Simulacro Parcial 1

1. A partir de las expansiones de Taylor de $f(x)$, $f(x+h)$ y $f(x-h)$, derivar una regla de diferencias finitas de orden 1 para $f''(x)$. Encuentre una fórmula para el error.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24}h^4 \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \frac{f'''(x)h^3}{6} + \frac{f^{IV}(\xi_2)h^4}{24} \quad (2)$$

(1)+(2)

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{1}{12}h^4\left(f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)\right)$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{1}{12}h^2\left(f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)\right)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$E(x) = \frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi) \rightarrow O(h^2)$$

2. La expresión para el error del método de iteración de punto fijo puede escribirse como

$$|p_n - p| < \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|,$$

donde n es el número de iteración y $k > 0$ una constante que cumple $|g'(x)| < k$. Estime el número de interacciones necesarias para tener un error menos a 10^{-5} para la función $g(x) = 0{,}5\cos(x^2)$ en el intervalo $[0,1]$ con $p_0 = 1$.

$g(x) = 0{,}5 \cdot \cos(x^2) \qquad [0,1] \qquad p_0 = 1 \qquad k > 0$

$|g'(x)| < k$

$|g'(x)| = |-\frac{1}{2}\sin(x^2)\,2x| = x\,|\sin(x^2)|$

$|g'(1)| \approx 0{,}84 < 1$ ✓

$|p_1 - p_0| = |g(p_0) - p_0| = |g(1) - 1| = 0{,}729$

$\frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| < 10^{-5} \qquad k = 0{,}85$

$k^n < \frac{10^{-5}(1-k)}{|p_1 - p_0|}$

$n \cdot \ln(k) < \ln\left(\frac{10^{-5}(1-k)}{|p_1 - p_0|}\right)$

$n > \ln\left(\frac{10^{-5}(1-k)}{|p_1 - p_0|}\right) / \ln(k) \qquad k = 0{,}85, \quad |p_1 - p_0| = 0{,}729$

$n > 80{,}56 \; ; \; n > 81$ //

3. ¿Cual es la motivación de utilizar el método de la secante frente al método de Newton? Explicar ambos métodos y detallar las diferencias entre ambos.

- No calcular la derivada (puede ser muy costosa)
- Newton > secante en precisión

4. Frente al siguiente escenario $(x_0 = 1{,}1, f(x_0) = 10{,}9)$, $(x_1 = 1{,}11, f(x_1) = 11{,}0)$, $(x_2 = 3{,}8, f(x_2) = 16{,}5)$, $(x_3 = 5{,}2, f(x_3) = 12{,}8)$, $(x_4 = 5{,}201, f(x_4) = 12{,}79)$ que estrategia de interpolación utilizaría para evitar que el grado de la función interpolante no sea demasiado grande? Que método utilizaría? Describir el método.

Usaría spline cúbico (no se como se usa) pero

defino $h_i = x_{i+1} - x_i$ y $d_i = (f_{i+1} - f_i)/h_i$

Calculo segundas derivadas M_i resolviendo:

$$h_{i-1} \cdot M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) M_i + h_i M_{i+1} = 6(d_i - d_{i-1}); \quad i = 1,2,3$$

$M_0 = M_4$ (por ser bordes)

luego, en cada tramo:

$$S_i(x) = \frac{M_i (x_{i+1} - x)^3 + M_{i+1}(x - x_i)^3}{6 h_i} + \dots$$

Parcial I

1. Una posible corrección para el método de trapecios consiste en agregar información sobre la derivada en los bordes de la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(b) + f(a)) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(b)).$$

a) Demuestre que la cuadratura de trapecios corregida tiene orden ~~3~~ al menos orden 2

b) Aproxime el valor de la integral $\int_0^{0.1} e^{-x^2}dx$ mediante el método de trapecios simples y el corregido.

c) El término de error de la regla de trapecios simple viene dado por $E(f) = -(h^3/12)f''(\xi)$. Encuentre una cota para este término para la integral del inciso anterior.

$$f(x) = 1 \quad \int_a^b 1\,dx = b-a \; ; \; Q(f) = \frac{h}{2}(1+1) + \frac{h^2}{12}(0-0) \qquad b = a+h$$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_a^b 1\,dx = h \; ; \; Q(f) = h \; ✓$$

$$f(x) = x \quad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} \; ; \; Q(f) = \frac{h}{2}(b+a) + \frac{h^2}{12}(1-1)$$

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{2} = \frac{h(2a+h)}{2} \; ✓$$

$$Q(f) = \frac{h}{2}(a+h+a) = \frac{h}{2}(2a+h) \; ✓$$

b) $$\int_0^{0,1} e^{-x^2}dx \qquad T.S: \; \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2}dx \approx \frac{0,1}{2}\left(e^0 + e^{-0,01}\right) = 0,099$$

$$T.C: \; \frac{h}{2}(\underbrace{f(b)+f(a)}_{=1}) + \frac{h^2}{12}(\underbrace{f'(a)-f'(b)}_{=0}) = 0,09916$$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$

c) $E(F) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$

$f''(x) = -2\left[e^{-x^2} + x\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}\right]$

$F''(x) = -2e^{-x^2}\left[1 - 2x^2\right] \qquad x \in [0, 0.1]$

$|F''(x)| = \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 1} \underbrace{|-2+4x^2|}_{2} = 2$

$|E(F)| \leq \left|-\frac{h^3}{12}\cdot 2\right| = \frac{h^3}{6} = \frac{0{,}1^3}{6} = 0{,}000\hat{166}$

$= 1{,}66 \cdot 10^{-4}$

2. Se puede demostrar que si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia dada por el método de la secante que converge a p, la solución de $f(x) = 0$, entonces existe una constante C tal que $|p_{n+1} - p| \approx C|p_n - p||p_{n-1} - p|$. Asuma que $\{p_n\}$ converge con orden α, es decir, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

con $\lambda > 0$ una constante, utilice esta información para mostrar que $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. Ayuda: la suposición sobre el orden de convergencia quiere decir que puede tomar $|p_{n+1} - p| \approx \lambda|p_n - p|^{\alpha}$.

$\{P_n\}$ converge con orden α, $\lambda > 0$

$|P_{n+1} - P| \approx \lambda|P_n - P|^{\alpha} \to |e_{n+1}| \approx \lambda|e_n|^{\alpha} \quad (1)$

$|e_n| \approx \lambda|e_{n-1}|^{\alpha} \quad (2)$

$|P_{n+1} - P| \approx C|P_n - P||P_{n-1} - P| = C|e_n||e_{n-1}| \quad (3)$

$$|e_n| \approx \lambda |e_{n-1}|^{\alpha} \rightarrow \left(\frac{|e_n|}{\lambda}\right)^{1/\alpha} = |e_{n-1}| \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow (3) \quad |p_{n+1} - p| \approx C |e_n| \cdot \left(\frac{|e_n|}{\lambda}\right)^{1/\alpha}$$

$$= C |e_n| \lambda^{-1/\alpha} |e_n|^{1/\alpha} = C \cdot \lambda^{-1/\alpha} \cdot |e_n|^{1+\frac{1}{\alpha}} \quad (5)$$

$$|p_{n+1} - p| = |e_{n+1}| = \lambda \cdot |e_n|^{\alpha} \quad (6)$$

$(5) = (6)$

$$\lambda |e_n|^{\alpha} = C \cdot \lambda^{-1/\alpha} \cdot |e_n|^{1+1/\alpha} \quad ; \ |e_n| \rightarrow 0$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ //$$

$$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3. Una $f \in C^{n+1}[a,b]$ se puede escribir en términos de su polinomio interpolador de Lagrange, $P(x)$, y un término de error

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

[illegible] es [illegible]

a) Dados nodos equiespaciados $x_j = a + jh$ con $j = 0, 1, \cdots, N$ y $h = (b-a)/N$. Demuestre que

$$\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |(x - x_j)(x - x_{j+1})| = \frac{h^2}{4}.$$

b) Los polinomios interpoladores de Lagrange suelen incurrir en errores muy grandes cuando n es grande. ¿Qué término de la expresión del error causa esto? Puede elegir alguna función f de su preferencia para ejemplificar, por ejemplo, $f(x) = \cos(10x)$.

c) ¿Qué métodos puede elegir para evitar este problema? ¿Qué hacen esos métodos para evitarlo?

a) $x_j = a + jh$; con $j = 0, 1 \ldots, N$ $\quad h = \dfrac{(b-a)}{N}$

$$|(x - x_j)(x - x_{j+1})| = |(x^2 - x \cdot x_{j+1} - x \cdot x_j + x_j \cdot x_{j+1})|$$

$$|(x^2 - x(x_{j+1} + x_j) + x_j \cdot x_{j+1})| \;/\; \text{derivo}$$

$$2x - (x_{j+1} + x_j) = 0 \rightarrow \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$$

$$\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_j\right)\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_{j+1}\right) = \quad ; \quad x_{j+1} = x_j + h$$

$$\frac{1}{4}(-x_j + x_{j+1})(x_j - x_{j+1})$$

$$\frac{1}{4}(-\cancel{x_j} + \cancel{x_j} + h)(\cancel{x_j} - \cancel{x_j} - h) = -\frac{h^2}{4}$$

$$\left|-\frac{h^2}{4}\right| = \frac{h^2}{4} \,//\, \text{(demosterado)}$$

b) Los polinomios interpoladores de Lagrange suelen incurrir en errores muy grandes cuando n es grande. ¿Qué término de la expresión del error causa esto? Puede elegir alguna función f de su preferencia para ejemplificar, por ejemplo, $f(x) = \cos(10x)$.

$$E(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Cuando los nodos están equispaciados con n grandes $\rightarrow$ $(x - x_j) \approx (x - x_{j+1})$ por ende, se máximisa el productorio.

Si como $f(x) = \cos(10x)$ $f^{(n)} = 10^n \cdot (\quad) \ldots$

$\uparrow$ trigonométrico $[-1,1]$

10^n crece exponencialmente

c) ¿Qué métodos puede elegir para evitar este problema? ¿Qué hacen esos métodos para evitarlo?

Vimos splines cúbicos, que limitan el grado del Polinomio para cada subintervalo. Mantiene siempre grado bajo: (3)