

Лабораторная работа №2

Ларин Егор. 4 группа 2 курс

23 марта 2022 г.

Теория

$$f_1(x) = e^{\cos x}$$

$$f_2(x) = |x| |x| - 1$$

Корни многочлена Чебышева на отрезке $[a, b]$

$$x_k^{ch} = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), a = -2, b = 2$$

Равностоящие узлы

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, a = -2, b = 2$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0; x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})f(x_0; \dots x_n),$$

где $f(x_0; \dots; x_k)$ – разделенная разность k -ого порядка.

Листинг кода

Многочлен представлен матрицей размера $n+1 \times n$. Первый столбец содержит интерполяционные узлы. Второй столбец содержит значения интерполируемой функции в узлах. Оставшиеся столбцы содержат разделенные разности соответствующих порядков.

```
from math import exp, cos, pi
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
a = -2
b = 2
```

```
f_1 = lambda x: exp(cos(x))
```

```

f_2 = lambda x: abs(x * abs(x) - 1)

x_ch = lambda k, n: (a+b)/2 + (b-a) / 2 * cos((2*k + 1)*pi / (2*n))
x_ = lambda i, n: a + i*(b-a)/n

def newton(x, y, n):
    xss = [x(i, n) for i in range(n)]
    yss = [y(xss[i]) for i in range(n)]
    coefficients = [xss, yss]
    for i in range(1, n):
        prev = coefficients[i]
        diff = []
        for j in range(0, n-i):
            d = (prev[j] - prev[j+1]) / (xss[j] - xss[j+1])
            diff.append(d)
        coefficients.append(diff)
    return coefficients

def calc(x, c):
    ans = 0
    factor = 1
    n = len(c[0])
    for i in range(n):
        ans = ans + c[i+1][0] * factor
        factor = factor * (x-c[0][i])
    return ans

def compare(f, n):
    c = newton(x_, f, n)
    c_ch = newton(x_ch, f, n)
    m = 100
    xss = [x_(i, m) for i in range(m)]
    print(n)
    print(f"Ordinary error: {max(f, c)}")
    print(f"Chebyshev error: {max(f, c_ch)}")
    print()

    plt.plot(
        xss, [calc(x,c) for x in xss], "b",
        xss, [calc(x,c_ch) for x in xss], "r",
        xss, [f(x) for x in xss], "g",

        c_ch[0], [f(x) for x in c_ch[0]], "ro",
        c[0], [f(x) for x in c[0]], "bo")
    plt.show()

```

```

def max(f, c):
    n = 101
    m = abs(calc(x_(0, n), c) - f(x_(0, n)))
    for i in range(n):
        temp = abs(calc(x_(i, n), c) - f(x_(i, n)))
        if temp > m:
            m = temp
    return m

print("f_1")
for i in [5, 10, 15, 20]:
    compare(f_1, i)

print("f_2")
for i in [5, 10, 15, 20]:
    compare(f_2, i)

```

Результаты вычислительного эксперимента

Рис. 1:

n	5	10	15	20
$\max_{i=0,100} P_n^{\text{ch}}(\bar{x}_i) - f_1(\bar{x}_i) $	0.07877237373371004	0.0004305670972446496	5.652205402384425e-06	1.287196382815381e-08
$\max_{i=0,100} P_n(\bar{x}_i) - f_1(\bar{x}_i) $	0.1071066346398275	0.005070752382276944	0.0002510978112153506	5.577302458981137e-06

n	5	10	15	20
$\max_{i=0,100} P_n(\bar{x}_i) - f_2(\bar{x}_i) $	0.7096576000000001	0.4099494027419128	7.968315511399289	53.089353742196664
$\max_{i=0,100} P_n^{\text{ch}}(\bar{x}_i) - f_2(\bar{x}_i) $	0.6893827824739549	0.15832528426358333	0.11322998663785246	0.16669214859051723

Выводы

Узлы Чебышева действительно являются оптимальными. При этом при интерполировании функций, производная которых не является непрерывной, возникает значительная ошибка, которая, справедливости ради, все еще меньше, чем при интерполировании по равностоящим узлам.

Графики

Зеленым обозначена исходная функция. Красным обозначен график полинома интерполяции, полученный при использовании узлов Чебышева. Зеленым обозначена исходная функция. Синим обозначен график полинома интерполяции, полученный при использовании равностоящих узлов.

Графики для f_1

Рис. 2: $n = 5$

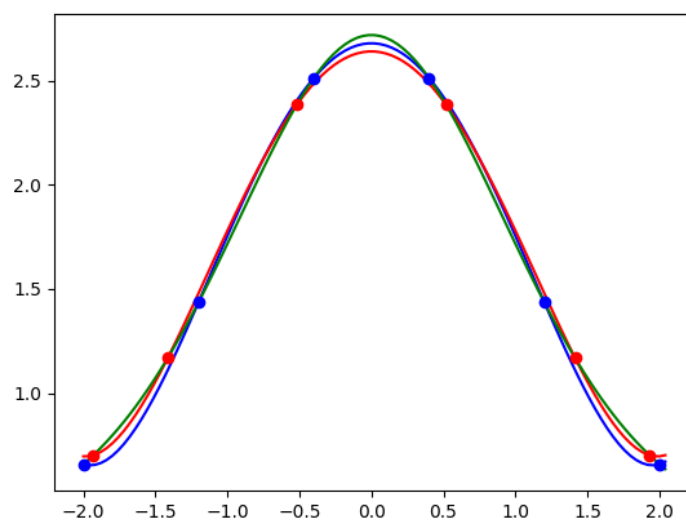


Рис. 3: $n = 10$

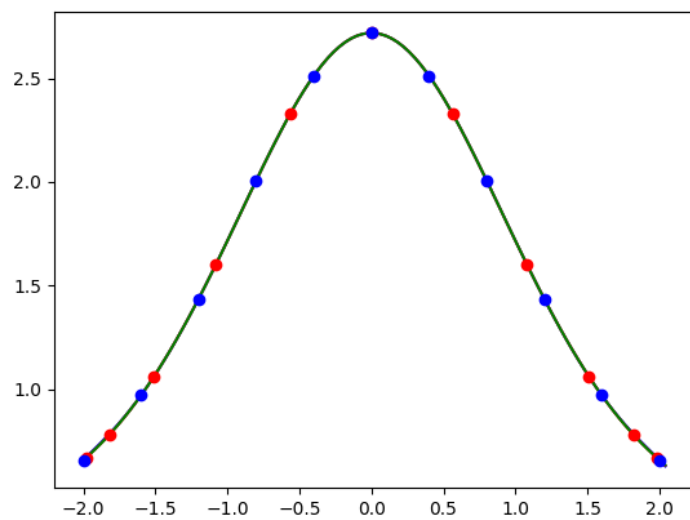


Рис. 4: $n = 15$

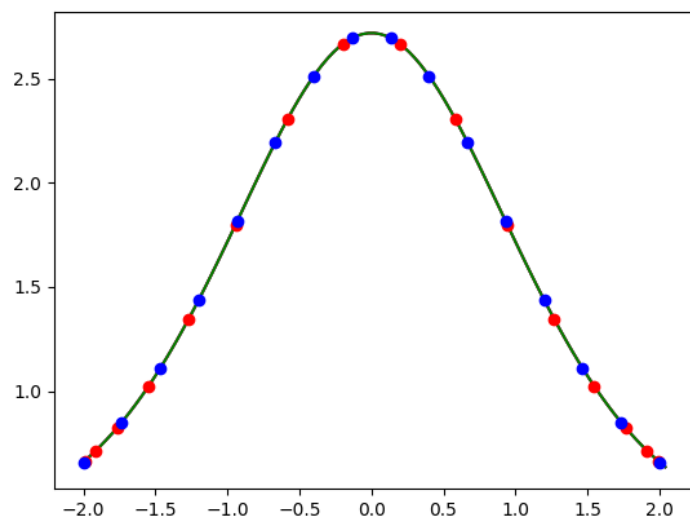
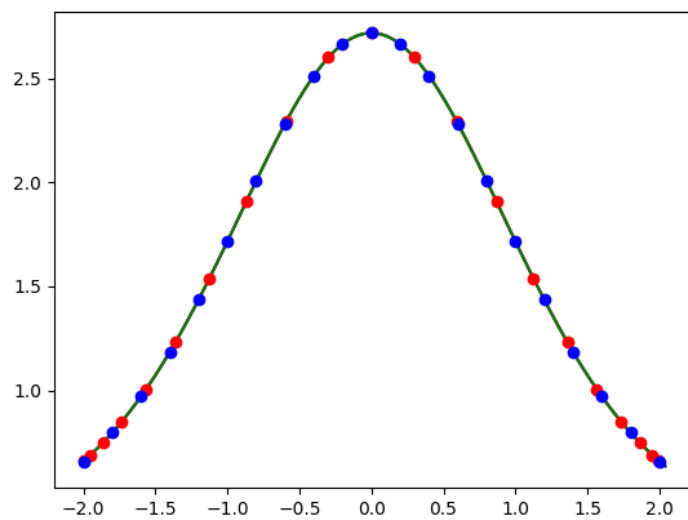


Рис. 5: $n = 20$



Графики для f_2

Рис. 6: $n = 5$

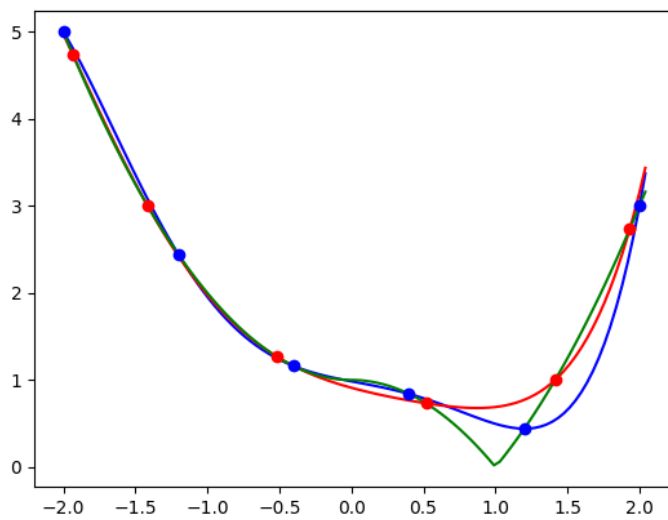


Рис. 7: $n = 10$

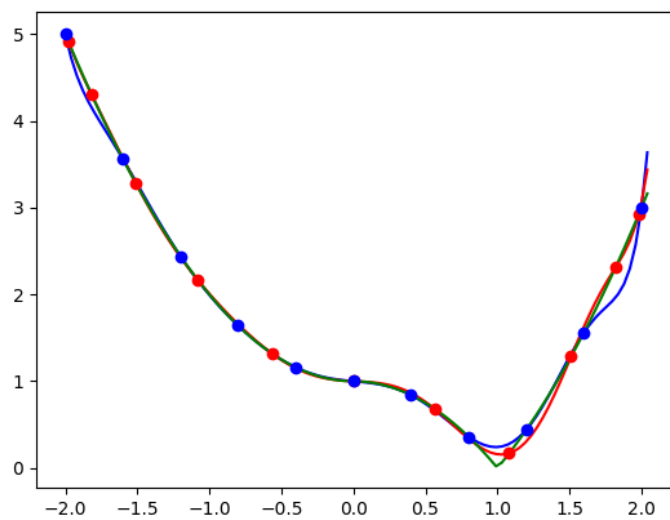


Рис. 8: $n = 15$

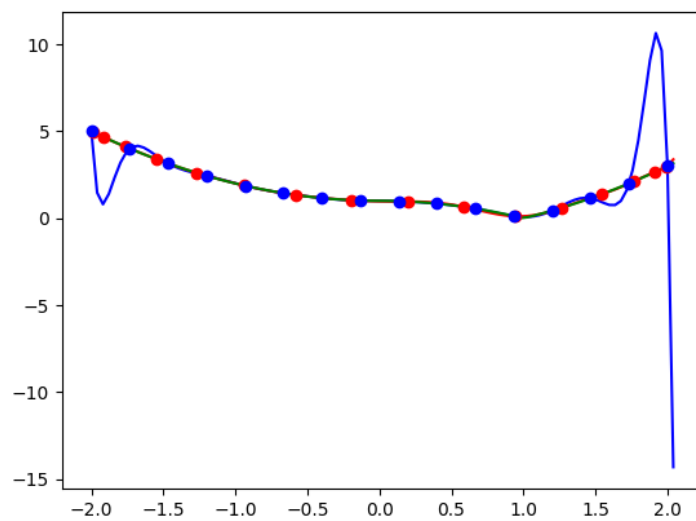


Рис. 9: $n = 20$

