Métodos numéricos y Optimización - segundo semestre 2024
Universidad de San Andrés

Guía 2: *Diferenciación. Integración. Ecuaciones diferenciales.*

1. Diferenciación

1.1 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de dos puntos adelantadas y atrasadas en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = 2\cos(2x) - x$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, y $x_2 = -0.1$.

b) $f(x) = x^2 \ln x + 1$, con $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, y $x_2 = 1.4$.

1.2 Utilice las fórmulas de diferencias finitas de tres puntos más conveniente en los puntos indiciados (y utilizando solo los puntos indicados) en las siguientes funciones. Compare con los valores exactos.

a) $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$, con $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = -0.1$, y $x_3 = 0$.

b) $f(x) = x\sin x + x^2 \cos x$, con $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.3$, y $x_3 = 1.4$.

1.3 Dado un circuito con voltaje $V(t)$, inductancia L, resistencia R y corriente $I(t)$, la primera ley de Kirchhoff nos dice que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI,$$

Suponiendo que se mide $I(1.0) = 3.10$, $I(1.01) = 3.12$, $I(1.02) = 3.14$, $I(1.03) = 3.18$ e $I(1.04) = 3.24$, y que $L = 0.98$ y $R = 0.142$. Calcule $V(t)$ en los tiempos dados.

1.4 Calcule $f'(x)$ para $f(x) = -0.4\tanh(50x) + 0.6$ con $x \in [-1, 1]$. Pruebe numéricamente en *python*con distintos esquemas y pasos, comparando con la derivada exacta.

1.5 Dado $h > 0$, considere las siguientes fórmulas de diferencias finitas para aproximar la derivada de una función $u(x)$:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

$$D_3u(x) = \frac{1}{6h}\left[2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)\right].$$

Utilizando desarrollos de Taylor, justifique que estas expresiones aproximan la derivada $u'(x)$ con errores de orden $\mathcal{O}(h^p)$, para $p = 1, 1, 2, 3$ respectivamente.

Para la función $u(x) = \sin(x)$, grafique en escala log-log el error de cada método al evaluar en $x = 1$, para $h = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}$.

1.6 Aproxime la derivada de alguna (a su elección) función f utilizando la siguiente fórmula

$$f_n'(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

para distintos valores de $n = 0, 1, 2, \cdots, 15$. Compare con el valor exacto y analice los resultados.

1.7 Dada la expresión para el error

$$e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la derivada tercera de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

1.8 Sea la función

$$f(x, y) = x^2 e^y + \sin(xy).$$

Aproximar la derivada parcial respecto de x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y de y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(x, y) = (1, 0.5)$. Utilizar para cada caso diferencias adelantadas y diferencias centradas de 2 puntos tomando $h = 0.01$.

Comparar los resultados de cada esquema con el valor exacto de las derivadas parciales.

2. Integración

Cuadraturas Simples

2.1 Aproxime las siguientes integrales utilizando las cuadruturas de trapecios, Simpson y Gaussiana simples. Calcule cotas para el error y compare con los valores reales.

a) $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$,

b) $\int_{1}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$,

c) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x dx$,

d) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$,

2.2 Aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ dado que

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

2.3 Encuentre el grado de precisión de las siguientes cuadraturas

a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\int_{b}^{a} f(x)dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$, con $h = (b-a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, y $x_2 = b$.

2.4 Encuentre las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la cuadratura

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

sea del mayor orden posible.

2.5 Sabiendo que la fórmula de Simpsons es exacta a órden 3, encuentre expresiones para a_0, a_1, a_2, y k en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi),$$

integrando $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

2.6 Determine las constantes a, b, c y d necesarias para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf'(-1) + df'(1),$$

tenga grado de precisión 3.

Cuadraturas Compuestas

2.7 Escribir funciones que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$, y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar a $\int_a^b f\,dx$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

2.8 Se sabe que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π. Grafique el resultado en función de n.

2.9 Sea $f \in C^2[a, b]$, $h = (b - a)/n$, $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a, b)$ para el cual la regla de los trapecios compuesta para n subintervalos pueden escribir de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

2.10 Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede tener grado de precisión mayor a $2n - 1$. Ayuda: construya un polinomio con raíces doble en cada x_i.

2.11 La función error se define por

$$\operatorname{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Aproximar $\operatorname{erf}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ utilizando la regla de Simpson compuesta sobre $[0, 1]$ con n subintervalos. Calcular también con la regla del trapecio compuesta. Comparar ambos resultados y estimar el error usando las cotas teóricas. *Sugerencia*: Implementar en *python* para testear comportamiento a n grande.

b) Repetir para $\operatorname{erf}(2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^2 e^{-t^2}\,dt$. Analizar cómo cambia la convergencia al duplicar el intervalo.

c) Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si bien no podemos usar los métodos vistos para aproximarla directamente, sí podemos aplicar el cambio $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}u\right)$ que mapea $u \in [0, 1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \;=\; \int_0^1 e^{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}\,\frac{\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)\,du.$$

Aproximar la integral resultante en $[0, 1]$ con cuadratura Gaussiana de orden $m = 2,\ 3$. Comparar con Simpson compuesto en el mismo intervalo con $n = 4, 8, 16$ subintervalos.

3. Ecuaciones diferenciales

Método de Euler

3.1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

3.2 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Euler con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, y solución $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b) $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c) $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$, $h = 0.2$, y solución $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

3.3 Sea f una función contínua y Lipschitz con constante L en $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ y M tal que $|y''| \leq M \forall t$. Demostrar que para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

el método de Euler aproxima a la solución como

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} \left(e^{L(t_i - a)} - 1 \right),$$

con w_i las aproximaciones dadas por el método de Euler.

3.4 Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a) Demuestre que el PVI tiene solución única. Corrobore que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial.

b) Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con la exacta.

c) Halle una cota para el valor de h tal que el error global no sea mayor a 10^{-4}, usando el resultado de 3.3. Halle numéricamente el valor de h para el cual se cumple esta condición y compare con la cota esperada.

3.5 Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolviendo el PVI con $\lambda = 10$, $t \in [0, 1]$, varíe el tamaño del paso h y reporte lo que observa al resolver numéricamente, comparando con la solución exacta.

d) Repetir los ítems anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

Método de Runge-Kutta

3.6 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = -\frac{1}{25}$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = (1/5)te^{3t} - (1/25)e^{3t}$.

b) $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, $h = 0.5$, y solución $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c) $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.25$, y solución $y(t) = t \ln t + 2t$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.7 Corrobore que las soluciones dadas para los siguientes problemas de valores iniciales son correctas. Resuelva los problemas utilizando los métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden 4 con el paso temporal dado y en el intervalo indicado. Compare las soluciones obtenidas numéricamente con las analíticas.

a) $y' = -9y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = e^{1-9t}$.

b) $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1/3, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = t^2 + (1/3)e^{-20t}$.

c) $y' = -20y + 20\sin t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.25,$ y solución $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

d) $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad h = 0.1,$ y solución $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

Implementando funciones de *python*, integre numéricamente disminuyendo el paso temporal h.

3.8 Escriba las siguientes ecuaciones como sistemas de ecuaciones de grado 1 y resuélvalas con el método de Runge-Kutta de orden 4

a) $2y'' - 5y' + y = 0, \quad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$

b) $y^{(4)} + 3y'' - \sin(t)y' + 8y = t^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$

3.9 Resuelva los siguientes sistemas. Calcule su estabilidad para el método de Euler. Estudie las soluciones.

a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \text{ con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

c) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

d) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \text{con } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$

3.10 Linearice el sistema $y'' = (y-1)^3 + 2(y-1) + y'$ alrededor de $y = 1$. Estudie la estabilidad del método de Euler para este sistema.

3.11 **Modelo logístico de crecimiento poblacional.** Se estudia la evolución de una única población $x(t)$, cuyo crecimiento se ve limitado por la disponibilidad de recursos. El modelo logístico asume que la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima K. Se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca, $K > 0$ es la capacidad de carga del ambiente.

Se desea analizar el comportamiento de este sistema bajo distintas condiciones.

a) Tomar $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$, y resolver numéricamente el modelo utilizando el método de Euler, y el método RK4 con paso $\Delta t = 0.1$ hasta $t = 50$. Graficar $x(t)$ y comparar con la solución analítica:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

b) Estudiar el comportamiento del sistema variando x_0, K, y r e integrando con el método de preferencia.

3.12 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\sin(\theta(t)) & \text{en } [0, T], \\ \dot{\theta}(0) = v_0, \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Comparar con la solución del problema linealizado.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = 0$.

3.13 **Sistema de Lorenz.** Resuelva computacionalmente el sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 bajo con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y

a) $\rho = 13$.

b) $\rho = 28$.

Compare las soluciones obtenidas al considerar las condiciones iniciales

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.5)$.

b) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.5, 0.50001)$.