TP547 - Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Instituto Nacional de Telecomunicações
Mestrado em Telecomunicações
Igor Gonçalves de Souza - 931

O repositório com os códigos mencionados neste trabalho pode ser acessado no Anexo [9].

1. Mostre, usando análise e simulação, que o Gerador de Números Aleatórios definido por $x_{i+1} = 5x_i \mod (7)$ é um gerador de período completo. Determine a sequência gerada para sementes $x_0 = 4$ e $x_0 = 7$. Compare as sequências e comente os resultados.

   Considerando $x_0 = 4$ como semente inicial, observa-se um período completo $T = \{4, 6, 2, 3, 1, 5\}$. Como este é um Gerador Congruente Linear, o período máximo é $7 - 1 = 6$ elementos. A Figura 1 ilustra as amostras geradas por essa semente inicial.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 \cdot x_0 \mod (7) = 5 \cdot 4 \mod (7) \therefore \mathbf{x_1 = 6} \\
x_2 &= 5 \cdot x_1 \mod (7) = 5 \cdot 6 \mod (7) \therefore \mathbf{x_2 = 2} \\
x_3 &= 5 \cdot x_2 \mod (7) = 5 \cdot 2 \mod (7) \therefore \mathbf{x_3 = 3} \\
x_4 &= 5 \cdot x_3 \mod (7) = 5 \cdot 3 \mod (7) \therefore \mathbf{x_4 = 1} \\
x_5 &= 5 \cdot x_4 \mod (7) = 5 \cdot 1 \mod (7) \therefore \mathbf{x_5 = 5} \\
x_6 &= 5 \cdot x_5 \mod (7) = 5 \cdot 5 \mod (7) \therefore \mathbf{x_6 = 4}
\end{aligned}$$

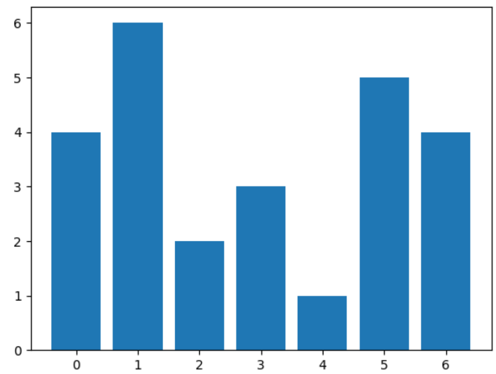

Figura 1: Sequência para Semente Inicial $x_0 = 4$.

   Para a semente inicial $x_0 = 7$, é observada a sequência:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5 \cdot x_0 \mod (7) \rightarrow x_1 = 5 \cdot 7 \mod (7) \therefore \mathbf{x_1 = 0} \\
x_2 &= 5 \cdot x_1 \mod (7) \rightarrow x_2 = 5 \cdot 0 \mod (7) \therefore \mathbf{x_2 = 0}
\end{aligned}$$

   Logo, para a semente inicial $x_0 = 7$ observa-se uma sequência de comprimento 1. Tal fato ocorre porque a semente inicial é um múltiplo de 7 (mod do gerador), assim o clico tem todas as iterações seguintes iguais e não possui período completo.

   O código para este gerador está disponível no Anexo [1] - Q1_GeradorLinear.ipynb.

2. O número de chamadas para o *help-desk* de uma empresa tem uma distribuição de Poisson com 60 chamadas por um período de 10 horas. Seja C uma Variável Aleatória para o número de chamadas por hora, encontre:

   (a) a probabilidade de o suporte técnico não receber chamada em uma determinada hora.

   Pela solução analítica, a média da Distribuição de Poisson deve ser ajustada para um período de uma hora. Assim, se $\alpha = 60$ chamadas/10 horas $\rightarrow \alpha = 6$ chamadas/hora. Aplicando a Distribuição de Poisson:

$$P(C = c) = \frac{\alpha^c \cdot e^{-\alpha}}{c!} \therefore P(C = 0) = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-6}}{1} = 0,00248$$

   Pelo código, disponível no Anexo [2] - Q2_Poisson.ipynb, $P(C = 0) = 0,0026$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

   Dada a média $\alpha = 6$ chamadas/hora, a probabilidade de nenhuma chamada ser atendida nesse intervalo de tempo será baixa, o que justifica o valor calculado.

(b) a probabilidade de que o suporte técnico receba menos de oito chamadas em uma determinada hora.

Assumindo uma Variável Aleatória Discreta como modelo para C, a Função de Distribuição Cumulativa (Fdc) da Variável será:

$$F_C(c) = P(C < 8) = \sum_{c=0}^{7} \frac{\alpha^c \cdot e^{-\alpha}}{c!} = P(C = 0) + e^{-\alpha} \cdot \sum_{c=1}^{7} \frac{\alpha^c}{c!}$$

Pela solução analítica, aplicando a Distribuição de Poisson para o mesmo valor $\alpha = 6$ chamadas/hora:

$$\begin{aligned} P(C < 8) &= 0,0025 + e^{-6} \cdot \left(\frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} + \frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} \right) \\ &= 0,0025 + 0,0149 + 0,0446 + 0,0892 + 0,1339 + 0,1606 + 0,1606 + 0,1377 \\ &\therefore\ \mathbf{P(C < 8) = 0,7440} \end{aligned}$$

Pelo mesmo código anterior, $P(C < 8) = 0,7436$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Dada a média $\alpha = 6$ chamadas/hora, a probabilidade de atender $x = 8$ chamadas/hora será alta, pois é valor próximo à média α, o que justifica o valor calculado.

(c) o número médio de chamadas por hora, E[C].

O número médio de chamada por hora é $\mathbf{E[C]} = \alpha =$ **6 chamadas**.

(d) a variância de C.

Por definição, a variância, σ_C^2, segundo Poisson, é igual a sua média. Logo, $\boldsymbol{\sigma_C^2} \triangleq \alpha =$ **6 chamadas²**.

(e) o desvio padrão de C.

Por definição, o desvio padrão, σ_C, é a raiz quadrada da variância: $\sigma_C \triangleq \sqrt{\sigma_C^2}$. Logo, $\boldsymbol{\sigma_C = \sqrt{6} \approx 2,4495}$ **chamadas**.

3. Um fabricante de pistões de metal descobre que, em média, 15% de seus pistões são rejeitados porque são super ou subdimensionados. Qual é a probabilidade de um lote de 8 pistões conter:

(a) não mais que 2 rejeitados?

Cada pistão fabricado segue uma Distribuição de Bernoulli em que a probabilidade de ser rejeitado é q. Sendo X uma Variável Aleatória Discreta que modela a quantidade x de pistões rejeitados em um lote de n pistões produzidos, a Função Massa de Probabilidade (fmp) de X é segue uma Distribuição Binomial:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot q^x \cdot (1 - q)^{n-x},$$

em que $(1 - q)$ é a probabilidade de o pistão não ser rejeitado e $(n - x)$ o número de pistões não rejeitados.

Pela solução analítica, é observada uma Distribuição Binomial com $n = 8$ repetições de Bernoulli, em que $q = 0,15$. A Função de Distribuição Cumulativa (Fdc) da Variável Aleatória X será:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{8}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^6 \\ &= 0,2725 + 0,3847 + 0,2376\ \therefore\ \mathbf{P(X \leq 2) = 0,8948} \end{aligned}$$

Pelo código, disponível no Anexo [3] - Q3_Binomial.ipynb, $P(X \leq 2) = 0,8954$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

Considerando a probabilidade de o pistão ser rejeitado e a quantidade produzida, tem-se que $nq = 0,15 \cdot 8 = 1,2$ pistões serão rejeitados, em média. Assim, até 2 pistões rejeitados é uma probabilidade alta, dada uma taxa de rejeição próxima à média.

(b) pelo menos 6 rejeitados?

Pela solução analítica, assumindo que, no máximo, todos os 8 pistões produzidos serão rejeitados, a Fdc da Variável Aleatória X será:

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) \\ &= \binom{8}{6} \cdot 0,15^6 \cdot 0,85^2 + \binom{8}{7} \cdot 0,15^7 \cdot 0,85^1 + \binom{8}{8} \cdot 0,15^8 \cdot 0,85^0 \\ &= 2,304 \cdot 10^{-4} + 1,162 \cdot 10^{-5} + 2,563 \cdot 10^{-7} \;\therefore\; \mathbf{P(X \geq 6) = 2,423 \cdot 10^{-4}} \end{aligned}$$

Pelo mesmo código anterior, $P(C \geq 6) = 0,00026$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

Assumindo a mesma taxa de rejeição dos pistões calculada no item anterior, $np = 1,2$, é notável que a probabilidade de serem rejeitados 6 pistões, taxa bem elevada em relação à média, será baixa, praticamente nula.

(c) traçar o histograma da variável analisada.

O Histograma da Figura 2 representa a distribuição da quantidade de pistões rejeitados.

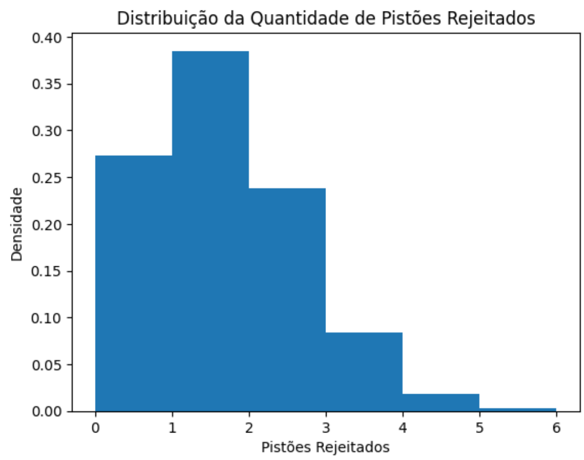

Figura 2: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

Como afirmado anteriormente, nota-se uma concentração maior da quantidade de pistões rejeitados em torno da média np.

4. Se ocorrerem falhas de energia elétrica de acordo com uma distribuição de Poisson com uma média de 6 falhas a cada duas semanas, calcule a probabilidade de que haverá ao menos 2 falhas durante uma semana específica. Traçar o histograma da variável analisada.

Seja α a média de falhas de energia elétrica em um dado período de duas semanas. Se $\alpha = 6$ falhas/2 semanas $\rightarrow \alpha = 3$ falhas/semana.

Se X é a Variável Aleatória Discreta que modela o número de falhas de energia elétrica por semana, a Função de Distribuição Cumulativa de X, pela Probabilidade Complementar, será:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

Se X segue uma Distribuição de Poisson, a Função Massa de Probabilidade de de X é:

$$P(X = x) = \frac{\alpha^x \cdot e^{-\alpha}}{x!}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - \left(\frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} \right) \\ &= 1 - (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}) = 1 - 0,1991 \\ &\therefore \mathbf{P(X \geq 2) = 0,8009} \end{aligned}$$

Pelo código, disponível no Anexo [4] - Q4_Poisson.ipynb, $P(X \geq 2) = 0,8018$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0, 1)$.

Se a media $\alpha = 3$ falhas/semana, a probabilidade de ao menos 2 falhas/semana é um valor elevado, uma vez que a taxa de falhas/semanas é um valor próximo à media da Distribuição.

A Figura 3 representa o Histograma da distribuição da quantidade de falhas em uma semana.

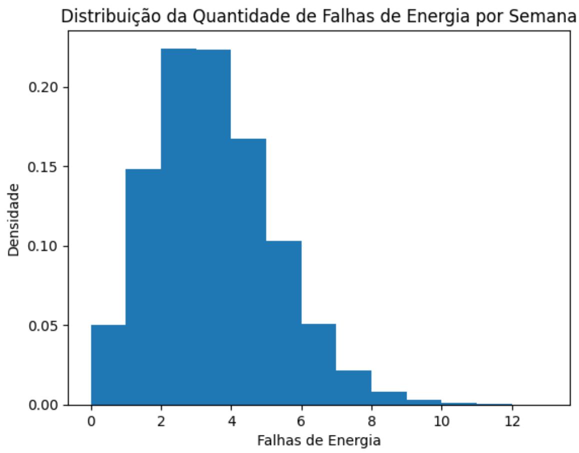

Figura 3: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

5. O número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas pode ser modelado por uma Distribuição Exponencial com o tempo médio igual a 28 dias. Encontre a probabilidade de um viajante comprar uma passagem com menos de 4 dias de antecedência. Traçar a Função Densidade de Probabilidade da variável analisada.

   Se X é a Variável Aleatória Contínua que modela o número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas com média λ, a Função Densidade de Probabilidade será:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Já a Função de Distribuição Cumulativa de X, que indica a probabilidade de a Variável Aleatória X assumir um valor menor ou igual a x, é:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Dado que X é uma Variável Aleatória Contínua, $P(X \leq x) = P(X < x)$, uma vez que $P(X = x) = 0$.

Se os clientes compram as passagens aéreas com 28 dias de antecedência, em média, a ocorrência dos eventos é modelada segundo uma Distribuição de Poisson e o Tempo Médio de Ocorrência entre os eventos é uma Distribuição Exponencial, com $\lambda = \frac{1}{28}$. Assim:

$$P(X < 4) = F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{28} \cdot\ 4} \;\therefore\; \mathbf{P(X < 4) = 0,1331}$$

Pelo código, disponível no Anexo [5] - Q5_Exponencial.ipynb, $P(X < 4) = 0,1341$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

Como a compra das passagens aéreas é realizado com antecedência média de 28 dias, a probabilidade de que sejam compradas com 4 dias de ante antecedência será baixa, pois o valor é distante da média. Conclusivamente, $F_X(x) = 0$ se $x = 0$ e $F_X(x) \to 1$ quando $x \to \infty$, ou seja, é mais provável que os clientes comprem as passagens com antecedência do que próximo às viagens. O Gráfico da Figura 4 representa a Função Densidade de Probabilidade da Variável Analisada e ilustra esse comportamento.

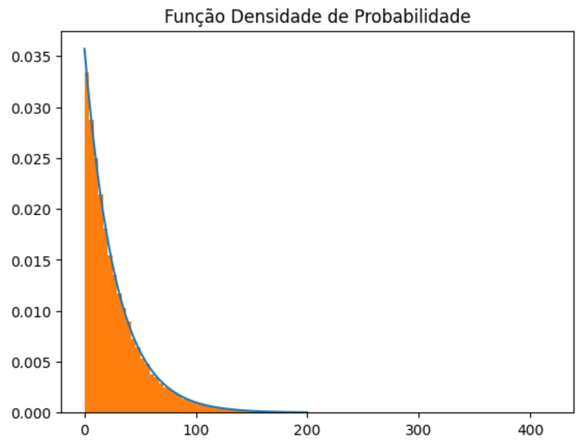

Figura 4: Distribuição dos Pistões Rejeitados.

6. A Distribuição Discreta Geométrica conta o número de tentativas até o primeiro sucesso. A Função Massa de Probabilidade é dada por $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, em que p representa a probabilidade de sucesso e x, o número de tentativas. Fazer um algoritmo para a geração das variáveis aleatórias geométricas e calcular a probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a primeira bola preta em uma urna com 30 bolas brancas e 20 bolas pretas.

   Pela solução analítica, a probabilidade de sucesso para se retirar uma das 20 bolas pretas em uma urna com 20 pretas + 30 brancas = 50 bolas é $p = \frac{20}{50} = 0,4$. Como a retirada das bolas inclui reposição, a probabilidade p é constante.

   Para retirar a primeira bola preta na 6ª tentativa, tem-se a Função Massa de Probabilidade da Variável Aleatória X:

$$P(X = 6) = 0,4 \cdot (1 - 0,4)^{6-1} \;\therefore\; \mathbf{P(X = 6) = 0,0311}$$

   Pelo código, disponível no Anexo [6] - Q6_Geometrica.ipynb, $P(X = 6) = 0,0465$ para um conjunto com 100.000 amostras uniformes $(0,1)$.

7. Utilizando o método da inversa, gerar amostras para a distribuição $f(x) = \frac{e^x}{e^2-1}$, $0 \leq x \leq 2$.

   Para encontrar a Função de Distribuição Cumulativa de x, tem-se:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^2 - 1}\, dt \;\to F_X(x) = \frac{e^x - 1}{e^2 - 1}$$

   Para a Inversa da função:

$$F_X(x)^{-1} = ln((e^2 - 1)x + 1)$$

Assim, as amostras geradas são um conjunto $X = F^{-1}(U)$, para U uma Variável Uniforme $(0, 1)$. O Gráfico da Figura 5, gerado pelo código do Anexo - Q7_Inversa.ipynb, ilustra as amostras geradas por este método.

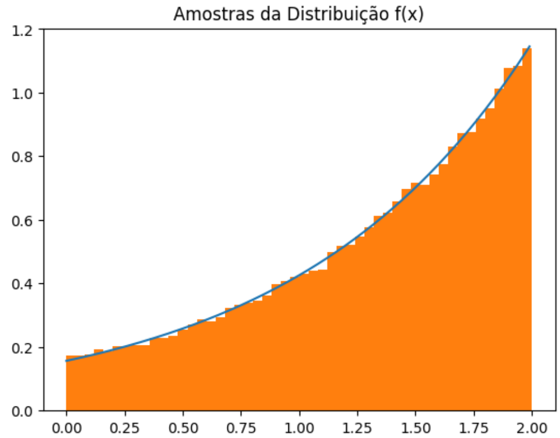

Figura 5: Distribuição das Amostras Geradas.

8. Utilizando o método da aceitação/rejeição, gerar amostras para a distribuição $f(x) = 1.5x^2, -1 < x < 1$. Plotar a pdf analítica e o histograma normalizado.

   Para gerar amostras para a distribuição $f(x) = 1,5x^2, -1 < x < 1$, é definida uma Função Densidade de Probabilidade $g(x)$ que envolve $f(x)$ no intervalo. Essa Função é uma Distribuição Uniforme no intervalo $(-1, 1)$, ou seja $g(x) = \frac{1}{2}, -1 < x < 1$.

   Seja c uma constante tal que $f(x) \leq cg(x) \; \forall \; x$, ou seja, $c = \max \frac{f(x)}{g(x)}$. Os pontos $P_1(-1, 1.5)$ e $P_2(1, 1.5)$ representam os máximos da função nesse intervalo, de forma que $c = 1,5$.

   Assim, será gerada uma Variável Aleatória Uniforme U no intervalo $(0, 1)$ e um x qualquer será aceito se $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$. O Gráfico da Figura 6, gerado pelo código do Anexo [8] - Q8_Aceitacao.ipynb, representa a Função Densidade de Probabilidade e o Histograma Normalizado da Variável.

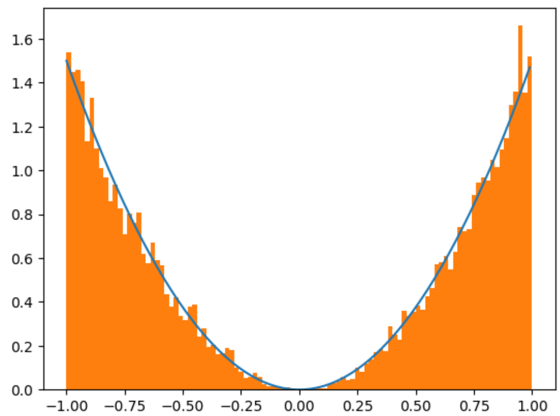

Figura 6: Função Densidade de Probabilidade para a Distribuição.

Anexos

[1] Anexo A - Q1_GeradorLinear.ipynb

[2] Anexo B - Q2_Poisson.ipynb

[3] Anexo C - Q3_Binomial.ipynb

[4] Anexo D - Q4_Poisson.ipynb

[5] Anexo E - Q5_Exponencial.ipynb

[6] Anexo F - Q6_Geometrica.ipynb

[7] Anexo G - Q7_InversaGeometrica.ipynb

[8] Anexo H - Q8_Aceitacao.ipynb

[9] Anexo I - Github