DIFERENCIACION

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O((x-x_0)^2)$

$f'(x_0) \approx \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

└ a 2 puntos ⟶ forward $f'_+(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

backward $f'_-(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$

└ a 3 puntos ⟶ forward $f'_+(x) = \dfrac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right]$

centered $f'_0(x) = \dfrac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$

backward $f'_-(x) = \dfrac{1}{2h}\left[f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)\right]$

quiero $f''(x)$ como función de $f(x), x, h$

$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 \pm \frac{1}{6}f'''(\varepsilon_\pm)h^3$

$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2.\frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}\left[f'''(\varepsilon_+) - f'''(\varepsilon_-)\right]h^3$ ⟶ $\boxed{f''(x) = \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \dfrac{1}{6}\left[f'''(\varepsilon_+) - f'''(\varepsilon_-)\right]h}$

↓

$O(h)$

INTEGRACIÓN

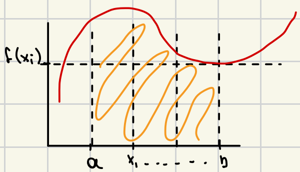
└ queremos integrar datos sin conocer la función que integramos

└ queremos integrar funciones sin primitiva analítica conocida

ejemplo → $\int e^{-x^2} dx$

CUADRATURAS

$I(f) = \int_a^b f(x)\,d(x) \cong Q(f)$ = cuadratura , $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i)$



$f(x) \sim P(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) L_k(x) \Big/ L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{x - x_i}{x_k - x_i}$

$\longrightarrow I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,dx$

$= \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k)$

↓ pesos ↓ nodos

cuadraturas → SIMPLES = aproximo f por un ! (único) polinomio que pasa por todos los x_k

→ COMPUESTAS = aproximo por polinomio a trozos, integro y + cada trozo

Regla de trapecios

↳ 2 nodos a, b

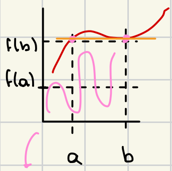
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(b)+f(a)\right]$$

↓

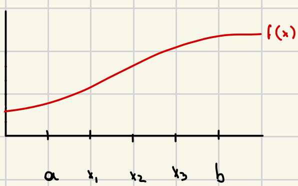
defino el error

$$E(f) = \int_a^b f(x) - P_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{f''(\varepsilon)(x-a)(x-b)}{12}\,dx$$

$$|E(f)| = \frac{|f''(\varepsilon)|}{12}\underbrace{(b-a)}_{h}^3 \rightarrow h^3$$



Interpolamos con el polinomio de lagrange de grado 1

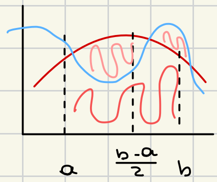


→ los nodos deben estar equiespaciados

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$|E(f)| = \frac{1}{90}|f^{IV}(\varepsilon)|\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$



Cuadratura Gaussiana

↳ elegir la posición de los nodos x_i, y el valor de los A_i / mi cuadratura tenga el máximo grado de precisión.

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q(f) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i)$$

elegimos los nodos x_i de manera que sean raíces del polinomio de Legendre de grado n ($P(n)$)

los nodos ya vienen dados

Los polinomios de Legendre están definidos en $[-1,1]$ el n de legendre lo define la q de nodos

→ ¿cómo calculo los A_i?

$$A_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

integran los polinomios de lagrange $L_i(x)$

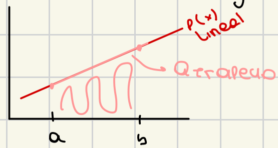
con lo cual la cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

me asegura el grado de precisión máxima $2n-1$ (q de nodos, bastante buenos)

GRADO DE PRECISIÓN DE UNA CUADRATURA

$\in \mathbb{P}_k$ = el grado de precisión de un polinomio / al aproximarlo por mi cuadratura la igualdad es exacta



$$\int p_k(x)\,dx = Q(p) \quad \in \mathbb{P}_k$$

$$I(p) = Q(p) \;\; \forall\, p \in \mathbb{P}_k$$

ejemplo trapecio}

si integramos $f(x)=1 \rightarrow E(f) \propto f''=0$

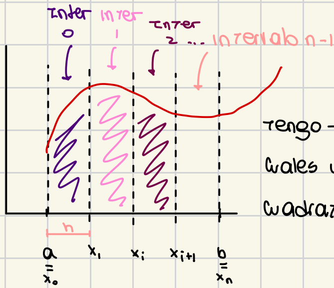
$f(x)=x \rightarrow E(f)=0$

$f(x)=x^2 \rightarrow E(f) = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \neq 0$

→ el trapecio tiene grado de precisión 1

Pero, $\tilde{p} \in \mathbb{P}_{k+n} / I(\tilde{p}) \neq Q(\tilde{p})$

- Dividimos el intervalo $[a,b]$ en subintervalos



Tengo → subintervalos en los cuales usamos una regla de cuadratura simple

calculamos la regla del trapecio compuesto → $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx} = \sum_{i=0}^{n-1} Q(f) = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\right] + \mathcal{E}_T$

Q trapecio

$h = x_{i+1} - x_i$

$\rightarrow \frac{b-a}{n} = h$

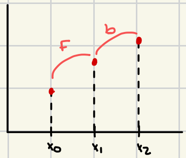
1. Diferenciación

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

Back Forward

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.

b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.



a. $f_+'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2\cos(2\cdot(-0.1))+0.1-[2\cos(2(-0.2))+0.2]}{-0.1-(-0.2)} \approx \boxed{0.18} \to \varepsilon_A = |0.18-0.55|$

$\boxed{\varepsilon_A = 0.37}$

$f_-'(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \approx \boxed{0.9} \to \varepsilon_A = |0.55-0.9|$

$\boxed{\varepsilon_A = 0.35}$

$f'(x) = -4\,\text{sen}(2x) - 1$

$f'(-0.2) \approx \boxed{0.55}$

b. $f_+'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2\ln(x_2)+1-[x_1^2\ln(x_1)+1]}{x_2-x_1} = \frac{1.4^2\ln(1.4)+1-[1.2^2\ln(1.2)+1]}{1.4-1.2} = \boxed{1.9847}$

$\boxed{\varepsilon_A = 0.3472}$

$f_-'(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{x_1^2\ln(x_1)+1-[x_0^2\ln(x_0)+1]}{x_1-x_0} = \frac{1.2^2\ln(1.2)+1-[1\ln(1)+1]}{1.2-1} = \boxed{1.3127}$

$\boxed{\varepsilon_A = 0.3248}$

$f'(x) = 2x\ln(x) + x$

$f'(1.2) = 2\cdot 1{,}2\ln(1.2) + 1.2$

$\boxed{f'(1.2) = 1.6375}$

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.

b) $f(x) = x\sin x + x^2\cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

$f_+'(x) = \frac{1}{2h}[-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)]$ $\quad f_0'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]$ $\quad f_-'(x) = \frac{1}{2h}[f(x-2h)-4f(x-h)+3f(x)]$

a. $h = -0.2-(-0.3) = 0.1$

$f_+'(x_0) = \frac{1}{2\cdot 0{,}1}[-3\cdot(e^{2x_0}-\cos(2x_0))+4(e^{2x_1}-\cos(2x_1))-(e^{2x_2}-\cos(2x_2))]$

$f_+'(-0.3) = \frac{1}{0.2}[-3(e^{-0.6}-\cos(2\cdot(-0.3)))+4(e^{-0.4}-\cos(2\cdot(-0.2)))-(e^{-0.2}-\cos(2(-0.1)))]$

$f_+'(0.3) = \frac{1}{0.2}[-3(-0.2765)+4\cdot(-0.2507)-(-0.1613)] = \boxed{-0.06} \to \varepsilon_A = |-0.06-0.03164| = \boxed{0.02839}$

$f_0'(x_2) = \frac{1}{0.2}[(e^{2x_3}-\cos(2x_3))-(e^{2x_1}-\cos(2x_1))]$

$f_0'(x_2) = \frac{1}{0.2}[(e^{0}-\cos(0))-(e^{-0.4}-\cos(2\cdot(-0.2)))] = \boxed{1.2537}$

$\varepsilon_A = |1.2537-1.2407|$

$\boxed{\varepsilon_A = 0.013}$

$$f_-'(x_3) = \frac{1}{0.2}\left[\left(e^{-2x_1} - \cos(2x_1)\right) - 4\left(e^{-2x_2} - \cos(2x_2)\right) + 3\left(e^{-2x_3} - \cos(2x_3)\right)\right]$$

$$f_-'(0) = \frac{1}{0.2}\left[\left(e^{-0.6} - \cos(2(-0.3))\right) - 4\left(e^{-0.2} - \cos(2(-0.1))\right) + 3\left(e^{0} - \cos(0)\right)\right]$$

$$f_-'(0) = \frac{1}{0.2}\left[(-0.2507) - 4(-0.1613)\right] = \boxed{1.9725}$$

$$\varepsilon_A = |1.9725 - 2|$$

$$\boxed{\varepsilon_A = 0.0275}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2\operatorname{sen}(2x)$$

$$f'(-0.3) = \boxed{-0.03166}$$

$$f'(-0.1) = \boxed{1.2401}$$

$$f'(0) = \boxed{2}$$

b. $h = 1.2 - 1.1 = 0.1$

$$f_+'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot 0.1}\left[-3\left(x_0 \operatorname{sen}(x_0) + x_0^2 \cos(x_0)\right) + 4\left(x_1 \operatorname{sen}(x_1) + x_1^2 \cos(x_1)\right) - \left(x_2 \operatorname{sen}(x_2) + x_2^2 \cos(x_2)\right)\right]$$

$$f_+'(1.1) = \frac{1}{0.2}\left[-3\left(1.1 \operatorname{sen}(1.1) + 1.1^2 \cos(1.1)\right) + 4\left(1.2 \operatorname{sen}(1.2) + 1.2^2 \cos(1.2)\right) - \left(1.3 \operatorname{sen}(1.3) + 1.3^2 \cos(1.3)\right)\right]$$

$$f_+'(1.1) = \frac{1}{0.2}\left[-3(1.5291) + 4(1.6402) - (1.7046)\right] = \boxed{1.3445} \rightarrow \varepsilon_A = |1.3445 - 1.3097| = \boxed{0.0348}$$

$$f_0'(x_2) = \frac{1}{0.2}\left[\left(x_3 \operatorname{sen}(x_3) + x_3^2 \cos(x_3)\right) - \left(x_1 \operatorname{sen}(x_1) + x_1^2 \cos(x_1)\right)\right]$$

$$f_0'(1.3) = \frac{1}{0.2}\left[\left(1.4 \operatorname{sen}(1.4) + 1.4^2 \cos(1.4)\right) - \left(1.2 \operatorname{sen}(1.2) + 1.2^2 \cos(1.2)\right)\right]$$

$$f_0'(1.3) = \frac{1}{0.2}\left[(1.71227) - (1.64024)\right] = \boxed{0.3623} \rightarrow \varepsilon_A = |0.3623 - 0.3783| = \boxed{0.016}$$

$$f_-'(x_3) = \frac{1}{0.2}\left[\left(x_1 \operatorname{sen}(x_1) + x_1^2 \cos(x_1)\right) - 4\left(x_2 \operatorname{sen}(x_2) + x_2^2 \cos(x_2)\right) + 3\left(x_3 \operatorname{sen}(x_3) + x_3^2 \cos(x_3)\right)\right]$$

$$f_-'(x_3) = \frac{1}{0.2}\left[\left(1.2 \operatorname{sen}(1.2) + 1.2^2 \cos(1.2)\right) - 4\left(1.3 \operatorname{sen}(1.3) + 1.3^2 \cos(1.3)\right) + 3\left(1.4 \operatorname{sen}(1.4) + 1.4^2 \cos(1.4)\right)\right]$$

$$f_-'(1.4) = \frac{1}{0.2}\left[(1.64024) - 4(1.7046) + 3(1.71227)\right] = \boxed{-0.2003} \rightarrow \varepsilon_A = |-0.2003 - 0.2321| = \boxed{0.0318}$$

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) + 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) - x^2 \operatorname{sen}(x)$$

$$f'(1.1) = \boxed{1.3097} \qquad f'(1.4) = \boxed{-0.2321}$$

$$f'(1.3) = \boxed{0.3783}$$

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$

Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

$$f_+'(x) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right]$$

$$f_0'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$$

$$f_-'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)\right]$$

$T = 1.0$ $\quad h = 1.02 - 1.01 = 0.01$

$$I_+'(1.0) = \frac{1}{2.0{,}01}\left[-3.(3.10) + 4.(3.12) - 3.14\right] = 2$$

$$V(1.0) = 0{,}98 . 2 + 0{,}142 . 3{,}10$$

$$\boxed{V(1.0) = 2.4002}$$

$$I_+'(1.01) = \frac{1}{2.0{,}01}\left[-3.(3.12) + 4(3.14) - 3.18\right] = 1$$

$$V(1.01) = 0.98 . 1 + 0.142 . 3{,}12$$

$$\boxed{V(1.01) = 1.42304}$$

$$I_0'(1.02) = \frac{1}{2.0{,}01}\left[3.18 - 3.12\right] = 3$$

$$V(1.02) = 0{,}98 . 3 + 0{,}142 . 3{,}14$$

$$\boxed{V(1.02) = 3{,}38588}$$

$$I_0'(1.03) = \frac{1}{2.0{,}01}\left[3.24 - 3.14\right] = 5$$

$$V(1.03) = 0{,}98 . 5 + 0{,}142 . 3{,}18$$

$$\boxed{V(1.03) = 5{,}35156}$$

$$I_-'(1.04) = \frac{1}{2.0{,}01}\left[3{,}14 - 4 . 3{,}18 + 3 . 3{,}24\right] = 7$$

$$\boxed{V(1.04) = 7{,}32008}$$

1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x) + 0.6$ con $x \in [-1, 1]$. Pruebe con distintos esquemas y pasos.

$$\boxed{f'(x) = -0{,}4 . 50 \sec^2(50x) = -20\left(1 - \tanh^2(50x)\right)}$$

```python
# Función ejemplo y derivada exacta
def f(x):
    return -0.4 * np.tanh(50*x) + 0.6

def f_prima(x):
    return -20 * (1 - np.tanh(50*x)**2)

# Diferenciación
def forward_2(f,x,h):
    return (f(x+h) - f(x))/h

def backward_2(f,x,h):
    return (f(x) - f(x-h))/h

def centered_2(f,x,h):
    return (f(x+h) - f(x-h))/(2*h)

def forward_3(f,x,h):
    return (-3*f(x) + 4*f(x+h) - f(x+2*h)) / (2*h)

def centered_3(f,x,h):
    return (f(x+h) - f(x-h)) / (2*h)

def backward_3(f,x,h):
    return (3*f(x) - 4*f(x-h) + f(x-2*h)) / (2*h)

# Evaluación
x_vals = np.linspace(-1,1,5)
h = 0.01

print(f"{'x':>6} {'Exacta':>12} {'Fwd2':>12} {'Bwd2':>12} {'Cen2':>12} {'Fwd3':>12} {'Bwd3':>12}")
for x in x_vals:
    exact = f_prima(x)
    f2 = forward_2(f,x,h)
    b2 = backward_2(f,x,h)
    c3 = centered_3(f,x,h)
    f3 = forward_3(f,x,h)
    b3 = backward_3(f,x,h)
    print(f"{x:6.2f} {exact:12.6f} {f2:12.6f} {b2:12.6f} {c3:12.6f} {f3:12.6f} {b3:12.6f}")
```

x	Exacta	Fwd2	Bwd2	Cen2	Fwd3	Bwd3
-1.00	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.50	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.00	-20.000000	-18.484686	-18.484686	-18.484686	-21.737489	-21.737489
0.50	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.00	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right].$$

Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \dots, 10^{-6}$.

a 2 puntos

$f_+'(x)$. $\varepsilon_A = \left| \cancel{f'(x)} - \frac{[f(x+h) - \cancel{f(x)}]}{h} \right| = \frac{|f''(\varepsilon)|}{2} \cdot h \rightarrow \boxed{O(h^1)}$

└ el error es lineal

$\cancel{f(x)} + \cancel{f'(x)}h + \frac{f''}{2}(\varepsilon)h^2$ → Taylor , $\varepsilon \in [x, x+h]$

$f_-'(x)$. $\varepsilon_A = \left| f'(x) - \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] \right| = \left| f'(x) - \frac{1}{2\cancel{h}} \cdot 2\cancel{h} f'(x) \right| =$

$f(x+h) = \cancel{f(x)} + hf'(x) + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x)}$

$-$

$f(x-h) = \cancel{f(x)} - hf'(x) + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x)}$

$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$

$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\varepsilon)h^2 \pm \frac{1}{3}f'''(\varepsilon)h^3 \rightarrow f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{1}{6}[f'''(\varepsilon_+) - f'''(\varepsilon_-)]h^3$

↓

$\varepsilon_a = \frac{|f'''(\varepsilon_+) - f'''(\varepsilon_-)|}{12} h^2 \longrightarrow \boxed{O(h^2)}$

└ error cuadrático

1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula

$$f_n'(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

Cuando $h = 10^{-n}$ es relativamente grande, domina el error de truncamiento y $\downarrow h$ hace que este error $\downarrow$, pero cuando h se hace muy chico, cercano a $\varepsilon_{máquina}$ $(<<10^{-8})$ domina el de redondeo que crece como $1/h$

```python
def f(x):
    return np.sin(x)

def f_prima(x):
    return np.cos(x)

x0 = 1

def f_prima_n(f,x,h):
    return (f(x + h) - f(x)) / h

n_valores = range(0,16)
aproximacion = []
error = []


for n in n_valores:
    h = 10 ** (-n)
    f_prima_apox = f_prima_n(f,x0,h)
    aproximacion.append(f_prima_apox)
    error.append(np.abs(f_prima(x0) - f_prima_apox))


# Convertir a arrays
approx = np.array(aproximacion)
errors = np.array(error)

valor_real = f_prima(x0)
# Mostrar resultados
print(" n       f'(x)      f'_n_aprox(x)       Error")
for n, ap, er in zip(n_valores, aproximacion, error):
    print(f"{n:2d}  {valor_real:12.8f}  {ap:12.8f}  {er:12.9f}")
```

n	f'(x)	f'_n_aprox(x)	Error
0	0.54030231	0.06782644	0.472475864
1	0.54030231	0.49736375	0.042938553
2	0.54030231	0.53608598	0.004216325
3	0.54030231	0.53988148	0.000420826
4	0.54030231	0.54026023	0.000042074
5	0.54030231	0.54029810	0.000004207
6	0.54030231	0.54030189	0.000000421
7	0.54030231	0.54030226	0.000000042
8	0.54030231	0.54030230	0.000000003
9	0.54030231	0.54030236	0.000000053
10	0.54030231	0.54030225	0.000000058
11	0.54030231	0.54030114	0.000001169
12	0.54030231	0.54034555	0.000043240
13	0.54030231	0.53956839	0.000733916
14	0.54030231	0.54400928	0.003706976
15	0.54030231	0.55511151	0.014809206

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

$$\frac{\partial \varepsilon_a(h)}{\partial h} = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{3}hM = 0$$

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}h^2 + \frac{1}{3}hM\,h^2 = 0\,h^2$$

$$-\varepsilon + \frac{1}{3}Mh^3 = 0$$

$$\boxed{h = \sqrt[3]{-3\varepsilon/M}}$$

1.8 Sea la función

$$f(x, y) = x^2e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x, y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

Forward $f'_+(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

centered $f'_0(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y + \cos(xy).y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y x^2 + \cos(xy)x$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0.5) = 3.736233$ $\qquad$ $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0.5) = 2.526303$

2.128146 $\qquad$ 2.090943

2.165668 $\qquad$ 2.102942

2.153468

FORWARD x $\longrightarrow$ $f'_+(x,y) = \frac{f(x+0.01, y) - f(x,y)}{0.01}$

$f'_+(1, 0.5) = \frac{f(1.01, 0.5) - f(1, 0.5)}{0.01}$

$\boxed{f'_+(1, 0.5) = 3.7522}$ $\rightarrow$ $\varepsilon_A = 0,015967$

y $\longrightarrow$ $f'_+(x,y) = \frac{f(x, y+0.01) - f(x,y)}{0.01}$

$f'_+(1, 0.5) = \frac{f(1, 0.51) - f(1, 0.5)}{0.01}$

$\boxed{f'_+(1, 0.5) = 2.5322}$ $\rightarrow$ $\varepsilon_A = 0,00587$

CENTERED x $\longrightarrow$ $f'_0(x,y) = \frac{1}{2.0,01}\left[f(x+0,01, y) - f(x-0.01, y)\right]$

$f'_0(1, 0.5) = \frac{1}{0.02}\left[f(1,01, 0.5) - f(0.99, 0.5)\right]$

$f'_0(1, 0.5) = \frac{1}{0,02}(2,165668 - 2.090943)$

$\boxed{f'_0(1, 0.5) = 3.73625}$ $\rightarrow$ $\varepsilon_A = 1,7 \cdot 10^{-5}$

$f'_0(1, 0.5) = \frac{1}{2.0,01}\left[f(x, y+0.01) - f(x, y-0.01)\right]$

$f'_0(1, 0.5) = \frac{1}{0,02}\left[f(1, 0.51) - f(1, 0.49)\right]$

$f'_0(1, 0.5) = \frac{1}{0,02}(2.153468 - 2.102942)$

$\boxed{f'_0(1, 0.5) = 2.5263}$ $\rightarrow$ $\varepsilon_A = 3.10^{-4}$

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,
b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,
c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,
d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

a. $I(f) = \int_{0.5}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{0.5}^{1} \approx \boxed{0.19375}$

Trapecios

$I(f) \approx Q(f) = \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$

$Q(f) = \frac{1-0.5}{2}[1+0.5^4]$

$\boxed{Q(f) \approx 0.27}$

$|E_A| = \frac{|f''(\varepsilon)|}{12}(b-a)^3$

$|E_A| = \frac{|\cancel{12}\varepsilon^2|}{\cancel{12}}(1-0.5)^3, \quad \varepsilon \in [0.5, 1]$

$|E_A| \le 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\boxed{|E_A| \le \frac{1}{8}}$

Simpson

$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$

$Q(f) = \frac{1-0.5}{6}\left[0.5^4 + 4 \cdot 0.75^4 + 1^4\right]$

$\boxed{Q(f) \approx 0{,}19401}$

$|E_A| = \frac{|f^{iv}(\varepsilon)|}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$

$\boxed{|E_A| \underset{\varepsilon \le 1}{\le} 3 \cdot 10^{-4}}$

Gaussiana

cambio de variable

$\rightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}t, \quad t \in [-1, 1]$

$t = 1 \rightarrow x = b$

$t = -1 \rightarrow x = a$

$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1.5}{2} + \frac{0.5}{2}t\right)\left(\frac{0.5}{2}\right) dt = \int_{-1}^{1} g(t) dt$

b. $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx = 2\int_{1}^{0.5} \frac{1}{x-4} dx = 2\ln(|x-4|)\Big|_{1}^{0.5} = 2[\ln(3.5) - \ln(3)] = 0.3083$

Trapecio

$$I(f) \approx Q(f) = \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$$

$$Q(f) = \frac{0.5-1}{2}\left[\frac{2}{0.5-4} + \frac{2}{1-4}\right]$$

$$Q(f) = 0.3095$$

$$|E_A| = \frac{|f''(\varepsilon)|}{12}(b-a)^3$$

$$|E_A| = \frac{|-2(\varepsilon)^{-2}|}{12}(0.5-1)^3, \ \varepsilon \in [0.5, 1]$$

$$|E_A| = \frac{|-\cancel{2}|}{\cancel{12}}(-0.5)^3$$

$$|E_A| = 0.02083$$

Simpson

$$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$Q(f) = \frac{0.5-1}{6}\left[\frac{2}{1-4} + 4\,\frac{2}{0.75-4} + \frac{2}{0.5-4}\right]$$

$$Q(f) = -\frac{1}{12}\left[-\frac{2}{3} + 4.\left(-\frac{8}{13}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right)\right]$$

$$Q(f) = 0.3083$$

c. $\int_1^{1.5} x^2 \ln(x)\,dx$ → como la gaussiana $\in [-1, 1]$ hacemos un cambio de variable

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

$$t = -1 \rightarrow x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$$

$$t = 1 \rightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$$

$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)}_{\frac{\partial x}{\partial t}} dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{2.5}{2} + \frac{0.5}{2}t\right)\left(\frac{0.5}{2}\right)dt = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

si elegimos $n=2$,

$$Q = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

$$\boxed{Q = A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2)} \longrightarrow \text{Calculando las raíces de } P_2(t)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$t_1 = -\sqrt{3}/3 \qquad t_2 = \sqrt{3}/3$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}\,dt \qquad A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\,dt$$

$$\longrightarrow A_1 = A_2 = 1$$

$$Q = g(t_1) + g(t_2) = f\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{1}{4}$$

$\boxed{\varepsilon \sim 1.10^{-5}}$

$\boxed{Q \sim 0.192269}$

valor exacto de la integral → $\int_{-1}^{1} x^2 \ln(x)\,dx = 0.192259$

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Regla de Trapecios

L 2 nodos a, b

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(b)+f(a)\right]$$

$h = 0.2$

Simpson

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx = \frac{2.6-1.8}{6}\left[f(1.8)+4f\left(\frac{2.6+1.8}{2}\right)+f(2.6)\right]$$

$$= 0.4\,(3{,}12014 + 4 \cdot 6{,}04241 + 10{,}46675)$$

$$= \boxed{5{,}034204}$$

a

b

Trapecio

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx = \frac{2.6-1.8}{2}\left[f(2.6)+f(1.8)\right]$$

$$= 0.4\,(10{,}46675 + 3{,}12014)$$

$$= \boxed{5{,}434756}$$

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\int_b^a f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, y $x_2 = b$.

a. $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = Q(f)$

$n=2$ nodos → el grado de precisión máximo posible es $2n-1 = 3$

$f=1 \to I(f) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \quad Q(f) = 1+1 = 2$

$f(x)=x \to I(f) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \quad Q(f) = 0$

$f(x)=x^2 \to I(f) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3 \quad Q(f) = \frac{3}{9}+\frac{3}{9} = \frac{2}{3}$

$f(x)=x^3 \to I(f) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \quad Q(f) = 0$

$f(x)=x^4 \to I(f) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = 0.4 \quad Q(f) = 0.22$

b. $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{9}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)f(x_1) + \frac{3}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)f(x_2)$

$f=1 \to I(f) = \int_a^b 1\,dx = b-a \quad Q(f) = \frac{9}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)1 + \frac{3}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)1$

$h = \frac{b-a}{3} \quad Q(f) = 3h$ ✓

$3h = b-a$ ✓

$f=x \to I(f) = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{9h^2+6ha}{2} = 3ah + \frac{9}{2}h^2$ ✓

$b = 3h+a$

$Q(f) = \frac{9}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)f(a+h) + \frac{3}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)f(b)$

$Q(f) = \frac{9}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)(a+h) + \frac{3}{4}\left(\frac{b-a}{3}\right)b$

$Q(f) = \frac{9}{4}h(a+h) + \frac{3}{4}hb$

$Q(f) = \frac{9}{4}ha + \frac{9}{4}h^2 + \frac{3}{4}ha + \frac{3}{4}3h^2$

$Q(f) = 3ha + \frac{9}{2}h^2$ ✓

Tiene grado de precisión máximo $\boxed{k=3}$

si la cuadratura tiene el GPN posible

→ la cuadratura es gaussiana

$f = x^2 \rightarrow I(f) = \int_a^b x^2\, dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3} = \dfrac{27h^3 + 27h^2 a + 9ha^2}{3}$

$b = 3h + a$

$= 9h^3 + 9ah^2 + 3ha^2$ ✓

$Q(f) = \frac{9}{4} h(a+h)^2 + \frac{3}{4} h b^2$

$Q(f) = \frac{9}{4}(a^2h + 2ah^2 + h^3) + \frac{3}{4}(9h^3 + 6ah^2 + a^2h)$

$Q(f) = 3a^2h + 9ah^2 + 9h^3$ ✓

$f = x^3 \rightarrow I(f) = \int_a^b x^3\, dx = \dfrac{b^4 - a^4}{4} = \dfrac{\cancel{a^4} + 12a^3h + 54a^2h^2 + 36ah^3 + 81h^4 - \cancel{a^4}}{4}$

$b = 3h + a$

$= 3a^3h + \frac{27}{2}a^2h^2 + 9ah^3 + \frac{81}{4}h^4$

$Q(f) = \frac{9}{4} h(a+h)^3 + \frac{3}{4} h b^3$ $\quad 81$

$Q(f) = \frac{9}{4}(ha^3 + 3a^2h^2 + 3ah^3 + h^4) + \frac{3}{4} \underbrace{h(a+3h)^3}_{ha^3 + 9a^2h^2 + 27ah^3 + 27ah^4}$

$Q(f) = 3a^3h + \frac{27}{2}h^2 + 27ah^3 + \frac{45}{2}ah^4$ ✗

nivel de precisión $\boxed{k=2}$

BINOMIO DE NEWTON

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

$f(x) = 1 \rightarrow I(f) = \int_0^1 1\, dx = 1 \longrightarrow 1 = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$

$1 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1$

$1 = c_0 + c_1 \longrightarrow \boxed{c_0 = \frac{1}{4}}$

$f(x) = x \rightarrow I(f) = \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$

$\frac{1}{2} = c_0 \cdot 0 + c_1 x_1$

$\frac{1}{2} = c_1 x_1 \longrightarrow \frac{1}{2x_1} = \boxed{c_1 = \frac{3}{4}}$

$f(x) = x^2 \rightarrow I(f) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$

$\frac{1}{3} = c_1 \cdot x_1^2 \longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cancel{x_1}} \cdot x_1^{\cancel{2}}$

$\boxed{\frac{2}{3} = x_1}$

$\longrightarrow \boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right)}$

Pruebo para $f(x) = x^3$ para ver si $k=2$ es el máximo nivel de precisión

$\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} \longrightarrow Q(x) = \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right) \longrightarrow Q(x) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}$ ✓

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \underbrace{\boxed{k f^{(4)}(\xi),}}_{\text{error}}$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

$$|E(f)| = \frac{1}{90} |f^{iv}(\varepsilon)| \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

x_0

$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_0 + 2h$

$$f(x) = 1 \to I(x) = \int_{x_0}^{x_2} 1\,dx = x_2 - x_0 \longrightarrow x_2 - x_0 = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

$$x_2 - x_0 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$f(x) = x \to I(x) = \int_{x_0}^{x_2} x\,dx = \frac{x_2^2 - x_0^2}{2} \to \frac{x_2^2 - x_0^2}{2} = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$f(x) = x^2 \to I(x) = \int_{x_0}^{x_2} x^2\,dx = \frac{x_2^3 - x_0^3}{3} \to \frac{x_2^3 - x_0^3}{3} = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$$

$$f(x) = x^3 \to I(x) = \int_{x_0}^{x_2} x^3\,dx = \frac{x_2^4 - x_0^4}{4} \longrightarrow \frac{x_2^4 - x_0^4}{4} = a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 + a_1 x_2^3$$

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

$$f(x)=1 \longrightarrow I(f) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \longrightarrow 2 = a.1 + b.1 + c.0 + d.0$$

$$f'(x)=0$$

$$2 = a+b \xrightarrow{2} \boxed{2=b}$$

$$f(x) = x$$

$$f'(x)=1 \rightarrow I(f) = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 \rightarrow 0 = a(-1) + b.0 + c.1 + d.1$$

$$0 = -a + c + d \longrightarrow a = c+d \quad ^{1} \xrightarrow{2} 0 = c+d$$

$$-c = d \quad ^{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{6} = d}$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow I(f) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3} = a(-1)^2 + b.0^2 + c.2(-1) + d.2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\frac{2}{3} = a - 2c + 2d \xrightarrow{3} \frac{2}{3} = -2c - 2c$$

$$\boxed{-\frac{1}{6} = c}$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow I(f) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 \rightarrow 0 = a(-1)^3 + b.0^3 + c.3(-1)^2 + d.3.1^2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$0 = -a + 3c + 3d \xrightarrow{1} 0 = -a + 3(c+d)$$

$$0 = -a + 3.a$$

$$\boxed{0 = a} \quad ^{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2f(0) - \frac{1}{6} f'(-1) + \frac{1}{6} f'(1)}$$

$$\text{verifico} \longrightarrow f(x) = x^4 \rightarrow I(f) = \int_{-1}^{1} x^4\, dx = 0 \longrightarrow 0 = 2.0 - \frac{1}{6}.4(-1)^3 + \frac{1}{6}.4(1)^3$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$0 \neq \frac{4}{3} \checkmark$$

Cuadraturas Compuestas

2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f\,dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

```python
def trapecio_compuesto(f,a,b,n):
    h = (b - a) / n
    x = np.arange(a,b+1,h)
    integral = 0
    for i in range(0,n):
        integral += h/2 * (f(x[i]) + f(x[i+1]))
    return integral

def g(x):
    return x ** 2 * np.log(x)

print(trapecio_compuesto(g,1,1.5,10))  # Aproximación con 10 subintervalos
print("Valor exacto = 0.192259")
```

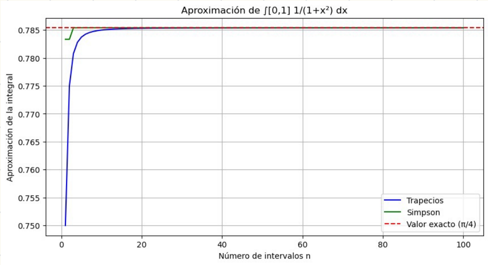
```
0.19261694587761452
Valor exacto = 0.192259
```

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.

```python
def simpson_compuesto(f,a,b,n):
    #Simpson requiere n par
    if n % 2 != 0:
        n += 1

    h = (b - a)/n
    x = np.linspace(a,b,n+1)
    y = f(x)
    # (h/3) * (f(x0) + 4 * sumatoria de i = 1 a n-1 de f(xi) + 2 * sumatoria de i = 2 a n-2 de f(xi) + f(xn))) donde la primera sumatoria es con i impar y la segunda con i par
    return (h/3) * (y[0] + 4 * np.sum(y[1:-1:2]) + 2 * np.sum(y[2:-2:2]) + y[-1])

def f(x):
    return 1 / (1 + x**2)

a, b = 0, 1
valor_exacto_integral = np.pi / 4

valores_n = np.arange(1,101)
trapecio = []
simpson = []

for n in valores_n:
    trapecio_valor = trapecio_compuesto(f,a,b,n)
    trapecio.append(trapecio_valor)
    simpson_valor = simpson_compuesto(f,a,b,n)
    simpson.append(simpson_valor)

trapecio_valores = np.array(trapecio)
simpson_valores = np.array(simpson)

plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(valores_n, trapecio_valores, label="Trapecios", color="blue")
plt.plot(valores_n, simpson_valores, label="Simpson", color="green")
plt.axhline(valor_exacto_integral, color="red", linestyle="--", label="Valor exacto (π/4)")
plt.xlabel("Número de intervalos n")
plt.ylabel("Aproximación de la integral")
plt.title("Aproximación de ∫[0,1] 1/(1+x²) dx")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Métodos numéricos y Optimización - segundo semestre 2024
Universidad de San Andrés

Guía 2: *Diferenciación. Integración. Ecuaciones diferenciales.*

1. Diferenciación

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

   a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.
   b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

   a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.
   b) $f(x) = x\sin x + x^2 \cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que
$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$
Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x) + 0.6$ con $x \in [-1, 1]$. Pruebe con distintos esquemas y pasos.

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:
$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$
$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right].$$
Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}$.

1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula
$$f_n'(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$
para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

1.8 Sea la función

$$f(x, y) = x^2 e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x, y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

2. Integración

Cuadraturas Simples

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,

b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,

c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,

d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\int_{b}^{a} f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, y $x_2 = b$.

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

Cuadraturas Compuestas

2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f\,dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.

2.9 Sea $f \in C^2[a, b]$, $h = (b - a)/n$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a, b)$ para el cual la regla de los trapecios compuesta para n subintervalos pueden escribir de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

2.10 Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede tener grado de precisión mayor a $2n - 1$. Ayuda: construya un polinomio con raíces doble en cada x_i.

2.11 La función error se define por

$$\operatorname{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Aproximar $\operatorname{erf}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ utilizando la regla de Simpson compuesta sobre $[0, 1]$ con n subintervalos. Calcular también con la regla del trapecio compuesta. Comparar ambos resultados y estimar el error usando las cotas teóricas. *Sugerencia*: Implementar en *python* para testear comportamiento a n grande.

b) Repetir para $\operatorname{erf}(2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\,dt$. Analizar cómo cambia la convergencia al duplicar el intervalo.

c) Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si bien no podemos usar los métodos vistos para aproximarla directamente, sí podemos aplicar el cambio $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)$ que mapea $u \in [0, 1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \;=\; \int_0^1 e^{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}\,\frac{\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)\,du.$$

Aproximar la integral resultante en $[0, 1]$ con cuadratura Gaussiana de orden $m = 2,\ 3$. Comparar con Simpson compuesto en el mismo intervalo con $n = 4, 8, 16$ subintervalos.

3. Ecuaciones diferenciales

Método de Euler

3.1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

3.2 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Euler con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b) $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = t\tan(\ln t)$.

c) $y' = -(y+1)(y+3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

d) $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1/3$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-5t}$.

3.3 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exactas $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exactas.

b) Utilice las aproximaciones obtenidas en el inciso anterior e interpolación lineal para aproximar los valores $y(1.04)$, $y(1.55)$, e $y(1.97)$. Compare con los valores exactos.

c) Calcule el h necesario para tener $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$, donde w_i es la aproximación numérica a paso i.

3.4 Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolver usando el programa del Ejercicio 1 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

d) Repetir los ítems anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

Método de Runge-Kutta

3.5 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = (1/5)te^{3t} - (1/25)e^{3t}$.

b) $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c) $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = t \ln t + 2t$.

d) $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = (1/2)\sin 2t - (1/3)\cos 3t + 4/3$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.6 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden 4 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = -9y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = e$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = e^{1-9t}$.

b) $y' = -20(y - t^2) + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1/3$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-20t}$.

c) $y' = -20y + 20\sin t + \cos t$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

d) $y' = 50/y - 50y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.7 Escriba las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones de grado 1 y resuélvalas con el método de Runge-Kutta de orden 4

a) $2y'' - 5y' + y = 0$, $y(3) = 6$, $y'(3) = -1$.

b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 4$.

3.8 Resuelva los siguientes sistemas. Calcule su estabilidad para el método de Euler. Estudie las soluciones.

a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

3.9 Linearice el sistema $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$ alrededor de $y = 1$. Estudie la estabilidad del método de Euler para este sistema.

3.10 **Modelo logístico de crecimiento poblacional.** Se estudia la evolución de una única población $x(t)$, cuyo crecimiento se ve limitado por la disponibilidad de recursos. El modelo logístico asume que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima K. Se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca, $K > 0$ es la capacidad de carga del ambiente.

Se desea analizar el comportamiento de este sistema bajo distintas condiciones.

a) Tomar $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$, y resolver numéricamente el modelo utilizando el método de Euler, y el método RK4 con paso $\Delta t = 0.1$ hasta $t = 50$. Graficar $x(t)$ y comparar con la solución analítica:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

b) Estudiar el comportamiento del sistema variando x_0, K, y r e integrando con el método de preferencia.

3.11 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) & \text{en } [0, T], \\ \dot{\theta}(0) = v_0, \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Comparar con la solución del problema linealizado.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 0$.

3.12 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

a) $\rho = 13$.

b) $\rho = 28$.

Compare las soluciones obtenidas al considerar las condiciones iniciales

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$.

b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.50001)$.