

J192022

特異点を考慮したオイラー角に基づく姿勢フィードバック制御*

滝 将太^{*1}, 金宮 好和^{*1}

Attitude Feedback Control Based on Euler Angle Parameterization Considering Singularity

Shota TAKI^{*1} and Yoshikazu KANAMIYA

^{*1} Graduate School of Engineering, Tokyo City University
1-28-1, Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8557, Japan

This paper investigates the problem of attitude control for a rigid spacecraft. The main contribution of this paper is the design of an Euler-angle-based attitude controller. The design of the controller is based on the Singularity-Consistent notation. Therefore, the controller can handle the Euler angle singularity problem. Also, the controller guarantees an almost global exponential stability as long as the Euler angles can be defined. Numerical simulations are provided to illustrate the performance and show the effectiveness of the proposed controller for reduced-attitude maneuvers and large angle maneuvers.

Key Words : Attitude Control, Euler Angle, Singularity Problem, Large Angle Maneuver, Reduced-Attitude Maneuver

1. 緒 言

三次元空間上の剛体の姿勢制御は、一つの非線形制御理論問題として広く知られており、宇宙機や水中機などの汎用性の高さから長きにわたり研究されてきた。姿勢制御を困難にさせる主たる要因は、三次元空間上の姿勢を定義する状態空間 $SO(3)$ が複雑な位相であることに由来する。 $SO(3)$ は境界のないコンパクト多様体でベクトル空間でないため、特定の姿勢を一定に保つ大域的安定な状態フィードバック制御は存在しない⁽¹⁾。そのため一般的には、オイラー角や単位クォータニオンに変数化した少ない変数で制御系を構築する。ところが、オイラー角は変数化する際に生じる特異点問題により、表す姿勢には限界がある。そのため、非特異で最も少ない変数で姿勢を表す単位クォータニオンを用いた制御則が数多く提案されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。しかし、単位クォータニオンを用いる場合、その状態空間 $SU(2)$ が $SO(3)$ に対して二重被覆であるため、大角度操作には不向きといえる。さらに、一般的な積分方法では誤差を生みやすく、姿勢表現の厳密性に問題がある⁽⁴⁾。本稿では、オイラー角の特異点問題に対して、Nenchev ら⁽⁵⁾ によって提案された特異点適合法の適用により、固定軸回転における特異点を考慮したオイラー角に基づく姿勢制御則を提案する。また、数値シミュレーションにより有用性を検証する。

2. 特 異 点 適 合 法

三次元空間上の姿勢を 3-1-3 オイラー角で表し、それぞれ θ_1 , θ_2 および θ_3 と表記する。このとき、運動対象に固定した座標系の角速度ベクトルを $\omega \in \mathbb{R}^3$ とすると、逆運動学の関係から次式が成り立つ。

$$\dot{\theta} = A^{-1}(\theta_1, \theta_2) \omega = \frac{1}{S_2} \begin{bmatrix} -S_1 C_2 & -C_1 C_2 & S_2 \\ C_1 S_2 & -S_1 S_2 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \omega \quad (1)$$

* 原稿受付 2012 年 07 月 09 日

^{*1} 正員, 東京都市大学 大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

Email: taki@rls.mse.tcu.ac.jp

S_i, C_i はそれぞれ $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ を表し, $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$ である. 式 (1) に示すように, $S_2 = 0$ のとき特異姿勢となり, $\dot{\theta}$ が定義できない. A を特異値分解して得られる変数を用いて, A^{-1} を

$$A^{-1} = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^T + \frac{1}{\sigma_2} v_2 u_2^T + \frac{1}{\sigma_3} v_3 u_3^T \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0) \quad (2)$$

と改める. 各変数 u_i, v_i, σ_i は, それぞれ左特異ベクトル, 右特異ベクトルおよび特異値である. 式 (1) より, 変換行列 A の特異部分空間は常に一次元であるため, 特異点では最小特異値 σ_3 のみ 0 となる. すなわち, 式 (2) の右辺第 3 項が $\dot{\theta}$ の発散を起因する. ここで特異姿勢における u_3 を u_s と定義すると, u_s は動作空間に影響を及ぼさない零空間ベクトルとなる. ゆえに,

$$u_s^T A = 0 \quad (3)$$

が成り立つ. さらに式 (1), 式 (3) より,

$$u_s^T \omega = 0 \quad (4)$$

を得る. 式 (4) は特異点における拘束された動作空間を意味しており, 角速度ベクトルが式 (4) を満たす方向に姿勢運動するとき, 特異点を通過することが可能である. これは式 (2) の右辺第 3 項を取り除いた階数 2 の変換行列による写像と等価である. 特異点適合法では, この特性を利用して特異点近傍で変換行列を切り替える. このように特異点 (あるいはその近傍) において動作空間を拘束し, 拘束された動作方向に対して一貫したシステムを形成して特異点を通過する手法が特異点適合法である.

3. 姿勢制御への適用

姿勢運動を $\hat{\omega} = [\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3]^T \in \mathbb{S}^2$ 周りの固定軸回転とし, 初期状態を表すオイラー角として $\theta_2 = 0, \theta_1$ および θ_3 は式 (4) を満たすように与える場合, $\hat{\omega}$ 周りの回転に対して常に,

$$\begin{bmatrix} -S_1 \cot \frac{\theta_2}{2} & -C_1 \cot \frac{\theta_2}{2} & 1 \end{bmatrix} \hat{\omega} = 0 \quad (5)$$

が成り立つ. ここで変換行列 A^{-1} を

$$A^{-1} = A_p^{-1} + A_h^{-1} \quad (6)$$

$$A_p^{-1} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta_2}{2}} \begin{bmatrix} S_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & C_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & C_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 - S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_h^{-1} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta_2}{2}} \begin{bmatrix} -S_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -C_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & \sin \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & C_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -\sin \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}$$

と改める. 式 (6) で示されるように, 特異姿勢は $\sin(\theta_2/2) = 0$ と $\cos(\theta_2/2) = 0$ となるが, 式 (4) を満たす u_s が異なるため, ここではそれぞれ North pole (NP) 特異点, South pole (SP) 特異点と定義し区別する. 式 (5), 式 (6) より, 回転方向が一貫して $\hat{\omega}$ の場合, $A_h^{-1} = 0$ となり NP 特異点を通過する関係を A_p^{-1} による変換で得られる. ところが, 姿勢制御へ適用するためには, あらゆる運動方向に対して姿勢に依らず表現する必要がある. 動作空間を限定した A_p^{-1} のみの変換は不適である. この問題に対し, NP 特異点近傍に微小領域 ε_N を与え, ε_N での A^{-1} を

$$A^{-1} = A_p^{-1} + c \sin \frac{\theta_2}{2} A_h^{-1} \quad (7)$$

とする. ただし, c は定数である. 式 (7) によって ε_N で定義されるオイラー角は実際のオイラー角とは異なるが, 姿勢の誤差を表現できるため, その誤差をフィードバックすることで NP 特異点を通過する条件であっても制御可能である.

4. オイラー角に基づく姿勢制御

初期姿勢のオイラー角を前章の議論と同様 $\theta_2 = 0$, θ_1 および θ_3 を式 (4) を満たすように定義し, NP 特異点を通過する固定軸回転を考える. 目標姿勢は回転軸 $\hat{\omega}^d$ に回転角 α^d で回転させた姿勢とし, その運動過程を角速度 ω^d , 角加速度 $\dot{\omega}^d$ で制御する場合, 目標とするオイラー角の状態はそれぞれ

$$\ddot{\theta}^d = A_p^{-1}(\dot{\omega}^d - \dot{A}_p A_p^{-1} \omega^d) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}^d = A_p^{-1} \omega^d \quad (9)$$

$$\theta^d = \int \dot{\theta}^d dt \quad (10)$$

で与えられる. 制御入力 τ はオイラーの運動方程式による動力学を考慮した

$$\tau = M(A\ddot{\theta}^r + \dot{A}\dot{\theta}) + \omega \times M\omega \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}^r = \ddot{\theta}^d + K_d(\dot{\theta}^d - \dot{\theta}) + K_p(\theta^d - \theta) \quad (12)$$

で与える. ただし, M は制御対象の慣性行列, K_d , K_p は正定なゲイン行列である. K_d , K_p に適切な値を与えることで SP 特異点でオイラー角が定義できない場合を除き, 本制御系は指数安定である.

次に, SP 特異点を考慮した姿勢制御について議論する. 上記の姿勢運動のように NP 特異点を通過する固定軸回転の場合, θ_2 は幾何学的に常に

$$|\cos \frac{\theta_2}{2}| \geq |\hat{\omega}_3| \quad (13)$$

を満たす (ただし, $\hat{\omega}_3 \neq 0$). 式 (13) より, 目標回転軸の z 軸成分 $\hat{\omega}_3$ が 0 に近づくと, 姿勢運動の目標軌道は SP 特異点近傍を通過する要求となる. すなわち, $\hat{\omega}_3$ が 0 でない微小値で回転させるとき, 姿勢の誤差がわずかであっても SP 特異点によって制御できない可能性がある. また, NP 特異点と SP 特異点では u_s が異なるため, NP 特異点を通過する固定軸回転の場合, SP 特異点に式 (7) と同様の操作は適用できない. この問題を解決するため, SP 特異点周りの微小領域 ε_S では次式を適用する.

$$\dot{\theta} = \frac{1}{S_2} \begin{bmatrix} -S_1 C_2 & -C_1 C_2 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \omega \quad (|\cos(\frac{\theta_2}{2})| \geq |\cos(\frac{\theta_2^* + \theta_2}{2})|) \quad (14)$$

$$\dot{\theta}_2^* = \begin{bmatrix} C_1 S_2 & -S_1 S_2 & 0 \end{bmatrix} \omega \quad (15)$$

このときのオイラー角は ε_N における操作と同様, 実際のオイラー角と異なるが, 姿勢誤差は表現できない. つまり, オイラー角によるフィードバック制御は不可である. しかし, 不可制御範囲である ε_S は十分小さい範囲として定義でき, 表現上の誤差は非常に小さいものと推測できる. 我々の制御式 (11) では, SP 特異点においてジャイロ効果によって生じるトルクのみ補償する.

5. 数値シミュレーションによる検証

今回提案した制御手法の有用性を検証するため, 回転軸 $\hat{\omega} = [0.8944 \ 0.4472 \ 0.005]^T$ に単位クォータニオンでは制御が困難な 800 deg 回転する指令を与えたシミュレーションを行った. このとき, 終端姿勢の目標オイラー角は $\theta^d = [333.675 \ 79.999 \ 386.805]^T$ deg である. また, θ_2^d の定義域は式 (13) より, $-179.427 \text{ deg} \leq \theta_2^d \leq 179.427 \text{ deg}$ となるため, SP 特異点近傍を通過する. 初期のオイラー角は式 (5) を満たした $[-26.57 \ 0 \ 26.57]^T$ deg とした. シミュレーション時間は 100 s, 初期姿勢から目標姿勢まで 5-1-5 次多項式で補間し, 80 s で目標姿勢に達するものとした. それぞれのゲインは $K_d = \text{diag}(200, 200, 200)$ kg·rad/s, $K_p = \text{diag}(200, 200, 200)$ kg·rad/s² を与えた. 制御対象の慣性行列を $M = \text{diag}(1200, 2200, 3100)$ kg·m² とし, ジャイロ効果の影響は完全に補償するものとした. 式 (7) の定数 c を 1, 式 (7), 式 (14) の変換行列への切り替えはそれぞれ $|\sin(\theta_2/2)| < 0.015$, $|\cos(\theta_2/2)| < 0.015$ とし, NP, SP 特異点ともに切り替えを必要とする条件とした.

シミュレーション結果を図 1 に示す. それぞれ (a) オイラー角 θ , (b) オイラー角の時間変化率 $\dot{\theta}$, (c) 制御対象

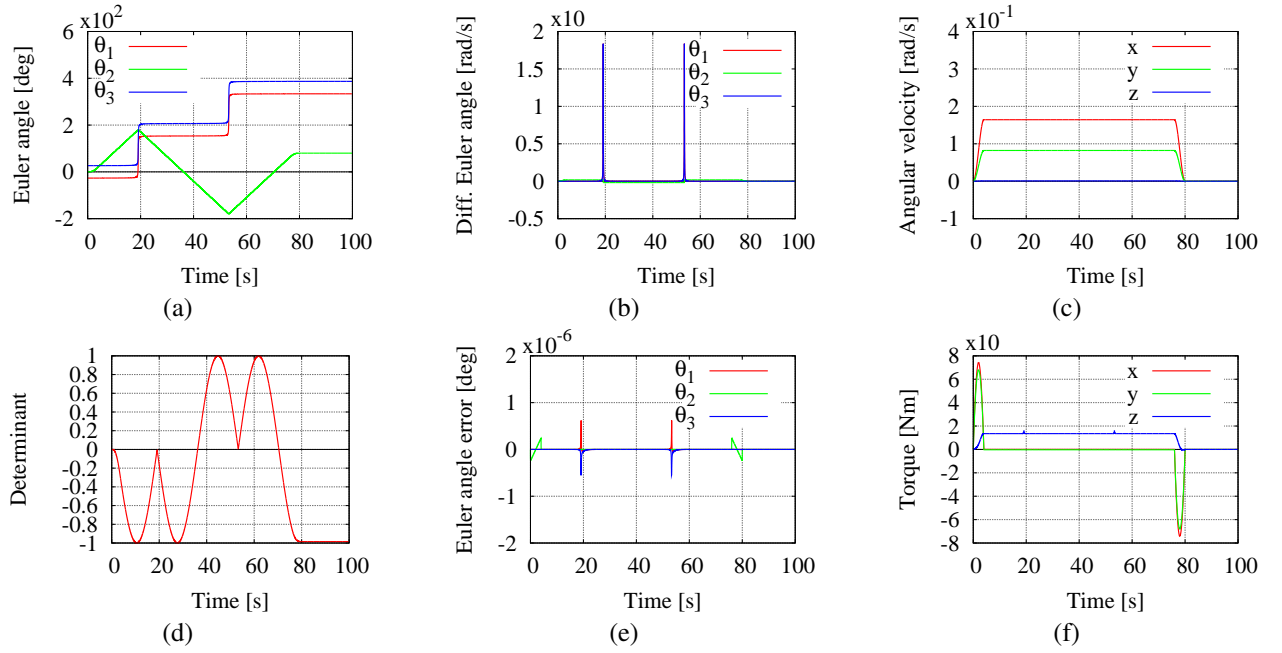


Fig. 1 Simulation results in the case of the desired Euler angles passing the vicinity of the SP singularity.

に固定した座標系からの角速度ベクトルの各成分，(d) 変換行列 A の行列式，(e) オイラー角の誤差および (f) 制御入力の時間変化を表している．(a) および (d) より，NP 特異点 $\theta_2 = 0 \text{ deg}$ は通過しており，SP 特異点に対しても発散することなくオイラー角で表現できることが確認できた．(e) が示すように，SP 特異点近傍によるオイラー角の急激な変化および式 (14) への切り替えによりオイラー角に誤差が生じ，制御入力にわずかに影響していることが確認された．しかし，式 (14) とすることでオイラー角が発散することなく定義できるため，制御系は不安定にならないことが確認された．また，誤差が非常に小さく高い追従性があることが示された．

6. 結 言

本稿では，特異点を考慮したオイラー角による姿勢制御の適用を議論し，特異点適合法に基づいた固定軸回転の制御手法を示した．3-1-3 オイラー角で定義された提案手法は，回転方向 $\hat{\omega}$ が $x-y$ 平面から離れている場合において，特に十分なロバスト性を有する．また，単位クォータニオンでは制御が困難な大角度操作であっても提案手法により対応可能であることを示した．だが一方で，提案手法においても他の制御手法と同様に全ての姿勢に対して安定的な制御ではない．しかし，高い追従性を有する提案手法は，回転方向あるいは座標系の定義を考慮することで安定性の問題を回避することが期待される．

文 献

- (1) Mayhew, C. G., Sanfelice, R. G. and Teel, A. R., “On quaternion-based attitude control and the unwinding phenomenon,” in *Proc. of the American Control Conf.*, (2011), pp. 299–304.
- (2) Wie, B., Weiss, H. and Arapostathis, A., “Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations,” *J. Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 3, (1989), pp. 375–380.
- (3) Wang, X and Yu, C., “Feedback linearization regulator with coupled attitude and translation dynamics based on unit dual quaternion,” in *Proc. IEEE Multi-Conf. on Systems and Control*, (2010), pp. 2380–2384.
- (4) Lee, T. and McClamroch, N. H., “Attitude Maneuvers of a Rigid Spacecraft in a Circular Orbit,” in *Proc. of the American Control Conf.*, (2006), pp. 1742–1747.
- (5) Nenchev, D. N. and Tsumaki, Y., “Singularity-consistent attitude motion analysis and control based on Euler angle parameterization,” *SICE Annual Conf.*, (2003), pp. 881–889.