1. Ejercicio 1:

Considere la siguiente ODE:

$$x'' = 2\sin(x) \quad (1)$$
$$x(0) = 1 \quad (2)$$
$$x'(0) = 0 \quad (3)$$

1. Escriba el sistema de orden 1 equivalente
2. Resuelva con un paso h=0.3 desde 0 hasta 1 usando RK 2
3. Interpole los puntos con splines lineal y cúbico. Este último plante el sistema a resolver y escriba un còdigo con la interpolación.

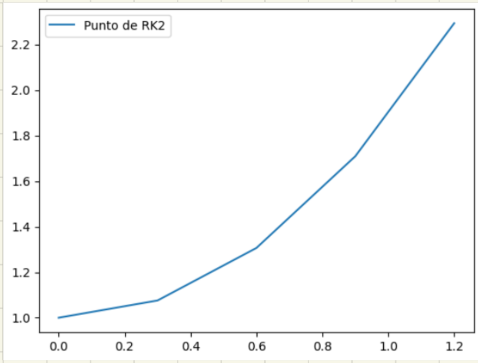
1) $x'' = 2\sin(x)$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$

$u = x$; $v = x'$; $u' = v$

$$\begin{cases} u' = v & ; u(0) = 1 \\ v' = 2\sin(u) & ; v(0) = 0 \end{cases}$$

2)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func(t,y):
  u, v = y
  du = v
  dv = 2*np.sin(u)
  return np.array([du,dv])

def rk2(f,y0,t0,tf,h):
  t_vals = np.arange(t0,tf+h,h)
  y_vals = np.zeros((len(t_vals), len(y0))) #En este caso es una matriz de Nx2
  y_vals[0] = y0 #Asigno los primeros valores
  for i in range(len(t_vals)-1):
    k1 = f(t_vals[i], y_vals[i])
    k2 = f(t_vals[i] + h/2,y_vals[i] + h/2 * k1 )
    y_vals[i+1] = y_vals[i] + h * k2
  return t_vals, y_vals

# Setteo condiciones iniciales
y0 = np.array([1.0,0.0]) # u(0) y v(0)
t_vals, y_vals = rk2(func,y0,0,1,0.3)

#Para printear solo me interesa u que representa a y(t)
u_vals = y_vals[:,0]

plt.plot(t_vals, u_vals, label = "Punto de RK2")
plt.legend()
plt.show()
```



2. Ejercicio 2:

Considere la función $f(x) = \ln(x)$:

1. Calcular la derivada en x= 1,x=2,x= 3. Utilice el método de 3 puntos correspondiente.
2. Aproximar la integral $\int_0^3 f'(x)dx$ haciendo uso de la $f'(x_k)$ y un esquema de integración que use los nodos del punto anterior. Compare con la solución real.
3. ¿Se le ocurre una forma de escribir el error cometido?

$f(x) = \ln(x)$

1) $\underline{h=1}$

$$f'_+(x=1) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x=1) + 4f(x=2) - f(x=3)\right]$$

$$f'_0(x=2) = \frac{1}{2h}\left[f(x=3) - f(x=1)\right]$$

$$f'_-(x=3) = \frac{1}{2h}\left[f(x=1) - 4f(x=2) + 3f(x=3)\right]$$

2) $\int_0^3 f'(x)\,dx$ usando $f'(x_k)$

$\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0) = \{\text{raro}\}$; corrijo a $\int_1^3$

$$\int_1^3 f'(x) = f(3) - f(1) = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$$

<u>Trapecio</u>

$$\int_1^3 f'(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f'(1) + 2f'(2) + f'(3)\right]$$

Simpson

$$\int_1^3 f'(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f'(1) + 4f'(2) + f'(3)\right]$$

$$E_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\varepsilon) \qquad \varepsilon \in (1,3)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad \max|f''(\varepsilon)| = 1$$

$$|E_T| \leq \left| -\frac{(3-1)}{12} \cdot 1^2 \cdot 1 \right| = \frac{1}{6}$$

$$|E_S| = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\varepsilon) \qquad f^{(4)} = \frac{24}{x^5} \rightsquigarrow 24$$

$$|E_S| \leq \left| -\frac{(3-1)}{180} \cdot 1^4 \cdot 24 \right| = \frac{48}{180} = \frac{24}{90} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

(b) **EN PAPEL.** Derive la fórmula de integración por trapecios, y la expresión para su error, para la integral

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ayuda: a órden n la fórmula de interpolación de Lagrange queda

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) + \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

con

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

y $\xi \in [a, b]$

La de trapecio simple sale de meter un P_1 en la integral. $f(x) = \sum_{i=0}^{1} f(x_i) L_i(x) + \prod_{i=0}^{1} (x - x_i) \frac{f''(\xi)}{2!}$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\int_a^b f(x) = f(a) \cdot \int_a^b \frac{x-b}{a-b} + f(b) \cdot \int_a^b \frac{x-a}{b-a} + \int_a^b (x-a)(x-b)\frac{f''(\xi_x)}{2}$$

$$\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax \Big|_a^b \right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right] = \frac{1}{2(b-a)}\left[b^2 - 2ab - a^2 + 2a^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}\left[(b-a)^2 \right] = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right]$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\frac{f''(\xi_x)}{2}dx \Rightarrow \text{Valor medio para integrales}$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x^2 - bx - ax + ab)dx = \qquad -x(a+b)$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2(a+b)}{2} + abx\Big|_a^b\right] \qquad h = b-a$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{b^2(a+b)}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2(a+b)}{2} - a^2b\right]$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^2b}{2} - a^2b\right]$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[-\frac{b^3}{6} + \frac{ab^2}{2} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^2b}{2}\right]$$

$$-\frac{f''(\xi)}{12}\left[-a^3 - 3ab^2 + 3a^2b + b^3\right] = -\frac{f''(\xi)}{12}\left[(b-a)^3\right]$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}h^3 \quad //$$

(c) **EN PAPEL.** Ahora divida al intervalo $[a, b]$ en m segmentos de igual longitud y muestre que la fórmula compuesta toma la forma

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=0}^{m-1} f(a+ih) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu),$$

con $\mu \in [a, b]$.

hecho en guía.

(d) **EN CÓDIGO.** Implemente la fórmula del inciso anterior para integrar la función $f(x) = e^{-x^2} \cos x$ entre 0 y 10. Evalúe la performance del método para distintos valores de m. No se pretende que compare con el valor analítico.

(e) **EN PAPEL.** Calcule una cota para el error en el ejemplo anterior.

e) $f(x) = e^{-x^2} \cdot \cos(x)$; $|E| = \dfrac{|f''(\xi)|\, h^3}{12}$ $\quad \xi \in (0,10)$

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \cos(x) - e^{-x^2} \sin(x)$$

$$f'(x) = -e^{-x^2} (2x \cos(x) + \sin(x))$$

$$f''(x) = 2x \cdot e^{-x^2} (2x\cos(x) + \sin(x)) - e^{-x^2} (2\cos(x) - 2x\sin(x) + \cos(x))$$

$$f''(x) = e^{-x^2} (4x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 3\cos(x) + 2x\sin(x))$$

$$f''(x) = e^{-x^2} (4x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 3\cos(x)) < 3$$

$$E \leq \frac{3 \cdot h^3}{12} = \frac{h^3}{4} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

n: #intervalos

$b - a = 10$

2. Sobre ecuaciones diferenciales

(a) **EN PAPEL.** Un método para resolver ecuaciones diferenciales lo que desea hacer es aproximar

$$y(t_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)dt.$$

Derive un método que tenga la forma

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t, w_i, w_{i-1}),$$

donde w_i son las aproximaciones de y_i y $t_i = t_0 + ih$, aproximando $f(t, y(t))$ por el polinomio de Lagrange de orden 1 con puntos t_i e t_{i-1}.

$f(t,y(t)) \quad t\in(t_{i-1}, t_i) \quad t_i = t_{i-1}+h \Rightarrow t_i - t_{i-1} = h$

$$l_1 = f(t_{i-1}, w_{i-1})\left(\frac{t-t_i}{t_{i-1}-t_i}\right) + f(t_i, w_i)\left(\frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)$$

$$l_1 = f_{i-1}\left(\frac{t-t_i}{-h}\right) + f_i\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}\right)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l_1(t)\,dt$$

$$-\frac{f_{i-1}}{h}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i)\,dt + \frac{f_i}{h}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_{i-1})\,dt$$

$$-\frac{f_{i-1}}{h}\left[\left.\frac{(t-t_i)^2}{2}\right|_{t_i}^{t_{i+1}}\right] + \frac{f_i}{h}\left[\left.\frac{(t-t_{i-1})^2}{2}\right|_{t_i}^{t_{i+1}}\right]$$

$$-\frac{f_{i-1}}{h}\left(\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2}\right) + \frac{f_i}{h}\left(\frac{(t_{i+1}-t_{i-1})^2}{2} - \frac{(t_i-t_{i-1})^2}{2}\right)$$

$$-\frac{f_{i-1}}{h}\left(\frac{h^2}{2}\right) + \frac{f_i}{h}\left(\frac{(2h)^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right)$$

$$- \frac{f_{i-1} h}{2} + \frac{f_i}{h}\left(2h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = -f_{i-1} \cdot \frac{h}{2} + \frac{f_i}{h}\frac{3}{2}h^2$$

$$= h\left(\frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1}\right) = h \cdot \phi(t, w_i, w_{i-1})$$

(b) **EN CÓDIGO.** Considere el sistema depredador-presa:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y,$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta x y - \gamma y,$$

donde $x(t)$ es la población de presas, $y(t)$ la de depredadores y $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ son parámetros. Empleando los parámetros $\alpha = 0.1,\ \beta = 0.02,\ \gamma = 0.3,\ \delta = 0.01$, resuelva el sistema usando el método RK4 (ver abajo) en el intervalo $t \in [0, 200]$ con paso $h = 0.1$, para las condiciones iniciales $x(0) = 40$, $y(0) = 9$. Grafique las series temporales de ambas poblaciones, $x(t)$, e $y(t)$, y el espacio de fases, es decir $x(t)$ vs. $y(t)$.