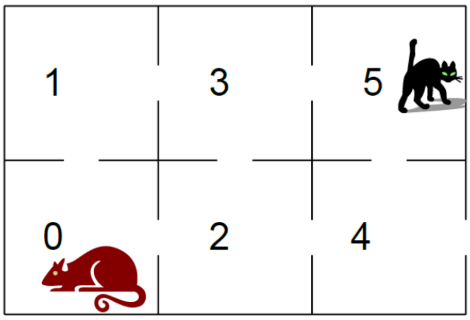
TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

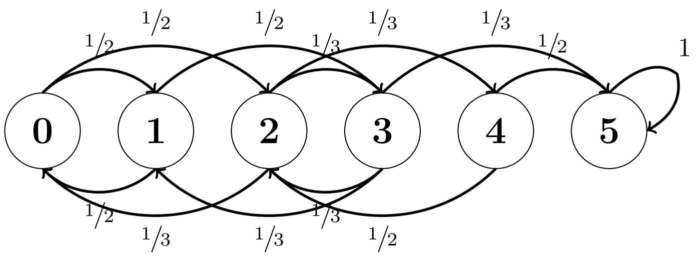
Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

1. Um labirinto é composto de 6 salas numeradas como mostrado na Figura 1. Um gato é colocado na sala 5 e lá permanece. Um rato é colocado na sala 0 no instante $t = 0$ e a cada hora o rato se cansa de permanecer na mesma sala e vai para uma das salas vizinhas com igual probabilidade. A decisão do rato independe do caminho que ele percorreu até então (note que o rato pode voltar para uma sala em que já esteve). Infelizmente, se o rato for para a sala 5 não sairá mais. Pede-se:



(a) O diagrama de transição de estados.

O diagrama de transição de estados para essa Cadeia de Markov é ilustrado na Figura 2, em que os estados representam as possíveis salas em que o rato pode estar.



(b) A matriz de transição de 1 passo.

Para a matriz de transição de estados são feitas as seguintes considerações a respeito da sala atual do rato, em que p_{ij} é a probabilidade de transição da sala i para a sala j:

- como o rato cansa de permanecer na mesma sala, $p_{ij} = 0$ se $i = j \neq 5$, ou seja, a diagonal principal da matriz.
- se está na sala 0, pode-se mover para as salas 1 ou 2 com $p_{01} = p_{02} = 1/2$;
- se está na sala 1, pode-se mover para as salas 0 ou 3 com $p_{10} = p_{13} = 1/2$;
- se está na sala 2, pode-se mover para as salas 0, 3 ou 4 com $p_{20} = p_{23} = p_{24} = 1/3$;
- se está na sala 3, pode-se mover para as salas 1, 2 ou 5 com $p_{31} = p_{32} = p_{35} = 1/3$;
- se está na sala 4, pode-se mover para as salas 2 ou 5 com $p_{42} = p_{45} = 1/2$;
- se está na sala 5, o rato não sairá mais, portanto, o estado é absorvente com $p_{55} = 1$.

Assim, a matriz P de transição dos estados é:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{50} & p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) A probabilidade de o rato morrer após 3 horas.

Para que o rato morra após 3 horas, ele deve estar na sala 5 (onde está o gato) neste intervalo de tempo, ou seja, o rato deve transitar da sala inicial 0 para a sala 5 em 3 passos.

$$P(3) = P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,3472 & 0,4306 & 0 & 0 & 0,\bar{2} \\ 0,3472 & 0 & 0 & 0,3472 & 0,1389 & 0,1\bar{6} \\ 0,2870 & 0 & 0 & 0,2870 & 0,1481 & 0,2\bar{7} \\ 0 & 0,2315 & 0,2870 & 0 & 0 & 0,4815 \\ 0 & 0,1389 & 0,\bar{2} & 0 & 0 & 0,6389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a probabilidade de o rato morrer em 3 horas é $P_{05}(3) = 0,\bar{2}$.

(d) Número médio de passos para a absorção.

Seja a matriz P reordenada como a seguir, em que Q é a matriz dos estados transitórios, R uma matriz formada pelos estados absorventes e I, a matriz identidade, de forma que o(s) estado(s) absorvente(s) seja(m) identificado(s) na(s) última(s) linha(s) e coluna(s) da matriz, criando, assim, uma matriz nula em P.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array} \right] \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Seja N uma matriz formada pelos números esperados de vezes que a cadeira de Markov está em um estado e_j a partir de um estado e_i, de tal forma que $N = (I - Q)^{-1}$.

$$N = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

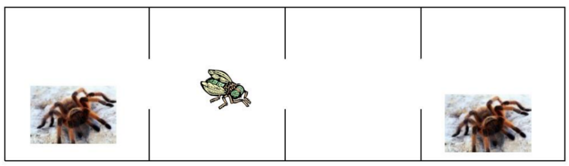
$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & -0,5 & 0 \\ -0,33 & 0 & 1 & -0,33 & -0,33 \\ 0 & -0,33 & -0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

O número médio de passos para a absorção é dado por $t = Nc$, em que c é um vetor coluna formado por todos os elementos unitários. Um dado t_i é o número médio de passos para absorção considerando o estado i como inicial.

$$t = Nc = \begin{bmatrix} 2,8 & 2 & 2,4 & 1,8 & 0,8 \\ 2 & 2,67 & 2 & 2 & 0,67 \\ 1,6 & 1,33 & 2,8 & 1,6 & 0,93 \\ 1,2 & 1,33 & 1,6 & 2,2 & 0,53 \\ 0,8 & 0,67 & 1,4 & 0,8 & 1,47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,8 \\ 9,33 \\ 8,267 \\ 8,67 \\ 5,13 \end{bmatrix}$$

Notoriamente, os menores números de passos para absorção acontecem nas salas adjacentes à 5. Há duas salas como possibilidade de movimento em 4, implicando que t_4 no menor número de passos para absorção. Como o rato inicia na sala 0 no instante $t = 0$, o número médio de para absorção é 9,8 passos.

2. Uma caixa possui 4 compartimentos, como mostrado na Figura 3. No compartimento 0 há uma aranha, assim como no compartimento 3. Uma mosca pousa em um dos compartimentos. A cada minuto (se ela ainda não foi comida) a mosca decide se continua no mesmo compartimento ou se vai para um dos compartimentos vizinhos. A probabilidade de ficar no mesmo compartimento é $0,4$ e a probabilidade de ir para um compartimento vizinho é $0,6$ ($0,3$ para cada vizinho). Se a mosca vai para onde há uma aranha, ela não sai mais (fica presa na teia). Pede-se:

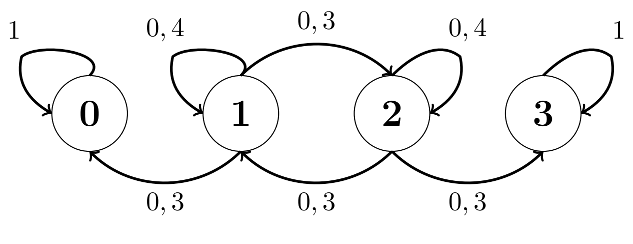


(a) A matriz de transição.

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) O diagrama de transição de estados.

O diagrama de transição de estados para essa Cadeia de Markov é ilustrado na Figura 4, em que os estados representam os possíveis compartimentos em que a mosca pode estar.



(c) Dado que a mosca pousou no compartimento 1, a probabilidade de ela cair em uma teia exatamente no terceiro minuto.

Para ser capturada na teia no terceiro minuto a partir do compartimento 1, há quatro possibilidades para o deslocamento da mosca:

- continuar no compartimento 1 no primeiro e no segundo minutos e transitar para o compartimento 0 no terceiro minuto;

- continuar no compartimento 1 no primeiro minuto, ir para 2 no segundo e para 3 no terceiro minuto;
- transitar para o compartimento 2 no primeiro minuto e retornar para 1 no segundo, transitando para o compartimento 0 no terceiro minuto.
- transitar para o compartimento 2 no primeiro minuto e continuar no segundo, transitando para o compartimento 3 no terceiro minuto.

Assim: $p = 0,4^2 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,3^2 + 0,3^3 + 0,3^2 \cdot 0,4 = 0,1470$.

(d) Número médio de passos para a absorção.

Seja a matriz P reordenada como a seguir, em que Q é a matriz dos estados transitórios, R uma matriz formada pelos estados absorventes e I, a matriz identidade, de forma que o(s) estado(s) absorvente(s) seja(m) identificado(s) na(s) última(s) linha(s) e coluna(s) da matriz, criando, assim, uma matriz nula em P.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Seja N uma matriz formada pelos números esperados de vezes que a cadeira de Markov está em um estado e_j a partir de um estado e_i, de tal forma que $N = (I - Q)^{-1}$.

$$N = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix}$$

O número médio de passos para a absorção é dado por $t = Nc$, em que c é um vetor coluna formado por todos os elementos unitários. Um dado t_i é o número médio de passos para absorção considerando o estado i como inicial.

$$t = Nc = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

(e) A probabilidade de ser absorvido associada a cada estado.

A probabilidade de a cadeia encerrar em um dos estados absorventes é um $B = NR$.

$$B = NR = \begin{bmatrix} 2.22 & 1.11 \\ 1.11 & 2.22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Neste caso há dois estados absorventes, com probabilidades de absorção definidas por π_0 e π_4, com $\pi_0 + \pi_4 = 1$, em que o estado absorvente depende do compartimento inicial da mosca, de forma que a probabilidade do estado absorvente será maior no compartimento mais próximo em relação ao compartimento inicial. De forma geral:

$$P^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, se a mosca pousar inicialmente no compartimento 1 tem-se $\pi_0 = 2/3$ e $\pi_4 = 1/3$. Se a mosca pousar inicialmente no compartimento 2 tem-se $\pi_0 = 1/3$ e $\pi_4 = 2/3$. Em ambos os casos $\pi_0 + \pi_4 = 1$.