \ a > 0,\ \ x \in \mathbf{R}$ (см. рис. 10);

3) ***логарифмическая функция*** $y = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R}_+$ (см. рис. 11);

4) ***тригонометрические функции*** $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,$ $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in D_f^E$ (см. рис. 12);

5) ***обратные тригонометрические функции*** $y = \arcsin x,$ $y = \arccos x,\ \ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in D_f^E$ (см. рис. 13).

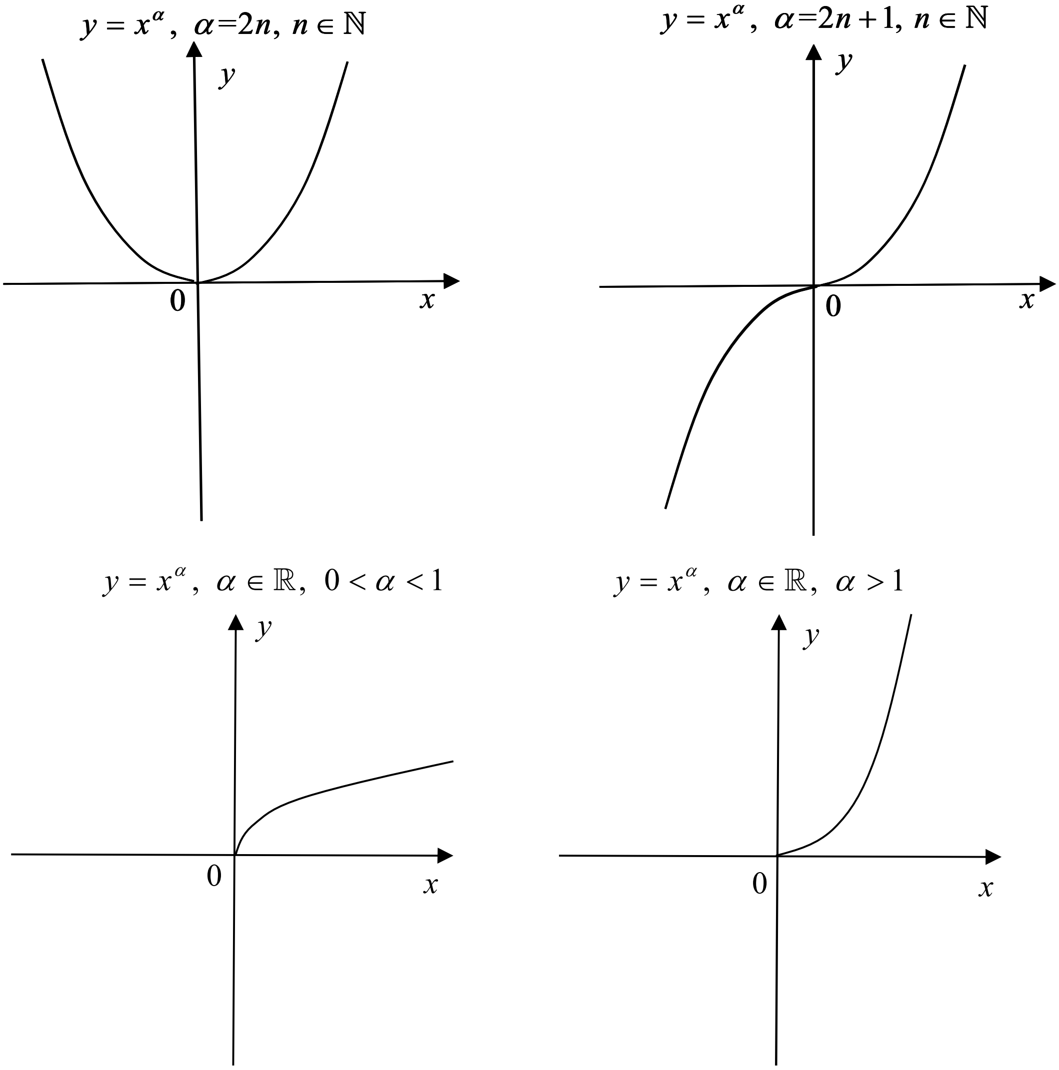


Рис. 9. График степенной функции

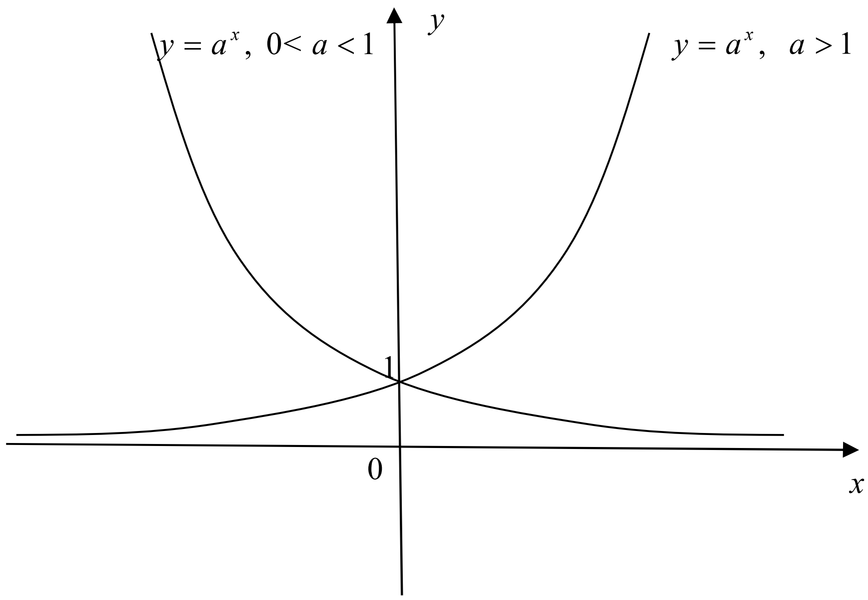


Рис. 10. График показательной функции

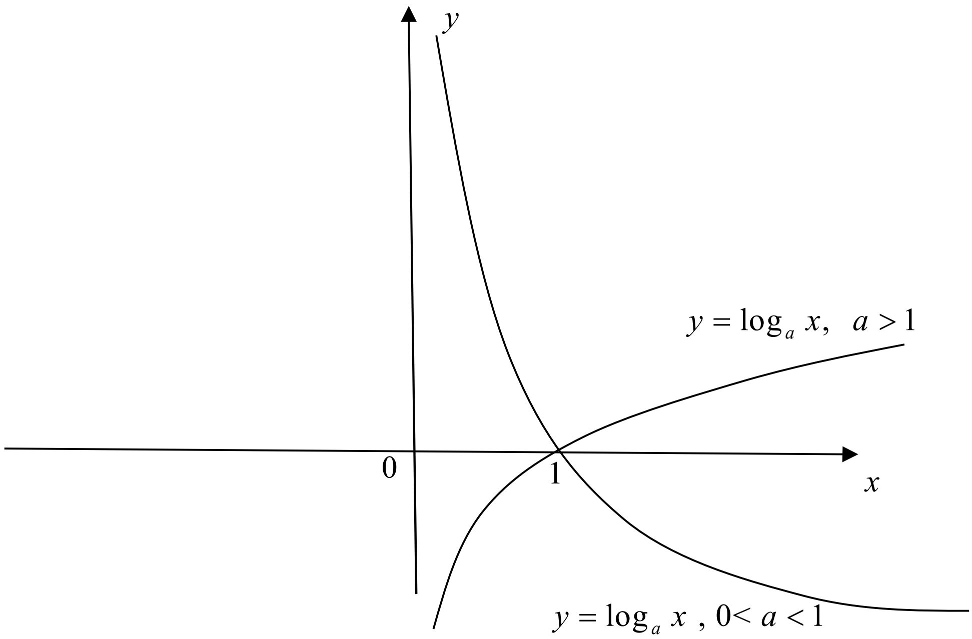
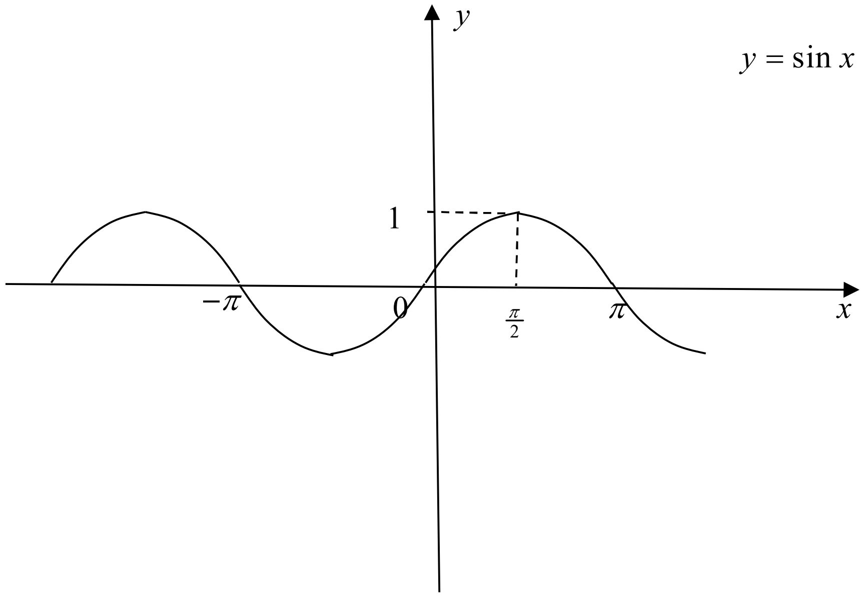
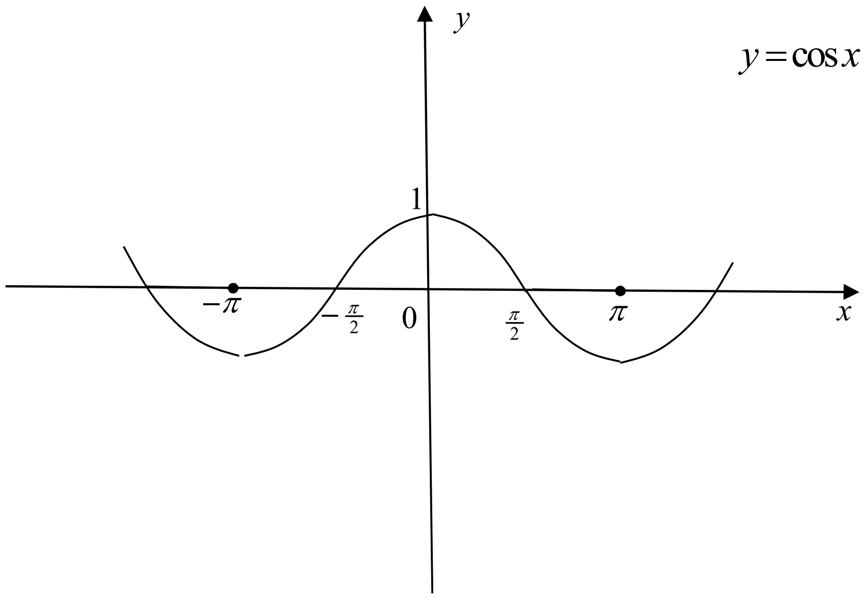


Рис. 11. График логарифмической функции


y
$y = \sin x$
1
$-\pi$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x


y
$y = \cos x$
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

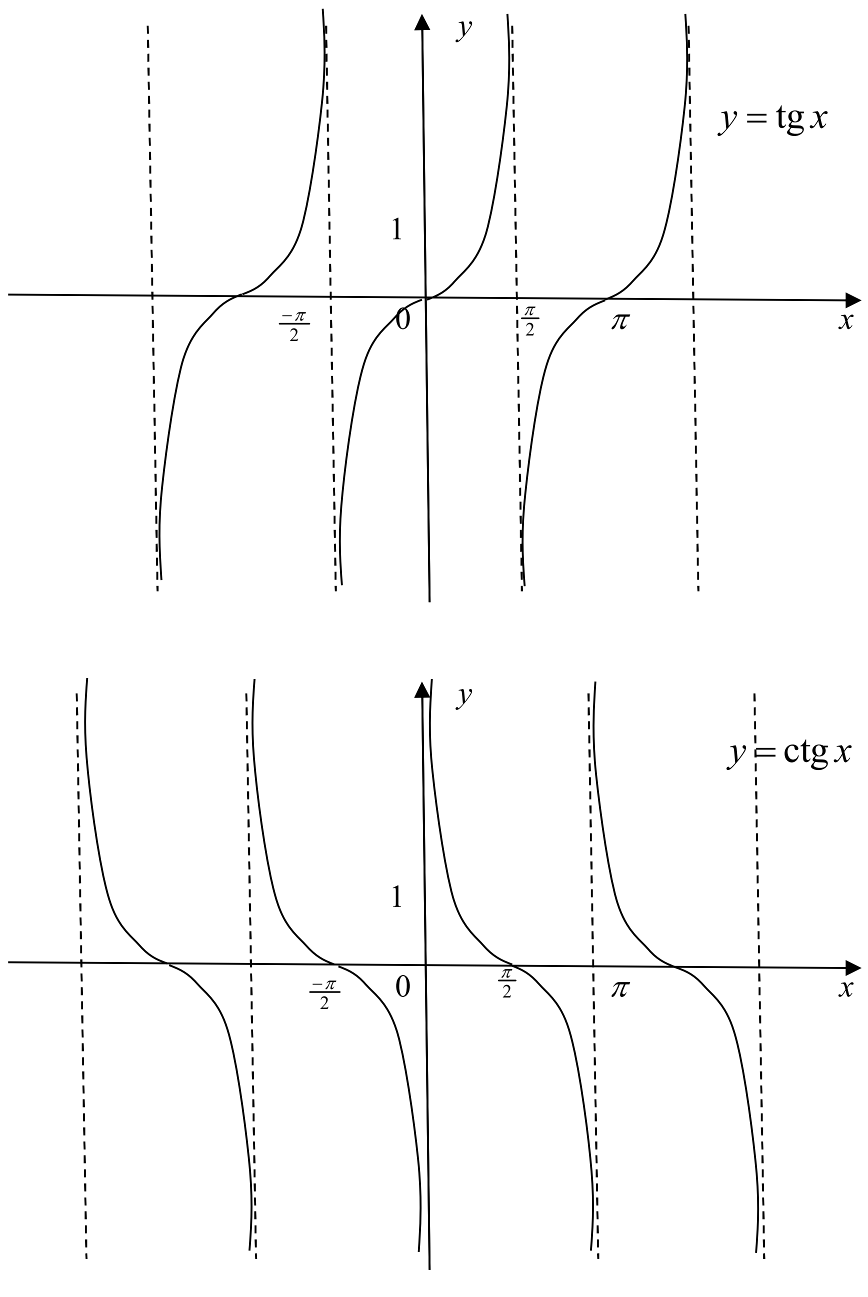


Рис. 12. Графики тригонометрических функций

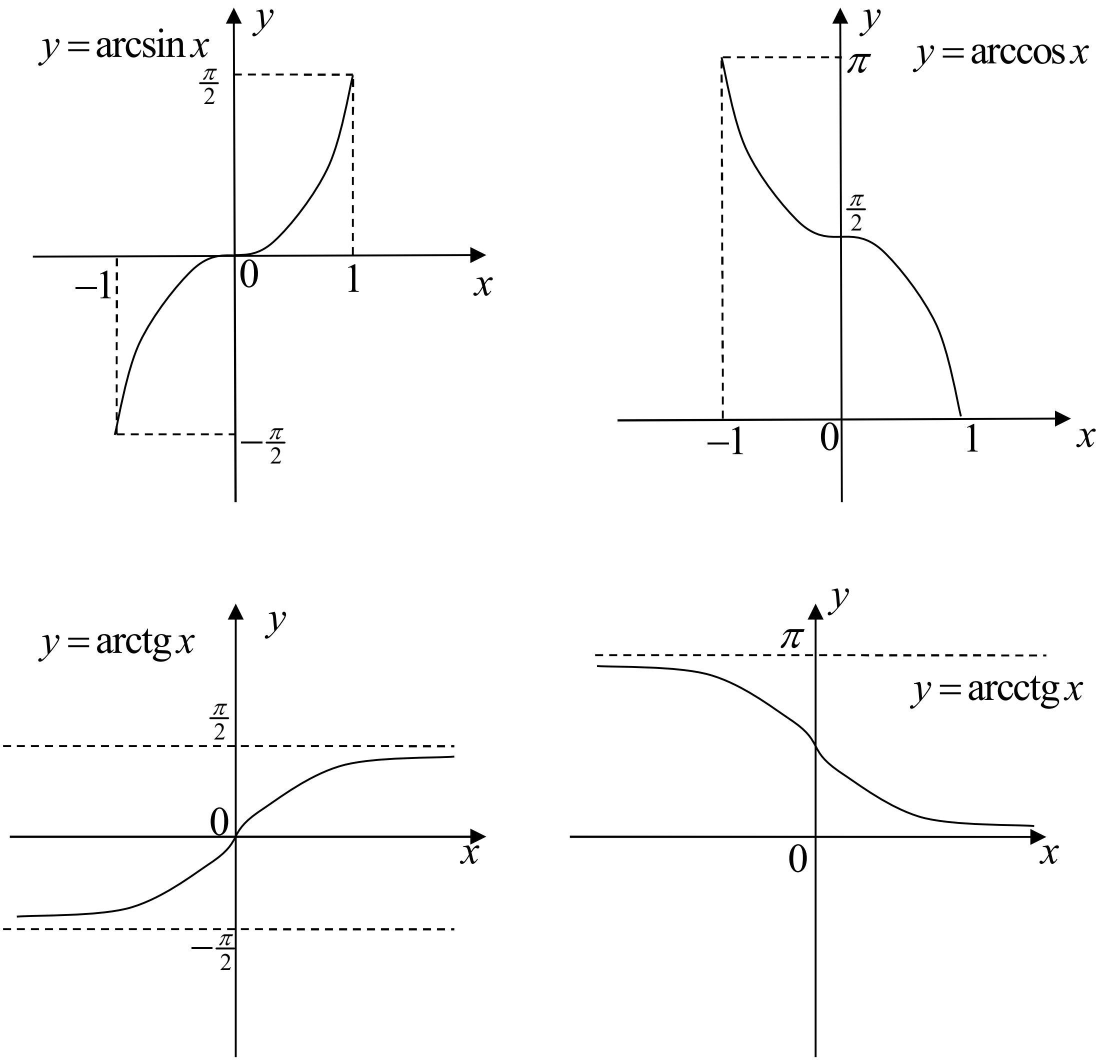


Рис. 13. Графики обратных тригонометрических функций

Элементарными функциями называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) с применением действительных коэффициентов и образования сложной функции.

Некоторые важные элементарные функции:

1) ***линейная функция*** $y = ax + b$.

2) ***квадратичная функция*** $y = ax^2 + bx + c$.

3) многочлены с действительными коэффициентами (***целые рациональные функции***) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

4) ***дробно-рациональные функции*** (рациональные дроби) – отношение многочленов: $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

5) ***иррациональные функции*** – функции, в которых используется операция извлечения корня.

Некоторые неэлементарные функции:

1) функция ***сигнум*** – функция знака - $y=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1,\ x>0,\\ 0,\ x=0,\\ -1,\ x<0.\end{cases}$

2) дробная часть $y=\{x\}=x-[x]$, где $[x]$ означает целую часть x.

3) функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x - \text{рациональное},\\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное}.\end{cases}$

Классификация элементарных функций :

1) алгебраические функции, которые делятся на:

1.1) ***рациональные*** функции, которые делятся на:

1.1.1)***многочлены*** $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$;

1.1.2)*дробные рациональные функции* $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$;

1.2) ***иррациональные*** функции (содержащие корень любой степени).

2) трансцендентные – функции, не являющиеся алгебраическими. Примерами трансцендентных функций являются: тригонометрические и обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

5. Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек

Окрестностью $O(a)$ конечной точки a называется любой интервал, содержащий эту точку: $O(a)=(\alpha,\beta)$, если $a\in(\alpha,\beta)$.

ε***-окрестностью*** $O_\varepsilon(a)$ точки a при $\varepsilon>0$ называется интервал вида $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, т. е. множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon$. (рис. 14).

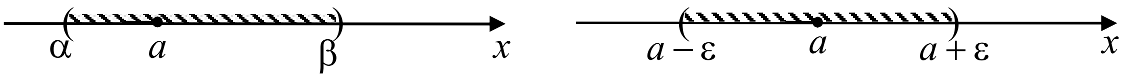


Рис. 14. Окрестности точки a

Если из окрестности $O(a)$ саму точку $a \in \mathbf{R}$ удалить, то получим соответственно ***проколотую*** $\overset{\circ}{O}(a)$ ***окрестность*** этой точки. Таким образом, проколотая окрестность точки a - это множество точек x, удовлетворяющих двойному неравенству $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Интервалы вида $(a - \varepsilon, a)$ и $(a, a + \varepsilon)$ называются соответственно ***левосторонней*** и ***правосторонней*** окрестностями точки a.

Окрестность бесконечно удаленной точки:

$O(+\infty) = (p, +\infty) = \{\forall x \in \mathbf{R} : x > p\}$, где p - любое действительное число (рис. 15.*а*);

$O(-\infty) = (-\infty, q) = \{\forall x \in \mathbf{R} : x < q\}$, где q - любое действительное число (рис. 15.*б*);

$O(\infty) = (-\infty, q) \cup (p, +\infty)$, $q > p$ - любые действительные числа (рис. 15.*в*);

$O_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) = \{\forall x \in \mathbf{R} : |x| > \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, т.е. множество точек, удовлетворяющих неравенству $|x| > \varepsilon$ (рис. 15.*г*).

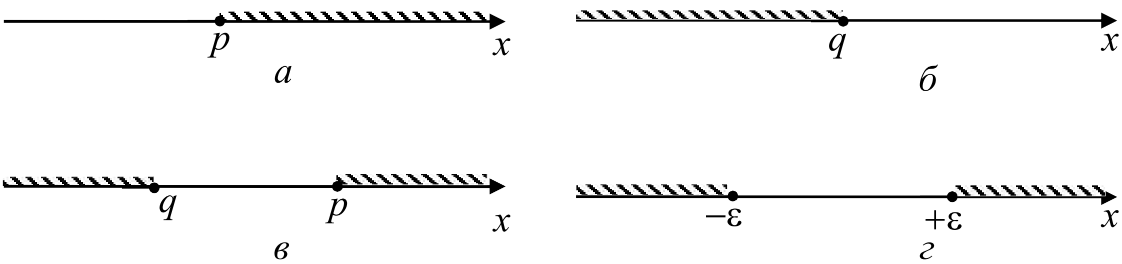


Рис. 15. Окрестности бесконечно удаленной точки

6. Понятие предела функции. Односторонние пределы. Арифметические свойства пределов

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}\left(a\right)$ точки a.

Определение. Число b называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x\to a$, если для любой окрестности $O\left(b\right)$ точки b найдется такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{O}\left(a\right)$ точки a, что как только $x\in\overset{\circ}{O}\left(a\right)$, то $f\left(x\right)\in B\left(b\right)$, что обозначается $b=\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ или $f\left(x\right)\to b$ при $x\to a$ ($f\left(x\right)$ стремится к b при x, стремящемся к a).

Здесь точки a, b могут быть как конечные, так и бесконечные.

Следует отметить, что для существования предела функции при $x\to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке a. При нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки a, отличные от a.

Определение. Если значения функции $y=f(x)$ стремятся к пределу b_1 при $x\to a$, причем x принимает только значения меньше a, то записывают $\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)=b_1$ и b_1 называют ***пределом слева*** в точке a. Если $\boldsymbol{x}$ принимает только значения большие чем $\boldsymbol{a}$, то записывают $\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)=b_2$ и b_2 называют ***пределом справа*** в точке a.

Значения односторонних пределов обычно записывают следующим образом: предел слева – $\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)=f\left(a-0\right)$ и предел справа – $\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)=f\left(a+0\right)$.

Для существования конечного предела b функции $y=f\left(x\right)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонние пределы $f\left(a-0\right)$ и $f\left(a+0\right)$:

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=b\Leftrightarrow f\left(a-0\right)=f\left(a+0\right)=b.$$

Арифметические свойства пределов

Предположим, что существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, тогда:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\pm\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$, где $c=const$ – постоянная;

г) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Для всех элементарных функций $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, если a – внутренняя точка области определения. Если a – граничная точка области определения, то равенство верно для односторонних пределов.

Лемма о сжатой переменной (двух «милиционерах»). Если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}(a)$ для функций $f(x), u(x), g(x)$ выполняется неравенство $f(x)\le u(x)\le g(x)$ и существуют (конечные) пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$, то существует $\lim\limits_{x\to a}u(x)$, также равный b.

Предельный переход в неравенствах: если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}(a)$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$ и существуют (конечные) пределы, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Следует отметить, что строгое неравенство может переходить в равенство: если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{O}(a)$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x)<g(x)$ и существуют (конечные) пределы, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Пример. Рассмотрим две функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ и $g(x)=\dfrac{1}{x}$. При $x\to\infty$ имеем строгое неравенство $f(x)<g(x)$. Однако $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

Предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,}$$

называется ***первым замечательным пределом***.

Следует иметь в виду и не путать с первым замечательным пределом следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x}{x}=\left[\frac{\infty}{0}\right]=\infty,\ \lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{\textit{огр.ф.}}{0}\right]=\infty.$$

Вторым замечательным пределом **называется предел вида:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e},$$

где e = 2,718281828459045….

Число e играет важную роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием e, $y=e^{x}$ называется ***экспонентой.*** Логарифм по основанию e называется ***натуральным (или неперовым) логарифмом*** и обозначается $\ln x$:

$$\boxed{\ln x=\log_{e} x.}$$

Из второго замечательного предела вытекают пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$, которые широко применяются для раскрытия неопределенностей.

7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y=\alpha\left(x\right)$ называется ***бесконечно малой (бмф)*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Пример. Функция $y=4-x$ является *бмф* при $x\to 4$, т. к. $\lim\limits_{x\to 4}\left(4-x\right)=0$, а функция $y=\dfrac{1}{x^{2}}$ является *бмф* при $x\to\infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{2}}=0$.

Основная теорема о (конечном) пределе: для того чтобы при $x\to a$ существовал (конечный) предел функции $y=f\left(x\right)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой (достаточно малой) проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}\left(a\right)$ предельной точки a выполнялось равенство $f\left(x\right)=b+\alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)$ – *бмф* при $x\to a$, $x\in\overset{\circ}{O}\left(a\right)$, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=b+\alpha(x).$$

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций производится путем нахождения предела их отношения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *бмф* при $x\to a$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=A$. Тогда если:

1) $A = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бмф*** при $x\to a$, что записывается в виде $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

2) $A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – ***бмф одного порядка малости*** при $x\to a$;

3) $A=0$, то $\beta(x)$ есть ***бмф более высокого порядка малости***, чем $\alpha(x)$ при $x\to a$ что записывается в виде $\beta(x)=o(\alpha(x))$;

4) $A=\infty$, то $\alpha(x)$ есть ***бмф более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$ при $x\to a$ что записывается в виде $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

***Свойства бесконечно малых функций*:**

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

3. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

4. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ и $\beta(x)\sim\gamma(x)$, то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

5. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))=o(\beta(x))$.

6. Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$.

Последнее свойство часто используется при нахождении пределов. Бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными.

Следует отметить, что частное от деления *бмф* не обязательно бесконечно малая функция.

Пример. Рассмотрим функции: $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\gamma(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

Тогда $\alpha(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$, $\beta(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$, $\gamma(x)$ – *бмф* при $x\to\infty$.

Частное $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=x$ есть функция бесконечно большая при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x}$ есть *бмф* при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=1+\dfrac{1}{x}$ есть функция, имеющая конечный предел при $x\to\infty$.

Функция $y=\beta(x)$ называется ***бесконечно большой (ббф)*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a}|\beta(x)|=+\infty$.

Пример. Функция $y=4-x$ является *ббф* при $x\to\infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}(4-x)=\infty$, а функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ является *ббф* при $x\to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Свойства бесконечно больших функций.

1. Если в некоторой прололотой окрестности точки a функция $\alpha(x)\neq 0$ и является *бмф* при $x\to a$, то $\beta(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть *ббф* при $x\to a$ и наоборот.

Эти свойства символически записываются $\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$ и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$.

2. Произведение *ббф* на функцию $|f(x)|>M\neq 0$ есть *ббф*. В частности, произведение бесконечно больших функций есть *ббф.*

3. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть *ббф*.

4. Сумма двух *ббф* одинакового знака есть *ббф*.

Следует отметить, что разность двух *ббф* одинакового знака не обязательно бесконечно большая функция.

Пример. Рассмотрим *ббф* при $x\to\infty$: $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=x^2+x$, $\gamma(x)=x^2+3$, $\mu(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, $\nu(x)=x^3$.

Тогда разность $\beta(x)-\alpha(x)=x$ есть *ббф* при $x\to\infty$; разность $\mu(x)-\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ есть *б.м.ф.* при $x\to\infty$; разность $\gamma(x)-\alpha(x)=3$ есть постоянная функция.

Частное $\dfrac{\nu(x)}{\alpha(x)} = x$ есть *ббф* при $x \to \infty$; частное $\dfrac{\alpha(x)}{\nu(x)} = \dfrac{1}{x}$ есть *бмф* при $x \to \infty$; частное $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \dfrac{3}{x^2}$ есть функция, имеющая конечный предел при $x \to \infty$.

8. Вычисление пределов. Раскрытие некоторых видов неопределенностей

Отметим некоторые общие методы вычисления пределов.

1. Использование основных теорем о пределах. Поскольку для основных элементарных функций во всех точках их области определения (для элементарных функций во всех точках из интервала их области определения) имеет место свойство

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a),}$$

то при вычислении пределов прежде всего вместо x подставляем предельное значение (обычно это записывается в квадратных скобках) и, если значение $f(a)$ определено, применяем основные теоремы о пределах.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2^x + 3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(3^{2x}\left(\cos 2x + 2x^2\right)\right)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2^x + 3} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + 2x + 1\right)}{\lim\limits_{x \to 1}\left(2^x + 3\right)} = \left[\dfrac{1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{2^1 + 3}\right] = \dfrac{2}{5}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(3^{2x} \cdot \left(\cos 2x + 2x^2\right)\right) = \lim\limits_{x \to 0} 3^{2x} \cdot \lim\limits_{x \to 0}\left(\cos 2x + 2x^2\right) =$

$= \left[3^0 \cdot \left(\cos 0 + 2 \cdot 0\right)\right] = 1 \cdot 1 = 1.$

Однако часто при подстановке в $f(x)$ вместо x предельного значения a получаются выражения вида: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$; $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$; $[0 \cdot \infty]$; $\left[1^\infty\right]$; $[\infty - \infty]$

и другие, которые называются неопределенностями и которые нужно «раскрывать» специальными методами, например, учитывая характер стремления к пределу отдельных функций, составляющих (входящих) функцию $f(x)$ (см. ниже: раскрытие некоторых видов неопределенностей).

2. При вычислении пределов иногда удобно воспользоваться односторонними пределами.

Пример . Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} \; при\; |x|<1 \; и \; x\neq 0,\\ x^2 \; при \; |x|\geq 1,\end{cases}$

при: а) $x_0=1$, б) $x_0=0$, в) $x_0=-1$.

Решение.

а) $f(x_0-0)=f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 1-0}1=1$,

$f(x_0+0)=f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}x^2=1$.

Таким образом, $f(1-0)=f(1+0)=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

б) $f(x_0-0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1$,

$f(x_0+0)=f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1.$

Таким образом, $f(-0)\neq f(+0)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует.

в) $f(x_0-0)=f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1-0}x^2=1$,

$f(x_0+0)=f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to -1+0}(-1)=-1$.

Таким образом, $f(-1-0)\neq f(-1+0)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует.

3. Использование эквивалентных бесконечно малых функций в произведениях и частном. При нахождении пределов бесконечно ма-

лые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\gamma(x)}{\beta(x)},\ \text{если } f(x)\sim\alpha(x),\ g(x)\sim\beta(x),\ p(x)\sim\gamma(x).}$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	2. $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
3. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.	4. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
5. $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	6. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.
7. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.	8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Решение.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{x+x^2}{2}\\ \sin 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{8x}=\frac{1}{8}.$$

В следующей таблице приведены соотношения пределов суммы, произведения, частного двух функций $f(x)$ и $g(x)$, свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
b	c	$b+c$	bc	$\dfrac{b}{c}$, если $c\neq 0$
$b\neq\infty$	∞	∞	∞, если $b\neq 0$	$\left[\dfrac{b}{\infty}\right]=0$
∞	$c\neq\infty$	∞	∞ если $c\neq 0$	$\left[\dfrac{\infty}{c}\right]=\infty$
0	0	0	0	Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
b	0	b	0	$\left[\dfrac{b}{0}\right]=\infty$, если $b\neq 0$
0	∞	∞	Неопределенность $[0\cdot\infty]$	$\left[\dfrac{0}{\infty}\right]=0$
∞	0	∞	Неопределенность $[\infty\cdot 0]$	$\left[\dfrac{\infty}{0}\right]=\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	Неопределенность $[\infty-\infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Рассмотрим основные методы раскрытия некоторых неопределенностей.

Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

1. Использование первого замечательного предела. При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые.

2. При нахождении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если $P(a)=Q(a)=0$, следует числитель и знаменатель дроби

разделить на разность $(x-a)$ один или несколько раз, пока не исчезнет неопределенность.

3. При раскрытии неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и (или) знаменателе следует избавиться от иррациональности путем умножения на соответствующее сопряженное выражение или производя замену переменных.

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. При нахождении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на x^n, где n –высшая степень этих многочленов.

2. При раскрытии неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и знаменателе дроби выделяются множители x^m, x^n, где m, n – максимально возможные показатели степеней $\left((m, n)\in\mathbb{Q}\right)$. Затем производится сокращение на $x^p\left(p=\min(m,n)\right)$.

Неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$ часто используется второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn},\ \lim_{x\to0}(1+kx)^{n/x}=e^{kn}.$$

Неопределенности вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$.

Неопределенности таких видов раскрываются сведением с помощью преобразований к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и другим.

9. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Т. к. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то второе условие определения непрерывности функции в точке можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Это означает, что для непрерывной функции знаки предела и функции можно переставлять.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 16).

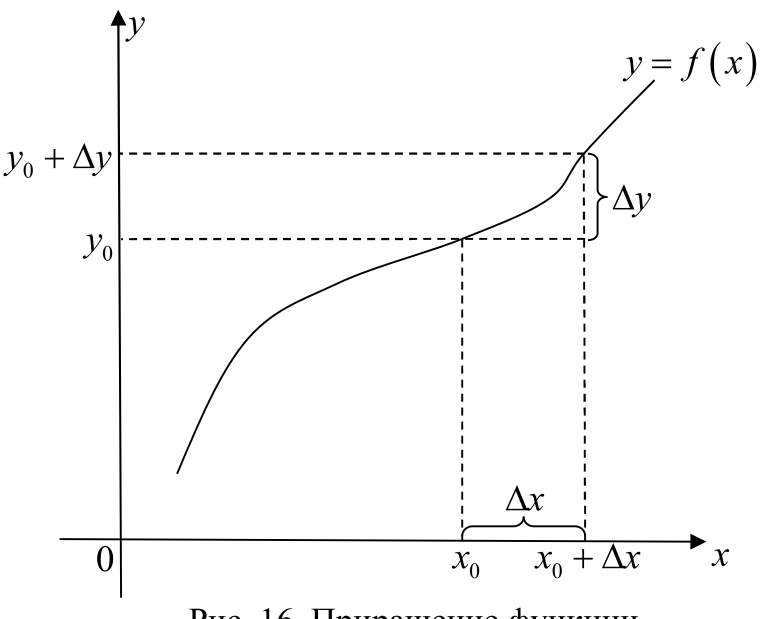


Рис. 16. Приращение функции

Из второго условия определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 вытекает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и конечен. Это равносильно существованию предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=0$. Таким образом, второе условие в определении означает, что $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$, т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (определение непрерывности на языке приращений).

С помощью определения непрерывности на языке приращений доказывается непрерывность основных элементарных функций.

Пример. Доказать, что функция $y=x^3$ непрерывна в любой точке области определения, т. е. в любой точке $x_0\in\mathbf{R}$.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx в точке x_0 и найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=$$
$$=x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)=3x_0^2\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+3x_0\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^3=3x_0^2\cdot 0+3x_0\cdot 0+0=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, а это и означает, что функция $y=x^3$ непрерывна в точке $x_0\in\mathbf{R}$.

Если функция $y=f(x)$ определена в левосторонней (или правосторонней) окрестности точки x_0 *и* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f\left(x_0\right)$ (аналогично $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f\left(x_0\right)$), то функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***слева*** (соответственно ***справа***).

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда она непрерывна в ней слева и справа.

Отсюда получаем удобный на практике ***критерий (условия)*** непрерывности.

$f(x)$ непрерывна при $x=x_0$ в том и только том случае, если 1) функция определена в точке x_0; 2) односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f\left(x_0+0\right)$ функции в точ-

ке x_0 существуют, равны между собой и равны значению функции в этой точке: $f(x_0-0)=f\left(x_0+0\right)=f\left(x_0\right)$.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их арифметические комбинации: $f(x)\pm g(x)$, $c\cdot f(x)$ (с – постоянная), $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии что $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

2. Если функция $u=\phi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\phi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\phi(x))$ непрерывна в точке x_0.

10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала *(a,b)* в точке *a* непрерывна справа, а в точке *b* непрерывна слева.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Основные элементарные функции непрерывны в области их определения;

2. Элементарные функции непрерывны на каждом из интервалов, целиком лежащих в области определения;

3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (***первая теорема Вейерштрасса***);

4. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке она достигает своего наименьшего значения $f_{\text{нм}}$ и наибольшего значения $f_{\text{нб}}$ (***вторая теорема Вейерштрасса***) (рис. 17).

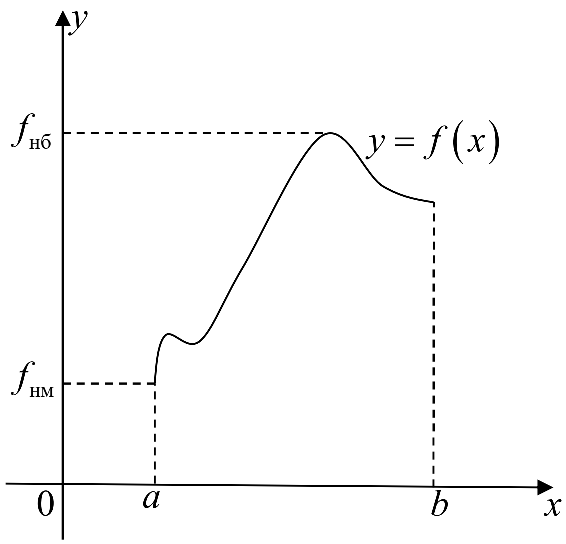


Рис. 17. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции

5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A, f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c \in [a;b]$, что $f(c)=C$ (***теорема Больцано-Коши о промежуточном значении***) (рис. 18);

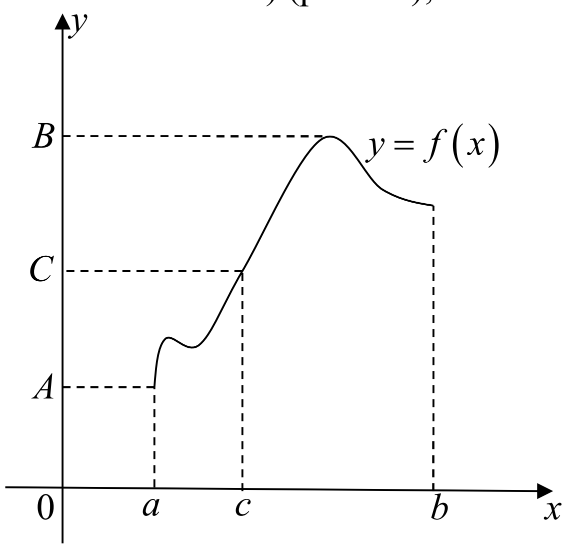


Рис. 18. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции

11. Точки разрыва функции и их классификация

Если для функции $y = f(x)$, определенной по крайней мере в некоторой проколотой окрестности точки x_0, не выполняется хотя бы одно из условий критерия непрерывности, то точка называется ***точ-***

кой разрыва функции.

Точки разрыва функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется точкой:

1) ***устранимого разрыва*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют односторонние конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, они равны между собой: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но сама функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0, или определена, но ее значение не равно односторонним пределам: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$;

2) ***конечного разрыва*** *(скачка) функции* $y = f(x)$, *если в этой точке существуют конечные односторонние пределы* $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, *но они не равны между собой:* $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$;

3) ***бесконечного разрыва*** (скачка) функции $y = f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен;

4) ***несуществования***, если не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или значение сделать равным односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной.

Точки устранимого и конечного разрывов называют ***точками разрыва I рода.***

Функция, которая на любом конечном интервале имеет конечное число разрывов I рода, называется ***кусочно-непрерывной*** (на этом интервале).

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точки разрыва называют ***точками разрыва II рода.***