Лабораторная работа №4

Ларин Егор. 4 группа 2 курс

14 апреля 2022 г.

Теория

$$f(x) = e^{\cos x}, a = -2, b = 2, h = 0.1$$

Узлы

$$N = \frac{b-a}{h} + 1$$
$$x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0, N}$$
$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, N}$$

Наилучшее приближение степени n

Линейно независимая система $\{x^0, x^1, \dots, x^n\}$:

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

Коэффициенты из решения СЛАУ

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = m_0 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_n s_{n+1} = m_1 \\ \vdots \\ c_0 s_{n+1} + c_1 s_{n+2} + \dots + c_n s_{2n} = m_n \end{cases}$$

где

$$s_0 = N + 1$$

$$s_i = \sum_{k=0}^{N} x_k^i, \overline{1, 2n}$$

$$m_0 = \sum_{k=0}^{N} f(x_0)$$

$$m_i = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) x_k^i, \overline{1, n}$$

Оценка

$$\Delta^2(f) = \sum_{i=0}^{k} (f_i - Q_n(x_i))^2$$

Графики

Рис. 1: $n = 3$

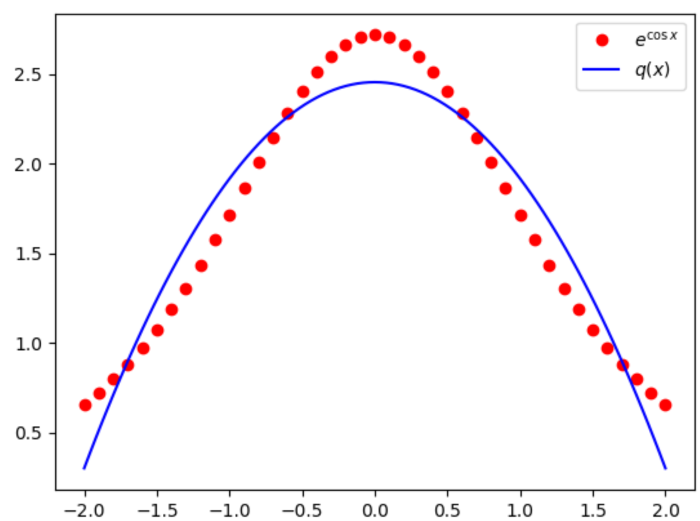
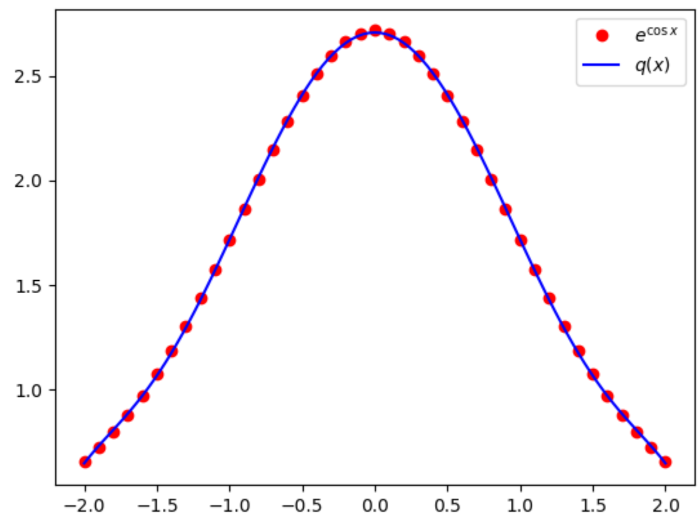


Рис. 2: $n = 6$



Листинг кода

```python
from math import cos, exp
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
h = 0.1
a = -2
b =  2
f = lambda x: exp(cos(x))
def build(n):
    k = int((b-a) / h) + 1
    xs = [a + h * i for i in range(k)]
    ys = [f(x) for x in xs]
    ss = np.array([[sum([x ** (i+j) for x in xs]) for j in range(n+
    ms = np.array([sum([x**i * y for (x, y) in zip(xs, ys)]) for i
    cs = np.linalg.solve(ss, ms)
    q = lambda x: sum([c*(x**i) for (c,i) in zip(cs, range(n+1))])
    ds = [a + i * (b-a)/100 for i in range(101)]
    print(sum([(f(x) - q(x))**2 for x in xs]))
    plt.plot(xs, ys, "ro", ds, [q(x) for x in ds], "b")
    plt.legend(["$e^{\\cos x}$", "$q(x)$"])
    plt.show()
```

```
build(3)
build(6)
```

Результаты вычислительного эксперимента

$$\Delta^2(f) = \sum_{i=0}^{41}(f_i - Q_3(x_i))^2 = 1.46325387355352$$

$$\Delta^2(f) = \sum_{i=0}^{41}(f_i - Q_6(x_i))^2 = 0.0022915148710782995$$

Выводы

Метод наименьших квадратов позволяет достаточно точно приблизить значение таблично заданной функции многочленом относительно невысокой степенью. Наблюдается сходимость при увеличении степени многочлена, которая тем не менее на практике может и не наблюдаться из-за плохо обусловленной СЛАУ.