$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O(x^2)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2 PUNTOS:

$$\rightarrow f'_+(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\rightarrow f'_-(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

3 PUNTOS:

$$\rightarrow \overset{x_0}{f'_+}(x) = \frac{1}{2h}\left[-3\overset{x_0}{f(x)} + 4\overset{x_1}{f(x+h)} - \overset{x_2}{f(x+2h)}\right]$$

$$\rightarrow \overset{x_1}{f'_0}(x) = \frac{1}{2h}\left[\overset{x_2}{f(x+h)} - \overset{x_0}{f(x-h)}\right]$$

$$\rightarrow \overset{x_2}{f'_-}(x) = \frac{1}{2h}\left[\overset{x_0}{f(x-2h)} - 4\overset{x_1}{f(x-h)} + 3\overset{x_2}{f(x)}\right]$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{1}{6}\left[f'''(\varepsilon_+) - f'''(\varepsilon_-)\right]h$$

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.

b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.

a)

FR EN -0,2

$$f'_+(x) = \frac{f(-0,1)-f(-0,2)}{(-0,1)-(-0,2)} = \frac{(2\cos(-0,2)+0,1)-(2\cos(-0,4)+0,2)}{0,1} \approx 0,18$$

REAL → 0,55

FR EN -0,3

$$f'_+(x) = \frac{f(-0,2)-f(-0,3)}{(-0,2)-(-0,3)} = \dots \approx 0,91$$

REAL → 1,25

BK EN -0,2

$$f'_-(x) = \frac{f(-0,2)-f(-0,3)}{(-0,2)-(-0,3)} = \dots \approx 0,91$$

REAL → 0,55

BK EN -0,1

$$f'_-(x) = \frac{f(-0,1)-f(-0,2)}{(-0,1)-(-0,1)} = \dots \approx 0,18$$

REAL → -0,2

b)

```
Adelantada en x = 1.0:  1.312715208916473
Adelantada en x = 1.2:  1.9847127099714132
Atrasada en x = 1.2:  1.312715208916473
Atrasada en x = 1.4:  1.9847127099714132
```

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.

b) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

a) $h = 0{,}1$

$$f_+'(x_0) = \frac{1}{0{,}2}\left[-3(e^{2x_0} - \cos(2x_0)) + 4(e^{2x_1} - \cos(2x_1)) - (e^{2x_2} - \cos(2x_2))\right]$$

$\hookrightarrow f_+'(-0{,}3) \approx -0{,}06$

MISMA COSA

$$f_+'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)\right]$$

$$f_0'(x_1) = \frac{1}{2h}\left[f(x_2) - f(x_0)\right]$$

$$f_-'(x_2) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)\right]$$

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$

Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

$\rightarrow V(t) = [0{,}98]\underbrace{\frac{dI}{dt}}_{I'} + [0{,}142]\, I$

$\rightarrow V(1) = [0{,}98]\underbrace{I'(1)} + [0{,}142]\overbrace{[3{,}10]}^{I(1)} \approx 2{,}4002$

HAGO FORWARD 3 PTOS

$I'_{+}(1) = \frac{1}{0.02}\left[-3I(1) + 4I(1{,}01) - I(1{,}02)\right] = 2$

PARA $V(1{,}01)$, $V(1{,}02)$ y $V(1{,}03)$ USO CENTRADA A 3 PTOS

PARA $V(1{,}04)$ USO BACKWARD A 3 PTOS

1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x) + 0.6$ con $x \in [-1, 1]$. Pruebe numéricamente en *python*con distintos esquemas y pasos, comparando con la derivada exacta.

```
Comparación de métodos de derivación numérica:
==================================================
h =  0.100:
  Normal:         -3.999637
  Extremo:        -5.999274
  Punto medio:    -3.999637

h =  0.050:
  Normal:         -7.892914
  Extremo:       -11.786192
  Punto medio:    -7.892914

h =  0.010:
  Normal:        -18.484686
  Extremo:       -21.737489
  Punto medio:   -18.484686

h =  0.005:
  Normal:        -19.593493
  Extremo:       -20.702300
  Punto medio:   -19.593493

h =  0.001:
  Normal:        -19.983350
  Extremo:       -20.033101
  Punto medio:   -19.983350
```

→ PARA DISTINTOS h ESTAN TODAS EN X=0

```
Derivadas en diferentes puntos del intervalo [-1, 1]:
==================================================
x = -1.0: Normal =  0.00000, Extremo =  0.00000, Punto medio = N/A
x = -0.5: Normal =  0.00000, Extremo =  0.00000, Punto medio =  0.00000
x =  0.0: Normal = -18.48469, Extremo = -21.73749, Punto medio = -18.48469
x =  0.5: Normal =  0.00000, Extremo =  0.00000, Punto medio =  0.00000
```

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right].$$

Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}$.

1)

EXPANDO TAYLOR DE $U(x+h)$ EN x

$$\varepsilon_A = \left| u'(x) - \underbrace{D_+U(x)}_{\frac{U(x+h)-U(x)}{h}} \right|$$

$$\Rightarrow U(x+h) = U(x) + U'(x)h + \frac{U''(x)}{2}h^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \left| u'(x) - \frac{\cancel{U(x)} + U'(x)h + \frac{1}{2}h^2U''(x) \cancel{- U(x)}}{h} \right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \left| \cancel{U'(x)} - \cancel{\frac{U'(x)h}{h}} - \frac{\frac{1}{2}h^{\cancel{2}}U''(x)}{\cancel{h}} \right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \left| \frac{1}{2}hU''(x) \right| \rightarrow O(h)$$

PAJA EL RESTO...

1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula

$$f_n'(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

```
n = 0: 0.6931471805599453
n = 1: 0.9531017980432493
n = 2: 0.9950330853168092
n = 3: 0.9995003330834232
n = 4: 0.9999500033329731
n = 5: 0.9999950000398841
n = 6: 0.9999994999180668
n = 7: 0.9999999505838705
n = 8: 0.9999999889225291
n = 9: 1.000000082240371
n = 10: 1.000000082690371
n = 11: 1.000000082735371
n = 12: 1.000088900581841
n = 13: 0.9992007221625909
n = 14: 0.9992007221626359
n = 15: 1.1102230246251559
```

USO $f(x) = \ln(x)$

EVALUO EN $x=1$ → $f'(1) = 1$

RARO,

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

TENGO $e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$

HAGO $\frac{\partial e}{\partial h} = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{h}{3}M = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}hM = \frac{\varepsilon}{h^2}$

$\Rightarrow h^3 = \frac{3\varepsilon}{M} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$ EXTREMO EN $\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$

$\underbrace{\frac{\partial^2 e}{\partial h^2}}_{e''} = \frac{2\varepsilon}{h^3} + \frac{M}{3}$

$e''\left(\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}\right) = 2\cancel{\varepsilon} \cdot \frac{M}{3\cancel{\varepsilon}} + \frac{M}{3} = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}M = M \rightarrow$ Si $M>0$ HAY MÍNIMO

1.8 Sea la función

$$f(x,y) = x^2 e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x,y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

$h = 0{,}01$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y + \cos(xy)\,y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y + \cos(xy)\,x$ EXACTAS

$'' \; (1{,}0{,}5) = 3{,}736233 \qquad '''' \; (1{,}0{,}5) = 2{,}52603$

$$f'_{x+}(1{,}0{,}5) = \frac{f(1+0{,}01,\ 0{,}5) - f(1,\ 0{,}5)}{0{,}01} \approx 3{,}752$$

$$f'_{y+}(1{,}0{,}5) = \frac{f(1,\ 0{,}5+0{,}01) - f(1,\ 0{,}5)}{0{,}01} \approx 2{,}532$$

$$f'_{x0}(1{,}0{,}5) = \frac{f(1+0{,}01,\ 0{,}5) - f(1-0{,}01,\ 0{,}5)}{0{,}02} \approx 3{,}73625$$

$$f'_{y0}(1{,}0{,}5) = \frac{f(1,\ 0{,}5+0{,}01) - f(1,\ 0{,}5-0{,}01)}{0{,}02} \approx 2{,}5263$$

MEJOR

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,
b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,
c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,
d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

TRAPECIO $\to$ $\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] \overbrace{- \frac{h^3}{12} f''(\xi)}^{ER}$

SIMPSON $\to$ $\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \overbrace{- \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)}^{ER}$

GAUS $(n=2)$ $\to$ $\int_a^b f(x) = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dt = f(\sqrt{3}/3 + c) + f(-\sqrt{3}/3 + c)$

a) REAL $\Rightarrow$ = 0,19375

$T_R \Rightarrow \int_{0.5}^{1} x^4 dx = \frac{1}{4}\left[(0,5)^4 + 1\right] = 0,265625$ $\quad |E_T| \leq \frac{h^3}{12}|\max f''(\xi)| = \frac{(0,5)^3}{12} 1 = \frac{1}{8}$ $\quad \mathcal{E}_A = 0,0718$

$Smp \Rightarrow \int_{0.5}^{1} x^4 dx = \frac{0,25}{3}\left[(0,5)^4 + 4(0,75)^4 + 1\right] = 0,19401$ $\quad |E_T| \leq \frac{h^5}{90}|\max f^{(4)}| = \frac{(0,25)^5}{90} 24 \approx 0,00026$ $\quad \mathcal{E}_A = 0,00017..$

$GAUS \Rightarrow \int_{0.5}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}}{2}\right)\frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{4}\right)^4\right] + \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{4}\right)^4\right] = 0,193576$

RESTO PYTHON.

```python
# Trapecios

def integrar_trapecio(f, a, b):
    h = b - a
    return (h/2) * (f(a) + f(b))

# Simpson

def integrar_simpson(f, a, b):
    h = (b - a) / 2
    return (h/3) * (f(a) + 4*f(a + h) + f(b))

# Gauss N = 2

def integrar_gauss(f, a, b):
    r1, r2 = np.sqrt(3)/3, -np.sqrt(3)/3
    const = (b - a) / 2
    val1 = ((b-a)*r1 + (b+a)) / 2
    val2 = ((b-a)*r2 + (b+a)) / 2
    return const * (f(val1) + f(val2))
```

```
-0.30952380952380953
-0.30830280830280826
-0.308300395256917

0.22807412331084248
0.19224530741309842
0.19226870637091759

0.18393972058572117
0.1624016834806793
0.15941043096637894
```

b

c

d

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

SE QUE $\int_{1,8}^{2,6} f(x)\,dx = \int_{1,8}^{2,2} f(x)dx + \int_{2,2}^{2,6} f(x)\,dx \rightarrow$ PUEDO APROXIMAR AMBAS CON SIMPSON $h=0{,}2$

```python
def f(x):
    if abs(x - 1.8) < 10**-5    :
        return 3.12014
    elif abs(x - 2.0) < 10**-5:
        return 4.42569
    elif abs(x - 2.2) < 10**-5:
        return 6.04241
    elif abs(x - 2.4) < 10**-5:
        return 8.03014
    elif abs(x - 2.6) < 10**-5:
        return 10.46675

print(integrar_simpson(f, 1.8, 2.2) + integrar_simpson(f, 2.2, 2.6))
```

✓ 0.0s

```
5.033002
```

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\int_{b}^{a} f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, y $x_2 = b$.

a)

→ GAUSS-LEGENDRE CON $n=2 \Rightarrow$ GRADO DE PRECISION $2(2)-1 = 3$

b)

PRUEBO CON VARIAS INTEGRALES.

$$\int_a^b 1\,dx = b-a \Rightarrow \frac{9}{4}h\cdot 1 + \frac{3}{4}h = 3h = \frac{b-a}{3}\cdot 3 = b-a \checkmark$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} \Rightarrow \frac{9}{4}h\overbrace{f(x_1)}^{a+h} + \frac{3}{4}h\overbrace{f(x_2)}^{b} \Rightarrow \frac{9}{4}\frac{(b-a)}{3}\frac{2a+b}{3} + \frac{3}{4}\frac{4b-a}{3} = \ldots = \frac{b^2-a^2}{2} \checkmark$$

$$= \frac{9}{4}\frac{b-a}{3}\left(a+\frac{b-a}{3}\right) + \frac{3}{4}\frac{b-a}{3}b$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} \Rightarrow \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2) \Rightarrow \text{Lo mismo} \checkmark$$

PARA $\int_a^b x^3\,dx$ SE ROMPE, CMU, GRADO: 2

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

BUSCO QUE FUNCIONE PARA TODO $ax^k + bx^{k-1} \ldots$ PARA K MAS GRANDE POSIBLE.

$$\Rightarrow \int_0^1 1 = 1 \Rightarrow C_0 1 + C_1 1 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x = \frac{1}{2} \Rightarrow C_0 . 0 + C_1 x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C_0 . 0 + C_1 x_1^2 = \frac{1}{3}$$

TENGO 3 INCOGNITAS, NECESITO ESAS 3 ECS.

$$\begin{cases} C_0 + C_1 = 1 & (1) \\ C_1 x_1 = 1/2 & (2) \\ C_1 x_1^2 = 1/3 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2x_1} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow \frac{1}{2\cancel{x_1}} x_1^{\cancel{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 2/3$$

$$\hookrightarrow C_1 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow C_0 + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow C_0 = 1/4$$

GRADO = 2, PUEDO AGREGAR UN TERMINO x^3? PRUEBO.

$$\Rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \Rightarrow C_0 . 0 + C_1 x_1^3 = 1/4$$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 = 1 & (1) \\ C_1 x_1 = 1/2 & (2) \\ C_1 x_1^2 = 1/3 & (3) \\ C_1 x_1^3 = 1/4 & (4) \end{cases}$$

DE ANTES SE QUE $C_1 = \frac{3}{4}$ y $x_1 = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{2^3}{3^3} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 27} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}$$

NO, NO PUEDO, GRADO MAXIMO DE ORDEN ES 2.

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

DE SIMPSON TENGO $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$

$x_1 = x_0 + h = x_0 + \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{x_0 + x_2}{2}$

PARA x^2

$$\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0 + 4\left[\frac{x_0+x_2}{2}\right] + x_2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0 + 2x_0 + 2x_2 + x_2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[3x_0 + 3x_2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{2}\left[x_0 + x_2\right]$$

PARA x^2

$$\int_{x_0}^{x_2} x^2 = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^2 + 4\left[\frac{x_0+x_2}{2}\right]^2 + x_2^2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^2 + x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2 + x_2^2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[2x_0^2 + 2x_0x_2 + 2x_2^2\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{3}\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right]$$

PARA x^3

$$\int_{x_0}^{x_2} x^3 dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^3 + 4\left[\frac{x_0+x_2}{2}\right]^3 + x_2^3\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^3 + \frac{1}{2}\left[x_0 + x_2\right]^3 + x_2^3\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[x_0^3 + \frac{1}{2}x_0^3 + \frac{3}{2}x_0^2x_2 + \frac{3}{2}x_0x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^3 + x_2^3\right]$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[\frac{3}{2}x_0^3 + \frac{3}{2}x_0^2x_2 + \frac{3}{2}x_0x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3\right]$$

AHORA PUEDO IGUALAR Y ARMAR UN SISTEMA $\frac{1}{3}\ \frac{x_2 - x_0}{2}$

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = \frac{x_2 - x_0}{2}\left[x_0 + x_2\right] = h(x_0 + x_2) \\ a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = \frac{x_2 - x_0}{3}\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right] = \frac{2}{3}h\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right] \\ a_0x_0^3 + a_1x_1^3 + a_2x_2^3 = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[\frac{3}{2}x_0^3 + \frac{3}{2}x_0^2x_2 + \frac{3}{2}x_0x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3\right] = \frac{h}{3}\left[\frac{3}{2}x_0^3 + \frac{3}{2}x_0^2x_2 + \frac{3}{2}x_0x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3\right] \end{cases}$$

... PASA $\rightarrow a_0 = \frac{h}{3}$ $a_2 = \frac{h}{3}$ $a_1 = \frac{4}{3}h$

$\rightarrow K = -\frac{h^5}{90}$

DEBERIA DESPEJAR a_0 o, a_2, DE AHI HACER LO MISMO DE ANTES PARA x^4 Y SACAN K.

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

$f(x)=1$ $\quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \Rightarrow a+b=2$

$f'(x)=0$

$f(x)=x$ $\quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \Rightarrow -a+c+d=0$

$f'(x)=1$

$f(x)=x^2$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow a-2c+2d=\frac{2}{3}$

$f'(x)=2x$

$f(x)=x^3$ $\quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \Rightarrow -a+3c+3d=0$

$f'(x)=3x^2$

$$\begin{cases} a+b=2 & (1) \rightarrow b=2-a \\ -a+c+d=0 & (2) \\ a-2c+2d=2/3 & (3) \\ -a+3c+3d=0 & (4) \end{cases}$$

$(4)-(2) \Rightarrow 2c+2d=0$

$\Rightarrow c=-d \quad (5)$

(5) en $(1) \Rightarrow -a-\cancel{d}+\cancel{d}=0 \rightarrow a=0$

$\hookrightarrow b=2$

$(3) \Rightarrow 4d=2/3 \Rightarrow d=1/6 \rightarrow c=-1/6$

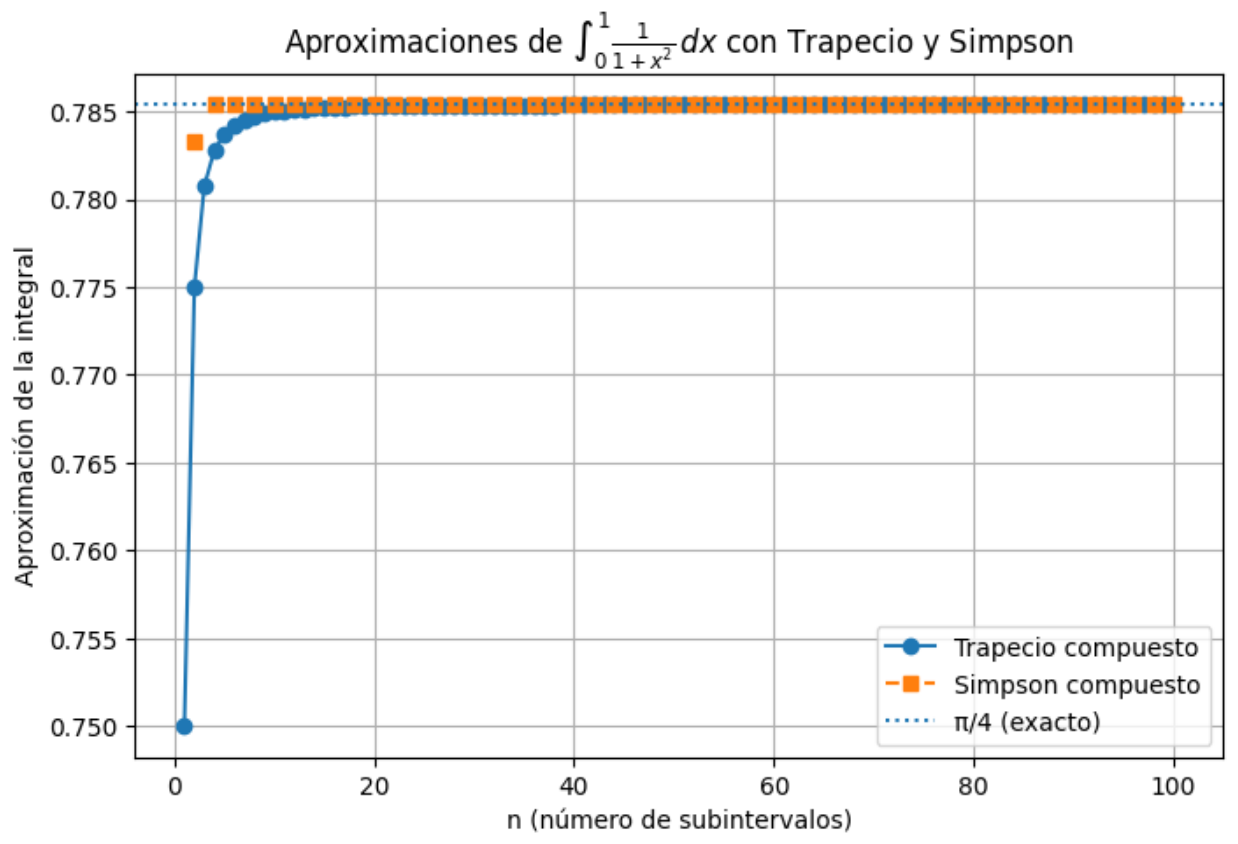
2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f\,dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

```python
def integrar_trapecio_compuesto(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        x = a + i*h
        s += 2*f(x)
    return (h/2) * s

def integrar_simpson_compuesto(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Simpson compuesto requiere n par")
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    s4 = 0.0
    s2 = 0.0
    for i in range(1, n):
        x = a + i*h
        if i % 2 == 0:
            s2 += f(x)
        else:
            s4 += f(x)
    return (h/3) * (s + 4*s4 + 2*s2)
```

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \dots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.



2.9 Sea $f \in C^2[a,b]$, $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a,b)$ para el cual la regla de los trapecios compuesta para n subintervalos pueden escribir de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

TRAPECIO 1 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$

AHORA PARA n:

$\rightarrow \frac{h}{2}[f(a)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(b)]$

$= \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_j)+f(b)]$

PARA EL ERROR:

ERR EN 1 $\rightarrow$ $\frac{h^3}{12} f''(\xi)$ con $\xi \in [a,b]$

PARA MUCHOS:

$\rightarrow \frac{h^3}{12} f''(\underbrace{\xi}_{\in[a,x_1]}) + \frac{h^3}{12} f''(\underbrace{\xi}_{\in[x_1,x_2]}) \dots$

$= \frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$

COMO f'' TOMA SU MAXIMO EN $[a,b]$ Y f ES CONTINUA:

SE $\min_{[a,b]} f''(x) \leq f''(\xi) \leq \max_{[a,b]} f''(x)$ SE QUE $f''(\xi)$ ESTA ENTRE EL MÁXIMO Y MINIMO DE f'' EN $[a,b]$ DADO QUE $\xi \in [a,b]$

$n \min_{[a,b]} f''(x) \leq \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \leq n \max_{[a,b]} f''(x)$ SI SUMO TODOS LOS $f''(\xi_i)$ EN MIS n SUBINTERVALOS TENGO ESTA COTA, VA A ESTAR ENTRE n VECES EL MÁXIMO EN $[a,b]$ Y n VECES EL MINIMO.

$\min_{[a,b]} f''(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \leq \max_{[a,b]} f''(x)$ ACOMODO COTA

COMO f ES CONTINUA.

POR TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO SE QUE HAY UN $\mu \in (a,b)$ /

$f''(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$

$\Rightarrow n f''(\mu) = \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$

VUELVO A MI ERROR:

$\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$

$= \frac{h^3}{12} n f''(\mu)$

$= \frac{h^2}{12} h n f''(\mu)$

$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{b-a}{\cancel{n}}\right]\cancel{n} f''(\mu)$

$= \frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu)$

CON ESTO PUEDO ESCRIBIR:

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_j)+f(b)\right]}_{\text{VALOR PARA TRAPECIO COMPUESTO}} - \underbrace{\frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu)}_{\text{ERROR DE TRAPECIO COMPUESTO}}$$

2.10 Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede tener grado de precisión mayor a $2n-1$. Ayuda: construya un polinomio con raíces doble en cada x_i.

PARA ESTO TOMO $n=2$ Y VEO $Q(P)$ TIENE GRADO $2(2)-1=3$

$$Q(P) = C_1 P(x_1) + C_2 P(x_2)$$

PARA QUE APROXIME EXACTO TODO LO GRADO ≤ 3 IGUALO CON $1, x, x^2, x^3$

TOMO COMO EJEMPLO EL INTERVALO $-1, 1$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \Rightarrow C_1 \cdot \overset{f(x)=1}{\overbrace{P(x_1)}} + C_2 P(x_2) = C_1 + C_2 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \Rightarrow C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 = 2/3$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \Rightarrow C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 = 0$$

EL USAR LIMITES $[-1,1]$ Ó $[a,b]$ ES INDISTINTO, SIEMPRE PUEDO MAPEAR $[a,b]$ a $[-1,1]$

ARMO MI SISTEMA:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0 \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 = 2/3 \\ C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

ME SALTEO LA PARTE DE DESPEJAR...

$C_1 = C_2 = 1$ $\quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

BIEN, SE QUE $Q(P)$ APROXIMA BIEN PARA $\leq 2n-1$.

QUE PASA SI QUIERO MAS? OSEA QUE PARA $n=2$ APROXIMAR ALGO DE GRADO MAYOR A $2(2)-1=3$, COMO... 4!

PLANTEO OTRA ECUACION:

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5} \Rightarrow C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 = \frac{2}{5}$$

TENGO MI NUEVO SISTEMA DE 5 ECS.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0 \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 = 2/3 \\ C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 = 0 \\ C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 = \frac{2}{5} \quad (5) \end{cases} \quad (*) \text{ (eqs. 1–4)}$$

DE $(*)$ YA DESPEJE $C_1 = C_2 = 1$ $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $X_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, SI ESTO VALIDA (5) ENTONCES $Q(P)$ PUEDE APROXIMAR MAS DE $2n-1$.

$$C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5} \quad \text{ABS!}$$

CON ESTO ENCONTRE UN CONTRAEJEMPLO, ENTONCES $Q(P)$ NO PUEDE APROXIMAR ALGO $> 2n-1$.

2.11 La función error se define por

$$\operatorname{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

a) Aproximar $\operatorname{erf}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ utilizando la regla de Simpson compuesta sobre $[0,1]$ con n subintervalos. Calcular también con la regla del trapecio compuesta. Comparar ambos resultados y estimar el error usando las cotas teóricas. *Sugerencia*: Implementar en *python* para testear comportamiento a n grande.

b) Repetir para $\operatorname{erf}(2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\, dt$. Analizar cómo cambia la convergencia al duplicar el intervalo.

c) Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si bien no podemos usar los métodos vistos para aproximarla directamente, sí podemos aplicar el cambio $t = \tan\!\left(\frac{\pi}{2}u\right)$ que mapea $u \in [0,1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \;=\; \int_0^1 e^{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}\, \frac{\pi}{2} \sec^2\!\left(\frac{\pi}{2}u\right)\, du.$$

Aproximar la integral resultante en $[0,1]$ con cuadratura Gaussiana de orden $m = 2,\, 3$. Comparar con Simpson compuesto en el mismo intervalo con $n = 4, 8, 16$ subintervalos.

a y b)

```
=== Aproximación erf(1.0) ===
n=  4  Trap≈0.8383677774  |err|≈4.33e-03  (cota≈1.18e-02)   Simpson≈0.8427360514  |err|≈3.53e-05  (cota≈2.94e-04)
n=  8  Trap≈0.8416192212  |err|≈1.08e-03  (cota≈2.94e-03)   Simpson≈0.8427030358  |err|≈2.24e-06  (cota≈1.84e-05)
n= 16  Trap≈0.8424305055  |err|≈2.70e-04  (cota≈7.35e-04)   Simpson≈0.8427009336  |err|≈1.41e-07  (cota≈1.15e-06)
n= 32  Trap≈0.8426332277  |err|≈6.76e-05  (cota≈1.84e-04)   Simpson≈0.8427008017  |err|≈8.80e-09  (cota≈7.17e-08)
n= 64  Trap≈0.8426839020  |err|≈1.69e-05  (cota≈4.59e-05)   Simpson≈0.8427007935  |err|≈5.50e-10  (cota≈4.48e-09)
n=100  Trap≈0.8426938745  |err|≈6.92e-06  (cota≈1.88e-05)   Simpson≈0.8427007930  |err|≈9.22e-11  (cota≈7.52e-10)
n=1000  Trap≈0.8427007238  |err|≈6.92e-08  (cota≈1.88e-07)   Simpson≈0.8427007929  |err|≈9.44e-15  (cota≈7.52e-14)

=== Aproximación erf(2.0) ===
n=  4  Trap≈0.9936717209  |err|≈1.65e-03  (cota≈9.40e-02)   Simpson≈0.9950187700  |err|≈3.03e-04  (cota≈9.40e-03)
n=  8  Trap≈0.9948961897  |err|≈4.26e-04  (cota≈2.35e-02)   Simpson≈0.9953043460  |err|≈1.79e-05  (cota≈5.88e-04)
n= 16  Trap≈0.9952149048  |err|≈1.07e-04  (cota≈5.88e-03)   Simpson≈0.9953211432  |err|≈1.12e-06  (cota≈3.67e-05)
n= 32  Trap≈0.9952953724  |err|≈2.69e-05  (cota≈1.47e-03)   Simpson≈0.9953221949  |err|≈7.01e-08  (cota≈2.30e-06)
n= 64  Trap≈0.9953155386  |err|≈6.73e-06  (cota≈3.67e-04)   Simpson≈0.9953222606  |err|≈4.38e-09  (cota≈1.43e-07)
n=100  Trap≈0.9953195096  |err|≈2.76e-06  (cota≈1.50e-04)   Simpson≈0.9953222643  |err|≈7.35e-10  (cota≈2.41e-08)
n=1000  Trap≈0.9953222375  |err|≈2.76e-08  (cota≈1.50e-06)   Simpson≈0.9953222650  |err|≈7.38e-14  (cota≈2.41e-12)
```

A n GRANDE SIMPSON TIENE MUCHO MENOS ERROR

c)

```
=== ∫₀^∞ e^{-t^2} dt con t=tan(πu/2) en [0,1] ===
Exacto = 0.886226925453
Gauss m=2: 0.781910613650  |err|≈ 1.04e-01
Gauss m=3: 0.949770129000  |err|≈ 6.35e-02
Simpson n= 4: 0.850761538007  |err|≈ 3.55e-02
Simpson n= 8: 0.887796992934  |err|≈ 1.57e-03
Simpson n=16: 0.886294693064  |err|≈ 6.78e-05
```

ACA SIMPSON SE VE MEJOR, DADO QUE USA MAS MUESTRAS.

3.1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

```python
def euler(f, t0, tf, h, y0):
    N = int(round((tf - t0) / h))
    h = (tf - t0)/N
    t = [t0]
    y = [y0]
    for _ in range(N):
        tk, yk = t[-1], y[-1]
        y_next = yk + h * f(tk, yk)
        t.append(tk + h)
        y.append(y_next)
    return t, y
```

3.2 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Euler con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b) $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c) $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

d) $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1/3$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-5t}$.

```
(a) max err: 0.010580648734618059  y(tf)≈ 1.1706515695646647  exacta: 1.1812322182992825
(b) max err: 1.359822550007471  y(tf)≈ 4.5142774281767  exacta: 5.87409997818417
(c) max err: 0.0391546193779273  y(tf)≈ -1.0181518381465764  exacta: -1.035972419924183
(d) max err: 0.05429314705714744  y(tf)≈ 0.9803450520833333  exacta: 1.0022459823330285
```

3.3 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exactas $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exactas.

b) Utilice las aproximaciones obtenidas en el inciso anterior e interpolación lineal para aproximar los valores $y(1.04)$, $y(1.55)$, e $y(1.97)$. Compare con los valores exactos.

c) Calcule el h necesario para tener $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$, donde w_i es la aproximación numérica a paso i.

a)

```
t = 1.0, y(t) = 0.0000000000, exact(t) = 0.0000000000
t = 1.1, y(t) = 0.2718281828, exact(t) = 0.3459198765
t = 1.2, y(t) = 0.6847555777, exact(t) = 0.8666425358
t = 1.3, y(t) = 1.2769783442, exact(t) = 1.6072150782
t = 1.4, y(t) = 2.0935476878, exact(t) = 2.6203595512
t = 1.5, y(t) = 3.1874451225, exact(t) = 3.9676662942
t = 1.6, y(t) = 4.6208178463, exact(t) = 5.7209615256
t = 1.7, y(t) = 6.4663963777, exact(t) = 7.9638734778
t = 1.8, y(t) = 8.8091196889, exact(t) = 10.7936246605
t = 1.9, y(t) = 11.7479965440, exact(t) = 14.3230815359
t = 2.0, y(t) = 15.3982356528, exact(t) = 18.6830970819
```

b)

```
t=1.04:  interp≈0.1087312731   exacta≈0.1199874971   error≈1.13e-02
t=1.55:  interp≈3.9041314844   exacta≈4.7886350208   error≈8.85e-01
t=1.97:  interp≈14.3031639201   exacta≈17.2792984356   error≈2.98e+00
```

c)

TENEMOS QUE $|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_j - t_i)} - 1\right)$

$L = \max\limits_{[1,2]}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \max\limits_{[1,2]}\left(\frac{2}{t}\right) = 2$

$M \geq \max\limits_{[1,2]}\left(|y''(t)|\right) \approx 98$

$\Rightarrow |y(t_i) - w_i| \leq \frac{h\,98}{2.2}\left(e^{2(1)} - 1\right) = h\,\frac{49}{2}(e^2 - 1) \leq 0{,}1$

$h \leq 0{,}1 \cdot \frac{2}{49}\frac{1}{e^2 - 1} \approx 6{,}4 \times 10^{-4}$

```
h = 0.1

ts, ws = euler(f, 1.0, 2.0, h, 0.0)

errs = [abs(exact(t) - ws[ts.index(t)]) for t in ts]

while max(errs) > 0.1:
    h /= 2
    ts, ws = euler(f, 1.0, 2.0, h, 0.0)
    errs = [abs(exact(t) - ws[ts.index(t)]) for t in ts]
    ⌘L to chat, ⌘K to generate
print(f"h = {h}")
✓ 0.0s

h = 0.0015625
```

PERO RE PESIMISTA, PROBANDO LLEGO A ESTO

3.4 Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolver usando el programa del Ejercicio 1 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

d) Repetir los ítems anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

a)

$f(\lambda, y)$

$y' = \lambda y$

$y(0) = y_0$

Tomo paso h

$w_0 = y_0$

$w_1 = w_0 + h f(\lambda, w_0) = y_0 + h\lambda y_0$

$w_2 = w_1 + h f(\lambda, w_1) = y_0 + h\lambda y_0 + h[\lambda y_0 + h\lambda^2 y_0]$

$= y_0(1 + h\lambda) + y_0 h[\lambda + h\lambda^2]$

$= y_0[1 + h\lambda + h\lambda + (h\lambda)^2]$

$= y_0[\underbrace{1 + 2h\lambda + (h\lambda)^2}_{(1+\lambda h)^2}]$

$w_3 = w_2 + h f(\lambda, w_2) = y_0(1+\lambda h)^2 + h[\lambda y_0 (1+\lambda h)^2]$

$= y_0[(1+\lambda h)^2 + h\lambda(1+\lambda h)^2]$

$= y_0(1+\lambda h)^2[1 + \lambda h] = y_0(1+\lambda h)^3$

Esto sigue hasta $y_i = (1+\lambda h)^i y_0$

b)

$y_i = (1+\lambda h)^i y_0$

Si $i \to \infty$

$\to (1+\lambda h)^i y_0$

C1: Si $|1+\lambda h| > 1 \Rightarrow y_i \to \infty$

Me interesa analizar este caso

Si $|1+\lambda h| < 1 \Rightarrow y_i \to 0$

$-1 < 1 + \lambda h < 1$

$-2 < \lambda h < 0$

Como $\lambda < 0$ giro inec.

$0 < h < -\frac{2}{\lambda}$

La solución exacta al problema es: $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

Esta siempre tiende a cero si $t \to \infty$, no depende del tamaño del paso.

c) Uso $0 \le t \le 1$ $h = 0{,}1$ $y_0 = 1$

```
=== Euler explícito ===
λ=  1, h=0.10000, => y(tf)=2.593742e+00, exacta=2.718282e+00, err=1.25e-01
λ= 10, h=0.10000, => y(tf)=1.024000e+03, exacta=2.202647e+04, err=2.10e+04
λ= 50, h=0.10000, => y(tf)=6.046618e+07, exacta=5.184706e+21, err=5.18e+21
λ=100, h=0.10000, => y(tf)=2.593742e+10, exacta=2.688117e+43, err=2.69e+43
```

A mayor λ, la aproximación es más verga

d)

El implícito usa $w_{i+1} = w_i + h f(t_{i+1}, w_{i+1})$

$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1}$

$\Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - \lambda h}$

```
=== Euler implícito ===
λ=  1, h_req=0.10000 -> h_eff=0.10000, |  y(tf)=2.867972e+00, exacta=2.718282e+00, err=1.50e-01
λ= 10, h_req=0.10000 -> h_eff=0.09091, |  y(tf)=2.853117e+11, exacta=2.202647e+04, err=2.85e+11
λ= 50, h_req=0.10000 -> h_eff=0.10000, |  y(tf)=9.536743e-07, exacta=5.184706e+21, err=5.18e+21
λ=100, h_req=0.10000 -> h_eff=0.10000, |  y(tf)=2.867972e-10, exacta=2.688117e+43, err=2.69e+43
```

3.5 Sea f una función contínua y Lipschitz con constante L en $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty \le y \le \infty\}$ y $M \mid |y''| \le M \forall t$. Demostrar que para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

el método de Euler aproxima a la solución como

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} 1\right),$$

con w_i las aproximaciones dadas por el método de Euler.

- PARTO DE LA EXPANSION DE TAYLOR DE $y(t_{i+1})$ CENTRADO EN $y(t_i)$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \underbrace{\frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi)}_{\text{ERROR DE TAYLOR}}$$

COMO $h = t_{i+1} - t_i$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

POR TEOREMA TENGO $y' = f(t, y)$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad (1)$$

- AHORA SALTO A LA DEF DEL PASO DE EULER:

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) \quad (2)$$

- HAGO (1) − (2):

$$y(t_{i+1}) - w_{i+1} = y(t_i) - w_i + h f(t_i, y(t_i)) - h f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

$$y(t_{i+1}) - w_{i+1} = y(t_i) - w_i + h[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

- APLICO MODULO Y SEA $M = MAX(|y''(\xi)|)$

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le |y(t_i) - w_i| + h\,|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2 M}{2}$$

- COMO f ES LIPSCHITZ

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le |y(t_i) - w_i| + hL\,|y(t_i) - w_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le |y(t_i) - w_i|(1 + hL) + \frac{h^2 M}{2}$$

- USO EL LEMA SACADO DEL LIBRO:

Lema 5.8 Si s y t son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ es una sucesión que satisface $a_0 \ge -t/s$, y

$$a_{i+1} \le (1 + s)a_i + t, \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \tag{5.9}$$

entonces

$$a_{i+1} \le e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

(*)

(*) $\Rightarrow$ SI $s = hL$, $t = \frac{h^2 M}{2}$ Y $a_i = |y_i - w_i|$

$$\Rightarrow |y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le e^{(i+1)hL}\left(|y_0 - w_0| + \frac{hM}{2L}\right) - \frac{hM}{2L}$$

$w_0 = y_0 \Rightarrow y_0 - w_0 = 0$ $\quad \underbrace{(i+1)h} = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$

ESTO EN ESPAÑOL SERIA HACER "i+1" SALTOS DE LARGO h, OSEA PARARSE EN t_{i+1}, EL $-t_0$ ES PARA CONTEMPLAR QUE PODES NO ARRANCAR EN 0.

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le e^{L(t_{i+1} - a)} \frac{hM}{2L} - \frac{hM}{2L}$$

$$|y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_{i+1} - a)} - 1\right]$$

REEMPLAZO t_{i+1} POR t_i Y... FIN:

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right]$$

3.6 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = (1/5)te^{3t} - (1/25)e^{3t}$.

b) $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c) $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = t \ln t + 2t$.

d) $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = (1/2)\sin 2t - (1/3)\cos 3t + 4/3$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

EN RUNGE-KUTTA DE ORD 2 $\rightarrow$ $w_0 = \alpha$ $\quad w_{i+1} = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$

```
(a)
t = 0.0, y(t) = -0.0400000000, exact(t) = -0.0400000000 error = 0.0000000000
t = 0.5, y(t) = 0.2446250021, exact(t) = 0.2689013442 error = 0.0242763421
t = 1.0, y(t) = 3.1200023059, exact(t) = 3.2136859077 error = 0.0936836018

(b)
t = 2.0, y(t) = 1.0000000000, exact(t) = 1.0000000000 error = 0.0000000000
t = 2.5, y(t) = 1.7812500000, exact(t) = 1.8333333333 error = 0.0520833333
t = 3.0, y(t) = 2.4550638497, exact(t) = 2.5000000000 error = 0.0449361503

(c)
t = 1.0, y(t) = 2.0000000000, exact(t) = 2.0000000000 error = 0.0000000000
t = 1.2, y(t) = 2.7777777778, exact(t) = 2.7789294391 error = 0.0011516614
t = 1.5, y(t) = 3.6060606061, exact(t) = 3.6081976622 error = 0.0021370561
t = 1.8, y(t) = 4.4763014763, exact(t) = 4.4793276289 error = 0.0030261526
t = 2.0, y(t) = 5.3824397824, exact(t) = 5.3862943611 error = 0.0038545787

(d)
t = 0.0, y(t) = 1.0000000000, exact(t) = 1.0000000000 error = 0.0000000000
t = 0.2, y(t) = 1.3337962377, exact(t) = 1.3291498130 error = 0.0046464247
t = 0.5, y(t) = 1.7422853534, exact(t) = 1.7304897585 error = 0.0117955949
t = 0.8, y(t) = 2.0596373894, exact(t) = 2.0414720342 error = 0.0181653552
t = 1.0, y(t) = 2.1385559502, exact(t) = 2.1179795456 error = 0.0205764046
```

3.7 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden 4 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = -9y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = e^{1-9t}$.

b) $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1/3, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-20t}$.

c) $y' = -20y + 20\sin t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.25,$ y solución $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

d) $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

```
(a)
t = 0.0, Euler = 2.7182818285, RK4 = 2.7182818285, exact(t) = 2.7182818285, Euler error = 0.0000000000, RK4 error = 0.0000000000
t = 0.1, Euler = 0.2718281828, RK4 = 1.1167721107, exact(t) = 1.1051709181, Euler error = 0.8333427352, RK4 error = 0.0116011926
t = 0.2, Euler = 0.0271828183, RK4 = 0.4588118620, exact(t) = 0.4493289641, Euler error = 0.4221461458, RK4 error = 0.0094828979
t = 0.3, Euler = 0.0027182818, RK4 = 0.1884971184, exact(t) = 0.1826835241, Euler error = 0.1799652422, RK4 error = 0.0058135943
t = 0.4, Euler = 0.0002718282, RK4 = 0.0774416849, exact(t) = 0.0742735782, Euler error = 0.0740017500, RK4 error = 0.0031681067
t = 0.5, Euler = 0.0000271828, RK4 = 0.0318159482, exact(t) = 0.0301973834, Euler error = 0.0301702006, RK4 error = 0.0016185648
t = 0.6, Euler = 0.0000027183, RK4 = 0.0130711846, exact(t) = 0.0122773399, Euler error = 0.0122746216, RK4 error = 0.0007938447
t = 0.7, Euler = 0.0000002718, RK4 = 0.0053701328, exact(t) = 0.0049915939, Euler error = 0.0049913221, RK4 error = 0.0003785389
t = 0.8, Euler = 0.0000000272, RK4 = 0.0022062519, exact(t) = 0.0020294306, Euler error = 0.0020294035, RK4 error = 0.0001768213
t = 0.9, Euler = 0.0000000027, RK4 = 0.0009064110, exact(t) = 0.0008251049, Euler error = 0.0008251022, RK4 error = 0.0000813061
t = 1.0, Euler = 0.0000000003, RK4 = 0.0003723876, exact(t) = 0.0003354626, Euler error = 0.0003354624, RK4 error = 0.0000369250

(b)
t = 0.0, Euler = 0.3333333333, RK4 = 0.3333333333, exact(t) = 0.3333333333, Euler error = 0.0000000000, RK4 error = 0.0000000000
t = 0.1, Euler = -0.3333333333, RK4 = 0.1227777778, exact(t) = 0.0551117611, Euler error = 0.3884450944, RK4 error = 0.0676660167
t = 0.2, Euler = 0.3733333333, RK4 = 0.0792592593, exact(t) = 0.0461052130, Euler error = 0.3272281204, RK4 error = 0.0331540463
t = 0.3, Euler = -0.2533333333, RK4 = 0.1047530864, exact(t) = 0.0908262507, Euler error = 0.3441595841, RK4 error = 0.0139268357
t = 0.4, Euler = 0.4933333333, RK4 = 0.1665843621, exact(t) = 0.1601118209, Euler error = 0.3332215125, RK4 error = 0.0064725413
t = 0.5, Euler = -0.0933333333, RK4 = 0.2538614540, exact(t) = 0.2500151333, Euler error = 0.3433484666, RK4 error = 0.0038463207
t = 0.6, Euler = 0.6933333333, RK4 = 0.3629538180, exact(t) = 0.3600020481, Euler error = 0.3333312853, RK4 error = 0.0029517699
t = 0.7, Euler = 0.1466666667, RK4 = 0.4926512727, exact(t) = 0.4900002772, Euler error = 0.3433336105, RK4 error = 0.0026509955
t = 0.8, Euler = 0.9733333333, RK4 = 0.6425504242, exact(t) = 0.6400000375, Euler error = 0.3333332958, RK4 error = 0.0025503867
t = 0.9, Euler = 0.4666666667, RK4 = 0.8125168081, exact(t) = 0.8100000051, Euler error = 0.3433333384, RK4 error = 0.0025168030
t = 1.0, Euler = 1.3333333333, RK4 = 1.0025056027, exact(t) = 1.0000000007, Euler error = 0.3333333326, RK4 error = 0.0025056020
```

```
(c)
t = 0.0, Euler = 1.0000000000, RK4 = 1.0000000000, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 0.0000000000, RK4 error = 0.0000000000
t = 0.2, Euler = -3.7500000000, RK4 = 13.9509996577, exact(t) = 0.2541419063, Euler error = 4.0041419063, RK4 error = 13.6968577514
t = 0.5, Euler = 16.4792479017, RK4 = 188.3082145822, exact(t) = 0.4794709385, Euler error = 15.9997769632, RK4 error = 187.8287436437
t = 0.8, Euler = -63.3004682733, RK4 = 2575.4582226680, exact(t) = 0.6816390659, Euler error = 63.9821073392, RK4 error = 2574.7765836021
t = 1.0, Euler = 256.7929891106, RK4 = 35296.6783565450, exact(t) = 0.8414709869, Euler error = 255.9515181237, RK4 error = 35295.8368855581
t = 1.2, Euler = -1022.8295259418, RK4 = 483847.9754407119, exact(t) = 0.9489846194, Euler error = 1023.7785105611, RK4 error = 483847.0264560925
t = 1.5, Euler = 4096.1418574544, RK4 = 6632737.2399876295, exact(t) = 0.9974949866, Euler error = 4095.1443624678, RK4 error = 6632736.2424926432
t = 1.8, Euler = -16379.5622705841, RK4 = 90923760.2268681526, exact(t) = 0.9839859469, Euler error = 16380.5462565310, RK4 error = 90923759.2428822070
t = 2.0, Euler = 65523.1244505570, RK4 = 1246413200.4514625072, exact(t) = 0.9092974268, Euler error = 65522.2151531302, RK4 error = 1246413199.5421650410

(d)
t = 0.0, Euler = 1.4142135624, RK4 = 1.4142135624, exact(t) = 1.4142135624, Euler error = 0.0000000000, RK4 error = 0.0000000000
t = 0.1, Euler = -2.1213203436, RK4 = -15.8525965845, exact(t) = 1.0000226997, Euler error = 3.1213430433, RK4 error = 16.8526192842
t = 0.2, Euler = 6.1282587703, RK4 = -215.7458639075, exact(t) = 1.0000000010, Euler error = 5.1282587693, RK4 error = 216.7458639085
t = 0.3, Euler = -23.6971426413, RK4 = -2957.4012710735, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 24.6971426413, RK4 error = 2958.4012710735
t = 0.4, Euler = 94.5775746626, RK4 = -40541.0340388769, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 93.5775746626, RK4 error = 40542.0340388769
t = 0.5, Euler = -378.2574319957, RK4 = -555750.0076712356, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 379.2574319957, RK4 error = 555751.0076712356
t = 0.6, Euler = 1513.0165094717, RK4 = -7618406.3551152349, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 1512.0165094717, RK4 error = 7618407.3551152349
t = 0.7, Euler = -6052.0627332303, RK4 = -104435653.7847014070, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 6053.0627332303, RK4 error = 104435654.7847014070
t = 0.8, Euler = 24208.2501067568, RK4 = -1431638753.9652817249, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 24207.2501067568, RK4 error = 1431638754.9652817249
t = 0.9, Euler = -96833.0002204860, RK4 = -19625381252.2740745544, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 96834.0002204860, RK4 error = 19625381253.2740745544
t = 1.0, Euler = 387332.0008303088, RK4 = -269031267999.9237976074, exact(t) = 1.0000000000, Euler error = 387331.0008303088, RK4 error = 269031268000.9237976074
```

3.8 Escriba las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones de grado 1 y resuélvalas con el método de Runge-Kutta de orden 4

a) $2y'' - 5y' + y = 0, \quad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$

b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$

a) $x_1 = y \quad x_2 = y'$

$2y'' - 5y' + y = 0 \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(5y' - y)$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{1}{2}(5x_2 - x_1) \end{cases} \rightsquigarrow X(3) = \begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = y \quad x_2 = y' \quad x_3 = y'' \quad x_4 = y'''$

$y^{iv} = t^2 - 8y + sen(t)y' - 3y''$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = x_4$$
$$x_4' = t^2 - 8x_1 + sen(t)x_2 - 3x_3$$

$$X(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

```
(a)
t = 3.0, X(t) = [ 6 -1]
t = 3.1, X(t) = [ 5.8701651 -1.6216013]
t = 3.2, X(t) = [ 5.67012356 -2.41054228]
t = 3.3, X(t) = [ 5.38107111 -3.40987112]
t = 3.4, X(t) = [ 4.97936815 -4.67366795]
t = 3.5, X(t) = [ 4.43530054 -6.2698711 ]
t = 3.6, X(t) = [ 3.71152313 -8.28382729]
t = 3.7, X(t) = [  2.76110437 -10.82275144]
t = 3.8, X(t) = [  1.52507009 -14.02132885]
t = 3.9, X(t) = [ -0.07068197 -18.0487526 ]
t = 4.0, X(t) = [ -2.11925812 -23.11756376]
```

```
(b)
t = 0.0, X(t) = [1 2 3 4]
t = 0.1, X(t) = [1.21559583 2.31705916 3.31081318 2.17605601]
t = 0.2, X(t) = [1.46413759 2.65569303 3.42780286 0.13024556]
t = 0.3, X(t) = [ 1.74677833  2.9954791   3.33087833 -2.09472168]
t = 0.4, X(t) = [ 2.06253571  3.31420701  3.0044465  -4.45170986]
t = 0.5, X(t) = [ 2.40813643  3.58834935  2.43782258 -6.8897919 ]
t = 0.6, X(t) = [ 2.77790965  3.79357041  1.62557892 -9.35484596]
t = 0.7, X(t) = [  3.16373295   3.90526701   0.56783833 -11.79005788]
t = 0.8, X(t) = [  3.5550338    3.89913633  -0.72947615 -14.13628359]
t = 0.9, X(t) = [  3.93884895   3.75176719  -2.25441925 -16.33224046]
t = 1.0, X(t) = [  4.29994403   3.44125285  -3.98881164 -18.3145165 ]
```

3.9 Resuelva los siguientes sistemas. Calcule su estabilidad para el método de Euler. Estudie las soluciones.

a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

PARA ESTABILIDAD BUSCO $|1+\lambda h| < 1$ CON λ AUTOVALS. DE M $\qquad v = (a, \lambda - b)$ ó $v = (\lambda - d, c)$ si $b=0 \Rightarrow c\neq 0$

SI ALGÚN $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ INESTABLE

$$\text{Sol} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -1 & v_1 = (2,-2) = (1,-1) \\ \underbrace{\lambda_2 = 4}_{\text{INESTABLE}} & v_2 = (2,3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{-t}(1,-1) + C_2 e^{4t}(2,3)$$

$$x(0) = C_1(1,-1) + C_2(2,3) = (0,-4)$$
$$= (C_1, -C_1) + (2C_2, 3C_2) = (0,-4)$$

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 & (1) \\ -C_1 + 3C_2 = -4 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) = 5C_2 = -4 \Rightarrow C_2 = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow C_1 + 2 \cdot -\frac{4}{5} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{8}{5}$ $\qquad \Rightarrow x(t) = \frac{8}{5} e^{-t}(1,-1) - \frac{4}{5} e^{4t}(2,3)$

b)

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) \Rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -6 & v_1 = (1,-1) \\ \underbrace{\lambda_2 = -1}_{\text{ESTABLE}} & v_2 = (1,4) \end{cases}$$

COMO ES ESTABLE BUSCO PARA QUE h_s VALE:

$|1 + \lambda_1 h| < 1$

$|1 - 6h| < 1$

$-1 < 1 - 6h < 1$

$-2 < -6h < 0$

$2 > 6h > 0$

$\frac{1}{3} > h > 0$

$|1 + \lambda_2 h| < 1$

$|1 - h| < 1$

$-1 < 1 - h < 1$

$-2 < -h < 0$

$2 > h > 0$

$\Rightarrow 0 < h < 1/3 < 2 \Rightarrow 0 < h < 1/3$

BUSCO SOL:

$$x(t) = C_1 e^{-6t}(1,-1) + C_2 e^{-t}(1,4)$$
$$x(0) = (C_1, -C_1) + (C_2, 4C_2) = (1,2)$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 & (1) \\ -C_1 + 4C_2 = 2 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 5C_2 = 3 \rightarrow C_2 = \frac{3}{5} \rightarrow C_1 = \frac{2}{5}$

$$x(t) = \frac{2}{5} e^{-6t}(1,-1) + \frac{3}{5} e^{-t}(1,4)$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 9 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \rightsquigarrow (3-\lambda)(-3-\lambda)+36=0$$

$\lambda_1 = 3\sqrt{3}\,i$ $\quad v_1 = (9,\ 3\sqrt{3}i-3)$

$\lambda_2 = -3\sqrt{3}\,i$ $\quad v_2 = (9,\ -3\sqrt{3}i-3)$

NOTA, ACA SI HACES LA CUENTA DA (0,0). PARA LLEGAR A UN RESULTADO TOMAS UNA VARIABLE LIBRE Y DESPEJAS DE AHI, YO USE X=9.

ANALIZO ESTABILIDAD:

NORMA DE UN COMPLEJO

$$|1+\lambda_1 h| = |1+3\sqrt{3}i\,h|$$

CLARAMENTE ESTO ES > 1.

$$= \sqrt{1^2+(3\sqrt{3}h)^2} > 1$$

$\Rightarrow$ INESTABLE

$$\Rightarrow\ X(t) = C_1 e^{3\sqrt{3}it}(9,\ 3\sqrt{3}i-3) + C_2 e^{-3\sqrt{3}it}(9,\ -3\sqrt{3}i-3)$$

$$X(0) = C_1(9,\ 3\sqrt{3}i-3) + C_2(9,\ -3\sqrt{3}i-3) = (2,-4)$$

$$\begin{cases} 9(C_1+C_2) = 2 & (1) \\ [3\sqrt{3}i-3](C_1-C_2) = -4 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow C_1 = \frac{2}{9} - C_2 \quad (3)$

(3) EN $(2) \Rightarrow [3\sqrt{3}i-3]\left(\frac{2}{9}-2C_2\right) = -4$

$$\frac{1}{9} - C_2 = -\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}[3\sqrt{3}i-3]} = -\frac{2}{3\sqrt{3}i-3}$$ RACIONALIZO

$$\frac{1}{9} - C_2 = \cancel{-}\frac{\cancel{2}[3\sqrt{3}i+3]}{\cancel{-36}\ 18}$$

$$\frac{1}{9} - C_2 = \frac{3\sqrt{3}i+3}{18} = \frac{\sqrt{3}i+1}{6}$$

$$C_2 = \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}i+1}{6}$$

$$C_1 = \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}i+1}{6}$$

$$\Rightarrow\ X(t) = \left[\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{3}i+1}{6}\right] e^{3\sqrt{3}it}(9,\ 3\sqrt{3}i-3) + \left[\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{3}i+1}{6}\right] C_2 e^{-3\sqrt{3}it}(9,\ -3\sqrt{3}i-3)$$

d)
$$\begin{bmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & -13 \\ 5 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)+65=0 \begin{cases} \lambda_1 = 2+8i & v_1 = (-13, -1+8i) \\ \lambda_2 = 2-8i & v_2 = (-13, -1-8i) \end{cases}$$

NOTA, ACA SI HACES LA CUENTA DA (0,0). PARA LLEGAR A UN RESULTADO TOMAS UNA VARIABLE LIBRE Y DESPEJAS DE AHI, YO USE X=-13.

ANALIZO ESTABILIDAD:

NORMA DE UN COMPLEJO

$$|1+\lambda h| = |1+[2+8i]h|$$

CLARAMENTE ESTO ES > 1.

$$= \sqrt{(1+2h)^2 + (8h)^2} > 1$$

$\Rightarrow$ INESTABLE

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{[2+8i]t}(-13, -1+8i) + C_2 e^{[2-8i]t}(-13, -1-8i)$$

$$X(0) = C_1(-13, -1+8i) + C_2(-13, -1-8i) = (3, -10)$$

$$\begin{cases} -13(C_1+C_2) = 3 \quad (1) \\ -(C_1+C_2) + 8i(C_1-C_2) = -10 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (C_1+C_2) = -\frac{3}{13} \quad (3)$$

$$(3)+(2) \Rightarrow 8i(C_1-C_2) = -\frac{3}{13} - 10 = -\frac{133}{13}$$

$$8iC_1 - 8iC_2 = -\frac{133}{13}$$

$$8iC_1 = -\frac{133}{13} + 8iC_2$$

$$C_1 = -\frac{133}{13} \cdot \frac{1}{8i} + C_2$$

RACIONALIZO $(\cdot \frac{i}{i})$

$$C_1 = \frac{133i}{104} + C_2 \quad (4)$$

$$(4) \text{ EN } (3) \Rightarrow \frac{133i}{104} + 2C_2 = -\frac{3}{13}$$

$$2C_2 = -\frac{3}{13} - \frac{133i}{104}$$

$$C_2 = -\frac{3}{26} - \frac{133i}{208}$$

$$C_1 = -\frac{3}{26} + \frac{133i}{208}$$

$$X(t) = \left[-\frac{3}{26} + \frac{133i}{208}\right] e^{[2+8i]t}(-13, -1+8i) + \left[-\frac{3}{26} - \frac{133i}{208}\right] e^{[2-8i]t}(-13, -1-8i)$$

3.10 Linearice el sistema $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$ alrededor de $y = 1$. Estudie la estabilidad del método de Euler para este sistema.

TENGO $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$

PRIMERO BUSCO ESCRIBIR ESA COSA FEA COMO UN SISTEMA DE ECS. DE GRADO 1, COMO EN EL EJ. 3.8.

SEA $x_1 = y$ $\quad x_2 = y'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = (x_1-1)^3 + 2(x_1-1) + x_2 \end{cases}$$

AHORA ME INTERESA TENER UN $\bar{v} = (x_1^*, x_2^*)$ DE PUNTOS FIJOS DE x_1 y x_2...
PORQUE QUIERO ESTO? SEGUN DON PATO:

Linealización

Si tengo un pto fijo en y, i.e. $F \approx 0$, puedo expandir Taylor

$$F(y) \approx \cancel{F(y_0)}^{\,0} + \nabla F\Big|_{y=y_0} \cdot (y - y_0)$$

ENTONCES CON MI $\bar{v}$ PUEDO LINEALIZAR MI SISTEMA. COMO x_1^* y x_2^* SON PTOS FIJOS, $x_1'(\bar{v}) = x_2'(\bar{v}) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_1'(\bar{v}) = x_2^* = 0 \rightsquigarrow x_2^* = 0 \\ \Rightarrow x_2'(\bar{v}) = (x_1^*-1)^3 + 2(x_1^*-1) + \cancel{x_2^*}^{\,0} = 0 \rightsquigarrow x_1^* = 1 \end{array}\right\} \bar{v} = (1, 0)$$

AHORA SI:

$$\bar{F}(\bar{s}) \approx \cancel{\bar{F}(\bar{v})}^{\,0} + \nabla \bar{F}\Big|_{\bar{s}=\bar{v}} (\bar{s} - \bar{v})$$

BUSCO $\nabla \bar{F}$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3(x_1-1)+2 & 1 \end{bmatrix} = J$$

$$\Rightarrow J\Big|_{\bar{s}=\bar{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ENTONCES TENGO:

$$\bar{F}(\bar{s}) \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (\bar{s} - \bar{v})$$

QUE ES ALGO DE LA PINTA

$\dot{x} = Ax$ (COMO EN EL EJ 3.9) (*)

(*) → PARA ANALIZAR ESTABILIDAD DE EULER DE ESTO SACO AUTOVALS DE A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \underbrace{\lambda_2 = 2}_{>0}$$

COMO UN λ_i ES >0, EL METODO DE EULER ES INESTABLE PARA ESTE SISTEMA

3.11 **Modelo logístico de crecimiento poblacional.** Se estudia la evolución de una única población $x(t)$, cuyo crecimiento se ve limitado por la disponibilidad de recursos. El modelo logístico asume que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima K. Se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca, $K > 0$ es la capacidad de carga del ambiente.

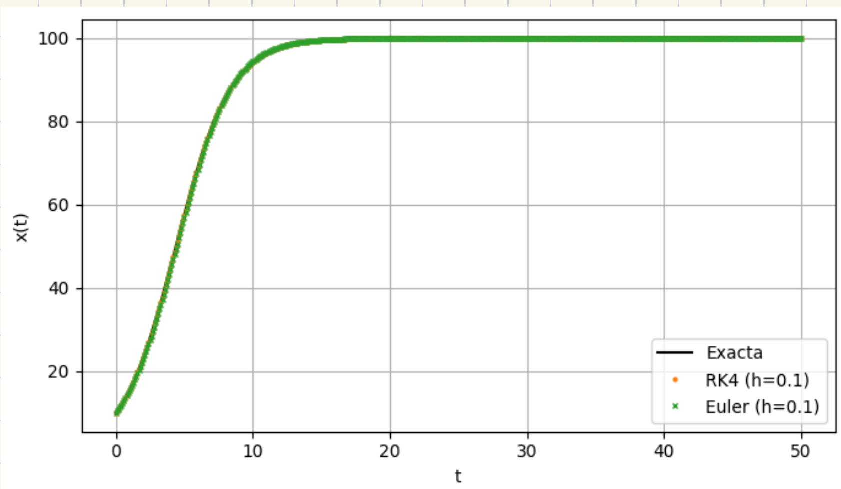
Se desea analizar el comportamiento de este sistema bajo distintas condiciones.

a) Tomar $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$, y resolver numéricamente el modelo utilizando el método de Euler, y el método RK4 con paso $\Delta t = 0.1$ hasta $t = 50$. Graficar $x(t)$ y comparar con la solución analítica:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

b) Estudiar el comportamiento del sistema variando x_0, K, y r e integrando con el método de preferencia.

a)



PRACTICAMENTE IGUAL

```
max|err| RK4=7.62e-07  Euler=6.39e-01
```

```python
# Ej 3.11

r = 0.3
K = 200
x0 = 10
tf = 50
h = 0.1

def f(t, x):
    return r*x*(1 - x/K)

def exact(t):
    return K/(1 + (K/x0 - 1)*math.exp(-r*t))

ts_rk, ws_rk = runge_kutta_4(f, 0, tf, h, x0)
ts_e, ws_e = euler(f, 0, tf, h, x0)

# exacta (en los mismos nodos para comparar)
xe_rk = np.array([exact(t) for t in ts_rk])
xe_e  = np.array([exact(t) for t in ts_e])

# errores
err_rk = np.abs(np.array(ws_rk) - xe_rk)
err_e  = np.abs(np.array(ws_e)  - xe_e)

print(f"t=50  RK4:  num={ws_rk[-1]:.6f}  exact={xe_rk[-1]:.6f}  |err|={err_rk[-1]:.2e}")
print(f"t=50 Euler: num={ws_e[-1]:.6f}  exact={xe_e[-1]:.6f}  |err|={err_e[-1]:.2e}")
print(f"max|err| RK4={err_rk.max():.2e}  Euler={err_e.max():.2e}")

# gráfico comparativo
t_dense = np.linspace(0, tf, 10000)
x_dense = [exact(t) for t in t_dense]

plt.figure(figsize=(7,4))
plt.plot(t_dense, x_dense, 'k-',  label='Exacta')
plt.plot(ts_rk,  ws_rk,  'C1o', ms=2, label='RK4 (h=0.1)')
plt.plot(ts_e,   ws_e,   'C2x', ms=3, label='Euler (h=0.1)')
plt.xlabel('t'); plt.ylabel('x(t)'); plt.grid(True); plt.legend(); plt.tight_layout()
plt.show()
```

b) NO CHE NO CAMBIA MUCHO...

3.12 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) \quad \text{en } [0,T], \\ \dot{\theta}(0) = v_0, \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Comparar con la solución del problema linealizado.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 0$.

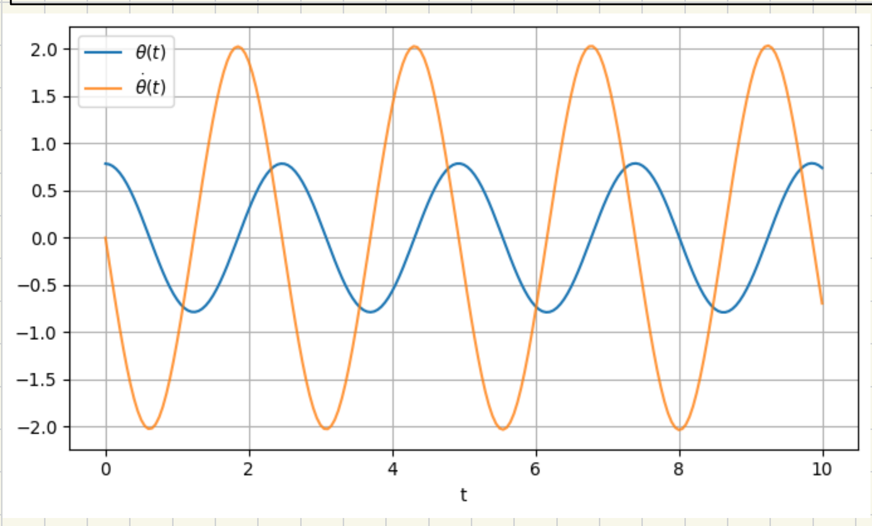
a) Sea $X_1 = \theta \quad X_2 = \theta'$

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -A\,\mathrm{sen}(X_1) \end{cases} \qquad \begin{matrix} X_1(0) = \theta_0 \\ X_2(0) = v_0 \end{matrix}$$

b)

```
# Ej 3.12
A = 7
T = 10
t0 = np.pi/4
v0 = 0
h = 0.05

F_a = lambda t, X: np.array([ X[1], -A*np.sin(X[0]) ])

ts_a, ws_a = euler_modificado(F_a, 0, T, np.array([t0, v0]), h)

theta = [ws_a[i][0] for i in range(len(ws_a))]
omega = [ws_a[i][1] for i in range(len(ws_a))]

# Graficar theta y omega
plt.figure(figsize=(7,4))
plt.plot(ts_a, theta, label=r'$\theta(t)$')
plt.plot(ts_a, omega, label=r'$\dot{\theta}(t)$', alpha=0.8)
plt.xlabel('t'); plt.grid(True); plt.legend(); plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
def euler_modificado(f, t0, tf, y0, h):
    N = int(round((tf - t0) / h))

    ws = [y0]
    ts = [t0]

    for _ in range(N):
        t = ts[-1]
        w = ws[-1]

        new_w = w + (h/2) * (f(t, w) + f(t + h, w + h*f(t, w)))

        ws.append(new_w)
        ts.append(t + h)

    return ts, ws
```



c)

Para pequeñas oscilaciones de θ

$\ddot{\theta}(t) = -A\,\mathrm{sen}(\theta) \longrightarrow \ddot{\theta}(t) \approx -A\theta \longrightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{A}_{\omega^2}\theta = 0$

Propongo sol $\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$\theta(t) = A\cos(\sqrt{A}t) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{A}t)$

$\theta(0) = A = \theta_0$

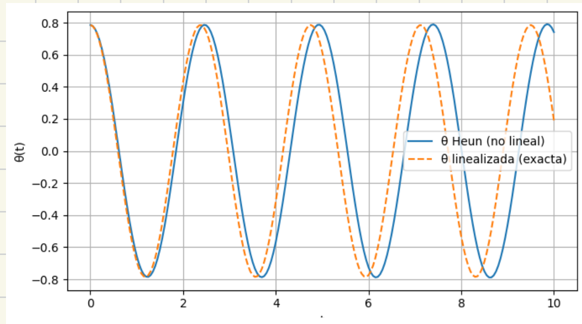
$\rightarrow \theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{A}t) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{A}t)$

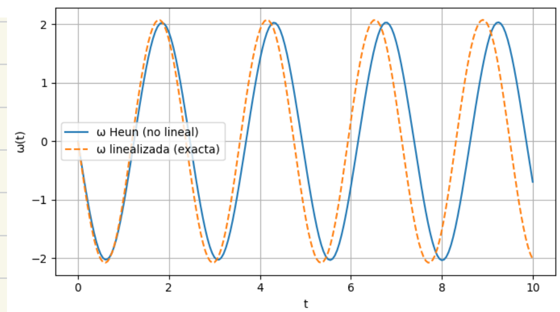
$\theta'(t) = -\theta_0\sqrt{A}\,\mathrm{sen}(\sqrt{A}t) + B\sqrt{A}\cos(\sqrt{A}t)$

$\theta'(0) = B\sqrt{A} = v_0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\sqrt{A}}$

$\rightarrow \theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{A}t) + \frac{v_0}{\sqrt{A}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{A}t)$

Con los datos del problema $\rightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{7}t)$





3.13 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

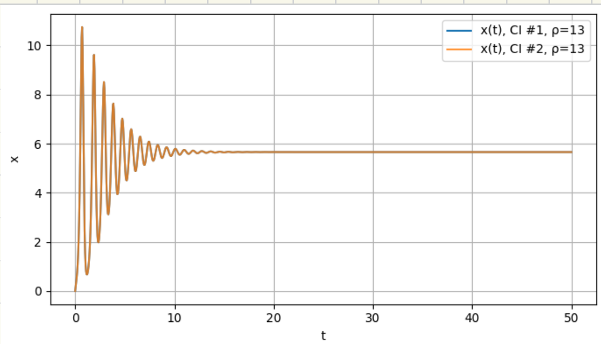
a) $\rho = 13$.

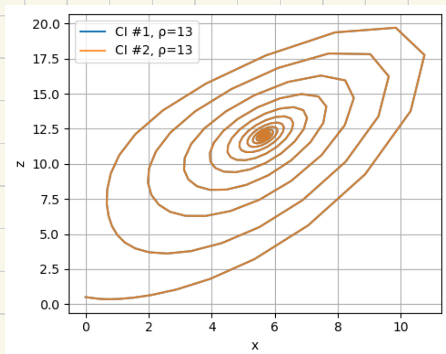
b) $\rho = 28$.

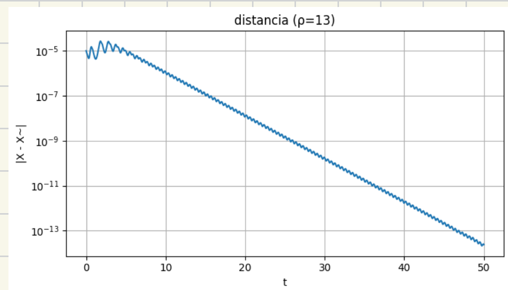
Compare las soluciones obtenidas al considerar las condiciones iniciales

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$. $\rightarrow$ CI #1

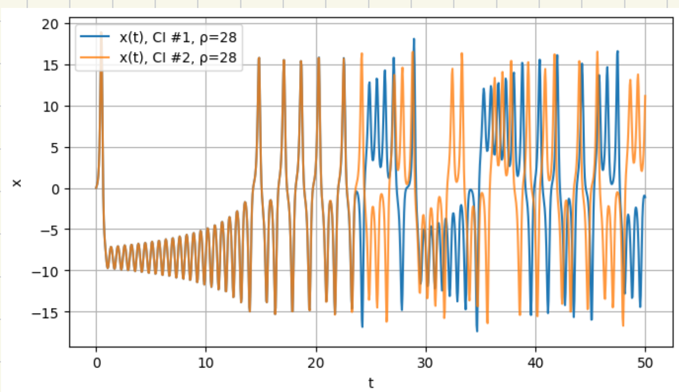
b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.50001)$. $\rightarrow$ CI #2

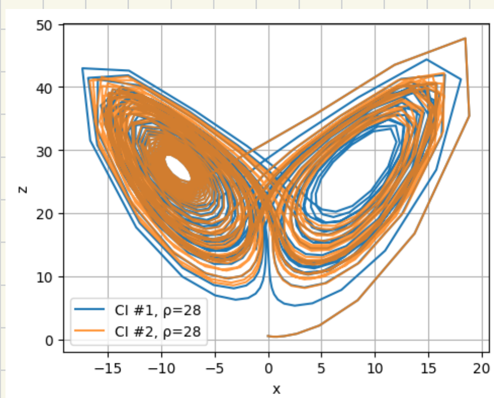


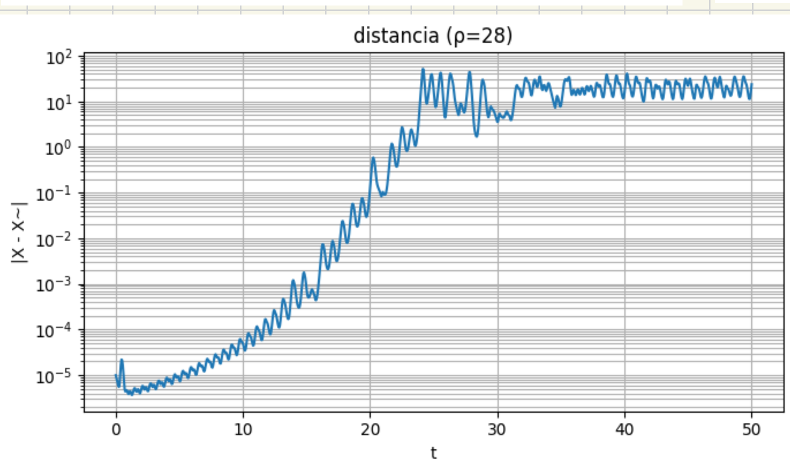




Con $\rho=13$ es mucho mas estable, porque? Ni idea. ¡!







Métodos numéricos y Optimización - segundo semestre 2024
Universidad de San Andrés

Guía 2: *Diferenciación. Integración. Ecuaciones diferenciales.*

1. Diferenciación

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.

b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.

b) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$

Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x) + 0.6$ con $x \in [-1, 1]$. Pruebe numéricamente en *python*con distintos esquemas y pasos, comparando con la derivada exacta.

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right].$$

Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}$.

1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula

$$f_n'(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

1.8 Sea la función

$$f(x,y) = x^2 e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x,y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

2. Integración

Cuadraturas Simples

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,
b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,
c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,
d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
b) $\int_{b}^{a} f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, y $x_2 = b$.

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

Cuadraturas Compuestas

2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f\, dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.

2.9 Sea $f \in C^2[a, b]$, $h = (b - a)/n$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a, b)$ para el cual la regla de los trapecios compuesta para n subintervalos pueden escribir de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

2.10 Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede tener grado de precisión mayor a $2n - 1$. Ayuda: construya un polinomio con raíces doble en cada x_i.

2.11 La función error se define por

$$\operatorname{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

a) Aproximar $\operatorname{erf}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ utilizando la regla de Simpson compuesta sobre $[0, 1]$ con n subintervalos. Calcular también con la regla del trapecio compuesta. Comparar ambos resultados y estimar el error usando las cotas teóricas. *Sugerencia*: Implementar en *python* para testear comportamiento a n grande.

b) Repetir para $\operatorname{erf}(2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\, dt$. Analizar cómo cambia la convergencia al duplicar el intervalo.

c) Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si bien no podemos usar los métodos vistos para aproximarla directamente, sí podemos aplicar el cambio $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)$ que mapea $u \in [0, 1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \;=\; \int_0^1 e^{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}\, \frac{\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)\, du.$$

Aproximar la integral resultante en $[0, 1]$ con cuadratura Gaussiana de orden $m = 2,\ 3$. Comparar con Simpson compuesto en el mismo intervalo con $n = 4, 8, 16$ subintervalos.

3. Ecuaciones diferenciales

Método de Euler

3.1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

3.2 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Euler con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b) $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = t\tan(\ln t)$.

c) $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

d) $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1/3$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-5t}$.

3.3 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exactas $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exactas.

b) Utilice las aproximaciones obtenidas en el inciso anterior e interpolación lineal para aproximar los valores $y(1.04)$, $y(1.55)$, e $y(1.97)$. Compare con los valores exactos.

c) Calcule el h necesario para tener $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$, donde w_i es la aproximación numérica a paso i.

3.4 Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolver usando el programa del Ejercicio 1 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

d) Repetir los ítems anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

3.5 Sea f una función contínua y Lipschitz con constante L en $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ y $M \mid |y''| \leq M \forall t$. Demostrar que para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

el método de Euler aproxima a la solución como

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} 1\right),$$

con w_i las aproximaciones dadas por el método de Euler.

Método de Runge-Kutta

3.6 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = (1/5)te^{3t} - (1/25)e^{3t}$.

b) $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c) $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = t \ln t + 2t$.

d) $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = (1/2)\sin 2t - (1/3)\cos 3t + 4/3$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.7 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden 4 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = -9y$, $\quad 0 \leq t \leq 1$, $\quad y(0) = e$, $\quad h = 0.1$, $\quad$ y solución $y(t) = e^{1-9t}$.

b) $y' = -20(y - t^2) + 2t$, $\quad 0 \leq t \leq 1$, $\quad y(0) = 1/3$, $\quad h = 0.1$, $\quad$ y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-20t}$.

c) $y' = -20y + 20\sin t + \cos t$, $\quad 0 \leq t \leq 2$, $\quad y(0) = 1$, $\quad h = 0.25$, $\quad$ y solución $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

d) $y' = 50/y - 50y$, $\quad 0 \leq t \leq 1$, $\quad y(0) = \sqrt{2}$, $\quad h = 0.1$, $\quad$ y solución $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.8 Escriba las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones de grado 1 y resuélvalas con el método de Runge-Kutta de orden 4

a) $2y'' - 5y' + y = 0, \quad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$

b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$

3.9 Resuelva los siguientes sistemas. Calcule su estabilidad para el método de Euler. Estudie las soluciones.

a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \text{ con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

c) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

d) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$

3.10 Linearice el sistema $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$ alrededor de $y = 1$. Estudie la estabilidad del método de Euler para este sistema.

3.11 **Modelo logístico de crecimiento poblacional.** Se estudia la evolución de una única población $x(t)$, cuyo crecimiento se ve limitado por la disponibilidad de recursos. El modelo logístico asume que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima K. Se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca, $K > 0$ es la capacidad de carga del ambiente.

Se desea analizar el comportamiento de este sistema bajo distintas condiciones.

a) Tomar $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$, y resolver numéricamente el modelo utilizando el método de Euler, y el método RK4 con paso $\Delta t = 0.1$ hasta $t = 50$. Graficar $x(t)$ y comparar con la solución analítica:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

b) Estudiar el comportamiento del sistema variando x_0, K, y r e integrando con el método de preferencia.

3.12 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) & \text{en } [0, T], \\ \dot{\theta}(0) = v_0, \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Comparar con la solución del problema linealizado.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 0$.

3 ~~1~~3 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

a) $\rho = 13$.

b) $\rho = 28$.

Compare las soluciones obtenidas al considerar las condiciones iniciales

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$.

b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.50001)$.