

# 特異点適合法に基づく擬似逆行列の性質を利用した 冗長マニピュレータの逆運動学解法

宮田将吾 (都市大) 佐藤大祐 (都市大) 金宮好和 (都市大)

## 1. 緒言

冗長マニピュレータの逆運動学計算は手先速度と関節速度の関係を表すヤコビ行列に対し、擬似逆行列を用いることでノルムが最小な関節速度を得る手法が知られている。速度空間で解を得るため、手先軌道を容易に生成することが可能である。しかし、ヤコビ行列の特異点において解を得ることができず、軌道計画において大きな障害となる。また特異点近傍においても過大な関節速度が生じる問題がある。特に遠隔操作においてはマニピュレータの状態をあらかじめ把握することができないことから、偶発的に特異点に近づいてしまうことがあり、過大な関節速度を防ぐ必要がある。

この問題に対する有効なアプローチの一つとして中村らによる特異点低感度運動分解法が挙げられる [1]。この手法により、特異点近傍において滑らかな関節速度を得ることができるが、目標軌道に対して追従させることが難しい。

これに対して、Nenchev らは特異点やその近傍において手先経路を正確に追従することが可能である特異点適合法を提案し、非冗長マニピュレータに適用してきた。また、一部の関節の運動を拘束して解を得ることにより、冗長マニピュレータの特異点においても有用性が確認されている [2]。しかしながら、関節の拘束によって作業空間が制限されるため、それを回避するための複雑な冗長運動の制御が新たに必要となる [3]。他にも、擬似逆行列に基づく手法により、作業空間が制限されない手法が提案されているが、特異点において関節が停止し、特異点からの脱出ができない問題が生じた [4]。これに対して、特異点適合法を拡張した分解特異点適合法により、この作業空間が制限される問題を解決してきた [5]。しかしながら、分解特異点適合法はマニピュレータの機構ごとに複雑な幾何学的な計算を解く必要があり、S-R-S 型以外の冗長マニピュレータへの適用が難しい。また、どの機構に適用可能かについても複雑な計算を試みてから判断する必要があり、不明確である。

以上より本稿では、特異点適合法の計算方法を拡張することで、以下の利点を持つ手法を提案する。

1. 従来の特異点適合法の問題である作業空間の制限が解決され、冗長運動を独立して扱える。
2. 特異点近傍においても手先ツイストの方向を正確に満たし、特異点においても関節速度を得る。
3. S-R-S 型以外のマニピュレータにも適用可能な手法である。

## 2. 特異点適合法とその問題点

### 2.1 列拡張ヤコビ行列に基づく特異点適合法

マニピュレータにおける速度次元の順運動学は次式で表せる。

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$  は手先ツイスト、 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^7$  は関節角度、 $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 7}$  はヤコビ行列である。本稿では、7R のマニピュレータを想定している。ここで、 $\mathbf{v}$  を大きさと方向に分けることで式 (1) を以下の同次方程式として表す。

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, t_*)\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2)$$

$t_*$  は手先ツイストの単位ベクトル、 $\dot{\mathbf{q}}_*$  はその大きさを表しており、 $\mathbf{v} = t_*\dot{\mathbf{q}}_*$  を満たす。また、 $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, t_*) = [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad -t_*]$  は列拡張ヤコビ行列、 $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}_*^T]^T$  である。

次に  $\dot{\mathbf{q}}$  の解を  $\bar{\mathbf{J}}$  の零空間ベクトルに基づき同次方程式を解く。冗長 1 自由度の場合、零空間ベクトルは以下となる。

$$\dot{\mathbf{q}} = b_{sm}\bar{\mathbf{n}}_{sm}(\mathbf{q}) + b_{ep}\bar{\mathbf{n}}_{ep}(\mathbf{q}, t_*) \quad (3)$$

ただし、 $b_{sm}$ 、 $b_{ep}$  は任意のスカラー量、 $\bar{\mathbf{n}}_{sm}$  は、セルフモーションと呼ばれる手先に影響を与えない関節速度ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$  は  $t_*$  で拘束された手先の運動を決める関節速度ベクトルである。

前者の  $\bar{\mathbf{n}}_{sm}$  は以下により求まる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{sm} &= [C_{sm1} \ C_{sm2} \ \cdots \ C_{sm7} \ 0]^T \\ &= [\mathbf{n}_{sm}^T \ 0]^T \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_{smi} = (-1)^{i+1} \det \mathbf{J}_i(\mathbf{q}) \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{J}_i$  は  $\mathbf{J}$  から第  $i$  列目を取り除いた行列である。後者の  $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$  は  $t_*$  で拘束される関節速度ベクトルであり、解は無数に存在する。そこで、一つの関節を固定した非冗長系として扱うと、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{ep} &= [C_{ep1} \ \cdots \ C_{epi} \ \cdots \ C_{ep7+1}]^T \\ &= [\mathbf{n}_{ep}^T \ (-1)^{i+1} \det \mathbf{J}_i]^T \end{aligned} \quad (6)$$

$$C_{epi} = 0 \quad (7)$$

$$C_{epj} = (-1)^{j+1} \det \bar{\mathbf{J}}_{epj}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (8)$$

となる (詳細は [3] を参照)。ただし、 $\bar{\mathbf{J}}_{epj}$  は  $\bar{\mathbf{J}}$  の固定する  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) 番目の関節に応じて第  $i$  列目を取り除いた行列から、さらに第  $j$  列目を取り除いた行列である。また、 $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$  の第  $i$  列目を 0 とする。固定

する  $i$  番目の関節は任意に設定することができる．したがって、関節速度は次式で与える．

$$\dot{q} = b_{sm}n_{sm}(q) + b_{ep}n_{ep}(\bar{q}) \quad (9)$$

$$\dot{q}_* = b_{ep}\det J_i \quad (10)$$

$b_{ep} = \|\mathbf{V}\|/\det J_i$  としたとき、目標の手先ツイストを実現するが、 $\det J_i = 0$  で解が得られない．そこで、特異点領域とみなす閾値  $D_\varepsilon$  を定め、次式により  $b_{ep}$  を決める（詳細は [6] を参照）．

$$b_{ep} = \begin{cases} \left(3 - \frac{(\det J_i)^2}{D_\varepsilon^2}\right) \frac{\|\mathbf{V}\|}{2D_\varepsilon}, & \text{if } |\det J_i| \leq D_\varepsilon, \\ \frac{\|\mathbf{V}\|}{|\det J_i|}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

これにより、特異点領域内でも安定した解を得ることができる．また、特異点  $q_s$  においても  $n_{ep}(q_s) \neq 0$  を満たすため、特異点から脱出することが可能である．

しかし、 $n_{ep}$  は固定する  $i$  番目の関節に応じて特異点は異なり、マニピュレータが実際の特異点  $\det(JJ^T) = 0$  でないにも関わらず、 $n_{ep}$  が  $J$  の零空間ベクトルとなることがある．このとき、手先は瞬間的に停止し、その後  $t_*$  を満たしながら、進行方向とは反対方向に動作する．この現象はワークスペース内部で生じることから内部障害と呼ばれ、冗長マニピュレータにおける特異点適合法固有の問題である [3]．これは式 (10) より、 $\det J_i = 0$  において手先ツイストの大きさが零になるため生じる．また、 $\det J_i$  の符号によって手先の進行方向が決まるため、特異点を通過することで進行方向が反転する．この内部障害は固定する関節およびマニピュレータの状態に依存し、かつ非線形であるため、予測することが難しく扱いづらい．さらに、冗長運動の利用により内部障害を回避することができるが、冗長自由度を持つ利点を失うため、根本的な解決とは言えない．

## 2.2 余因子行列に基づく特異点適合法

特異点適合法のもう一つの考え方として、関節速度のノルムを最小化する擬似逆行列の余因子行列に基づく手法がある [4]．これを列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルと同じ形で表すと以下となる．

$$n_{ep} = n_{pi} = J^T(q)\text{adj}(J(q)J^T(q))t_* \quad (12)$$

$$\dot{q}_* = b_{ep}\det(JJ^T) \quad (13)$$

ただし、 $n_{pi}$  は  $n_{sm}$  と直交する零空間ベクトルであり、ノルムが最小となる．このとき、式 (13) より  $b_{ep} \neq 0$  とすると手先ツイストの大きさが零となるのは  $\det(JJ^T) = 0$  のみである．したがって、特異点は  $\det(JJ^T) = 0$  であり、従来の特異点と一致するため内部障害を持たない．しかし、特異点において、

$$J^T(q_s)\text{adj}(J(q_s)J^T(q_s)) = 0 \quad (14)$$

となるため、関節速度が零となり、特異点から出ることができなくなる問題が生じる．これは  $J^T\text{adj}(JJ^T)$  が特異点において 0 となる要素をすべての項に含んでいるためである．しかしながら、 $\text{adj}(JJ^T)$  を解析的に解くことが困難なため、詳細な原因は不明確である．

## 3. 内部障害が生じない列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルの提案

### 3.1 列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルの選択方法

前節の議論より、擬似逆行列に基づく手法は内部障害を持たない．そこで、列拡張ヤコビ行列に基づく手法においても、擬似逆行列の性質を持つ方法を考える．列拡張ヤコビ行列では冗長マニピュレータにおいても、一つの関節を固定することで、非冗長マニピュレータとして逆運動学解を得ている．ここで固定する関節は任意に選択可能であり、それぞれの零空間ベクトルの和により、新たな零空間ベクトルを計算する．これを次式により定義する．

$$n_{ep} = n_{sum} = \sum_{i=1}^7 b_i n_i \quad (15)$$

$n_{sum}$  は新たに提案する零空間ベクトルの計算方法であり、 $n_i$  は式 (7) による  $n_{ep}$  の計算において  $i$  番目の関節を固定したときの零空間ベクトルである．また、 $b_i$  は任意のスカラーであり、それぞれの零空間ベクトルの重みを表す．これは手先ツイストの方向  $t_*$  を満たし、手先ツイストの大きさは次式となる．

$$\dot{q}_* = D_{sum} = \sum_{i=1}^7 b_i \det J_i \quad (16)$$

このように、零空間ベクトルの和により新たに定義した  $n_{sum}$  を用いたとき、 $D_{sum} = 0$  において特異点となる．ただし、 $\det(JJ^T) = 0$  の特異点以外でも  $D_{sum} = 0$  となる場合は、これまでの手法とは異なるアルゴリズム的特異点であり、 $b_i$  の決め方により、内部障害の分布を決定できる．ここで、

$$b_i = \det J_i \quad (17)$$

としたとき、 $n_{sum} = n_{pi}$  となり（詳細は付録 A に示す）アルゴリズム的特異点は生じなくなる．これにより、特異点近傍においても安定した解を得ることができるが、特異点において  $b_i = \det J_i = 0$  となり、関節速度は零ベクトルとなる．これは式 (14) と等価である．特異点において関節速度が零ベクトルにならないためには、 $b_i \neq 0$  である必要がある．

また手先ツイストの大きさも考慮し、

$$b_i = \frac{\det J_i}{\det(JJ^T)} \quad (18)$$

とおくと、擬似逆行列による解と一致する．

### 3.2 特異点における関節速度ベクトル

前節に示した特異点において  $b_i = 0$  となる問題点を解決することで、関節速度が零ベクトルとなるのを防ぐ．ここで、特異点が一つのパラメータで表せる場合、すべての  $\det J_i$  がそのパラメータを持つ場合、 $J_i$  の行列式を以下のようにおくことができる．

$$\det J_i = D_e D_i \quad (19)$$

ただし,  $D_e$  は  $\det J_i$  のすべてにおいて存在し, 一つのパラメータで表せる特異点指標である. また  $D_i$  は行列式における  $D_e$  以外をいた項である. ここで  $D_e = 0$  によって  $b_i = 0$  となっていたと言える. 式 (19) を式 (18) に代入することにより,

$$b_i = \frac{D_e D_i}{D_e^2 D_s} = \frac{D_i}{D_e D_s}$$

$$D_s = \sum_{i=1}^7 D_i^2 \quad (20)$$

となる. この  $b_i$  を用いた場合も擬似逆行列による解と等しくなる. ここで, 特異点においては  $b_i(q_s) = D_i/D_s$  とすることで, 手先ツイストは修正されるが  $D_e = 0$  によって発散しない. また  $b_i \neq 0$  となるため, 特異点においても関節速度を失わない.

### 3.3 適用可能な 7R マニピュレータ

以下ではマニピュレータの特異点について調査し, どのマニピュレータに適用可能な例を示す.

この手法は特異点が一つのパラメータで表現できるときに適用可能である. 例えば, 特異点が  $\sin q_4 = 0$  で表される S-R-S 型マニピュレータや [7] に示された Barrett WAM Arm には適用可能である. しかしながら [8] に示された European Robotic Arm は, 特異点が  $\sin q_4 = 0$  かつ  $N(q) = 0$  (ただし,  $N$  は関節角度  $q$  の関数) のときであり, 一つのパラメータで表せないことから, 本手法は適用不可能である. ただし多くの場合, 複数のパラメータによって表せる特異点の一つの特異点となる要素が零になっても, セルフモーションにより脱出が可能であり, 一つのパラメータで表される特異点の対策は有用である.

以下では適用可能なマニピュレータである Barrett WAM Arm への適用を行う. Barrett WAM Arm の DH パラメータを表 1 に示す. 作業空間の限界である回避不可能な特異点は  $D_e = (a(d_3 + d_5)C_4 + (a^2 - d_3 d_5)S_4)$  で表される. この特異点に対して, 式 (11) の考え方により  $b_i$  を以下により求める.

$$b_i = \begin{cases} \left(3 - \frac{D_e^2}{2D_e^2}\right) \frac{D_i}{2D_e D_s} \mathbf{v}, & \text{if } |D_e| \leq D_\epsilon, \\ \frac{D_i}{D_e D_s} \mathbf{v}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

表 1 Barrett WAM Arm の DH 表記

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$q_i$
1	$-\pi/2$	0	0	$q_1$
2	$\pi/2$	0	0	$q_2$
3	$-\pi/2$	$a$	$d_3$	$q_3$
4	$\pi/2$	$-a$	0	$q_4$
5	$-\pi/2$	0	$d_5$	$q_5$
6	$\pi/2$	0	0	$q_6$
7	0	0	$d_7$	$q_7$

これに伴い, 特異点領域において手先ツイストは次式に修正される.

$$\mathbf{v} = b_{ep} \left(3 - \frac{D_e^2}{D_e^2}\right) \frac{D_e}{2D_e} \mathbf{v}^{des} \quad (22)$$

式 (22) より, 手先ツイストの符号は  $D_e$  に依存する. したがって, 特異点の通過による  $D_e$  の符号の反転に伴い, 手先ツイストの符号も反転する. 並進運動においては作業空間の限界から脱出するために必要であるが, 回転運動においては好ましくない運動となる. そこで, 回転運動にあらかじめ  $D_e$  を掛けることで,  $D_e^2$  に比例させる. これにより, 特異点近傍においてその大きさは制限され, 特異点において手先の運動は一時停止するが, 回転軸およびその符号を正確に追従することが可能となる.

以上をまとめると, 関節速度を求める式 (9) において, 式 (15) を用い, その際の  $b_i$  は式 (21) を用いる. 特異点領域における手先ツイストは式 (22) となるため,  $b_{ep} = \pm 1$  とすることで, 手先速度の符号を決める.

### 4. 数値シミュレーションによる検証

本稿で提案した逆運動学解法の有用性について検証するため, Barrett WAM Arm のモデルを用いて数値シミュレーションを行った. 各リンクの長さは  $d_3 = 0.55$  m,  $d_5 = 0.4$  m および手首から手先の長さは  $d_7 = 0.06$  m とした. またオフセットは  $a = 0.045$  m とした. 初期姿勢を  $\mathbf{q} = [30 \ 20 \ 50 \ 70 \ 40 \ 100 \ 0]^T$  deg, 手先ツイストにおける並進運動は  $x$  軸に  $0.15$  m/s とし, 回転運動は  $y$  軸周りに  $0.1$  rad/s とし, 特異点に達する瞬間に並進運動のみ運動方向を反転させるように与えた.  $b_{sm} = 0$  とし, 冗長運動はおこなわず, 関節速度のノルムが最小になるように与えた. 特異点領域の閾値は  $D_e = 0.1$  とした.

シミュレーション結果を図 1 に示す. (a) は関節速度, (b) は手先速度, (c) は手先角速度, (d) は特異点指標  $D_e$ , (e) は手先位置, (f)  $x-y$  平面における手先位置を示している. また縦の黒線は特異点領域内に入っていることを示している. (f)  $x-y$  平面における手先位置は, 赤線が手先経路であり, 緑線は拘束した高さにおけるマニピュレータの作業空間を示している.

特異点指標において,  $D_e$  の正負が反転しており, 特異点を通過している. また (b), (c) に示した現在の手先速度・手先角速度は縦の黒線の外側 (特異点領域以外) において目標値 ( $x$  軸に  $0.15$  m/s,  $y$  軸回りに  $0.1$  rad/s) と一致しており, 特異点領域においても手先速度は  $x$  軸方向のみの動作を実現している. 作業空間の限界に達した点で進行方向を反転している一方で, 手先角速度は一時的に遅くなっているが,  $y$  軸正方向の運動が続いている. すなわち, 作業空間の制限されない方法かつ特異点においても関節速度を持ち, 特異点の脱出を実現している.

### 5. 結言

本稿では, 冗長マニピュレータの逆運動学解法について特異点適合法の零空間ベクトルの選び方による内部障害の解決を実現した. また, 適用可能なマニピュレータについて考察し, 特異点においても関節変位を

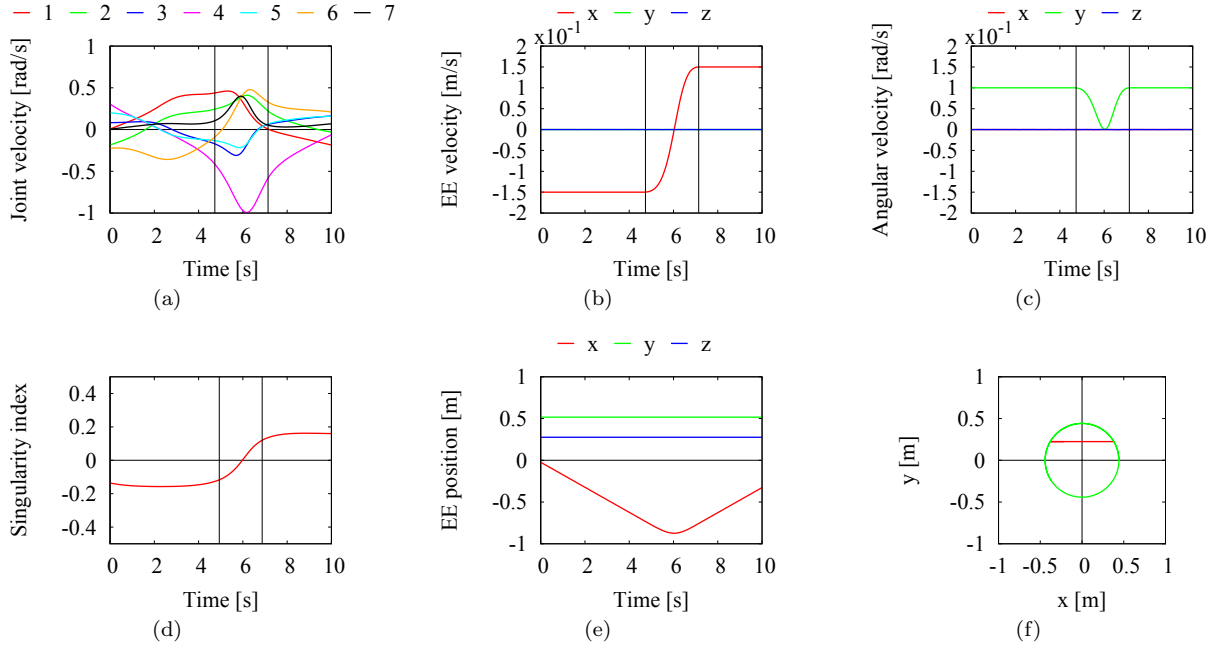


図1 Barrett WAM Arm モデルを用いた提案手法による数値シミュレーション結果

安定して得られることを示した。これにより、手先の作業空間内部に制限をかけることなく手先の運動生成が可能であり、指令した運動方向を正確に追従できることを数値シミュレーションにより確認した。

今後の課題は、提案手法を用いて制御系を構築し、実験にて実用性を検証することである。

#### 参考文献

- [1] 中村, 花房, “関節形ロボットアームの特異点低感度運動分解”, 計測自動制御学会論文集, no. 20, vol. 5, pp. 453–459, 1983.
- [2] Y. Tsumaki, P. Fiorini, G. Chaffant, and H. Seraji, “A numerical SC approach for a teleoperated 7-DOF manipulator,” in *Proc. Int. Conf. Robot. and Autom.*, 2001, pp. 1039–1044.
- [3] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki, and M. Takahashi, “Singularity-consistent kinematic redundancy resolution for the S-R-S manipulator,” in *Proc. Int. Conf. Intell. Robots. Syst.*, 2004, pp. 3607–3612.
- [4] 菊池, 妻木, “特異点を考慮した冗長7自由度マニピュレータの遠隔制御”, 日本機械学会ロボティクスメカトロニクス講演会'14 講演論文集, 1P1-Q01, 2014.
- [5] S. Taki and D. Nenchev, “A novel singularity-consistent inverse kinematics decomposition for S-R-S type manipulators,” in *Proc. Int. Conf. Robot. Autom.*, 2014, pp. 5070–5075.
- [6] 宮田, 佐藤, 金宮, “分解特異点適合法に基づく特異点領域を考慮した U-R-S 型マニピュレータの動作生成”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'15 講演論文集, 2P1-F10, 2015.
- [7] G. K. Singh and J. Claassens, “An Analytical solution for the inverse kinematics of a redundant 7DoF manipulator with link offsets,” in *Proc. Int. Conf. Intell. Robots. Syst.*, 2010, pp. 2976–2982.
- [8] S. Zhang, W. Xu, and Z. Wang, “Singularity analysis for a class of serial manipulators with non-spherical wrists,” in *Proc. Int. Conf. Robot. Biomimetics*, 2013, pp. 1605–1610.

#### 付録 A 関節速度ノルム最小となる証明

式 (15) における  $b_i = \det J_i$  としたとき、関節速度ノルムが最小の拘束となることを示す。列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトル  $\mathbf{n}_{sum}$  のノルムが最小となるのは  $\mathbf{n}_{sm}$  と直交するときであり、 $\mathbf{n}_{sum}^T \mathbf{n}_{sm}$  が零となるときである。これを計算すると

$$\mathbf{n}_{sum}^T \mathbf{n}_{sm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i n_{smj} j n_i \quad (23)$$

となる。ただし、 $n$  は関節の自由度数である。また、 $\mathbf{n}_{smj}$  は  $\mathbf{n}_{sm}$  の  $j$  番目の項であり、 $n_{smj} = (-1)^{j+1} \det J_j$  である。ここで、 $b_i = \det J_i$  とおくと、式 (23) は以下となる。

$$\mathbf{n}_{sum}^T \mathbf{n}_{sm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \det J_i \det J_j j n_i \quad (24)$$

式 (8) より  $j n_i$  は  $i = j$  の場合、 $j n_i = 0$  となる。また  $i \neq j$  の場合、 $i$  番目の関節を固定したときの  $j$  番目の項であり、 $J$  から  $i$  列目を除きさらに  $j$  列目を取り除いた行列である。したがって、 $j n_i = (-1)^{j+1} n_j$  を満たす。式 (24) の各要素において、以下の関係を満たす。

$$\det J_i \det J_j j n_i = -\det J_i \det J_j i n_j \quad (25)$$

以上より、式 (23) を各要素ごとに表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{sum}^T \mathbf{n}_{sm} = & \det J_1 \det J_1^1 n_1 + \det J_1 \det J_2^2 n_1 \cdots + \det J_1 \det J_n^n n_1 \\ & + \det J_2 \det J_1^1 n_2 + \det J_2 \det J_2^2 n_2 \cdots + \det J_2 \det J_n^n n_1 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \vdots \\ & + \det J_n \det J_1^1 n_n + \det J_n \det J_2^2 n_n \cdots + \det J_n \det J_n^n n_n \end{aligned}$$

となる。 $i n_i = 0$  および式 (24) を代入することで、

$$\mathbf{n}_{sum}^T \mathbf{n}_{sm} = 0 \quad (26)$$

となる。したがって、 $b_i = \det J_i$  としたとき、式 (15) は関節速度のノルムが最小な零空間ベクトルとなる。