1. Diferenciación

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.

b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.

Diferenciación a dos puntos

forward $\rightarrow$ $f'_+(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

backward $\rightarrow$ $f'_-(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$; $x_0 = -0{,}3$; $x_1 = -0{,}2$ y $x_2 = -0{,}1$

$$f'_+(-0{,}2) = \frac{f(-0{,}1) - f(-0{,}2)}{0{,}1} \simeq 0{,}18$$

$$f'_-(-0{,}2) = \frac{f(-0{,}2) - f(-0{,}3)}{0{,}1} \simeq 0{,}9$$

$f'(x) = -4\sin(2x) - 1$; $f'(-0{,}2) \simeq 0{,}55$

$$|\varepsilon^+| = |0{,}18 - 0{,}55| = 0{,}37$$

$$|\varepsilon^-| = |0{,}9 - 0{,}55| = 0{,}35$$

b) $f(x) = x^2 \ln(x) + 1$; $x_0 = 1.0$; $x_1 = 1.2$ y $x_2 = 1.4$

$$f'_+(1{,}2) = \frac{f(1{,}4) - f(1{,}2)}{0{,}2} \simeq 1{,}9847$$

$$f'_-(1{,}2) = \frac{f(1{,}2) - f(1.0)}{0{,}2} \simeq 1{,}3127$$

$f'(x) = 2x\ln(x) + x \quad ; \quad f'(1,2) = 1,6375$

$|\mathcal{E}^+| = |1,9847 - 1,6375| = 0,3472$

$|\mathcal{E}^-| = |1,3127 - 1,6375| = 0,3248$

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.

b) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

$$f'_+(x) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right]$$

$$f'_0(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$$

$$f'_-(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)\right]$$

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, $x_0 = -0,3$; $x_1 = -0,2$; $x_2 = -0,1$; $x_3 = 0$

$$f'_+(-0,3) = \frac{1}{2 \cdot 0,1}\left[-3f(-0,3) + 4f(-0,2) - f(-0,1)\right] = -0,06 \;//$$

$$f'_0(-0,1) = \frac{1}{2 \cdot 0,1}\left[f(0) - f(-0,2)\right] = 1,2537 \;//$$

$$f'_-(0) = \frac{1}{2 \cdot 0,1}\left[f(-0,2) - 4f(-0,1) + 3f(0)\right] = 1,9725 \;//$$

$f'(x) = 2e^{2x} + 2\sin(2x)$

$f'(-0,3) = -0,03166 \qquad |\mathcal{E}_{x_0}| = 0,02834$

$f'(-0,1) = 1,2401 \qquad |\mathcal{E}_{x_2}| = 0,013$

$f'(0) = 2$ $\qquad\qquad$ $|\varepsilon_{x_3}| = 0{,}0275$

b) $f(x) = x\sin(x) + x^2\cos(x)$, $x_0 = 1.1$; $x_1 = 1.2$; $x_2 = 1.3$; $x_4 = 1.4$

$$f'_+(1{,}1) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1}\left[-3f(1{,}1) + 4f(1{,}2) - f(1{,}3)\right] = 1{,}3495 \;\;//$$

$$f'_0(1{,}3) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1}\left[f(1{,}4) - f(1{,}2)\right] = 0{,}3623 \;\;//$$

$$f'_-(1{,}4) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1}\left[f(1{,}2) - 4f(1{,}3) + 3f(1{,}4)\right] = -0{,}2003 \;//$$

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$$

$$f'(x) = \sin(x) + 3x\cos(x) - x^2\sin(x)$$

$f'(1{,}1) = 1{,}3097$ $\qquad$ $|\varepsilon_{x_0}| = 0{,}0398$

$f'(1{,}3) = 0{,}3783$ $\qquad$ $|\varepsilon_{x_2}| = 0{,}016$

$f'(1{,}4) = -0{,}2321$ $\qquad$ $|\varepsilon_{x_3}| = 0{,}0318$

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$

Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

- $V(t) = L \cdot I'(t) + R \cdot I(t)$

$\rightarrow$ $V(1.0) = L \cdot I'(1.0) + R \cdot I(1.0)$

$$I'_+(1.0) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}01}\left[-3I(1{,}0) + 4I(1.01) - I(1.02)\right] = 2 \;//$$

$$I'_+(1.01) = \frac{1}{2\cdot 0,01}\left[-3I(1,01)+4I(1,02)-I(1,03)\right] = 1$$

$$I'_0(1.02) = \frac{1}{2\cdot 0,01}\left[I(1.03)-I(1,02)\right] = 3$$

$$I'_0(1.03) = \frac{1}{2\cdot 0,01}\left[I(1,04)-I(1,02)\right] = 5$$

$$I'_-(1.04) = \frac{1}{2\cdot 0,01}\left[I(1.04)-4I(1.03)+3I(1.02)\right] = 7$$

Rta: $V(1.0) = 2,4002$ $\quad V(1.03) = 5,35156$

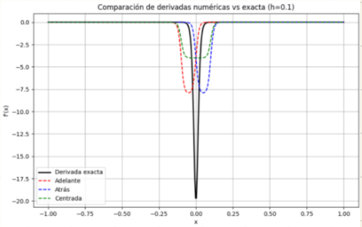
$V(1.01) = 1,42306$ $\quad V(1.04) = 7,32008$

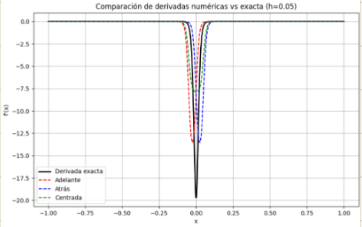
$V(1.02) = 3,38588$

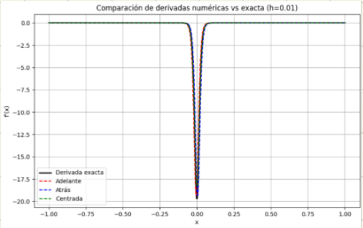
1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x)+0.6$ con $x \in [-1,1]$. Pruebe numéricamente en *python*con distintos esquemas y pasos, comparando con la derivada exacta.

$f(x) = -0,4\tanh(50x)+0,6 \qquad x \in [-1,1]$

$f'(x) = -0,4\cdot 50\,\mathrm{sech}^2(50x)$







La centrada es la mejorcita por su error de orden

$O(h^2)$

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h},$$

$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h)+3u(x)-6u(x-h)+u(x-2h)\right].$$

Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}$.

- $D_+ u(x) = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$

hago el taylor $u(x+h)$ centrado en x:

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)(h) + \frac{u''}{2}(\varepsilon)h^2$$

$$D_+ u(x) = \frac{u(x) + u'(x)h + \frac{u''}{2}(\varepsilon)h^2 - u(x)}{h}$$

$$D_+ u(x) = u'(x) + \frac{u''}{2}(\varepsilon)\cdot h$$ ERROR $O(h)$

- $D_- u(x) = \dfrac{u(x) - u(x-h)}{h}$

$$u(x-h) = u(x) + u'(x)(-h) + \frac{u''}{2}(\varepsilon)(-h)^2$$

$$D_- u(x) = \frac{u(x) - u(x) + u'(x)h - \frac{u''}{2}(\varepsilon)h^2}{h}$$

$$D_- u(x) = u'(x) - \frac{u''}{2}(\varepsilon)h$$ orden $O(h)$

$$\bullet\ D_0 u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

$$D_0 u(x) = \Big[\big[u(x) + u'(x)h + \frac{u''}{2}(x)h^2 + \frac{u'''}{6}(\varepsilon_1)h^3\big] - \big[u(x) - u'(x)h + \frac{u''}{2}(x)h^2 - \frac{u'''}{6}(\varepsilon_2)h^3\big]\Big] / 2h$$

$$D_0 u(x) = \frac{2u'(x)h + \frac{u'''}{6}(\varepsilon_1)h^3 + \frac{u'''(\varepsilon_2)h^3}{6}}{2h}$$

$$D_0 u(x) = u'(x) + \frac{h^2}{3}\left[u'''(\varepsilon_1) + u'''(\varepsilon_2)\right]$$

$O(h^2)$

$$\bullet\ D_3 u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right]$$

$$= \frac{1}{6h}\Big(2\big[u(x) + u'(x)h + \frac{u''}{2}(x)h^2 + \frac{u'''}{6}(x)h^3 + \frac{u^{IV}}{24}(\varepsilon_1)h^4\big] + 3u(x)$$

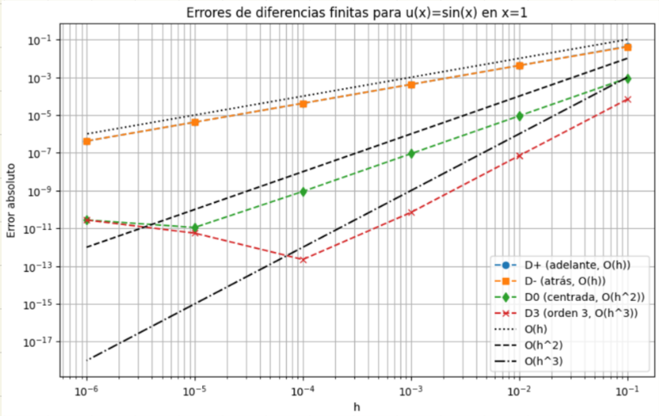
$$- 6\big[u(x) - u'(x)h + \frac{u''}{2}(x)h^2 - \frac{u'''}{6}(x)h^3 + \frac{u^{IV}}{24}(\varepsilon_2)h^4\big] +$$

$$\big[u(x) - 2u'(x)h + \frac{4}{2}u''(x)h^2 - \frac{8}{6}u'''(x)h^3 + \frac{16}{24}u^{IV}(\varepsilon_3)h^4\big]$$

$$= \frac{1}{6h}\left[6u'(x)h + h^4\left(\frac{1}{12}u^{IV}(\varepsilon_1) - \frac{1}{4}u^{IV}(\varepsilon_2) + \frac{2}{3}u^{IV}(\varepsilon_3)\right)\right]$$

$$= u'(x) + \frac{h^3}{6}(\quad)$$

$O(h^3)$



1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula

$$f'_n(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

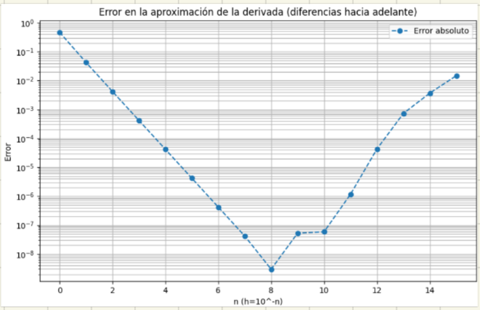
para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

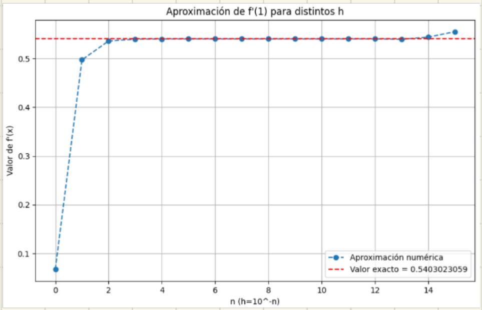
$$f'_n(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 15$$

como $f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$; $x = 1$

$$f'_0(1) = \frac{f(1+10^{-0}) - f(1)}{10^{-0}}$$

$$f'_1(1) = \frac{f(1+10^{-1}) - f(1)}{10^{-1}}$$





La razón por la que a partir de $n=8$ el error vuelve a aumentar es por un fenómeno llamado "cancelación numérica" en $f(x+h)-f(x)$

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} \cdot M$$

$$\varepsilon'(h) = \frac{-\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{3} h M = 0$$

$$\frac{1}{3} h M = \frac{\varepsilon}{h^2} \; ; \; h^3 = \frac{3\varepsilon}{M}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$$

$$\varepsilon'(h) = \frac{2\varepsilon}{h^3} + \frac{1}{3} M$$

$$\varepsilon'\left(\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}\right) = \frac{2\cancel{\varepsilon}}{3\cancel{\varepsilon}} \cdot M + \frac{1}{3} M = \frac{2}{3} M + \frac{1}{3} M = M > 0$$

$\varepsilon(h)$ tiene un mínimo en $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$ //

1.8 Sea la función

$$f(x,y) = x^2 e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x,y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

$F(x,y) = x^2 \cdot e^y + \sin(xy)$ punto: $(x,y) = (1, 0.5)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y + y\sin(xy)$ // $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0.5) = 3{,}736233$ //

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y + x\sin(xy)$ // $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0.5) = 2{,}526303$ //

$$\frac{\partial f^+}{\partial x}(1, 0.5) = \frac{f(1+0.01, 0.5) - f(1, 0.5)}{h} = 3{,}7522 \ //$$

$$\frac{\partial f^+}{\partial y}(1, 0.5) = \frac{f(1, 0.5+0{,}01) - f(1, 0.5)}{h} = 2{,}5322 \ //$$

$$\frac{\partial f^\circ}{\partial x}(1, 0.5) = \frac{f(1+0{,}01, 0.5) - f(1-0.01, 0.5)}{h} = 3{,}73625 \ //$$

$$\frac{\partial f^\circ}{\partial y}(1, 0.5) = \frac{f(1, 0.5+0{,}01) - f(1, 0.5-0.01)}{h} = 2{,}5263 \ //$$

Calculo ERRORES

$|\mathcal{E}^+_{\partial x}| = 0{,}01596$ // $|\mathcal{E}^+_{\partial y}| = 0{,}00587$ //

$|\mathcal{E}^\circ_{\partial x}| = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ // $|\mathcal{E}^\circ_{\partial y}| = 3 \cdot 10^{-6}$ //

2. Integración

Cuadraturas Simples

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,
b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,
c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,
d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 \, dx = 0{,}19375$

Trapecios

$$I(f) \simeq Q(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(b) + f(a)\right]$$

$$Q(f) = \frac{1-0{,}5}{2}\left[f(1) + f(0.5)\right] \approx 0{,}27$$

$$|\mathcal{E}_A| = \frac{|f''(\mathcal{E})|}{12}(b-a)^3 \qquad f''(x) = 12x^2 \quad \mathcal{E} \in [0.5, 1]$$

$$|\mathcal{E}_A| \leq \frac{12}{12}(1-0.5)^3 = \frac{1}{8}$$

b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} \, dx = 0{,}3083$ $\qquad 2(x-4)^{-1}$

$-2(x-4)^{-2} \qquad 4(x-4)^{-3}$

Trapecios

$$I(f) \simeq Q(f) = \frac{(0.5-1)}{2}\left[f(0{,}5) - f(1)\right] = 0{,}3095$$

$$|\mathcal{E}_A| = \frac{|f''(\mathcal{E})|}{12}(0{,}5-1)^3 \qquad f''(x) = \frac{4}{(x-4)^3}$$

$\xi \in [0.5; 1] \quad |f''(1)| \approx 0{,}15$

$$|E_A| = \frac{0{,}15}{12}(0.5-1)^3 = -0{,}00156$$

e) $$\int_1^{1.5} x^2 \ln(x)\,dx = 0{,}1922$$

<u>GAUSS:</u> Primero, debo llevar la inegral a un intervalo entre $[-1,1]$ Propongo cambio de variable.

$$x(t) = \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)}{2}t \quad t\in[-1,1] \quad x(-1) = a$$

$$x(1) = b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)}{2}t\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{2{,}5}{2} - \frac{0{,}5}{2}t\right)\left(\frac{0{,}5}{2}\right)dt = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

RESUELVO con ORDEN $n=2$

$$Q = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)\,; \quad Q = A_1\cdot g(t_1) + A_2\, g(t_2)$$

Uso polinomio de Legendre:

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1) \qquad t_1 = -\sqrt{3}/3 \qquad t_2 = \sqrt{3}/3$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t-t_2}{t_1-t_2}\,dt = 1 = A_2$$ (COEFICIENTES DADO POR el libro)

$$Q = 1\cdot g(t_1) + 1\cdot g(t_2) \simeq 0.192269 \,//$$

$$|\varepsilon| = |0,1922 - 0,192269| \approx 1\cdot 10^{-5} \,//$$

d) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx \approx 0,1606$

Gauss de orden 2

Cambio de variable:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}\right) dt$$

$$Q = A_1 \cdot f(x_1) + A_2 f(x_2) = A_1 \cdot g(t_1) + A_2 \cdot g(t_2)$$

$$g(t_1) = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_1\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0,141334$$

$$g(t_2) = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_2\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0,01807$$

$$Q = 0,159409 \qquad |\varepsilon| = 1,19 \times 10^{-3}$$

Simpson

$$Q(F) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$Q(F) = \frac{1-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] =$$

$$Q(F) = \frac{1}{6}\left[0 + 0,60653 + 0,3678\right] = 0,162388 \,//$$

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

			2	3	4
x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

$$\int_{1,8}^{2,6} f(x)\,dx = \int_{1,8}^{2,2} f(x)\,dx + \int_{2,2}^{2,6} f(x)\,dx$$

Simpson : $\frac{2.6-1.8}{6}\left[f(1.8) + 4f(2.2) + f(2.6)\right]$

Simpson Compuesto: $\frac{\overset{h}{0{,}2}}{3}\left[f(1.8) + 4\left[f(2.0) + f(2.4)\right] + 2f(2.2) + f(2.6)\right]$ $O(h^4)$

Trapecio : $\frac{2.6-1.8}{2}\left[f(1.8) + f(2.6)\right]$

Trapecio Compuesto : $\frac{0{,}2}{2}\left[f(1.8) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(2.6)\right]$ $O(h^2)$

```
Resultados de la integral aproximada en [1.8, 2.6]:
Trapecio simple      = 5.434756
Simpson simple       = 5.034204
Trapecio compuesto   = 5.058337
Simpson compuesto    = 5.033002
```

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\int_{b}^{a} f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, y $x_2 = b$.

a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = Q(f)$

Tengo 2 nodos → grado máximo precisión $2n-1 = 3$

$f(x) = 1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \quad ; \quad Q(f) = 1+1 = 2$ ✓

$f(x) = x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \quad ; \quad Q(f) = 0$ ✓

$f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3 \quad ; \quad Q(f) = 2/3$ ✓

$f(x) = x^3 \quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \quad ; \quad Q(f) = 0$ ✓

$f(x) = x^4 \quad \int_{-1}^{1} x^4\,dx = 0{,}4 \quad ; \quad Q(f) = 0{,}22$ ✗

- Grado de precisión máximo $k=3$ (Cuadratura Gaussiana)

b) $\int_{a}^{b} f(x) = \frac{9}{4}h f(x_1) + \frac{3}{4}h f(x_2) \qquad h = \frac{(b-a)}{3} \quad x_1 = a+h, \; x_2 = b$

$f(x) = 1 \quad \int_{a}^{b} 1\,dx = b-a \quad ; \quad Q(f) = \frac{9}{4}\frac{(b-a)}{3} + \frac{3}{4}\frac{(b-a)}{3} = b-a$ ✓

$f(x) = x \quad \int_a^b x = \frac{b^2 - a^2}{2}$

$Q(F) = \frac{9}{4} h(a+h) + \frac{3}{4} hb = \frac{9}{4} ha + \frac{9}{4} h^2 + \frac{3}{4} hb$

$= \frac{3h}{4}\left(3a + 3h + b\right) = \frac{3h}{4}\left(3a + 3\frac{(b-a)}{3} + b\right)$

$= \frac{3(b-a)}{3 \cdot 4}\left(3a + b - a + b\right) = \frac{(b-a)}{4}(2a+2b) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$ ✓

$F(x) = x^2$ ... El grado de preasión es $k=2$

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

$\int_0^1 f(x)dx = C_0 \cdot f(0) + C_1 \cdot f(x_1)$, busco orden 3

$f(x) = 1 \quad \int_0^1 1\, dx = 1 \;;\; Q(F) = C_0 \cdot 1 + C_1 = 1$ (1)

$f(x) = x \quad \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \;;\; Q(F) = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2}$ (2)

$F(x) = x^2 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \;;\; Q(F) = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot x_1^2 = \frac{1}{3}$ (3)

$\begin{cases} C_0 + C_1 = 1 \;;\; C_1 \cdot x_1^2 = 1/3 \\ C_1 \cdot x_1 = 1/2 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2x_1} \end{cases}$

$\frac{1}{2x_1} x_1^2 = 1/3$

$x_1 = 2/3$; $C_1 = 3/4$, $C_2 = 1/4$ (grado $k=2$)

$$f(x) = x^3 \quad \int_0^1 x^3 = \frac{1}{4} \; ; \; Q(f) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{24}{108} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \; \times$$

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

Por ser simpson: $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$; $x_0 = 0$; $x_1 = h$; $x_2 = 2h$

$$f(x) = 1 \quad \int_0^{2h} 1\,dx = 2h \; ; \; Q(f) = a_0 + a_1 + a_2$$

$$f(x) = x \quad \int_0^{2h} x\,dx = 2h^2 \; ; \; Q(f) = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot 2h$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^{2h} x^2 dx = \frac{8}{3}h^3 \; ; \; Q(f) = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot h^2 + a_2 \cdot 4h^2$$

$$f(x) = x^3 \quad \int_0^{2h} x^3 dx = 4h^4 \; ; \; Q(f) = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot h^3 + a_2 \cdot 8 \cdot h^3$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2h & (1) \\ a_1 \cdot h + 2a_2 h = 2h^2 \rightarrow a_1 + 2a_2 = 2h & (2) \\ a_1 h^2 + 4a_2 h^2 = \frac{8}{3}h^3 \rightarrow a_1 + 4a_2 = \frac{8}{3}h & (3) \\ a_1 h^3 + 8a_2 h^3 = 4h^4 \rightarrow a_1 + 8a_2 = 4h & (4) \end{cases}$$

(3)-(2) $\quad 2a_2 = \frac{2}{3}h \Rightarrow a_2 = \frac{h}{3}$ //

(2) $\quad a_1 + \frac{2}{3}h = 2h \rightarrow a_1 = \frac{4}{3}h$ //

(1) $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 2h \rightarrow a_0 + \frac{4}{3}h + \frac{1}{3}h = 2h \rightarrow a_0 = \frac{1}{3}h$ //

(4) $\quad \frac{4}{3}h + 8 \cdot \frac{h}{3} = \frac{12}{3}h = 4h$ ✓

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Calculo error con una leer. más //

$$f(x^4) \quad \int_0^{2h} x^4 dx = \frac{32h^5}{5}$$

$$Q(f) = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(h) + f(2h)\right] = \frac{h}{3}\left[4h^4 + 16h^4\right] = \frac{20h^5}{3}$$

$$\mathcal{E} = \frac{32h^5}{5} - \frac{20h^5}{3} = -\frac{4}{15}h^5$$

Para $f(x) = x^4 \quad f^{IV}(x) = 24 \quad \forall x$

El error se describe como $\rightsquigarrow K \cdot h^5 \cdot f^{IV}(\mathcal{E})$

$$-\frac{4}{15}h^5 = K \cdot h^5 \cdot 24 \rightarrow K = \frac{-1}{90} \qquad E = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\mathcal{E})$$ //

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

$F(x) = 1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \ ; \ Q(f) = a+b$

$F(x) = x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \ ; \ Q(f) = -a + c + d$

$f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \ ; \ Q(f) = a - 2c + 2d$

$F(x) = x^3 \quad \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \ ; \ Q(f) = -a + 3c + 3d$

$$\begin{cases} a+b = 2 & (1) \\ -a + c + d = 0 & (2) \\ a - 2c + 2d = 2/3 & (3) \\ -a + 3c + 3d = 0 & (4) \end{cases}$$

$(2)+(3)$: $-c + 3d = 2/3$ (5)

$(3)+(4)$ $\quad c + 5d = 2/3$ (6)

$(5)+(6)$: $8d = 4/3 \rightarrow d = 1/6 \ ; \ c = -1/6$

$a = c + d = 0 \ ; \quad a + b = 2 \rightarrow b = 2$

Verifico no tener más precisión con $a = 0$; $c = -1/6$
$b = 2$; $d = 1/6$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5} \; ; \quad Q(f) = -\frac{1}{6} f'(-1) + \frac{1}{6} f'(1)$$

$$Q(f) = -\frac{1}{6}(-4) + \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \neq \frac{2}{5}$$

$4x^3$

Grado de precisión: $k = 3$ //

Cuadraturas Compuestas

2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f \, dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

Trapecio compuesto:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

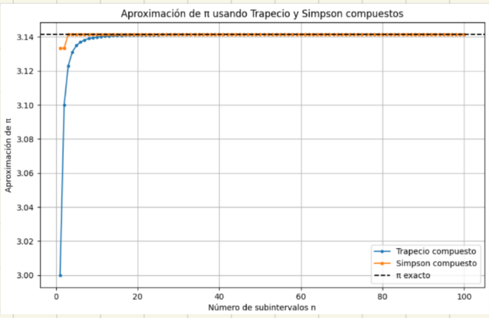
Simpson compuesto:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum f(x_{odd}) + 2 \sum f(x_{even}) + f(x_n) \right]$$

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.



2.9 Sea $f \in C^2[a,b]$, $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a,b)$ para el cual la regla de los trapecios compuesta para n subintervalos pueden escribir de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

La formula del trapecio simple es: $f \in C^2[a,b]$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_j) + f(x_{j+1})\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_j)$$

La idea sería dividir $[a,b]$ en n subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \text{ ; reemplazo}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{h}{2}\left[f(x_j) + f(x_{j+1})\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_j)\right]$$

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j) + f(x_j+1)\right] - \frac{h^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi_j)$$

todos los términos menos el primer y último se duplican

$$\frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right] - \frac{h^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi_j)$$

Aplico T.V.M para sumas, como f'' es continua en $[a,b]$, existe $\mu \in (a,b)$ tal que

$$\sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi) = n \cdot f''(\mu) \Rightarrow n = \frac{b-a}{h}$$

Entonces:

$$\frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right] - \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{12} \cdot \frac{(b-a)}{\cancel{h}} \cdot f''(\mu)$$

Conclusión:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right] - \frac{h^2}{12}(b-a) f''(\mu)$$

2.10 Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede tener grado de precisión mayor a $2n-1$. Ayuda: construya un polinomio con raíces doble en cada x_i.

Criterio de convergencia:

$n+1$ puntos $\rightarrow$ gr: $2n+1$

n puntos $\rightarrow$ gr: $2n-1$

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \Rightarrow gr(P) = 2n$$

Si tuviera grado de precisión $2n$:

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i)$$: elijo como x_i las raíces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i) = 0$$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \underbrace{(x-x_i)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}\ \ _{\geq 0}$$

Conclusión $\rightarrow$ $I(p) \geq 0$; $Q(p) = 0$

Así que no puedo obtener mayor a $2n-1$

(Ej: Gauss-Legendre)

2.11 La función error se define por

$$\mathrm{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Aproximar $\mathrm{erf}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ utilizando la regla de Simpson compuesta sobre $[0,1]$ con n subintervalos. Calcular también con la regla del trapecio compuesta. Comparar ambos resultados y estimar el error usando las cotas teóricas. *Sugerencia*: Implementar en *python* para testear comportamiento a n grande.

b) Repetir para $\mathrm{erf}(2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\,dt$. Analizar cómo cambia la convergencia al duplicar el intervalo.

c) Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si bien no podemos usar los métodos vistos para aproximarla directamente, sí podemos aplicar el cambio $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)$ que mapea $u \in [0,1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \;=\; \int_0^1 e^{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}\,\frac{\pi}{2}\sec^2\!\left(\frac{\pi}{2}u\right)\,du.$$

Aproximar la integral resultante en $[0,1]$ con cuadratura Gaussiana de orden $m = 2,\ 3$. Comparar con Simpson compuesto en el mismo intervalo con $n = 4, 8, 16$ subintervalos.

Método de Euler

3.1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$y' = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0,$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

DEMO DE DONDE NACE EULER (método más básico)

dado un intervalo $[a,b]$, partimos el intervalo en N partes equispaciadas. $i = 0, 1, \ldots, N-1$, Desarrollo el taylor de $y(t_{i+1})$ centrado en t_i

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2$$

Como $h = t_{i+1} - t_i$

$$y(t_i + 1) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

Como el objetivo de Euler es obtener soluciones para para un P.V.I donde $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$; $y(a) = \alpha$

dado que $y(t)$ cumple estas condiciones planteo

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\varepsilon_i)$$

El metodo está construyendo aproximaciones a

$y(t_i)$ que notaremos w_i $\quad w_i \approx y(t_i)$, con esto:

$$\underline{w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)} \;//$$

3.2 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Euler con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \le t \le 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b) $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = t\tan(\ln t)$.

c) $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = -2$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2$, $1 \le t \le 2$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$

solución: $y(t) = \dfrac{t}{1+\ln(t)}$

Corroboro solución dada.

$$y'(t) = \frac{1\cdot(1+\ln(t)) - t\cdot\frac{1}{t}}{(1+\ln(t))^2} = \frac{\ln(t)}{(1+\ln(t))^2}$$

Ahora evaluo en la EDO:

$$y'(t) = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 = \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(1+\ln(t))} - \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}(1+\ln(t))^2}$$

$$= \frac{1}{1+\ln(t)} - \frac{1}{[1+\ln(t)]^2} = \frac{[1+\ln(t)] - 1}{[1+\ln(t)]^2} = \frac{\ln(t)}{[1+\ln(t)]^2} \checkmark$$

- Euler: $w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$

$f(t,y) = y/t - (y/t)^2$

- Primeras iteraciones a mano:

$t_0 = 1$; $w_0 = 1$; $h = 0.1$

$w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0)$ $\quad f(t_0, w_0) = \frac{w_0}{t_0} - \left(\frac{w_0}{t_0}\right)^2$

$f(1,1) = 1 - 1 = 0$

$w_1 = w_0 + 0{,}1 \times 0 = w_0$

$w_2 = w_1 + hf(t_1, w_1)$ $\quad f(t_1, w_1) = f(1{,}1 ; 1)$

$\Rightarrow 0{,}0826$

$w_2 = 1 + 0{,}1 \times 0{,}826 = 1{,}00826$

b) Corroborar

$y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$

$y(t) = t \cdot \tan(\ln(t))$

$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ $\quad \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$

$$y'(t) = 1 \cdot \tan(\ln(t)) + t \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln(t))} \cdot \frac{1}{t}$$

$$y'(t) = \tan(\ln(t)) + \frac{1}{\cos^2(\ln(t))} = \tan(\ln(t)) + \sec^2(\ln(t)) \,//$$

$$y'(t) = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2 \qquad y = t \cdot \tan(\ln(t))$$

$$= 1 + \tan(\ln(t)) + \tan^2(\ln(t))$$

$$= \tan(\ln(t)) + \underline{\tan^2(\ln(t) + 1}$$

$$= \tan(\ln(t)) + \sec(\ln(t))^2 \,//$$

c) $y' = -(y+1)(y+3), \ 0 \leq t \leq 2, \ y(0) = -2, \ h = 0.2$

$$y(t) = -3 + 2 \cdot (1 + e^{-2t})^{-1}$$

$$y'(t) = -2(1 + e^{-2t})^{-2} \cdot (-2) \cdot e^{-2t}.$$

$$y'(t) = 4(1 + e^{-2t})^{-2} \cdot e^{-2t} = \frac{4e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2} \,//$$

$$y'(t) = -(y+1)(y+3)$$

$$y'(t) = -(-3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1} + 1)(-3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1} + 3)$$

$$y'(t) = -(-2 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}) \cdot 2(1 + e^{-2t})^{-1}$$

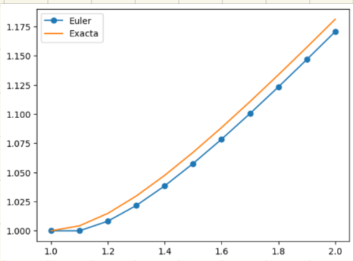
$$y'(t) = 4(1 - (1 + e^{-2t})^{-1})(1 + e^{-2t})^{-1}$$

$$y'(t) = 4[(1 + e^{-2t})^{-1} - (1 + e^{-2t})^{-2}]$$

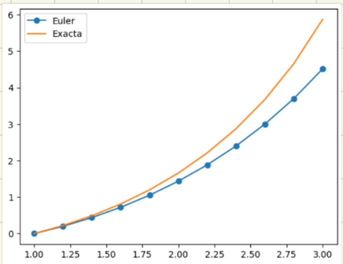
$$y'(t) = 4\left[\frac{1}{1 + e^{-2t}} - \frac{1}{(1 + e^{-2t})^2}\right]$$

$$y'(t) = 4\left[\frac{(1+e^{-2t}-1)}{(1+e^{-2t})^2}\right] = \frac{4e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2} \checkmark$$

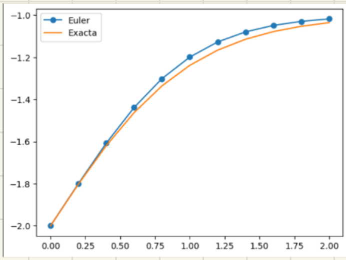
(a)



(b)



(c)



3.3 Sea f una función contínua y Lipschitz con constante L en $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ y M tal que $|y''| \leq M \forall t$. Demostrar que para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

el método de Euler aproxima a la solución como

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right),$$

con w_i las aproximaciones dadas por el método de Euler.

Sea f continua y L / $D = \{(t,y) \mid a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq +\infty\}$

y M / $|y''| \leq M \, \forall t$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Demostrar que la cota del error es:

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{h \cdot M}{2 \cdot L}\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right)$$

Info que tenemos:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad (1)$$

además $\rightarrow \quad w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$ (2)

(1) - (2) $\rightsquigarrow \quad y(t_i) = y_i$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h\left[f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)\right] + \frac{h^2}{2} y''(\varepsilon)$$

Desigualdad triangular

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| + h\,|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2} |y''(\varepsilon)|$$

Como ya afirmamos que f es Lipschitz de cte: L

y $\quad |y''(\varepsilon)| \leq M$

Usamos condición de Lipschitz:

$|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| \leq L(y_i - w_i)$ y definiendo

a $\quad y_i - w_i = \varepsilon_i$ (error i-ésimo)

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq |\varepsilon_i| + h \cdot L\,|\varepsilon_i| + \frac{h^2}{2} |y''(\varepsilon)| \; ; \; |y''(\varepsilon)| \leq M$$

$$|\varepsilon_i + 1| \leq |\varepsilon_i|\,(1 + hL) + \frac{h^2}{2} \cdot M$$

Condiciones: $\quad \varepsilon_0 = 0 \;/\; w_0 = y(a) = \alpha$

$$|\varepsilon_1| \leq (1+hL)\,|\varepsilon_0| + \frac{h^2}{2} M = \frac{h^2 M}{2}$$

$$|\varepsilon_2| \leq (1+hL)\,|\varepsilon_1| + \frac{h^2}{2} M = (1+hL)\,\frac{h^2 M}{2} + \frac{h^2 M}{2}$$

$$= \frac{h^2 M}{2}\,(1 + hL + 1)$$

$$|\varepsilon_3| \leq (1+hL)\left|\frac{h^2M}{2}(1+hL+1)\right| + \frac{h^2M}{2}$$

$$|\varepsilon_3| \leq \frac{h^2M}{2}\left[(1+hL)\cdot(1+hL+1)+1\right]$$

$$|\varepsilon_3| \leq \frac{h^2M}{2}\left[(1+hL)^2+(1+hL)+1\right]$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{h^2M}{2}\left[(1+hL)^{i-1}+(1+hL)^{i-2}+\dots 1\right]$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{h^2M}{2}\sum_{k=0}^{i-1}(1+hL)^k$$ serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{i-1}(1+hL)^k = \frac{1-(1+hL)^i}{1-(1+hL)} = \frac{1-(1+hL)^i}{-hL} = \frac{(1+hL)^i-1}{hL}$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{h^2M}{2}\left[\frac{(1+hL)^i-1}{hL}\right]$$ como $t_i = a+ih$

$$i = \frac{t_i-a}{h}$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[(1+hL)^{\frac{t_i-a}{h}}-1\right]$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Ahora como $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}(1+hL)^{\frac{t_i-a}{h}} = \lim_{h\to 0}\underbrace{(1+hL)^{\frac{1}{hL}}}_{e}{}^{\cdot\frac{hL}{1}\cdot\left(\frac{t_i-a}{h}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{hL(t_i-a)}{h} = L(t_i-a) \quad \rightsquigarrow \quad e^{L(t_i-a)}$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i-a)} - 1\right] \quad //$$

3.4 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Demuestre que el PVI tiene solución única. Corrobore que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial.

b) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exacta.

c) Halle una cota para el valor de h tal que el error global no sea mayor a 10^{-4}, usando el resultado de 3.3. Halle numéricamente el valor de h para el cual se cumple esta condición y compare con la cota esperada.

3.4 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Demuestre que el PVI tiene solución única. Corrobore que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial.

b) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exacta.

c) Halle una cota para el valor de h tal que el error global no sea mayor a 10^{-4}, usando el resultado de 3.3. Halle numéricamente el valor de h para el cual se cumple esta condición y compare con la cota esperada.

P.V.I : $y' = \frac{2}{t} \cdot y + t^2 \cdot e^t$; $1 \leq t \leq 2$; $y(1) = 0$

con exacta $\rightarrow y(t) = t^2(e^t - e)$

TEO: Para un conjunto $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq +\infty\}$ con f continua en D. si f es Lipschitz en D con respecto a y $\Rightarrow$ EL P.V.I. tiene sol. única en D.

$$\text{P.V.I} = \begin{cases} y'(t) = f(t, y) \ ; & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Lipschitz respecto a y $\rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$ en $[a, b]$

$f(t, y) = \frac{2}{t} \cdot y + t^2 \cdot e^t \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{t} \leq 2$ con $t \in [1, 2]$

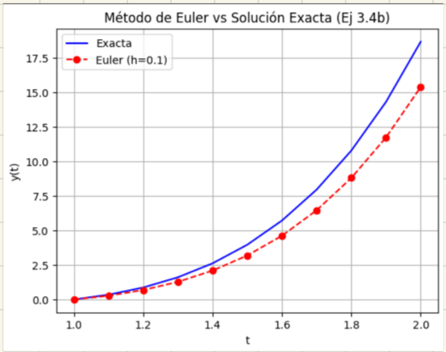
Decreciente como t más pequeño

$y(t) = t^2(e^t - e)$; $y'(t) = 2t(e^t - e) + t^2 e^t$ (1)

$$y'(t) = \frac{2}{t}\left[t^2(e^t - e)\right] + t^2 \cdot e^t$$

$y'(t) = 2t(e^t - e) + t^2 e^t$ (2) $\qquad$ (1) = (2) ✓

b) Utilizar euler con $h = 0{,}1$



c) hallar h / $\varepsilon_i \leq 10^{-4}$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \qquad t \in [1,2] \quad L = 2$$

$$\frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \leq 10^{-4}$$

Falta acotar $M \rightarrow |y''(t)| \leq M$

$$y'(t) = 2t(e^t - e) + t^2 \cdot e^t$$

$$y'(t) = 2te^t - 2te + t^2 e^t$$

$$y''(t) = 2 \cdot e^t + 2te^t - 2e + 2t \cdot e^t + t^2 \cdot e^t$$

$$y''(t) = e^t(2 + 4t + t^2) - 2e$$

$$y''(t) = e^t(t^2+4t+2) - 2e \qquad t \in [1,2]$$

$$x_v = \frac{-4}{2} = -2 \qquad t \in (-2, +\infty) \text{ es creciente}$$

$$|y''(t)| \leq e^2(4+8+2) - 2e \approx 98{,}01 \sim 99$$

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \leq 10^{-4}$$

crec.

$$\leq \frac{h \cdot 99}{2 \cdot 2}\left[e^{2(2-1)} - 1\right] \leq 10^{-4}$$

$$h \leq 6{,}32395 \cdot 10^{-7}$$

el método es una cagada.

3.5 Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolviendo el PVI con $\lambda = 10$, $t \in [0, 1]$, varíe el tamaño del paso h y reporte lo que observa al resolver numéricamente, comparando con la solución exacta.

d) Repetir los ítems anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

P.V.I. $\begin{cases} y' = \lambda \cdot y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

a) $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot \lambda \cdot y_i = y_i (1 + h\lambda)$

$y_1 = y_0 (1 + h\lambda) \qquad y_2 = y_0 (1 + h\lambda)^2$

$y_i = y_0 (1 + h\lambda)^i \quad , \quad i : 1, \ldots$

b) para $\lambda < 0$ / Para que valores de h ocurre

$y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$

Basicamenee esEoy pidiendo convergenaa a "0"

$\lambda < 0$: $\lim_{i \to \infty} y_i \sim 0 \qquad \lim_{i \to \infty} y_0 \underline{(1 + h\lambda)^i} \sim 0$

$|1 + h\lambda| < 1$

$$-1 < 1 + h\lambda < 1$$

$$-2 < h\lambda < 0$$

$$\frac{-2}{\lambda} > h > 0 \rightsquigarrow 0 < h < \frac{-2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$$

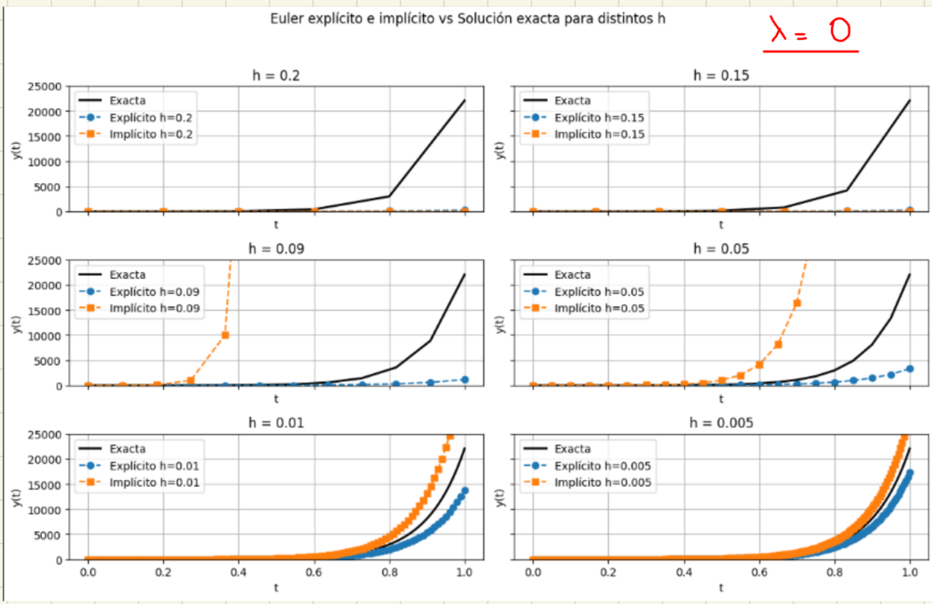
La solución exacta es $\rightsquigarrow y(t) = e^{\lambda t}$

La solución exacta converge siempre a "0" (exp. decreciente)

c) $\lambda = 10$, $t \in [0,1]$

La sol. exacta es: $y(t) = y_0 \cdot e^{10t}$

Euler: $w_i = (1 + 10 \cdot h)^i y_0 \qquad t_i = ih$



Las aproximaciones son muy malas, $\lambda = 10$ implica aproximar una exponencial creciente (complicado)

d) Euler Implícito:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1})$$

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot \lambda \cdot w_{i+1}$$

$$w_{i+1} - h\lambda w_{i+1} = w_i$$

$$w_{i+1}(1-h\lambda) = w_i \quad \sim \quad w_{i+1} = \frac{w_i}{1-h\lambda}$$

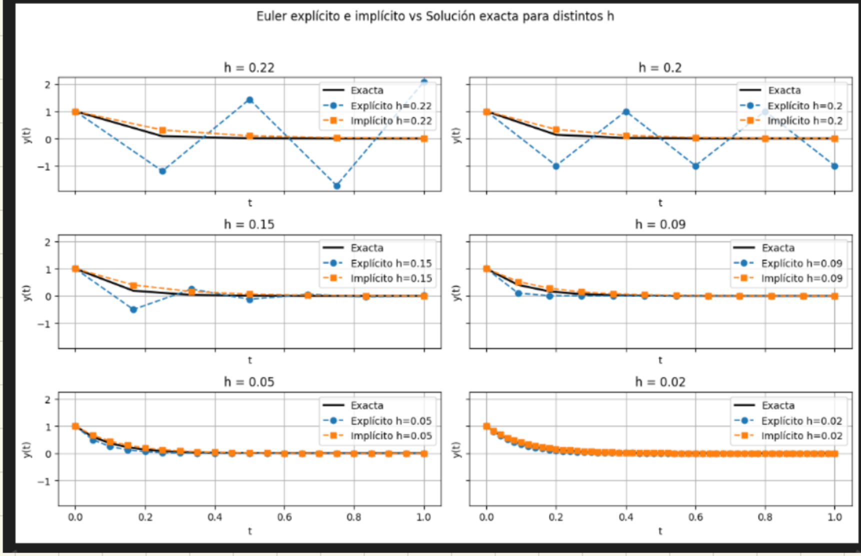
$$w_i = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^i \cdot y_0$$

$\lambda < 0$: busco que $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| < 1$

como $1-h\lambda > 1$ porque $\lambda<0$; $\forall h$ se cumple la convergencia.

```
h máximo para estabilidad del método explícito: 0.2000
```

✓ – 10



Se puede observar como falla la convergencia de euler explícito cuando $h > \frac{2}{|\lambda|} = 0{,}2$, en cambio, la implícita converge para cualquier h (a menor h converge más rápido)

NOTA: En el caso $\lambda > 0$; euler explícito subestima el crecimiento de la función y euler implícito lo sobre estima.

Método de Runge-Kutta

3.6 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = (1/5)te^{3t} - (1/25)e^{3t}$.

b) $y' = 1 + (t-y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = t + 1/(1-t)$.

c) $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = t\ln t + 2t$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

RK2 Para resolver P.V.I.

a) $y' = t \cdot e^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0{,}5$

solución $\rightarrow$ $y(t) = \left(\frac{1}{5}\right) t \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{25}\right) \cdot e^{3t}$

Verifico que sea solución:

$$y'(t) = \left(\frac{1}{5}\right)\left[e^{3t} + 3t \cdot e^{3t}\right] - \left(\frac{3}{25}\right) \cdot e^{3t}$$

$$y'(t) = \frac{1}{5} e^{3t} + \frac{3}{5} e^{t} \cdot e^{3t} - \frac{3}{25} e^{3t}$$

$$y'(t) = \frac{2}{25} e^{3t} + \frac{3}{5} e^{t} \cdot e^{3t} \quad (1)$$

$$y'(t) = t \cdot e^{3t} - 2y$$

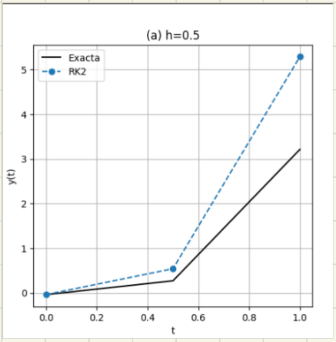
$$y'(t) = t \cdot e^{3t} - 2\left[\left(\frac{1}{5}\right) t \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{25}\right) \cdot e^{3t}\right]$$

$$y'(t) = t \cdot e^{3t} - \frac{2}{5} t e^{3t} + \frac{2}{25} e^{3t}$$

$$y'(t) = \frac{3}{5} t \cdot e^{3t} + \frac{2}{25} e^{3t} \quad (2) \qquad (1) = (2) \checkmark$$

Vamos a usar RK2 mid-point $\quad h = 0{,}5$

- $k_1 = f(t_i, y_i)$ $\qquad w_i \sim y_i$
- $k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1)$ $\qquad w_0 = y_0 = \frac{-1}{25}$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$



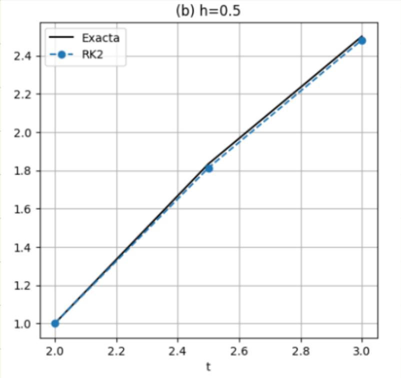
b) $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1, \quad h = 0.5$

sol. $y(t) = t + (1-t)^{-1}$

$$y'(t) = 1 + 1(1-t)^{-2} \quad (1)$$

$$y' = 1 + \left(t - t - \frac{1}{1-t}\right)^2 = 1 + \left(\frac{-1}{1-t}\right)^2 = 1 + \frac{1}{(1-t)^2} \quad (2$$

$(1) = (2) \checkmark$



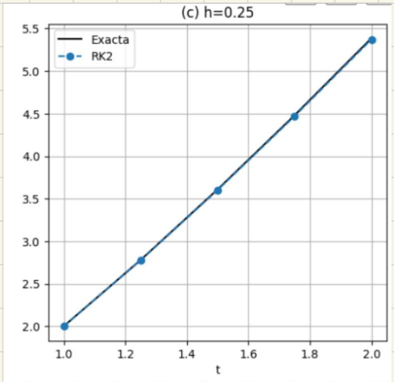
c) $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0,25$

sol. $y(t) = t \cdot \ln(t) + 2t$

$y'(t) = \ln(t) + t \cdot \frac{1}{t} + 2 = \ln(t) + 3 \quad (1)$

$y' = 1 + \frac{t\ln(t) + 2t}{t} = 1 + \ln(t) + 2 = \ln(t) + 3 \quad (2)$

$(1) = (2)$ ✓



3.7 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden 4 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = -9y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = e, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = e^{1-9t}$.
b) $y' = -20(y-t^2)+2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1/3, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = t^2+(1/3)e^{-20t}$.
c) $y' = -20y + 20\sin t + \cos t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.25,$ y solución $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.
d) $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

RK4

$$w_0 = \alpha$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

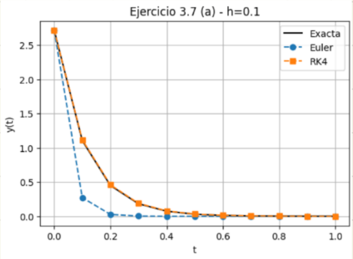
$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3)$$

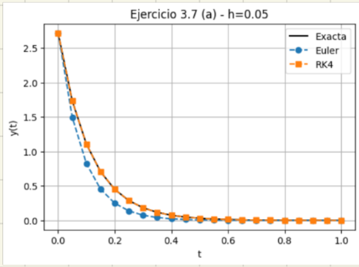
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

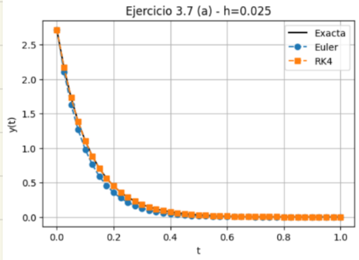
a) $y' = -9y, \; 0 \le t \le 1, \; y(0) = e, \; h = 0.1$

$y(t) = e^{1-9t}$; $y'(t) = -9 \cdot e^{1-9t}$ (1)

$y' = -9 \cdot e^{1-9t}$ (2) $\qquad$ (1) = (2) ✓







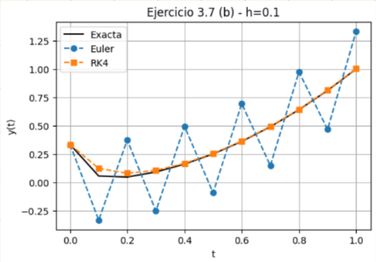
b) $y' = -20(y-t^2) + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1/3, \quad h = 0{,}1$

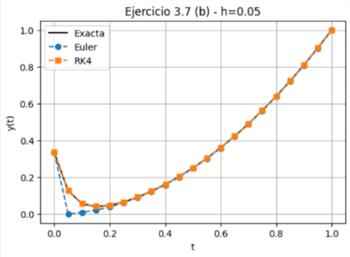
$$y(t) = t^2 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-20t}$$

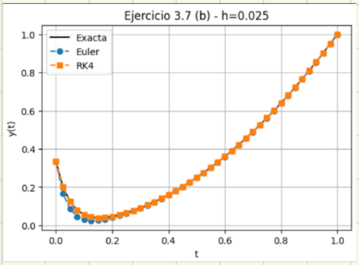
$$y'(t) = 2t - \frac{20}{3} e^{-20t} \quad (1)$$

$$y' = -20\left(t^2 - t^2 + \frac{1}{3} e^{-20t}\right) + 2t$$

$$y' = -\frac{20}{3} e^{-20t} + 2t \quad (2) \qquad (1) = (2) \checkmark$$







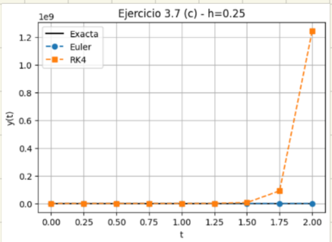
c) $y' = -20y + 20\sin(t) + \cos(t), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1$

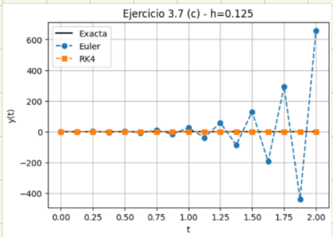
$h = 0{,}25 \qquad y(t) = \sin(t) + e^{-20t}$

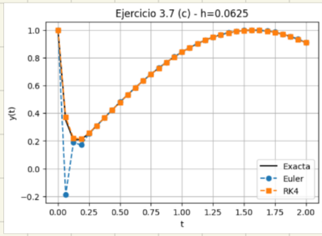
$$y'(t) = \cos(t) - 20 e^{-20t} \quad (1)$$

$$y' = -20\left[\sin(t) + e^{-20t}\right] + 20\sin(t) + \cos(t)$$

$$y' = -20e^{-20t} + \cos(t) \quad (2) \qquad (1) = (2) \checkmark$$







d) $y' = \dfrac{50}{y} - 50y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad h = 0{,}1$

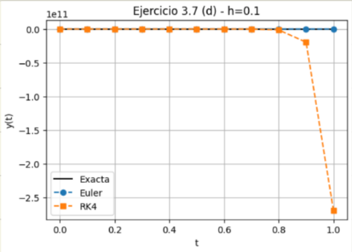
$$y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$$

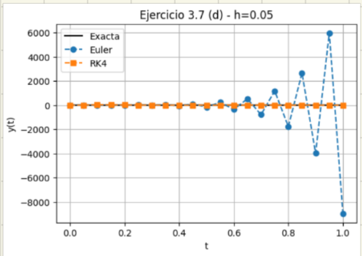
$$y'(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-100t})^{-1/2} \cdot e^{-100t} \cdot (-100) \quad (1)$$

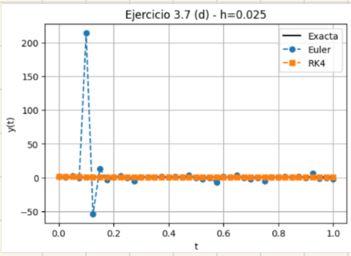
$$y' = \frac{50}{(1+e^{-100t})^{1/2}} - 50(1+e^{-100t})^{1/2}$$

$$y' = \frac{50 - 50\cdot(1+e^{-100t})}{(1+e^{-100t})^{1/2}} = \frac{-50\cdot e^{-100t}}{(1+e^{-100t})^{1/2}} \quad (2)$$

$(1) = (2) \checkmark$







3.8 Escriba las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones de grado 1 y resuélvalas con el método de Runge-Kutta de orden 4

a) $2y'' - 5y' + y = 0, \quad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$

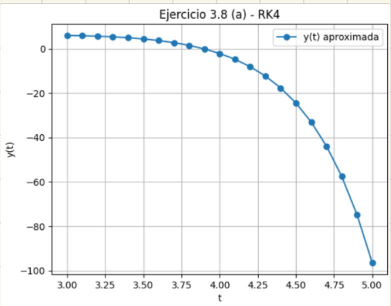
b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$

a) $2y'' - 5y' + y = 0$, $y(3) = 6$, $y'(3) = -1$

$u = y$; $v = y'$ $\rightsquigarrow$ $u' = v$

$$\begin{cases} u' = v \\ 2v' - 5v + u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = v & ; \quad u(3) = 6 \\ v' = \frac{5v}{2} - \frac{1}{2}u & ; \quad v(3) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



$t \in [3, 5]$

$h = 0{,}1$

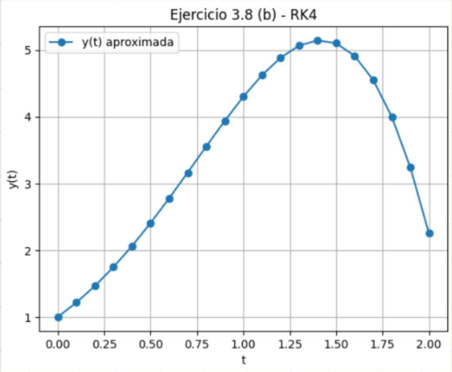
b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2$, $y'(0) = 2$, $y(0) = 1$

$y''(0) = 3$, $y'''(0) = 4$

$u = y$; $v = y'$; $w = y''$; $z = y'''$

$$\begin{cases} u' = v & ; \quad u(0) = 1 \\ v' = w & ; \quad v(0) = 2 \\ w' = z & ; \quad w(0) = 3 \\ z' = -3w + \sin(t)v - 8u + t^2 & ; \quad z(0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & \sin(t) & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$



3.9 Resuelva los siguientes sistemas. Calcule su estabilidad para el método de Euler. Estudie las soluciones.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$, con $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x$, con $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x$, con $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Las EDO que tienen la forma de $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ tienen como solución general $x(t) = e^{At} x(0)$

e^{At} se construye en base a los Autoval y autovec.

Busco autovalores

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = 4 \ ; \ \lambda_2 = -1$

La solución exacta es: v_1, v_2 : autovectores

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

$\underline{\lambda_1 = 4}$ $(A - 4I)v_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-3v_{1x} + 2v_{1y} = 0$ $\quad v_{1y} = \frac{3}{2} v_{1x}$

$v_1 : \left(v_{1x} , \frac{3}{2} v_{1x} \right) = \left[\left(1, \frac{3}{2} \right) \right] = \left[(2, 3) \right]$

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$(A + I)v_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2v_{2x} + 2v_{2y} = 0 \rightarrow v_{2y} = -v_{2x}$

$v_2 : [(1, -1)]$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora uso condiciones iniciales para halla C_1 y C_2

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $2C_1 + C_2 = 0$
- $3C_1 - C_2 = -4$

$\rightarrow 5C_1 = -4 \rightarrow C_1 = -4/5$

$C_2 = 8/5$

$$x(t) = -\frac{4}{5} e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{8}{5} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Al tener autovalor positivo $\lambda_1 = 4$, el método será inestable.

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\text{DET}(A - \lambda I) = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -6$ (método estable)

Para $\lambda_1 = -1$: $|1 + \lambda h| < 1$

$|1 - h| < 1$; $-1 < 1-h < 0$

$-2 < -h < 0$

$0 < h < 2$

$\lambda_1 = -1 \rightsquigarrow 0 < h < 2$

$\lambda_2 = -6$ $\quad |1 - 6h| < 1$

$-1 < 1-6h < 1$

$-2 < -6h < 0$

$0 < h < 1/3$

Rta: para asegurar estabilidad $0 < h < 1/3$ //

Busco solución general

$\lambda_1 = -1 \qquad (A + I) v_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-4v_{1x} + v_{1y} = 0 \rightarrow v_{1y} = 4v_{1x}$

$v_1 = [(v_{1x}, 4v_{1x})] = [(1, 4)]$

$\underline{\lambda_2 = -6}$

$$(A+6I)v_2 = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_{2x} + v_{2y} = 0 \rightsquigarrow v_{2x} = -v_{2y}$

$v_2 = [(-v_{2y}, v_{2y})] = [(-1, 1)]$

sol: $x(t) = C_1 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $C_1 - C_2 = 1$
- $4C_1 + C_2 = 2$

$\rightsquigarrow 5C_1 = 3 \rightarrow C_1 = 3/5, \; C_2 = -2/5$

$$x(t) = \frac{3}{5} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;//$$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x \; ; \; x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{DET}(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 36 = 0$

$\lambda_1 = 3\sqrt{3}i \; ; \; \lambda_2 = -3\sqrt{3}i$

Cuando los $\lambda_i \in \mathbb{C}$; euler es inestable porque la solución es oscilatoria

$\underline{\lambda_1 = 3\sqrt{3}i}$ $\quad (A - 3\sqrt{3}i\, I)\, v_1 = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 3-3\sqrt{3}i & 9 \\ -4 & -3-3\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

por construcción tienen que ser filas múltiplo

$$(3-3\sqrt{3}i)\, v_{1x} + 9 v_{1y} = 0$$

$$v_{1y} = -v_{1x} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} i \right)$$

$$v_1 = \left[\left(1, -\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} i \right) \right) \right] = \left[\left(9, -3 + 3\sqrt{3}i \right) \right]$$

$\lambda_2 = -3\sqrt{3}i \rightsquigarrow$ Análogo: $\quad v_2 : \left[\left(9, -3 - 3\sqrt{3}i \right) \right]$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{3\sqrt{3}it} \begin{pmatrix} 9 \\ -3+3\sqrt{3}i \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-3\sqrt{3}it} \begin{pmatrix} 9 \\ -3-3\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

$$x(0) \to \begin{cases} 9C_1 + 9C_2 = 2 \\ (-3+3\sqrt{3}i)\, C_1 + (-3-3\sqrt{3}i)\, C_2 = -4 \end{cases}$$

SE PUEDE DESPEJAR y llegar a $C_1, C_2 \ldots$

d) $\quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\text{DET}(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 65 = 0 \; ; \quad \lambda_1 = 2+8i$

$\lambda_2 = 2 - 8i$

misma mierda que en el c)

$\lambda_1 = 2+8i > 0 \rightsquigarrow$ sistema inestable para euler.

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(2+8i)t} v_1 + C_2 \cdot e^{(2-8i)t} \cdot v_2$$

3.10 Linearice el sistema $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$ alrededor de $y = 1$. Estudie la estabilidad del método de Euler para este sistema.

rompe linealidad

Linealizar : $y'' = (y-1)^{3} + 2(y-1) + y' \rightsquigarrow$ en $y=1$

Primero llevo el sistema a dos EDOS DE primer orden:

$$u = y \; ; \; v = y' \qquad \begin{cases} u' = v \\ v' = (u-1)^3 + 2(u-1) + v \end{cases}$$

como $y=1$ es $y_{eq} \rightsquigarrow u = 1 \rightarrow v = 0$

equilibrio: $(u,v) = (1,0)$

Puedo escribir mi sistema como:

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ (u-1)^3 + 2(u-1) + v \end{pmatrix}$$

$y'' = F(u,v)$ (hago taylor centrado en u_{eq})

$$F(u,v) = F(u_{eq}, 0) + DF\Big|_{u_{eq}} (u - u_{eq})$$

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3(u-1)^2 + 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad DF\Big|_{u_{eq}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$F(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (u - u_{eq})$; como ej. anterior.

La estabilidad depende de los autovalores:

$\det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda) - 2 \rightarrow \lambda_1 = 2 \; ; \; \lambda_2 = -1$

Al tener $\lambda_1 > 0$, el método no será estable

3.11 **Modelo logístico de crecimiento poblacional.** Se estudia la evolución de una única población $x(t)$, cuyo crecimiento se ve limitado por la disponibilidad de recursos. El modelo logístico asume que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima K. Se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca, $K > 0$ es la capacidad de carga del ambiente.

Se desea analizar el comportamiento de este sistema bajo distintas condiciones.

a) Tomar $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$, y resolver numéricamente el modelo utilizando el método de Euler, y el método RK4 con paso $\Delta t = 0.1$ hasta $t = 50$. Graficar $x(t)$ y comparar con la solución analítica:

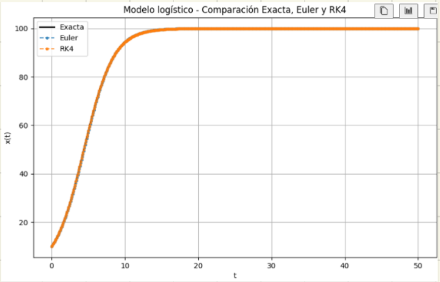
$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

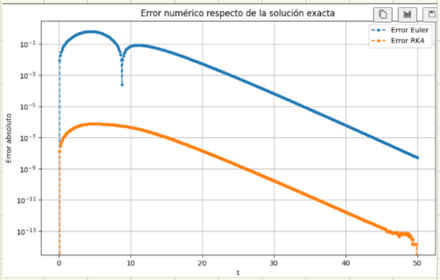
b) Estudiar el comportamiento del sistema variando x_0, K, y r e integrando con el método de preferencia.

$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$: $x(t) \rightarrow$ tamaño población
$t, r, K > 0$

a) $r = 0{,}5$; $K = 100$; $x_0 = 10$; $h = 0{,}1$ $t \in [$

sol: $x(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}$





NOTA: son casi lo mismo

Gráfico del error escala log.

3.12 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) & \text{en } [0,T], \\ \dot{\theta}(0) = v_0, \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Comparar con la solución del problema linealizado.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 0$.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(0) = v_0 \; ; \; \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

a) $u = \theta \; ; \; v = \dot{\theta} \; ; \; u' = v$

$$\begin{cases} u' = v & ; \; u(0) = \theta_0 \\ v' = -A\sin(u) & ; \; v(0) = v_0 \end{cases}$$

b) Usar Euler modificado ; $h = 0{,}05$

$A = 7 \; ; \; T = 10 \; , \; \theta_0 = \pi/4 \; ; \; v_0 = 0$

$$y^* = y_i + hf(t_i, y_i)$$

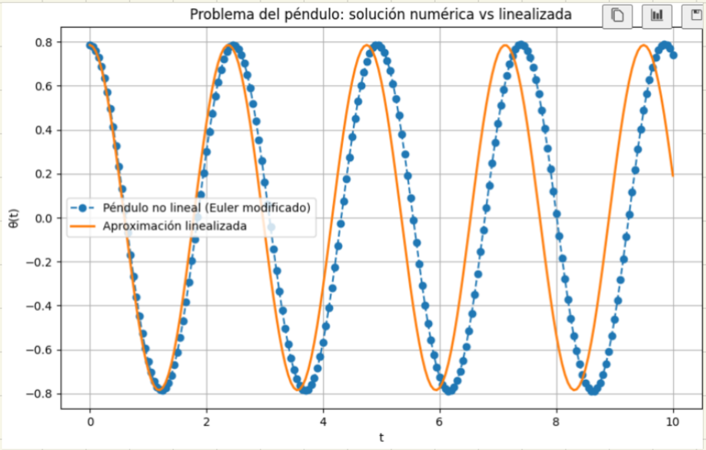
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y^*) \right] //$$

c) Linealzar problema: $\sin(\theta) \sim \theta$; $\theta << 1$

$$\ddot{\theta} = -A \sin(\theta(t))$$

$$\ddot{\theta} = -A\theta(t) \quad ; \quad \ddot{\theta} + A\theta(t) = 0 \quad ; \quad w = \sqrt{A}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\sqrt{A} \cdot t) + \frac{v_0}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A} \cdot t) //$$



3.13 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

a) $\rho = 13$.

b) $\rho = 28$.

Compare las soluciones ob ... es

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5,$ ...

b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5,$ ...

3.13 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

a) $\rho = 13$.

b) $\rho = 28$.

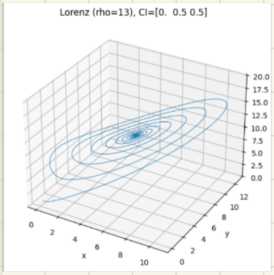
Compare las soluciones obtenidas al considerar las condiciones iniciales

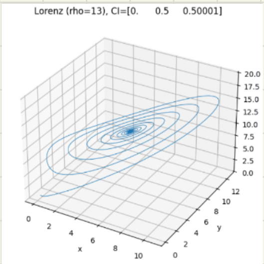
a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$.

b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.50001)$.

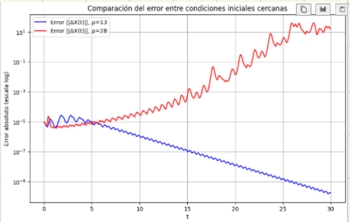
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \qquad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

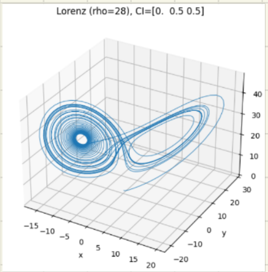
a) $\sigma = 10$; $\beta = 8/3$ y $\rho = 13$; $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$

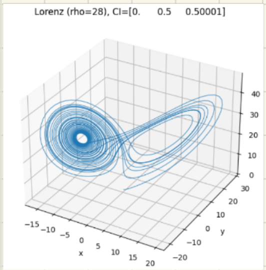




Nos y yo no vemos diferencia al cambiar CI.







PERO la compu sí!!!

$\rho = 13$, cambiar CI solo genera diferencia al principio. $\rho = 28$ a medida que avanzo, la diferencia entre CI'ES se nota mucho.