**ПЛОСКОСТЬ**

1. **Уравнение плоскости**

**2. Изображение плоскости**

Ключевые слова: *нормаль* *к плоскости; нормальный вектор плоскости; векторное уравнением* *плоскости; общим уравнением* *плоскости;*

**1. Уравнение плоскости**

Пусть в трехмерном пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Попробуем установить, какой вид может иметь уравнение плоскости. Для этого заметим, что все плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны друг другу.

О п р е д е л е н и е.   Любая прямая, перпендикулярная плоскости, называется *нормалью* к плоскости, а любой **ненулевой** вектор на такой прямой мы будем называть *нормальным вектором* плоскости.

З а м е ч а н и е.   Из определения видно, что нормальный вектор у фиксированной плоскости определяется не однозначно. Все нормальные векторы одной плоскости коллинеарны друг другу и поэтому получаются один из другого умножением на число, отличное от нуля.

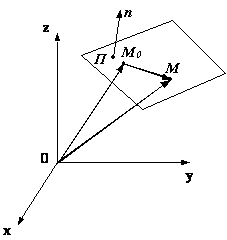
Для того чтобы из параллельных плоскостей выбрать одну, достаточно задать точку, через которую проходит эта плоскость. Итак, если у плоскости известны нормальный вектор и точка, через которую она проходит, то плоскость определена однозначно.

Т е о р е м а.   *Пусть вектор является нормальным вектором плоскости Описание: $ \Pi$, проходящей через точку* *. Тогда уравнение*

|  |  |
| --- | --- |
| Описание: $\displaystyle A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ | (1) |

*является уравнением плоскости Описание: $ \Pi$.*

*Доказательство*.     Пусть  -- некоторая точка плоскости Описание: $ \Pi$. Иногда говорят "текущая точка" плоскости, так как предполагается, что ее координаты меняются и точка пробегает всю плоскость.



Вектор лежит на плоскости Описание: $ \Pi$. Следовательно, вектор  ортогонален вектору **n**. Если же взять точку , не лежащую на плоскости Описание: $ \Pi$, то вектор не будет ортогональным вектору **n**. Так как условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения условием того, что точка Описание: $ M$лежит в плоскости Описание: $ \Pi$, является выполнение равенства

|  |  |
| --- | --- |
| Описание: $\displaystyle {\bf n}\cdot\overrightarrow {M_0M}=0.$ | (2) |

Выразив скалярное произведение в левой части этого равенства через координаты сомножителей по формуле (1), получим требуемую формулу.

Пусть **r** -- радиус-вектор текущей точки Описание: $ M$плоскости Описание: $ \Pi$, -- радиус-вектор точки . Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

Описание: $\displaystyle {\bf n}\cdot({\bf r}-{\bf r}_0)=0.$

Такое уравнение обычно называют *векторным уравнением* плоскости Описание: $ \Pi$.

Раскроем скобки в уравнении (1). Так как точка  -- фиксированная, то выражение является числом, которое обозначим буквой Описание: $ D$. Тогда уравнение (1) принимает вид

|  |  |
| --- | --- |
| Описание: $\displaystyle Ax+By+Cz+D=0.$ | (3) |

Такое уравнение называется *общим уравнением* плоскости. Еще раз отметим, что в этом уравнении хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, так как .

Верно и обратное утверждение: 

Т е о р е м а.   *Всякое уравнение (3), в котором, является уравнением плоскости, ортогональной вектору .*

*Доказательство*.     Условие **означает, что хотя бы одно из чисел **, отлично от нуля. Пусть это будет, например, число Описание: $ B$. Преобразуем уравнение (3) следующим образом:

Описание: $\displaystyle A(x-0)+B\left(y-\left(-\frac DB\right)\right)-C(z-0)=0.$

По [теореме](http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/node15.html#up)  такое уравнение является уравнением плоскости с нормальным вектором **n**, проходящей через точку .

[Теорема](http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/node15.html#up)  позволяет написать уравнение плоскости, если известна точка этой плоскости и вектор, ортогональный плоскости. Однако, довольно часто встречаются задачи, где требуется получить уравнение плоскости, если известна точка, лежащая на ней, и два неколлинеарных вектора, лежащих или, что то же самое, параллельных плоскости. Покажем на примере, как решается такая задача.

**2. Изображение плоскости**

Изобразить плоскость как таковую на листе бумаги невозможно, так как плоскость не имеет ни границ, ни изгибов, ничего, что отмечает глаз при взгляде на предмет. Поэтому на бумаге рисуют какую-либо фигуру, лежащую на той плоскости, которую мы хотим изобразить. Фигуру нужно выбирать так, чтобы ее положение в пространстве было легко установить. Но в любом случае, читатель должен помнить, что как бы ни изображалась плоскость, она никогда не ограничивается нарисованными линиями, а продолжается бесконечно во все стороны.

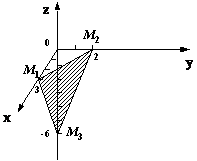
Мы разберем несколько способов изображения плоскостей при разных вариантах их расположения. (Не нужно думать, что это -- единственно возможные изображения, плоскости могут быть нарисованы и подругому.)

### 

### *Все коэффициенты и свободный член в уравнении отличны от нуля*

В этом случае находим точки пересечения плоскости с осями координат. Например, пусть требуется построить плоскость, заданную уравнением Описание: $ {2x+3y-z-6=0}$. Находим точку пересечеия с осью Описание: $ Ox$. На этой оси у любой точки вторая и третья координаты равны нулю: Описание: $ {y=0}$, Описание: $ {z=0}$. Из уравнения плоскости получаем , откуда Описание: $ {x=3}$. Получили точку .

На оси  равны нулю первая и третья координаты: Описание: $ {x=0}$, Описание: $ {z=0}$. Значит, , то есть . Получили точку . Аналогично на оси Описание: $ Oz$находим точку . Рисуем треугольник с вершинами , ,  -- это и будет "изображение" плоскости  (рис. 11.2).



Еще раз подчеркнем, что плоскость тянется бесконечно во все стороны за нарисованные линии, ограничивающие треугольник.

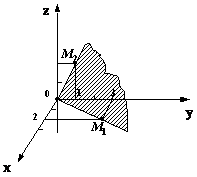
### 

### *Коэффициенты при неизвестных отличны от нуля,*

### *а свободный член равен нулю*

В этом случае плоскость проходит через начало координат  и других точек пересечения с осями нет. Для изображения такой плоскости нарисуем линии ее пересечения с двумя координатными плоскостями. Например, пусть требуется построить плоскость .

На плоскости  все точки имеют третью координату, равную нулю: Описание: $ {z=0}$. В результате на плоскости  линия пересечения с исходной плоскостью задается уравнением , то есть . Построим эту прямую. Она проходит через точки и  -- координаты даны на плоскости , а не в пространстве. Аналогично находим пересечение исходной плоскости с плоскостью , на которой у каждой точки первая координата равна нулю: Описание: $ x=0$. Получаем , то есть. Данная прямая проходит через точки  и в плоскости . Проводим ее. Концы изображений прямых соединим какой-нибудь линией. Получим "изображение" исходной плоскости (рис. 11.3).

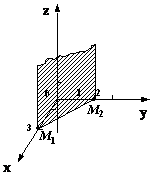


### Один из коэффициентов при неизвестных равен нулю

В этом случае плоскость параллельна оси того переменного, которое в явном виде отсутствует в уравнении плоскости (коэффициент перед этим переменным равен нулю). Поясним это.

Пусть, например, коэффициент перед равен нулю, то есть плоскость имеет уравнение Ax+Cz+D=0. Тогда ее нормальный вектор имеет координаты . На оси  (оси отсутствующего переменного) лежит вектор . Находим скалярное произведение этих векторов: . Равенство нулю скалярного произведения означает, что ось  ортогональна нормальному вектору плоскости и, следовательно, сама параллельна исходной плоскости, что нам и требовалось.

Для изображения плоскости, в уравнении которой один из коэффициентов при неизвестных равен нулю, находим ее пересечение с непараллельными ей осями. Получившиеся две точки соединяем отрезком и через эти же две точки проводим прямые, параллельные оси осутствующего переменного. Построим, например, плоскость . Плоскость параллельна оси Описание: $ Oz$. Находим точки пересечения с осями Описание: $ Ox$и . Получаем точки и . Чертим отрезок  и прямые, проходящие через точки и  и параллельные оси Описание: $ Oz$(рис. 11.4).



### Два коэффициента при переменных равны нулю

Плоскость должна быть параллельна каждой из осей отсутствующих переменных и, следовательно, параллельна координатной плоскости, содержащей эти оси. Тогда можно найти точку Описание: $ M$пересечения исходной плоскости с осью переменного, явно присутствующего в ее уравнении, и провести через нее прямые, параллельные двум другим осям. Например, построим изображение плоскости Описание: $ {2z=3}$.

Плоскость параллельна оси Описание: $ Ox$и оси . Следовательно, плоскость параллельна координатной плоскости . Находим точку Описание: $ M$пересечения исходной плоскости с осью Описание: $ Oz$: . Проводим через точку Описание: $ M$две прямые, параллельные осям Описание: $ Ox$и, соответственно. Получаем изображение плоскости.

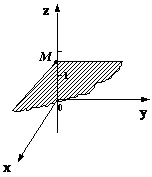


Рис. Два коэффициента при переменных равны нулю.