Лабораторная работа №5

Ларин Егор. 4 группа 2 курс

24 мая 2022 г.

Теория

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$a = 1, b = 2, k = 4$$

$$\boxed{\varepsilon = 10^{-7}}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx - ?$$

Правило Рунге

1. $$Q_1 = Q(n)$$ $$Q_2 = Q(2n)$$

2. $$R = \frac{Q_2 - Q_1}{2^m - 1},$$

   где m – порядок точности КФ, n – число разбиений отрезка $[a, b]$.

3. Если $|R| \leq \varepsilon$, то прекращаем вычисления и $I \approx \hat{Q} = Q_2 + R$.

4. В ином случае $Q_1 = Q_2, Q_2 = Q(4n)$ и возвращаемся к шагу 2.

КФ Симпсона

$$I \approx Q^C = \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=1,2}^{n-1} f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})$$

$$m = 4$$

КФ трапеций

$$I \approx Q^T = h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$m = 2$$

КФ НАСТ

$p(x) = 1$, значит в качестве ортогонального многочлена степени k можно выбрать многочлен Лежандра $P_n(x)$ степени k.

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} \cdot \left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

Коэффициенты КФ могут быть найдены как

$$A_i = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1 - x_i^2}{P_3(x_i)^2}, P_4(x_i) = 0, i = \overline{1,4}$$

$$x_1 = -0.861136311$$
$$x_2 = 0.861136311$$
$$x_3 = -0.339981043$$
$$x_4 = 0.339981043$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} Q^H = \frac{b-a}{2}&(0.34785485202283456 f(\frac{a+b}{2} + x_1 \frac{b-a}{2}) \\ &+ 0.34785485202283456 f(\frac{a+b}{2} + x_2 \frac{b-a}{2}) \\ &+ 0.6521451563287455 f(\frac{a+b}{2} + x_3 \frac{b-a}{2}) \\ &+ 0.6521451563287455 f(\frac{a+b}{2} + x_4 \frac{b-a}{2})) \end{aligned}$$

Листинг кода

```
eps = 1.0e-7
a = 1
b = 2
f x = exp x / (1 + x ^ 2)
integrateTrapezoid n = h * sum ((f a + f b) / 2 : [f x | x <- [a +
integrateSimpsons n = h / 3 * sum [f (x - h) + 4 * f x + f (x + h)
runge i m n = if abs r < eps then q2 + r else runge i m (n * 2)
```

```
  where q1 = i n
        q2 = i (2 * n)
        r = (q2 - q1) / (2 ** m -1)
xs = [-0.861136311, 0.861136311, -0.339981043, 0.339981043]
p x = 2.5 * x ** 3 - 1.5 * x
c k = (1 - (xs !! k ** 2)) / (8 * (p (xs !! k) ** 2))
sub x = (a + b) / 2 + x * (b - a) / 2
gauss = (b - a) / 2 * sum [c i * f (sub (xs !! i)) | i <- [0 .. 3]]

main = do
  print gauss
  print $ runge integrateSimpsons  4 1
  print $ runge integrateTrapezoid 2 1
```

Результаты вычислительного эксперимента

$$Q^H = 1.392468989526053$$

$$Q^C = 1.392468998110868$$

$$Q^T = 1.3924689981257685$$

КФ	n	h	$Q(n)$	$R(n)$
Симпсона	1	1.0	3.09297982856427	-
	2	0.5	1.392146190610417	-0.11338890919692353
	4	0.25	1.3924437660220899	1.9838360778197856e-5
	8	0.125	1.3924673509960468	1.5723315971290693e-6
	16	0.0625	1.3924688942332293	1.0288247883257402e-7
	32	0.03125	1.3924689916185156	6.4923524186374e-9
Трапеций	1	1.0	1.4184760670078265	-
	2	0.5	1.3987286597097692	-1.3164938198704827e-3
	4	0.25	1.39401498944401	-3.142446843839538e-4
	8	0.125	1.3928542606080376	-7.738192239815274e-5
	16	6.25e-2	1.3925652358269314	-1.9268318740417455e-5
	32	3.125e-2	1.39249305267062	-4.812210420753379e-6
	64	1.5625e-2	1.3924750114568611	-1.2027475839282431e-6
	128	7.8125e-3	1.3924705014395398	-3.0066782142531185e-7
	256	3.90625-4	1.3924693739530933	-7.516576309522331e-8

Выводы

Практический метод оценки численного интегрирования квадратурными формулами Рунге действительно позволяет найти приближенное значение интеграла с заданной точности, а квадратурная формула НАСТ построенная по методу Гаусса с весовой функцией равной единице позволяет найти приближенное значение интеграла с соизмеримой точностью без итерационного процесса.