# TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

O repositório com os códigos mencionados neste trabalho pode ser acessado no Anexo [9].

1. Mostre, usando análise e simulação, que o Gerador de Números Aleatórios definido por $x_{i+1} = 5x_i \mod (7)$ é um gerador de período completo. Determine a sequência gerada para sementes $x_0 = 4$ e $x_0 = 7$. Compare as sequências e comente os resultados.

   Considerando $x_0 = 4$ como semente inicial, observa-se um período completo $T = \{4, 6, 2, 3, 1, 5\}$. Como este é um Gerador Congruente Linear, o período máximo é $7-1 = 6$ elementos. A Figura 1 ilustra as amostras geradas por essa semente inicial.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 \cdot x_0 \mod (7) = 5 \cdot 4 \mod (7) \therefore \mathbf{x_1 = 6} \\
x_2 &= 5 \cdot x_1 \mod (7) = 5 \cdot 6 \mod (7) \therefore \mathbf{x_2 = 2} \\
x_3 &= 5 \cdot x_2 \mod (7) = 5 \cdot 2 \mod (7) \therefore \mathbf{x_3 = 3} \\
x_4 &= 5 \cdot x_3 \mod (7) = 5 \cdot 3 \mod (7) \therefore \mathbf{x_4 = 1} \\
x_5 &= 5 \cdot x_4 \mod (7) = 5 \cdot 1 \mod (7) \therefore \mathbf{x_5 = 5} \\
x_6 &= 5 \cdot x_5 \mod (7) = 5 \cdot 5 \mod (7) \therefore \mathbf{x_6 = 4}
\end{aligned}$$

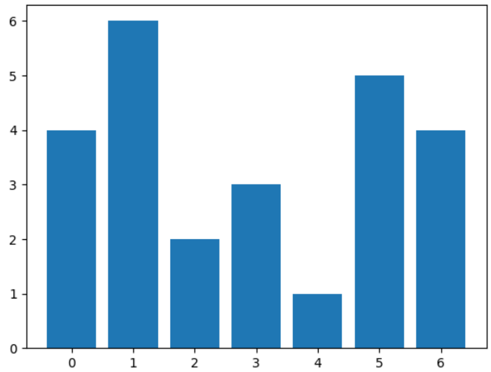



Figura 1: Sequência para Semente Inicial $x_0 = 4$.

   Para a semente inicial $x_0 = 7$, é observada a sequência:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 \cdot x_0 \mod (7) \rightarrow x_1 = 5 \cdot 7 \mod (7) \therefore \mathbf{x_1 = 0} \\
x_2 &= 5 \cdot x_1 \mod (7) \rightarrow x_2 = 5 \cdot 0 \mod (7) \therefore \mathbf{x_2 = 0}
\end{aligned}$$

   Logo, para a semente inicial $x_0 = 7$ observa-se uma sequência de comprimento 1. Tal fato ocorre porque a semente inicial é um múltiplo de 7 (mod do gerador), assim o clico tem todas as iterações seguintes iguais e não possui período completo.

   O código para este gerador está disponível no Anexo [1] - Q1_GeradorLinear.ipynb.

2. O número de chamadas para o *help-desk* de uma empresa tem uma distribuição de Poisson com 60 chamadas por um período de 10 horas. Seja $C$ uma Variável Aleatória para o número de chamadas por hora, encontre:

   **(a)** a probabilidade de o suporte técnico não receber chamada em uma determinada hora.

   Pela solução analítica, a média da Distribuição de Poisson deve ser ajustada para um período de uma hora. Assim, se $\alpha = 60$ chamadas/10 horas $\rightarrow \alpha = 6$ chamadas/hora. Aplicando a Distribuição de Poisson:

$$P(C = c) = \frac{\alpha^c \cdot e^{-\alpha}}{c!} \therefore P(C = 0) = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-6}}{1} = 0,00248$$

   Pelo código, disponível no Anexo [2] - Q2_Poisson.ipynb, $P(C = 0) = 0,0026$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

   Dada a média $\alpha = 6$ chamadas/hora, a probabilidade de nenhuma chamada ser atendida nesse intervalo de tempo será baixa, o que justifica o valor calculado.

**(b)** a probabilidade de que o suporte técnico receba menos de oito chamadas em uma determinada hora.

Assumindo uma Variável Aleatória Discreta como modelo para C, a Função de Distribuição Cumulativa (Fdc) da Variável será:

$$F_C(c) = P(C < 8) = \sum_{c=0}^{7} \frac{\alpha^c \cdot e^{-\alpha}}{c!} = P(C = 0) + e^{-\alpha} \cdot \sum_{c=1}^{7} \frac{\alpha^c}{c!}$$

Pela solução analítica, aplicando a Distribuição de Poisson para o mesmo valor $\alpha = 6$ chamadas/hora:

$$\begin{aligned} P(C < 8) &= 0,0025 + e^{-6} \cdot \left( \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} + \frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} \right) \\ &= 0,0025 + 0,0149 + 0,0446 + 0,0892 + 0,1339 + 0,1606 + 0,1606 + 0,1377 \\ &\therefore\ \mathbf{P(C < 8) = 0,7440} \end{aligned}$$

Pelo mesmo código anterior, $P(C < 8) = 0,7436$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Dada a média $\alpha = 6$ chamadas/hora, a probabilidade de atender $x = 8$ chamadas/hora será alta, pois é valor próximo à média $\alpha$, o que justifica o valor calculado.

**(c)** o número médio de chamadas por hora, E[C].

O número médio de chamada por hora é $\mathbf{E[C]} = \alpha = \mathbf{6}$ **chamadas**.

**(d)** a variância de C.

Por definição, a variância, $\sigma_C^2$, segundo Poisson, é igual a sua média. Logo, $\boldsymbol{\sigma_C^2} \triangleq \alpha = \mathbf{6}$ **chamadas²**.

**(e)** o desvio padrão de C.

Por definição, o desvio padrão, $\sigma_C$, é a raiz quadrada da variância: $\sigma_C \triangleq \sqrt{\sigma_C^2}$. Logo, $\boldsymbol{\sigma_C} = \sqrt{\mathbf{6}} \approx \mathbf{2,4495}$ **chamadas**.

3. Um fabricante de pistões de metal descobre que, em média, 15% de seus pistões são rejeitados porque são super ou subdimensionados. Qual é a probabilidade de um lote de 8 pistões conter:

**(a)** não mais que 2 rejeitados?

Cada pistão fabricado segue uma Distribuição de Bernoulli em que a probabilidade de ser rejeitado é $q$. Sendo X uma Variável Aleatória Discreta que modela a quantidade $x$ de pistões rejeitados em um lote de $n$ pistões produzidos, a Função Massa de Probabilidade (fmp) de X é segue uma Distribuição Binomial:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot q^x \cdot (1 - q)^{n-x},$$

em que $(1 - q)$ é a probabilidade de o pistão não ser rejeitado e $(n - x)$ o número de pistões não rejeitados.

Pela solução analítica, é observada uma Distribuição Binomial com $n = 8$ repetições de Bernoulli, em que $q = 0,15$. A Função de Distribuição Cumulativa (Fdc) da Variável Aleatória X será:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{8}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^6 \\ &= 0,2725 + 0,3847 + 0,2376\ \therefore\ \mathbf{P(X \leq 2) = 0,8948} \end{aligned}$$

Pelo código, disponível no Anexo [3] - Q3_Binomial.ipynb, $P(X \leq 2) = 0,8954$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Considerando a probabilidade de o pistão ser rejeitado e a quantidade produzida, tem-se que $nq = 0,15 \cdot 8 = 1,2$ pistões serão rejeitados, em média. Assim, até 2 pistões rejeitados é uma probabilidade alta, dada uma taxa de rejeição próxima à média.

**(b)** pelo menos 6 rejeitados?

Pela solução analítica, assumindo que, no máximo, todos os 8 pistões produzidos serão rejeitados, a Fdc da Variável Aleatória X será:

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= \binom{8}{6} \cdot 0,15^6 \cdot 0,85^2 + \binom{8}{7} \cdot 0,15^7 \cdot 0,85^1 + \binom{8}{8} \cdot 0,15^8 \cdot 0,85^0 \\ &= 2,304 \cdot 10^{-4} + 1,162 \cdot 10^{-5} + 2,563 \cdot 10^{-7} \;\therefore\; \mathbf{P(X \geq 6) = 2,423 \cdot 10^{-4}} \end{aligned}$$

Pelo mesmo código anterior, $P(C \geq 6) = 0,00026$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Assumindo a mesma taxa de rejeição dos pistões calculada no item anterior, $np = 1,2$, é notável que a probabilidade de serem rejeitados 6 pistões, taxa bem elevada em relação à média, será baixa, praticamente nula.

**(c)** traçar o histograma da variável analisada.

O Histograma da Figura 2 representa a distribuição da quantidade de pistões rejeitados.

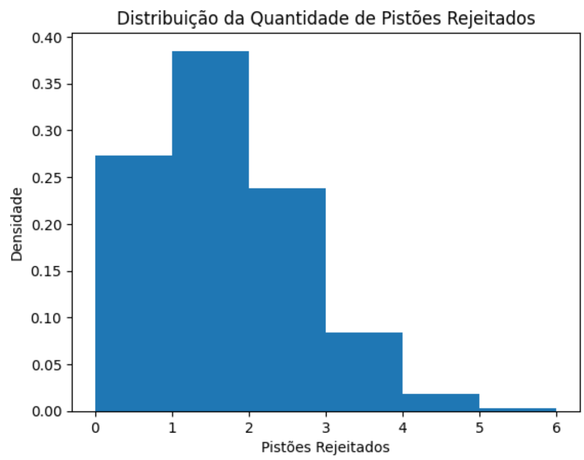



Figura 2: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

Como afirmado anteriormente, nota-se uma concentração maior da quantidade de pistões rejeitados em torno da média $np$.

4. Se ocorrerem falhas de energia elétrica de acordo com uma distribuição de Poisson com uma média de 6 falhas a cada duas semanas, calcule a probabilidade de que haverá ao menos 2 falhas durante uma semana específica. Traçar o histograma da variável analisada.

   Seja $\alpha$ a média de falhas de energia elétrica em um dado período de duas semanas. Se $\alpha = 6$ falhas/2 semanas $\rightarrow \alpha = 3$ falhas/semana.

   Se X é a Variável Aleatória Discreta que modela o número de falhas de energia elétrica por semana, a Função de Distribuição Cumulativa de X, pela Probabilidade Complementar, será:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Se X segue uma Distribuição de Poisson, a Função Massa de Probabilidade de de X é:

$$P(X = x) = \frac{\alpha^x \cdot e^{-\alpha}}{x!}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - \left( \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} \right) \\ &= 1 - (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}) = 1 - 0,1991 \\ &\therefore\ \mathbf{P(X \geq 2) = 0,8009} \end{aligned}$$

Pelo código, disponível no Anexo [4] - Q4_Poisson.ipynb, $P(X \geq 2) = 0,8018$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Se a media $\alpha = 3$ falhas/semana, a probabilidade de ao menos 2 falhas/semana é um valor elevado, uma vez que a taxa de falhas/semanas é um valor próximo à media da Distribuição.

A Figura 3 representa o Histograma da distribuição da quantidade de falhas em uma semana.

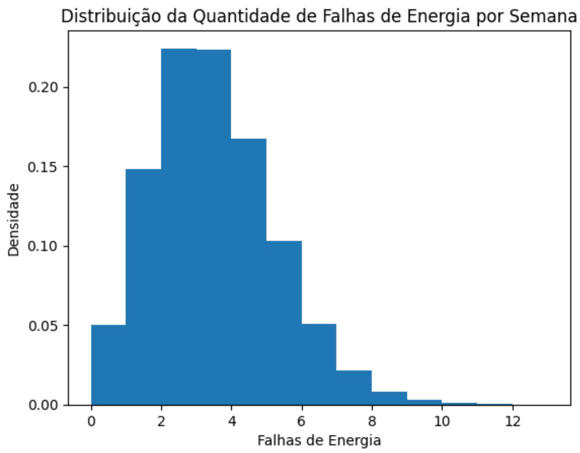



Figura 3: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

5. O número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas pode ser modelado por uma Distribuição Exponencial com o tempo médio igual a 28 dias. Encontre a probabilidade de um viajante comprar uma passagem com menos de 4 dias de antecedência. Traçar a Função Densidade de Probabilidade da variável analisada.

   Se X é a Variável Aleatória Contínua que modela o número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas com média $\lambda$, a Função Densidade de Probabilidade será:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Já a Função de Distribuição Cumulativa de X, que indica a probabilidade de a Variável Aleatória X assumir um valor menor ou igual a $x$, é:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Dado que X é uma Variável Aleatória Contínua, $P(X \leq x) = P(X < x)$, uma vez que $P(X = x) = 0$.

Se os clientes compram as passagens aéreas com 28 dias de antecedência, em média, a ocorrência dos eventos é modelada segundo uma Distribuição de Poisson e o Tempo Médio de Ocorrência entre os eventos é uma Distribuição Exponencial, com $\lambda = \frac{1}{28}$. Assim:

$$P(X < 4) = F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{28} \cdot \, 4} \;\therefore\; \mathbf{P(X < 4) = 0,1331}$$

Pelo código, disponível no Anexo [5] - Q5_Exponencial.ipynb, $P(X < 4) = 0,1341$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

Como a compra das passagens aéreas é realizado com antecedência média de 28 dias, a probabilidade de que sejam compradas com 4 dias de ante antecedência será baixa, pois o valor é distante da média. Conclusivamente, $F_X(x) = 0$ se $x = 0$ e $F_X(x) \to 1$ quando $x \to \infty$, ou seja, é mais provável que os clientes comprem as passagens com antecedência do que próximo às viagens. O Gráfico da Figura 4 representa a Função Densidade de Probabilidade da Variável Analisada e ilustra esse comportamento.

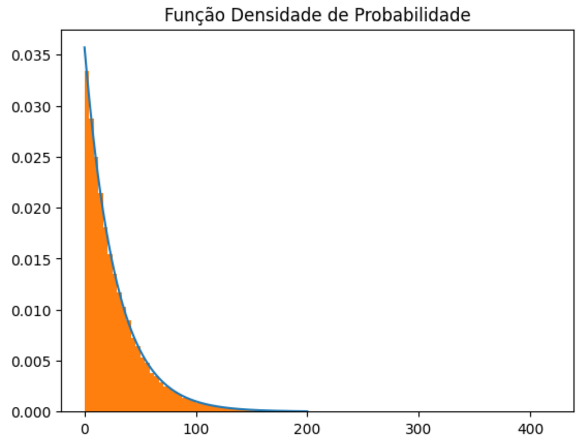



Figura 4: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

6. A Distribuição Discreta Geométrica conta o número de tentativas até o primeiro sucesso. A Função Massa de Probabilidade é dada por $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, em que $p$ representa a probabilidade de sucesso e $x$, o número de tentativas. Fazer um algoritmo para a geração das variáveis aleatórias geométricas e calcular a probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a primeira bola preta em uma urna com 30 bolas brancas e 20 bolas pretas.

   Pela solução analítica, a probabilidade de sucesso para se retirar uma das 20 bolas pretas em uma urna com 20 pretas + 30 brancas = 50 bolas é $p = \frac{20}{50} = 0,4$. Como a retirada das bolas inclui reposição, a probabilidade $p$ é constante.

   Para retirar a primeira bola preta na 6ª tentativa, tem-se a Função Massa de Probabilidade da Variável Aleatória X:

$$P(X = 6) = 0,4 \cdot (1 - 0,4)^{6-1} \;\therefore\; \mathbf{P(X = 6) = 0,0311}$$

   Pelo código, disponível no Anexo [6] - Q6_Geometrica.ipynb, $P(X = 6) = 0,0465$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

7. Utilizando o método da inversa, gerar amostras para a distribuição $f(x) = \frac{e^x}{e^2-1}$, $0 \le x \le 2$.

   Para encontrar a Função de Distribuição Cumulativa de $x$, tem-se:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^2 - 1}\, dt \;\to F_X(x) = \frac{e^x - 1}{e^2 - 1}$$

   Para a Inversa da função:

$$F_X(x)^{-1} = ln((e^2 - 1)x + 1)$$

Assim, as amostras geradas são um conjunto $X = F^{-1}(U)$, para $U$ uma Variável Uniforme $(0, 1)$. O Gráfico da Figura 5, gerado pelo código do Anexo - Q7_Inversa.ipynb, ilustra as amostras geradas por este método.

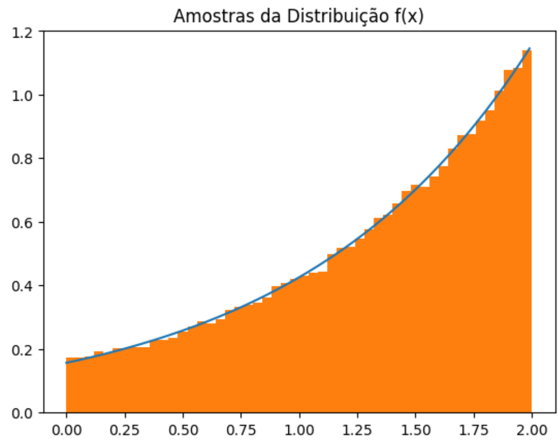



Figura 5: Distribuição das Amostras Geradas.

8. Utilizando o método da aceitação/rejeição, gerar amostras para a distribuição $f(x) = 1.5x^2, -1 < x < 1$. Plotar a pdf analítica e o histograma normalizado.

Para gerar amostras para a distribuição $f(x) = 1,5x^2, -1 < x < 1$, é definida uma Função Densidade de Probabilidade $g(x)$ que envolve $f(x)$ no intervalo. Essa Função é uma Distribuição Uniforme no intervalo $(-1, 1)$, ou seja $g(x) = \frac{1}{2}, -1 < x < 1$.

Seja $c$ uma constante tal que $f(x) \leq cg(x)\ \forall\ x$, ou seja, $c = \max \frac{f(x)}{g(x)}$. Os pontos $P_1(-1, 1.5)$ e $P_2(1, 1.5)$ representam os máximos da função nesse intervalo, de forma que $c = 1,5$.

Assim, será gerada uma Variável Aleatória Uniforme U no intervalo $(0, 1)$ e um $x$ qualquer será aceito se $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$. O Gráfico da Figura 6, gerado pelo código do Anexo [8] - Q8_Aceitacao.ipynb, representa a Função Densidade de Probabilidade e o Histograma Normalizado da Variável.

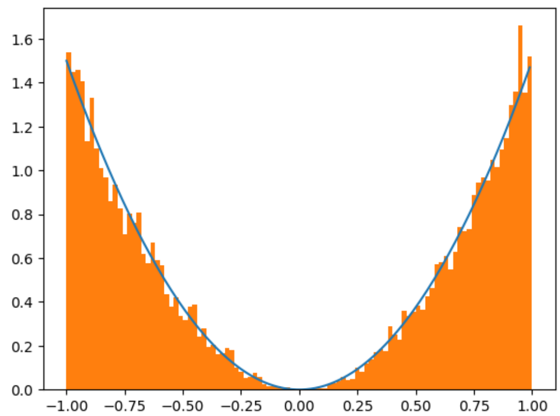



Figura 6: Função Densidade de Probabilidade para a Distribuição.

## Anexos

[1] Anexo A - Q1_GeradorLinear.ipynb

[2] Anexo B - Q2_Poisson.ipynb

[3] Anexo C - Q3_Binomial.ipynb

[4] Anexo D - Q4_Poisson.ipynb

[5] Anexo E - Q5_Exponencial.ipynb

[6] Anexo F - Q6_Geometrica.ipynb

[7] Anexo G - Q7_InversaGeometrica.ipynb

[8] Anexo H - Q8_Aceitacao.ipynb

[9] Anexo I - Github

**TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação**

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

1. Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis, 10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de obter duas bolas azuis e duas roxas ao tirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola não seja reposta?

2. Faça um programa para estimar a probabilidade de obter pelo menos uma face 6 ao lançar 5 dados.

3. Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 9, recebe de volta $r$ reais, caso contrário perde o investimento de 1 real. Suponha que $r = 10$. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo?

4. Resolva as seguintes integrais pelo Método da Integração de Monte Carlo e pelo Método da Integração por Importância.

   **(a)** $I = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ dx$

   **(b)** $I = \int_{-2}^{2} e^{x^2+x}\ dx$

   **(c)** $I = \int_0^{\infty} x(x^2+1)^{-2}\ dx$

# TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

## 1 Introdução

O artigo '*Physical Layer Security in Cognitive Radio Networks Using Improper Gaussian Signaling*' aborda o conceito de Rádio Cognitivo (CR), uma tecnologia que permite o uso mais eficiente do espectro ao aprender e se adaptar às condições do ambiente de transmissão. No compartilhamento de frequência entre Usuários Primários (PUs) licenciados e Usuários Secundários (SUs) não licenciados, é necessário garantir que a interferência nos PUs permaneça dentro de limites aceitáveis. Para proteger as redes CR contra ataques maliciosos e interceptações, técnicas de Segurança da Camada Física (PLS) são aplicadas, visando garantir maior informação mútua nos links legítimos em comparação com os links de interceptação.

O estudo analisa o desempenho de segurança de uma rede CR na qual os SUs estão sujeitos à interceptação e transmitem usando IGS visando melhorar a Probabilidade de Falha de Sigilo (SOP) dos SUs, enquanto mantém um nível aceitável de Qualidade de Serviço (QoS) nos PUs.

## 2 Modelo do Sistema

O sistema é formado por cinco nós, sendo um transmissor Alice (A) e um receptor Bob (B) dois nós secundários, uma Fonte (S) e um Destino (D) dois nós primários, e um interceptador Eve (E). No cenário proposto, os canais experimentam desvanecimento plano Rayleigh com $\lambda_{ij} = d_{ij}^{-\alpha}$, em que $d_{ij}$ é a distância entre os nós $i$ e $j$ e $\alpha$ o coeficiente de perda de percurso.

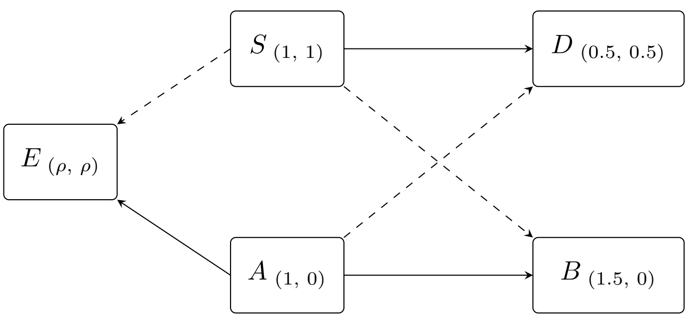
Um evento de interrupção de sigilo ocorre quando a informação mútua do link $A \to B$ é menor ou igual à do link entre $A \to E$, com probabilidade expressa por

$$\mathcal{O}_S = Pr\left[\frac{(1+\gamma_{ab})^2(1-C_{ab}^2)}{(1+\gamma_{ae})^2(1-C_{ae}^2)} < 2^{2R_a}\right],$$

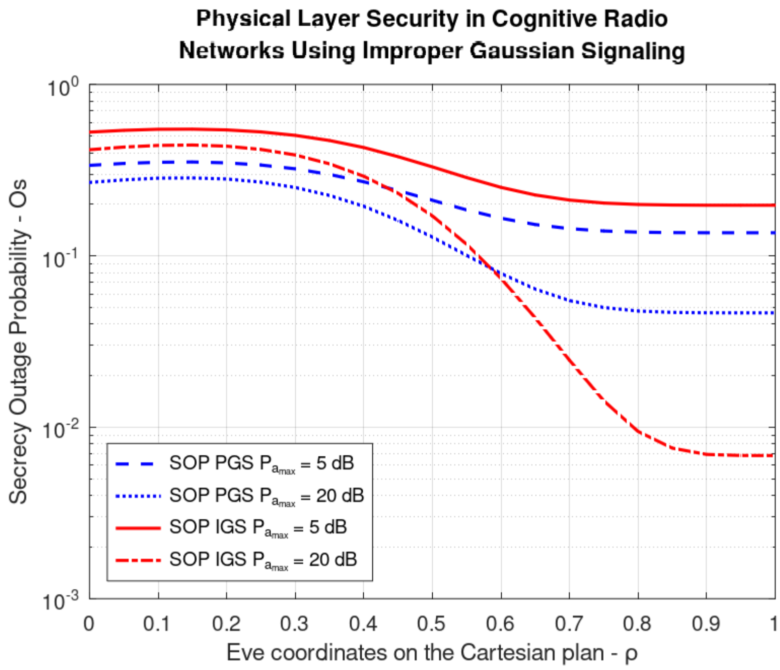
em que $\gamma_{ij}$ é a relação sinal-interferência-mais-ruído (SINR) apropriada para cada link, $R_a$ é a taxa de dados de sigilo alvo, em bpcu, e $C_{al}$ é o grau de impropriedade do sinal complexo de Alice.

## 3 Resultados Numéricos

Os resultados gerados consideram uma variância unitária de ruído ($N_0 = 1$), expoente de perda de percurso $\alpha = 4$, taxa de sigilo e alvo de PU $R_a = R_s = 1$ bpcu, potência de transmissão $P_s = 10$ dB. No plano cartesiano bidimensional, S, D, A e B estão localizados nas coordenadas marcadas na Figura 1. As coordenadas de Eve são definidas por $(\rho, \rho)$.




Por simulações de Monte Carlo, a Figura a seguir mostra a SOP versus $\rho$ enquanto Eve se move de $(0, 0)$ para $(1, 1)$ com incrementos de 0.1 em ambos os eixos simultaneamente.

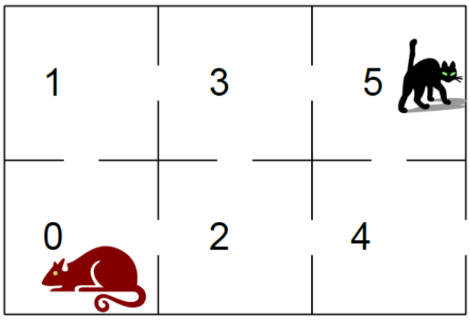



Conforme Eve se afasta de D, a SOP diminui tanto para a sinalização PGS quanto para a IGS. No entanto, quando $\rho > 0.6$, IGS alcança melhor desempenho do que PGS, pois pode alcançar valores mais baixos de SOP.

**TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação**

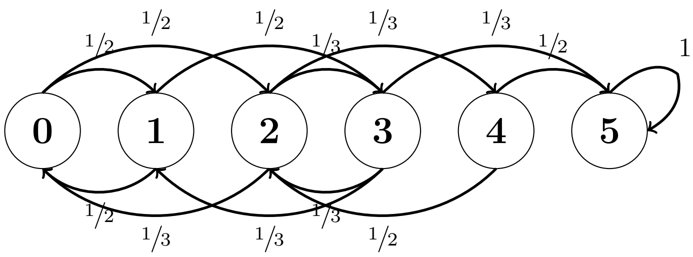

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931


1. Um labirinto é composto de 6 salas numeradas como mostrado na Figura 1. Um gato é colocado na sala 5 e lá permanece. Um rato é colocado na sala 0 no instante $t = 0$ e a cada hora o rato se cansa de permanecer na mesma sala e vai para uma das salas vizinhas com igual probabilidade. A decisão do rato independe do caminho que ele percorreu até então (note que o rato pode voltar para uma sala em que já esteve). Infelizmente, se o rato for para a sala 5 não sairá mais. Pede-se:




**(a)** O diagrama de transição de estados.

O diagrama de transição de estados para essa Cadeia de Markov é ilustrado na Figura 2, em que os estados representam as possíveis salas em que o rato pode estar.




**(b)** A matriz de transição de 1 passo.

Para a matriz de transição de estados são feitas as seguintes considerações a respeito da sala atual do rato, em que $p_{ij}$ é a probabilidade de transição da sala $i$ para a sala $j$:

- como o rato cansa de permanecer na mesma sala, $p_{ij} = 0$ se $i = j \neq 5$, ou seja, a diagonal principal da matriz.
- se está na sala 0, pode-se mover para as salas 1 ou 2 com $p_{01} = p_{02} = 1/2$;
- se está na sala 1, pode-se mover para as salas 0 ou 3 com $p_{10} = p_{13} = 1/2$;
- se está na sala 2, pode-se mover para as salas 0, 3 ou 4 com $p_{20} = p_{23} = p_{24} = 1/3$;
- se está na sala 3, pode-se mover para as salas 1, 2 ou 5 com $p_{31} = p_{32} = p_{35} = 1/3$;
- se está na sala 4, pode-se mover para as salas 2 ou 5 com $p_{42} = p_{45} = 1/2$;
- se está na sala 5, o rato não sairá mais, portanto, o estado é absorvente com $p_{55} = 1$.

Assim, a matriz $P$ de transição dos estados é:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{50} & p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**(c)** A probabilidade de o rato morrer após 3 horas.

Para que o rato morra após 3 horas, ele deve estar na sala 5 (onde está o gato) neste intervalo de tempo, ou seja, o rato deve transitar da sala inicial 0 para a sala 5 em 3 passos.

$$P(3) = P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,3472 & 0,4306 & 0 & 0 & 0,\bar{2} \\ 0,3472 & 0 & 0 & 0,3472 & 0,1389 & 0,1\bar{6} \\ 0,2870 & 0 & 0 & 0,2870 & 0,1481 & 0,2\bar{7} \\ 0 & 0,2315 & 0,2870 & 0 & 0 & 0,4815 \\ 0 & 0,1389 & 0,\bar{2} & 0 & 0 & 0,6389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a probabilidade de o rato morrer em 3 horas é $P_{05}(3) = 0,\bar{2}$.

**(d)** Número médio de passos para a absorção.

Seja a matriz $P$ reordenada como a seguir, em que $Q$ é a matriz dos estados transitórios, $R$ uma matriz formada pelos estados absorventes e $I$, a matriz identidade, de forma que o(s) estado(s) absorvente(s) seja(m) identificado(s) na(s) última(s) linha(s) e coluna(s) da matriz, criando, assim, uma matriz nula em P.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \qquad 5 \\ \left[ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array} \right] \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Seja $N$ uma matriz formada pelos números esperados de vezes que a cadeira de Markov está em um estado $e_j$ a partir de um estado $e_i$, de tal forma que $N = (I - Q)^{-1}$.

$$N = (I-Q)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

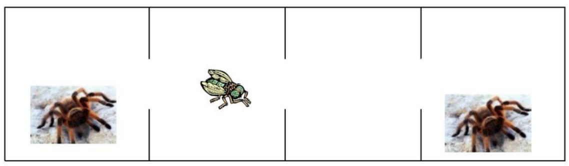
$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & -0,5 & 0 \\ -0,33 & 0 & 1 & -0,33 & -0,33 \\ 0 & -0,33 & -0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

O número médio de passos para a absorção é dado por $t = Nc$, em que $c$ é um vetor coluna formado por todos os elementos unitários. Um dado $t_i$ é o número médio de passos para absorção considerando o estado $i$ como inicial.

$$t = Nc = \begin{bmatrix} 2,8 & 2 & 2,4 & 1,8 & 0,8 \\ 2 & 2,67 & 2 & 2 & 0,67 \\ 1,6 & 1,33 & 2,8 & 1,6 & 0,93 \\ 1,2 & 1,33 & 1,6 & 2,2 & 0,53 \\ 0,8 & 0,67 & 1,4 & 0,8 & 1,47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,8 \\ 9,33 \\ 8,267 \\ 8,67 \\ 5,13 \end{bmatrix}$$

Notoriamente, os menores números de passos para absorção acontecem nas salas adjacentes à 5. Há duas salas como possibilidade de movimento em 4, implicando que $t_4$ no menor número de passos para absorção. Como o rato inicia na sala 0 no instante $t = 0$, o número médio de para absorção é 9,8 passos.

2. Uma caixa possui 4 compartimentos, como mostrado na Figura 3. No compartimento 0 há uma aranha, assim como no compartimento 3. Uma mosca pousa em um dos compartimentos. A cada minuto (se ela ainda não foi comida) a mosca decide se continua no mesmo compartimento ou se vai para um dos compartimentos vizinhos. A probabilidade de ficar no mesmo compartimento é $0,4$ e a probabilidade de ir para um compartimento vizinho é $0,6$ $(0,3$ para cada vizinho). Se a mosca vai para onde há uma aranha, ela não sai mais (fica presa na teia). Pede-se:

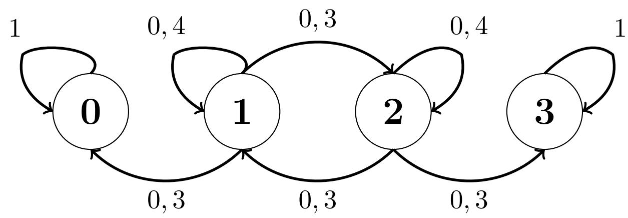


**(a)** A matriz de transição.

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**(b)** O diagrama de transição de estados.

O diagrama de transição de estados para essa Cadeia de Markov é ilustrado na Figura 4, em que os estados representam os possíveis compartimentos em que a mosca pode estar.




**(c)** Dado que a mosca pousou no compartimento 1, a probabilidade de ela cair em uma teia exatamente no terceiro minuto.

Para ser capturada na teia no terceiro minuto a partir do compartimento 1, há quatro possibilidades para o deslocamento da mosca:

- continuar no compartimento 1 no primeiro e no segundo minutos e transitar para o compartimento 0 no terceiro minuto;

- continuar no compartimento 1 no primeiro minuto, ir para 2 no segundo e para 3 no terceiro minuto;
- transitar para o compartimento 2 no primeiro minuto e retornar para 1 no segundo, transitando para o compartimento 0 no terceiro minuto.
- transitar para o compartimento 2 no primeiro minuto e continuar no segundo, transitando para o compartimento 3 no terceiro minuto.

Assim: $p = 0,4^2 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,3^2 + 0,3^3 + 0,3^2 \cdot 0,4 = 0,1470$.

**(d)** Número médio de passos para a absorção.

Seja a matriz $P$ reordenada como a seguir, em que $Q$ é a matriz dos estados transitórios, $R$ uma matriz formada pelos estados absorventes e $I$, a matriz identidade, de forma que o(s) estado(s) absorvente(s) seja(m) identificado(s) na(s) última(s) linha(s) e coluna(s) da matriz, criando, assim, uma matriz nula em P.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Seja $N$ uma matriz formada pelos números esperados de vezes que a cadeira de Markov está em um estado $e_j$ a partir de um estado $e_i$, de tal forma que $N = (I - Q)^{-1}$.

$$N = (I - Q)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix}$$

O número médio de passos para a absorção é dado por $t = Nc$, em que $c$ é um vetor coluna formado por todos os elementos unitários. Um dado $t_i$ é o número médio de passos para absorção considerando o estado $i$ como inicial.

$$t = Nc = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

**(e)** A probabilidade de ser absorvido associada a cada estado.

A probabilidade de a cadeia encerrar em um dos estados absorventes é um $B = NR$.

$$B = NR = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Neste caso há dois estados absorventes, com probabilidades de absorção definidas por $\pi_0$ e $\pi_4$, com $\pi_0 + \pi_4 = 1$, em que o estado absorvente depende do compartimento inicial da mosca, de forma que a probabilidade do estado absorvente será maior no compartimento mais próximo em relação ao compartimento inicial. De forma geral:

$$P^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, se a mosca pousar inicialmente no compartimento 1 tem-se $\pi_0 = 2/3$ e $\pi_4 = 1/3$. Se a mosca pousar inicialmente no compartimento 2 tem-se $\pi_0 = 1/3$ e $\pi_4 = 2/3$. Em ambos os casos $\pi_0 + \pi_4 = 1$.