TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

1. Carros entram em uma fila de pedágio de acordo com um processo de Poisson de taxa 3 carros a cada cinco minutos, o tempo de atendimento segue uma variável exponencial de média 1 minuto.

   Seja um sistema de filas do tipo MM1 com $\lambda = {}^{3}/_{5}$ carro/minuto e $E[t_s] = 1$ minuto. O fator de serviço deste sistema de filas é $\rho = \lambda \cdot E[t_s] = 0,6 \cdot 1 = 0,6$. Como $\rho < 1$, o sistema é estável.

   Para esse modelo, o número médio de elementos na fila e o tempo médio de sistema podem ser expressos por 1 e 2, respectivamente, em que $\mu = {}^{1}/_{E[t_s]}$ é a taxa de atendimento do sistema.

$$E[w] = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (1) \qquad\qquad E[t_q] = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (2)$$

   (a) qual é o tempo médio dos carros no sistema?

$$E[t_q] = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1-0.6} \;\therefore\; \mathbf{E[t_q] = 2,5\ minutos}$$

   (b) qual é o número médio de carros na fila?

$$E[w] = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,6^2}{1-0,6} \;\therefore\; \mathbf{E[w] = 0,9\ carros}$$

2. Um comutador de pacotes possui uma linha de saída e recebe, em média, 40 pacotes por segundo. Cada pacote tem, em média, 5.000 bits de comprimento, com distribuição exponencial. A linha de saída do comutador tem taxa de 500 kbps.

   Seja um sistema de filas do tipo MM1 com $\lambda = 40$ pacotes/segundo. A média do tempo de serviço do sistema é função do comprimento médio dos pacotes e da taxa da linha de transmissão, com $E[t_s] = {}^{n}/_{R} = {}^{5 \cdot 10^3}/_{500 \cdot 10^3} = 0,01$. O fator de serviço deste sistema de filas é $\rho = \lambda \cdot E[t_s] = 40 \cdot 0,01 = 0,4$. Como $\rho < 1$, o sistema é estável.

   Para esse modelo, os tempos médios de permanência na fila e no sistema podem ser expressos segundo o Teorema de Little por 3 e 4, respectivamente, em que $\mu = {}^{1}/_{E[t_s]}$ é a taxa de atendimento do sistema.

$$E[t_w] = \frac{E[w]}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} \qquad (3) \qquad\qquad E[t_q] = \frac{1}{\mu-\lambda} = E[t_s] + E[t_w] \qquad (4)$$

   (a) qual é o tempo médio de espera na fila?

$$E[t_w] = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0,4^2}{40(1-0,4)} \;\therefore\; \mathbf{E[t_w] = 6,\overline{6}\ ms}$$

   (b) qual é o tempo médio de permanência de um pacote no comutador?

$$E[t_q] = E[t_w] + E[t_s] = 6,\overline{6} \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3} \;\therefore\; \mathbf{E[t_q] = 16,\overline{6}\ ms}$$

3. Um comutador de pacotes recebe em média 200 pacotes/segundo, cada um com um comprimento médio de 128 bytes. O comutador possui uma única linha de saída com capacidade de 256 kbps. Considere um *buffer* com $\{1, 5, 10, 15\}$ posições na fila. Qual a probabilidade de bloqueio, número médio de elementos e tempo médio no sistema?

Seja um sistema de filas do tipo MM1J, em que $J \in \{1, 5, 10, 15\}$. Neste caso, como há capacidade máxima no sistema de $J+1$ elementos, o elemento $J+2$ é bloqueado e, portanto, $P_b = P_{J+1}$ expressa a probabilidade de bloqueio do sistema.

Para o sistema em questão, tem-se $\lambda = 200$ pacotes/segundo e a média do tempo de serviço do sistema é função do comprimento médio dos pacotes e da taxa da linha de transmissão, com $E[t_s] = {}^{n}/_{R} = {}^{128 \cdot 8}/_{256 \cdot 10^3} = 0,004$. O fator de serviço deste sistema de filas é $\rho = \lambda \cdot E[t_s] = 200 \cdot 0,004 = 0,8$. Como $\rho < 1$, o sistema é estável.

Para esse modelo, o número e tempo médios de permanência no sistema podem ser expressos segundo o Teorema de Little em função de P_b por 5 e 6, respectivamente.

$$E[q] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(J+2) \cdot \rho^{J+2}}{1-\rho^{J+2}} \qquad (5)$$

$$E[t_q] = \frac{E[q]}{\lambda(1-P_b)} \qquad (6)$$

A Tabela 1 apresenta os parâmetros das Equações 5 e 6 e o bloqueio para os valores de J.

Tabela 1: Parâmetros do sistema para as capacidades do *buffer*.

J	$E[q]$	$E[t_q]$	P_b
1	$0,8525$	$5,\overline{7}$ms	$0,262295$
5	$2,2434$	$11,473$ms	$0,066341$
10	$3,1145$	$15,865$ms	$0,018448$
15	$3,6084$	$18,146$ms	$0,005759$

Notadamente, à medida que J aumenta o sistema pode armazenar mais elementos em espera pelo atendimento, o que aumenta $E[q]$ e $E[t_q]$ e reduz a probabilidade de bloqueio P_b. Os Gráficos das Figuras 1 a 3 mostram esse efeito, com os pontos destacando a Tabela 1.

Figura 1: Número médio de elementos no sistema em função do número de servidores J.

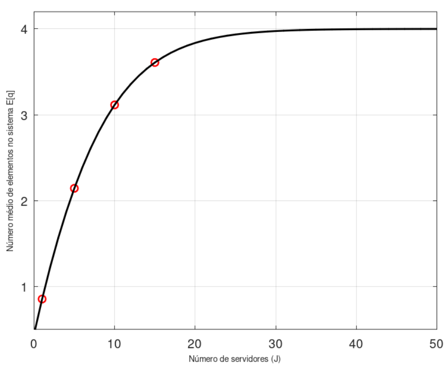
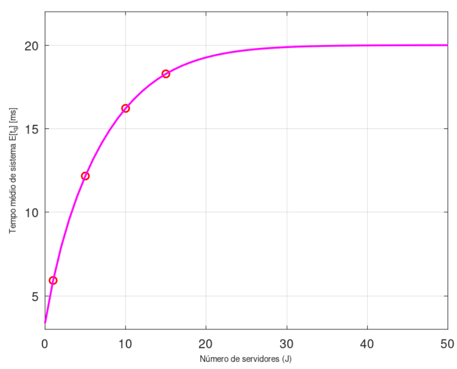


Figura 2: Tempo médio de sistema em função do número de servidores J.

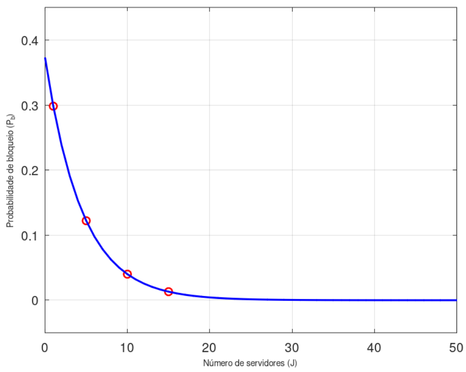


Quando $J \to \infty$ o sistema se comporta como uma fila MM1, em que os valores estabilizados para $E[q]$ e $E[t_q]$ podem ser calculados por 2 e o Teorema de Little. Neste caso, $P_b \to 0$, uma vez que a capacidade da fila é infinita.

$$E[t_q] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{250-200} \ \therefore \ \mathbf{E[t_q] = 20 \ ms}$$

$$E[q] = E[t_q] \cdot \lambda = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \ \therefore \ \mathbf{E[q] = 4 \ pacotes}$$

Figura 3: Probabilidade de bloqueio do sistema em função do número de servidores J.



4. Um nó de uma rede de computadores possui *buffer* infinito. A chegada das mensagens é Poissoniana com taxa 1 mensagem/segundo e o tamanho médio das mensagens é igual a 2.000 bits. A capacidade do meio de transmissão é de 10.000 bps. Determine o tempo médio que uma mensagem permanece no nó supondo que o comprimento das mensagens:

Seja um sistema de filas do tipo MG1 em que os elementos são atendidos segundo uma distribuição genérica de probabilidade. Para esse sistema, tem-se $\lambda = 1$ mensagem/segundo, $n = 2000$ bits e $R = 10$ kbps.

(a) é constante.

Se n é constante e todos os pacotes possuem o mesmo tempo de atendimento $E[t_s]$, tem-se que a variância do tempo de atendimento $\sigma^2_{t_s} = 0$, logo o segundo momento é o quadrado da média do tempo de serviço $E[t_s^2] = (E[t_s])^2 = {}^1\!/\!_{\mu^2}$.

A taxa de atendimento é função do tamanho das mensagens e da taxa de atendimento do sistema, com $\mu = {}^R\!/\!_n = {}^{10\cdot10^3}\!/\!_{2\cdot10^3} = 5$ mensagens/segundo. Assim, $E[t_s^2] = (E[t_s])^2 = {}^1\!/\!_{25}$ e $\rho = {}^\lambda\!/\!_\mu = {}^1\!/\!_5$.

O tempo total que uma mensagem permanece no nó é a soma do tempo de fila com o tempo de atendimento:

$$E[t_q] = E[t_w] + E[t_s] = \frac{\lambda \cdot E[t_s^2]}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$
$$= \frac{1 \cdot {}^1\!/\!_{25}}{2(1-0,2)} + \frac{1}{5} \;\therefore\; \mathbf{E[t_q] = 225\ ms}$$

(b) tem distribuição exponencial.

Se n é a média do tamanho das mensagens, tem-se que a variância é a diferença entre o segundo momento e o quadrado da média do tempo de serviço $\sigma^2_{t_s} = E[t_s^2] - (E[t_s])^2$. A taxa de atendimento e o fator de serviço do serviço continuam os mesmos do caso com n constante, assim $E[t_s^2] = {}^2\!/\!_{\mu^2} = {}^2\!/\!_{25}$.

O tempo total que uma mensagem permanece no nó é a soma do tempo de fila com o tempo de atendimento:

$$E[t_q] = E[t_w] + E[t_s] = \frac{\lambda \cdot E[t_s^2]}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$
$$= \frac{1 \cdot {}^2\!/\!_{25}}{2(1-0,2)} + \frac{1}{5} \;\therefore\; \mathbf{E[t_q] = 250\ ms}$$