

Воронежский государственный университет  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
Научно-образовательный математический центр  
Северо-Осетинского государственного  
университета им. К. Л. Хетагурова  
АО «Концерн «Созвездие»

# СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXV

Материалы Международной  
Воронежской весенней математической школы

(26–30 апреля 2024 г.)

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2024

УДК 517.53(97;98)  
ББК 22.16  
С56

*Конференция поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики, НОМЦ СОГУ и Воронежским госуниверситетом*

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

А. В. Ильин (председатель), А. В. Боровских, И. С. Ломов, А. П. Хромов (заместители председателя), И. В. Астахова, В. И. Борисов, А. В. Глушко, А. Н. Голубинский, В. Г. Задорожный, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, В. А. Костин, Г. А. Курина, Л. Н. Ляхов, С. Н. Медведев, А. Б. Муравник, Е. М. Семенов, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, С. А. Шабров, А. С. Шамаев, А. С. Бондарев (ученый секретарь)

ОРГКОМИТЕТ:

И. А. Соколов (председатель), М. Ш. Бурулцкая, Д. В. Костин, И. С. Ломов, А. П. Хромов (заместители председателя), И. В. Астахова, А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, Р. Ч. Кулаев, М. С. Никольский, И. В. Колесникова (технический секретарь)

**Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV** : материалы Международной Воронежской весенней математической школы (26–30 апреля 2024 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова ; АО «Концерн «Созвездие». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. — 434 с.

ISBN 978-5-9273-4021-7

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова и АО «Концерн «Созвездие». Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, теории операторов, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, технологий искусственного интеллекта, а также проблем преподавания математики.

УДК 517.53(97;98)  
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-4021-7

- © Воронежский государственный университет, 2024
- © Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2024
- © Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2024
- © НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова, 2024
- © АО «Концерн «Созвездие», 2024
- © Оформление. Издательский дом ВГУ, 2024

## Организаторы



Воронежский государственный  
университет



Московский государственный  
университет  
им. М. В. Ломоносова



Математический институт  
им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук



Московский центр  
фундаментальной и прикладной  
математики (математический  
центр МГУ)



Научно-образовательный  
математический центр  
Северо-Осетинского  
Государственного Университета  
им. К. Л. Хетагурова



АО «Концерн «Созвездие»

Конференция проводится при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (математический центр МГУ), Научно-образовательного математического центра СОГУ и ВГУ



# Содержание

<i>Абдувахобов Д.А.</i> Проблемы обучения математике в профессиональных школах . . . . .	32
<i>Абдулрахман Х.Н., Ерусалимский Я.М.</i> Об эквивалентности стационарных потоков в ресурсных сетях потокам в классических сетях . . . . .	33
<i>Абдурагимов Г.Э.</i> О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного ФДУ третьего порядка . . . . .	35
<i>Ал-Гарайхоли И.А.Х.</i> Об одной спектральной задаче с разрывными решениями . . . . .	36
<i>Амосов А.А., Крымов Н.Е.</i> Асимптотическая аппроксимация нестационарной задачи сложного теплообмена в системе серых стержней квадратного сечения . . . . .	38
<i>Амосов А.А., Крымов Н.Е.</i> Полудискретная аппроксимация нестационарной задачи сложного теплообмена в системе серых стержней квадратного сечения . . . . .	40
<i>Андрианова А.А., Мочалов С.А.</i> Алгоритм искусственных иммунных сетей для решения задач обнаружения вторжений . . . . .	42
<i>Анистратова Н.А., Бондарев А.С.</i> Программная реализация на языке Python приближенного решения одного параболического уравнения с периодическим по времени условием на решение проекционно-разностным методом . . . . .	44
<i>Антонов Д.Д., Дмитриев М.С., Чебакова В.Ю.</i> Применение метода Хука-Дживса для прогнозирования динамики распространения инфекционного заболевания . . . . .	48
<i>Асхабов С.Н.</i> Интегральное уравнение с ядром Теплица-Ганкеля и неоднородностью в линейной части . . . . .	50
<i>Асхатов Р.М.</i> Метод потенциалов при решении краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения . . . . .	52
<i>Баззаев А.К., Плиева А.В.</i> О разностном решении нелокальной краевой задачи для уравнения теплопроводности дробного порядка . . . . .	54
<i>Баринов А.М.</i> Одна задача достижения целевого множества при неполной информации . . . . .	55

<i>Баскаков А.Г., Гаркавенко Г.В., Костина Л.Н., Ускова Н.Б.</i>	
О состояниях обратимости и слабом подобии некоторых классов линейных операторов . . . . .	58
<i>Бекежанова В.Б., Гилёв Н.И., Шефер И.А.</i> Смена форм неустойчивости течений испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным газовым потоком . . . . .	60
<i>Белова Д.В.</i> Теорема существования и единственности классического решения смешанной задачи с инволюцией . .	62
<i>Бетина А.С.</i> Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора с инволюцией . . . . .	63
<i>Бетина А.С., Бурлуцкая М.Ш.</i> Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечным краевым условием . . . . .	64
<i>Бирюков А.М.</i> Разрешимость комплексной задачи Коши для уравнений с частными производными в пространствах функций с степенными особенностями при подходе к боковой границе конуса . . . . .	66
<i>Бондарев А.С., Петрова А.А., Пировский О.М.</i> О слабой разрешимости абстрактного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение .	67
<i>Боревич Е.З.</i> Нелинейная краевая задача параболического типа . . . . .	68
<i>Борисов Д.И., Сулейманов Р.Р.</i> Об операторных оценках для эллиптических уравнений в многомерных областях с сильно искривленной границей . . . . .	69
<i>Будочкина С.А.</i> О представимости одной системы ОДУ первого порядка в форме уравнений Биркгофа . . . . .	70
<i>Булатов Ю.Н.</i> Об одной задаче Коши для сингулярного волнового уравнения . . . . .	72
<i>Булинская Е.В.</i> Оптимальные стратегии в теории риска . .	74
<i>Бунтова Я.С.</i> Задача с нелокальными интегральными условиями первого рода для гиперболического уравнения . . . . .	75
<i>Васильев В.Б.</i> Усложненные функциональные пространства и их применение в теории псевдодифференциальных уравнений . . . . .	78
<i>Васильев В.Б., Каманда Бонгай А.Б.</i> Об одной дискретной краевой задаче в плоском секторе . . . . .	79

<i>Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А.</i> Математическое моделирование динамических процессов в системах измерения давления в газожидкостных средах . . . . .	81
<i>Виситаева М.Б.</i> Некоторые аспекты решения проблем с параметрами . . . . .	83
<i>Виситаева М.Б.</i> Полифункциональная модель развития воображения . . . . .	86
<i>Гарманова Т.А., Казимиров Д.Д., Шейпак И.А.</i> Связь точных оценок производных в пространствах Соболева с задачами наилучшего приближения многочленами . . .	89
<i>Герасименко В.А., Кунаковская О.В.</i> Многообразия струй отображений . . . . .	91
<i>Гермидер О.В., Попов В.Н.</i> Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тонких пластин . . . . .	94
<i>Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.</i> об одной физической интерпретации обобщенной системы Коши-Римана . . . .	96
<i>Горелов В.А.</i> Об алгебраических свойствах интегралов от произведений некоторых гипергеометрических функций . . . . .	98
<i>Горелов В.А.</i> Об интегралах от произведений степенных, показательных и гипергеометрических функций . . . . .	100
<i>Горелов В.А., Орлов К.И., Волков П.Е.</i> Об одном уравнении типа Брио-Буке . . . . .	102
<i>Горшков А.В.</i> Задача Ходжа-Гельмгольца . . . . .	103
<i>Григорьева Е.И.,</i> О равносходимости разложений по собственным функциям для операторов с инволюцией на графе . . . . .	105
<i>Давыдова М.Б.</i> Реализация программ СПО в рамках вуза. Проблемы и перспективы . . . . .	107
<i>Дайняк В.В., Латушкин К.В.</i> Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка . . . . .	110
<i>Джабраилов А.Л.</i> Решение дифференциального уравнения 2-го порядка специальной структуры . . . . .	112
<i>Дородный М.А.</i> Высокоэнергетическое усреднение многомерного нестационарного уравнения Шрёдингера . . .	114
<i>Дубинский Ю.А., Зубков П.В.</i> Системные неравенства Пуанкаре и задача Неймана . . . . .	115
<i>Дубцов Е.С.</i> Обратные меры Карлесона в единичном шаре .	117

<i>Егорова А.Ю.</i> Гладкость потенциала двойного слоя для параболических систем второго порядка в пространствах Зигмунда . . . . .	119
<i>Емельянов Д.П.</i> Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка меньше единицы . . . . .	121
<i>Ерусалимский Я.М.</i> О функционировании ресурсных сетей . . . . .	122
<i>Жалукевич Д.С.</i> Эволюционное уравнение второго порядка с линейной силой диссипации и уравнения типа Пенлеве . . . . .	124
<i>Женякова И.В., Черепова М.Ф.</i> Формула скачка для параболического потенциала простого слоя . . . . .	125
<i>Жильцова В.В., Вирченко Ю.П.</i> Асимптотические разложения решений одномерного уравнения теплопроводности с квадратичным источником . . . . .	127
<i>Завьялова Т.В.</i> Условия робастного управления стохастической системой со случайной структурой . . . . .	129
<i>Задорожная Н.С., Чуб Е.Г.</i> Теорема об изменении расхода для области фильтрации при одновременном уменьшении линии тока и увеличении линии наибольшего напора . . . . .	131
<i>Зайцева Н.В.</i> Нелокальная задача для одного вырождающегося уравнения смешанного типа . . . . .	133
<i>Загора Д.А., Фордук К.В.</i> Задача о колебаниях системы тел с жидкостями под действием упруго-демпфирующих сил . . . . .	134
<i>Зверев А.А., Шабров С.А., Голованева Ф.В.</i> О краевой задаче для уравнения с производными по мере и периодическими краевыми условиями . . . . .	135
<i>Зверева М.Б., Каменский М.И.</i> О модели деформаций системы стержней, расположенной вдоль геометрического графа-звезды, с ограничителем на перемещение в узле . . . . .	137
<i>Звягин А.В.</i> Разрешимость одной термовязкоупругой модели . . . . .	139
<i>Звягин В.Г., Турбин М.В.</i> О разрешимости в сильном смысле начально-краевой задачи для неоднородной несжимаемой модели Кельвина-Фойгта конечного порядка при отсутствии условия делимости от нуля начального условия на плотность жидкости . . . . .	141



<i>Звягин А.В., Струков М.И.</i> О слабой разрешимости модели движения растворов полимеров с учетом памяти среды . . . . .	143
<i>Зубова С.П., Раецкая Е.В.</i> О единственности матрицы обратной связи в линейной динамической системе управления . . . . .	145
<i>Ибадов Э.Дж., Гаджиева Г.Р.</i> Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака . . . . .	146
<i>Иванова М.С., Ушаков С.Н.</i> Достаточные условия существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода . . . . .	148
<i>Калинин А.В., Тюхтина А.А.</i> Асимптотический анализ квазистационарных электромагнитных полей в атмосфере . . . . .	150
<i>Каменский М.И., Корнева П.С.</i> К задаче о периодических решениях дифференциального включения с гистерезисной нелинейностью . . . . .	152
<i>Каплан Д.А.</i> Об одном интегральном уравнении . . . . .	152
<i>Катрахова А.А., Купцов В.С.</i> О сходимости билинейных рядов, составленных из частных производных собственных функций одной краевой задачи для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	154
<i>Качкина А.В.</i> Дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотическое разложения его спектра . . . . .	156
<i>Клячин А.А., Клячин В.А.</i> Интегральные преобразования в задачах компьютерного зрения . . . . .	158
<i>Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г.</i> Математическая модель теории экономического роста и приближенные решения . . . . .	160
<i>Кокурин М.Ю.</i> Системы типа М.М. Лаврентьева и задача реконструкции параметров вязкоупругих сред . . . . .	162
<i>Кокурин М.М., Гаврилова А.В., Абду Рауф Ч.М.</i> Новые подходы к построению и анализу компартментальных эпидемиологических моделей . . . . .	163
<i>Кокурин М.М., Паймеров С.К.</i> Итеративно регуляризованные методы поиска квазирешений нелинейных операторных уравнений и задача ЯМР-спектроскопии . . . . .	165

<i>Кокурин М.М., Пасынков Д.В., Пахматов Д.А.</i> Новые подходы к задаче эластографии стенки артерии . . . . .	167
<i>Колесников Г.В., Колесникова И.А.</i> О вариационном принципе для некоторой нелокальной краевой задачи . . . .	168
<i>Колесникова И.В.</i> Ветвление решений уравнения Свифта-Хоенберга с двойным краевым условием Дирихле . . .	170
<i>Коненков А.Н.</i> О существовании классического решения первой краевой задачи . . . . .	171
<i>Корзюк В.И., Козловская И.С.</i> Классическое решение произвольной гладкости для волнового уравнения с производными высокого порядка в граничном условии . .	173
<i>Корнев В.В.</i> О решении смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения с производными в краевых условиях . . . . .	175
<i>Корнев В.В., Хромов А.П.</i> Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для однородного волнового уравнения с граничными условиями, содержащими производные . . . . .	177
<i>Коровина М.В.</i> Исследование асимптотик решений в окрестности иррегулярных особых точек для дифференциальных уравнений 2-го порядка . . . . .	182
<i>Коростелева Д.М.</i> Функционально-алгебраические задачи на собственные значения механики тонкостенных конструкций . . . . .	184
<i>Кос О.И., Смирнов В.Ю.</i> Оптимизация затрат на эксплуатацию сложной технической системы с помощью генетического алгоритма искусственного интеллекта . . . .	186
<i>Кос О.И., Смирнов В.Ю.</i> Применение алгоритма Хейбба для классификации качества проведенных ремонтов сложных технических систем . . . . .	188
<i>Костенко Е.И.</i> Исследование слабой разрешимости одной модели движения нелинейно-запаздывающей жидкости с температурой . . . . .	190
<i>Костерин Д.С.</i> Устойчивость кусочно-постоянных решений одного класса пространственно-распределенных краевых задач . . . . .	192
<i>Костин В.А., Костин Д.В., Силаева М.Н.</i> Представление решения краевых задач с генератором равномерно ограниченной $C_0$ -полугруппы. . . . .	194

<i>Костин Д.В., Тарабанько А.А., Царев С.Л.</i> Об одной нелинейной математической модели процесса погружения сваи в грунт . . . . .	196
<i>Кудрявцев К.Н.</i> Одна многошаговая иерархическая игра при неопределенности . . . . .	197
<i>Кузенков О.А.</i> Информационный анализ метода глобальной оптимизации и корректное условие остановки оптимизационной процедуры . . . . .	200
<i>Кулаев Р.Ч.</i> О существовании решений нелинейной краевой задачи четвертого порядка на графе . . . . .	202
<i>Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г.</i> Локальная динамика модели мультипликатор-акселератор . . . . .	205
<i>Курбанов В.М., Буксаева Л.З.</i> Теорема о равномерной равносходимости для разрывного оператора Дирака с потенциалом из $L_p(0, 2\pi)$ , $p > 2$ . . . . .	207
<i>Курбанов В.М., Годжаева Х.Р.</i> Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора с суммируемыми матричными коэффициентами . . . . .	209
<i>Курбатов В.Г., Хороших Е.Д., Чурсин В.Ю.</i> Вычисление функции Грина с помощью функций Лагерра . . . . .	211
<i>Кыров В.А.</i> Поверхности на собственнo гельмгольцевой группе . . . . .	213
<i>Лаврентьева М.А., Левина Л.В., Пеньков В.Б.</i> Актуальные исследования термоэластостатических состояний . . . . .	215
<i>Лазарев Н.П.</i> Обратная задача о расположении жесткого включения для модели о контакте неоднородного трехмерного тела . . . . .	217
<i>Латыпов И.А., Латыпова Н.В.</i> Фрактальный подход к организации нейросетей . . . . .	218
<i>Лепетков Д.Р.</i> Применение ячеек Вороного в проблеме рассеяния звуковой волны жестким телом, заданным нерегулярной сеткой . . . . .	220
<i>Лобанова Н.И., Яремко Н.Н.</i> Дифференциальные уравнения как средство формирования целостной картины мира школьника . . . . .	222
<i>Лобода Н.А., Сташ А.Х.</i> О существенных спектрах показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем . . . . .	224

<i>Ломов И.С.</i> Решение обобщенной смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения . . . . .	226
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Смешанная задача для модельного двухскоростного волнового уравнения при нехарактеристической кривой производной в четверти плоскости . . . . .	228
<i>Луговскова Ю.П.</i> Нормализация уровня глюкозы в крови методом дифференциальных игр . . . . .	232
<i>Лысенко В.В., Ломовцев Ф.Е.</i> Физико-геометрическая интерпретация решения вспомогательной задачи для полуограниченной струны . . . . .	233
<i>Ляхов Л.Н., Калитвин В.А., Лапина М.Г.</i> О непрерывности преобразования Радона-Киприянова функций, определенных в шаре . . . . .	238
<i>Ляхов Л.Н., Рошупкин С.А.</i> О некоторых неравенствах для сингулярного псевдодифференциального оператора Киприянова-Катрахова . . . . .	240
<i>Мажжиглова М.Г.</i> О функции Грина задачи с условиями типа Штурма для дифференциального уравнения дробного порядка . . . . .	242
<i>Мазепа Е.А., Рябошлыкова Д.К.</i> Краевые задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера при вариациях его потенциала на квазимодельных римановых многообразиях . . . . .	243
<i>Маркина Е.И.</i> Периодические решения уравнений с малым отклонением аргумента от некоторого фиксированного запаздывания . . . . .	245
<i>Машкин М.Н., Смирнов В.Ю.</i> Энтропия распределения непрерывной случайной величины . . . . .	246
<i>Мельников Н.Б., Резер Б.И.</i> Асимптотические формулы для намагниченности и химического потенциала ферромагнитных металлов при низких температурах . . .	248
<i>Мозокина А.С.</i> Математическое моделирование влияния воспаления на вирусную инфекцию . . . . .	250
<i>Мышеловка Л.А., Вирченко Ю.П.</i> Одномерная задача переноса теплового излучения радиационно-кондуктивного теплообмена . . . . .	251
<i>Наимов А.Н., Быстрецкий М.В.</i> Исследование периодических решений двумерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	253

<i>Никитина С.А.</i> Применение нечеткого моделирования для оценки финансовых инструментов . . . . .	255
<i>Обуховский В.В., Корнев С.В., Гетманова Е.Н.</i> О методе случайных интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений . . . . .	256
<i>Обуховский В.В., Петросян Г.Г., Сорока М.С.</i> О топологических свойствах множества решений полулинейного дифференциального включения дробного порядка $q \in (1, 2)$ с невыпуклой правой частью . . . . .	258
<i>Орлов В.П.</i> О моделях вязкоупругости Олдройдовского типа	260
<i>Ощепкова С.Н., Спивак А.С.</i> Теорема о среднем для жёсткого лапласиана на стратифицированном множестве .	262
<i>Панов Е.Ю.</i> Об автомодельных решениях задачи Стефана-Дирихле . . . . .	263
<i>Пастухова С.Е.</i> Улучшенные резольвентные аппроксимации в усреднении операторов высокого порядка . . . . .	265
<i>Пенкин О.М., Поздняков А.А.</i> Об оценке первого собственного значения Лапласиана на квадратной сетке. . . . .	267
<i>Перескоков А.В.</i> Об асимптотике спектра оператора типа Хартри, содержащего функцию Макдональда . . . . .	268
<i>Петров И.В.</i> О применении метода Fine-Tuning Bert для сокрытия персональных данных в текстовых сообщениях с использованием задачи распознавания именнованных сущностей . . . . .	270
<i>Петросян Г.Г.</i> Обобщенная периодическая задача для дифференциальных включений с дробной производной порядка $q \in (1, 2)$ . . . . .	271
<i>Пискарев С.И.</i> Аппроксимация дробных уравнений . . . . .	273
<i>Погребняк М.А.</i> Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами . . . . .	274
<i>Половинкина М.В., Половинкин И.П.</i> К вопросу о восстановлении решения смешанной задачи для сингулярного уравнения колебаний . . . . .	276
<i>Попов И.Е., Резникова А.С.</i> Пространственная балансировка обучающего набора данных методом согласованного синтеза . . . . .	279
<i>Провоторова Л.В.</i> Об одной краевой задаче на ядре оператора следа . . . . .	281

<i>Проконьева Д.Б., Коробецкая Ю.И., Головкин Н.И.</i> Достаточные условия существования стационарного режима СМО с диффузионной интенсивностью входного потока, ненулевым коэффициентом сноса . . . . .	283
<i>Прядиев В.Л.</i> Интегральная формула решения волнового уравнения на геометрическом графе при $\delta$ -взаимодействии в вершинах . . . . .	285
<i>Раецкая Е.В.</i> Решение задачи управления для динамической системы в частных производных с дополнительным условием . . . . .	286
<i>Раецкий К.А.</i> Аналитическое построение стабилизированных управления и состояния линейной динамической системы с многоточечными условиями . . . . .	288
<i>Райцин А.М.</i> Применение кумулянтов для идентификации пространственного распределения интенсивности лазерного пучка . . . . .	290
<i>Расулов А.Б., Федоров Ю.С., Сергеева А.М.</i> Задачи типа Римана-Гильберта для уравнения Коши-Римана с младшим коэффициентом имеющим особенность в окружности . . . . .	292
<i>Расулов А.Б., Якивич Н.В.</i> Интегральные представления для уравнения Коши-Римана с сильными особенностями в младших коэффициентах в области с кусочно-гладкой границей . . . . .	294
<i>Ронжина М.И., Манита Л.А.</i> Устойчивость логарифмических спиралей к малым возмущениям в задачах управления с особой экстремалью второго порядка . . . . .	296
<i>Россовский Л.Е., Товсултанов А.А.</i> Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение со сдвигами и сжатием аргумента . . . . .	298
<i>Русаков В.А.</i> Алгоритм нахождения максимального всплеска в древовидной сети . . . . .	299
<i>Рустанов А.Р., Арсеньева О.Е., Харитонов С.В.</i> Гармонические приближенно транссасакские многообразия . . . . .	301
<i>Рыжков В.С.</i> Определение обобщённого решения начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом . . . . .	303
<i>Сабитов К.Б.</i> Задача Дирихле для трехмерного аналога уравнения Лаврентьева-Бицадзе . . . . .	307

<i>Сакбаев В.Ж.</i> Вариационные и краевые задачи для уравнения Лапласа-Вольтерра в бесконечномерном пространстве . . . . .	311
<i>Седых И.А., Стругов И.В.</i> Анализ актуальных подходов к моделированию рейтинговых систем . . . . .	312
<i>Седых И.А., Тамбовцев А.А.</i> Использование сетей Петри при решении производственных, управленческих и оптимизационных задач . . . . .	314
<i>Сёмина В.В., Сёмин Г.В.</i> Применение современных цифровых технологий в обучении математике . . . . .	316
<i>Сёмина В.В., Сёмин Г.В., Шмырин А.М.</i> Применение окрестностных систем для моделирования тепловых режимов . . . . .	318
<i>Ситников К.С., Андрианова А.А.</i> Муравьиные алгоритмы для решения задач транспортной логистики . . . . .	320
<i>Солиев Ю.С.</i> О порядке сходимости квадратурных процессов с кратными узлами для сингулярного интеграла с ядром Коши . . . . .	322
<i>Соловьёв П.С.</i> Существование положительных решений нелинейных спектральных задач . . . . .	325
<i>Солонченко Р.Е., Вирченко Ю.П.</i> Оценки числа несамопересекающихся путей на квадратной решетке . . . . .	327
<i>Сомова П.А., Гурина Е.И.</i> Численное и компьютерное моделирование для оценки теплопередачи в стеклопакетах . . . . .	329
<i>Стенюхин Л.В.</i> О решении одного гистерезисного уравнения с дробной производной . . . . .	331
<i>Степанов А.В.</i> О влиянии аппроксимации STSP-распределением на оценку интервала охвата непрерывной случайной величины . . . . .	333
<i>Теволде А.М., Вирченко Ю.П.</i> Унимодальность распределения вероятностей значений экстенсивного функционала от траекторий случайной последовательности . . . . .	335
<i>Титаренко С.А.</i> Эффект клеточности для модельных изоспектральных билиардов . . . . .	337
<i>Тотиева Ж.Д.</i> Обратная задача для волнового уравнения с памятью и акустическими граничными условиями . . . . .	339
<i>Трусова Н.И., Барышева И.В., Фролова Е.В.</i> О частноинтегральном операторе со слабой особенностью в анизотропном пространстве Лебега . . . . .	341

<i>Туренова Е.Л., Добрынина И.В.</i> Проблема формирования алгоритмического мышления студентов при изучении высшей математики . . . . .	343
<i>Тырсин А.Н.</i> Итерационная выпуклая реализация робастного оценивания линейных регрессионных зависимостей . . . . .	345
<i>Ульвачёва Т.А.</i> Теоремы существования интегральных решений системы полулинейных дифференциальных включений дробного порядка . . . . .	347
<i>Уртаева А.А.</i> Условия простоты собственных значений дифференциального оператора на графе . . . . .	349
<i>Усков В.И.</i> Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	351
<i>Устилко Е.В., Ломовцев Ф.Е.</i> Глобальная теорема корректности смешанной задачи для классических решений волнового уравнения с нестационарными характеристическими косыми производными ограниченной струны . . . . .	353
<i>Федоров К.Д.</i> Первая начально-краевая задача для параболических систем в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей . . . . .	355
<i>Филатов В.В.</i> Массивные множества и конусы модельных многообразий . . . . .	357
<i>Филиппов М.Н., Туртин Д.В., Степович М.А., Калманович В.В.</i> Об одной нестационарной задаче теплопроводности . . . . .	359
<i>Фомин В.И.</i> Об $n$ -компонентных функциональных операторах операторов . . . . .	360
<i>Хабибуллин Б.Н.</i> Распределения единственности для голоморфных функций на круге . . . . .	365
<i>Хацкевич В.Л., Махинова О.А.</i> Применение метода функций Грина к решению линейных дифференциальных уравнений высокого порядка с нечеткозначной правой частью . . . . .	367
<i>Царьков И.Г.</i> Свойство солнечности для ограничено слабо компактных множеств . . . . .	371
<i>Цехан О.Б.</i> Об аппроксимациях расщепляющего преобразования линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием . . . . .	374



<i>Чев Е.С.</i> Корректность смешанной задачи для одного гиперболического уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями . . . . .	376
<i>Черкашин Д.А., Вирченко Ю.П.</i> Иерархические решеточные модели теории перколяции . . . . .	378
<i>Читоркин Е.Е.</i> Локальная разрешимость и устойчивость обратной задачи Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и многочленами в краевом условии . . . .	380
<i>Чуб Е.Г., Задорожная Н.С.</i> Теоремы об изменении значений функции тока и потенциальной функции для области фильтрации, ограниченной одной линией тока и тремя потенциальными линиями . . . . .	382
<i>Шабров С.А., Бахтина Ж.И., Гридяева Т.В., Манучарова С.Е.</i> О стилтесовской струне с негладкими решениями и вязкоупругим основанием . . . . .	384
<i>Шайна Е.А., Шабров С.А.</i> Об аналоге теоремы сравнения для однородного разнорядкового уравнения . . . . .	385
<i>Шамолин М.В.</i> Инварианты динамических систем нечетного порядка с диссипацией . . . . .	387
<i>Шамоян Р.Ф., Беднаж В.А.</i> Об одной задаче о преобразованиях Теплица в некоторых классах аналитических функций . . . . .	389
<i>Шананин Н.А.</i> О продолжении локальной однородности решений дифференциальных уравнений . . . . .	391
<i>Шананин В.А., Алексанян Д.А.</i> Использование троичной логики в нейронных сетях . . . . .	393
<i>Шаполова И.М., Вирченко Ю.П.</i> Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образца пористого материала . . . . .	395
<i>Шкурай И.А.</i> О необходимости преподавания математического моделирования студентам педагогического направления . . . . .	397
<i>Шорохов С.Г.</i> Обучение нейронной сети для гиперболического уравнения при помощи квазиклассического функционала . . . . .	399
<i>Шубарин М.А.</i> Инвариантные классы пространств Фреше и их применение в структурной теории пространств . . .	401
<i>Эгамов А.И.</i> Современные требования написания программ по дисциплине «Вычислительные методы» . . . . .	403

<i>Янченко А.Я.</i> О некоторых аналитических и арифметических свойствах нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений . . . . .	405
<i>Gebreslasie H.F., Vasilyev V.B.</i> Constructing solutions of Pseudo-Differential Equations with integral boundary conditions in multidimensional space with a cut. . . . .	407
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Classical Solution of a Mixed Problem with the Dirichlet and Neumann Conditions for Nonlinear Biwave Equation . . . . .	409
<i>Kovalevsky A.A.</i> Variational inequalities with nonlinear elliptic operators and measurable bilateral constraints . . . . .	411
<i>Litvinov V.L., Litvinova K.V.</i> Vibrations of a console with a moving boundary laying on an elastic base . . . . .	413
<i>Medvedev A.V., Kuzenkov O.A.</i> Modeling the competition of languages in a bilingual community with the effect of mutual assistance . . . . .	414
<i>Misiuk V.R.</i> Concerning One Embedding Theorem . . . . .	418
<i>Naligama C.A., Tsekhan O.B.</i> Parameter free conditions of the controllability of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay . . . . .	419
<i>Palshin G.P.</i> Liouville Foliation in the Constrained Problem of Three Magnetic Vortices . . . . .	421
<i>Senouci A.</i> Equivalent semi-normes for Nikolskii-Besov spaces . . . . .	423
<i>Takhirov J.O.</i> A free boundary problem for the predator-prey model with fear effect . . . . .	425
<i>Tashpulatov S.M.</i> Structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of six electron systems in the Hubbard model. Fourth triplet state . . . . .	427

# Contents

<i>Abduvakhobov D.A.</i> Problems of teaching mathematics in professional schools . . . . .	32
<i>Abdulrahman H.N., Erusalimskiy I.M.</i> About the functioning of resource networks . . . . .	33
<i>Abduragimov G.E.</i> On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear third-order FDE . . . . .	35
<i>Al-Garayhali E.A.H.</i> On a spectral problem with discontinuous solutions . . . . .	36
<i>Amosov A.A., Krymov N.E.</i> Asymptotic approximation of the non-stationary complex heat transfer problem in a system of grey rods with square cross section. . . . .	38
<i>Amosov A.A., Krymov N.E.</i> Semi-discrete approximation of the non-stationary complex heat transfer problem in a system of grey rods with square cross section. . . . .	40
<i>Andrianova A.A., Mochalov S.A.</i> An artificial immune network algorithm for solving intrusion detection problems . . . .	42
<i>Anistratova N.A., Bondarev A.S.</i> Python-implementation of the approximate solving an parabolic equation with a periodic condition in time for a solution by the projection-difference method . . . . .	44
<i>Antonov D.D., Dmitriev M.S., Chebakova V.Yu.</i> Application of the Hooke-Jeeves method to predict the dynamics of the spread of an infectious disease . . . . .	48
<i>Askhabov S.N.</i> Nonlinear integro-differential equation of the third order convolution type . . . . .	50
<i>Askhatov R.M.</i> The Solution of the Boundary Value Problems for a Degenerate Elliptic Equation by the Method of Potentials . . . . .	52
<i>Bazzaev A.K., Plieva A.V.</i> On the difference solution of a nonlocal boundary value problem for the heat equation of fractional order . . . . .	54
<i>Barinov A.M.</i> One problem of achieving a target set with incomplete information . . . . .	55
<i>Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Kostina L.N., Uskova N.B.</i> On invertibility states and weak similarity of some classes of linear operators . . . . .	58

<i>Bekezhanova V.B., Gilev N.I., Shefer I.A.</i> Change in the instability forms of evaporating liquid flows driven by a laminar gas flux . . . . .	60
<i>Belova D.V.</i> Existence and uniqueness theorem for the classical solution of a mixed problem with an involution . . . . .	62
<i>Betina A.S.</i> Asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of an operator with involution . . . . .	63
<i>Betina A.S., Burlutskaya M.Sh.</i> A classic solution of a mixed problem for an equation with an involution and a two-point boundary condition . . . . .	64
<i>Biryukov A.M.</i> Solvability of the complex Cauchy problem for partial differential equations in spaces of functions with power-law singularities when approaching the lateral boundary of a cone . . . . .	66
<i>Bondarev A.S., Petrova A.A., Pirovskih O.M.</i> About a weak solvability of an abstract parabolic equation with a non-local condition on time . . . . .	67
<i>Borevich E.Z.</i> Bifurcation of solutions of the nonlinear boundary-value problem . . . . .	68
<i>Borisov D.I., Suleimanov R.R.</i> On operator estimates for elliptic equations in multi-dimensional domains with a strongly curved boundary . . . . .	69
<i>Budochkina S.A.</i> About the representativeness of one first-order ODE system in the form of Birkhoff equations . . .	70
<i>Bulatov Yu.N.</i> On one Cauchy problem for a singular wave equation . . . . .	72
<i>Bulinskaya E.V.</i> Optimal strategies in risk theory . . . . .	74
<i>Buntova Y.S.</i> A non-local problem with integral conditions of the first kind for the hyperbolic equation . . . . .	75
<i>Vasilyev V.B.</i> Complicated functional spaces and their applications in the theory of pseudo-differential equations	78
<i>Vasiliev V.B., Kamanda Bongai A.B.</i> About one discrete boundary task in a flat sector . . . . .	79
<i>Velmisov P.A., Tamarova Yu.A.</i> Mathematical modeling of dynamic processes in pressure measurement systems in gas-liquid media . . . . .	81
<i>Visitaeva M.B.</i> Some aspects of solving problems with parameters . . . . .	83
<i>Visitaeva M.B.</i> A multifunctional model of imagination development . . . . .	86

<i>Garmanova T.A., Kazimirov D.D., Sheipak I.A.</i> The relationship of exact estimates of derivatives in Sobolev spaces with the problems of the best approximation by polynomials . . . . .	89
<i>Gerasimenko V.A., Kunakovskaya O.V.</i> Manifolds of jets of maps . . . . .	91
<i>Germider O.V., Popov V.N.</i> Mathematical modeling of the stress-strain state of thin plates . . . . .	94
<i>Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A.</i> On a physical interpretation of the generalized Cauchy-Riemann system . . . . .	96
<i>Gorelov V.A.</i> On algebraic properties of integrals of products of some hypergeometric functions . . . . .	98
<i>Gorelov V.A.</i> On integrals of products of power, exponential and hypergeometric functions . . . . .	100
<i>Gorelov V.A., Orlov K.I., Volkov P.E.</i> About one Briot-Bouquet type equation . . . . .	102
<i>Gorshkov A.V.</i> The Hodge-Helmholtz problem . . . . .	103
<i>Grigorieva E.I.</i> On the equivalence of eigenfunction expansions for operators with involution on a graph . . . . .	105
<i>Davydova M.B.</i> Realization of the programs of the university. Problems and prospects . . . . .	107
<i>Dainyak V.V., Latushkin K.V.</i> Some boundary value problems for a linear differential equation of the fifth order . . . . .	110
<i>Dzhabrailov A.L.</i> Solution of a second order differential equation of a special structure . . . . .	112
<i>Dorodnyi M.A.</i> High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation . . . . .	114
<i>Dubinsky Yu.A., Zubkov P.V.</i> Poincaré's systemic inequalities and the Neumann problem . . . . .	115
<i>Dubtsov E.S.</i> Reverse Carleson measures in the unit ball . . . . .	117
<i>Egorova A.Yu.</i> , Smoothness of the double layer potential for second order parabolic systems in Zygmund spaces . . . . .	119
<i>Emel'yanov D.P.</i> Construction of the Solution for a Problem for an Elliptic Differential Equation with a Noninteger Degeneration Order Less than One . . . . .	121
<i>Erusalimskiy I.M.</i> About the functioning of resource networks . . . . .	122
<i>Zhalukevich D.S.</i> Second-order evolutionary equation with linear dissipation force and Painlevé type equations . . . . .	124

<i>Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.</i> Jump formula for a parabolic single layer potential . . . . .	125
<i>Zhil'tsova V.V., Virchenko Yu.P.</i> Asymptotic expansions of solutions of a one-dimensional heat equation with a quadratic source . . . . .	127
<i>Zavyalova T.V.</i> Conditions for robust control of a stochastic system with a random structure . . . . .	129
<i>Zadorozhnaya N.S., Chub E.G.</i> The theorem on changing the flow rate for the filtration area while simultaneously reducing the current line and increasing the line of maximum pressure . . . . .	131
<i>Zaitseva N.V.</i> Nonlocal problem for one degenerate mixed type equation . . . . .	133
<i>Zakora D.A., Forduk K.V.</i> Problem on oscillations of a system of bodies with fluids under the action of elastic-damping forces . . . . .	134
<i>Zverev A.A., Shabrov S.A., Golovaneva F.V.</i> On a boundary value problem for an equation with measure derivatives and periodic boundary conditions . . . . .	135
<i>Zvereva M.B., Kamenskii M.I.</i> On the deformation model of a system of rods located along a geometric star shaped graph with a limiter on the movement at a node . . . . .	137
<i>Zvyagin A.V.</i> Solvability of one termoviscoelastic model . . . . .	139
<i>Zvyagin V.G., Turbin M.V.</i> On strong solvability of the initial boundary value problem for the inhomogeneous incompressible Kelvin-Voigt model of finite order in the absence of the condition that the initial condition on the fluid density is separated from zero . . . . .	141
<i>Zvyagin A.V., Strukov M.I.</i> On the weak solvability of the model of motion of polymer solutions taking into account the memory of the medium . . . . .	143
<i>Zubova S.P., Raetskaya E.V.</i> On the uniqueness of the matrix feedback in a linear dynamic control system . . . . .	145
<i>Ibadov E.J., Hacıyeva G.R.</i> Theorem on componentwise equiconvergence for the Dirac operator . . . . .	146
<i>Ivanova M.S., Ushakov S.N.</i> On the conditions of existence of a solution in the problem of determining the location of flying object by three reference points using the azimuthal-angle-location method . . . . .	148

<i>Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.</i> Asymptotic analysis of quasi-stationary electromagnetic fields in the atmosphere . . . .	150
<i>Kamenskii M.I., Korneva P.S.</i> On the problem of periodic solutions of a differential inclusion with hysteretic nonlinearity . . . . .	152
<i>Kaplan D.A.</i> About one integral equation . . . . .	152
<i>Katrakhova A.A., Kuptsov V.S.</i> On the convergence of bilinear series composed of partial derivatives of eigenfunctions of one edge problem for the singular differential equation of second order . . . . .	154
<i>Kachkina A.V.</i> Differential Sturm-Liouville operator with rapidly growing potential and asymptotic expansion of its spectrum . . . . .	156
<i>Klyachin A.A., Klyachin V.A.</i> Integral transformations in computer vision problems . . . . .	158
<i>Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G.</i> Mathematical model of the theory of economic growth and approximate solutions . . . . .	160
<i>Kokurin M.Yu. M.M.</i> Lavrentiev type systems and the problem of reconstructing parameters of viscoelastic media . . . .	162
<i>Kokurin M.M., Gavrilova A.V., Abdou Raouf Ch.M.</i> New approaches to the construction and analysis of compartmental epidemiological models . . . . .	163
<i>Kokurin M.M., Paimenov S.K.</i> Iteratively regularized methods for approximating quasi-solutions to nonlinear operator equations and the problem of NMR spectroscopy . . . . .	165
<i>Kokurin M.M., Pasyukov D.V., Pakhmutov D.A.</i> New approaches to the problem of artery wall elastography . .	167
<i>Kolesnikov G.V., Kolesnikova I.A.</i> On the variation principle for some non-local edge problem . . . . .	168
<i>Kolesnikova I.V.</i> Branching solutions of the Swift-Hohenberg equation with the Dirichlet double edge condition . . . . .	170
<i>Konenkov A.N.</i> On existence of a classical solution of the first boundary value problem for parabolic systems on the plane in domains with a smooth boundary . . . . .	171
<i>Korzyuk V.I., Kozlovskaja I.S.</i> Classical solution of arbitrary smoothness for a wave equation with high-order derivatives in a boundary condition . . . . .	173

<i>Kornev V.V.</i> On the solution of the mixed problem for the non-homogeneous wave equation with derivatives in boundary conditions . . . . .	175
<i>Kornev V.V., Khromov A.P.</i> Divergent series and generalized mixed problem for homogeneous wave equation with boundary conditions containing derivatives . . . . .	177
<i>Korovina M.V.</i> Investigation of asymptotics to solutions in the vicinity of irregular singular points for 2nd order differential equations . . . . .	182
<i>Korosteleva D.M.</i> Functional algebraic eigenvalue problems of mechanics of thin-walled structures . . . . .	184
<i>Kos O.I., Smirnov V. Yu.</i> Optimizing the cost of operating a complex technical system using a genetic algorithm of artificial intelligence . . . . .	186
<i>Kos O.I., Smirnov V. Yu.</i> Application of Hebb algorithm for classification of quality of performed repairs of complex technical systems . . . . .	188
<i>Kostenko E.I.</i> Investigation of the weak solvability of one model of a nonlinear retarded fluid with temperature motion . .	190
<i>Kosterin D.C.</i> Stability of piecemeal solutions of one class of spatially distributed edge problems . . . . .	192
<i>Kostin V.A., Kostin D.V., Silaeva M.N.</i> Representation of the solution of boundary value problems with a generator of a uniformly bounded $C_0$ -semigroup . . . . .	194
<i>Kostin D.V., Tarabanko A.A., Tsarev S.L.</i> One non-linear mathematical model of the sinking process . . . . .	196
<i>Kudryavtsev K.N.</i> One discrete-time hierarchical game under uncertainty . . . . .	197
<i>Kuzenkov O.A.</i> The concept of information in the system of competencies of digital culture . . . . .	200
<i>Kulaev R.Ch.</i> Sturm method for a fourth order BVP on a graph . . . . .	202
<i>Kulikov A.N., Kulikov D.A., Frolov D.G.</i> Local dynamics of the multiplier accelerator model . . . . .	205
<i>Kurbanov V.M., Buksayeva L.Z.</i> A theorem on uniform equiconvergence for a discontinuous Dirac operator with potential from $L_p(0, 2\pi)$ , $p > 2$ . . . . .	207
<i>Kurbanov V.M., Gojayeva X.R.</i> Ries inequality for systems of root vector functions of differential operator with summable matrix coefficients . . . . .	209



<i>Kurbatov V.G., Khoroshikh E.D., Chursin V.Yu.</i> A calculation of Green's function by means of the Laguerre functions . . .	211
<i>Kyrov V.A.</i> Surfaces on the proper Helmholtz group . . . . .	213
<i>Lavrentieva M.A., Levina L.V., Penkov V.B.</i> Current state of studies in thermal elasticity . . . . .	215
<i>Lazarev N.P.</i> Inverse problem on location identification of a rigid inclusion by boundary measurements for a contact problem . . . . .	217
<i>Latypov I.A., Latypova N.V.</i> Fractal approach to the organization of neural networks . . . . .	218
<i>Lepetkov D.R.</i> Application of Voronoi cells in the problem of sound wave scattering by a hard body defined by an irregular mesh . . . . .	220
<i>Lobanova N.I., Yaremko N.N.</i> Differential equations as a means of forming a holistic picture of the student's world . . . .	222
<i>Loboda N.A., Stash A.Kh.</i> On the essential spectra of oscillation exponents of two-dimensional linear homogeneous differential systems . . . . .	224
<i>Lomov I.S.</i> Solution of the generalized mixed problem for the inhomogeneous telegraph equation . . . . .	226
<i>Lomovtsev F.E.</i> Mixed problem for a model two-speed wave equation for a non-characteristic oblique derivative in the quarter plane . . . . .	228
<i>Lugovskova Yu.P.</i> Normalization of blood glucose levels using differential games . . . . .	232
<i>Lysenko V.V., Lomovtsev F.E.</i> Physical-geometrical interpretation of the solution to the auxiliary problem for a semi-bounded string . . . . .	233
<i>Lyakhov L.N., Kalitvin V.A., Lapshina M.G.</i> On the continuity of the Radon-Kipriyanov transformation of functions defined in the ball . . . . .	238
<i>Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A.</i> On some inequalities for the singular pseudodifferential operator of Kipriyanov-Katrakhov . . . . .	240
<i>Mazhgikhova M.G.</i> On the Green's function of a generalized Storm problem for a fractional order differential equation	242
<i>Mazepa E.A., Ryaboshlykova D.K.</i> Boundary value problems for the inhomogeneous Schrodinger equation with variations of its potential on quasi-model Riemannian manifolds . . . . .	243

<i>Markina E.I.</i> Periodic solutions of equations with a small deviation of the argument from a certain fixed delay . . .	245
<i>Mashkin M.N., Smirnov V. Yu.</i> Eentropy of the distribution of a continuous random variable . . . . .	246
<i>Melnikov N.B., Reser B.I.</i> Asymptotic formulas for magnetization and chemical potential of ferromagnetic metals at low temperatures . . . . .	248
<i>Mozokhina A.S.</i> Mathematical modeling of the effect of inflammation on propagation of the viral infection . . .	250
<i>Myshelovka L.A., Virchenko Yu.P.</i> One-dimensional problem of thermal radiation transfer of radiation-conductive heat exchange . . . . .	251
<i>Naimov A.N., Bystretskii M.V.</i> Investigation of periodic solutions of a two-dimensional system of non-linear ordinary differential equations of the second order . . .	253
<i>Nikitina S.A.</i> The use of fuzzy modeling to evaluate financial instruments . . . . .	255
<i>Obukhovskiy V.V., Kornev S.V., Getmanova E.N.</i> About the method of random integral guide functions in the periodic problem for random functional-differential inclusions . . .	256
<i>Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G., Soroka M.S.</i> On topological properties of solution sets of semilinear differential inclusions of the fractional order $q \in (1, 2)$ with non-convex right-hand side . . . . .	258
<i>Orlov V.P.</i> On Oldroyd-type viscoelasticity models . . . . .	260
<i>Oshchepkova S.N., Spivak A.S.</i> Mean theorem for a rigid Laplacian on a stratified set . . . . .	262
<i>Panov E.Yu.</i> On self-similar solutions of a Stefan-Dirichlet problem in the half-line . . . . .	263
<i>Pastukhova S.E.</i> Improved resolvent approximations in homogenization of higher order operators . . . . .	265
<i>Penkin O.M., Pozdnyakov A.A.</i> On estimating the first eigenvalue of the Laplacian on a square grid. . . . .	267
<i>Pereskokov A.V.</i> Asymptotics of the spectrum of a Hartree type operator including the Macdonald function . . . . .	268
<i>Petrov I.V.</i> Application of the fine-tuning bert method for hiding personal data in text messages using the named entity recognition task . . . . .	270
<i>Petrosyan G.G.</i> A generalized periodic problem for differential inclusions with fractional derivatives of order $q \in (1, 2)$ . .	271

<i>Piskarev S.</i> Approximation of fractional equations . . . . .	273
<i>Pogrebnyak M.A.</i> Traffic flow model on segments with different speed modes . . . . .	274
<i>Polovinkina M.V., Polovinkin I.P.</i> On recovery of a solution of a mixed problem for a singular equation of vibrations .	276
<i>Popov I.E., Reznikova A.S.</i> Spatial balancing of the training data set by consistent synthesis method . . . . .	279
<i>Provotorova L.V.</i> On one boundary value problem on the kernel of a trace operator . . . . .	281
<i>Prokopeva D.B., Korobeckaya Yu.I., Golovko N.I.</i> Sufficient conditions for the existence of a stationary mode of a queuing system with a diffusion intensity of the input stream, a non-zero coefficient of demolition . . . . .	283
<i>Pryadiev V.L.</i> Integral formula of solution of the wave equation on geometric graph with $\delta$ -interaction at the vertices . . .	285
<i>Raetskaya E.V.</i> Solution of a control problem for a dynamical system in partial derivatives with an additional condition	286
<i>Raetskiy K.A.</i> Analytical construction of stabilized controls and states of a linear dynamic system with multipoint conditions . . . . .	288
<i>Raitsin A.M.</i> Application of cumulants for identification spatial distribution of laser beam intensity . . . . .	290
<i>Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M.</i> Riemann-Hilbert type problems for the Cauchy-Riemann equation with a minor coefficient having a singularity in the circle . . . .	292
<i>Rasulov A.B., Yakivchik N.V.</i> Integral representation of solutions to the Cauchy-Riemann equation with strong singularities in the lower coefficients in a region with a piecewise smooth boundary . . . . .	294
<i>Ronzhina M.I., Manita L.A.</i> Stability of logarithmic spirals to small disturbances in control problems with a second- order singular extremal . . . . .	296
<i>Rossovskii L.E., Tovsulanov A.A.</i> Elliptic functional differential equation with shifts and compression of the argument . . . . .	298
<i>Rusakov V.A.</i> Maximum splash algorithm for tree-structured networks . . . . .	299
<i>Rustanov A.R., Arseneva O.E., Kharitonova S.V.</i> Nearly trans-Sasakian manifolds . . . . .	301

<i>Rykhlov V.S.</i> Generalized solution of the initial boundary value problem for a wave equation with a mixed derivative and a potential . . . . .	303
<i>Sabitov K.B.</i> Dirichlet problem for a three-dimensional analogue of the Lavrentiev-Bitsadze equation . . . . .	307
<i>Sakbaev V.Zh.</i> Variational and boundary value problems for Laplace-Volterra equation in infinitely dimensional space	311
<i>Sedykh I.A., Strugov I.V.</i> Analysis of current approaches to modeling rating systems . . . . .	312
<i>Sedykh I.A., Tambovtsev A.A.</i> The use of Petri nets in solving production, management and optimization problems . . .	314
<i>Semina V.V., Semin G.V.</i> Application of modern digital technologies in teaching mathematics . . . . .	316
<i>Semina V.V., Semin G.V., Shmyrin A.M.</i> Application of neighborhood systems for modeling of thermal regimes . .	318
<i>Sitnikov K.S., Andrianova A.A.</i> Ant algorithms for solving transport logistics problems . . . . .	320
<i>Soliev Yu.S.</i> On the order of convergence of quadrature processes with multiple nodes for singular integral with Cauchy kernel . . . . .	322
<i>Solov'ev P.S.</i> Existence of positive solutions of nonlinear spectral problems . . . . .	325
<i>Solonchenko R.E., Virchenko Yu.P.</i> Estimates of the number of nonselfintersecting paths on square lattice . . . . .	327
<i>Somova P.A., Gurina E.I.</i> Numerical and computer simulation to assess heat transfer in double-glazed units . . . . .	329
<i>Stenyukhin L.V.</i> On the solution of a hysteresis equation with a fractional derivative . . . . .	331
<i>Stepanov A.V.</i> On the influence of approximation of a continuous random variable by the STSP distribution on the estimation of its coverage interval . . . . .	333
<i>Tewolde A.M., Virchenko Yu.P.</i> Unimodality of probability distribution of extensive functional of random sequence trajectories . . . . .	335
<i>Titarenko S.A.</i> Cellularity effect for model isospectral billiards with Dirichlet boundary conditions . . . . .	337
<i>Totieva Zh.D.</i> Inverse problem for wave equation of memory type with acoustic boundary conditions . . . . .	339

<i>Barysheva I.V., Trusova N.I., Frolova E.V.</i> On a partial integral operator with a weak singularity in an anisotropic Lebesgue space . . . . .	341
<i>Turenova E.L., Dobrynina I.V.</i> The problem of the formation of algorithmic thinking of students in the study of higher mathematics . . . . .	343
<i>Tyrsin A.N.</i> Iterative convex robust estimation of linear regression dependencies . . . . .	345
<i>Ul'vacheva T.A.</i> Existence theorems of integral solutions to a system of semilinear fractional differential inclusions . . .	347
<i>Urtaeva A.A.</i> On the simplicity of eigenvalues of a differential operator on a graph . . . . .	349
<i>Uskov V.I.</i> Resolution of algebra-differential equation of second order . . . . .	351
<i>Ustilko E.V., Lomovtsev F.E.</i> Global correctness theorem for a mixed problem for classical solutions of the wave equation with nonstationary characteristic oblique derivatives of a bounded string . . . . .	353
<i>Fedorov K.D.</i> The first initial-boundary value problem for parabolic systems in a semibounded plane domain with nonsmooth lateral boundary . . . . .	355
<i>Filatov V.V.</i> Massive Sets and Cones of Model Manifolds . . .	357
<i>Filippov M.N., Turtin D.V., Stepovich M.A., Kalmanovich M.N.</i> About one non-stationary problem of heat conduction . . . . .	359
<i>Fomin V.I.</i> About $n$ -component functional operators . . . . .	360
<i>Khabibullin B.N.</i> Uniqueness distributions for holomorphic functions on a disk . . . . .	365
<i>Khatskevich V.L.</i> On the smoothness of bounded solutions of linear differential equations with fuzzy efficiency . . . . .	367
<i>Tsarkov I.G.</i> The solarity property for bounded weakly compact sets . . . . .	371
<i>Tsekan O.B.</i> Approximations of the decoupling transformation of a linear time-varying singularly perturbed system with a delay . . . . .	374
<i>Cheb E.S.</i> Correctness of the mixed problem for a single hyperbolic equation of the fourth order with mixed boundary conditions . . . . .	376
<i>Cherkashin D.A., Virchenko Yu.P.</i> Hierarchical lattice models of percolation theory . . . . .	378

<i>Chitorkin E.E.</i> Local solvability and stability of the inverse Sturm-Liouville problem with singular potential and polynomials in the boundary conditions . . . . .	380
<i>Chub E.G., Zadorozhnaya N.S</i> Theorems on changing the values of the current function and the potential function for a filtration region bounded by one current line and three potential lines . . . . .	382
<i>Shabrov S.A., Bakhtina ZH.I., Gridyaeva T.V., Manucharova S.E.</i> On a Stiltjes string with non-smooth solutions and a viscoelastic base . . . . .	384
<i>Shaina E.A., Shabrov S.A.</i> On an analogue of the comparison theorem for a homogeneous equation of different orders .	385
<i>Shamolin M.V.</i> Invariants of Odd-Order Dynamical Systems with Dissipation . . . . .	387
<i>Shamoyan R.F., Bednazh V.A.</i> On one Teplitz transformation problem in some classes of analytic functions . . . . .	389
<i>Shananin N.A.</i> On the continuation of local homogeneity of solutions of differential equations . . . . .	391
<i>Shananin V.A., Aleksanian D.A.</i> Using ternary logic in neural networks . . . . .	393
<i>Shapolova I.M., Virchenko Yu.P.</i> Probability distribution of critical rupture stresses of a porous material sample . . .	395
<i>Shkuray I.A.</i> On the need to teach mathematical modeling to students of the pedagogical direction . . . . .	397
<i>Shorokhov S.G.</i> Neural network training for hyperbolic equation using quasiclassical functional . . . . .	399
<i>Shubarin M.A.</i> Invariant classes of Frechet spaces and their application in the structural theory of spaces . . . . .	401
<i>Egamov A.I.</i> Modern requirements for writing programs in the discipline «Computational Methods» . . . . .	403
<i>Yanchenko A.Y.</i> About some analytic and arithmetic properties of non-linear algebraic differential equations . .	405
<i>Gebreslasie H.F., Vasilyev V.B.</i> Constructing solutions of Pseudo-Differential Equations with integral boundary conditions in multidimensional space with a cut. . . . .	407
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Classical solution of a mixed problem with the dirichlet and neumann conditions for nonlinear biwave equation . . . . .	409

<i>Kovalevsky A.A.</i> Variational inequalities with nonlinear elliptic operators and measurable bilateral constraints . . . . .	411
<i>Litvinov V.L., Litvinova K.V.</i> Vibrations of a console with a moving boundary laying on an elastic base . . . . .	413
<i>Medvedev A.V., Kuzenkov O.A.</i> Modeling the competition of languages in a bilingual community with the effect of mutual assistance . . . . .	414
<i>Misiuk V.R.</i> Concerning One Embedding Theorem . . . . .	418
<i>Naligama C.A., Tsekhan O.B.</i> Parameter free conditions of the controllability of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay . . . . .	419
<i>Palshin G.P.</i> Liouville Foliation in the Constrained Problem of Three Magnetic Vortices . . . . .	421
<i>Senouci A.</i> Equivalent semi-normes for Nikol'skii-Besov spaces	423
<i>Takhirov J.O.</i> A free boundary problem for the predator-prey model with fear effect . . . . .	425
<i>Tashpulatov S.M.</i> Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Fourth triplet state . . . . .	427

## ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ШКОЛАХ

Д.А.Абдувахобов (Ташкент, ТГПУ)

*abduvahobovdoston@gmail.com*

Профессиональные школы отличаются от общих средне образовательных школ тем, что образование здесь организуется с целью направления учащихся на определённую профессиональную сферу. Ученики вместе с обучением профессионально направлены к сфере выбранной ими профессии, параллельно получают образование по общеобразовательным предметам в частности и математике. Математика на самом деле – это предмет, который даёт возможность понимания объективной реальности, познания закономерностей и правил, через неё формируются творческие, академические, критические умения учащихся.

Но учебная программа по математике в профессиональных школах составлена одинаково с общеобразовательными школами, без учёта профессиональных сфер. Это непосредственно влияет на процесс обучения математики. А проведение уроков математики традиционным образом, приводит возникновению ряда проблем в обучении:

- ослабление мотивации в освоении математики;
- снижение уровня познания математики;
- неспособность осознания связи профессиональных сфер с изучаемыми предметами;
- неспособность применения математических законов и правил в жизни и профессиональных сферах.

Умением применять полученных математических знаний в процессе обучения математики внутри самой математики, а также в любых ситуациях, определяется значимость данного предмета и основная цель обучения математике. А для того, чтобы решить вышеперечисленные проблемы необходимо рассмотрение процесса обучения математики с педагогического, психологического и методического точек зрения и нахождение новых педагогических способов обучения приводящих к совершенствованию содержания, смысла математического образования.



# ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ В РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ ПОТОКАМ В КЛАССИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Х.Н. Абдулрахман, Я.М. Ерусалимский

(Ростов-на-Дону, РГУПС, Ростов-на-Дону, ЮФУ)

abdulrahm.haidar@gmail.com, ymerusalimskiy@sfnedu.ru

В работе установлена связь между стационарными потоками в ресурсных сетях (О.П. Кузнецов, Л.Ю. Жилиякова (см. напр. [1]) и потоками в классических сетях (Л. Форд, Д. Фалкерсон) и функционированием ресурсных сетей.

**Определение 1.** Ресурсной сетью  $G(X, U, f, \rho)$  будем называть связный ориентированный граф без петель. Здесь  $X$  — непустое множество вершин,  $U$  — множество дуг,  $f : U \rightarrow X \times X$  — инцидентности, сопоставляющее каждой дуге упорядоченную пару вершин — начало и конец дуги. Каждой дуге  $u \in U$  поставлено в соответствие положительное число  $\rho(u)$  — пропускная способность дуги  $u$  заданы правила функционирования ресурсной сети (правила функционирования см. в [2]).

**Определение 2.** Начальное состояние ресурсной сети  $q(x, 0)$  называется приводящим к стационарному (по О.П. Кузнецову и Л.Ю. Жилияковой — устойчивому), если  $q(x, t)$ , начиная с какого-то момента времени  $T$ , не зависит от времени:

$$q(x, 2n) = q(x, 2n + 2) = q(x, 2n + 4) = \dots, \quad \forall x \in X, 2n \geq T.$$

**Определение 3.** Пусть  $x \in \tilde{X}$ , добавим ко множеству  $X$  вершину  $z$ . Рассмотрим граф  $G_{\tilde{x}}(X \cup \{z\}, U, \tilde{f}, \rho)$ , полагая, что

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(u), & \text{если } u \notin \tilde{U}_-(\tilde{x}); \\ y = z, & \text{если } f(u) = (y, \tilde{x}). \end{cases}$$

Мы получили из нетривиальной (сильно связной) ресурсной сети классическую сеть с источником в вершине  $\tilde{x}$  и стоком в вершине  $z$ . О ней будем говорить, что она получена размыканием ресурсной сети в классическую в вершине  $\tilde{x}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G(X, U, f, \rho)$  — нетривиальная ресурсная сеть и начальное состояние  $q(x, 0)$  приводит к стационарному, начиная с какого-то момента времени  $T_0 \geq 0$ . Определим на множестве дуг  $U$  функцию  $\psi(u)$ , положив  $\psi(u) = \varphi(u, 2n+1)$ ,  $2n+1 \geq T_0+1$ . Функция  $\psi$  является потоком в классической сети, построенной

размыканием нетривиальной ресурсной сети в произвольной её вершине  $\tilde{x}$ .

**Теорема 2.** Начальное состояние  $q(x, 0)$  ресурсной сети приводит к стационарному, начиная с момента  $T_0$ , тогда и только тогда, когда

$$q(x, T_0) = q(x, T_0 + 2) \quad \forall x \in X.$$

**Теорема 3.** Начальное состояние  $q(x, 0)$  ресурсной сети приводит к стационарному, начиная с момента  $T_0$ , тогда и только тогда, когда поток  $\varphi(u, t)$ , порожденный этим начальным состоянием, удовлетворяет условию

$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, T_0 + 1) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, T_0 + 1), \quad \forall x \in X.$$

Подчеркнем, что вершина  $\tilde{x}$  в теореме 1 – произвольная вершина ресурсной сети. Это означает, что один и тот же стационарный поток в ресурсной сети порождает поток в разных классических сетях. Величина этих потоков может оказаться разной.

Теоремы 2 и 3 дают необходимые и достаточные условия стационарности потока в терминах разных функций – теорема 2 в терминах  $q(x, t)$ , а теорема 3 – в терминах  $\varphi(u, t)$ . Эти функции определены на разных множествах – первая на  $X \times Z_{+\text{чет}}$ , вторая – на  $U \times Z_{+\text{нечет}}$ , но они определены рекурсивно и совместно, и связаны балансовым соотношением

$$q(x, 2n+2) = q(x, 2n) - \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, 2n+1) + \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, 2n+1), \quad \forall x \in X.$$

Условие, приведенное в теореме 3, совершенно естественное – оно совпадает с условием неразрывности классического потока в сети.

В работе [2] авторы рассмотрели обратную задачу.

### Литература

1. Жилиякова Л.Ю. Теория ресурсных сетей: монография / Л.Ю. Жилиякова, О.П. Кузнецов. // – М.: – РИОР: ИНФА-М, 2017. – 283 с.
2. Абдулрахман Х.Н. О реализуемости потоков в классических сетях потоками в ресурсных сетях / Х.Н. Абдулрахман, Я.М. Ерусалимский // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. – 2023. – Т. 38, № 3. – С. 7–17.

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ  
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

**Г.Э. Абдурагимов** (Махачкала, ДГУ)

*gusen\_e@mail.ru*

Рассматривается краевая задача

$$x'''(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (2)$$

$$x''(0) = x''(1), \quad (3)$$

где  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}_p$  — линейный положительный непрерывный оператор, функция  $f(t, u)$  неотрицательна на  $[0, 1] \times [0, \infty)$ , монотонна по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и  $f(\cdot, 0) \equiv 0$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что  $p \neq q$ ,  $q \in (1, \infty)$  и выполнены условия*

$$1. \ f(t, u) \leq bu^{p/q}, \text{ где } b > 0, \quad (t, u) \in [0, 1] \times [0, \infty);$$

$$2. \ \lim_{u \rightarrow 0^+} \min_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u} = \infty \text{ при } p < q;$$

$$3. \ \lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u} = \infty \text{ при } p > q;$$

$$4. \ \min_{t \in [0, 1]} (T\chi)(t) > 0, \text{ где } \chi(t) \equiv 1.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

**Теорема 2.** Предположим, что выполнены условия теоремы 1, функция  $f(t, u)$  дифференцируема по второму аргументу, а частная производная  $f'_u(t, u)$  монотонно убывает по  $u$ . Кроме того, допустим, что

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < \frac{4}{\tau},$$

где  $\tau$  — норма оператора  $T$ ,  $\theta(t) = f'_u(t, \zeta)$ ,  $\zeta = \xi \min_{0 \leq t \leq 1} (T\varphi)(t)$  ( $\varphi(t) \equiv t$ ),  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ .

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

В качестве примера иллюстраций полученных выше результатов приведена задача

$$x'''(t) + \alpha(t+1)^\beta \sqrt{\int_0^1 x(s) ds} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4)$$

$$x(0) = x(1), \quad x''(0) = x''(1), \quad (5)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

Показано, что при выполнении условия

$$\frac{2^{1-2\beta} - 1}{1 - 2\beta} < \frac{\alpha^2}{3}$$

краевая задача (4)–(5) имеет единственное положительное решение.

## ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

**И.А.Х. Ал-Гарайхоли**

(Воронеж, ВГУ, Университет Ти-Кар, Ирак)

*evan.abd3@gmail.com*

В работе изучается спектральная задача

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left( p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \lambda u \frac{dM}{d[\sigma]_3}; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda$  — спектральный параметр, функции  $\mu(x)$  и  $\sigma(x)$  — строго возрастающие функции, определенные на  $\overline{[0; \ell]_\mu^{(2)}}$  и  $\overline{[0; \ell]_\mu^{(3)}}$  соответственно (определения этих множеств смотри ниже).

Само решение  $u(x)$  определено на множестве  $\overline{[0; \ell]_\mu}$  в котором каждая точка  $\xi \in S(\mu)$  заменена на тройку собственных элементов  $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$ . Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции  $u(x)$ , которые вообще говоря различны, то производная функции  $u(x)$  по мере  $\mu(x)$ , которую мы обозначим через  $\frac{du}{d[\mu]_2}$ , чтобы подчеркнуть, что она в точке  $\xi$  принимает два упорядоченных значения, определена на множестве  $\overline{[0; \ell]_\mu^{(2)}}$  в

котором каждая точка  $\xi \in S(\mu)$  заменена на пару собственных значений (помимо предельных  $\xi \pm 0$ ). Обозначать мы будем через  $\tau_1^\xi$  и  $\tau_2^\xi$ , причем

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_1^\xi) = \frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)} = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)},$$

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_2^\xi) = \frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}.$$

Функции  $\sigma(x)$ ,  $p(x)$ ,  $Q(x)$  и  $M(x)$  определены на множестве  $\overline{[0; \ell]_\mu^{(2)}}$ . Вторая производная  $\frac{d}{d[\sigma]_3} \left( p \frac{du}{d[\mu]_2} \right)$ , а также производные  $\frac{dQ}{d[\sigma]_3}$  и  $\frac{dM}{d[\sigma]_3}$  определены на множестве  $\overline{[0; \ell]_\mu^{(3)}}$ , которое получается из множества  $\overline{[0; \ell]_\mu}$  заменой  $\xi \in S(\mu)$  на тройку собственных элементов  $\hat{\tau}_1^\xi$ ,  $\hat{\tau}_2^\xi$  и  $\hat{\tau}_3^\xi$ , при этом  $[\sigma]_3$ -производная функции  $Q(x)$  в точках  $\hat{\tau}_j^\xi$  ( $j = 1, 2, 3$ ) определяется следующим образом

$$\frac{dQ}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) = \frac{Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)},$$

$$\frac{dQ}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_2^\xi) = \frac{Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)},$$

$$\frac{dQ}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_3^\xi) = \frac{Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)},$$

аналогично определяется  $[\sigma]_3$ -производная функций  $F(x)$  и  $p \frac{du}{d[\mu]_2}$ .

Уравнение в точках разрыва функции  $\mu(x)$  понимается как три равенства

$$\begin{aligned} & - \left[ \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_1^\xi) - \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\xi - 0) \right] + \\ & + u(\xi - 0) \left[ Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0) \right] = \lambda u(\xi - 0) \left( M(\tau_1^\xi) - M(\xi - 0) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left[ \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_2^\xi) - \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_1^\xi) \right] + \\ & + u(\xi) \left[ Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi) \right] = \lambda u(\xi) \left( M(\tau_2^\xi) - M(\tau_1^\xi) \right), \end{aligned}$$

$$- \left[ \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\xi + 0) - \left( pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_2^\xi) \right] + \\ + u(\xi + 0) \left[ Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi) \right] = \lambda u(\xi + 0) \left( M(\xi + 0) - M(\tau_2^\xi) \right).$$

Решения (1) мы ищем в классе  $[\mu]_2$ -абсолютно непрерывных на  $[0; \ell]$  функций, таких, что  $pu'_{[\mu]_2}(x) - [\sigma]_3$ -абсолютно непрерывны на  $[0; \ell]$ .

В работе получены достаточные условия осцилляционности спектра задачи (1).

### Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.
3. Ткаченко А.А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стилтеса / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 36–39.

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ СЕРЫХ СТЕРЖНЕЙ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>

А.А. Амосов, Н.Е. Крымов (Москва, НИУ МЭИ)

*AmosovAA@mpei.ru*

Рассматривается специальная асимптотическая аппроксимация начально- краевой задачи, описывающей сложный (радиационно-кондуктивный) теплообмен в системе, состоящей из  $n^2$  теплопроводящих серых стержней квадратного сечения со стороной  $\varepsilon = 1/n$ , разделенных вакуумными прослойками и упакованных в квадратную коробку  $\Omega = (0, 1)^2$  с границей  $\Gamma$ . Каждому стержню ставится в соответствие квадрат  $G_{i+1/2, j+1/2} = (i\varepsilon, (i+1)\varepsilon) \times (j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$ ,  $0 \leq i < n$ ,  $0 \leq j < n$ . Искомой величиной является функция  $u(x, y, t)$ ,

<sup>1</sup> Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № FSWF-2023-0012).

© Амосов А.А., Крымов Н.Е., 2024

имеющая физический смысл абсолютной температуры. Особый интерес представляет случай, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Сложный теплообмен описывается начально-краевой задачей

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) = 0, \quad (x, y) \in G = \bigcup_{i,j} G_{i+1/2, j+1/2}, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\lambda D_x u(x_i + 0, y, t) = w_{x,i}(y, t), \quad 0 \leq i < n, \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\lambda D_x u(x_{i+1} - 0, y, t) = w_{x,i+1}(y, t), \quad 0 \leq i < n, \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\lambda D_y u(x, y_j + 0, t) = w_{y,j}(x, t), \quad 0 \leq j < n, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$\lambda D_y u(x, y_{j+1} - 0, t) = w_{y,j+1}(x, t), \quad 0 \leq j < n, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad (x, y) \in G, \quad (6)$$

где условия (2) – (5) описывают теплообмен излучением, а

$$w_{x,i}(y, t) = H(u(x_i + 0, y, t)) - H(u(x_i - 0, y, t)), \quad 1 \leq i < n$$

$$w_{x,0}(y, t) = H_\Gamma(u(0, y, t)) - w_\Gamma(0, y, t),$$

$$w_{x,n}(y, t) = w_\Gamma(1, y, t) - H_\Gamma(u(1, y, t)),$$

$$w_{y,j}(x, t) = H(u(x, y_j + 0, t)) - H(u(x, y_j - 0, t)), \quad 1 \leq j < n,$$

$$w_{y,0}(x, t) = H_\Gamma(u(x, 0, t)) - w_\Gamma(x, 0, t),$$

$$w_{y,n}(x, t) = w_\Gamma(x, 1, t) - H_\Gamma(u(x, 1, t)).$$

Здесь  $c_p$  и  $\lambda$  — коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности,  $H(u) = \theta \sigma_0 |u|^3 u$ , где  $0 < \sigma_0$  — постоянная Стефана-Больцмана,  $0 < \theta \leq 1$  — степень черноты поверхности стержней,  $H_\Gamma(u) = \theta_\Gamma \sigma_0 |u|^3 u$ ,  $0 < \theta_\Gamma \leq 1$  — приведенная степень черноты границы  $\Gamma$  коробки. Кроме того  $w_\Gamma = H_\Gamma(u_\Gamma)$ , где  $u_\Gamma$  — температура границы  $\Gamma$ . Однозначная разрешимость задачи (1)–(4) доказана в [1].

Исследуется следующая асимптотическая аппроксимация задачи (1)–(6):

$$c_p D_t v - \varepsilon \Delta H(v) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} c_p D_t v + \varepsilon D_n H(v) - \frac{\varepsilon^2}{2} D_s^2 H(v) + H_\Gamma(v) = \langle w_\Gamma \rangle, \quad (8)$$

$$(x, y) \in \Gamma_\varepsilon \setminus \gamma, \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$\frac{\varepsilon}{4} c_p D_t v + \varepsilon \widehat{D}_n H(v) + H_\Gamma(v) = \langle w_\Gamma \rangle, \quad (x, y) \in \gamma, \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad (x, y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon. \quad (11)$$

Здесь  $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2)^2$  – квадрат с границей  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\gamma$  – множество его угловых точек,  $D_n$  и  $D_s$  – производные по нормали и касательной к  $\partial\Omega_\varepsilon$ .

Искомая функция  $v$  рассматривается как приближение к решению  $u$  задачи (1)-(6).

Однозначная разрешимость задачи (7)-(10) установлена в [2]. В данной работе получена оценка погрешности

$$\|u - v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega_\varepsilon))} = O(\sqrt{\varepsilon/\lambda} + \sqrt{\varepsilon}).$$

### Литература

1. Amosov A.A. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency / A.A. Amosov. // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 165, №. 1, pp. 1–41.
2. Amosov A.A. On a nonlinear initial–boundary value problem with Venttsel type boundary conditions arising in homogenization of complex heat transfer problems / A.A. Amosov, N.E. Krymov. // Mathematics, — 2022, Vol. 10, 1890, pp. 1–23.

## ПОЛУДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ СЕРЫХ СТЕРЖНЕЙ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>

А.А. Амосов, Н.Е. Крымов (Москва, НИУ МЭИ)

*AmosovAA@mpei.ru*

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая сложный (радиационно-кондуктивный) теплообмен в системе, состоящей из  $n^2$  теплопроводящих серых стержней квадратного сечения со стороной  $\varepsilon = 1/n$ , разделенных вакуумными прослойками и упакованных в квадратную коробку  $\Omega = (0, 1)^2$  с границей  $\Gamma$ .

Каждому стержню ставится в соответствие квадрат  $G_{i+1/2,j+1/2} = (i\varepsilon, (i+1)\varepsilon) \times (j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$ ,  $0 \leq i < n$ ,  $0 \leq j < n$ . Искомой величиной является функция  $u(x, y, t)$ , имеющая физический смысл абсолютной температуры. Особый интерес представляет случай, когда  $n \gg 1$ .

<sup>1</sup> Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № FSWF-2023-0012).

© Амосов А.А., Крымов Н.Е., 2024



Сложный теплообмен описывается начально-краевой задачей

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) = 0, \quad (x, y) \in G = \bigcup_{i,j} G_{i+1/2, j+1/2}, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lambda D_x u(x_i + 0, y, t) &= w_{x,i}(y, t), \quad \lambda D_x u(x_{i+1} - 0, y, t) = w_{x,i+1}(y, t), \\ y &\in (0, 1), \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda D_y u(x, y_j + 0, t) &= w_{y,j}(x, t), \quad \lambda D_y u(x, y_{j+1} - 0, t) = w_{y,j+1}(x, t), \\ x &\in (0, 1), \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad (x, y) \in G, \quad (4)$$

где уравнения (2) и (3) описывают теплообмен излучением и

$$w_{x,i}(y, t) = H(u(x_i + 0, y, t)) - H(u(x_i - 0, y, t)), \quad 1 \leq i < n \quad (5)$$

$$w_{x,0}(y, t) = H_\Gamma(u(0, y, t)) - w_\Gamma(0, y, t), \quad (6)$$

$$w_{x,n}(y, t) = w_\Gamma(1, y, t) - H_\Gamma(u(1, y, t)), \quad (7)$$

$$w_{y,j}(x, t) = H(u(x, y_j + 0, t)) - H(u(x, y_j - 0, t)), \quad 1 \leq j < n \quad (8)$$

$$w_{y,0}(x, t) = H_\Gamma(u(x, 0, t)) - w_\Gamma(x, 0, t), \quad (9)$$

$$w_{y,n}(x, t) = w_\Gamma(x, 1, t) - H_\Gamma(u(x, 1, t)). \quad (10)$$

Здесь  $c_p$  и  $\lambda$  — коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности,  $H(u) = \theta \sigma_0 |u|^3 u$ , где  $0 < \sigma_0$  — постоянная Стефана-Больцмана,  $0 < \theta \leq 1$  — степень черноты поверхности стержней,  $H_\Gamma(u) = \theta_\Gamma \sigma_0 |u|^3 u$ ,  $0 < \theta_\Gamma \leq 1$  — приведенная степень черноты границы  $\Gamma$  коробки. Кроме того  $w_\Gamma = H_\Gamma(u_\Gamma)$ , где  $u_\Gamma$  — температура границы  $\Gamma$ . Однозначная разрешимость задачи (1)–(4) доказана в [1].

Исследуется следующая полудискретная аппроксимация задачи (1)–(4):

$$c_p D_t U - \varepsilon \delta_x^2 H(U) - \varepsilon \delta_y^2 H(U) = 0, \quad (x, y) \in \omega, \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon c_p D_t U + \varepsilon \partial_n H(U) - \varepsilon^2 \delta_s^2 H(U) + H_\Gamma(U) &= \langle w_\Gamma \rangle, \\ (x, y) &\in \partial\omega \setminus \gamma, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} c_p D_t U + \varepsilon \widehat{\partial}_n H(U) + H_\Gamma(U) = \langle w_\Gamma \rangle, \quad (x, y) \in \gamma, \quad t \in (0, T), \quad (13)$$

$$U|_{t=0} = [u^0], \quad (x, y) \in \bar{\omega}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{\omega} = \{(i + 1/2)\varepsilon, (j + 1/2)\varepsilon), 0 \leq i < n, 0 \leq j < n\}$  — сетка с шагом  $\varepsilon$  в квадрате  $\bar{\Omega}_\varepsilon = [\varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2]^2$ ,  $\partial\omega = \bar{\omega} \cap \partial\Omega_\varepsilon$ ,  $\omega = \bar{\omega} \setminus \partial\omega$ ,  $\gamma$  — множество угловых точек квадрата  $\Omega_\varepsilon$ ,  $\delta_x$  и  $\delta_y$  — разностные аналоги производных  $D_x$  и  $D_y$ ,  $\delta_s$  и  $\partial_n$  — разностные аналоги производных по касательной и нормали к  $\partial\Omega_\varepsilon$ .

Значения  $U((i + 1/2)\varepsilon, (j + 1/2)\varepsilon), t)$  рассматриваются как приближения к значениям  $[u]_{i+1/2, j+1/2}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G_{i+1/2, j+1/2}} u(x, y, t) dx dy$ .

Доказана однозначная разрешимость задачи (5) - (8). Получены априорные оценки решения. Выведена оценка погрешности

$$\|U - [u]\|_{L_2(0, T; L_2(\bar{\omega}))} = O(\sqrt{\varepsilon/\lambda}).$$

### Литература

1. Amosov A.A. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency / A.A. Amosov // Journal of Mathematical Sciences, — 2010. — Vol. 165, № 1, pp. 1–41.

## АЛГОРИТМ ИСКУССТВЕННЫХ ИММУННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБНАРУЖЕНИЯ ВТОРЖЕНИЙ

**А.А. Андрианова, С.А. Мочалов** (Казань, КФУ)

*Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru, saamochalov@stud.kpfu.ru*

Задачи обнаружения вторжений - это задачи искусственного интеллекта, которые позволяют обнаружить сетевые атаки на вычислительную систему, обнаружить аномальное поведение компонентов вычислительной системы и другие задачи. Задача обнаружения сетевых атак является одной из важнейших в этом ряду и часто базируется на использовании алгоритмов машинного обучения, в частности, алгоритмов классификации и кластеризации.

Алгоритмы построения иммунных сетей [1,2] являются одним из методов машинного обучения, который может эффективно применяться для решения задачи обнаружения сетевых атак. Принцип обучения при построении иммунных сетей основан на самоорганизации, которая происходит под воздействием внешней среды. Искусственная иммунная сеть представляет собой набор так называемых антител, которые генерируются на основе взаимодействия с внешними элементами (антигенами), способными осуществить негативное

воздействие на систему. В качестве антигенов при решении задачи обнаружения вторжений будут использоваться запросы, с помощью которых реализуется сетевая атака. Соответственно, антитела представляют собой элементы, позволяющие сетевую атаку обнаружить. Основным инструментом обнаружения становится применение в процессе взаимодействия антитела с антигеном оператора аффинности, описывающим меру близости элементов. В качестве оператора аффинности чаще всего используются различные функции расстояния.

Основная идея процесс обучения искусственной иммунной сети представляет собой следующий процесс:

1. Генерируется начальное состояние системы антител.
2. Для всех антигенов из обучающей выборки происходит взаимодействие с каждым антителом иммунной сети (вычисляется аффинность антитела и антигена).
3. Все антитела с высокой аффинностью (большим расстоянием) исключаются из сети.
4. Для всех антител с низкой аффинностью (похожих на антиген) происходит клональное расширение, имитирующее иммунный ответ сети, в результате которого антитела размножаются, увеличивая количество антител подобного вида. Размножение может производиться на основе приемов, специфичных для генетических алгоритмов оптимизации.
5. Сгенерированные антитела в результате клонального расширения подвергаются незначительным мутациям с целью разнообразия элементов сети.

Для обучения искусственной иммунной сети для решения задачи обнаружения вторжений был использован набор данных, разработанный Канадским институтом кибербезопасности на основе анализа сетевого трафика в изолированной среде, который называют CIC-IDS2017 ([3]). Набор содержит 14 типов современных распространённых атак, таких, как DDoS, PortScan, Brute Force и другие.

В ходе экспериментов использовались следующие принципы влияния антигена на обучение иммунной сети: исследовались аффинность только центра кластера антител с заданным антигеном, исследовалась аффинность всех антител, меньшая некоторого порога, для заданного антигена, отнесение антигена к кластеру определялось по максимальному количеству близких по аффинности антител, исследовались все антитела сети и выбиралось антитело с самой близкой аффинностью.

Наилучшие результаты обнаружения были получены с помощью построения модели, использующей метод лучшей аффинности для обнаружения атаки. Обученная модель распознавала опасные и безопасные запросы с точностью 0,982, при этом вероятность отнесения данных запроса к верному кластеру составила 0,922.

### Литература

1. Литвиненко В. И. Кластерный анализ данных на основе модифицированной иммунной сети / В.И. Литвиненко. // Управляющие системы и машины, 2009. — № 1. — С. 54–85.
2. Мельникова И. В. Исследование решения задачи идентификации рукописного почерка с применением модели искусственной иммунной сети aiNET / И.В. Мельникова // Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство. — Старый Оскол, 2017. — С. 57–63.
3. Intrusion detection evaluation dataset (CIC-IDS2017) — <https://www.unb.ca/cic/datasets/ids-2017.html>.

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ PYTHON ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

**Н.А. Анистратова, А.С. Бондарев** (Воронеж, ВГУ)  
*bondarev@math.vsu.ru*

Рассмотрим параболическую задачу: для  $t \in [0, 1], x \in [0, 1]$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u(1, x). \quad (3)$$

Определим пространства  $H = L_2[0, 1]$ ,  $V = \overset{\circ}{W}_2^1[0, 1]$ ,  $V' = W_2^{-1}[0, 1]$ , где  $\overset{\circ}{W}_2^1[0, 1]$  – пространство абсолютно непрерывных на отрезке  $[0, 1]$  функций  $u(t)$ , таких, что  $u' \in L_2[0, 1]$ , а  $u(0) = u(1) = 0$ ;  $W_2^{-1}[0, 1]$  – сопряженное к  $\overset{\circ}{W}_2^1[0, 1]$  пространство.

Для  $f \in L_2(0, T; V')$  существует (и притом единственное) решение  $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$  задачи (1)–(3), называемое слабым решением, причем  $u' \in L_2(0, T; V')$  [1]. Если дополнительно потребовать, что обобщенная производная  $f' \in L_2(0, T; V')$  и  $f(0) = f(1)$ , то  $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$  и  $u'' \in L_2(0, T; V')$  [2, с. 25]. Такое решение задачи (1)–(3) будем называть гладким. Далее будем считать, что для задачи (1)–(3) выполнены условия гладкой разрешимости.

Согласно [1], уравнение (1) можно записать вариационном виде

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v),$$

где  $v \in V$  – произвольный элемент, а форма  $a(u, v)$  на элементах  $u, v \in V$  задается следующим образом:  $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$ . Под выражением  $(z, v)$  понимается действие функционала  $z \in V'$  на элемент  $v \in V$ , а в случае, если  $z \in H$  – скалярное произведение  $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$ .

Задачу (1)–(3) будем решать приближённо проекционно-разностным методом. Дискретизацию по пространству будем проводить методом Галёркина. В качестве проекционного подпространства рассмотрим пространство  $V_m \subset V$  – линейную оболочку системы тригонометрических функций  $\{\omega_i(x)\} = \{\sin(i\pi x)\}_{i=\overline{1, m}}$ .

По времени дискретизация происходит с помощью неявной схемы Эйлера. Отрезок  $[0, 1]$  разобьём на  $n$  равных частей с шагом  $\tau = 1/n$  и поставим каждой точке разбиения  $t_k$  в соответствие элемент  $u_k^m \in V_m$ , тогда  $u_k^m = \sum_{i=1}^m c_k^i \sin(i\pi x)$ , где  $k = \overline{0, n}$ .

Рассмотрим приближённую задачу: для  $k = \overline{1, n}$ ,  $v_m \in V_m$

$$\left( \frac{u_k^m - u_{k-1}^m}{\tau}, v_m \right) + a(u_k^m, v_m) = (f_k^m, v_m) \quad u_0^m = u_n^m, \quad (4)$$

где  $f_k^m = \overline{P_m} f(t_k)$ . Здесь  $\overline{P_m}$  – расширение по непрерывности на  $V'$  оператора  $P_m$  – ортопроектора пространства  $H$  на  $V_m$ .

Задача (4) имеет единственное решение [2, с. 34]. В [2, с. 49] установлено, что для сходимости последовательности приближенных решений к точному гладкому решению задачи (1)–(3) достаточно предположить предельную плотность последовательности проекционных подпространств  $\{V_m\}$  в  $V$ ; это означает, что

$\|(I - Q_m)v\|_V \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $Q_m$  – ортопроектор  $V$  на  $V_m$ . В [3, с. 230] показано, что выбранная в настоящей работе последовательность  $\{V_m\}$  предельно плотна в  $V$ .

В силу произвольности элемента  $\underline{v_m}$  получим систему из  $(n + 1) \cdot m$  линейных уравнений: для  $k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$

$$\frac{1}{\tau} \left( \sum_{i=1}^m c_k^i(\omega_i, \omega_j) - \sum_{i=1}^m c_{k-1}^i(\omega_i, \omega_j) \right) + \sum_{i=1}^m c_k^i a(\omega_i, \omega_j) = (f(x, t_k), \omega_j),$$

$$c_0^j = c_n^j, \quad (5)$$

Для программной реализации приближённого решения задачи (1)–(3) был выбран высокоуровневый язык программирования Python. Для проведения численного эксперимента положим, что правая часть уравнения (1) имеет вид:  $f(x, t) = 2\pi \cos(2\pi t) \cdot x(x - 1) - 2\sin(2\pi t)$ , тогда функция  $u(x, t) = \sin(2\pi t) \cdot x(x - 1)$  – точное решение задачи (1)–(3).

Ненулевые элементы двумерного массива  $A$  размерности  $[(n + 1) \cdot m][(n + 1) \cdot m]$ , содержащего коэффициенты полученной системы (5), заполняются следующим образом:

```
for i in range(m):
    A[i][i] = round((-1/T)*func_1(w(i + 1),w(i + 1))), 8)
    A[i][i + m] = round(((1/T)*func_1(w(i + 1),w(i + 1)) +
    func_2(w(i + 1), w(i + 1))), 8)
for i in range(m,len(A[:,0]) - m):
    A[i][i] = A[i - m][i - m]
    A[i][i + m] = A[i - m][i]
for i in range(len(A[:,0]) - m, len(A[:,0])):
    A[i][i - len(A[:,0]) + m] = 1
    A[i][i] = -1
```

Здесь **func\_1** реализует скалярное произведение, **func\_2** – форму  $a(u, v)$ , а  $T = 1/n$ .

Правая часть системы (5) заполняется по указанному правилу:

```
for i in range(len(b) - m):
    b[i] = round(func_1(f(t_r[i//m + 1]), w((i%m) + 1))), 8)
```

Остальные элементы правой части системы равны нулю.

С помощью метода `np.linalg.solve(A,b)` [4] библиотеки *numpy* находим решение системы уравнений (5):

```
Solve = np.around(np.linalg.solve(A, b), 8)
```

На рис. 1–3 представлены графики точного решения задачи в точке  $t_k = 0.6$  и приближенных решений, поставленных в соответствие указанной точке, для различных значений  $m$  и  $n$ .

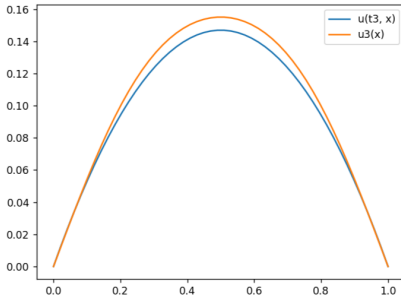


Рис. 1:  $n = 5$ ,  $m = 4$

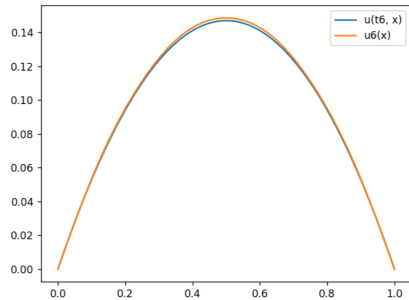


Рис. 2:  $n = 10$ ,  $m = 8$

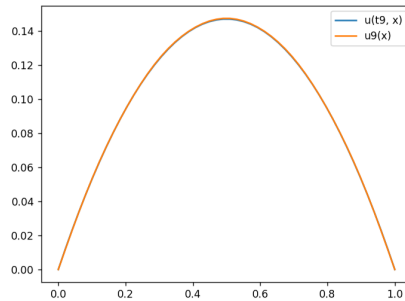


Рис. 3:  $n = 15$ ,  $m = 10$

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что при увеличении числа точек разбиения отрезка времени и размерности проекционного подпространства получаемое приближённое решение аппроксимирует точное, что подтверждает известные теоретические результаты [2].

### Литература

1. Лионс, Ж. -Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. -Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

2. Бондарев А. С. Проекционно-разностные методы приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление / А. С. Бондарев. – Воронеж: Вор. гос. ун-т, 2022. – 98 с.

3. Смагин, В. В. Сходимость метода Галеркина приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. – 2013. – №1. – С.222 – 231.

4. <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html#numpy.linalg.solve>

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХУКА-ДЖИВСА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ<sup>1</sup>**

**Д.Д. Антонов, М.С. Дмитриев, В.Ю. Чебакова**  
(Казань, КФУ)  
*vchebakova@mail.ru*

Инфекционные заболевания оказывают значительное влияние на функционирование общества. Нередко возникают эпидемии и пандемии. Они могут носить массовый и внезапный характер, как, например, пандемия коронавируса, а могут быть ожидаемыми, сезонными [1]. Когда наступают подобные периоды, обществу важно уметь эффективно распределять ресурсы для борьбы с инфекцией. Именно поэтому необходим инструмент, который помогает прогнозировать заболеваемость. Была разработана программа, которая позволяет прогнозировать заболеваемость в пределах популяции, а также подбирать коэффициенты в используемой модели по данным заболеваемости. Программа рассчитывает динамику заражений для нескольких моделей. Все они задаются системами дифференциальных уравнений и отличаются тем, что в каждой из них участвуют разные категории взаимодействующих друг с другом элементов популяции: 1) SIR - модель, включающая в себя восприимчивых, инфицированных и выздоровевших. В системе уравнений этой модели используются такие коэффициенты, как вероятность заболевания в случае контакта, интенсивность выздоровления инфицированного. 2) SEIR

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-29-00099).  
© Антонов Д.Д., Дмитриев М.С., Чебакова В.Ю., 2024



- модель, являющаяся расширением предыдущей за счёт введения переносчиков (латентных элементов). В этой модели введён дополнительный коэффициент, характеризующий скорость перехода из латентной фазы в фазу инфицирования. 3) Модель SEIRD также есть расширение предыдущих моделей, которое получается добавлением безвозвратных потерь — умерших. Система уравнений для этой модели дополняется коэффициентом смертности от болезни [2]. 4) Модель SIRV основана на модели SIR и отличается от неё добавлением категории вакцинированных (vaccinated). Система уравнений соответственно дополняется коэффициентом вакцинации [3]. По известным коэффициентам программа с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка вычисляет по начальным данным численность каждой категории элементов модели в период эпидемии. Также программа может строить графики и выгружать полученные данные в CSV-файл. С помощью данной программы также решается обратная задача. Коэффициенты модели могут различаться не только для разных типов инфекций, но и в рамках одной инфекции для различных популяций. Поэтому заранее коэффициентов никто не знает. Однако, по имеющимся данным заболеваемости можно попытаться подобрать нужные коэффициенты. Для этого ставится оптимизационная задача по подбору коэффициентов модели таким образом, чтобы уменьшить некоторый функционал (отражающий ошибку между расчётными и экспериментальными данными). Такая задача решается в программе при помощи оптимизационного метода Хука-Дживса. Для расчёта функционала система задач Коши вычисляется методом Рунге-Кутты 4-го порядка. В итоге получаются наиболее оптимальные коэффициенты, с помощью которых можно построить примерный прогноз динамики численности каждой группы модели для конкретной инфекции.

## Литература

1. Siettos C.I. Mathematical modeling of infectious disease dynamics / C.I. Siettos, L. Russo Lucia // <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.4161/viru.24041>
2. Мартянова А.Е. SEIRD-модель динамики распространения вирусных инфекций с учетом возникновения новых штаммов / А.Е. Мартянова, И.М. Ажмухамедов // <https://cyberleninka.ru/article/n/seird-model-dinamiki-rasprostraneniya-virusnyh-infektsiy-s-uchetom-vozniknoveniya-novyh-shtammov/viewer>

3. Кондратьев М.А. Применение агентного подхода к имитационному моделированию процесса распространения заболевания / М.А. Кондратьев, Р.И. Ивановский, Л.М. Цыбалова // <https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-agentnogo-podhoda-k-imitatsionnomu-modelirovaniyu-protsessa-rasprostraneniya-zabolevaniya/viewer>

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ ТЕПЛИЦА-ГАНКЕЛЯ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ<sup>1</sup>

**С.Н. Асхабов** (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ им. А.А. Кадырова)  
*askhabov@yandex.ru*

В работе изучается нелинейное интегральное уравнение с ядром Теплица-Ганкеля  $p(x - t) + q(x + t)$  [1] и неоднородностью  $f(x)$ :

$$u^\alpha(x) = \int_0^x [p(x - t) + q(x + t)]u(t) dt + f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

где функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$p \in C[0, \infty), \quad p(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } p(0) > 0, \quad (2)$$

$$q \in C[0, \infty), \quad q(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } q(0) \geq 0, \quad (3)$$

$$f \in C[0, \infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } f(0) = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе:

$$Q_0 = \{u(x) : u \in C[0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha > 1$  и выполнены условия (2)–(4). Если  $u \in Q_0$  является решением уравнения (1), то для любого  $x \in [0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} L(x) &\equiv \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [q(2t) + p(0)] dt \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \\ &\leq \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)] dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001)  
© Асхабов С.Н., 2024

Введем оператор  $T$  и класс  $P_b$  с метрикой  $\rho_b$ :

$$(Tu)(x) = \left( \int_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt + f(x) \right)^{1/\alpha},$$

$$P_b = \{u(x) : u \in C[0, b] \text{ и } L(x) \leq u(x) \leq R(x)\},$$

$$\rho_b(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{R(x)}, \text{ где } b > 0 \text{ любое число.}$$

Предположим, что наряду с (2)–(4) выполняются условия:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt, \quad (5)$$

$$\mu = \sup_{0 < x \leq b} \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{(\alpha-1) \int_0^x [q(2t) + p(0)]dt} < 1. \quad (6)$$

Методом весовых метрик [2] доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $\alpha > 1$  и выполнены условия (2)–(6), то уравнение (1) имеет в конусе  $Q_0$  (и в  $P_b$  при любом  $b > 0$ ) единственное решение  $u^*(x)$ . Это решение может быть найдено в пространстве  $P_b$  методом последовательных приближений по итерационной формуле  $u_n = Tu_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которые сходятся к нему по метрике  $\rho_b$  при любом  $b < \infty$  с оценкой скорости сходимости

$$\rho_b(u_n, u^*) \leq \frac{\mu^n}{1 - \mu} \rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\mu < 1$  определено в (6), а  $u_0 \in P_b$  есть произвольная функция.

Следуя [3] интегральные уравнения с ядром Теплица-Ганкеля и монотонной (не обязательно степенной) нелинейностью можно исследовать методом монотонных по Браудеру-Минти операторов.

### Литература

1. Anh P.K. The finite new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels / P.K. Anh, N.M. Tuan, P.O. Tuan // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — V. 397, № 3. — P. 537–549.

2. Асхабов С. Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1210–1219.

3. Асхабов С. Н. Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям / С.Н. Асхабов // Известия ВУЗов. Математика. — 1991. — №9. — С. 64-66.

## МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.М. Асхатов (Казань, К(П)ФУ)

*Radik.Ashatov@kpfu.ru*

М.В. Келдыш [1] исследовал краевую задачу для уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0$$

и показал зависимость постановки задачи от показателя  $m$  и поведения при  $y \rightarrow 0$  коэффициента  $b(x, y)$  [2].

В этой работе рассматривается частный случай решения краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов.

Пусть  $E_2^+$  — полуплоскость  $y > 0$  евклидовой плоскости  $E_2$ ,  $D$  — конечная область, симметричная относительно оси  $Ox$  и ограниченная кривой  $\Gamma$ . Обозначим  $D^+$  часть области  $D$  в  $E_2^+$ , ограниченную отрезком  $\Gamma^{(0)} = [a, b]$  и кривой  $\Gamma^+$ .

Рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T_\alpha^{(2)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^{2k} y^{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha^{2k+1} y^{2\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad 1/2 < \alpha < 1, \quad k > 0.$$

Фундаментальным решением данного уравнения с логарифмической особенностью будет функция

$$w = B \ln \frac{1}{r},$$

где

$$r = (x - x_0)^2 + \frac{1}{(1 - \alpha)^2 \alpha^{2k}} (y^{1-\alpha} - y_0^{1-\alpha})^2,$$

$B$  — нормирующая константа.

Получены аналоги первой и второй формулы Грина для оператора  $T_\alpha^{(2)}$ , а также интегральное представление  $T_\alpha^{(2)}$  - гармонической функции

$$u(M_0) = \int_{\Gamma} (wA[u] - uA[w])y^{-\alpha} d\Gamma,$$

где  $A[u]$  — конормальная производная.

Рассматриваются краевые задачи и доказаны теоремы единственности.

С помощью фундаментального решения  $w$  построены потенциалы типа двойного и простого слоев, которые имеют вид:

$$W(M) = \int_{\Gamma} \sigma(P)A[w]\eta^{-\alpha} d\Gamma,$$
$$V(M) = \int_{\Gamma} \mu(P)w\eta^{-\alpha} d\Gamma,$$

где координаты переменной точки будем обозначать  $P(\xi, \eta)$ .

Доказываются теоремы о предельных значениях потенциала типа двойного слоя и конормальной производной потенциала типа простого слоя. Используя формулы для предельных значений, а также граничные условия поставленных задач, получим эквивалентные интегральные уравнения. Исследование первой и второй пары сопряженных уравнений проводится по схеме, предложенной в [3].

### Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, №. 2. — С. 181–183.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.
3. Михлин С.Г. Курс математической физики. / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1968. — 576 с.

# О РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

А.К. Баззаев, А.В. Плиева (Владикавказ, СОГУ, ВИУ)

*a.k.bazzaev@yandex.ru*

В настоящей работе исследуется семейство разностных схем с весами для уравнения теплопроводности дробного порядка с неклассическими краевыми условиями. С помощью принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимость численного решения к точному в норме  $C$ .

**Постановка задачи** В прямоугольнике  $Q_T = \{(x, t), 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$  рассматривается задача

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

где  $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\eta(x, \eta) d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$  — дробная производная Герасимова

— Капуто по времени порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Будем предполагать, что функции  $q(x, t)$ ,  $f(x, t)$  непрерывны,  $k(x, t)$  непрерывно дифференцируема,  $u_0(x)$  удовлетворяет краевым условиям (2),  $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$ ,  $0 \leq q(x, t) \leq c_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — положительные постоянные.

**Разностная схема** Введем на отрезке  $[0, \ell]$  сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \dots, N\}$  с шагом  $h = \ell/N$  по переменной  $x$  и на отрезке  $[0, T]$  сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{x_i = j\tau : j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$  по переменной  $t$ . На множестве  $\bar{Q}_T$  рассмотрим сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$ .

В работе (1) получен дискретный аналог дробной производной по времени

$$\partial_{0t_j}^\alpha u = \Delta_{0t_j}^\alpha u + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой Министерства науки и высшего образования РФ (грант на создание и развитие НОМЦ СОГУ соглашение № 075-02-2024-1447)

$$\Delta_{0t_j}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) u_t^s, \quad u_t^s = \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau}.$$

Дифференциальной задаче (1) – (3) поставим в соответствие однопараметрическое по  $\sigma$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ , семейство разностных схем

$$\Delta_{0t_j}^\alpha y_i = \Lambda y_i^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$(a_N y_{\bar{x},N})^{(\sigma)} = -0.5h \left( \Delta_{0t_j}^\alpha y_N + (d_N y_N)^{(\sigma)} - f_N \right), \quad (6)$$

$$y_0^j = y_N^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где  $y_i^{(\sigma)} = \sigma \hat{y}_i + (1-\sigma)y_i$ ,  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$ ,  $a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i)$ ,  $k_i = k(x_i, \bar{t})$ ,  $d_i = q(x_i, \bar{t})$ ,  $f_i = f_i^j = f(x_i, \bar{t})$ ,  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $\bar{t} = t_j + 0.5\tau$ ,  $\hat{y} = y_i^{j+1}$ ,  $y = y_i^j$ ,  $\check{y} = y_i^{j-1}$ ,  $y_{\bar{x},N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия

$$\tau^\alpha(1-\sigma) \leq \frac{(2-2^{1-\alpha})h^2}{\Gamma(2-\alpha)(2c_2 + c_3h^2)}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Тогда

а) разностная схема (5) – (7) равномерно устойчива по начальному условию и правой части уравнения;

б) решение разностной задачи (5) – (7) равномерно сходится к решению задачи (1) – (3) и имеет точность, совпадающую с порядком погрешности аппроксимации.

### Литература

1. Таукунова Ф.И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф.И. Таукунова, М.Х. Шхануков-Лафишев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С. 1871 – 1881.

## ОДНА ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

А.М. Баринов (Челябинск, ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

barinovalexmi@mail.ru

В докладе рассматривается следующая задача. Имеется лабиринт с несколькими точками входа, в которых размещены мобильные роботы. И целевой точкой, являющейся точкой выхода, о которой известно только множество ее возможных положений. При этом

только одна из них является настоящей, а остальные — ложные. Какое из этих положений настоящее до некоторого момента времени неизвестно. ЛПР запускает одного из мобильных роботов который должен прийти в целевое положение. Поэтому цель ЛПР — выбор того робота, и движение по такой траектории, из которой он как можно дольше может попасть во все возможные целевые точки.

Пусть позиция  $x$  задается вектор-столбцом  $x = (x_1, x_2)'$  где  $x_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ , штрих означает операцию транспонирования.

Множество всех позиций задачи обозначим

$$X = \{x = (x_1, x_2)' | x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \leq n, x_2 \leq m\},$$

а множество допустимых позиций  $P \subseteq X$ .

Рассматривается задача с дискретным временем  $t$ , где время

$$t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}.$$

Положение системы в момент времени  $t+1$  ( $t \in 0, \dots, T-1$ ) задается системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + u_1(t), \\ x_2(t+1) = x_2(t) + u_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где управление  $u(t)$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))', \quad u_i(t) \in \{-1, 0, 1\} \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Система (1), (2) описывает перемещение точки, расположенной в клетке прямоугольной сетки в одну из восьми соседних клеток, либо отсутствие перемещения. Такая система, с учетом множества допустимых позиций  $P$ , может трактоваться как движение точки по лабиринту.

Задано стартовое множество  $X_0$ , состоящее из  $k$  стартовых точек, имеющие вид

$$X_0 = \{x^{0j} = (x_1^{0j}, x_2^{0j}) \quad j = 1, \dots, k\}.$$

Начальное положение системы

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0))' = x^0 = (x_1^0, x_2^0)'. \quad (3)$$

где  $x^0 \in X_0$ .



Предполагается, что система в момент времени  $T$  должна попасть либо в целевую позицию (выход из лабиринта), о которой известно, что это либо  $x^*$ , либо  $x^{**}$  (то есть должно быть выполнено одно из условий  $x(T) = x^*$ , или  $x(T) = x^{**}$ , но какое — заранее неизвестно). В некоторый момент времени  $\tau$ , представляющий из себя нестохастическую неопределенность [1], ЛПР становится известно в какую из этих двух позиций надо попасть, а какая является ложной целью. При этом, о неопределенности  $\tau$  ЛПР знает только множество ее возможных значений  $\tau \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ .

Пусть момент времени  $T_1 < T$  — это последний момент времени, в который ЛПР, двигаясь по некоторой траектории, может привести систему как в положение  $x(T) = x^*$ , так и в  $x(T) = x^{**}$ . Тогда перед ЛПР стоит следующая задача

$$T_1 \rightarrow \max. \quad (4)$$

Решением задачи оптимального управления (1)—(4) будем называть тройку  $(\hat{x}_0, \hat{u}, \hat{x}(\cdot))$ , где  $\hat{x}_0$  — применяемая стартовая позиция, оптимальное управление имеет вид

$$\hat{u} = (\hat{u}(0), \dots, \hat{u}(T_1 - 1), (\hat{u}^*(T_1), \hat{u}^*(T_1)), \dots, (\hat{u}^*(T - 1), \hat{u}^{**}(T - 1))),$$

а, определяемая этим управлением, оптимальная траектория

$$\hat{x}(\cdot) = (\hat{x}(0), \dots, \hat{x}(T_1), (\hat{x}^*(T_1 + 1), \hat{x}^{**}(T_1 + 1)), \dots, (\hat{x}^*(T), \hat{x}^*(T))).$$

В докладе предлагается алгоритм решения задачи (1)—(4) и приводятся результаты численного моделирования.

### Литература

1. Жуковский В.И. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев, Л.В. Смирнова. //— М. : URSS, КРАСАНД, 2013.

# МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина,

Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)

*anatbaskakov@yandex.ru, garkovenko@mail.ru, kostinalubov@bk.ru,*

*nat-uskova@mail.ru*

Пусть  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  — комплексные банаховы пространства и  $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  — замкнутый линейный оператор, имеющий плотную в  $\mathcal{X}$  область определения  $D(A)$ .

**Определение 1** Рассмотрим следующие условия:

- 1)  $\text{Ker } A = \{0\}$  (оператор  $A$  инъективен);
- 2)  $1 \leq n \leq \dim \text{Ker } A \leq \infty$ ;
- 3)  $\text{Ker } A$  — дополняемое подпространство (в  $D(A)$ , или в  $\mathcal{X}$ );
- 4)  $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$ , что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора  $A$ )

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

5) оператор  $A$  равномерно инъективен, т. е.  $\text{Ker } A = \{0\}$ ,  $\gamma(A) > 0$ ;

6)  $\text{Im } A$  — замкнутое, дополняемое в  $\mathcal{X}$  подпространство и, следовательно,  $\gamma(A) > 0$ ;

7)  $\text{Im } A$  — замкнутое подпространство из  $\mathcal{X}$  коразмерности  $1 \leq m = \text{codim Im } A \leq \infty$ , где  $\text{codim Im } A = \dim \mathcal{X} / \text{Im } A$ ;

8)  $\text{Im } A = \mathcal{X}$ , т. е. оператор  $A$  сюръективен;

9) оператор  $A$  непрерывно обратим.

Если для оператора  $A$  выполнены все условия из совокупности условий  $S_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 9$ , то будем говорить, что оператор  $A$  находится в состоянии обратимости  $S_0$ . Множество состояний обратимости оператора  $A$  обозначим символом  $St_{inv}(A)$ .

**Определение 2.** Два линейных оператора  $A_1 : D(A_1) \in \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$  и  $A_2 : D(A_2) \in \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_2$  называются эквивалентными, если  $St_{inv}(A_1) = St_{inv}(A_2)$ .

Метод эквивалентных операторов состоит в следующем. Изучаемому оператору  $A_1$  ставится в соответствие эквивалентный ему оператор  $A_2$ , для которого проще вычислить  $St_{inv}(A_2)$ .

Есть несколько подходов к построению эквивалентного оператора. Если  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$  и  $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ , то строятся два обратимых ограниченных оператора  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  и  $V : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ , такие, что

$$A_1 = V A_2 U, \quad UD(A_1) = D(A_2) \quad (1)$$

**Лемма 1.** *При выполнении условия (1)  $St_{inv}(A_1) = St_{inv}A_2$ .*

Отметим, что операторы, удовлетворяющие (1), также называются слабо подобными операторами [2].

Другой подход заключается в построении сопровождающего оператора.

**Определение 3.** Пусть  $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Оператор  $B \in \text{End } \mathcal{Y}$ , называется сопровождающим для оператора  $A$ , если существуют линейные операторы  $R \in \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $T \in \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ,  $K : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $N : \mathcal{Y} \rightarrow D(A)$ , обладающие свойствами:

- 1)  $\text{Im } A = R^{-1}(\text{Im } B)$ ;
- 2)  $\text{Im } B = T^{-1}(\text{Im } A)$ ;
- 3)  $RT = I + \alpha B$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$  — некоторое число;
- 4)  $K : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$  — ограниченный оператор (с нормой графика в  $D(A)$ );
- 5)  $N : \mathcal{Y} \rightarrow D(A)$  — ограниченный оператор, если в  $D(A)$  рассматривать норму пространства  $\mathcal{X}$ ;
- 6) каждый из операторов  $K$  и  $N$  осуществляет изоморфизм пространств  $\text{Ker } A$  и  $\text{Ker } B$ .

**Лемма 2.** [3] Оператор  $A$  и сопровождающий оператор  $B$  эквивалентны.

## Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.
2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. — М. : МЦНМО, 2004. — 552 с.
3. Баскаков А.Г. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов. / А.Г. Баскаков, В.Б. Диденко // Изв. РАН Сер.математика. — 2018. — т. 82, №1. — с.3-16.

# СМЕНА ФОРМ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИСПРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ, УВЛЕКАЕМОЙ ЛАМИНАРНЫМ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ<sup>1</sup>

В.Б. Бекежанова<sup>1</sup>, Н.И. Гилёв<sup>1,2</sup>,

И.А. Шефер<sup>1,3</sup> (<sup>1</sup>Красноярск, ИВМ СО РАН, <sup>2</sup>Санкт-Петербург,  
СПБПУ Петра Великого, <sup>3</sup>Красноярск, СФУ)

*vbek@ict.krasn.ru, gilevnick@gmail.com, ilya.shefer@gmail.com*

Работа посвящена исследованию характеристик плоскопараллельных течений в двухфазной системе, заполняющей плоский горизонтальный канал. Рассматривается установившееся совместное течение жидкости и спутного потока газа, контактирующих вдоль общей термокапиллярной границы раздела. Газ прокачивается с заданным расходом  $R_g$ , что приводит к формированию дополнительных сдвиговых напряжений на границе раздела сред и диффузионному испарению жидкости. Для описания конвективного теплообмена, обусловленного совместным действием силы плавучести, термокапиллярного эффекта и продува газа, используется двусторонняя математическая модель на основе уравнений Обербека – Буссинеска [1]. Испаряемый компонент в несущем газе считается пассивной примесью; перенос пара в газовой фазе моделируется с помощью уравнения конвективной диффузии.

Система уравнений термоконцентрационной конвекции допускает частично инвариантное точное решение ранга 1 дефекта 3

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(y), \quad v_j = 0, \quad T_j = T_j(x, y) = (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), \\ p_j &= p_j(x, y), \quad C = C(x, y) = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индексы  $j = 1, 2$  указывают на функции и параметры, связанные с жидкой и газовой фазами соответственно,  $\mathbf{v} = (u, v)$  — вектор скорости,  $p$  — модифицированное давление,  $T$  — температура,  $C$  — функция паросодержания,  $a_j^i$ ,  $b_j$  — параметры решения, которые должны удовлетворять условиям совместности, диктуемым граничными соотношениями. Одно из условий приводит к равенству  $a_1^1 = a_1^2 = A$ ; параметр  $A$  трактуется как поверхностный температурный градиент [2], который в реальной физической системе формируется на поверхности жидкого слоя при испарении.

В работе [3] с помощью решения (1) исследовалось влияние толщины жидкого слоя на характеристики конвективных режимов,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФНФ (проект № 22-11-00243).  
© Бекежанова В.Б., Гилёв Н.И., Шефер И.А., 2024

включая линейную устойчивость относительно плоских и пространственных возмущений в случае, когда межфазная поверхность остаётся недеформированной под действием возмущений. В настоящей работе в линейной постановке изучается влияние деформируемости границы раздела жидкость–газ на устойчивость рассматриваемых двухфазных течений относительно трёхмерных нормальных возмущений в системах различной геометрии. Для системы сред НФЕ-7100–азот найдены пороговые значения градиента  $A$ , при которых происходит потеря устойчивости. Показано, что деформация поверхности раздела оказывает стабилизирующее влияние. Изменение баланса сил, вызванное изменением толщины жидкого слоя, приводит к смене типа наиболее опасных возмущений. В системе с тонким жидким слоем главными являются плоские возмущения; неустойчивость проявляется в форме поперечных валов, дрейфующих вдоль потока. С увеличением толщины жидкого слоя наиболее опасными становятся спиральные возмущения, при этом в жидком слое возникают продольные упорядоченные структуры. Изменение толщины газового слоя не приводит к смене типа наиболее опасных возмущений. Формирование поперечных двумерных волн с последующим развалом в трёхмерные структуры в жидкости, увлекаемой газовым потоком, подтверждено экспериментально в [4].

## Литература

1. Бекежанова В.Б. Задачи испарительной конвекции (обзор) / В.Б. Бекежанова, О.Н. Гончарова // ПММ. — 2018. — Т. 82, № 2. — С. 219–260.
2. Bekezhanova V.B. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions / V.B. Bekezhanova, O.N. Goncharova // Microgravity Sci. Technol. — 2020. — V. 32, № 2. — P. 139–154.
3. Бекежанова В.Б. О влиянии толщины жидкого слоя на устойчивость плоскопараллельного течения в двухфазной системе с испарением / В.Б. Бекежанова, И.А. Шефер // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023. — Т. 16, № 2. — С. 219–231.
4. Kabov O.A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels / O.A. Kabov, D.V. Zaitsev, V.V. Cheverda, A. Bar-Cohen // Exp. Therm. Fluid Sci. — 2011. — V. 35, № 5. — P. 825–831.

# ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Д.В. Белова (Воронеж, ВГУ)

dianabelova123@yandex.ru

В работе исследуется смешанная задача для уравнения с инволютивным отклонением в аргументе и с периодическими краевыми условиями

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q_1(x)u(1 - x, t) + q_2(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где  $x \in [0; 1]$ ,  $t \in (-\infty; +\infty)$ . Предполагаем, что все функции, входящие в (1)–(2) комплекснозначные,  $q_j \in C^1[0, 1]$ ,  $j = 1, 2$ ,  $f(x, t)$  — непрерывна по обоим переменным,  $f(0, 0) = f(1, 0)$ . Решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обоим переменным в полосе  $[0; 1] \times (-\infty; +\infty)$ .

В [1] в случае  $f(x, t \equiv 0)$ , при минимальных требованиях на  $\varphi(x)$  доказано существование классического решения. При этом использовались уточненные асимптотики для собственных значений и собственных функций, а также специальное преобразование формального решения (ускорение сходимости ряда формального решения).

Здесь мы получим теорему о классическом решении, используя представление формального решения через контурные интегралы от резольвенты спектрального оператора (см. [2]). Предполагаем выполненными минимальные для существования классического решения условия:

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) - \varphi'(1) + \varphi(0)[q_1(0) - q_1(1) + q_2(0) - q_2(1)] = 0.$$

**Теорема 1.** *Если  $u(x, t)$  — классическое решение задачи (1)–(2), то оно единственно и находится по формуле*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) [R_\lambda \varphi(x) e^{\lambda t} + \\ & + \int_0^t R_\lambda f(\cdot, \tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $L$ :  $Ly = y'(x) + q_1(x)y(1-x) + q_2(x)y(x)$ ,  $y(0) = y(1)$ ;  $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda - (2\pi n + a)| = \delta\}$  — контуры в комплексной плоскости, каждый из которых содержит только одно собственное значение оператора  $L$ ,  $a = \pi/2 + \int_0^1 q_2(t)dt$ ,  $\delta > 0$  и достаточно мало,  $2\pi n + a$  — главная часть асимптотики собственных значений (см. [1]);  $r > 0$  — фиксировано и взято таким, что все собственные значения, большие по модулю  $r$ , лежат в  $\gamma_n$ .

Ряд в (3) при любом фиксированном  $t$  сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [0; 1]$ .

### Литература

1. Белова Д.В. Об одной смешанной задаче с инволюцией / Д.В. Белова // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — М. : ВИНТИ РАН. — 2021. — Т. 194. — С. 46–54.
2. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Диф. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 717–731.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.С. Бетина (Воронеж, ВГУ)

*alexandra\_moavt@mail.ru*

Рассматривается следующий оператор первого порядка с инволюцией и двухточечным краевым условием:

$$Ly(x) = y'(1-x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

действующий в пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[0, 1]$  функций,  $q_j \in C^1[0, 1]$ ,  $(j = 1, 2)$ .

Пусть  $\lambda_n$  — собственные значения, а  $y_n(x)$  — соответствующие собственные функции оператора  $L$ .

Используя технику [1] при исследовании спектральной задачи, получим следующий результат

**Теорема.** *Имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_n = \int_0^1 q_1(t) dt - iM + 2\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$y_n(x) = \left(m(x)e^{\lambda_n ix} + im(1-x)e^{\lambda_n i(1-x)}\right)v(x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{где } M = \ln \frac{(1-\gamma i)}{(\gamma-i)}, \quad m(x) = e^{-i \int_0^x q_1(t) dt}, \quad v(x) = e^{\int_0^x q_2(t) dt}.$$

### Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. — 2011. — № 2. — С. 64–72.

## КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ДВУХТОЧЕЧНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

**А.С. Бетина, М.Ш. Бурлуцкая** (Воронеж, ВГУ)

*alexandra\_moavm@mail.ru, bmsb2001@mail.ru*

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x, t) + q_2(x)u(1-x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = \gamma u(1, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (2)$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Предполагаем выполненными следующие условия:  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $q_1(x)$  — вещественная,  $q_2(x) = q_2(1-x)$  (такие условия обеспечивают самосопряженность соответствующее оператора и взяты для простоты). На функции  $\varphi(x)$  накладываются минимальные требования для существования классического решения:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^1[0, 1], \quad \varphi(0) = \gamma\varphi(1), \\ \varphi'(1) - \gamma\varphi'(0) + \varphi(1)[\gamma(q_1(0) - q_1(1)) - \gamma^2 q_2(1)] &= 0. \end{aligned}$$



Представленные в докладе результаты обобщают результаты из [1-2] на случай двухточечных краевых условий и уравнения, содержащего инволюцию  $\vartheta(x) = 1 - x$  как в производной, так и в самой функции  $u(x, t)$ .

Соответствующей эталонной (см. [1]) является задача, для которой дополнительно требуем:

$$q_1(x) = q_1(1 - x), \quad q_2(x) = -\overline{q_2(x)}.$$

В этом случае решение задачи (1) – (2) дается явной формулой:

$$u(x, t) = \left[ p(1 - x)f_0(1 - x + t) + p(x)f_0(x + t) \right] e^{ait},$$

где  $f_0(x) \in C^1[0, 1]$  периодичная функция с периодом  $T = 1$ , которая при  $x \in [0, 1]$  определена соотношением

$$f_0(x) = [\varphi(x) - i\varphi(1 - x)]/2p(x),$$

$$p(x) = e^{iax + \int_0^x (q_2(t) - iq_1(t)) dt}, \quad a = \int_0^1 q_1(t) dt - iM, \quad M = \ln \frac{1 - \gamma i}{\gamma - i}$$

(под  $\ln z$  понимается главное значение  $\text{Ln} z$ ).

Используя решение эталонной задачи и уточненные асимптотики соответствующей (1)-(2) спектральной задачи, доказывается существование классического решения, имеющего вид, аналогичный [1, Теорема 8].

### Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ЖВМиМФ. — 2011. — Т. 51, № 12. — С. 2233–2246.
2. Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечными краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, С.А. Чередникова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2016. — № 3. — С. 71–79.

# РАЗРЕШИМОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ПРИ ПОДХОДЕ К БОКОВОЙ ГРАНИЦЕ КОНУСА

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)

*birukovalmix@mail.ru*

В данной работе изучается аналитическая задача Коши для общих линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) - A(t, z, D)u &= h(t, z) \\ u(t_0, z) &= \varphi(z),\end{aligned}$$

в банаховых пространствах аналитических функций с интегральными метриками, имеющих особенности степенного характера при приближении к боковой поверхности конуса

$$V_{\sigma, R} = \{(t, z) : |t - t_0| < R/\sigma, |z - z_0| < R - \sigma|t - t_0|\}, R > 0, \sigma > 0.$$

При этом интегральная метрика вводится как по временной, так и по пространственной переменной.

Получены условия для разрешимости задачи Коши в рассматриваемой шкале функциональных пространств, тем самым, описана структура систем дифференциальных уравнений, для которых эта разрешимость имеет место. Область определения решения аналитической задачи Коши совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений. Ранее в работе [1] подобные задачи рассматривались в классах аналитических функций с супремум-нормами и были получены критерии корректности в заданной шкале функциональных пространств. Оказывается, что условия, при выполнении которых имеет место корректность задачи Коши в пространствах с супремум-нормами и в пространствах с интегральными метриками, совпадают.

## Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.

# О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А.С. Бондарев, А.А. Петрова, О.М. Пировских

(Воронеж, ВГУ)

*bondarev@math.vsu.ru*

Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств  $V \subset H \subset V'$ , где пространство  $V'$  – двойственное к  $V$ , а пространство  $H$  отождествляется со своим двойственным  $H'$ . Оба вложения плотные и непрерывные. На  $u, v \in V$  определена полуторалинейная форма  $a(u, v)$ . Пусть для всех  $u, v \in V$  выполнены оценки:

$$|a(u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ . Форма  $a(u, v)$  порождает линейный ограниченный оператор  $A : V \rightarrow V'$  такой, что  $a(u, v) = (Au, v)$ . Здесь под выражением типа  $(z, v)$  понимается значение функционала  $z \in V'$  на элементе  $v \in V$ . Для  $z \in H$  выражение  $(z, v)$  совпадает со скалярным произведением в  $H$  [1].

В пространстве  $V'$  на  $[0, T]$  рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T p(t)u'(t) dt = \bar{u}. \quad (2)$$

В (2) на  $[0, T]$  заданы функция  $t \rightarrow f(t) \in V'$  и функция  $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^1$ , а также элемент  $\bar{u}$ . Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщенном смысле.

Отметим, что разрешимость периодической по времени задачи для параболического уравнения с переменным оператором  $A(t)$  изучалась в работе [2]. Вопросы слабой разрешимости абстрактного параболического уравнения с интегральными по времени условиями на решения рассматривались в работах [3] и [4].

**Теорема.** Пусть в задаче (2) выполнены условия (1) и вложение  $V \subset H$  компактно. Пусть также функция  $f \in L_2(0, T; H)$ , а функция  $p(t)$  является абсолютно непрерывной на  $[0, T]$ , невозрастающей и принимает положительные значения на  $[0, T]$ . Предположим, что  $\bar{u} \in V$ . Тогда существует единственная функция  $u(t)$ ,

такая что  $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$ ,  $u' \in L_2(0, T; V')$ , удовлетворяющая в (2) уравнению почти всюду на  $[0, T]$  и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left( \|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \right) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}.$$

### Литература

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
2. Бондарев А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 4. – С. 78 – 88.
3. Критская Е. А. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием / Е. А. Критская, В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2008. – № 1. – С. 222 – 225.
4. Петрова А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 160 – 169.

## НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Е.З. Борович** (Санкт-Петербург, СПбГЭТУ)  
*danitschi@gmail.com*

Рассматривается нестационарная краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial E}{\partial x} E - fH(E, E_0), \\ E(0, t) = E(1, t) = E_0, \quad E(x, 0) = \tilde{E}(x), \end{cases} \quad (1)$$

где  $f$  – положительная константа,  $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$ , а функция  $G(E)$  класса  $C^2$  удовлетворяет условиям:

- 1) функция  $G(E)$  при  $E > 0$  имеет ровно две точки экстремума:  $E_1$  – локальный максимум,  $E_2$  – локальный минимум, причем  $E_1 < E_2$ ;

2)  $G'(E) > 0$  при  $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$ ,  $G'(E) < 0$  при  $E \in (E_1, E_2)$ .

*Утверждение 1.* Если  $E_1 < E_0 < E_2$ , то уравнение  $H(E, E_0) = 0$  имеет ровно три положительных решения  $0 < E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$ , причем  $H'_E(E_i(E_0), E_0) > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Задача (1) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} u - fh(u, E_0), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2)$$

где  $(h(u, E_0) = H(u + E_0, E_0)$ ,  $u_0(x) = \tilde{E}(x) - E_0$ .

*Утверждение 2 [1].* При любом начальном условии  $u_0 \in H_0^1(0, 1)$  существует единственное решение задачи Коши  $u(x, t)$  задачи (2) на некотором максимальном интервале  $0 < t < \bar{t}$ , причем либо  $\bar{t} = +\infty$ , либо  $\|u(x, t)\|_{H_0^1 \rightarrow +\infty}$  при  $t \rightarrow \bar{t}$ .

*Утверждение 3 [1].* Решение  $u(x, t)$  нестационарной задачи (2) является классическим решением.

*Утверждение 4 [1].* Нестационарная задача (2) определяет динамическую систему в множестве

$$C = \{u \in H_0^1(0, 1) | \sigma_1(E_0) \leq u(x) \leq \sigma_2(E_0)\}$$

почти всюду на  $[0, 1]$ , где  $\sigma_i(E_0) = E_i(E_0) - E_0$ ,  $i = 1, 2$ .

### Литература

1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. / Д. Хенри // М.: Мир, 1985.

## ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С СИЛЬНО ИСКРИВЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ<sup>1</sup>

Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов

(Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН, УУНИТ)

borisovdi@yandex.ru, radimsul@mail.ru

Рассматривается система полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в многомерной области. Граница такой области произвольным образом искривляется, оставаясь в тонком слое

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>.

© Борисов Д.И., Сулейманов Р.Р., 2024

вдоль невозмущённой границы. На искривлённой границе задается условие Дирихле или условие Неймана. В случае условия Неймана на структуру искривления накладываются дополнительные достаточно естественные и весьма слабые условия. Наложённые условия позволяют рассмотреть очень широкий класс искривлений, включая, например, классическую быстро осциллирующую границу. Показано, что когда упомянутый тонкий слой сжимается и искривленная граница приближается к невозмущённой, усреднение рассматриваемой задачи приводит к той же системе уравнений с теми же краевыми условиями, но уже на предельной границе. Основной результат – доказательство соответствующих операторных  $W_2^1$ - и  $L_2$ -оценок.

## О ПРЕДСТАВИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ БИРКГОФА<sup>1</sup>

С.А. Будочкина (Москва, РУДН)  
*budochkina-sa@rudn.ru*

Рассмотрим систему ОДУ

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) \equiv A(t)\mathbf{u}'(t) + B(t)\mathbf{u}(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A(t) &= (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \\ \mathbf{u}(t) &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T, \quad \mathbf{N}(\mathbf{u}) = (N_1(\mathbf{u}), N_2(\mathbf{u}), \dots, N_n(\mathbf{u}))^T, \\ a_{ij} &\in C^1[t_0, t_1], \quad b_{ij} \in C[t_0, t_1], \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Зададим область определения оператора  $\mathbf{N}$  следующим образом:

$$D(\mathbf{N}) = \{u_i \in C^1[t_0, t_1] : u_i(t_0) = \varphi_i, u_i(t_1) = \psi_i, i = \overline{1, n}\}. \quad (2)$$

Введем билинейную форму

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{v}(t))^T \mathbf{w}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n v_i(t) w_i(t) dt. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup> Публикация выполнена в рамках проекта №002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

© Будочкина С.А., 2024

**Теорема 1.** Оператор  $\mathbf{N}$  системы уравнений (1) является потенциальным на множестве  $D(\mathbf{N})$  (2) относительно билинейной формы (3) тогда и только тогда, когда  $\forall t \in [t_0, t_1]$  выполнены следующие условия:

$$A(t) + (A(t))^T = 0, \quad (4)$$

$$(B(t))^T - B(t) + A'(t) = 0. \quad (5)$$

**Теорема 2.** Если выполнены условия (4), (5), то соответствующее действие по Гамильтону имеет вид

$$F_{\mathbf{N}}[\mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{u}'(t))^T A(t) \mathbf{u}(t) + G[\mathbf{u}] \right) dt,$$

где

$$G[\mathbf{u}] - G[\mathbf{u}_0] = \int_0^1 \left( B(t) \tilde{\mathbf{u}}(t, \lambda) - \frac{1}{2} A'(t) \tilde{\mathbf{u}}(t, \lambda) \right)^T (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t)) d\lambda,$$

$\tilde{\mathbf{u}}(t, \lambda) = \mathbf{u}_0(t) + \lambda(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t))$ ,  $\mathbf{u}_0(t)$  — фиксированный элемент из  $D(\mathbf{N})$ .

**Теорема 3.** При выполнении условий (4), (5) система уравнений (1) представима в форме уравнений Биркгофа

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) \equiv ((R(t))^T - R(t)) \mathbf{u}'(t) + \text{grad } G[\mathbf{u}] - R'(t) \mathbf{u}(t) = 0,$$

т.е.

$$A(t) = (R(t))^T - R(t),$$

$$B(t) \mathbf{u}(t) = \text{grad } G[\mathbf{u}] - R'(t) \mathbf{u}(t),$$

где

$$R(t) = -\frac{1}{2} A(t).$$

Настоящий доклад основан на работах [1–3].

### Литература

1. Budochkina S.A. On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms / S.A. Budochkina, E.S. Dekhanova // Ural Mathematical Journal. — 2021. — V. 7, № 1. — P. 26–37.

2. Budochkina S.A. On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton-Ostrogradskii

equations / S.A. Budochkina, T.H. Luu // Lobachevskii Journal of Mathematics . — 2021. — V. 42, № 15. — P. 3594–3605.

3. Budochkina S.A. On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations / S.A. Budochkina, H.P. Vu // Eurasian Mathematical Journal. — 2022. — V. 13, № 3. — P. 23–32.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ<sup>1</sup>

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)

*y.bulatov@bk.ru*

Рассматриваемая в работе задача поставлена профессором Ляховым Л.Н. и автор выражает ему глубокую благодарность.

Пусть  $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ ,  $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$ ,  $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $\gamma_i \in (-1, +\infty)$ ,

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \Delta_{B_\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}.$$

В [1] для всех значений параметра  $\gamma_i > -1$  получена формула Киприянова—Бельтрами, из которой для любой четной по каждой координате аргумента, дважды непрерывно дифференцируемой функции  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$  следует равенство

$$\Delta_{B_\gamma} u(|x|) = (B_\mu)_r u(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \mu = n + |\gamma| - 1.$$

**Постановка задачи Коши:** найти функцию  $u \in C_{ev}^2(\overline{\mathbb{R}_n^+})$  такую, что

$$(B_\mu)_t u(x, t) = a^2 (\Delta_{B_\gamma})_t u(x, t), \tag{1}$$

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

Второе условие Коши в (2) вызвано четностью по Киприянову [2] по  $t$  и обычно отсутствует при формулировке задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

**Теорема 1.** *Предположим, что число  $\mu$  и мультииндекс  $\gamma$  удовлетворяют условиям  $\mu > -1$ ,  $\gamma_i > -1$  и выполняется условие*

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 24-21-00387).  
© Булатов Ю.Н., 2024



$\mu = n + |\gamma| - 1$ . Решение задачи Коши (1) с условиями (2) существует и представлено следующими формулами.

1. Пусть  $\mu > 0$ , тогда решение задачи Коши (1) определено первой формулой Пуассона [3]:

$$u(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{|x|^2 + (at)^2 - 2|x|at \cos \alpha}\right) \sin^{2\mu} \alpha d\alpha.$$

2. Для  $\mu = 0$  решение задачи (1) имеет вид формулы Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{f(|x| + at) + f(|x| - at)}{2}.$$

3. Если  $0 > \mu > -1$ , то решение задачи Коши (1) определено второй формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \mathbb{T}^t f(|x|) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+3}{2}\right) (|x|at)^{2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+2}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{|x|^2 + (at)^2 - 2|x|at \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + (at)^2 - 2|x|at \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha, \quad \mu = n + |\gamma| - 1,$$

где оператор  $\mathbb{T}$ -псевдосдвига определен в [4].

### Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для  $B$ -гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — Москва. : Наука, 1997. — 208 с.
3. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б.М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. 6, № 2. — С. 102–143.
4. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора  $\Delta_B$  Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ТЕОРИИ РИСКА

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)

*ebulinsk@yandex.ru*

Принятие решений в условиях неопределенности или риск-менеджмент — важная задача, возникающая во многих приложениях.

Для того чтобы приступить к решению какой-то практической задачи, прежде всего необходимо построить соответствующую математическую модель изучаемого процесса или явления. Существует много моделей, с большей или меньшей точностью, описывающих данную систему. Это связано с тем, что обычно построение математической модели происходит в несколько этапов, начиная с принимаемых предположений, которые приходится уточнять, пока не будет достигнута требуемая точность.

Важен также и тот факт, что одна и та же математическая модель может возникать в различных приложениях. В докладе речь пойдет о таких приложениях как финансы, страхование, теория запасов и водохранилищ, телекоммуникационные сети, динамика популяций, теория очередей, теория надежности, медицина и другие. Наиболее распространены [1,2] так называемые модели входа-выхода, задаваемые с помощью набора  $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$ , где  $T$  — горизонт планирования,  $Z = \{Z(t), t \in [0, T]\}$  — входящий процесс,  $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$  — выходящий процесс,  $U = \{U(t), t \in [0, T]\}$  — управление,  $\Psi$  — функционал, который дает возможность найти состояние системы  $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$  в виде  $X = \Psi(Z, Y, U)$ , так как он характеризует структуру рассматриваемой системы и способ ее функционирования,  $\mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(T, Z, Y, U, X)$  — это целевая функция, оценивающая качество функционирования системы (обычно не все аргументы указываются в записи). В докладе будет объяснено, как различная интерпретация указанных элементов позволяет переходить от одной области приложений к другой. Таким образом, результаты, доказанные для одного раздела знаний, могут использоваться и в других.

Одна из основных задач при исследовании моделей прикладной теории вероятностей — нахождение оптимального управления, которое обеспечивает достижение экстремума целевой функции. При выборе целевой функции имеются два основных подхода (стоимостной и надежностный), т.е. оцениваются либо понесенные системой убытки, либо вероятность прекращения работы на горизонте планирования, которые надо минимизировать. Если речь идет о полу-

ченном доходе или времени безотказной работы, то желательно их максимизировать [3]. В последние десятилетия стали популярны и другие подходы, например, многокритериальная оптимизация и поиск условных экстремумов.

Отметим, что для того, чтобы использовать на практике полученные оптимальные управления, необходимо убедиться, что предлагаемая математическая модель устойчива, т.е. малые флуктуации параметров или возмущения распределений, фигурирующих в построенной модели, приводят к малым изменениям целевой функции. Существует целый ряд методов исследования устойчивости. Основное внимание будет уделено использованию вероятностных метрик. Большой интерес также представляет изучение предельного поведения состояния системы при неограниченном росте горизонта планирования [4].

Решение сформулированных проблем будет продемонстрировано на нескольких моделях страхования и теории запасов.

### **Литература**

1. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208, — P. 349–408.
2. Булинская Е.В. Эмпирические асимптотически оптимальные политики / Е.В. Булинская // Современные проблемы математики и механики : сборник, посвященный 190-летию П.Л. Чебышева. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2011. — Т. 7, вып. 1. — С. 8–15.
3. Bulinskaya E.V. Cost approach versus reliability / E.V. Bulinskaya // Proceedings of International Conference DCCN-2017. — Moscow : Technosphaera, 2017. — P. 382–389.
4. Булинская Е.В. Модели страхования с дискретным временем / Е.В. Булинская // Вестник МГУ. Сер. 1 : Математика. Механика. — 2023. — №6. — С. 42–52.

## **ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Я.С. Бунтова** (Самара, Самарский университет)

*ynbuntova@gmail.com*

В этой работе рассматривается задача с интегральными нелокальными условиями первого рода. Основной целью работы является доказательство однозначной разрешимости нелокальной задачи с

интегральными условиями 1 рода, если ядра этих условий зависят не только от пространственной переменной, но и от времени. Показана эквивалентность нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода и нелокальной задачи с интегральными условиями 2 рода. Получены ограничения на входные данные, обеспечивающие единственность обобщенного решения поставленной задачи.

Рассмотрим в области  $Q = (0, l) \times (0, T)$ , где  $l, T < \infty$ , уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x = f(x, t), \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти в области  $Q$  решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^l K_1(x, t)u(x, t)dx = h_1(t), \int_0^l K_2(x, t)u(x, t)dx = h_2(t). \quad (3)$$

В этой работе рассмотрим частный случай этой задачи (1) – (3), в которой первая производная ядра по времени на краях отрезка  $[0, l]$  равна нулю  $K_{i\tau}(0, \tau) = K_{i\tau}(l, \tau) = 0$ .

В работе [1] был рассмотрен частный случай для задачи (1)–(3), в которой ядро представляется в виде  $K_i(x, t) = \Phi_i(x)\Psi_i(t)$ .

В случае одной пространственной переменной нелокальные интегральные условия могут быть представлены следующим соотношением:

$$\alpha u(x, t) + \beta u_x(x, t) + \lambda \int_0^l K(x, t)u(x, t)dx = 0. \quad (*)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  не обращаются в ноль одновременно, то условие называется интегральным условием второго рода. Если  $\alpha = \beta = 0$ , то условие называется интегральным условием первого рода. [2]. Если  $\beta \neq 0$ , то эффективным оказался метод, впервые реализованный в [4] для многомерного уравнения. Если же  $\alpha = \beta = 0$ , то есть нелокальные условия первого рода, при обосновании рассуждения возникает много трудностей, отмеченных в статье [3]. Одним из способов преодолеть возникающие трудности является сведение условий первого рода к условиям второго рода причем так, чтобы они оказались эквивалентными.

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1), (2), (3) будем называть функцию  $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющую условию  $u(x, 0) = 0$  и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x] dx dt - \int_0^T v(l, t) a(l, t) u_x(l, t) dt + \\ + \int_0^T v(0, t) a(0, t) u_x(0, t) dt = \int_0^l v(x, 0) \psi(x) dx + \int_0^T \int_0^l v(x, t) f dx dt$$

для любой функции  $v(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ , где

$$\widehat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

**Теорема** Если выполнены условия

$$a(x, t), a_t(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$$

$$\alpha_{12}a(0, t) + \alpha_{21}a(l, t) = 0,$$

$$\alpha_{11}a(0, 0)\xi_1^2 + 2\alpha_{12}a(0, 0)\xi_1\xi_2 - \alpha_{22}a(l, 0)\xi_2^2 \geq 0,$$

то существует не более одного обобщенного решения поставленной задачи.

### Литература

1. Бунтова Я.С. Нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для уравнения колебания струны / Я.С. Бунтова. // Вестник Самарского университета. Естественная серия, 2023. — Т. 29, № 3. — С. 8–13.
2. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография / Л.С. Пулькина // Самара : Издательство «Самарский университет», 2012, — 12 с.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Диф. уравнения, 13:2 (1977). — с. 294–304.
4. Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения. / В.Б. Дмитриев // Вестник СамГУ. 2006. — № 2(42). — С. 15–27.

# УСЛОЖНЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ «БелГУ»)

*vbv57@inbox.ru*

Мы рассматриваем псевдодифференциальные уравнения для обширного класса псевдодифференциальных уравнений, который включает операторы, порядок которых может меняться. Исследование основано на методах, развитых в [1], и некоторые результаты, полученные в этом направлении, описаны в [2].

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^m$  — ограниченная область с границей  $\partial D$ ,  $s : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция, удовлетворяющая условию Липшица в  $\overline{D}$ , т.е.  $\exists C > 0$ , что выполняется неравенство

$$|s(x_1) - s(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{D}.$$

Для фиксированной точки  $x \in \overline{D}$  определяется локальное пространство Соболева-Слободецкого  $H^{s(x)}(\mathbb{R}^m)$  с нормой

$$\|u\|_{s(x)} \equiv \left( \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |\xi|)^{2s(x)} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

которая называется локальной нормой;  $\tilde{u}$  обозначает преобразование Фурье функции  $u$ .

По заданной функции  $A(x, \xi)$ , определенной в  $\overline{D} \times \mathbb{R}^m$  вводится псевдодифференциальный оператор  $A$  следующей формулой

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(x, \xi) e^{i(x-y)\xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D.$$

Функцию  $A(x, \xi)$  называют символом оператора  $A$ .

Пусть задана функция  $\alpha : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая теми же свойствами, что и функция  $s(x)$ . Выделим класс символов  $A(x, \xi)$ , определенных на  $\overline{D} \times \mathbb{R}^m$  и удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$1) \quad c_1(1 + |\xi|)^{\alpha(x)} \leq |A(x, \xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^{\alpha(x)}, \quad x \in \overline{D}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m;$$

2) для каждой точки  $x_0 \in \overline{D}$  найдется такая окрестность  $U_{x_0}$ , что для всех  $x \in U_{x_0}$  выполняется неравенство

$$|A(x, \xi) - A(x_0, \xi)| \leq c_3|x - x_0|(1 + |\xi|)^{\alpha(x)},$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — положительные постоянные. Функцию  $\alpha : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  называют переменным порядком псевдодифференциального оператора  $A$

Для уравнений с такими операторами строится вариант символического исчисления подобно 3 и предлагаются достаточные условия фредгольмовости в подходящих пространствах Соболева–Слободецкого в области  $D$  с границей, содержащей особенности типа конуса или ребра.

### Литература

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. / В.Б. Васильев // — М. : КомКнига, 2010. — 135 с.
2. Васильев В.Б. Псевдодифференциальные операторы и уравнения переменного порядка / В.Б. Васильев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 51. № 9. — С. 1184–1195.
3. Vasilyev V.B. Elliptic operators and their symbols / V.B. Vasilyev // Demonstr. Math. — 2019. — V. 52. — P. 361–369.

## ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ПЛОСКОМ СЕКТОРЕ

**В.Б. Васильев, А.Б. Каманда Бонгай**

(Белгород, НИУ БелГУ)

*1597202@bsu.edu.ru*

Пусть  $\mathbb{Z}^2$  — целочисленная решетка на плоскости,  $h > 0, \hbar = h^{-1}$ . Обозначим  $K_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a_n |x_1|, a_n > 0\}$  угол раствора  $2 \arctg a_n$ , где  $a_n$  может принимать значения вида  $n, 1/n, n \in \mathbb{N}$ ,  $K_{n,d} = h\mathbb{Z}^2 \cap K_n$ . Мы работаем с функциями дискретной переменной  $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$ .

Обозначим  $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}$ . Функции, определенные на  $\hbar\mathbb{T}^2$ , мы трактуем как периодические функции на  $\mathbb{R}^2$  с основным квадратом периодов  $\hbar\mathbb{T}^2$ .

На функциях  $u_d$  дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) \hbar^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2$$

и дискретный аналог пространства Шварца  $S(h\mathbb{Z}^2)$  бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций. Обозначим  $\zeta^2 = h^{-2}((e^{ih \cdot \xi_1} - 1)^2 + (e^{ih \cdot \xi_2} - 1)^2)$ .

Пространство  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$  состоит из дискретных функций  $u_d$  и является замыканием пространства  $S(h\mathbb{Z}^2)$  относительно нормы

$$||u_d||_s = \left( \int_{h\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Пространство  $H^s(K_{n,d})$  состоит из дискретных функций из  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$  таких, что их носители принадлежат множеству  $\overline{K}_{n,d}$ . Норма в пространстве  $H^s(K_{n,d})$  индуцируется нормой пространства  $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ . Введем дискретный псевдодифференциальный оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_{n,d}.$$

с символом, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

Рассмотрим следующую дискретную краевую задачу.

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_{n,d}, \quad (1)$$

$$\sum_{\tilde{x}_2 \in h\mathbb{Z}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) h \equiv g_d(\tilde{x}_1), \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть символ  $A_d(\xi)$  допускает периодическую волновую факторизацию [1,2] относительно  $K_n$  с индексом  $\varkappa$  таким, что  $\varkappa - s = 1 + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| < 1/2$ . Тогда задача (2) and (3) для любой правой части  $g \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$  имеет единственное решение в пространстве  $H^s(K_{n,d})$  и

$$||u_d||_s \leq b[g]_{s+1/2}$$

с постоянной  $b$ , не зависящей от  $h$ .

**Теорема 2.** Пусть символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию относительно  $K_n$  с индексом  $\varkappa$  таким, что  $1/2 < \varkappa - s < 3/2$ ,  $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R})$ . Тогда задачи (1),(2) имеют единственное решение  $u \in H^s(K_n)$  и  $u_d \in H^s(K_{n,d})$  соответственно. Если дополнительно предположить, что преобразование Фурье  $\tilde{g}$  имеет компактный носитель, то для достаточно малых  $h$  справедлива оценка

$$|\tilde{u}(\xi) - \tilde{u}_d(\xi)| \leq ch, \quad \xi \in \frac{h}{4b_n} \mathbb{T}^2, \quad b_n = \max\{1, a_n\},$$



с постоянной  $c$ , не зависящей от  $h$ .

### Литература

1. V.B. Vasiliev., Wave factorization of elliptic symbol .Theory of Application. / V.B. Vasilyev. — Kluwer Academic Publishers Dordrecht-Boston-London, 2000.
2. E.B.Afanas'eva, V.B.Vasilyev, A.B.Kamanda Bongay. Discrete Equations, Discrete Transformations, and Discrete Boundary Problem / E.B. Afanas'eva, V.B. Vasilyev, — pp.1698-1707.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ<sup>1</sup>

П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова (Ульяновск, УЛГТУ)  
*velmisov@ulstu.ru, kazakovau@mail.ru*

Предлагаются математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления», которая применяется для контроля за изменением давления в газожидкостных средах. Схема такой системы представлена на рисунке 1:  $x = 0$  соответствует начальному сечению трубопровода (выходу из камеры сгорания двигателя); состоянию покоя системы соответствуют положение  $x = l$  поршня, расположенного на другом конце трубопровода и закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов. Целью задачи является получение и исследование уравнения, связывающего закон изменения давления в двигателе  $P_*(t)$  с величиной отклонения поршня  $w(t)$  от положения равновесия в любой момент времени.

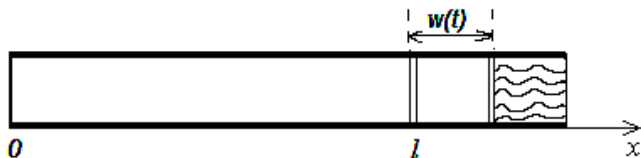


Рис. 1: Схема системы «трубопровод - датчик давления»

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00517).

© Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., 2024

Одна из математических моделей указанной механической системы имеет вид

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[ a_0^2 - (\chi - 1) \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

$$m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t). \quad (4)$$

Уравнение (1) для потенциала скорости  $\Phi(x, t)$  описывает движение рабочей среды (в модели идеального сжимаемого газа) в трубопроводе, условие (2) задает закон изменения давления  $P_*(t)$  рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод  $x = 0$ ), условие (3) – условие непротекания на поверхности поршня, уравнение (4) описывает движение поршня. Давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши:  $P(x, t) = P_0 \left[ 1 - \frac{\chi-1}{a_0^2} \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi-1}}$ , а скорость потока в трубопроводе находится по формуле  $u = \Phi_x$ . В (1)-(4) индексы  $x, t$  снизу обозначают частные производные по координате  $x$  и времени  $t$ , точка сверху – производную по  $t$ ;  $P_0, a_0, \chi, m, \alpha, \gamma$  – некоторые физические постоянные.

Также рассматривается математическая модель механической системы «трубопровод-датчик давления» с учетом тепломассообмена

$$\rho(u_t + uu_x) = -P_x, \quad (5)$$

$$\rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0, \quad (6)$$

$$\rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx} - \alpha_1(T - T_0), \quad (7)$$

$$P = R\rho T. \quad (8)$$

Кроме условий (2)-(4), необходимо задать закон изменения температуры на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод):  $T(0, t) = T_*(t)$ , и условие теплообмена на внешней стороне поршня:  $-kT_x(l_*(t), t) = \alpha_2(T(l_*(t), t) - T_0)$ . Здесь  $u(x, t), P(x, t), \rho(x, t), T(x, t)$  – скорость, давление, плотность и температура рабочей среды в трубопроводе;  $T_0$  – температура окружающей среды;  $R = c_p - c_v$ ,  $c_p, c_v, k, \alpha_1, \alpha_2$  – физические постоянные.

Задачи (1)-(4), (5)-(8) следует дополнить начальными условиями.

Для указанных начально-краевых задач предложен метод решения на основе метода Галеркина, позволяющий свести исследования исходных задач к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

### **Литература**

1. Вельмисов П.А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах / П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2023. — Т. 25, № 4. — С. 313–325.

## **НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ С ПАРАМЕТРАМИ**

**М.Б. Виситаева** (Урус-Мартан)

К проблемам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе математики, относятся, например, проблемы, в которых отыскивается решение линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений и неравенств, и их систем в общем виде, исследуется число (диапазон) их решений в зависимости от значений параметров и т.д. Учитывая допущенные недостатки решателями при решении проблем с параметрами, в частности, уравнений (неравенств) или их систем с параметрами очень важно сфокусировать внимание на возможность обозначить две основные взаимообратные проблемы: прямую и обратную. Нами рассматривается решение проблем преимущественно с одним параметром. Однако, существуют проблемы в которых имеется более одного параметра (проблема 6).

Прямая проблема. Для каждого значения параметра найти все решения уравнения (неравенства или их системы).

Рекомендации к решению прямой проблемы и записи ответа. Если в проблеме сказано (к примеру, «Для всех значений параметра ... (при каждом значении параметра ...), решите уравнение (неравенство или их систему)», то следует при решении уравнения (неравенства или их системы) рассматривать все возможные случаи и в ответе выписать полученные решения вместе с ограничениями на параметр (проблема 1).

Преимущественно фабула обратной проблемы многоаспектна, но их объединяет одно: те или иные ограничения, накладываемые на параметр.

Обратная проблема. Найти все значения параметра, при которых решения уравнения (неравенства или их системы) удовлетворяют данным условиям.

Рекомендации к решению обратной проблемы и записи ответа. Если в проблеме сказано (к примеру, «Найдите все значения параметра . . . , при каждом из которых уравнение (неравенство или их система) имеет по крайней мере одно решение (имеет ровно два различных решения)» . . . «При каких значениях параметра . . . , уравнение (неравенство или их система) имеет единственное решение (не имеет решений)?»), то при решении проблемы нужно рассматривать все возможные случаи, но в ответе не выписывать полученные решения (если даже они есть), а только соответствующие ограничения на параметр (проблемы 2-5).

Важным этапом решения проблемы с параметрами является запись ответа, на котором следует отразить все этапы ее решения. Как показывает опыт, из этих двух проблем наиболее часто встречающаяся проблема – обратная. Для отработки навыков их решения важно готовить обучающихся трансформировать проблему из одного типа в другой. К примеру, для проблемы 1 можно сформулировать ряд обратных проблем. Особо отметим, и проблемы, сформированные в нестандартном виде, как проблема с комбинированными данными: квадратичное неравенство и квадратное уравнение (проблема 5); проблема со смесями (проблема 6), решение линейных уравнений, используя их параметрическое представление (проблемы 7-8).

В процессе решения поддерживается вариативность используемых методов: аналитический, графический и т.д. Перейдем к практике.

Проблема 1. Для каждого значения параметра  $a$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - (a + 2)y = -1 \\ ax - (2a + 4)y = 3a - 8. \end{cases}$$

Проблема 2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$x^2 + 2(a + 3)x + 12a = 0$  имеет два различных отрицательных решения.

Проблема 3. Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых любое число является решением неравенства  $x^2 - bx + 25 > 0$ .

Проблема 4. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 5a + 1)^2 + (y - 2a - 1)^2 = a - 2 \\ 3x - 4y = 2a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

Проблема 5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 < 1 \\ y = ax^2. \end{cases}$$

Проблема 6. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении  $1 : 2$ , а другой сплав содержит те же металлы в отношении  $2 : 3$ . Из скольких частей каждого из сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении  $a : b$ ?

Проблема 7. Решите линейное уравнение  $2x - 4y = 8$ , используя его параметрическое представление.

Проблема 8. Решите линейное уравнение  $5x + 4y - z = 5$ , используя его параметрическое представление.

Мы считаем, что проблему с параметрами, следует рассматривать как часть школьного курса математики, встраивая ее в соответствующую тему. Рекомендуем начинать с простейших линейных уравнений с параметром еще в 7 классе, перейдя затем к решению их систем и далее в 8 классе перейти к решению квадратных уравнений с параметром и т.д. [1, 2, 3]. На наш взгляд, необходимо обучать выбору метода решения при данной (прямой или обратной) проблеме, тогда возникает потребность в механизмах распознавания применимости методов для решения поставленной проблемы. Следует акцент сделать на эффективность различных методов, которые могут быть использованы при решении конкретной проблемы с параметрами. В заключении отметим, нами проведена определенная работа по факультативному изучению рассматриваемого направления на полилингвальной основе [5].

### Литература

1. Виситаева М.Б. Задачи с параметром в 8 классе / М.Б. Виситаева // Математика в школе. — 2018. — № 8. — С. 2.
2. Виситаева М.Б. Задачи с параметром в IX классе / М.Б. Виситаева // Математика в школе. — 2019. — № 4. — С. 1-12.

3. Виситаева М.Б. Решение линейных уравнений с параметром / М.Б. Виситаева // Вестник, ЧИПКРО. — 2018. — № 2. — С. 83-89.
4. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами /Г.А. Ястребинецкий – М.: Просвещение, 1988. – 126 с.
5. Visitaeva M.B. The multilingual teaching of mathematics/ M.B. Visitaeva // The 6th International Conference «Function Spaces. Differential Operators. Problems of Mathematical Education», dedicated to the centennial anniversary of the corresponding member of Russian Academy of Sciences, academician of European Academy of Sciences L.D. Kudryavtsev: Abstracts, Moscow, on 14-19 of November, 2023, p. 24. Math-Net.Ru

## **ПОЛИФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ВООБРАЖЕНИЯ**

**М.Б. Виситаева** (Грозный)

*esm276932@gmail.com*

Целью исследования является разработка путей диагностики уровня развития воображения с учетом возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся, посредством выделенных компонент и показателей критерия. Предпринята попытка выявить новые грани структурных связей и иерархии содержательных элементов, в контексте развития воображения; представленные в разработанной полифункциональной, иерархичной модели развития воображения обучающихся. Рассматривается отношение мысли и образа. Разработана содержательно-критериальная основа оценки развития воображения обучающихся. Для каждого компонента критерия выявлены наблюдаемые показатели (на основе выявленных (характеристик) индикаторов), свидетельствующие о достижении одного из уровней (мотивационный, познавательный, творчески-ориентированный и творческий), дающие возможность ранжировать обучающихся по уровням развития воображения. В целом стратегия и структура развития математических способностей обучающихся нами представлены ранее [1, 4].

Несомненно, умение оперировать пространственными образами (пространственное воображение) является одним из существенных условий успешности творческой деятельности в различных областях теории и практики. С другой стороны, в литературе имеются факты того что трудовая деятельность благоприятствует развитию пространственного воображения обучающихся, «представливание» как

умственное действие с образами предметов успешно формируется на основе практических действий [2].



Рис. 1: Структурно-уровневая модель развития образа.

Воображение представляет собой самостоятельную развернутую продуктивную деятельность, осуществляемую, преимущественно без опоры на наглядность; мыслительная деятельность будет эффективней при развитых пространственных представлениях и умении оперировать этими представлениями. Этим конструктам благоприятствуют учебная и трудовая виды деятельности, что в целом может способствовать формированию творческой личности школьника.

Умственные действия, представленные в виде образов, более точно передают то или иное явление или событие. Опираясь на исследование В.Д. Шадрикова [3], нами образ рассматривается, имеющий двойную природу (содержательную и процессуальную); соотношение которых имеет функциональный характер, зависит от задач, решаемых субъектом, и от способа мышления; явления и события тоже имеют свой образ (понимаемый, как систему мыслей).

### **Литература**

1. Виситаева М.Б. Оценка развития математических способностей школьников / М.Б. Виситаева // Педагогика. 2014. – № 4. – С. 53–57.
2. К проблеме восприятия пространства и пространственных представлений. Материалы научного совещания / Под ред. Б.Г. Афаньева и Б.Ф. Ломова. – Ленинград : 1959. – 111 с.
3. Шадриков В.Д. Мысль как предмет психологического исследования / В.Д. Шадриков // Психол. журн. — 2014. — Т. 37, № 1. – С. 130-137.
4. Visitaeva M.B. Structure and mechanisms of developing mathematical abilities of schoolchildren/ M.B Visitaeva, A.M. Gachaev // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 2 (2016), pp. 1787-1799 © Research India Publications: <http://www.ripublication.com>



# СВЯЗЬ ТОЧНЫХ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ЗАДАЧАМИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ<sup>1</sup>

**Т.А. Гарманова, Д.Д. Казимиров, И.А. Шейпак**

(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

*garmanovata@gmail.com, mr.idanil2001@gmail.com,*

*iasheip@yandex.ru*

Рассматривается пространство Соболева  $\dot{W}_p^n[0; 1]$ , состоящее из вещественных функций  $y$ , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка  $n - 1$ , таких, что  $y^{(n)} \in L_p[0; 1]$  ( $1 \leq p \leq \infty$  и выполняются краевые условия  $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

Для произвольной точки  $a \in (0; 1)$  изучаются величины  $A_{n,k,p}(a)$ , которые являются наименьшими возможными в неравенствах

$$|y^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \|y^{(n)}\|_{L_p[0;1]}, \quad y \in \dot{W}_p^n[0; 1], \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Также целью является получение точных констант вложения пространства  $\dot{W}_p^n[0; 1]$  в пространство  $\dot{W}_\infty^k[0; 1]$

$$\Lambda_{n,k,\infty} := \max_{a \in [0;1]} A_{n,k,p}(a).$$

Определим  $\mathcal{P}_m$  — пространство вещественных многочленов

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m \right\}$$

степени не выше  $m$ . Также рассмотрим сплайны вида

$$S_{n,k,a}(x) := \begin{cases} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, & x \in [0; a] \\ 0, & x \in (a; 1] \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Для величин  $A_{n,k,p}(a)$  справедливо равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k,a} - u\|_{L'_p[0;1]}.$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 20-11-20261).  
© Гарманова Т.А., Казимиров Д.Д., Шейпак И.А., 2024

Заметим, что случай  $p = 2$  изучен в [1] при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Далее нас интересует случай  $p = \infty$ . На основании результатов о наилучшем приближении многочленами характеристической функции в  $L_1[0; 1]$  (см. [2]) доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если  $k = n - 1$  чётно, то точка  $a = 1/2$  является точкой глобального максимума функции  $A_{n,n-1,\infty}$ . Если  $k = n - 1$  нечётно, то точка  $a = 1/2$  является точкой локального минимума функции  $A_{n,n-1,\infty}$ .*

При чётном  $n$  точками глобального максимума функции  $A_{n,n-1,\infty}$  являются точки  $\sin^2 \frac{\pi n}{4(n+1)}$  и  $\sin^2 \frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$  (ближайшие к  $1/2$  точки из множества  $\left\{ a_j = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)} \right\}_{j=1}^n$ ). Таким образом,

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ нечётно,}$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ чётно.}$$

Свойства функций  $A_{n,0,\infty}$  ( $k = 0$ ) можно описать в терминах ядра Пеано (см.[3]), которое определяется следующим образом

$$V_n(t) := \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left( \frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1/2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 - (t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}} dx.$$

На основании свойств ядра Пеано и сплайна  $S_{n,0,a}$  устанавливается следующий результат.

**Теорема 3.** *Справедлива формула*

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0; 1].$$

**Теорема 4.** *Точные константы вложения  $\Lambda_{n,0,\infty}$  определяются следующим образом*

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}(1/2) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 + (-1)^n x^{2(n+1)}} dx.$$

Используя представление для  $\Lambda_{n,0,\infty}$  при  $n \rightarrow \infty$ , можно получить их асимптотическое поведение.

**Следствие 1.** *Для констант вложения  $\Lambda_{n,0,\infty}$  справедлива асимптотика*

$$\Lambda_{n,0,\infty} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} n! 2^{2n-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

## Литература

1. Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева / Гарманова Т. А., Шейпак И. А. // Функциональный анализ и его приложения. — 2021. — Т. 55, вып. 1. — С. 43–55.
2. Дейкалова М. В. Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки алгебраическими многочленами / Дейкалова М. В. // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 144–155.
3. Fiedler H., Best  $L_1$ -Approximation by Polinomials / Fiedler H., Jukart W. B. // Journal of Approximation Theory. — 1983. — V. 37. — P. 260–292.

## МНОГООБРАЗИЯ СТРУЙ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.А. Герасименко, О.В. Кунаковская (Воронеж, ВГУ)

*newovk@yandex.ru*

Доклад посвящен техническому направлению нелинейного анализа, связанному с изучением пространств струй функций и отображений. Рассматриваются многообразия струй пар отображений, действующих в парах вещественных пространств.

Пусть  $U \subset R^n$ ,  $U$  открыто,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ . Будем говорить, что отображения

$$f : U \rightarrow R^m \text{ и } g : U \rightarrow R^m$$

эквивалентны порядка  $k$  в точке  $p$  (обозначение:  $f \sim_k^p g$ ), если отрезки их рядов Тейлора в точке  $p$  совпадают до членов порядка  $k$  включительно. Введенное отношение на множестве  $C^\infty(U, R^m)$  является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности отображения  $f \in C^\infty(U, R^m)$  по этому отношению называется  $k$ -струей отображения  $f$  в точке  $p$  и обозначается через  $j^k f(p)$ .

Парой топологических пространств называется топологическое пространство  $X$  вместе с его подпространством  $Y$  и обозначается  $(X, Y)$ .

Парой отображений называется пара  $(f_1, f_2)$ , где  $f_1 : X \rightarrow Z$ ,  $f_2 : Y \rightarrow Z$ , причем  $(X, Y)$  — пара пространств.

Введем еще одно понятие. Пусть  $p_1 \in X, p_2 \in Y$ . Пара  $(f_1, f_2)$  эквивалентна порядка  $(k_1, k_2)$  в точке  $(p_1, p_2) \in X \times Y$  паре  $(g_1, g_2)$ , когда

$$f_1 \sim_{k_1}^{p_1} g_1$$

и

$$f_2 \sim_{k_2}^{p_2} g_2.$$

Класс эквивалентности пар отображений будем обозначать

$$j^{(k_1, k_2)}(f_1, f_2) = (j^{k_1} f_1; j^{k_2} f_2)$$

и называть струей порядка  $(k_1, k_2)$  пары отображений  $(f_1, f_2)$  в точке  $(p_1, p_2)$ .

Обозначим через  $J^{(k_1, k_2)}(X, Y; Z \times Z)_{(p_1, p_2), (q_1, q_2)}$  множество струй порядка  $(k_1, k_2)$  пар отображений  $(f_1, f_2)$  в точке  $(p_1, p_2)$ , где  $q_1 = f_1(p_1)$ ,  $q_2 = f_2(p_2)$ .

Пусть в  $R^n$  выделены подпространство

$$L = R^s = (x_1, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0) \subset R^n$$

и открытое множество  $U$  такое, что  $U \cap L \neq \emptyset$ .

Пару  $(f, \bar{f})$  назовем специальной парой отображений, если

$$f : U \rightarrow R^m,$$

$$\bar{f} : U \cap L \rightarrow R^m, \bar{f} = f|_{U \cap L}.$$

Дадим следующее определение эквивалентности в точке  $p$  специальных пар отображений. Пусть  $p \in U \cap L$ . Пара  $(f, \bar{f})$  эквивалентна порядка  $(k, \bar{k})$  в точке  $p$  паре  $(g, \bar{g})$ , когда

$$f \sim_k^p g$$

и

$$\bar{f} \sim_{\bar{k}}^p \bar{g}, \text{ где } k < \bar{k}.$$

Класс эквивалентности специальных пар отображений будем обозначать

$$j^{(k, \bar{k})}(f, \bar{f})$$

и называть струей порядка  $(k, \bar{k})$  специальной пары отображений  $(f, \bar{f})$  в точке  $p$ .

Пусть  $Y$  — подмногообразие гладкого многообразия  $X$ .

Обозначим через  $J^{(k, \bar{k})}(X, Y; Z)_{p, q}$  множество струй порядка  $(k, \bar{k})$  специальных пар отображений  $(f, \bar{f})$  в точке  $p$ , где  $q = f(p)$ ,  $p \in Y$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} J^{(k_1, k_2)}(U, V; R^m \times R^m) = \\ = \bigcup_{(p_1, p_2) \in U \times V} J^{(k_1, k_2)}(U, V; R^m \times R^m)_{(p_1, p_2), (q_1, q_2)} \end{aligned}$$

Пусть  $A_n^k$  — векторное пространство полиномов от  $n$  переменных без свободного члена, степень которых не превосходит  $k$ . Возьмем в качестве координат в  $A_n^k$  коэффициенты полиномов. Определим  $B_{n,m}^k$  следующим образом:

$$B_{n,m}^k = \bigoplus_{i=1}^k A_n^i.$$

Заметим, что

$$\dim B_{n,m}^k = m \cdot \dim A_n^k.$$

Теорема 1. Пусть  $U \subset R^{n_1}, V \subset R^{n_2}$  — открытые множества.  $J^{(k_1, k_2)}(U, V; R^m \times R^m)$  является  $C^\infty$ -гладким многообразием и

$$\dim J^{(k_1, k_2)}(U, V; R^m \times R^m) = n_1 + n_2 + 2m + \dim B_{n_1, m}^{k_1} + \dim B_{n_2, m}^{k_2}.$$

Теорема 2. Пусть  $U \subset R^n, \bar{U} = U \cap L$ .  $J^{(k, \bar{k})}(U, \bar{U}; R^m)$  является  $C^\infty$ -гладким многообразием и

$$\dim J^{(k, \bar{k})}(U, \bar{U}; R^m) = n + s + 2m + \dim B_{n, m}^k + \dim B_{s, m}^{\bar{k}} - \dim B_{s, m}^k.$$

### Литература

1. Голубицкий, М. Устойчивые отображения и их особенности / М. Голубицкий, В. Гийемин. — Москва : Мир, 1977. — 292 с.
2. Нарасимхан, Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях / Р. Нарасимхан. — Москва : Мир, 1971. — 232 с.
3. Рохлин, В.А. Начальный курс топологии / В.А. Рохлин, Д.Б. Фуks. — Москва : Наука, 1977. — 488 с.
4. Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. — Москва : Мир, 1979. — 280 с.
5. Виноградов А. М. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. / А.М. Виноградов, И. Скрасильщик, В.В. Лычагин // — М.: Наука, 1986. — 336 с.
6. Saunders D. The geometry of jet bundles. — Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1989.
7. Кунаковская О.В. Топологические индексы пары полей. Монография / О.В. Кунаковская. — Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», — 2020. — 88 с.

8. Герасименко В.А. Многообразия струй пар отображений. Диплом бакалавриата (математический факультет ВГУ) / В.А Герасименко // 2022. — 85 с.

9. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля. — / Г.А. Сарданашвили // М.: УРСС, 1996. — 224 с.

10. Sardanashvily, G., Fibre bundles, jet manifolds and Lagrangian theory. Lectures for theoreticians, arXiv: 0908.1886 (<http://xxx.lanl.gov/abs/0908.1886>)

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН<sup>1</sup>**

**О.В. Гермидер, В.Н. Попов**

(Архангельск, САФУ имени М.В. Ломоносова)

*[o.germider@narfu.ru](mailto:o.germider@narfu.ru), [v.popov@narfu.ru](mailto:v.popov@narfu.ru)*

Тонкие прямоугольные пластины являются одним из элементов, которые используются в конструкциях различного назначения [1]. Применение композиционных материалов придает этим элементам необходимую прочность при меньшем весе конструкции в целом [2]. Пластины из ортотропного материала более сложны для анализа, чем изотропные, поскольку свойства ортотропного материала зависят от направления. В ортотропных материалах относительно взаимноперпендикулярных осей симметрии свойства материала отличаются. В предположении, что материал пластинки в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии, для случая плоского распределения математической моделью является бигармоическое уравнение для ортотропной пластины [3]. Исследования, связанные с моделированием напряженно-деформированного состояния тонких ортотропных пластин, защемленных по контуру, имеют особое значения, вследствие их практической значимости. В [2]-[5] приведен обзор подходов и методов к решению бигармонического уравнения в двумерной области при моделировании прогибов этих пластин. Исследования проводимые в этом направлении [2], [5] и [6] в последнее время свидетельствуют, о том, что проблема поиска и построения решения этого уравнения продолжает оставаться актуальной.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 24-21-00381.

© Гермидер О.В., Попов В.Н., 2024

Представленная работа посвящена решению задачи изгиба защемленной по контуру ортотропной пластины, которая находится под воздействием нормально распределенной нагрузки по ее поверхности, с использованием метода коллокации в матричной реализации. Для построения решения в качестве базисной системы применены ортогональные многочлены Чебышева первого рода [7], в качестве узлов коллокации – корни этих многочленов. С использованием матричных преобразований на основе построенного решения бигармонического уравнения получены выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил. Выполнен анализ их поведения в окрестности угловых точек прямоугольной пластины.

### Литература

1. Ventsel E. Thin Plates and Shells. Theory: Analysis and Applications / E. Ventsel, Th. Krauthammer — Boca Raton: CRC Press, 2001 — 688 p.
2. Голоскоков Д.П. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки / Д.П. Голоскоков, А.В. Матросов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2021. — Т. 17, № 4. — С. 330–344.
3. Timoshenko S. Theory of Plates and Shells / S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger — New York: McGraw-Hill Book Comp., 1959 — 580 p.
4. Li R. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates / R. Li, Y. Zhong, B. Tian, Y. Liu // Appl. Math. Lett. — 2009. — V. 22. — P. 1821–1827.
5. Laureano R.W. Boundary Discontinuous Fourier analysis of clamped isotropic and cross-ply laminated plates via Unified Formulation / R.W. Laureano, J.L. Mantari, J. Yarasca, A.S. Oktem, J. Monge, X. Zhou // Composite Structures. — 2024. — V. 328, 117736.
6. Lakshmi Gorty V.R. Bending of fully clamped orthotropic rectangular thin plates using finite continuous ridgelet transform / V.R. Lakshmi Gorty, N. Gupta // Materials Today: Proceedings. — 2021. — V. 47. — P. 4199–4205.
7. Mason J. Chebyshev polynomials / J. Mason, D. Handscomb. — Florida: CRC Press, 2003 — 360 p.

# ОБ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева

(Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)

*losh-elena@yandex.ru*

Обобщенная система Коши-Римана была введена в работе [1] путем обобщения известных систем чисто математическим методом за счет увеличения размерности независимых переменных и функций. Приведем примеры. Рассмотрим систему, используемую в ТТКП

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

В трехмерном пространстве имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

и две системы в четырехмерном пространстве - система Мойсила

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\partial \psi}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \frac{\partial \psi}{\partial z_1} = 0, \quad (2)$$

где все производные взяты по сопряженным комплексным переменным  $z_1, z_2$ . Для обобщенного уравнения Коши-Римана запишем

$$D_1 \chi + \psi D_2 = 0, \quad \chi D_2 + D_1 \psi = 0. \quad (3)$$

Примем за  $D_1, D_2$  операторы типа Мойсила

$$D_1 = \sum_{i=0}^3 e_i x_i, \quad D_2 = \sum_{i=4}^7 e_i x_i.$$

В системе (3) принят знак плюс в первом уравнении. Это сделано чтобы показать, что использование мнимого времени не следует как обязательное условие для получения основного результата. Введем функции

$$\chi = \sum_{i=0}^4 \chi_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i.$$

Для доказательства того, что система (3) при определенном выборе переменных и функций содержит систему Максвелла введем формулу вида

$$Dq = \frac{\partial q_0}{\partial x_0} - \operatorname{div} \vec{q} + \operatorname{grad} q_0 + \operatorname{rot} \vec{q}, \quad (4)$$



где  $\vec{e}_i$  единицы системы кватернионов, отождествленные с единичными базисными векторами декартовой системы координат. В (3) примем, что все величины  $\chi, \psi$  зависят только от координат  $x_1, x_2, x_3, x_4 = t$ .  $\chi, \psi$  векторные кватернионы, то есть  $\chi_0 = 0, \psi_0 = 0$ . Положим

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^3 H_i \vec{e}_i, \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_i \vec{e}_i, \quad (5)$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  - напряженности

$$\vec{\chi} = \vec{E}, \quad \vec{\psi} = \vec{H}.$$

Убеждаемся, что получаем систему Максвелла, причем все совпадает с точностью вплоть до знаков. Потенциалы  $\alpha, \beta$  были введены в работе [2] и изучены их свойства. Как выражение свойства калибровочной инвариантности укажем, что  $\alpha, \beta$  определены с точностью до решения системы (6).

$$\chi = D_1 \alpha - \beta D_2, \quad \psi = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta, \quad (6)$$

где  $\alpha$  - скалярный кватернион,  $\beta$  - векторный кватернион. Положим далее

$$\chi = \left( \varphi + \frac{\partial f}{\partial t}, 0, 0, 0 \right), \quad \psi = \left( 0, \vec{A} + grad f \right), \quad (7)$$

где  $f$  - произвольная скалярная функция. Подставим (7) в выражение для  $\chi, \psi$  (6), и учтя (4) найдем

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -grad \varphi - \frac{d\vec{A}}{dt}, \\ \vec{H} &= rot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + div \vec{A} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - div grad \psi. \end{aligned}$$

Чтобы выполнить требование - условие Лоренца предположим  $\psi$  - векторный кватернион. Согласно ранее поставленным условиям (4) кватернионы  $\chi, \psi$  должны быть векторными. Если для  $\chi = E$  это выполнено, то для  $\psi$  это условие выполняется за счет выбора функции  $f$ .

### Литература

1. Гладышев Ю.А. О калибровочных преобразованиях электромагнитных потенциалов в кватернионной форме / Ю.А. Гладышев // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2021. — Т. 190, С. 50–56. С. 115–150.

2. Гладышев Ю.А. О введении кватернионных потенциалов обобщенной системы Коши-Римана / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 22-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : Саратовский университет, 2024. — С. 69–72.

## ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

В.А. Горелов (Москва, НИУ «МЭИ»)

*gorelov.va@mail.ru*

Метод Зигеля-Шидловского (см. [1]), остающийся одним из основных методов в теории трансцендентных чисел, позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений т.н. Е-функций при алгебраических значениях аргумента. Для применения этого метода необходимо, чтобы рассматриваемые Е-функции удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из  $\mathbb{C}(z)$  и были алгебраически независимыми над  $\mathbb{C}(z)$ . К Е-функциям, в частности, относятся гипергеометрические Е-функции  ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^{q-l})$ , где

$${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_{l+1}F_q\left(\begin{matrix} 1, \nu_1, \dots, \nu_l \\ \lambda_1, \dots, \lambda_q \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \dots (\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_q)_n} z^n,$$

$0 \leq l < q$ ,  $(\nu)_0 = 1$ ,  $(\nu)_n = \nu(\nu+1) \dots (\nu+n-1)$ ,  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathbb{Q}^l$ ,  $\vec{\lambda} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^q$ ,  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A}$  — множество всех алгебраических чисел.

К настоящему времени с помощью метода Зигеля-Шидловского получены многочисленные результаты об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций и их производных (см., например, [1]). Рассматривались также Е-функции, являющиеся неопределёнными интегралами от произведений таких функций.

Автором [2] были рассмотрены Е-функции

$$V(z) = V_{\lambda, \alpha}(z) = e^{\alpha z} \int_0^z e^{-\alpha t} \varphi_{\lambda}(t) dt = z + \left( \frac{1}{\lambda+1} + \alpha \right) \frac{z^2}{2} + \dots,$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWF-2023-0012).

© Горелов В.А., 2024

$\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + (-\alpha - 1 + \lambda/z)y' + (\alpha - \lambda\alpha/z)y = \lambda/z,$$

где

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \dots (\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

В статье [2] доказано, что Е-функции  $V_{\lambda,\alpha}(z)$  и  $V'_{\lambda,\alpha}(z)$  алгебраически зависимы над  $\mathbb{C}(z)$  тогда и только тогда, когда  $\lambda = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , либо  $\lambda = 1/2$ ,  $\alpha = 2$ , либо  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $\alpha = 1$ .

В настоящее время автором доказана более общая

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $\xi_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $(\lambda_i, \alpha_i, \xi_i) \neq (\lambda_l, \alpha_l, \xi_l)$  при  $i \neq l$ ;  $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\mu_k - \mu_l \notin \mathbb{Z}$  при  $\gamma_k = \gamma_l$ ,  $k \neq l$ ; числа  $\beta_1, \dots, \beta_p$ , а также  $\zeta_1, \dots, \zeta_q$  принадлежат  $\mathbb{C}$  и линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ ,  $\zeta_1 \in \mathbb{Q}$ ,  $m, q \in \mathbb{N}$ ,  $n, p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Тогда для алгебраической зависимости  $2m + n + p + q$  функций

$$V_{\lambda_1, \alpha_1}(\xi_1 z), V'_{\lambda_1, \alpha_1}(\xi_1 z), \dots, V_{\lambda_m, \alpha_m}(\xi_m z), V'_{\lambda_m, \alpha_m}(\xi_m z),$$

$$\varphi_{\mu_1}(\gamma_1 z), \dots, \varphi_{\mu_n}(\gamma_n z), e^{\beta_1 z}, \dots, e^{\beta_p z}, z^{\zeta_1}, \dots, z^{\zeta_q},$$

над  $\mathbb{C}$  необходимо и достаточно хотя бы одно из следующих условий:

1.  $\lambda_i - \mu_j \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi_i = \gamma_j$  для некоторых  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .
2.  $\lambda_i - \lambda_l \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi_i = \xi_l$ , либо  $\lambda_i, \lambda_l \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi_l \in \mathbb{L}\{\xi_i, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ , для некоторых  $1 \leq i < l \leq m$ .
3.  $\lambda_i = 0$ ,  $\xi_i \in \mathbb{L}\{\xi_i \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ , либо  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $\xi_i \in \mathbb{L}\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ , либо  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $\alpha_i = 1$ , для некоторого  $1 \leq i \leq m$ .
4.  $\lambda_i \neq 1$ ,  $\alpha_i = 1$  и либо  $\xi_i \in \mathbb{L}\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ , либо  $\lambda_l \neq 1$ ,  $\alpha_l = 1$ ,  $\xi_l \in \mathbb{L}\{\xi_i, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ , для некоторых  $1 \leq i < l \leq m$ .
5.  $\lambda_i + \lambda_l = 1$ ,  $\xi_i + \xi_l = \xi_i \alpha_i = \xi_l \alpha_l$  для некоторых  $1 \leq i \leq l \leq m$ .
6.  $\lambda_i + \lambda_l \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ ,  $\lambda_i, \lambda_l \notin \mathbb{Z}$ ,  $\xi_i + \xi_l = \xi_i \alpha_i = \xi_l \alpha_l$  и либо  $\xi_i + \xi_l \in \mathbb{L}\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ , либо  $\sum_{k=1}^r (1 - \alpha_i)^{1-k} / (k - \lambda_i) = 0$  при  $r > 0$  и  $\sum_{k=1}^{-r} (1 - \alpha_i)^{1-k} / (\lambda_i + k - 1) = 0$  при  $r < 0$ , где  $r = \lambda_i + \lambda_l - 1$ , для некоторых  $1 \leq i \leq l \leq m$ .

Легко видеть, что при условии 6  $(1 - \alpha_i) = (1 - \alpha_l)^{-1}$ , откуда следует его симметричность по индексам  $i$  и  $l$ .

### Литература

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М. : Наука, 1987. — 448 с.

2. Gorelov V.A. On the Algebraic Independence of the Values of Functions Associated with Hypergeometric Functions / V. Gorelov // Axioms. – 2023. – V. 12(1), 36. – P. 1 – 7.

# ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СТЕПЕННЫХ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

**В.А. Горелов** (Москва, НИУ «МЭИ»)

*gorelov.va@mail.ru*

Метод Зигеля-Шидловского (см. [1]), один из основных методов в теории трансцендентных чисел, позволяет доказывать алгебраическую независимость значений т.н. Е-функций (подколыца целых аналитических функций 1-го порядка) при условии, что они составляют решение системы линейным дифференциальных уравнений с коэффициентами из  $\mathbb{C}(z)$  (определение Е-функций см. в [1]). Для применения этого метода необходимо предварительно выяснять все алгебраические связи рассматриваемых функций над  $\mathbb{C}(z)$ . До недавнего времени в основном изучались Е-функции, получающиеся из обобщённых гипергеометрических функций с рациональными параметрами путём замены аргумента  $z$  на  $\alpha z$  при  $\alpha \in \mathbb{A}$ , где  $\mathbb{A}$  — множество всех алгебраических чисел. В последнее время автором проводятся исследования Е-функций, строящихся из гипергеометрических, степенных и показательных с помощью умножения и интегрирования.

Автором были рассмотрены функции

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \nu, \alpha}(z) &= \nu z^{-\nu} e^{\alpha z} \int^z t^{\nu-1} e^{-\alpha t} \varphi_{\lambda}(t) dt = \\ &= 1 + \left( \alpha + \frac{\nu}{\lambda + 1} \right) \frac{z}{\nu + 1} + \dots, \end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + \left( -\alpha - 1 + \frac{\lambda + \nu + 1}{z} \right) y' + \left( \alpha - \frac{\nu + (\lambda + 1)\alpha}{z} + \frac{\lambda \nu}{z^2} \right) y = \frac{\lambda \nu}{z^2},$$

где

$$\varphi_{\lambda}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00196, <https://rscf.ru/project/24-21-00196/>

© Горелов В.А., 2024

Автором доказана

**Теорема.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ . Тогда функция  $V_{\lambda, \nu, \alpha}(z)$  может быть выражена как многочлен с коэффициентами из  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  от показательных функций и функций вида  $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_j z)$  только в случаях  $\nu = 0$ ;  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ;  $\nu - \lambda \in \mathbb{N}$ ;  $\alpha = 1$ ,  $\nu \neq \lambda$ ;  $\alpha = 2$ ,  $\nu - 2\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ . В перечисленных случаях эти выражения имеют вид:

$$V_{\lambda, 0, \alpha}(z) = e^{\alpha z};$$

$$V_{0, \nu, \alpha}(z) = e^z \varphi_{\nu}((\alpha - 1)z);$$

$$V_{k, \nu, \alpha}(z) = \frac{k!(1 - \alpha)^k}{(1 - \nu)_k} e^z \varphi_{\nu}((\alpha - 1)z) + c_k \varphi_{\nu}(\alpha z) + P_{1, k} \varphi_k(z) + P_{0, k},$$

$$k \in \mathbb{N}, \nu \notin \{1, \dots, k\}, c_k \in \mathbb{Q}(\nu, \alpha), P_{1, k}, P_{0, k} \in \mathbb{Q}(\nu, \alpha)[z], P_{1, k} \neq 0;$$

$$V_{\lambda, \nu, 1}(z) = \frac{\nu}{\nu - \lambda} \varphi_{\lambda}(z) - \frac{\lambda}{\nu - \lambda} \varphi_{\nu}(z), \quad \nu \neq \lambda;$$

$$V_{\lambda, \lambda+1, \alpha}(z) = \frac{1}{1 - \alpha} (\varphi_{\lambda+1}(z) - \alpha \varphi_{\lambda+1}(\alpha z)), \quad \alpha \neq 1;$$

$$V_{\lambda, \lambda+k, \alpha}(z) = c_k \varphi_{\lambda+k}(\alpha z) + \frac{1}{z} P_{1, k} \varphi_{\lambda}(z) + \frac{1}{z} P_{0, k}, \quad \alpha \neq 1,$$

$$k \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{Q}(\lambda, \alpha), P_{1, k}, P_{0, k} \in \mathbb{Q}(\lambda, \alpha)[z^{-1}], P_{1, k} \neq 0;$$

$$V_{\lambda, 2\lambda, 2}(z) = \varphi_{\lambda}^2(z);$$

$$V_{\lambda, 2\lambda-k, 2}(z) = \frac{(k - 2\lambda)(-z)^k}{2(-\lambda)_{k+1}} \varphi_{\lambda}^2(z) + P_{1, k} \varphi_{\lambda}(z) + P_{2, k} \varphi_{2\lambda-k}(2z) + P_{0, k},$$

$$k \in \mathbb{N}, \lambda \notin \{0, 1, \dots, k\}, P_{1, k}, P_{0, k} \in \mathbb{Q}(\lambda)[z], P_{1, k} \neq 0, P_{2, k} \in \mathbb{Q}(\lambda);$$

$$V_{\lambda, 2\lambda+k, 2}(z) = \frac{(\lambda+1)_{k-1}(2\lambda+k)}{2z^k} \varphi_{\lambda}^2(z) + \frac{1}{z} P_{1, k} \varphi_{\lambda}(z) + P_{2, k} \varphi_{2\lambda+k}(2z) + \frac{1}{z} P_{0, k},$$

$$k \in \mathbb{N}, \lambda \neq 0, P_{1, k}, P_{0, k} \in \mathbb{Q}(\lambda)[z^{-1}], P_{1, k} \neq 0, P_{2, k} \in \mathbb{Q}(\lambda).$$

В настоящее время автором получены также необходимые и достаточные условия алгебраической независимости функций  $V_{\lambda, \nu, \alpha}(z)$  и  $V'_{\lambda, \nu, \alpha}(z)$  над  $\mathbb{C}(z)$ .

### Литература

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М. : Наука, 1987. — 448 с.

# ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА БРИО-БУКЕ<sup>1</sup>

Горелов В.А., Орлов К.И., Волков П.Е.

(Москва, НИУ «МЭИ»)

*gorelov.va@mail.ru*

В аналитической теории дифференциальных уравнений классической задачей является описание мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений. К настоящему времени достаточно хорошо исследован случай линейных уравнений. Что касается нелинейных уравнений, то здесь общих результатов имеется сравнительно немного. Они относятся преимущественно к достаточно узким классам уравнений. Одним из классов алгебраических дифференциальных уравнений, где получен ряд общих результатов, являются уравнения типа Брио-Буке. Так называются уравнения вида  $P(y, y^{(n)}) = 0$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $P$  — многочлен с комплексными коэффициентами. В случае  $n = 1$  исследование мероморфных решений уравнений такого типа начато в работах Ш. Брио, Ж. К. Буке и Ш. Эрмита, которые показали, что все эти решения лежат в классе  $W$ , состоящем из рациональных функций, рациональных функций от некоторой экспоненциальной функции и эллиптических функций. Позже Э. Пикар доказал, что такое же утверждение справедливо и в случае  $n = 2$ .

После этого возникла гипотеза о том, что у любого уравнения вида  $P(y, y^{(n)}) = 0$  (при некоторых ограничениях на многочлен  $P$ ) все мероморфные решения лежат в  $W$ . Над доказательством этой гипотезы работали Э. Хилле, Р. Кауфман, С. Бэнк, А. Ерёмченко, Л. Лиан, Т. Нг, А. Янченко и другие математики. К настоящему времени гипотеза доказана для мероморфных решений, имеющих хотя бы один полюс, и для целых решений уравнений, где главная часть многочлена  $P$  не имеет кратных корней (см. [1], [2]), но эти общие результаты не позволяют описать, например, все мероморфные решения уравнения

$$y^{(4)} = y^5 \tag{1}$$

(такая задача была поставлена в [3]). Авторы приводят методы и приёмы, позволяющие находить все мероморфные решения этого уравнения и аналогичных ему. А именно, доказана

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00196, <https://rscf.ru/project/24-21-00196/>

© Горелов В.А. Орлов К.И., Волков П.Е., 2024

**Теорема.** Любое ненулевое мероморфное решение уравнения (1) имеет вид

$$y = \frac{\sqrt[4]{24}}{z - a},$$

где  $a \in \mathbb{C}$ .

### Литература

1. Eremenko A. E. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations / A. E. Eremenko, L. Liao, T. W. Ng // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2009. — V. 146. — P. 197–206.
2. Янченко А. Я. Об одном продвижении в доказательстве гипотезы о мероморфных решениях уравнений типа Брио–Буке / А. Я. Янченко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022. — Т. 86, №5. — С. 197–208.
3. Ерёмченко А. Э. Мероморфные решения уравнений типа Брио–Буке / А. Э. Ерёмченко // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1982. — Т. 38. — Вища школа, Харьков. С. 48–56.

### ЗАДАЧА ХОДЖА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

**А.В. Горшков** (Москва, МГУ, мех.-мат.)

*alexey.gorshkov.msu@gmail.com*

Задачей Ходжа–Гельмгольца называется задача восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции. Рассмотрим внешнюю область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , которая является дополнением односвязной области с кусочно-гладкой границей. С условием прилипания и заданным потоком на бесконечности внешняя задача имеет вид

$$\operatorname{div} v(x) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{curl} v(x) = w(x), \quad (2)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$v(x) \rightarrow (v_\infty, 0), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь  $v = (v_1, v_2)$  - двумерное векторное поле,  $\operatorname{curl} v(x) = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$ .

С условием прилипания эта задача вообще говоря не разрешима. Для её разрешимости требуется ряд дополнительных условий на вихревую функцию.

В работе Кварталелли, Уальс-Гриза[1] выведены проекционные условия на вихревую функцию, заключающиеся в ортогональности ротора гармоническим функциям. Векторное поле представляется как орто-градиент  $v = \nabla^\perp \psi$  функции тока  $\psi$ , где  $\nabla_x^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ .

Тогда в ограниченных областях с нулевыми граничными условиями  $\psi(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$  из соотношения  $\Delta \psi = \text{curl} v$  согласно формуле Грина следует ортогональность  $\text{curl} v$  гармоническим функциям. Это и есть условие прилипания, выраженное в терминах только вихревой функции.

Оказывается, этот принцип ортогональности может быть распространен на внешние области[2]. Аналогичное условие ортогональности для внешних областей имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{w(x)}{\Phi(z)^k} dx = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \neq 1, \\ iv_\infty, & k = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\Phi$  — это отображение Римана области  $\Omega$  на внешность круга  $B_{r_0}$  радиуса  $r_0$ , которое стремится к единичному при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\Phi(z) = z + O(1/z).$$

Для функции ротора будем рассматривать весовое пространство

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(x) : \|f(\cdot)\|_{L_{2,N}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 (1 + |x|^2)^N dx < \infty\}.$$

**Теорема 1.** Если  $w \in L_{2,N}(\Omega)$  с  $N > 1$  удовлетворяет (5), то тогда существует единственное решение задачи (1)-(4), удовлетворяющее оценке

$$\|v(\cdot) - v_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Как было показано Финном[4], для стационарных течений величина  $v(\cdot) - v_\infty$  имеет бесконечную  $L_2$  норму. Однако из (5) следует, что среднее ротора равняется нулю, и, следовательно, согласно формуле Стокса, отсутствует циркуляция на бесконечности, и энергия становится конечной.

Условие ортогональности (5) позволяет найти граничное условие для ротора  $\text{curl } v(t, x)$  нестационарной системы Стокса. Пусть  $w(t, x) = \text{curl } v(t, \Phi^{-1}(x))$  есть вихревая функция потока Стокса, заданная во внешности круга. Для нее граничное условие прилипания



в терминах коэффициентов Фурье  $w_k$  будет иметь вид

$$r_0 \frac{\partial w_k(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t, r_0) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя эти граничные условия в работе автора [2] была найдена явная формула решения системы Стокса обтекания кругового цилиндра в вихревой форме. В работе [3] найдено схожее граничное условие для ротора, соответствующее условию прилипания, для системы Навье-Стокса.

### Литература

1. Quartapelle L. Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. / L. Quartapelle, F. Valz-Gris // — 1981. 1(2), — pp. 129–144.
2. Gorshkov A.V. No-Slip Boundary Condition for Vorticity Equation in 2D Exterior Domain, *J. of Math. Fluid Mech.* / A.V. Gorshkov // — 2023. 25:47.
3. Gorshkov A.V. Associated Weber-Orr Transform, Biot-Savart Law and Explicit Form of the Solution of 2D Stokes System in Exterior of the Disc. *J. Math. Fluid Mech.* / A.V. Gorshkov // — 2019. 21:3.
4. Finn R. An energy theorem for viscous fluid motions. *Arch. Rational Mech. Anal.* / R. Finn // — 1960. — 6, — pp. 371–381.

## О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

**Е.И. Григорьева** (Воронеж, ВГУ)

*elenabiryukova2010@yandex.ru*

Будем рассматривать простейший геометрический граф  $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ , состоящий из двух ребер: ребро  $\gamma_1$  образует цикл-петлю, а  $\gamma_2$  примыкает к нему. Ребра графа параметризованы отрезком  $[0, 1]$ . Оператор на графе  $\Gamma$  задается, как оператор в пространстве вектор-функций  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$  ( $T$  — знак транспонирования). В [1] получена теорема равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье для функционально-дифференциального оператора с инволюцией, заданного на таком графе:

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + p_{11}(x) y_1(x) + p_{12}(x) y_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + p_{21}(x) y_2(x) + p_{22}(x) y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (1)$$

Для исследования других спектральных свойств, а также интегральных и интегро-дифференциальных операторов удобнее использовать технику, опирающуюся на равносходимость с рядом для некоторого простейшего оператора. Здесь будет установлена равносходимость рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$  и невозмущенного оператора

$$L_0 y = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) \end{pmatrix}, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Всюду считаем, что  $\alpha_k, \beta_k$  — комплексные числа,  $\beta_k^2 - \alpha_k^2 \neq 0, \beta_k \neq 0, k = 1, 2, x \in [0, 1], p_{i,j} \in C^1[0, 1], \int_0^1 p_{11}(x)dx = \int_0^1 p_{21}(x)dx$ . Краевые условия (1) — это условия непрерывности во внутреннем узле  $\Gamma$ .

Используется метод контурного интегрирования резольвенты оператора (см. [1]).

**Теорема.** Пусть  $\beta_k^2 \neq \alpha_k^2, \beta_k \neq 0, k = 1, 2$ . Тогда для любой функции

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$  имеет место соотношение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - S_r^0(f, x)\|_\infty = 0,$$

где  $S_r(f, x) (S_r^0(f, x))$  — частичная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L (L_0)$ , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям  $\lambda_k (\lambda_k^0)$ , для которых  $|\lambda_k| < r (|\lambda_k^0| < r)$ .

### Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43. — № 12. — С. 1597–1605.

## РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММ СПО В РАМКАХ ВУЗА. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

М.Б. Давыдова (Воронеж, ВГУ)

*mbd@vsu.ru*

Математический факультет Воронежского госуниверситета уже более 15 лет осуществляет подготовку специалистов среднего звена по специальностям «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)», «Программирование в КС». В соответствии с перечнем «топовых» профессий и специальностей СПО, в 2021 году начато обучение по образовательной программе «Информационные системы и программирование» (09.02.07).

Растет востребованность программ СПО, как в целом во всех субъектах РФ [1], так и на программах СПО математического факультета ВГУ. Происходит ежегодное увеличение контингента, а в 2023 году набор на первый курс вырос на 50% и 150% соответственно на программы экономической и ИТ направленности. Следует также отметить, что если в первое десятилетие реализации наших программ абитуриенты СПО традиционно имели очень низкий уровень школьной подготовки, то сейчас на программы приходят достаточно мотивированные выпускники, в том числе с хорошими базовыми знаниями.

Важная особенность реализации программ СПО в вузе: поступающая на программы среднего профессионального образования, обучающиеся сразу окунаются в атмосферу вуза и используют все его возможности наравне с обучающимися по программам высшего образования. Относится это и профориентационным программам вуза, и, в частности, к программам стажировок от крупных компаний региона. Для вуза реализация программ СПО дает возможность пополнять контингент студентов молодежью, которая, по сравнению с выпускниками школ, имеет более высокий уровень мотивации профессионального выбора, лучше ориентирована в отношении будущей специальности высшего образования. На основании мониторинга трудоустройства выпускников СПО, более 25% из них продолжают обучение в университете.

Одним из важных преимуществ программ СПО является практико-ориентированный подход в обучении. Сегодня отечественное среднее профессиональное образование активно преобразуется: происходит переход на стандарты WorldSkills и демонстрационный

экзаменов, вместо привычного диплома планируется внедрение «цифрового паспорта компетенций» Стартовал масштабный проект «Профессионалитет», который ориентирован на интеграцию образовательных учреждений СПО и организаций реального сектора экономики. Требуется включение и наших программ в данный проект, что позволит внести больше прикладного аспекта и в программы ВО.

Отмечу некоторые особенности реализации программ СПО в вузе:

- из-за роста числа обучающихся требуется расширение материально-технической базы, увеличение числа лабораторий, аудиторий;
- существуют проблемы с организацией практики в крупных компаниях, которые, во-первых, более заинтересованы в обучающихся по программам ВО, во-вторых, предпочитают брать студентов на длительные стажировки (за рамками сроков практики);
- нехватка кадровых ресурсов.

Все эти проблемы отражены в обзоре [1], в других источниках. Пожалуй, главная проблема вуза – нехватка педагогов-специалистов, ведущих предметы профессионального цикла. Оплата труда (стоимость часа) по программам СПО ниже, чем на ВО, поэтому привлечь хорошего специалиста к преподаванию довольно затруднительно. Если педагог и получает высокую зарплату, то она достигается за счет высокой интенсификации труда преподавателей. Привлечение штатных сотрудников ППС вуза, обеспечивающих реализацию программ ВО, также затруднительно, ввиду как их загруженности, так и низкой почасовой оплаты, разделения фондов оплаты труда работников ВО и СПО. Преподавателями СПО зачастую являются молодые выпускники факультета, использующие преподавание здесь, как некий трамплин к преподаванию дисциплин ВО. Частично проблема соответствия квалификации преподавателей СПО решается за счет программ повышения квалификации.

В связи с этим наиболее перспективные направления развития СПО в вузе:

- реализация программ с использованием сетевой формы с организациями, предоставляющими материально-технические и

инные ресурсы, что обеспечит и прикладной характер подготовки, и близость содержания программ к реалиям производственного процесса;

- внедрение современных методик преподавания по общеобразовательным (обязательным) дисциплинам, содержание которых уже на первом этапе обучения должно учитывать профиль профессиональных программ;
- увеличение спектра массовых стажировок преподавателей на предприятиях для знакомства с новыми технологиями и требованиями к выпускникам, предъявляемыми работодателями;
- развитие дополнительного профессионального обучения как системы непрерывного образования педагогических работников, которые должны не только владеть новым содержанием образования СПО, но и уметь проектировать образовательную среду и организовывать взаимодействие между всеми участниками образовательного процесса в условиях быстрого изменения требований к квалификации работников новых отраслей. А также учитывать особенности неформального образования, опирающегося, в первую очередь, на открытые образовательные ресурсы, наставничество, обмен опытом, саморазвитие;
- обеспечение постоянной обратной связи в области оценки качества образования, удовлетворенности участников образовательного процесса;
- модернизация и оптимизация образовательных программ СПО.

Для повышения эффективности вузовского сектора СПО необходимо предусмотреть и законодательно урегулировать возможность профессионального становления специалиста в системе «школа – СПО – ВО», а также единые межуровневые компетенции для данного взаимодействия. Желательно упрощение нормативно-правового регулирования системы СПО: внедрение системы лицензирования и аккредитации подразделений СПО вузов на уровне региона, что позволит более гибко и оперативно реагировать на изменения регионального рынка труда.

### **Литература**

1. Дудырев Ф.Ф. Среднее профессиональное образование в России: ресурс для развития экономики и формирования человеческого

капитала : аналитический доклад. Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». / Ф.Ф. Дудырев, К.В. Анисимова, И.А. Артемьев // М.: НИУ ВШЭ, — 2022, — 100 с.

## НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

**В.В. Дайняк, К.В. Латушкин** (Минск, БГУ)

*dvv162@tut.by, lat.kostyal90@gmail.com*

Относительно функции  $u : x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$  независимых переменных  $(x_0, x_1) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  рассматривается дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = & \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^5} + a \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^4 \partial x_1} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^3 \partial x_1^2} + c \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^2 \partial x_1^3} + \\ & + d \frac{\partial^5 u}{\partial x_0 \partial x_1^4} + e \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^5} + \mathcal{L}_1(u, D) = f(x), \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1(x, D)u = \sum_{i,j=0}^1 p_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^1 p_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda(x) u. \quad (1)$$

Здесь  $a, b, c, d, e$  — постоянные, коэффициенты полинома  $\mathcal{L}_1(x, D)$  и их производные  $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}, \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$  измеримы и ограничены, множество  $\Omega$  — произвольная ограниченная область 2-х мерного евклидова пространства  $x$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ .

Обозначим через  $n = (n_0, n_1)$  единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial\Omega$ . Пусть  $\mathcal{L}_0(n) = n_0^5 + an_0^4 n_1 + bn_0^3 n_1^2 + cn_0^2 n_1^3 + dn_0 n_1^4 + en_1^5$ . Рассматривается уравнение (1) в области  $\Omega$  относительно функции  $u(x)$ , которая удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \quad (2)$$

где  $\partial\Omega^-$  — часть границы  $\partial\Omega$ , в точках которой  $\mathcal{L}_0(n) < 0$ .

Аналогичные задачи для уравнений 3-го порядка рассматривались в работах [1]–[3].

Для исследования на разрешимость задачи (1), (2) вводятся пространство  $H_{\text{гр}}^2(\Omega)$  — подпространство пространства Соболева

$H^2(\Omega)$ , элементы которого удовлетворяют условию (2), и пространство  $H_{\text{гр}}^{-2}$  — сопряженное пространство по отношению к пространству  $H_{\text{гр}}^2(\Omega)$ . Строится расширение  $L$  оператора  $\mathcal{L}$  из пространства  $H_{\text{гр}}^2(\Omega)$  в  $H_{\text{гр}}^{-2}$ . Обобщенным решением задачи (1)-(2) назовем решение операторного уравнения

$$Lu = f, \quad u \in D(L), \quad f \in H_{\text{гр}}^{-2}.$$

**Условие 1.** Пусть выполнено одно из условий:

- a) Если  $d > 0$ , то  $5c^2 + 4a^2d < 15bd$ ;
- b) Если  $a < 0$ ,  $c < 0$  и  $e < 0$ , то  $4ad^2 + 5b^2e - 15ace > 0$ ;
- c) Если  $a > 0$ ,  $c > 0$  и  $e > 0$ , то  $4ad^2 + 5b^2e - 15ace < 0$ ;
- d) Если  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то  $4d^2 - 15ce < 0$ .

**Условие 2.** Коэффициенты  $p_{ij}(x)$ ,  $p_i(x)$  и  $\lambda(x)$  полинома  $\mathcal{L}_1(x, D)$  таковы, что

$$p_{00}(x) \leq 0, \quad p_{11}(x) \leq 0, \quad p_{00}(x)p_{11}(x) - p_{10}^2(x) \geq 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \frac{\partial p_i(x)}{\partial x_i} + \lambda(x) < 0$$

для всех  $x \in \bar{\Omega}$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий 1 и 2 для любого  $u$  из  $H_{\text{гр}}^2(\Omega)$  справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_{H_{\text{гр}}^2(\Omega)} \leq c \|Lu\|_{H_{\text{гр}}^{-2}},$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от функции  $u$ .

**Теорема 2.** При выполнении условий 1 и 2 для любого  $f \in H_{\text{гр}}^{-2}$  существует и единственно обобщенное решение  $u \in H_{\text{гр}}^2(\Omega)$  задачи (1), (2) и справедлива оценка

$$\|u\|_{H_{\text{гр}}^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{H_{\text{гр}}^{-2}}.$$

### Литература

1. Корзюк В.И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. — Минск: БГУ, 2013. — 368с.

2. Дайняк В.В. Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка / В.В. Дайняк, В.И. Корзюк // Дифференц. уравнения — 1987. — Т. 23, № 3. — С. 867–872.

3. Корзюк В.И. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В.И. Корзюк, В.В. Дайняк, А.А. Протько // Вестник Белорусского государственного университета. Сер.1. 2012. №3. С. 116—121.

## РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ<sup>1</sup>

А.Л. Джабраилов

(Грозный, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. А.А. Кадырова»)

*ahmed\_0065@mail.ru*

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$[y' + P_1(x)y]' + P_2(x)[y' + P_1(x)y] = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Функция  $f(x, y, y')$  непрерывна для всех переменных в пределах данной области  $D: \{x \in [a, b], |y^{(i)}| \leq d_i, i = 0, 1\}$ ,  $d_0, d_1$  — данные числа. Функция  $P_1(x) < 0$  непрерывна при  $x \in (a, b]$ , при  $x = a$  обладает сингулярностью в смысле работ [1, 2], другими словами,

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b P_1(s) ds = -\infty. \quad (2)$$

Функция  $P_2(x) > 0$  непрерывна при  $x \in [a, b)$ , при  $x = b$  сингулярна и

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x P_2(s) ds = +\infty. \quad (3)$$

При этом можно допустить, что в заданной области  $D$ :

$$|f(x, y, y')| \leq \psi(x), \quad (4)$$

где  $\psi(x)$  — непрерывная функция на  $[a, b]$ .

Если в  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) = |C_1|$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} \varphi_2(x) = |C_2|$  положить  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  и считать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} P_1(x) \varphi_2(x) = 0, \quad (5)$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гос.задания Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001).

© Джабраилов А.Л., 2024



получаем равенства

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi_2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} \varphi_2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi_3(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} \varphi_3(x) = 0. \quad (6)$$

Предположим, что

$$\max_{a \leq x \leq b} \varphi_2(x) \leq d_0, \quad \max_{a \leq x \leq b} \varphi_3(x) \leq d_1. \quad (7)$$

Обозначим через  $T$  множество функций, которые непрерывно дифференцируемы на данном интервале  $[a, b]$  функций  $y(x)$ , что

$$|y(x)| \leq \varphi_2(x), \quad |y'(x)| \leq \varphi_3(x), \quad (8)$$

и для любого  $\delta > 0$  существует такое число  $N_\delta > 0$ , что при  $x_1, x_2 \in [a + \delta, b]$  выполняется неравенство

$$|y(x_1) - y(x_2)| \leq N_\delta |x_1 - x_2|, \quad (9)$$

а при  $x_1, x_2 \in [a, b - \delta]$  выполняется неравенство

$$|y'(x_1) - y'(x_2)| \leq N_\delta |x_1 - x_2|. \quad (10)$$

В силу неравенств (7), (8) оператор  $A$  определен на  $T$ . В работах [1, 2], доказано, что оператор  $A$  преобразует  $T$  в себя, если предположить также выполнение неравенства

$$|P_1(x_1) \varphi_2(x_1) - P_1(x_2) \varphi_2(x_2)| \leq N_\delta^* |x_1 - x_2| \quad (11)$$

при  $x_1, x_2 \in [a, b - \delta]$  и некоторого числа  $N_\delta^*$ .

С учетом неравенств (7) и (8), а также равенств (6), то очевидно, что

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0, \quad (12)$$

иными словами, уравнение (1) в области  $D$  (см. (7)) имеет решение  $y(x)$  соответствующее заданным граничным условиям (12).

**Теорема 1.** Пусть функции  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $f(x, y, y')$  удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (7) и (11), где  $\varphi_1(x) = \int_a^x e^{-\int_t^x P_2(s)ds} \psi(t) dt$ ,  $\varphi_2(x) = \int_x^b e^{-\int_t^x P_1(s)ds} \varphi_1(t) dt$ , тогда задача (1) с граничными условиями (12) имеет по крайней мере одно решение.

### Литература

1. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. / С.В. Исраилов // Махачкала. Изд-во «АЛЕФ», 2014. — 440 с.

2. Чечик В.А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. / В.А. Чечик // Дисс. кандидата физико-математических наук. — Воронеж, 1956. — 94 с.

## ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА<sup>1</sup>

М.А. Дородный (Санкт-Петербург, СПбГУ)

*mdorodni@yandex.ru*

Пусть  $\Gamma$  — решётка в  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Omega$  — ячейка решётки  $\Gamma$ . Для  $\Gamma$ -периодических функций обозначаем  $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon > 0$  — (малый) параметр. В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассматривается дифференциальный оператор (ДО), порождённый выражением

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Здесь  $g(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая положительно определённая и ограниченная  $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами, потенциал  $V(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая вещественнозначная функция,  $V \in L_\rho(\Omega)$  с подходящим  $\rho$  (и предполагается, что  $\inf \operatorname{spes} A_1 = 0$ ).

Пусть  $(\mathbf{k}^\circ, \lambda_0)$  — произвольная точка дисперсионного соотношения оператора  $A_1$ , и пусть  $\{e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x} \rangle} \varsigma_j(\mathbf{k}^\circ, \mathbf{x})\}_{j=1}^p$  — отвечающие ей блоховские волны; мы считаем, что  $(\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ, \cdot), \varsigma_k(\mathbf{k}^\circ, \cdot))_{L_2(\Omega)} = \delta_{jk}$ . Нас интересует поведение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решений  $u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, p$ , следующих задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\left\{ i \frac{\partial u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(\mathbf{x}, \tau), \quad u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x} \rangle} \varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}), \right.$$

где  $f_j(\mathbf{x})$  — заданные функции,  $\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varsigma_j(\mathbf{k}^\circ, \varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ . *Основной результат работы* — оценки

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot, \tau) - u_{j,\varepsilon}^{\operatorname{eff}}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon \|f_j\|_{H^3(\mathbb{R}^d)}, \quad j = 1, \dots, p,$$

где

$$u_{j,\varepsilon}^{\operatorname{eff}}(\mathbf{x}, \tau) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x} \rangle} \sum_{l=1}^p \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x}) v_{jl,\varepsilon}^{\operatorname{eff}}(\mathbf{x}, \tau)$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-287, и конкурса «Молодая математика России».

и  $\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, \tau) = (v_{j1,\varepsilon}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, \tau), \dots, v_{jp,\varepsilon}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, \tau))^t$  — решение «эффективной» системы

$$\left\{ i \frac{\partial \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (A_\varepsilon^{\text{eff}} \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\text{eff}})(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, 0) = f_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j. \right.$$

Здесь  $\mathbf{e}_j$  — элемент стандартного базиса в  $\mathbb{C}^p$ ,  $A_\varepsilon^{\text{eff}}$  — *эффективный оператор*, действующий в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^p)$ :

$$A_\varepsilon^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} A_\varepsilon^{\text{eff},11} & \dots & A_\varepsilon^{\text{eff},1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_\varepsilon^{\text{eff},p1} & \dots & A_\varepsilon^{\text{eff},pp} \end{pmatrix},$$

$$A_\varepsilon^{\text{eff},ls} := \varepsilon^{-2} \lambda_0 I - i\varepsilon^{-1} \langle \mathbf{g}^{1,ls}, \nabla \rangle - \text{div } \mathbf{g}^{2,ls} \nabla,$$

с постоянными коэффициентами  $\mathbf{g}^{1,ls}$  и  $\mathbf{g}^{2,ls}$ , для которых описана процедура построения. Результаты опубликованы в [1].

### Литература

1. Dorodnyi M.A. High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation / M.A. Dorodnyi // Russ. J. Math. Phys. — 2023. — Vol. 30, № 4. — P. 480–500.

## СИСТЕМНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ПУАНКАРЕ И ЗАДАЧА НЕЙМАНА<sup>1</sup>

Ю.А. Дубинский, П.В. Зубков (Москва, НИУ МЭИ)

*DubinskiiJuA@mpei.ru, ZubkovPV@mpei.ru*

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с границей, удовлетворяющей условию Липшица. Обозначим через  $\vec{W}_2^1(G)$  пространство Соболева вектор-функций  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ ,  $x \in G$ , то есть  $\vec{W}_2^1(G) = \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(G) : \nabla u_j \in \vec{L}_2(G), j = 1, 2, 3 \}$ . Далее пусть  $\vec{\Phi}(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))$  — некоторое нормированное поле в области  $G$ , то есть почти всюду  $|\vec{\Phi}(x)| = 1$ . Тогда каждая вектор-функция  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$  почти всюду в  $G$  представляется в виде ортогональной суммы  $\vec{u}(x) = \vec{u}_{\Phi-\text{ort}}(x) + \vec{u}_{\Phi-\text{col}}(x)$ , где  $\vec{u}_{\Phi-\text{ort}}(x) = \left[ \vec{\Phi}(x), \left[ \vec{u}(x), \vec{\Phi}(x) \right] \right]$  — составляющая, ортогональная вектору  $\vec{\Phi}(x)$ , а  $\vec{u}_{\Phi-\text{col}}(x) = \left( \vec{u}(x), \vec{\Phi}(x) \right) \vec{\Phi}(x)$  — составляющая, коллинеарная вектору  $\vec{\Phi}(x)$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWF-2023-0012).

© Дубинский Ю.А., Зубков П.В., 2024

Справедливы два вида неравенств типа неравенства Пуанкаре.

**Лемма.** Если система  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$  линейно независима в пространстве  $L_2(G)$ , то

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq M \left( \int_G |\nabla \vec{u}|^2 dx + \left| \int_G (\vec{u}, \vec{\Phi}) \vec{\Phi} dx \right|^2 \right), \quad \forall \vec{u} \in \vec{W}_2^1(G).$$

Если же система  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x) \in L_2(G)$  и при этом матрица Грама системы не содержит в своём спектре число  $\lambda = \text{mes } G$ , то

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq M \left( \int_G |\nabla \vec{u}|^2 dx + \left| \int_G [\vec{\Phi}, [\vec{u}, \vec{\Phi}]] dx \right|^2 \right), \quad \forall \vec{u} \in \vec{W}_2^1(G).$$

Здесь  $M > 0$  — постоянная, независящая от  $\vec{u}$ .

Введём подпространства

$$\begin{aligned} \vec{W}_{2, \Phi-\text{ort}}^1(G) &= \left\{ \vec{u} \in \vec{W}_2^1(G) : \int_G (\vec{u}, \vec{\Phi}) \vec{\Phi} dx = \vec{0} \right\}, \\ \vec{W}_{2, \Phi-\text{col}}^1(G) &= \left\{ \vec{u} \in \vec{W}_2^1(G) : \int_G [\vec{\Phi}, [\vec{u}, \vec{\Phi}]] dx = \vec{0} \right\}. \end{aligned}$$

Используя полученные системные неравенства Пуанкаре, доказываются следующие теоремы для задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u}_0(x) &= \vec{h}(x), \quad x \in G, \\ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Для любой системы  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$  линейно независимой в смысле  $L_2(G)$ , и любого функционала  $\vec{h} \in (\vec{W}_2^1(G))^*$ , удовлетворяющего условию  $(\vec{h}, \vec{c}) = 0$  для любой вектор-постоянной  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , существует единственное слабое решение задачи Неймана  $\vec{u}_0 \in \vec{W}_{2, \Phi-\text{ort}}^1(G)$ . Любое другое решение из пространства  $\vec{W}_2^1(G)$  отличается от  $\vec{u}_0$  на аддитивную вектор-постоянную.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1) матрица Грама системы  $\Phi_1(x) \in L_2(G), \Phi_2(x) \in L_2(G), \Phi_3(x) \in L_2(G)$  не содержит в своём спектре число  $\lambda = \text{mes } G$ ;

2) функционал  $\vec{h} \in (\vec{W}_2^1(G))^*$  "ортогонален"  $\vec{\mathbb{R}}^3$ , то есть для любой вектор-постоянной  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$   $(\vec{h}, \vec{c}) = 0$ .

Тогда существует единственное слабое решение  $\vec{u}_0 \in \vec{W}_{2,\Phi-col}^1(G)$  задачи Неймана. Любое другое решение из пространства  $\vec{W}_2^1(G)$  отличается от  $\vec{u}_0$  на аддитивную вектор-постоянную.

### Литература

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — Издательство Сибирского отделения АН СССР, 1962. — 255 с.
2. Назаров А.И. Неравенство Пуанкаре и его приложения / А.И. Назаров, С.В. Поборчий. — Издательский дом Санкт-Петербургского Государственного Университета, 2012. — 127 с.

## ОБРАТНЫЕ МЕРЫ КАРЛЕСОНА В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

Е.С. Дубцов (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН)  
dubtsov@pdmi.ras.ru

Пусть  $H^p = H^p(B_d)$  обозначает пространство Харди в открытом единичном шаре  $B_d$  из  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$ . Рассмотрим множества

$$Q = Q(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_d : |1 - \langle \zeta, \xi \rangle| \leq \delta\}, \quad \zeta \in \partial B_d, \delta > 0.$$

Отметим, что  $Q$  — это замкнутый шар относительно неизотропной метрики  $\rho(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|^{\frac{1}{2}}$ ,  $\zeta, \xi \in \partial B_d$ .

Пусть  $M(\overline{B}_d)$  обозначает множество всех конечных положительных борелевские мер, заданных на замкнутом шаре  $\overline{B}_d$ . Для  $\mu \in M(\overline{B}_d)$  теорема о классических мерах Карлесона гарантирует, что оценка

$$\|f\|_{L^p(\overline{B}_d, \mu)} \leq C \|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p,$$

эквивалентна следующему условию:  $\mu(S_Q) \leq C \sigma(Q)$  для всех неизотропных шаров  $Q \subset \partial B_d$ , где  $C > 0$  обозначает константу, значение которой может изменяться от строки к строке,  $\sigma = \sigma_d$  — нормированная мера Лебега на единичной сфере  $\partial B_d$  и

$$S_Q = \left\{ z \in \overline{B}_d : 1 - \sigma(Q) \leq |z| \leq 1, \frac{z}{|z|} \in Q \right\}.$$

Первый результат — это описание мер, которые принято называть обратными мерами Карлесона для  $H^p$ . Для  $d = 1$  такое описание было получено ранее в работе [1]; см. также [2].

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $\mu \in M(\overline{B}_d)$ ,  $d \geq 1$ . Тогда перечисленные ниже утверждения равносильны.

(i) Существует константа  $c > 0$  такая, что

$$\int_{\overline{B}_d} |f|^p d\mu \geq c \|f\|_{H^p}^p \quad \text{для всех } f \in C(\overline{B}_d) \cap H^p.$$

(ii) Существует константа  $c > 0$  такая, что  $\mu(S_Q) \geq c\sigma(Q)$  для всех неизотропных шаров  $Q \subset \partial B_d$ .

(iii) Существует константа  $c > 0$  такая, что  $\mu(Q) \geq c\sigma(Q)$  для всех неизотропных шаров  $Q \subset \partial B_d$ .

Далее, рассмотрим голоморфную функцию  $b : B_d \rightarrow B_1$ . Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\mathcal{K}^b(z, w) = \frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^d}, \quad z, w \in B_d,$$

имеет все свойства воспроизводящего ядра. Обладаящее воспроизводящим ядром  $\mathcal{K}^b(z, w)$  гильбертово пространство  $\mathcal{H}(b) \subset H^2$  называется пространством де Бранжа–Ровняка.

Мера  $\mu \in M(\overline{B}_d)$  называется обратной мерой Карлесона для пространства  $\mathcal{H}(b)$ , если

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)} \leq C \|f\|_{L^2(\overline{B}_d, \mu)}$$

для всех функций  $f \in \mathcal{H}(b)$ , которые имеют радиальные пределы  $\mu$ -почти везде на сфере  $\partial B_d$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mu \in M(\overline{B}_d)$  и голоморфная функция  $b : B_d \rightarrow B_1$  имеет радиальные пределы  $\mu$ -почти везде на сфере  $\partial B_d$ . Положим

$$g = \frac{d\mu|_{\partial B_d}}{d\sigma_d}.$$

Предположим, что  $\mu$  является обратной мерой Карлесона для пространства  $\mathcal{H}(b)$ . Тогда  $1 - |b(\zeta)|^2 \leq C(1 - |b(\zeta)|^2)^2 g(\zeta)$  для  $\sigma_d$ -почти всех точек  $\zeta \in \partial B_d$  и константы  $C > 0$ .

Доказательства и приложения теорем 1 и 2 приведены в работе автора [3].

### Литература

1. Hartmann A. Reverse Carleson measures in Hardy spaces / X. Massaneda, A. Nicolau, J. Ortega-Cerdà // Collect. Math. — 2014. — V. 65, № 3. — P. 357–365.

2. Lefèvre P. Some revisited results about composition operators on Hardy spaces / D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza // Rev. Mat. Iberoam. — 2012. — V. 28, № 1. — P. 57–76.

3. Дубцов Е.С. Обратные меры Карлесона для пространств Харди в единичном шаре / Е.С. Дубцов // Зап. научн. сем. ПОМИ — 2023. — Т. 527 — С. 54–70.

## ГЛАДКОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова (Рязань, РГУ имени С. А. Есенина)

*an\_batseva@mail.ru*

Разрешимость начально-краевых задач для параболических систем в анизотропных пространствах Гёльдера  $C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $l \geq 2$ ,  $0 < \alpha < 1$ , хорошо известна [1, гл. 4]. В классе  $C^{1,0}(\bar{\Omega})$  разрешимость первой и второй начально-краевых задач для неоднородных параболических по Петровскому систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини, и ненулевым начальным условием в ограниченных плоских областях с границами из пространства  $H^{1/2+\omega}$  установлена в [2].

В настоящей работе исследуются свойства векторного потенциала двойного слоя для параболической системы второго порядка в анизотропных пространствах Зигмунда  $H_l(\bar{\Omega})$ , которые являются аналогом пространств  $C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$  для  $\alpha = 0$ . Также рассматривается гладкость потенциала двойного слоя в весовых пространствах Зигмунда  $H_m^{(-l)}(\bar{\Omega})$ , определение которых приведено в [3]. Определение пространств Зигмунда получается из определения соответствующих пространств Липшица путем замены в нормах разностей первого порядка на вторую. Полученные свойства потенциала двойного слоя используются для исследования свойств решений модельной первой краевой задачи в пространствах Зигмунда.

В полуполосе  $D_+ = D \cap \{x > 0\}$ , где  $D = \mathbb{R} \times (0; T)$ ,  $0 < T < \infty$ , с «боковой» границей  $\Sigma = \bar{D} \cap \{x = 0\}$  рассмотрим модельную первую краевую задачу для параболической по Петровскому системы второго порядка

$$Lu \equiv \partial_t u - A \partial_x^2 u = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma} = \varphi, \quad (1)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ;  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^m$  — матрица размерности  $m \times m$  с вещественными элементами.

Векторный потенциал двойного слоя с плотностью  $\varphi$  имеет вид:

$$W\varphi(x, t) = - \int_{\Sigma} \partial_x Z(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $Z(x, t - \tau)$  — фундаментальная матрица решений системы (1).

**Теорема 1.** Пусть  $m$  и  $l$  — целые числа, причем  $m \geq l \geq 0$ . Тогда отображение  $W : \varphi \rightarrow W\varphi$  является ограниченным оператором из пространства  $H_l(\Sigma)$  в  $H_m^{(-l)}(D_+)$  и из  $H_l(\Sigma)$  в  $H_l(\bar{D}_+)$ .

Решение первой краевой задачи системы (1) выражается явно через потенциал двойного слоя:  $u = 2W[A\varphi](x, t)$ . Используя это представление, получаем, что справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $l \in \mathbb{N}$  и  $\varphi \in H_l(\Sigma)$ . Тогда решение и первой краевой задачи (1) принадлежит классу  $H_l(\bar{D}_+)$  и весовым пространствам  $H_m^{(-l)}(D_+)$  для целых  $m \geq l$ , кроме того, справедливы оценки

$$\|u\|_{l, D_+} \leq C(l) \|\varphi\|_{l, \Sigma}, \quad |u|_{m, D_+}^{(-l)} \leq C(l, m) \|\varphi\|_{l, \Sigma}.$$

### Литература

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 446 с.
2. Бадерко Е.А. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2023. — т. 59. — № 5. — С. 608–618.
3. Конёнков А.Н. Гладкость потенциала двойного слоя для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. — 2007. — т. 43. — № 8. — С. 1106–1115.



# ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ

Д.П. Емельянов (Москва, МГУ)

emeljanov@cs.msu.ru

Рассматривается следующая задача Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < b\}$ :

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (1)$$

Считаем, что  $a(y), c(y)$  и  $f(x, y)$  — некоторые аналитические функции переменного  $y$  в комплексной области  $G$  такой, что  $[0, b] \subset G$ . Кроме того,  $a(y) \geq 0$  при  $y \in [0, b]$  и  $c(0) = 0$ . Мы предполагаем, что порядок вырождения  $m$  уравнения (1) принадлежит интервалу  $(0, 1)$ .

**Теорема 1.** Пусть правая часть  $f(x, y)$  задачи (1) аналитична в области  $G$  как функция переменного  $y$  при каждом фиксированном  $x \in [0, 1]$ , имеет вторую непрерывную производную по  $y$  в  $\bar{D}$ , при каждом фиксированном  $y \in (0, b)$  принадлежит классу Гёльдера как функция переменного  $x$ .

Тогда существует решение задачи (1) в классе  $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ , представимое в виде следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x, y) \in \bar{D},$$

который сходится абсолютно и равномерно в  $\bar{D}$ , допускает двукратное почленное дифференцирование по  $x$  и по  $y$  внутри  $D$ ,  $\eta_k(y) \in A(G \setminus \{0\})$ .

Если  $m \notin \mathbb{Q}$ , то функции  $\eta_k(y)$  в достаточно малой окрестности  $U$  точки  $y = 0$  представимы в виде

$$\eta_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \cdot \psi_{k,n}(y), \quad y \in U \subset G,$$

ряд сходится в  $A(U \setminus \{0\})$ . Если же  $m = p/q \in \mathbb{Q}$ , то

$$\eta_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \psi_{k,n}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,q}(y), \quad y \in U \subset G,$$

ряд сходится в  $A(U \setminus \{0\})$ . Функции  $\psi_{k,n}(y)$  аналитичны в  $U$ ,  $\psi_{k,0}(0) = 0$ .

### Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.
2. Емельянов Д.П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58.
3. Емельянов Д.П. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 655–672.
4. Емельянов Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением / Д.П. Емельянов // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627.
5. Емельянов Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка / Д.П. Емельянов // Вестник Московского университета. Серия 15. — 2023. — № 2. — С. 12–22.

## О ФУНКЦИОНИРОВАНИИ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ

**Я.М. Ерусалимский** (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

*ymerusalimskiy@sfedu.ru*

Доклад посвящен расширению понятия ресурсная сеть, введенному в рассмотрение и изученному О.П. Кузнецовым и Л.Ю. Жилияковой (см. [1]). Фактически, речь пойдет об общем определении ресурсной сети, при котором ресурсные сети, рассмотренные О.П. Кузнецовым и Л.Ю. Жилияковой, будут частным случаем общего понятия ресурсная сеть.

**Определение 1.** Ресурсной сетью  $G(X, U, f, \rho, pr)$  будем называть конечный, связный ориентированный граф без петель (здесь

$X$  — множество вершин сети,  $U$  — множество дуг сети,  $f: U \rightarrow X \times X$  — отображение инцидентности,  $\rho: U \rightarrow R_+ = (0; +\infty)$  — отображение, задающее пропускные способности дуг сети,  $pr: U \rightarrow N$  — отображение приоритетности (считается, что чем меньше значение  $pr(u)$  на дуге  $u \in U$ , тем приоритет этой дуги выше), с заданными правилами функционирования ресурсной сети.

**Определение 2.** (Правила функционирования ресурсной сети.) Функционирование ресурсной сети  $G(X, U, f, \rho, pr)$  происходит в дискретном времени  $Z_+$ , т.е. на множестве неотрицательных целых чисел. Множество  $Z_+$  представим в виде объединения двух множеств  $Z_{+чет}$  — неотрицательных целых чисел кратных двум и  $Z_{+нечет}$  — множества нечетных чисел.

Функционирование ресурсной сети определяется двумя рекурсивными функциями:  $q(x, t)$  — определенной на множестве  $X \times Z_{+чет}$ , называемой распределением ресурса в вершинах сети, и  $\varphi(u, t)$  — определенной на множестве  $U \times Z_{+нечет}$ , называемой потоком ресурса на дугах сети.

Эти функции определены следующими пунктами а)–в).

а) Задается начальное распределение ресурса в вершинах сети, т.е. значения функции  $q(x, 0)$  большие либо равные чем ноль на множестве  $X$ .

б) Каждое из множеств  $U_+(x)$  представим в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств  $(U_+(x))_i, i = 1, 2, \dots, k_x$ , отнеся ко множеству  $(U_+(x))_1$  все дуги из  $U_+(x)$ , имеющие наивысший приоритет, ко множеству  $(U_+(x))_2$  все дуги из  $U_+(x)$ , имеющие следующее возможное значение приоритета и т.д. Для каждого из множеств  $(U_+(x))_i$  определим величину  $(W(x))_i = \sum_{u \in (U_+(x))_i} \rho(x)$ . Значения потоковой функции  $\varphi(u, t)$  в момент времени  $t = 2n + 1$  на множестве  $U_+(x)$  определяются индуктивно по множествам  $(U_+(x))_i$  в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Полагаем  $S = q(x, 2n)$ . Если  $S \leq (W(x))_1$ , то  $\varphi(u, 2n + 1) = \frac{\rho(u)}{\sum_{v \in (U_+(x))_1} \rho(v)} \cdot q(x, 2n)$ , а поток на дугах остальных множеств  $(U_+(x))_i, i = 2, \dots, k_x$  полагаем равным нулю. На этом определение потока  $\varphi(u, 2n + 1)$  на множестве  $U_+(x)$  завершено.

2. В противном случае полагаем

$$\begin{aligned}\varphi(u, 2n+1) &= \rho(u) \quad \forall u \in (U_+(x))_1, \\ S &= q(x, 2n) - \sum_{u \in (U_+(x))_1} \varphi(u, 2n+1),\end{aligned}$$

и переходим к определению потока на множестве  $(U_+(x))_2$  по правилу, описанному в п. 1 и т.д.

в) Значение функции  $q(x, t)$  в момент времени  $t = 2n+2$  в каждой вершине  $x \in X$  определяется её значением в момент времени  $t = 2n$  и потоком на дугах в момент времени  $t = 2n+1$  правилом

$$q(x, 2n+2) = q(x, 2n) - \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, 2n+1) + \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, 2n+1).$$

На этом мы завершаем общее определение ресурсной сети, которое состоит из двух определений (1 и 2).

Ресурсные сети Кузнецова-Жилияковой ([1]) являются частным случаем ресурсных сетей, когда все дуги имеют одинаковый приоритет.

Результаты, полученные в [6] для ресурсных сетей Кузнецова-Жилияковой справедливы и для ресурсных сетей общего вида.

### Литература

1. Жилиякова Л.Ю. Теория ресурсных сетей: монография / Л.Ю. Жилиякова, О.П. Кузнецов. // — М.: — РИОР: ИНФА-М, 2017. — 283 с.
2. Абдулрахман Х.Н. О реализуемости потоков в классических сетях потоками в ресурсных сетях / Х.Н. Абдулрахман, Я.М. Ерусалимский // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. — 2023. — Т. 38, № 3. — С. 7–17.

## ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЛИНЕЙНОЙ СИЛОЙ ДИССИПАЦИИ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ПЕНЛЕВЕ

Д.С. Жалукевич (Белосток, БГУ)

*den.zhal@yandex.by*

В данной работе рассматриваются эволюционные уравнения второго порядка с линейной силой диссипации

$$v_\tau = A_0(\tau, \xi, v) + A_1(\tau, \xi, v)v_\xi + A_2(\tau, \xi, v)v_{\xi\xi}, \quad (1)$$

где  $A_0, A_1, A_2$  - аналитические функции своих аргументов, которые часто встречается в науке и технике и описывает процессы, связанные с распространением тепла, диффузией и конвекцией, в нелинейных средах с линейной силой диссипации. Проводится редукция этих уравнений с помощью замены переменных

$$v = y(x(\tau, \xi)). \quad (2)$$

В итоге мы приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка

$$y^{(2)} + F_1(x, y)y^{(1)} + F_0(x, y) = 0, \quad (3)$$

и ищем среди этих уравнений, уравнения типа Пенлеве [1-5].

### Литература

1. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. / Н.А. Кудряшов — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, — 360 с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев — М. — 2013. — 434 с.
3. Мартынов И.П. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем : пособие / И.П. Мартынов, Н.С. Берёзкина, В.А. Пронько. — Гродно : ГрГУ, 2009. — 395 с.
4. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. / В.И. Громак, Н.А. Лукашевич // Мн.: Университетское, 1990. — 157 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э. Камке // М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., — 1971. — 576с.

### ФОРМУЛА СКАЧКА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ<sup>1</sup>

**И.В. Женьякова, М.Ф. Черепова** (Москва, НИУ «МЭИ»)  
*zheniakovaiv@mpei.ru, cherepovamf@mpei.ru*

В слое  $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$ ,  $0 < T < +\infty$ , рассматривается равномерно параболическое уравнение

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \partial_i u + a_0(x, t) u = 0, \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (FSWF-2023-0012).

© Женьякова И.В., Черепова М.Ф., 2024

коэффициенты которого есть вещественные функции, определённые в  $\overline{D}$  и удовлетворяющие условиям:

- а)  $a(x, t)\sigma \geq \delta|\sigma|^2$  для некоторого  $\delta > 0$  и всех  $(x, t) \in \overline{D}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ ;
- б)  $a_{ij}, a_i, a_0 \in H^{0, \omega_0}(\overline{D})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , где  $\omega_0$  — модуль непрерывности, удовлетворяющий дважды условию Дини и для некоторого  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  функция  $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$ ,  $z > 0$ , почти убывает (см. определение, например, в [1]).

Условия а), б) обеспечивают для уравнения (1) существование фундаментального решения  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$ ,  $t > \tau$ , построенного методом Леви (см. [1]).

В  $D$  выделяется полуограниченная область  $\Omega = \{(x, t) \in D : x_n > g(x', t)\}$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , с негладкой по  $t$  боковой границей  $\Sigma = \{(x, t) \in \overline{\Omega} : x_n = g(x', t)\}$ . Предполагаем, что

$$g \in H^{1, \omega_1}(\overline{D'}), \quad D' = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, T), \quad (2)$$

где модуль непрерывности  $\omega_1$  удовлетворяет условию Дини и для некоторого  $\varepsilon_1 \in (0, 1)$  функция  $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$ ,  $z > 0$ , почти убывает.

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$U\varphi(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_\tau} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi, \quad (x, t) \in \overline{D}.$$

Пусть  $(x^0, t^0) \in \Sigma_{t^0} = \Sigma \cap \{t = t^0\}$ ,  $t^0 \in [0, T]$ . Обозначим через  $N(x^0, t^0)$  — единичный вектор внутренней (по отношению к  $\Omega$ ) нормали к  $\Sigma_{t^0}$ , лежащей в гиперплоскости  $\{t = t^0\}$ , а через  $\nu(x^0, t^0)$  — вектор внутренней конормали к  $\Sigma_{t^0}$  в точке  $(x^0, t^0)$ . Производная потенциала  $U\varphi$  по конормали  $\nu(x^0, t^0)$  в области  $\Omega$  определяется по формуле

$$\frac{\partial U\varphi(x, t)}{\partial \nu(x^0, t^0)} = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x^0, t^0) N_j(x^0, t^0) \partial_i U\varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega.$$

**Теорема 1.** Пусть для коэффициентов оператора  $L$  выполнены условия а), б) и для боковой границы  $\Sigma$  — условие (2). Пусть модуль непрерывности  $\omega$  удовлетворяет условию Дини и для некоторого  $\varepsilon \in (0, 1)$  функция  $\omega(z)z^{-\varepsilon}$ ,  $z > 0$ , почти убывает. Тогда для любой функции  $\varphi \in H^{0, \omega}(\Sigma)$  справедлива формула

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (x^0, t^0)} \frac{\partial U\varphi(x, t)}{\partial \nu(x^0, t^0)} = -\frac{1}{2}\varphi(x^0, t^0) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_\tau} \frac{\partial \Gamma(x^0, t^0; \xi, \tau)}{\partial \nu(x^0, t^0)} \varphi(\xi, \tau) d\sigma_\xi, (x, t) \in \Omega, (x^0, t^0) \in \Sigma \setminus \Sigma_0.$$

**Замечание.** Для доказательства теоремы используется метод работы [2]. В случае пространств Гёльдера, а именно, если  $\omega_i(z) = \omega(z) = z^\alpha$ ,  $i = 0, 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ , утверждение теоремы для ограниченной области получено в [3].

### Литература

1. Zhenyakova I.V. The Cauchy Problem for a Multi-Dimensional Parabolic Equation with Dini-Continuous Coefficients / I.V. Zhenyakova, M.F. Cherepova // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2022, Vol. — 264, No. 5, pp. 581–602.
2. Бадерко Е.А. О гладкости  $2m$ -параболического потенциала простого слоя. / Е.А. Бадерко // Дифференц. уравн., — 1990. — Т. 26, № 1. — С. 3–10.
3. Черепова М.Ф. О гладкости параболического потенциала простого слоя / М.Ф. Черепова // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 29.06.88. № 5194-B88.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

**В.В. Жильцова, Ю.П. Вирченко** (Белгород, БелГУ)  
*virch@bsu.edu.ru*

Изучаются решения  $u(x, t) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  с компактным носителем  $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$  одномерного нелинейного уравнения теплопроводности

$$\dot{u} = (uu_x)_x + u^2. \quad (1)$$

Для этих решений, которые обладают обострением режима (см., например, [1]), строятся асимптотические степенные разложения

$$u(x, t) = \Delta^{-1}(t) \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^m(t) \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n v_{m,n}(x) \quad (1)$$

по малому параметру  $\varepsilon$ . Этот параметр вводится как мера отклонения начальной функции  $u(x, 0)$  от начального значения  $v_{0,0}(x)$  автомодельного решения уравнения (1) со слабым разрывом так, что

функция  $w(x) \equiv v_{0,0}(x)$  удовлетворяет уравнению

$$aw = \frac{1}{2}(w^2)'' + w^2$$

с некоторой постоянной  $a > 0$  и  $\Delta(t) = 1 - at$ . Выбирается специальное частное решение этого уравнения, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{4}{3}aw^3 - w^4 = 2w^2w'^2,$$

и имеет вид

$$w(x) = \frac{2}{3}a \cos \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - x_0) \right].$$

Оно сосредоточено на компактном носителе  $D = [-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}] + x_0$ .

Решения  $u(x, t)$  обращаются в бесконечность за конечное время  $t_*$ , которое называется *временем обострения*, одновременно во всех точках некоторого интервала  $D = [c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$  так, что такие решения существуют только лишь на конечном интервале  $t \in [0, t_*)$  и на конечном интервале действительной оси значений  $x$ . Построение асимптотического разложения (1) возможно вследствие того, что соответствующие ему решения определены только в компактной области пространства  $\mathbb{R}^2 = \{x, t\}$ .

Для построения разложений (1) полагается, что  $\Delta(t)$  имеет порядок  $\varepsilon$  и начальное значение решения представляется в виде

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_{0,n}(x). \quad (2)$$

Для функций  $v_{0,n}(x)$  формулируются нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В частности, при  $n = 1$  такое уравнение имеет вид

$$(v_{0,1}w)'' + 2v_{0,1}w = 0.$$

Доказывается, что

**Теорема.** *Асимптотическое разложение (1) существует.*

Следствием существования разложения (1) является то, время обострения  $t^*$  и область  $D$  обострения для решений  $u(x, t)$  также также представляются в виде степенных разложений

$$t^* = t_0^* + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m t_m^*,$$



где  $t_0^* = a^{-1}$ , и, в частном случае, когда решение  $u(x, t)$  симметрично относительно точки  $x = 0$ ,  $c_- = c_+ \equiv c^*$ ,

$$c^* = c_0^* + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c_m^*,$$

где  $c_0^* = \pi\sqrt{2}$ .

### Литература

1. Samarskii A.A. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations / A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov. — Berlin : Walter de Gruyter, 2011. — 554 p.

## УСЛОВИЯ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

Т.В. Завьялова (Москва, НИТУ «МИСИС»)  
*tzava@yandex.ru*

В работе рассматриваются вопросы построения робастного управления в системе дифференциальных уравнений, параметры которой зависят от случайного процесса. Случайный процесс или структура объекта управления описывается простой марковской цепью с конечным числом состояний. Динамика процесса осложняется предположением о том, что в случайные моменты времени с известной вероятностью система переходит из одного состояния в другое. При этом скачкообразно изменяется случайным образом фазовый вектор системы и продолжение движения начинается с новыми начальными условиями. Предполагается, что множество таких начальных условий для продолжения траектории ограничено.

Пусть динамика процесса описывается следующей системой управления

$$dx(t) = [A(t, r(t))x + B(t, r(t))u]dt + \sum_{v=1}^l \sigma_v(t, r(t))x dw_v \quad (1)$$

$$y = C(r(t))x,$$

где  $x \in \mathbf{R}^n$  —  $n$ -мерный вектор фазовых координат системы; время  $t$  может изменяться в области;  $I = \{t : t \geq t_0\}$  — управляющее

воздействие;  $u \in \mathbf{R}^m$  — вектор выхода. Матрицы-функции, зависящие от структурного состояния  $A(r(t))$ ,  $B(r(t))$ ,  $\sigma_v(r(t))$  — заданы.

Вектор — функция  $r(t)$  является простой марковской цепью, при каждом  $t \in I$  принимает значения из множества  $F = \{r_1, \dots, r_k\}$ . Простая марковская цепь допускает разложение

$$P\{r(t) = r_j \mid r(s) = r_i \neq r_j\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad (2)$$

$$P\{r(t) = r_i, s \leq \tau \leq t \mid r(s) = r_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s),$$

где  $q_{ij}$  — известные переходные вероятности из  $i$ -го состояния в  $j$ -е,  $o(t-s)$  — бесконечно малая величина, более высокого порядка малости, чем  $(t-s)$ ,  $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$  —  $m$ -векторный стандартный винеровский процесс. Предположим, что в случайные моменты времени скачкообразного изменения  $r(t)$  фазовый вектор  $x(t)$  так же изменяется скачком по закону:

$$x(\tau) = \left( K_{ij} + \sum_{s=1}^N \xi_s Q_s \right) x(\tau-0), \quad (3)$$

где  $\tau$  — момент перехода системы из состояния  $r(\tau-0) = r_i$  в состояние  $r(\tau+0) = r_j \neq r_i$ ;  $\xi_s$  — независимые случайные величины, для которых  $E\xi_s = 0$ ,  $E\xi_s^2 = 1$ ;  $K_{ij}$  — матрица размерности  $n \times m$ , характеризующая состояние фазового вектора в момент смены структурного состояния  $r(t) \in F$ , ограничена  $\|K_{ij}\| \leq \delta_i$ ,  $Q_s$  — известные матрицы с постоянными коэффициентами размерности  $n \times m$ .

Примерами таких систем управления могут быть технические или физические системы со случайно изменяющейся массой, электрические системы со случайными скачками напряжения. Описанные системы управления широко представлены в зарубежной и отечественной литературе [1]-[3]. В данной работе предположение о случайно изменяющемся скачке фазового вектора является новым и продиктовано практическими соображениями. Управляющее воздействие ищется в виде

$$u = -F(r(t))x,$$

где  $F(r(t))$  — матрица размерности  $n \times m$ , зависящая от структурного состояния системы.

Для описанного класса систем (1) – (3) со случайной структуры получены достаточные условия робастной стабилизации со статической обратной связью по состоянию, а также найдены соотношения

между параметрами скачка фазового вектора и параметрами системы, при котором робастное управление существует.

### Литература

1. Пакшин П.В. Параметризация робастных стабилизирующих управлений для систем случайной структуры. / П.В. Пакшин, И.Н. Мирофанов //Тезисы докладов 7-го международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — Москва. 2004. — С. 138–140.

2. Bernstein D.S. Robast Static and Dinamic Output-Feedback Stabilization: Deterministic and Stochastic Perspectives. /IEEE Transaction and automatic control, — 1987 — vol. AC-32. — NO.12. — p.1076-1083.

3. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков — М. : Наука, 2002. — 303 с.

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ РАСХОДА ДЛЯ ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ УМЕНЬШЕНИИ ЛИНИИ ТОКА И УВЕЛИЧЕНИИ ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО НАПОРА

Н.С. Задорожная, Е.Г. Чуб (Ростов-на-Дону, РГУПС)

*simon@sfedu.ru*

При решении задач фильтрации наиболее важным является отыскание следующих характеристик потока: выходные скорости, расход жидкости, противодавления. Эти характеристики зависят от вида краевых условий и формы границы области фильтрации, поэтому важно определить изменение этих характеристик при вариации границы области. Такую возможность дает метод мажорантных областей [1].

Сущность метода мажорантных областей заключается в том, что путем деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых задачу фильтрации можно решить точно.

Известны теоремы метода мажорантных областей, когда область фильтрации имеет различные границы.

Рассмотрим еще один случай, когда граница представляет собой одну линию тока и три потенциальные линии.

Установившуюся фильтрацию тяжелой несжимаемой жидкости описывает система дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0, \bar{V} = -k \operatorname{grad} h, \quad (1)$$

( $\bar{V}$  — скорость фильтрации,  $h$  — пьезометрический напор,  $k$  — коэффициент фильтрации, характеризующий среду и жидкость одновременно), где  $h = \frac{p}{\rho g} + \gamma$  ( $p$  — давление,  $\gamma = \rho g$  — удельный вес жидкости).

Области фильтрации в плоскости  $z = x + iy$  соответствует в области комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  область, называемая годографом комплексного потенциала. Зная комплексный потенциал  $W(z)$ , можно определить все основные характеристики фильтрационного потока.

Пусть область фильтрации ограничена линией тока  $BC$  и тремя потенциальными линиями  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$ . Краевые условия для комплексного потенциала  $W(z)$  имеют вид (рис. 1)

$$\varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -kH_0, \varphi|_{AB} = -kH, \psi|_{BC} = 0. \quad (2)$$

В настоящей работе приведена теорема об изменении значений расхода жидкости через связную потенциальную линию, имеющую общий конец с линией тока, когда область фильтрации ограничена одной линией тока и тремя потенциальными линиями, когда  $H > 0 > H_0$ . В этом случае годографы комплексного потенциала  $G_W$  и  $\dot{H}_{W_1}$  имеют вид, изображенный на рис.1 (а, б).

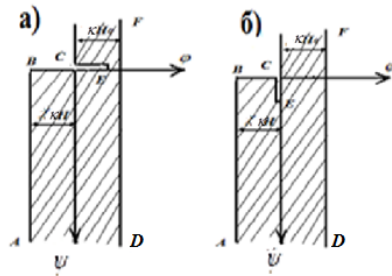


Рис. 1: Изображение годографов комплексного потенциала.

**Теорема.** При одновременном уменьшении линии тока и увеличении линии наибольшего напора расход жидкости через связную потенциальную линию, имеющую общий конец с линией тока, увеличивается.

Доказательство базируется на построении годографа вариации комплексного потенциала.

Заметим, что аналогичные теоремы об изменении напоров, расходов и скоростей были приведены в работах [2,3].

### Литература

1. Ляшко И.И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко, В.И. Лаврик, Г.Е. Мистецкий. — Киев: Наукова думка, 1974. — 200с.
2. Клодина Т.В. Теорема об оценке напоров для одного вида краевых условий области / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Инновационные процессы в научной среде: Сборник статей междунар. научно-практической конф. (7 мая 2014 г., г.Уфа) – Уфа: Аэтерна, — 2014. — С. 29–31.
3. Клодина Т.В. Определение границ расхода жидкости при одном частном случае краевых условий / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна -2020 : материалы междунар. конф. —Воронеж :ИПЦ «Научная книга», — 2020. — С. 124–125.

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА<sup>1</sup>

**Н.В. Зайцева** (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)  
*zaitseva@cs.msu.ru*

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одной из важнейших и интенсивно развивающихся в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой вклад в развитие теории для таких уравнений внесли работы А.В. Бицадзе [1], М.М. Смирнова [2], Е.И. Моисеева [3], А.М. Нахушева [4] и др.

При использовании некоторых идей работ [5, 6] в прямоугольной области построено в явном виде решение краевой задачи с нелокальными граничными условиями для эллиптико-гиперболического уравнения с вырождением. Доказана теорема единственности полученного решения.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по оглашению № 075-15-2022-284.

© Зайцева Н.В., 2024

## Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1985. — 304 с.
3. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 150 с.
4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2006. — 287 с.
5. Зайцева Н.В. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом / Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 224–234.
6. Зайцева Н.В. Единственность решения нелокальной задачи для одного эллиптико-гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами / Н.В. Зайцева // Мат. заметки. — 2021. — Т. 109, № 4. — С. 544–551.

## ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ТЕЛ С ЖИДКОСТЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГО-ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ<sup>1</sup>

Д.А. Загора, К.В. Фордук (Симферополь, ФГАОУ ВО  
«Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»)  
*dmitry.zkr@gmail.com, fordruk\_kv@mail.ru*

Исследуются линейные двумерные задачи о малых движениях и нормальных колебаниях системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими либо идеальными жидкостями и последовательно соединённых пружинами (см. рис. 1).

Математическая модель приведённой системы состоит из уравнений Навье-Стокса либо Эйлера для описания движения жидкостей, уравнений движения тел с учётом трения и упругих соединений, системы граничных и начальных условий.

Доказаны теоремы о сильной разрешимости по времени соответствующих начально-краевых задач (см. работы [1, 3]). Исследованы

---

<sup>1</sup> Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2024-1431).

© Загора Д.А., Фордук К.В., 2024

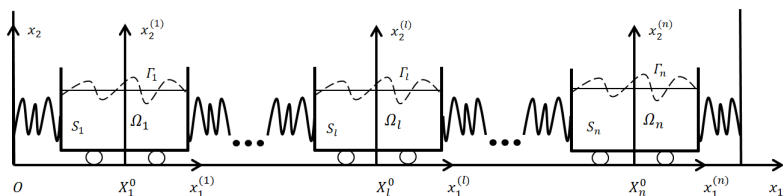


Рис. 1.

задачи о нормальных колебаниях этих систем. В частности, установлены локализация спектра и асимптотические формулы для различных ветвей спектра, доказаны свойства полноты и базисности систем корневых элементов (см. работы [2, 4]).

### Литература

1. Forduk K.V. A Problem of Normal Oscillations of a System of Bodies Partially Filled with Ideal Fluids under the Action of an Elastic Damping Device / K.V. Forduk, D.A. Zakora // Sib. Elektron. Mat. Izv. — 2021. — V. 18:2. — P. 997–1014.
2. Zakora D.A. Problem on Small Motions of a System of Bodies Filled with Ideal Fluids under the Action of an Elastic Damping Device / D.A. Zakora, K.V. Forduk // Lobachevskii J. Math. — 2021. — V. 42:5. — P. 889–900.
3. Фордук К.В. Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства / К.В. Фордук // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. — 2022. — № 42. — С. 103–120.
4. Forduk K.V. The Problem on Normal Oscillations of a System of Bodies Partially Filled with Viscous Fluids under the Action of Elastic-Damping Forces / K.V. Forduk, D.A. Zakora // Lobachevskii J. Math. (in press).

**О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ  
И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**  
А.А. Зверев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованева (Воронеж, ВГУ)  
*InoplaneTemin@rambler.ru*

Применяя концепцию поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным (см., например, [1]), проведено исследование краевой задачи второго порядка с негладкими решениями и периодическими

краевыми условиями. Изучаемая задача имеет вид

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma} \\ u(0) = u(l), \\ u'(0) = u'(l) \end{cases} \quad (1)$$

Такая задача моделирует деформации струнного кольца под воздействием внешней силы, заданной с помощью функции  $F(x)$ . Здесь функция  $u(x)$  определяет отклонение кольца от равновесного положения;  $p(x)$  характеризует силу натяжения;  $Q(x)$  описывает упругие свойства внешней среды. Предполагается, что в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) струнного кольца могут быть установлены упругие опоры (пружины). При этом скачки функции  $Q(x)$  совпадают с жесткостями соответствующих пружин. Также в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) могут прикладываться сосредоточенные силы, и скачки функции  $F(x)$  равняются этим силам. Функция  $\sigma(x)$  порождает на  $[0, l]$  меру и имеет разрывы лишь в точках разрыва  $p(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $F(x)$ .

Предполагается, что функции  $p(x)$ ,  $F(x)$  имеют ограниченную вариацию на  $[0, l]$ , причем  $\inf_{[0, l]} p(x) > 0$ ,  $p(0) = p(l)$ ; функции  $Q(x)$  и  $\sigma(x)$  строго возрастают на  $[0, l]$ ; функции  $p(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $F(x)$ ,  $\sigma(x)$  являются непрерывными в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно-непрерывных функций, производная которых  $\sigma$  - абсолютно непрерывна на  $[0, l]$ .

В [2] установлены условия единственности решения задачи (1). В настоящей работе найден явный вид функции влияния  $K(x, s)$ , позволяющей представить решение задачи (1) в форме

$$u(x) = \int_0^l K(x, s) dF(s).$$

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  — решения однородного уравнения  $-(pu'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = 0$ , удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0) = 0, \varphi_1(l) = 1; \quad \varphi_2(0) = 1, \varphi_2(l) = 0.$$

Обозначим

$$c = \frac{1}{p(0)(\varphi'_1(l) - 2\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0))}.$$

Тогда при  $x \leq s$  функция

$$K(x, s) = c \left( \left( \frac{\varphi_2(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} \right) - (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) \varphi_1(x) +$$



$$+c(\varphi_1(s) + \varphi_2(s))\varphi_2(x),$$

а при  $x \geq s$

$$K(x, s) = c \left( \left( \frac{\varphi_1(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} \right) + (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) \varphi_2(x) +$$

$$+c(\varphi_1(s) + \varphi_2(s))\varphi_1(x).$$

### Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильбеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Шабров С.А. О математических моделях второго порядка с производными по мере и периодическими и антипериодическими условиями / С.А. Шабров, Т.В. Гридяева, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2023. — № 1. — С. 94–101.

### О МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИЙ СИСТЕМЫ СТЕРЖНЕЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВДОЛЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА-ЗВЕЗДЫ, С ОГРАНИЧИТЕЛЕМ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ В УЗЛЕ<sup>1</sup>

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж, ВГУ, ВГПУ)

*margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru*

В данной работе исследуется граничная задача на геометрическом графе - звезде с нелинейным условием в узле. Мы предполагаем, что граф – звезда  $\Gamma$  ориентирован от узла, состоит из ребер - интервалов  $\gamma_i = (0, l_i)$ , занумерованных произвольным образом ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и внутренней вершины 0 (узла). Здесь и далее используется терминология из [1]. Через  $\partial\Gamma$  обозначим множество граничных вершин графа  $\Gamma$ . В нашем случае им соответствуют точки  $l_i$  на каждом из ребер. Введем множества  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ ;  $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ .

Скалярной функцией  $z(x)$ , заданной на графе  $\Gamma$ , называется отображение  $z : \Gamma \rightarrow R$ . Сужение  $z(x)$  на ребро  $\gamma_i$  будем обозначать как  $z_i(x)$ .

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008

© Зверева М.Б., Каменский М.И., 2024

Изучаемая математическая модель имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_i u_i'')(x) + \int_{+0}^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) + (p_i u_i'')( +0), i = 1, 2, \dots, n, \\ - \sum_{i=1}^n (p_i u_i'')( +0) \in N_{[-m, m]} u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = u(0), \\ u_i''(+0) = 0, \\ u_i(l_i) = 0 = u_i'(l_i - 0), i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $N_{[-m, m]} u(0)$  обозначает внешний нормальный конус в точке  $u(0) \in [-m, m]$ , определяемый как числовое множество

$$N_{[-m, m]} u(0) = \{ \xi : \xi(c - u(0)) \leq 0 \quad \forall c \in [-m, m] \}.$$

Модель (1) получена вариационными методами из задачи о минимизации функционала потенциальной энергии рассматриваемой физической системы.

Здесь функция  $u(x)$  описывает отклонение жестко закрепленной в граничных вершинах  $\Gamma$  системы стержней, шарнирно соединенных между собой в узле, от положения равновесия под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции  $F(x)$ ; функция  $p(x)$  характеризует свойства материалов стержней; функция  $Q(x)$  описывает упругую реакцию внешней среды. При этом предполагается, что в узле дополнительно установлен ограничитель, представленный отрезком  $[-m, m]$ , на перемещение стержневой системы.

Пусть

(i) функции  $p, F$  имеют ограниченную вариацию на каждом ребре, причем,  $\inf_{R(\Gamma)} p > 0$ ;

(ii) функция  $Q$  не убывает на каждом ребре;

(iii) функции  $p, F, Q$  непрерывны в точках из  $\partial\Gamma$ ;  $\sum_{i=1}^n (Q_i(0+0) - Q(0)) = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n (F_i(0+0) - F(0)) = 0$ .

Решение  $u(x)$  задачи (1) мы ищем в классе  $E$  абсолютно - непрерывных на  $\bar{\Gamma}$  функций, таких, что функции  $u'(x)$ ,  $(pu'')(x)$  являются абсолютно - непрерывными на  $R(\Gamma)$ ;  $(pu'')(x)$  имеют ограниченную вариацию на каждом ребре. Функции  $u_i(x)$  определяются в точках  $x = 0$  и  $x = l_i$  предельными значениями. Условие жесткого закрепления стержней в граничных вершинах означает, что

$u_i(l_i) = 0 = u'_i(l_i - 0)$ . Условие шарнирного соединения стержней в узле имеет вид  $u_1(+0) = u_2(+0) = \dots = u_n(+0) = u(0)$ ,  $u''_i(+0) = 0$ .

Заметим, что в каждой точке  $\xi_i$  разрыва хотя бы одной из функций  $p_i$ ,  $Q_i$ ,  $F_i$  имеет место равенство

$$\Delta(p_i u''_i)'(\xi_i) + u_i(\xi_i) \Delta Q_i(\xi_i) = \Delta F_i(\xi_i),$$

где символом  $\Delta$  обозначен скачок соответствующей функции в точке  $\xi_i$ .

**Теорема 1.** *При выполнении условий (i), (ii), (iii) решение задачи (1) существует и единственно.*

### Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ

**А.В. Звягин** (Воронеж, ВГУ)

*zvyagin.a@mail.ru*

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^2$ . В  $Q_T = [0, T] \times \Omega$ , где  $T \geq 0$  рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2 \operatorname{Div} [\nu(\theta) \mathcal{E}(v)] - \kappa(I_2(v)) \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \nabla p = f;$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0; \quad v(t, x) |_{t=0} = v_0; \quad v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = [2\nu(\theta) \mathcal{E}(v) + \kappa(I_2(v)) \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}] : \mathcal{E}(v) + g;$$

$$\theta |_{t=0} = \theta_0; \quad \theta |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0.$$

Здесь  $v(t, x)$ ,  $\theta(t, x)$  и  $p(t, x)$  — вектор-функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно,  $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — тензор скоростей деформации с компонентами  $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ,

функция  $I_2$  определяется равенством:  $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$ ,  $f$  — плотность внешних сил,  $g$  — источник внешнего тепла,  $\kappa > 0$  — время ретардации (запаздывания),  $\chi > 0$  — коэффициент теплопроводности,  $\nu$  — вязкость жидкости,  $0 < C_1 \leq \nu \leq C_2$ .

Время запаздывания среды  $\kappa$  задается непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой предполагаются следующие ограничения: а)  $|s\kappa'(s)| \leq C_3, s \in [0, \infty)$ ; б)  $-s\kappa'(s) \leq \kappa(s)$  при  $\kappa'(s) < 0$ .

Начально-краевая задача описывает движение жидкости типа Фойгта с нелинейным коэффициентом запаздывания и с вязкостью, зависящей от температуры (см. [1]–[5]).

**Теорема.** Пусть функция  $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $0 < C_1 \leq \nu_0 < \nu \leq C_2$ ,  $\kappa$  — удовлетворяет условиям а) и б),  $f \in L_2(0, T; V^*)$ ,  $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$ ,  $v_0 \in V$ ,  $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ . Тогда в случае  $n = 2$  при  $1 < p < 4/3$  и в случае  $n = 3$  для  $1 < p < 5/4$  существует слабое решение рассматриваемой начально-краевой задачи.

### Литература

1. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2016. — Н. 10. — С. 70–75.
2. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А.В. Звягин // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74, В. 3. — С. 189–190.
3. Звягин А.В. Альфа-модель Навье–Стокса с вязкостью, зависящей от температуры / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2020. — Т. 491, Н. 1. — С. 53–56.
4. Звягина А.В. Альфа-модель движения растворов полимеров / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2021. — Н. 5. — С. 33–42.
5. Звягин А.В. Слабая разрешимость нелинейно-вязкой модели Павловского / А.В. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2022. — Н. 6. — С. 87–93.

# О РАЗРЕШИМОСТИ В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ УСЛОВИЯ ОТДЕЛИМОСТИ ОТ НУЛЯ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ НА ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

В.Г. Звягин, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)

*mrmike@mail.ru*

Доклад посвящён исследованию сильной разрешимости начально-краевой задачи с условием прилипания на границе для системы уравнений, соответствующей модели движения неоднородной несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta v - \mu_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \int_0^t h(t, s) \Delta v(s) ds + \nabla p = \rho f; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x); \quad (3)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} p(x, t) dx = 0 \text{ при п.в. } t \in (0, T). \quad (4)$$

Здесь  $(x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T]$ , где  $\Omega$  — ограниченная область из  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ . Скалярная функция  $\rho$  — плотность жидкости, вектор-функция  $v$  — скорость движения жидкости,  $p$  — давление в жидкости,  $f$  — вектор плотности внешних сил,  $h$  — функция, отвечающая за память в жидкости,  $\mu_2 > 0$  — время запаздывания (ретардации) жидкости,  $\mu_1 > 0$  — вязкость жидкости.

Предполагается, что  $0 \leq \rho_0(x) \leq M$ ,  $x \in \Omega$ . В отличие от остальных работ, посвящённых исследованию неоднородных несжимаемых моделей движения жидкости, нами не предполагается отделимости от нуля начального условия на плотность жидкости.

Предполагается, что  $a \in V^2$ ,  $\rho_0 \in C^1(\Omega)^n$ ,  $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$ .

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00103).

© Звягин В.Г., Турбин М.В., 2024

**Определение 1.** *Сильным решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется тройка функций  $(\rho, v, p)$  где  $\rho \in C^1(Q_T)$ ,  $v \in W = \{u : u \in C([0, T], V^2), u' \in L_2(0, T; V^2)\}$ ,  $p \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ , которые удовлетворяют при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  уравнениям (1), (2) и начальным условиям (3).*

Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Существует единственное сильное решение начально-краевой задачи (1)–(4).*

Доказательство теоремы проводится при помощи аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики [1]. Для этого рассматривается задача с малым параметром, аппроксимирующая исходную. Разрешимость аппроксимационной задачи устанавливается при помощи теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке. После чего на основе априорных оценок решений, равномерных относительно параметра аппроксимации, удаётся перейти к пределу при стремлении параметра аппроксимации к нулю и тем самым установить разрешимость исходной задачи. Единственность решения устанавливается при помощи неравенства Гронуолла-Беллмана. Также доказательство опирается на результаты статьи О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова [2] и априорные оценки решений из работ [3, 4].

## Литература

1. Zvyagin V.G. Topological Approximation Approach to Study of Mathematical Problems of Hydrodynamics / V.G. Zvyagin // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — V. 201, № 6. — P. 830–858.
2. Ладыженская О.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 52–109.
3. Zvyagin V. Weak solvability of the initial-boundary value problem for inhomogeneous incompressible Kelvin-Voigt fluid motion model of arbitrary finite order / V. Zvyagin, M. Turbin // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2023. — V. 25, № 3. — Article number 63.
4. Звягин В.Г. Теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для неоднородной несжимаемой модели Кельвина–Фойгта без ограничения снизу на начальное значение плотности / В.Г. Звягин, М.В. Турбин // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, № 4. — С. 628–632.

# О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С УЧЕТОМ ПАМЯТИ СРЕДЫ<sup>1</sup>

**А.В. Звягин, М.И. Струков** (Воронеж, ВГУ)  
*zvyagin.a@mail.ru, mixail.strukov12@gmail.com*

В ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  с достаточно гладкой границей, на временном интервале  $[0, T]$ ,  $T > 0$  рассматривается задача (см. [1]–[5]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) - \\ - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left( \mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho \mathcal{E}(v) \right) - \\ - \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f, \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $v(x, t) = (v_1, \dots, v_n)$  — вектор-функция скорости движения частицы среды,  $p = p(x, t)$  — функция давления,  $f = f(x, t)$  — функция плотности внешних сил,  $z(\tau, t, x)$  — траектория частицы среды, указывающая в момент времени  $\tau$  расположение частицы жидкости, находящейся в момент времени  $t$  в точке  $x$ ,  $\mu_0, \mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  — некоторые константы.  $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$ ,

$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  — тензор скоростей деформаций.  $W(v) =$

$(W_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$ ,  $W_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  — тензор завихренности.

$W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) W(y) dy$ , где  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая функция с компактным носителем, такая что  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$  и  $\rho(x) = \rho(y)$  для  $x$  и  $y$  с одинаковыми евклидовыми нормами.

**Определение 1.** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v_0 \in V^1$ . Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция  $v \in$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 23-71-10026).  
© Звягин А.В., Струков М.И., 2024

$W_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T, V^1), v' \in L_2(0, T, V^1)\}$ , удовлетворяющая начальному условию  $v(0) = v_0$  и равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \\ & - \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx + \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi \, dx + 2\mu_1 \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx + \\ & + \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(v)(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$  и  $v_0 \in V^1$ . Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение  $v \in W_1$ .

### Литература

1. Звягин А.В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2011. Н. 2. — С. 103–105.
2. Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. — 2012. — Н. 2. — С. 118–121.
3. Звягин А.В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 453, Н. 6. — С. 599–602.
4. Zvyagin A.V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative / A.V. Zvyagin // Fixed point theory. — 2014. — V. 15, I. 2. — P. 623–634.
5. Zvyagin A.V. Attractors for model of polymer solutions motion / A.V. Zvyagin // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2018. — V. 38, N. 12. — P. 6305–6325.



# О ЕДИНСТВЕННОСТИ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГЛУ)  
*spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru*

Для динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , необходимо ввести обратную связь такую, чтобы спектр матрицы  $A + BK$  совпал с произвольно заданными значениями  $\mu_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Известно (Зубов-Уонэм), что соответствующая матрица обратной связи  $K$  существует в том и только том случае, когда система (1) является полностью управляемой.

Существуют численные методы построения такой матрицы, однако, в них речь идет о построении какой-либо одной матрицы связи.

Здесь предлагается для построения  $K$  использовать метод каскадной декомпозиции, разработанный в [1-5] для решения широкого круга задач. Метод основан на эквивалентном расщеплении рассматриваемой системы уравнений на подсистемы в подпространствах, что позволяет исследовать систему максимально детально.

В результате применения этого метода к задаче построения матрицы обратной связи выявляется все многообразие таких матриц для каждой конкретной задачи.

В том числе устанавливаются полные условия единственности матрицы обратной связи.

Приводится пример построения  $K$  для управления работой многокамерной нагревательной печи.

## Литература

1. Zubova S.P. Solution of inverse problems for linear dynamical systems by the cascade method / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Doklady Mathematics. 2012. V. 86, № 3. P. 846–849.
2. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, № 7, P. 1189–1202.

3. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, № 5, P. 774–791.

4. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, — 2021. — Vol. 44, № 15, P. 11998–12009.

5. Zubova S.P. Solution of a semi-boundary value problem for a degenerate partial differential equation / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, № 9, P. 1182–1194.

## ТЕОРЕМА О ПОКОМПОНЕНТНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Э.Дж. Ибадов, Г.Р. Гаджиева (Баку, АГПУ)

*e.c\_ibadov@yahoo.com, gunel-haciyeva-88@mail.ru*

Пусть  $L_p^2(G)$ ,  $p \geq 1$  — пространство двухкомпонентных вектор-функций  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  с нормой

$$\|f\|_{p,2} = \left\{ \int_G \left( |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}$$

В случае  $p = \infty$  норма в  $L_\infty^2(G)$  определяется равенством  $\|f\|_{\infty,2} = \sup_{x \in G} \text{vrai} |f(x)|$ . При  $f(x) \in L_p^2(G)$ ,  $g(x) \in L_q^2(G)$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,

определено скалярное произведение  $(f, g) = \int_G \sum_{j=1}^2 f_j(x) \overline{g_j(x)} dx$ .

Рассмотрим на конечном интервале  $G = (a, b)$  оператор типа Дирака

$$Dy = B \frac{dy}{dx} + P(x)y, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T,$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x))$  действительнзначная матрица-функция и причем  $p_i(x) \in L_1(G)$ ,  $i = 1, 2$ .

Следуя в работе [1], под собственной вектор-функцией оператора  $D$ , отвечающем действительному собственному значению  $\lambda$ , будем понимать любую тождественно не равную нулю действительнзначную вектор-функцию  $y(x)$ , которая абсолютно непрерывна замкнутом интервале  $\overline{G} = [a, b]$  и почти всюду в  $G$  удовлетворяет уравнению  $Dy = \lambda y$ .

Для произвольной  $f(x) \in L_p^2(G)$  ( $p \geq 1$ ) составим частичную сумму порядка  $\nu$  ортогонального разложения по системе  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ :

$$\sigma_\nu^j(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \nu} (f, u_n) u_n^j(x), \quad x \in G;$$

и сравним  $\sigma_\nu^j(x, f)$  с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье соответствующей  $j$ -й компоненты  $f_j(x)$  вектор-функции  $f(x)$

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} f_j(y) dy.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in L_p^2(G)$  функции  $r_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) принадлежат классу  $L_\alpha(G)$ , ( $\alpha \geq 1$ ) и удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{q} \right\}.$$

Тогда на любом компакте  $K \subset G$  справедливо равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\sigma_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j)\|_{L_S(K)} = 0,$$

т.е.  $j$ -я компонента разложения вектор-функции  $f(x) \in L_p^2(G)$  в ортогональный ряд по системе  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  равносходится в метрике  $L_s$ ,  $s \in [1, \infty]$  на любом компакте множества  $G = (a, b)$  с разложением соответствующей соответствующей  $j$ -й компоненты  $f_j(x)$  вектор-функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье.

### Литература

1. Ильин В.А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы / В.А.Ильин // — Дифференциал. уравнения, —1991. — т. 27, №11. — с. 1862–1878.

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО ТРЕМ РЕПЕРНЫМ ТОЧКАМ ПРИ ПОМОЩИ АЗИМУТАЛЬНО-УГЛОМЕСТНОГО МЕТОДА

М.С. Иванова, С.Н. Ушаков (Воронеж, ВГУ)

*ma123456789@inbox.ru*

В статьях [1, 2] был предложен детерминированный подход для задачи поиска координат и ориентации подвижного объекта при помощи азимутально-угломестного метода. При этом исходя из особенностей постановки предполагалось, что задача точно имеет решение. Однако с учетом погрешностей и использовании численных методов при нахождении координат, дополнительные условия проверки корректности входных данных позволят повысить устойчивость алгоритма, предложенного в выше упомянутых статьях.

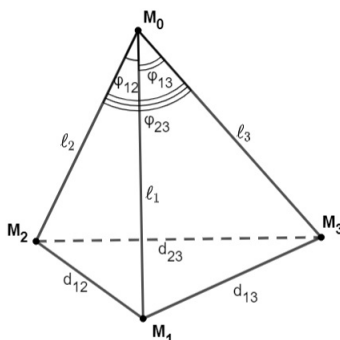


Рис. 1: Пирамида  $M_0M_1M_2M_3$

**Постановка задачи.** В декартовой системе координат располагаются три источника радиоизлучения-репера в точках  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  пространства с известными координатами. В результате азимутально-угломестного радиопеленгования каждого репера в системе координат подвижного объекта  $M_0$  определяются углы азимута и места. По значениям этих углов требуется определить координаты  $(x, y, z)$  точки  $M_0$  в исходной системе координат.

На рисунке 1 изображен тетраэдр  $M_0M_1M_2M_3$ . Символы  $\ell_i$  — длина  $i$ -го бокового ребра  $M_0M_i$  треугольной пирамиды  $M_0M_1M_2M_3$ ;  $d_{ij}$  — длина ребра  $M_iM_j$  основания  $M_1M_2M_3$  треугольной пирамиды  $M_0M_1M_2M_3$ ;  $\varphi_{ij} = \angle M_iM_0M_j$  — плоский угол при вершине  $M_0$ , где  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $i < j$ .

Задача поиска координат точки  $M_0$  сводится к нахождению ребер пирамиды  $\ell_i$  где  $i = 1, 2, 3$  по известным углам  $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{13}$  из системы

$$\begin{cases} \ell_1^2 + \ell_2^2 - 2\ell_1\ell_2 \cos \varphi_{12} = d_{12}^2, \\ \ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos \varphi_{23} = d_{23}^2, \\ \ell_1^2 + \ell_3^2 - 2\ell_1\ell_3 \cos \varphi_{13} = d_{13}^2. \end{cases} \quad (1)$$

С учётом физических особенностей задачи на величины искомых ребер и задаваемых углов накладываются ограничения

$$0 \leq \varphi_i \leq \pi, \ell_i \geq 0, i < j, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Сформулируем основной результат работы в виде двух теорем.

**Теорема 1.** Для заданной тройки чисел  $d_{13}, d_{12}, d_{23}$ , образующих треугольник, и трех углов  $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{13}$  для существования решения системы (1) с ограничениями (2) необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} \varphi_{12} \leq \pi/2, \varphi_{13} \leq \pi/2, \\ \min(\angle M_1M_2M_3, \varphi_{13} + \varphi_{12}) \leq \varphi_{23}, \\ \varphi_{23} \leq \max(\varphi_{13} + \varphi_{12}, \angle M_1M_2M_3). \end{cases}$$

**Теорема 2.** Для заданной тройки чисел  $d_{13}, d_{12}, d_{23}$ , образующих треугольник, и трех углов  $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{13}$  для существования решения системы (1) с ограничениями (2) необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} \varphi_{12} \geq \pi/2, \varphi_{13} \geq \pi/2, \\ \min(\angle M_1M_2M_3, 2\pi - (\varphi_{13} + \varphi_{12})) \leq \varphi_{23}, \\ \varphi_{23} \leq \max(2\pi - (\varphi_{13} + \varphi_{12}), \angle M_1M_2M_3). \end{cases}$$

## Литература

1. Виноградов А.Д. Детерминированный подход к решению задачи определения координат и угловой ориентации бортовой пеленгаторной антенны по результатам радиопеленгования радиоориентиров. / А.Д. Виноградов, Л.А. Минин, Е.Ю. Морозов, С.Н. Ушаков // Информационно-измерительные и управляющие системы. — Москва, 2019. — Т. 17, №2. — 5-23 с

2. Виноградов А.Д. Анализ детерминированного подхода к определению координат и угловой ориентации бортовых пеленгаторных

антенн на основе экспериментальных данных. / А.Д. Виноградов, Л.А. Минин, Е.Ю. Морозов, С.Н. Ушаков// Сборник трудов XXVI Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — 2020 — том 4 —150-155 с

## **АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ<sup>1</sup>**

**А.В. Калинин, А.А. Тюхтина**

(Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского)

*tyukhtina@iee.unn.ru*

В зависимости от характерных значений физических коэффициентов и временных и пространственных масштабов, при исследовании электромагнитных явлений в атмосфере Земли могут использоваться квазистационарное магнитное [2,3], квазистационарное электрическое [4,5] и квазистационарное электромагнитное приближение, которое в ряде работ называется приближением Дарвина [6,7]. Вопросы обоснования квазистационарного магнитного приближения обсуждаются в работах [2,3,8]. В работах [6,9] построены и исследованы асимптотические разложения, обосновывающие применимость квазистационарного электромагнитного приближения в случае однородной непроводящей среды. Проблема построения иерархии моделей для квазистационарных приближений системы уравнений Максвелла обсуждалась, в частности, в [7,10]. В работах [11-13] были получены результаты о математической корректности постановок и приведены оценки, обосновывающие применимость различных квазистационарных приближений для эволюционных уравнений в зависимости от безразмерных параметров, характеризующих проводимость и масштабы неоднородности среды.

В настоящей работе рассматриваются постановки краевых задач для периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в различных приближениях в неоднородных средах. Получены и обоснованы асимптотические разложения периодических решений квазистационарных задач в неоднородных средах в ряды по безразмерному параметру, характеризующему частоту внешних воздействий. Проведено сравнение полученных разложений для различных приближений для системы уравнений Максвелла в рамках иерархии

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, <https://rscf.ru/project/23-21-00440>.

© Калинин А.В., Тюхтина А.А., 2024

квазистационарных задач. Рассмотрены вопросы сходимости полученных асимптотических рядов.

### Литература

1. Толмачев В.В. Термодинамика и электродинамика сплошной среды / В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов. — М. : Изд-во МГУ, 1988.
2. Галанин М.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах / М.П. Галанин, Ю.П. Попов. — М. : Наука, Физматлит, 1995.
3. Alonso Rodriguez A. Eddy current approximation of Maxwell equations / A. Alonso Rodriguez, A. Valli. — Springer-Verlag Italia, 2010.
4. Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи / Е.А. Мареев // Успехи физических наук. — 2010. — Т. 180, № 5. — С. 527–534.
5. Kalinin A.V. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit / A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — V. 450, № 1. — P. 112–136.
6. Degond P. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations / P. Degond, P.-A. Raviart // Forum Math. — 1992. — V. 4. — P. 13–44.
7. Kruger S.E. The three quasistatic limits of the Maxwell equations / S.E. Kruger // arXiv:1909.11264. — 2019.
8. Ammari H. A justification of eddy currents model for the Maxwell equations / H. Ammari, A. Buffa, J.-C. Nedelec // SIAM J. Appl. Math. — 2000. — V. 60, № 5. — P. 1805–023.
9. Raviart P.-A. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations / P.-A. Raviart, E. Sonnendruker // Numer. Math. — 1996. — V. 73. — P. 329–372.
10. Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective / J. Larsson // Am. J. Phys. — 2007. — V. 75, № 3. — P. 230–239.
11. Калинин А.В. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // ЖБМ и МФ. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 121–134.
12. Kalinin A.V. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina // MMST 2020, Revised Selected Papers. — Springer, 2021. — P. 77–92.
13. Калинин А.В. Некоторые математические задачи атмосферного электричества / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Итоги науки и техники. Совр. мат. прил. — 2022. — Т. 207. — С. 48–60.

# К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ<sup>1</sup>

**М.И. Каменский, П.С. Корнева** (Воронеж, ВГУ, ВГПУ)  
*mikhailkamenski@mail.ru*

В работе изучаются системы, описываемые дифференциальными включениями следующего вида

$$x'(t) \in F(t, x(t), y(t)) \quad \text{для п.в. } t, \quad (1)$$

где многозначный оператор  $F : R \times H \times R^n \rightarrow K_v(H)$ . Здесь  $y$  является обратной связью, определяемой гистерезисной нелинейностью в виде sweeping процесса

$$y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + f(t, y(t), x(t), \quad (2)$$

где  $C(t)$  — выпуклое ограниченное множество, зависящее от  $t$ , а  $f : R \times H \times R^n \rightarrow R^n$ . Предполагается, что  $C$ ,  $F$  и  $f$  —  $T$  — периодичны по переменной  $t$ .

Методами теории направляющих функций (см. [1]) найдены условия, при выполнении которых система (1), (2) имеет  $T$  — периодическое решение.

## Литература

1. Obukhovskii V. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev. — Lecture Notes in Mathematics, 2013. — 177 p.

# ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

**Д.А. Каплан** (Воронеж, ВГУ)  
*kaplandanya@mail.ru*

В некоторых инженерных исследованиях [1] возникает необходимость для заданной  $2\pi$ -периодической функции  $h(t) \in C^1[0, 2\pi]$  и постоянной  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , найти функцию  $f(t)$ , интеграл от которой на интервале  $(t; t + \varphi)$ ,  $t \in [0; \infty)$  будет описывать функцию  $h(t)$ . Такая задача будет иметь вид следующего интегрального уравнения:

$$\int_t^{t+\varphi} f(\tau) d\tau = h(t). \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008

© Каменский М.И., Корнева П.С. , 2024

© Каплан Д.А., 2024



Это уравнение является частным случаем интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с ядром [2]

$$K(t, \tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [t; t + \varphi] \\ 0, & \tau \notin [t; t + \varphi]. \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение (1) по  $t$ :

$$f(t + \varphi) - f(t) = h'(t). \quad (2)$$

Разложив правую часть уравнения (2) и неизвестную функцию  $f(t)$  в ряд Фурье

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot \cos kt + \beta_k \cdot \sin kt), \\ f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \cdot \cos kt + \eta_k \cdot \sin kt), \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} ((\xi_k(\cos k\varphi - 1) + \eta_k \sin k\varphi) \cdot \cos kt + \\ &(-\xi_k \sin k\varphi + \eta_k(\cos k\varphi - 1)) \cdot \sin kt) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot \cos kt + \beta_k \cdot \sin kt). \end{aligned}$$

Для  $k = \overline{1, \infty}$  искомые коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  находятся путем решения системы:

$$\begin{cases} \alpha_k(\cos k\varphi - 1) + \beta_k \sin k\varphi = \hat{\alpha}_k \\ -\alpha_k \sin k\varphi + \beta_k(\cos k\varphi - 1) = \hat{\beta}_k. \end{cases}$$

Определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos k\varphi & \sin k\varphi \\ -\sin k\varphi & \cos k\varphi - 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 \cos k\varphi.$$

При  $k\varphi = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  определитель обращается в ноль, что возможно при соизмеримых значениях  $\varphi$  и  $2\pi$ . В таком случае система не имеет решений или решение не единственно, что определяется из вида правой части уравнения (2).

## Литература

1. Беляев Е.Н. Математическое моделирование рабочего процесса жидкостных ракетных двигателей / Е.Н. Беляев, В.К. Чванов, В.В. Черваков. // М. : МАИ, 1999. — 228 с.
2. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров // М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.

## О СХОДИМОСТИ БИЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. Катрахова, В.С. Купцов (ВГТУ, Воронеж)

Vckuptsov@rambler.ru

Рассмотрим краевую задачу вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Pu = f(x, t) \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi; u|_{\Gamma \times [0, T]} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma^0 \times [0, T]} = 0, \quad (2)$$

где  $\Phi(x), \psi(x)$  – данные функции,  $f(x, t)$  – функция заданная в цилиндре  $Q_\Gamma^+$ :  $x \in \Omega^+$  – произвольная область пространства  $R_+^{n+1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, y); y > 0\}$ ; ;  $Q_\Gamma^+ = \Omega^+ \times [0, T]$

$$P(D_{x'}; B_y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c; B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y}, k > 0, c \leq 0 \quad (3)$$

Предполагается, что  $P(D_{x'}; B_y)$  – оператор  $B$ - эллиптического типа [1].

Пусть  $\Omega_1^+$  произвольная подобласть области  $\Omega^+$ , прилегающая к гиперплоскости  $\Gamma^0(y = 0)$ . Авторами данной статьи доказано, что следующие билинейные ряды, составленные из первых и вторых частных производных собственных функций краевой задачи (1)–(2) сходятся равномерно в произвольной строго внутренней

замкнутой подобласти  $\Omega_1^+$ , прилегающей к гиперплоскости  $y=0$ ,  $\overline{\Omega_1^+} \subset \Omega^+$ .

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} \left( \frac{\partial v_{\rho}(x)}{\partial x_i} \right)^2 \lambda_{\rho}^{-[(n+k+1)/2]-2}, \sum_{\rho=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 v_{\rho}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \lambda_{\rho}^{-[(n+k+1)/2]-3}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} (B_y v_{\rho}(x))^2 \lambda_{\rho}^{-[(n+k+1)/2]-3} \quad (4)$$

Сначала доказывается равномерная сходимость второго ряда из формул (4) при  $y=0$  в случае, когда  $\frac{n+k+1}{2}$  - нечетное число. Используя результаты работ авторов [2] и [3], где рассматривались оценки на функцию Грина  $F(x, \xi)$  соответствующей краевой задачи, получено:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( F_{\frac{1}{2}([ \frac{n+k+1}{2} ]-3)}(x, \xi) \right) = o(r_{x, \xi}^{[ \frac{n+k+1}{2} ]-n-k-1-\delta}) \quad (5)$$

где  $\delta$  - любое положительное число. При этом функция, стоящая в левой части формулы (5) при  $(i, j=1, 2, \dots, n)$  непрерывна по совокупности переменных  $x \in \Omega_1^+$ ,  $\xi \in \overline{\Omega_1^+}$ ,  $x \neq \xi$ .

Оценка (5) доказывает, что функция

$$F(x) = \int_{\Omega^+} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( F_{\frac{1}{2}([ \frac{n+k+1}{2} ]-3)}(x, \xi) \right)^2 \xi^k d\xi \quad (6)$$

равномерно непрерывна в замкнутой области  $\overline{\Omega_1^+}$ , и согласно равенству Парсеваля имеем:

$$F(x) = \sum_{\rho=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 v_{\rho}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \lambda_{\rho}^{-[(n+k+1)/2]-3} \quad (7)$$

Из ограниченности и равномерной непрерывности функции (6), непрерывности вторых производных собственных функций  $v_{\rho}(x)$  и теоремы Дини [4], следует равномерная сходимость второго ряда из формулы (4) в области  $\overline{\Omega_1^+}$ . Случай, когда  $\frac{n+k+1}{2}$  - четное число редуцируется к предыдущему случаю. Аналогично устанавливается сходимость первого и третьего рядов из формулы (4) в той же области.

## Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. // Москва: Наука, — 1997
2. Катрахова А.А. О разрешимости некоторых сингулярных краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, содержащих оператор Бесселя / А.А. Катрахова, А.Ю. Сазонов, В.С. Купцов // Сб.трудов VII Международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Изд. Научная книга. — 2014
3. Катрахова А.А. Об оценке функции Грина одной краевой задачи для сингулярного уравнения содержащего оператор Бесселя. / А.А. Катрахова, В.С. Купцов // Материалы Международной конференции. «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения -XXXIII». Изд. дом ВГУ. — Воронеж. — 2022
4. Катрахова А.А. О единственности решения задачи Дирихле для В - эллиптического уравнения второго порядка (статья) / А.А. Катрахова, В.С. Купцов // «Современные методы теории краевых задач». Материалы Международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа. «Понтрягинские чтения». — Воронеж — 2023

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С БЫСТРО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЕГО СПЕКТРА

А.В. Качкина (Москва, МГУ)

*alisa-kachkina@mail.ru*

В гильбертовом пространстве  $L_2[0, +\infty)$  рассматривается оператор Штурма–Лиувилля  $\mathbb{L}_q$ , порождаемый дифференциальным выражением  $l_q(y) = -y''(x) + q(x)y(x)$  и граничным условием в нуле  $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$ , где  $q(x)$  — непрерывная на  $[0, +\infty)$  действительнозначная функция. Область определения оператора  $\mathbb{L}_q$ :  $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0, +\infty) : y, y' \text{ абсолютно непрерывны на любом } [a, b] \subset [0, +\infty), -y'' + q(x)y \in L_2[0, +\infty) \text{ и } y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0\}$ .

Если потенциал  $q(x) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , то оператор  $\mathbb{L}_q$  имеет чисто дискретный спектр  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$  (Э. Ч. Титч-

марш [1], А. М. Молчанов [2]). Запишем собственные числа оператора  $\mathbb{L}_q$  в порядке возрастания. В данной работе получены асимптотики собственных значений оператора  $\mathbb{L}_q$  для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

Хорошо изучено распределение спектра (Э. Ч. Титчмарш [1]) в случае степенного роста потенциала  $q$ . Асимптотика собственных значений оператора  $\mathbb{L}_q$  в случае  $\alpha = 0$  для потенциалов вида  $q(x) = x^k + V(x)$ ,  $k > 0$ , получена в работах Х. Х. Муртазина и Т. Г. Амангильдина [3] для  $V(x) \in C_0^2[0, +\infty)$  и Х. К. Ишкина [4] для  $V(x) \in C_0^1[0, +\infty)$ , где функции из класса  $C_0^m[0, +\infty)$  — финитные функции класса  $C^m[0, +\infty)$ . Если потенциал  $q$  растет на бесконечности быстрее любой степенной функции, то собственные значения оператора  $\mathbb{L}_q$  не имеют степенную асимптотику. А. И. Козко [5] установил соответствующую асимптотику для потенциала  $q(x) = e^x$ .

Обозначим через  $\mathfrak{Q}$  класс функций  $q \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ , удовлетворяющих условиям:  $q''(x) \geq 0$ ,  $x \geq x_0$ , и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty$ .

**Лемма. 1.** *Произвольная функция  $q \in \mathfrak{Q}$  растет на бесконечности быстрее любой степенной функции.*

*2. Пусть функция  $p$  — обратная к функции  $q$ . Тогда функция  $p$  растет медленнее любой степенной функции.*

Для  $\beta > 1$  и  $\mu > 0$  обозначим через  $\mathfrak{Q}_{\beta, \mu}$  класс функций  $q \in \mathfrak{Q}$  таких, что  $\ln q(x) = \mu \ln^\beta x + o(\ln^{\beta-1} x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$  и хотя бы при одном значении  $1 < \gamma < 4/3$  выполнено условие  $q''(x) \leq (q'(x))^\gamma$ ,  $x \geq x_0$ .

**Теорема.** *Пусть  $q \in \mathfrak{Q}_{\beta, \mu}$ ,  $\beta \in (7/6, 6/5]$ . Тогда для спектра оператора  $\mathbb{L}_q$  справедливо*

$$\begin{aligned} \lambda_n \sim c_n \exp \bigg( & -2\delta \left( \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta} \ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2 \frac{3-\beta}{2\beta^2} \ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - \right. \\ & - (2\delta)^3 \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3} \ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\delta)^4 \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4} \ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n - \\ & \left. - (2\delta)^5 \frac{108-180\beta+105\beta^2-25\beta^3+2\beta^4}{10\beta^5} \ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n \right) \bigg), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Данная теорема позволяет получить асимптотики для значений параметра  $\beta \in (7/6, 2]$ .

### Литература

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э. Ч. Титчмарш — т.1, Москва, ИЛ, 1960.

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
2. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка / А. М. Молчанов // Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.
3. Муртазин Х.Х. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля / Х.Х. Муртазин, Т.Г. Амангильдин // Математический сборник, 1979, т. 110, №1, 135–149.
4. Ишкин Х.К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка / Х.К. Ишкин // Дифференц. уравнения, 31:10 (1995), 1658–1668.
5. Козко А.И. Асимптотика спектра дифференциального оператора  $-y'' + q(x)y$  с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом / А.И. Козко // Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.
6. Козко А.И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями / А.И. Козко, А.С. Печенцов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ

**А.А. Клячин, В.А. Клячин** (Волгоград, ВолГУ)

*klyachin-aa@yandex.ru, aleksey.klyachin@volsu.ru, klchnv@mail.ru*

В работе предложен способ формирования набора признаков на изображениях, основанный на интегральных преобразованиях и показано использование его при решении задачи обнаружения малогабаритных, а значит слабо заметных, транспортных средств на видео снимках. В практической части работы были использованы программные средства библиотек **OpenCV**, **Keras** и **Scikit-learn**.

В настоящей работе мы предлагаем собственный подход к решению поставленной задачи. Именно, определяем набор специальных признаков на изображении, вычисление которых основано на ряде интегральных операторов, а также разрабатываем метод обработки полученных признаков с помощью некоторых преобразований меток обучающего набора изображений (улучшенный метод наименьших квадратов). В частности, мы применяем идеи, опирающиеся на три интегральных преобразования: преобразование Радона [1], функции Стеклова [2] и дискретное преобразование Фурье [3].

Проверка разработанных методов осуществлялась на решении задачи определения наличия на фото снимке велосипедиста. Был сформирован набор, состоящий из 1709 картинок, которые содержат изображение велосипедиста. Помимо этого, на основе различных фотографий городских улиц, зданий, парков и т. д. были сгенерированы фрагменты (в количестве 1845 штук) этих снимков для обучающего набора снимков, не содержащих изображение велосипедиста. В итоге у нас получился набор из 3554 изображений ( $N = 3554$ ). Каждое изображение путем масштабирования приводилось к размеру  $100 \times 100$ . Общее количество признаков оказалось равным  $n = 853$ .

Используя различные модели классификации на этих данных были получены следующие результаты

Метод	Процент правильного определения класса на тестовой выборке	Время выполнения предсказания, на одном изображении, сек.
KNeighborsClassifier	80.59	0.3887
Naive_bayes.GaussianNB	78.76	0.1207
DecisionTreeClassifier	90.48	0.1212
LinearDiscriminantAnalysis	86.82	0.1221
LinearSVC	86.49	0.1211
RandomForestClassifier	94.93	0.1273
Улучшенный МНК	89.0	0.1001

Сравнение разработанного подхода со сверточными нейронными сетями позволяет сказать, что он им не сильно уступает по такому показателю как процент правильных предсказаний. При этом, по времени выполнения предсказания представленный в данной работе метод работает в 3-4 раза быстрее в зависимости от используемой модели.

### Литература

1. Deans S.R. The Radon Transform and Some of its Applications / S.R. Deans, S. Roderick. — New York: John Wiley & Sons, 1983. — 289 p.
2. Жук В.В. Аппроксимация функций и численное интегрирование / В.В. Жук, В.Ф. Кузютин. — СПб: Изд-во СПбГУ, 1995.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. — 2-е. — СПб.: Питер, 2006. — С. 751.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов,

В.Г. Чирский (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)  
prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

В модели Рамсея-Касса-Купманса (см. [1] – [7]) определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции  $K(t)$  — капитал в момент времени  $t$  и  $C(t)$  — потребление в момент времени  $t$ :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант  $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$ , характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

В [1] мы обнаружили, что система дифференциальных уравнений (1) допускает решение в квадратурах, если константы  $x_1, x_2, \alpha$  связаны соотношением  $\alpha x_1 = x_2$ . Там же мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (1) с соотношением  $\alpha x_1 = x_2$ , а именно

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) - bC - x_3K, \\ \dot{C} = \alpha\theta^{-1} \left( \frac{f(K)}{K} \right) C - x_2C, \end{cases} \quad \text{где } x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad b > 0, \quad (2)$$

$$K(0) = K_0, \quad C(0) = C_0. \quad (3)$$

Мы там же предложили в случае  $\xi = \alpha x_1 - x_2 > 0$  заменить систему уравнений (1) системой уравнений (2), отличающейся от (1) множителем  $b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}$  перед  $C$  в правой части первого уравнения, а также заменой  $x_1$  на  $\frac{x_2}{\alpha}$  в том же уравнении. Мы указали участки монотонности функций  $(u, v)$  — решения задачи Коши (1), (3). Нашли формулы для  $(u, v)$ . И получили следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $(u, v)$  — решение задачи Коши (1), (3) и  $(x, y)$  — решение задачи Коши (2), (3). Тогда справедливо

$$\left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq M_2 \cdot \left( \frac{t^2}{2} + \frac{2}{M_1^2} \left( e^{M_1 t} - 1 - M_1 t - \frac{(M_1 t)^2}{2} \right) \right).$$



*Кроме того, нами выписан явный вид  $M_1$ ,  $M_2$ , которые зависят от  $K_0$ ,  $C_0$ ,  $\alpha$ ,  $\xi$ .*

### Литература

1. Козко А.И. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 4. — С. 115–125.

2. Козко А.И. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея-Касса-Купманса с логарифмической функцией полезности / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, № 4. — С. 197–207.

3. Козко А.И. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 182. — С. 39–44.

4. Козко А.И. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Классическая и современная геометрия. Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. Под ред. А. В. Царева. М. : Изд-во: Моск. пед. гос. ун-та. — 2019. — С. 87–88.

5. Козко А.И. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, № 4. — С. 188–196.

6. Козко А.И. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса в случае стационарности функции сбережения / А.И. Козко, Л.М. Лузина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 1. — С. 118–129.

7. Барро Р.Дж. Экономический рост / Р.Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.

# СИСТЕМЫ ТИПА М.М.ЛАВРЕНТЬЕВА И ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД<sup>1</sup>

М.Ю. Кокурин (Йошкар-Ола, МарГУ)  
*kokurinm@yandex.ru*

Рассматривается задача динамики вязкоупругой среды

$$U_{tt}(x, t) - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} U(x, t) - \mu\Delta U(x, t) + \sigma(x)U_t(x, t) + \\ + \int_{-\infty}^t h(x, t - \tau)U_{tt}(x, \tau)d\tau = f(x - z)g(t); \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}.$$

Здесь  $U(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t), U_3(x, t))$  — вектор перемещений точки  $x$ ;  $\sigma(x)$ ,  $h(x, t)$  — диагональные матрицы,

$$\sigma(x) = \operatorname{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)), \quad h(x, t) = \operatorname{diag}(h_1(x, t), h_2(x, t), h_3(x, t)).$$

Матрица  $\sigma(x)$  характеризует внутреннее поглощение энергии в среде, матричное ядро  $h(x, t)$  описывает наследственные свойства среды. Распределение  $f$  с носителем в точке  $x = 0$  описывает зондирующий источник волнового поля в среде. Плотность среды  $\rho(x) = \rho_0 + \varepsilon(x)$  непрерывна в  $\mathbb{R}^3$  и равна постоянной  $\rho_0 > 0$  вне ограниченной области неоднородности  $D \subset \mathbb{R}^3$ ;  $\sigma(x) = 0$ ,  $h(x, t) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ ,  $t \geq 0$ . Исследуется обратная задача реконструкции параметров  $\varepsilon(x)$ ,  $\sigma_j(x)$ ,  $h_j(x, t)$ ,  $1 \leq j \leq 3$  при  $x \in D$  по результатам наблюдения решения  $U(x, t) = U(x, t; z)$  при  $t > 0$  и  $x \in X$ ,  $z \in Z$ , где  $X$ ,  $Z$  — многообразия точечных детекторов волнового поля и источников зондирующих волн соответственно,  $(X \cup Z) \cap \bar{D} = \emptyset$ . Нас интересует пространственно непереопределенная постановка, в которой суммарная размерность многообразий  $X$  и  $Z$  равна трем, т.е. размерности носителя  $D$  подлежащих определению функций. Переход в частотную область с последующим предельным переходом при  $\omega \rightarrow 0$  позволяет свести обратную задачу к цепочке систем линейных интегральных уравнений специального вида. Анализ однозначной разрешимости получаемых уравнений доставляет частичное решение поставленной обратной задачи. Описанный прием ранее использовался при изучении аналогичных коэффициентных обратных задач для скалярных волновых полей [1], [2].

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00031).  
© Кокурин М.Ю., 2024

## Литература

1. Козлов А.И. Об интегральных уравнениях типа М.М. Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений / А.И.Козлов, М.Ю.Кокурин // ЖВМ и МФ. — 2021. — Т.61, №9. — С.1492–1507.

2. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М.Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования. Изв. РАН. Сер. Матем. — 2022. — Т.86, №6. — С.101–122.

## НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ И АНАЛИЗУ КОМПАРТМЕНТАЛЬНЫХ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ<sup>1</sup>

М.М. Кокурин, А.В. Гаврилова,  
Абду Рауф Ч.М. (Йошкар-Ола, МарГУ)  
*kokurin@nextmail.ru*

Рассматривается SEIR-подобная эпидемиологическая модель

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -(a_e e(t) + a_i i(t))s(t) \\ \dot{e}(t) = (a_e e(t) + a_i i(t))s(t) - (\varkappa + \rho)e(t) \\ \dot{i}(t) = \varkappa e(t) - (\beta + \mu)i(t) \\ \dot{r}(t) = \rho e(t) + \beta i(t) \\ \dot{p}(t) = \mu i(t), \end{cases} \quad (1)$$

а также её модификации, учитывающие угасание иммунитета к инфекции, вакцинацию, систематическое занижение эпидемиологической статистики и задержки между фактом заражения, выздоровления или смерти и отражением этого факта в эпидемиологической статистике. В системе (1),  $s(t)$  есть относительная численность людей, восприимчивых к инфекции,  $e(t)$  есть относительная численность бессимптомных заражённых,  $i(t)$  — относительная численность больных с симптомами,  $r(t)$  — относительная численность выздоровевших,  $p(t)$  — относительная численность погибших. В рассматриваемых нами модификациях модели (1) вводятся и другие группы. Под относительной численностью понимается отношение численности группы к общей численности популяции рассматриваемого ареала.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-10070).  
© Кокурин М.М., Гаврилова А.В., Абду Рауф Ч.М., 2024

Предложены и численно протестированы подходы на основе итеративно регуляризованного метода Гаусса-Ньютона (а также его модификации, позволяющей находить квазирешения нелинейных операторных уравнений) к решению задачи восстановления неизвестных коэффициентов рассматриваемых моделей по данным эпидемиологической статистики. В свою очередь, решение этой задачи позволяет прогнозировать распространение эпидемии, а также оценивать степень её опасности. В численных экспериментах использовались данные по распространению эпидемии COVID-19 в России и ряде зарубежных стран в 2021 году. Результаты экспериментов показывают, в частности, что показатель опасности эпидемии, равный вероятности смертельного заражения в единицу времени для каждого восприимчивого в данной стране, в среднем тем выше, чем ниже объём проведённой в этой стране вакцинации от COVID-19.

Рассматривается также модификация модели (1), представляющая собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -(a_e e(t) + a_i i(t))s(t) \\ \dot{e}(t) = (a_e e(t) + a_i i(t))s(t) - (a_e e(t - \tau) + a_i i(t - \tau))s(t - \tau) \\ \dot{i}(t) = (a_e e(t - \tau) + a_i i(t - \tau))s(t - \tau) - (\beta + \mu)i(t) \\ \dot{r}(t) = \beta i(t) \\ \dot{p}(t) = \mu i(t). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  — продолжительность инкубационного периода болезни. Предполагается, что функции  $s(t)$ ,  $e(t)$ ,  $i(t)$ ,  $r(t)$  и  $p(t)$  в сумме дают единицу и связаны с наблюдаемыми величинами  $\tilde{i}_{\text{накоп}}(t)$ ,  $\tilde{r}(t)$ ,  $\tilde{p}(t)$ , значения которых приведены в эпидемиологической статистике, равенствами

$$i(t) + r(t) + p(t) = \tilde{i}_{\text{накоп}}(t), \quad r(t) = \lambda \tilde{r}(t + \tau_r), \quad p(t) = \lambda \tilde{p}(t + \tau_p). \quad (3)$$

Коэффициент занижения статистики  $\lambda$  может быть определён по данным об избыточной смертности в рассматриваемом ареале. Предложен и обоснован подход к восстановлению также всех остальных неизвестных коэффициентов модели (2)-(3).

### Литература

1. Kokurin M.M. Iteratively regularized Gauss-Newton type methods for approximating quasi-solutions of irregular nonlinear operator equations in Hilbert space with an application to COVID-19 epidemic dynamics / M.M. Kokurin, M.Yu. Kokurin, A.V. Semenova //

# ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧА ЯМР-СПЕКТРОСКОПИИ<sup>1</sup>

М.М. Кокурин, С.К. Паймеров (Йошкар-Ола, МарГУ)  
*kokurin@nextmail.ru*

Рассматривается задача нахождения квазирешений нелинейного операторного уравнения

$$F(x) = f \quad (1)$$

с оператором  $F : H_1 \rightarrow H_2$  в гильбертовых пространствах  $H_1, H_2$  и приближённо известным элементом  $f \in H_2$ . Квазирешением уравнения (1) называется элемент  $x^* \in H_1$ , доставляющий минимум функционалу  $\|F(x) - f\|^2$ . Пусть априори известна принадлежность  $x^*$  выпуклому замкнутому множеству  $Q \subset H_1$  и в окрестности  $x^*$  производная Фреше  $F'$  удовлетворяет условию Липшица.

Ранее нами был предложен класс итеративно регуляризованных методов типа Гаусса-Ньютона для нахождения  $x^*$  [1]:

$$x_{n+1} = \mathcal{P}_Q(\overline{x_{n+1}}), \quad \overline{x_{n+1}} = \xi - \Theta([F'^*(x_n)F'(x_n)]^2, \alpha_n) \cdot [F'^*(x_n)F'(x_n)]F'^*(x_n)[F(x_n) - f - F'(x_n)(x_n - \xi)]. \quad (2)$$

Здесь  $\xi \in H_1$  — априори выбираемое приближение к  $x^*$ ,  $\mathcal{P}_Q$  — оператор метрического проектирования на множество  $Q$ . В качестве последовательности  $\{\alpha_n\}$  может быть взята убывающая геометрическая прогрессия. Оператор  $\Theta([F'^*(x_n)F'(x_n)]^2, \alpha_n)$  понимается в смысле исчисления самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. На функцию  $\Theta$  наложен ряд условий, которым, в частности, удовлетворяет функция  $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$ .

Наряду с методом (2), предлагается подход к нахождению квазирешений уравнения (1), основанный на применении итеративно регуляризованного метода Ньютона-Канторовича [2] к операторному уравнению  $\mathcal{F}(x) = 0_{H_1}$ , где  $\mathcal{F} : H_1 \rightarrow H_1$ ,  $\mathcal{F}(x) = F'^*(x)(F(x) - f)$ , с проектированием на множество  $Q$  после каждого шага:

$$x_{n+1} = \mathcal{P}_Q(\overline{x_{n+1}}), \quad \overline{x_{n+1}} = \xi - \Theta(\mathcal{F}'(x_n), \alpha_n)(\mathcal{F}(x_n) - \mathcal{F}'(x_n)(x_n - \xi)). \quad (3)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-10070).  
© Кокурин М.М., Паймеров С.К., 2024

Условие секториальности оператора  $\mathcal{F}$ , требуемое для возможности применения итеративно регуляризованного метода Ньютона-Канторовича, при этом выполнено автоматически. При подходящем условии истокопредставимости и правиле останова итераций метод (3), как и метод (2), допускает оценку точности, степенную относительно уровня погрешности входных данных  $f$ .

Методы (2) и (3) были применены к задаче анализа смесей методом ЯМР-спектроскопии [3]. Эта задача приводится к виду

$$\sum_{i=1}^m p_i e^{-D_i h} = A(h), \quad h \in [a, b].$$

Здесь  $m$  — количество компонентов смеси, предполагаемое известным. Значения функции  $A(h)$  измеряются в ЯМР-эксперименте в точках  $h_1, \dots, h_M \in [a, b]$ . Требуется определить величины  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , пропорциональные коэффициентам самодиффузии молекул каждого компонента смеси, а также веса  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , удовлетворяющие соотношениям

$$p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad p_1 + \dots + p_m = 1.$$

Данная задача была представлена в виде операторного уравнения

$$F(x) = f, \quad F: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^M$$

с априорной информацией  $x \in Q$ , где  $Q$  есть прямое произведение двух симплексов. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие применимость методов (2) и (3) для решения этой задачи.

### Литература

1. Kokurin M.M. Iteratively regularized Gauss-Newton type methods for approximating quasi-solutions of irregular nonlinear operator equations in Hilbert space with an application to COVID-19 epidemic dynamics / M.M. Kokurin, M.Yu. Kokurin, A.V. Semenova // Applied Mathematics and Computation. — 2022. — V. 431. — doi: 10.1016/j.amc.2022.127312
2. Бакушинский А.Б. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами / А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 192 с.
3. Loskutov V.V. A novel approach to interpretation of the time-dependence self-diffusion coefficient: water-mouse RBCs suspension

## НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ЗАДАЧЕ ЭЛАСТОГРАФИИ СТЕНКИ АРТЕРИИ<sup>1</sup>

М.М. Кокурин, Д.В. Пасынков,  
Д.А. Пахматов (Йошкар-Ола, МарГУ)  
*kokurin@nextmail.ru*

Рассматривается задача идентификации параметров стенки артерии по данным измерения артериального давления и видеоизображениям УЗИ артерии. Используется математическая модель, включающая линейаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнения колебаний гибкой оболочки с учётом её анизотропной структуры, см. [1]. Рассматриваемая задача приводится к задаче минимизации функции вида

$$f(\pi, \varphi) = \sum_{n=1}^N |c_n(\pi, \varphi) - c_n^*| + K(|p_{\max}(\varphi) - p_{\max}^*| + |p_{\min}(\varphi) - p_{\min}^*|). \quad (1)$$

Здесь  $\pi$  — набор искомых параметров (таких как плотность стенки артерии, а также её модули Юнга и коэффициенты Пуассона),  $\varphi$  — набор коэффициентов Фурье функции  $p(t)$ , показывающей зависимость кровяного давления в артерии от времени,  $c_n(\pi, \varphi)$ ,  $1 \leq n \leq N$  есть коэффициенты Фурье функции  $\eta(t)$ , описывающей поперечные колебания артериальной стенки и рассчитанные в рамках используемой модели,  $c_n^*$ ,  $1 \leq n \leq N$  — те же коэффициенты, найденные путём обработки видеоизображения УЗИ артерии,  $p_{\max}(\varphi)$  и  $p_{\min}(\varphi)$  — максимальное и минимальное значения функции  $p(t)$  соответственно, рассчитанные по набору  $\varphi$  её коэффициентов Фурье,  $p_{\max}^*$  и  $p_{\min}^*$  — те же значения, полученные путём измерения артериального давления,  $K > 0$  — весовой коэффициент. Минимизация функции (1) производится с помощью метода Нелдера-Мида. Для численных экспериментов были собраны данные ультразвукового исследования у пациентов с широким кругом патологических процессов.

Рассматривается также модель эластографии [2], в рамках которой модуль Юнга  $E(\alpha, \beta)$  стенки артерии есть функция координат. При описании цилиндрической оболочки, моделирующей стенку артерии, используются цилиндрические координаты:  $\alpha$  — продольная

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-71-10070).  
© Кокурин М.М., Пасынков Д.В., Пахматов Д.А., 2024

координата,  $\beta$  — дуговая. Перемещения  $u(\alpha, \beta)$ ,  $v(\alpha, \beta)$ ,  $w(\alpha, \beta)$  (продольное, дуговое и радиальное соответственно) точки оболочки с координатами  $\alpha$ ,  $\beta$  под воздействием нагрузки, описываемой функциями  $X(\alpha, \beta)$ ,  $Y(\alpha, \beta)$ ,  $Z(\alpha, \beta)$ , удовлетворяют системе уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( C_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{C_{12}}{R} w \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( C_{66} \frac{\partial u}{\partial \beta} + C_{66} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = -X \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( C_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{C_{22}}{R} w \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( C_{66} \frac{\partial u}{\partial \beta} + C_{66} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = -Y \\ C_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{C_{22}}{R} w = RZ \end{cases}$$

с непостоянными коэффициентами, зависящими от функции  $E$ . Сформулированы прямая и обратная задачи для указанной системы уравнений с частными производными. Показано, что обратная задача, в которой неизвестной является функция  $E$ , приводится к начально-краевой задаче для уравнения с частными производными гиперболического типа.

### Литература

1. Tsangaris S. Pulsating blood flow in an initially stressed, anisotropic elastic tube: linear approximation of pressure waves / S. Tsangaris, D. Drikakis // Medical & Biological Engineering & Computing. — 1989. — V. 27. — P. 82–88.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М. : Наука, 1974. — 448 с.

### О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

**Г.В. Колесников, И.А. Колесникова** (Москва, МПГУ, РГГУ)  
*gera.pkh@mail.ru, vipkolesnikov@mail.ru*

Как известно, вариационные методы имеют не только теоретический, но и прикладной интерес, позволяя получать приемлемые приближенные решения уравнений. В этом направлении часто возникает обратная задача вариационного исчисления — восстановление функционала Эйлера по оператору заданной краевой задачи. Принципиальные сложности здесь возникают в случае непотенциальных операторов. Данная работа посвящена исследованию существования решений обратных задач вариационного исчисления для некоторого класса дифференциально-разностных операторов.



Эта теория имеет важные приложения к теории упругости, теории управления и диффузионных процессов. Новые классы функционально - дифференциальных уравнений, возникающих в механике, биологии, и других науках были изучены ранее.

Так же ранее рассматривались необходимые и достаточные условия для эллиптичности, разрешимости, спектра и гладкости обобщенных решений для дифференциально-разностных уравнений.

Новая нелокальная краевая задача для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [1].

$$Aw = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q)$$

$$w(x)|_{\Gamma_1} = w(\omega(x))|_{\Gamma_1} + f_1(x) \quad (x \in \Gamma_1)$$

$$w(x)|_{\Gamma_2} = f_2(x) \quad (x \in \Gamma_2)$$

Здесь  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$  ( $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \overline{Q}$ ),  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ограниченная область с границей  $\partial Q$ ;  $\Gamma_1 \subset \partial Q$  -  $(n-1)$ -мерное открытое многообразие в  $Q$ ,  $\Gamma_2 = Q \setminus \Gamma_1$ ;  $\omega(x)$  бесконечно дифференцируемое невырожденное преобразование, отображающее некоторую окрестность  $\Omega_1$  многообразия  $\Gamma_1$  на множество  $\omega(\Omega_1)$  таким образом, что  $\omega(\Gamma_1) \subset Q$ .

Представляет интерес исследовать заданный оператор на потенциальность, возможно ли для данного оператора построить обратную задачу вариационного исчисления.

Для построения вариационного метода рассматривается операторное уравнение, задается соответствующая билинейная форма, затем находится функционал, критические точки такого функционала совпадают с множеством решений рассматриваемого уравнения.

Рассматривается оператор  $Ru(x)$

$$Ru(x) \equiv u(x_1, x_2) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(x_1 - 1, x_2) = 0$$

с областью определения  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ .

Задается билинейная форма  $\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

После необходимых вычислений выясняется, что оператор  $Ru(x)$  не является потенциальным и построение вариационного принципа

относительно заданной билинейной формы на области  $Q$  невозможно, но можно рассматривать задачу отыскания вариационного множителя, благодаря которому полученный оператор будет потенциальным.

Отыскание вариационного множителя вызывает определенные трудности, невозможно заранее предположить какой именно множитель сможет преобразовать заданный непотенциальный оператор в потенциальный.

Рассматривается оператор  $M = e^{u(x_1, x_2)}$  в качестве вариационного множителя для оператора  $Ru(x)$  на  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$ , полученный оператор будет иметь вид  $\tilde{R}_1 u(x) = M \cdot Ru(x)$ . Условия для потенциальности выполнены, а также найден соответствующий функционал.

### Литература

1. Бицадзе А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739-740.

## ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА С ДВОЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)

*kolinna@inbox.ru*

В данной работе рассмотрено стационарное уравнение Свифта-Хоенберга при двойном краевом условии Дирихле. Изложена методика приближенного вычисления бифурцирующих решений при малых и конечных значениях критического приращения параметра. Вычисления проведены на основе модифицированного метода Ляпунова-Шмидта, использующего ритцевскую аппроксимацию функционала энергии по заранее заданному набору собственных функций (мод) главной линейной части уравнения с последующей редукцией Пуанкаре к функции двух ключевых переменных. В случае локального анализа вычислена главная часть ключевой функции и вычислены приближенные аналитические представления ветвей бифурцирующих решений.

Один из базовых принципов исследования бифуркаций решений начально краевых задач для нелинейных параболических и более

общих уравнений основан на том, что уравнение вида

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \quad (0 < t \leq t_0), \quad v(0) = v_0,$$

где  $f(t, x)$  при каждом  $t \in [0, t_0]$  — нелинейный оператор, при условии, что оператор  $A$  порождает сильно непрерывную полугруппу  $T(t)$ , сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, v(s))ds$$

(метод Дюамеля).

В настоящей работе рассмотрен прямой и более простой подход, основанный на том, что рассмотренные в работе бесконечномерные динамические системы являются вариационными. Это обстоятельство дает возможность использования прямого подхода к построению дискретных аналогов траекторий спуска динамической системы в точки минимума функционала энергии. Такой подход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения (в порождающей точке минимума). В качестве основного модельного уравнения рассмотрено уравнение Свифта-Хоенберга

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0,$$

$$w = w(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega := [0, 1] \times [0, 1].$$

## О СУЩЕСТВОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.Н. Коненков (Рязань, РГУ)

*an.konenkov@gmail.com*

В работе [1] рассматривалась первая краевая задача для параболической системы на плоскости. Установлена единственность решения в параболическом пространстве Гельдера  $H^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $0 < \alpha < 1$  в областях с негладкими боковыми границами вида  $x = g(t)$ , где функция  $g$  удовлетворяет условию Жевре  $g \in C^{(1+\alpha)/2}([0, T])$ . Кроме того, доказана единственность решения в пространстве  $C^{1,1/2}(\bar{\Omega})$  при

определенном условии на скорость роста старших производных решения. В [2] для области на плоскости с боковой границей из класса Дини-Гельдера  $H^{1/2+\omega}$  рассмотрены первая и вторая краевые задачи для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами. Доказана однозначная разрешимость этих задач в пространстве  $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ . Существование единственного ограниченного классического решения в пространстве  $C(\bar{\Omega})$  для первой краевой задачи получено в [3]. Коэффициенты системы при этом принадлежат пространству Гельдера и зависят только от пространственной переменной  $x$ , а граница области удовлетворяет условию Жевре.

Мы устанавливаем оценки для функции Грина первой краевой задачи, получаем некоторое интегральное представление решения первой краевой задачи с непрерывной граничной функцией и избавляемся от условия зависимости коэффициентов системы только от  $x$  в работе [3]. Однако на боковую границу области накладывается существенно более сильное, чем в работах [1-3], условие принадлежности классу  $C^{1+\alpha/2}$ .

В полосе  $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ , рассматривается параболическая система

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 A^{(k)}(x, t) \partial_x^k u,$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ ,  $A^{(k)}(x, t) = (a_{ij}^{(k)}(x, t))_{i,j=1}^m$ . Для оператора  $L$  предполагаются выполненными условия

- а) равномерной параболичности по Петровскому;
- б) коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  принадлежат анизотропному пространству Гельдера  $C^\alpha(\bar{D})$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

В полуограниченной области  $\Omega = \{(x, t) \in D \mid x > g(t)\}$  рассматриваем первую краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{в } \Omega, \\ u(x, 0) = 0, & x > g(0), \\ u(g(t), t) = \psi(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$g \in C^{1+\alpha/2}([0, T]). \quad (2)$$

**Теорема.** Пусть для оператора  $L$  выполнены условия а), б), для боковой границы выполнено условие (2), граничная функция  $\psi \in C([0, T])$  и  $\psi(0) = 0$ . Тогда существует ограниченное в  $\Omega$  клас-

сическое решение  $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  первой краевой задачи (1), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \|\psi\|_{C([0,T])}.$$

Аналогичное утверждение получено и для ограниченной области  $\Omega = \{(x, t) \in D \mid g_1(t) < x < g_2(t)\}$ .

### Литература

1. Бадерко Е.А. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова М.Ф. // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 197–208.
2. Бадерко Е.А. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 5. — С. 608–618.
3. Коненков А.Н. Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости / А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 904–913.

## КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская (Минск, БГУ)  
*korzyuk@bsu.by, kozlovskaja@bsu.by*

**Постановка задачи.** В замыкании  $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$  области  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$  переменных  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  найти решение уравнения

$$(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2), \quad \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2), \quad x_2 \in [0, \infty), \quad (2)$$

и граничному условию

$$Bu(x_1, 0) = \sum_{i,j=0,i+j=m}^m b^{(i,j)}(x_1) ((\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j u))(x_1, 0) = \mu(x_1), \quad (3)$$

где заданные функции  $b^{(i,j)}$ ,  $\mu$  принадлежат классу  $C^{k-m}([0, \infty))$ . Оператор  $B$  таков, что для любого  $x_1 \in [0, \infty)$  выполняется условие

$$B^{(m)}(x_1, -a) = \sum_{i,j=0, i+j=m}^m (-a)^i b^{(i,j)}(x_1) \neq 0. \quad (4)$$

Таким образом, рассматриваем задачу (1), (2), (3) с целью построения ее классического решения из класса  $C^k(\bar{Q})$ ,  $k \geq 2$ .

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где произвольные функции  $g^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , из класса  $C^k$  и области определения  $D(g^{(1)}) = C^k(\mathbb{R})$ ,  $D(g^{(2)}) = C^k([0, \infty))$  для любого  $\mathbf{x} \in \bar{Q}$ ,  $V_p$  – частное решение уравнения (1) из класса  $C^k(\bar{Q})$ . Для определения  $V_p$  характеристикой  $x_2 - ax_1 = 0$  область  $Q$  разбивается на две подобласти  $Q^{(1)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 > 0\}$ ,  $Q^{(2)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 < 0\}$  Тогда частное решение определяется в виде:

$$V_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_p^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \quad (6)$$

**Теорема 1.** Пусть заданная функция  $f$  уравнения (1) принадлежит множеству  $C^{k-1}(\bar{Q})$ . Тогда функции  $v_p^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению (1) на  $\overline{Q^{(j)}}$  ( $j = 2$ ),  $v_p^{(1)}$  удовлетворяет однородным условиям Коши (2),  $v_p^{(2)}$  – однородному условию (3). Функция  $V_p(\mathbf{x}) = V_p^{(j)}(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2$ , принадлежит классу  $C^k(\bar{Q})$ , удовлетворяет неоднородному уравнению (1), однородным условиям Коши (2), где  $V_p^{(1)}(\mathbf{x}) = v_p^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}$ ,  $V_p^{(2)}(\mathbf{x}) = v_p^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!}(x_2 - ax_1)^j$ .

**Теорема 2.** Пусть заданные функции задачи (1), (2), (3) удовлетворяют следующим условиям гладкости:  $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ ,  $\varphi \in C^k([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$ ,  $\mu \in C^{k-m}([0, \infty)r)$ ,  $b^{(i,j)} \in C^{k-m}([0, \infty))$ ,  $i, j = 0, \dots, m$ ,  $i + j = m$ . Функция  $u : Q \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x})$  принадлежит классу  $C^k(\bar{Q})$ ,  $k \geq 2$ , и является единственным классическим решением задачи (1), (2), (3) тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования:

$$\frac{1}{2}\varphi(0) - C = \tilde{C}^{(0)}, \quad s = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}d^s\varphi(0) - \frac{1}{2a}d^{s-1}\psi(0) = \tilde{C}^{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, m-1, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}d^s\varphi(0) - \frac{1}{2a}d^{s-1}\psi(0) = d^{s-m}\tilde{\mu}(0), \quad s = m, \dots, k, \quad (9)$$

В соотношениях (7)–(9) числа  $m \geq 1$ ,  $k \geq 2$ ,  $m \leq k$ . Выполнение равенств (7), (8) достигается за счет соответствующих постоянных  $\tilde{C}^{(s)}$ ,  $s = 0, \dots, m-1$ . Они определяются единственным образом.

## О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В.В. Корнев (Саратов, СГУ)

KornevVV@sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1)$$

$$u_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0 \quad (2)$$

$$u_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные и

$$f(x, t) \in L(Q_T), \quad Q_T = [0, 1] \times [0, T], \quad \text{при любом } T > 0 \quad (4)$$

Под решением задачи (1)–(3) понимаем функцию  $u(x, t)$ , непрерывную вместе с  $u_x(x, t)$  и  $u_t(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  ( $u_t(x, t)$ ) абсолютно непрерывна по  $x$  (по  $t$ ), удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду - уравнению (1), причем  $u_{tt}(x, t)$  удовлетворяет условию (4).

Задачу (1)–(3) можно решать методом Фурье (см. [1]), который приводит к следующей теореме.

**Теорема 1.** *Если  $u(x, t)$  - решение задачи (1)–(3), то оно представимо в виде ряда*

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \left[ \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (5)$$

где  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  - резольвента оператора  $L$ :

$Ly = -y''(x)$ ,  $y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(0) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$ ,  $E$  - единичный оператор,  $\lambda = \rho^2$ ,  $\text{Re} \rho \geq 0$ ,  $\gamma_n$  - замкнутый контур в  $\lambda$ -плоскости вокруг  $n$ -го собственного значения оператора  $L$ ,  $r > 0$  достаточно велико и фиксировано,  $n_0$  - такой номер, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\gamma_n$  находится по одному собственному значению и все  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне контура  $|\lambda| = r$ . Ряд (5) имеет смысл для любой функции  $f(x, t)$ , удовлетворяющей (4). Рассмотрим его как самостоятельный объект исследования без предположения о его сходимости.

Пусть  $\varphi(x) \in L[0, 1]$ . Определим ее продолжение  $\tilde{\varphi}(x)$  с  $[0, 1]$  на все  $x \in \mathbb{R}$  по следующему правилу:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}(-x), \tilde{\varphi}(1+x))^T &= (\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(1-x))^T + \\ &+ 2M \int_0^x e^{M(x-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $T$  - знак транспонирования,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем через  $\tilde{f}(x, t)$  обозначается функция  $f(x, t)$ , продолженная при каждом фиксированном  $t \geq 0$  по правилу (6) с  $x \in [0, 1]$  на все  $x \in \mathbb{R}$ .

Определим непрерывную функцию:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (7)$$

**Теорема 2.** При любом фиксированном  $t \geq 0$  ряд ((5)) сходится к  $u_0(x, t)$  равномерно по  $x \in [a, b]$  на любом  $[a, b] \subset (0, 1)$ .

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы:

**Лемма 1.** Если  $f(x, t)$  - непрерывна в  $Q = [0, 1] \times [0, \infty)$  вместе с частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям (2), то функция  $u_0(x, t)$  является решением задачи (1)-(3).

**Лемма 2.** Пусть  $u(x, t)$  - решение (1)-(3),  $y(x, t, \lambda) = R_\lambda u(\cdot, t)$ . Тогда

$$y(x, t, \lambda) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t u(x, \tau) \sin \rho(t - \tau) d\tau + \int_0^t (R_\lambda f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau$$



**Лемма 3.** Пусть  $f(x, t)$  удовлетворяет условию (4). Тогда ряд (5) есть ряд Фурье функции  $u_0(\cdot, t)$  при любом  $t$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ .

В заключение приведем теорему о достаточных условиях существования решения.

**Теорема 3.** Если почти при всех  $x \in [0, 1]$  функция  $f(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $t$ , функции  $f(x, t)$  и  $f_t(x, t)$  удовлетворяют условию (4), то функция  $u_0(x, t)$ , определяемая по формуле (7), является единственным решением задачи (1)–(3).

### Литература

1. Хромов А. П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А. П. Хромов, В. В. Корнев // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

## РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ОБОБЩЕННАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ

В.В. Корнев, А.П. Хромов (Саратов, СГУ)

KornevVV@sgu.ru, KhromovAP@sgu.ru

Обобщенная смешанная задача [1, с. 217] является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи.

1. Рассмотрим сначала следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad x, t \in [0, 1] \times [0, \infty), \quad (1)$$

$$U_1(u) = u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(u) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (4)$$

Считаем, что все функции, входящие в (1)–(4), комплекснозначные, причем  $q(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x) \in L[0, 1]$  и  $f(x, t)$  класса  $Q$ , т.е.  $f(x, t) \in L[Q_T]$  при любом  $T > 0$ ,  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — комплексные числа.

Задача (1)–(4) при таких исходных данных чисто формальная, т.е. имеет лишь внешний вид. Несмотря на это, можно дать [1, с. 217] формальное решение по методу Фурье в следующем виде:

$$u(x, t) = \left( \int \right) \left[ (R_\lambda \varphi) \cos \rho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \right. \\ \left. + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (5)$$

где  $\left( \int \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right)$ ,  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  — резольвента оператора  $L$ :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \\ U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \\ U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0,$$

$\lambda$  — спектральный параметр,  $E$  — единичный оператор,  $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$  означает, что  $R_\lambda$  применяется к  $f(x, t)$  по переменной  $x$  ( $\tau$  — параметр),  $\lambda = \rho^2$ ,  $\operatorname{Re} \rho \geq 0$ ,  $\gamma_n$  — образ в  $\lambda$ -плоскости окружности  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho : |\rho - n\pi| = \delta\}$ ,  $\delta > 0$  и достаточно мало,  $r > 0$  достаточно велико, фиксировано,  $n_0$  — такой номер, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\gamma_n$  находится по одному собственному значению и все  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне  $|\lambda| = r$ , а остальные собственные значения — внутри. Считаем, что задача (1)–(4) и ее формальное решение тесно связаны.

Ряд (5) может быть и расходящимся. Таким образом, в нашей обобщенной смешанной задаче сама задача имеет чисто формальный вид, а формальное решение может быть и расходящимся рядом.

**2.** При действиях с расходящимися рядами будем пользоваться аксиомой:

$$\int \sum = \sum \int, \quad (6)$$

где  $\int$  — определенный интеграл.

С помощью (6) формальное решение (5) приводится к виду

$$u(x, t) = Z(x, t; \varphi) + \int_0^t Z(x, \tau; \psi) d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z(x, \eta; f(\cdot, \tau)) d\tau, \quad (7)$$

где  $Z(x, t; \varphi)$  есть формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad (8)$$

$$U_j(u) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (10)$$

Значение формулы (7) в том, что хорошо объясняется роль смешанной задачи (8)–(10) и поэтому в дальнейшем ограничимся лишь задачей (8)–(10).

**3.** При решении обобщенной смешанной задачи (8)–(10) потребуются следующий факт, относящийся к тригонометрическому ряду Фурье [2].

Рассмотрим на  $[-1, 1]$  тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x) \in L[-1, 1]$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x), \quad (11)$$

где  $a_k = \int_{-1}^1 f(t) \cos k\pi t dt$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $b_k = \int_{-1}^1 f(t) \sin k\pi t dt$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Рассматриваем ряд (11) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому (6), где  $\int = \int_{-1}^x$ .

**Теорема 1.** *Сумма расходящегося ряда (11) почти всюду равна  $f(x)$ .*

К этому же результату приходим при суммировании ряда (11) по Фейеру.

**4.** Приступаем к решению задачи (8)–(10).

Представим формальное решение  $Z(x, t; \varphi)$  задачи (8)–(10) в виде:

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t),$$

где  $u_{01}(x, t)$  есть ряд  $Z(x, t; \varphi)$  при  $q(x) = 0$ . Этот ряд обозначим  $Z_0(x, t; \varphi)$ . Поэтому  $u_1(x, t)$  есть ряд  $u_1(x, t) = Z(x, t; \varphi) - Z_0(x, t; \varphi)$ .

**Лемма 1** ([1, с. 223]). Сумма ряда  $u_{01}(x, t)$  есть

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

где  $\tilde{\varphi}(x)$  — продолжение функции  $\varphi(x)$  по формуле

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}(-x), \tilde{\varphi}(1+x))^T &= (\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(1-x))^T + \\ &+ 2M \int_0^x e^{M(x-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $T$  — знак транспонирования и  $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}$ .

Ряду  $u_1(x, t)$  соответствует смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \quad (13)$$

$$U_j(u_1) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \quad (15)$$

где  $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$ .

Но ряд  $u_1(x, t)$  не является рядом формального решения по методу Фурье этой задачи и мы его меняем на ряд формального решения задачи (13)–(15). Этот переход является основным моментом нашей процедуры.

Повторяем теперь вышеприведенную процедуру с рядом

$$u_1(x, t) = \left( \int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \quad (16)$$

т. е. представим  $u_1(x, t)$  из (16) в виде  $u_1(x, t) = u_{02}(x, t) + u_2(x, t)$ , где  $u_{02}(x, t)$  есть ряд формального решения обобщенной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u_{02}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{02}(x, t)}{\partial x^2} + f_0(x, t),$$

$$U_j(u_{02}) = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$u_{02}(x, 0) = u'_{02,t}(x, 0) = 0.$$

**Лемма 2.** Сумма ряда  $u_{02}(x, t)$  есть

$$u_{02}(x, t) = a_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta,$$

где  $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$  есть продолжение (12)  $f_0(\eta, \tau)$  по  $\eta$ .

Продолжая далее указанный процесс получим на  $m$ -м шаге, что формальное решение  $u(x, t)$  задачи (8)–(10) переходит в

$$u(x, t) = A_m(x, t) + \Omega_m(x, t),$$

где  $A_m(x, t) = \sum_{k=0}^m a_k(x, t)$ ,

$$a_k(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad k \geq 1,$$

$$f_k(\eta, \tau) = -q(\eta)a_k(\eta, \tau),$$

$$\Omega_m(x, t) = \left( \int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_{m-1}(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda.$$

**Лемма 3.** Ряд  $A(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью.

**Лемма 4** ([1, с. 235]). Сумма ряда  $\Omega_m(x, t)$  абсолютно и равномерно по  $x, t \in Q_T$  стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ .

Поэтому справедлива

**Теорема 2.** Сумма ряда  $A(x, t)$  представляет собой решение обобщенной смешанной задачи (8)–(10).

Основанием для такого заключения является

**Теорема 3** Если  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны на  $[0, 1]$  и  $U_j(\varphi) = 0$  ( $j = 1, 2$ ), то ряд  $A(x, t)$  является классическим решением задачи (8)–(10).

**Замечание.** Условие на  $\varphi(x)$  в теореме 3 являются необходимыми и достаточными для классического решения задачи (8)–(10).

Таким образом, аксиома о перестановочности операций интегрирования и суммирования функциональных рядов приводит в случае тригонометрического ряда Фурье к методу суммирования, схожего

с методом Фейера. В случае обобщенной смешанной задачи эта аксиома приводит к построению ряда  $A(x, t)$  явного вида, сходящегося с экспоненциальной скоростью. Этот ряд следует считать новым методом суммирования ряда формального решения задачи (8)–(10). Теорема 3 говорит о регулярности предлагаемого метода.

Результаты настоящего сообщения является перенесением соответствующих результатов из [3] для смешанной задачи с закрепленными концами на случай произвольных линейных однородных граничных условий, содержащих производные.

### Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, вып. 4. — С. 215–238. — DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238. — EDN: YJLRTL.
2. Хромов А.П. О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера–Лебега / А.П. Хромов // Тр. Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. — Казань : КФУ, 2023. — С. 261–262.
3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 300-летию РАН, Саратов, 28–31 января 2024 года. — Саратов : Саратовский университет [издание], 2024. — С. 291–295. — EDN: YIZHUB.

## ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

М.В. Коровина (Москва, МГУ)

*betelgeuser@yandex.ru*

В данной работе исследуются асимптотики решений дифференциальных уравнений второго порядка с иррегулярными особыми точками. Она является продолжением работы [1], в которой решена

задача о построении асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в окрестностях их иррегулярных особых точек, а также для широкого класса уравнений в частных производных.

В работе [1] показано, что асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности иррегулярных особенностей представимы в виде выражений содержащих формальные, вообще говоря расходящиеся ряды. Однако для некоторых типов уравнений с иррегулярной особенностью эти ряды сходятся. Данная работа посвящена исследованию уравнений такого типа. А именно рассмотрим уравнение

$$\left(-r^{2+\frac{k}{2}} \frac{d}{dr}\right)^2 v(r) + P(r) \left(-r^{2+\frac{k}{2}} \frac{d}{dr}\right) v(r) + a(r) \lambda v(r) = 0, \quad (1)$$

где  $a(r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j$ ,  $a(0) \neq 0$  — голоморфная функция,  $P(r)$  — полином,  $k \in \mathbb{Z}$ . Асимптотики решений строятся в пространстве функций экспоненциального роста  $E_{\frac{k}{2}+1}(S_{R,\varepsilon})$  в окрестности иррегулярной особой точки  $r = 0$ . Введем обозначение  $n = \left[\frac{k}{2}\right]$ .

**Теорема 1.** *Асимптотики решений уравнения (1) при  $\lambda \neq 0$  в окрестности нуля имеют вид*

*I. Если  $k \geq -1$ ,  
при четных  $k$*

$$\begin{aligned} u(r) \approx & \exp\left(\frac{c_1}{r^{n+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^1}{r^{n+1-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^1 r^i + \\ & + \exp\left(\frac{c_2}{r^{n+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{r^{n+1-i}}\right) r^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 r^i \end{aligned}$$

*при нечетных  $k$*

$$\begin{aligned} u(r) \approx & \exp\left(\frac{c_1}{r^{n+\frac{3}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n+2} \frac{\alpha_i^1}{r^{n+\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^1 r^{\frac{j}{2}} + \\ & + \exp\left(\frac{c_2}{r^{n+\frac{3}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n+2} \frac{\alpha_i^2}{r^{n+\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}}\right) r^{\sigma_2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 r^{\frac{j}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь  $c_1, c_2$  — корни многочлена  $H_0(p) = \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 a(0) \lambda + p^2$  и степенные ряды  $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^1 r^i$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 r^i$  сходятся в некоторой окрестности нуля.

II. Если  $k \leq -2$ , или  $\lambda = 0$ , тогда асимптотика решения является конормальной, либо решение регулярно.

*Пример.* Стационарное когерентное уравнение Гойна.

$$z\omega''(z) + (c - z)\omega'(z) - a\omega(z) = 0 \quad (2)$$

Здесь через  $c$  и  $a$  обозначены некоторые константы. Это уравнение имеет две особые точки, регулярная особая точка в нуле и иррегулярная на бесконечности. Будем искать асимптотики решений при  $z \rightarrow \infty$  в пространстве функций экспоненциального роста. Асимптотики решений в окрестности регулярной особой точки являются конормальными. Задача состоит в построении асимптотик решений уравнения (2) в окрестности иррегулярной особенности.

**Утверждение 1.** Асимптотики решений уравнения (2) в окрестности бесконечности имеют вид

$$\omega(z) \approx \exp(z) z^{-\sigma_1} g'_1(z) + z^{-\sigma_2} g'_2(z).$$

Здесь  $g'_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^{-i}$ ,  $g'_2(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 z^{-i}$  — функции голоморфные в окрестности бесконечности.

### Литература

1. Korovina M.V. Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications / M.V. Korovina, H.A. Matevossian // Mathematics — 2022. — Т. 10, № 14. — 2465.

## ФУНКЦИОНАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕХАНИКИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Д.М. Коростелева (Казань, КГЭУ)

diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Обозначим через  $\mathbb{R}$  вещественную числовую прямую, через  $V$  — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой  $\|\cdot\|_V$ ,  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ . Зададим симметричные билинейные формы  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что  $\alpha_1 \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2 \|v\|_V^2$  для  $v \in V$  при  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $b(v, v) > 0$  для  $v \in V \setminus \{0\}$ ,  $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$  при  $i \rightarrow \infty$  для слабо сходящейся последовательности  $v_i \rightharpoonup v$  в  $V$  при  $i \rightarrow \infty$ . Определим ненулевой линейный непрерывный функционал  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ .



Введём пространство  $\bar{V} = V \times \mathbb{R}$  с нормой  $\|\bar{v}\|_{\bar{V}} = (\|v\|_V^2 + \zeta^2)^{1/2}$  при  $\bar{v} = (v, \zeta)^\top \in \bar{V}$ . Для  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^+$  определим билинейные формы  $\bar{a} : \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\bar{b} : \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$  соотношениями  $\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = a(u, v) + \kappa(\xi - g(u))(\zeta - g(v))$  и  $\bar{b}(\bar{u}, \bar{v}) = b(u, v) + \mu\xi\zeta$  при  $\bar{u} = (u, \xi)^\top, \bar{v} = (v, \zeta)^\top \in \bar{V}$ . Сформулируем задачу на собственные значения: найти  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $\bar{u} \in \bar{V} \setminus \{0\}$  из уравнения

$$\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda \bar{b}(\bar{u}, \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}. \quad (1)$$

**Теорема 1.** *Задача (1) имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , и соответствующую систему собственных векторов  $\bar{u}_k = (u_k, \xi_k)^\top \in \bar{V}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\bar{a}(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ ,  $\bar{b}(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ . Векторы  $\tilde{u}_k = \bar{u}_k / \sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , составляют полную ортонормированную систему в  $\bar{V}$ .*

Зададим подпространства  $V_h$  размерности  $M = M_h$  пространства  $V$ . Предположим, что  $\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  для любого  $v$  из  $V$ . Для пространства  $\bar{V}_h = V_h \times \mathbb{R}$  размерности  $N = M + 1$  сформулируем конечномерную аппроксимацию задачи (1): найти  $\lambda^h \in \mathbb{R}$  и  $\bar{u}^h \in \bar{V}_h \setminus \{0\}$  из уравнения

$$\bar{a}(\bar{u}^h, \bar{v}^h) = \lambda^h \bar{b}(\bar{u}^h, \bar{v}^h) \quad \forall \bar{v}^h \in \bar{V}_h. \quad (2)$$

**Теорема 2.** *Задача (2) имеет собственные значения  $\lambda_k^h$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , и соответствующую систему собственных векторов  $\bar{u}_k^h = (u_k^h, \xi_k^h)^\top \in \bar{V}_h$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\bar{a}(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$ ,  $\bar{b}(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Векторы  $\tilde{u}_k^h = \bar{u}_k^h / \sqrt{\lambda_k^h}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , составляют полную ортонормированную систему в  $\bar{V}_h$ .*

Пусть  $\lambda_k$  — собственное значение задачи (1) кратности  $s$  такое, что  $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s}$ ,  $\bar{u}_i = (u_i, \xi_i)^\top$ ,  $i = k, k+1, \dots, k+s-1$ , — соответствующие собственные векторы,  $\lambda_i^h$ ,  $\bar{u}_i^h$ ,  $i = k, k+1, \dots, k+s-1$ , — приближения по схеме (2),  $U_k = \text{span}\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+s-1}\}$ ,  $\bar{U}_k = \text{span}\{\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_{k+s-1}\}$ ,  $\bar{U}_k^h = \text{span}\{\bar{u}_k^h, \bar{u}_{k+1}^h, \dots, \bar{u}_{k+s-1}^h\}$ . Обозначим  $\varepsilon_k^h = \sup_{u \in U_k, \|u\|_V=1} \varepsilon_h(u)$ .

**Теорема 3.** *Справедливы следующие оценки погрешности:*

$$0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq c (\varepsilon_k^h)^2, \quad \vartheta(\bar{U}_k, \bar{U}_k^h) \leq c \varepsilon_k^h,$$

для  $i = k, k+1, \dots, k+s-1$ ,  $\vartheta(\bar{U}_k, \bar{U}_k^h)$  — раствор подпространств.

Выберем в  $V_h$  базис  $\varphi_i \in V_h$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Введём симметричные квадратные матрицы  $A$  и  $B$  размера  $N$  с элементами  $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) + \kappa g(\varphi_i)g(\varphi_j)$ ,  $a_{NN} = \kappa$ ,  $a_{Ni} = -\kappa g(\varphi_i)$ ,  $a_{iN} = -\kappa g(\varphi_i)$ ,  $b_{ij} = b(\varphi_i, \varphi_j)$ ,  $b_{NN} = \mu$ ,  $b_{Ni} = 0$ ,  $b_{iN} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, M$ . Тогда задача (2) эквивалентна обобщённой алгебраической задаче на собственные значения: найти  $\lambda = \lambda^h \in \mathbb{R}$  и  $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  из уравнения

$$Ay = \lambda By. \quad (3)$$

После вычисления собственного вектора  $y$  с координатами  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , задачи (3) компоненты собственного вектора  $\bar{u}^h = (u^h, \xi^h)^\top \in \bar{V}_h$  задачи (2) восстанавливаются с помощью следующих соотношений:

$$u^h = \sum_{i=1}^M y_i \varphi_i, \quad \xi^h = y_N.$$

Полученные результаты могут быть применены для исследования и решения задач о собственных колебаниях тонкостенных конструкций с присоединёнными осцилляторами [1].

### Литература

1. Андреев Л.В. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Издательство МАИ, 2012. — 214 с.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ НА ЭКСПЛУАТАЦИЮ СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

**О.И. Кос, В.Ю. Смирнов** (Москва, МАИ)

*kosoksana90@gmail.com*

Рассмотрим сложную техническую систему, состоящую из большого числа разных элементов. В ходе ее эксплуатации требуется эффективно ремонтировать и заменять исчерпавшие ресурс элементы для обеспечения безотказности работы сложной технической системы.

Первая часть задачи состоит в нахождении совокупности оптимальных времен замен (ремонтов) каждого из элементов сложной технической системы, т.е. поэлементной оптимизации. После того как получены результаты по методам: расчет оптимального интервала

предупредительных замен и рекуррентному методу расчета надежности СТС, необходимо построить схему эксплуатации оптимальным образом [1]. Задача оптимизации эксплуатации СТС за счет эффективной замены ее элементов решается с помощью генетического алгоритма. Далее приведены основные обозначения и сформулирована задача, решаемая с помощью генетического алгоритма[2].

**Обозначим:**

$\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  – набор оптимальных интервалов ремонтов (замен) элементов СТС, где  $n$  – число элементов в СТС.

$\bar{\theta} = (\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_m)$  – популяция наборов решений, где  $m$  – число наборов в популяции.

$Z_e$  - стоимость замен (ремонтов) элементов СТС;  $Z_s$ - затраты на выезд специалистов для ремонта (замены) элементов;  $Z_v$ - стоимость времени работы элементов, которые были заменены раньше времени своей оптимальной замены.

Функция приспособленности популяции решений выражена формулой:

$$\Phi(\bar{\theta}) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \Psi(\bar{\tau}_l) \quad (1)$$

Функция приспособленности набора решений выражена формулой:

$$F(\bar{\tau}) = Z_e(\bar{\tau}) + Z_s(\bar{\tau}) + Z_v(\bar{\tau}) \quad (2)$$

**Пусть заданы:**  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n), Z_e, Z_s, Z_v, \Phi(\bar{\theta}), F(\bar{\tau})$ .

**Найти:** оптимальную популяцию решений:  $\bar{\theta}_0 = \underset{\{\bar{\theta}\}}{\operatorname{argmin}} \Phi(\bar{\theta})$ ,

далее найти оптимальный набор решений:  $\bar{\tau}_0 = \underset{\{\bar{\tau}\}}{\operatorname{argmin}} F(\bar{\tau})$ .

Множеством решений данной задачи является оптимальная, т.е. эффективная с точки зрения эксплуатации совокупность времен замен (ремонтов) элементов СТС. Ограничением при решении задачи оптимизации будет требование на совокупность оптимальных интервалов, заключающееся в том, что эти интервалы могут быть уменьшены до ближайшего интервала. Но они не могут быть увеличены, так как в этом случае не будет обеспечена надежность СТС. Критерий оптимальности решения задачи выражен целевой функцией, значения которой используют для сравнения решений. В нашем случае целевой функцией выступает функция приспособленности, ко-

торая является суммой следующих затрат, а именно: стоимости замен (ремонтов) элементов СТС; затрат на выезд специалистов для ремонта элементов; стоимости времени работы элементов, которые были заменены раньше времени своей оптимальной замены. Построенный метод оптимизации затрат на эксплуатацию элементов можно применить для ряда сложных технических систем, в качестве которых рассматриваются искусственные сооружения, например мостовые конструкции, находящиеся в непосредственной близости друг от друга.

### **Литература**

1. Кос О.И. Математическая модель управления техническим состоянием элементов сложных технических систем на основе закона распределения функции отказов элементов. / О.И. Кос, В.Ю. Смирнов // — Известия РАН. Теория и системы управления. — М.: Российская академия наук, 2022. — 3-10 с.
2. Кос О.И., Смирнов В.Ю. Применение генетического алгоритма в задаче оптимизации замены элементов системы. / О.И. Кос, В.Ю. Смирнов // — Известия РАН. Теория и системы управления. — М.: Российская академия наук, 2022.. — 76-89 с.

### **ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ХЕББА ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ КАЧЕСТВА ПРОВЕДЕННЫХ РЕМОНТОВ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**О.И. Кос, В.Ю. Смирнов** (Москва, МАИ)  
*kosoksana90@gmail.com*

В нашей стране эксплуатируется огромное количество сложных технических систем, сокращенно СТС. Обеспечение бесперебойной работы СТС требует больших затрат на безопасную эксплуатацию, а следовательно, своевременных замен или ремонтов элементов СТС. В настоящее время реализуется схема, которая называется управление техническим состоянием СТС по нормативу. Для реализации более прогрессивной стратегии необходимо в любой заданный момент времени иметь возможность оценить техническое состояние всех элементов СТС и СТС в целом. Для этого, в свою очередь, необходимо оценить качество проведенных ранее ремонтов элементов СТС, чтобы прогнозировать их техническое состояние в промежутках времени до последующих ремонтов. В настоящее время эта оценка про-

изводится по усредненным показателям, закрепленным в нормативах и на основании данных текущих обследований. Предлагается использовать интеллектуальный алгоритм для классификации текущего технического состояния элементов СТС. Рассмотрим следующие уровни технического состояния СТС:

1. Дефекты отсутствуют.
2. Присутствуют мелкие дефекты, не оказывающие влияния на влияющие на безотказность работы.
3. Дефекты, развитие которых создаст угрозу безотказности работы.
4. Серьезные дефекты, оказывающие влияние на безотказность работы, требуют особых условий эксплуатации вплоть до введения ограничений.

Классификация элементов СТС по перечисленным уровням предлагается производить с помощью адаптированного алгоритма Хебба. На основании входных значений, описывающих повреждения, которые были обнаружены при проведении определенного обследования СТС, получаются выходные значения, которые после того, как они застабилизируются с определенной точностью посредством алгоритма Хебба, должны отнести СТС к определенному классу. В начале обучения все веса нейронной сети Хебба инициализируются случайными значениями или нулями. Далее задается набор входных значений, соответствующий повреждениям, которые были обнаружены при проведении определенного обследования в СТС. На каждом нейроне рассчитывается сумма взвешенных входных значений и затем к нему применяется активационная функция. Таким образом рассчитывается выходное значение. Для каждого набора входных значений нейронная сеть обновляет свои веса в

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) + \alpha y_i^{(n-1)} y_j^{(n)}$$

где  $y_i^{(n-1)}$  — выходное значение нейрона  $i$  слоя  $(n-1)$ ,  $y_j^{(n)}$  — выходное значение нейрона  $j$  слоя  $n$ ;  $w_{ij}(t)$  и  $w_{ij}(t-1)$  — весовой коэффициент синапса, соединяющего эти нейроны, на итерациях  $t$  и  $t-1$  соответственно;  $\alpha$  — коэффициент скорости обучения. Здесь и далее, для общности

Для каждого набора входных значений пересчитываются веса нейронной сети до тех пор, пока выходное значение не будет застabilизировано. После процесса обучения на вход сети передаются данные обследований СТС, и она устойчиво определяет уровень технического состояния СТС. В результате можно классифицировать

текущее техническое состояние СТС по перечисленным выше уровням. Определения уровня технического состояния с помощью применения алгоритма Хейбба позволяет оценить качество проведенных ранее ремонтов СТС, чтобы выработать рекомендации для последующих ремонтов.

### Литература

1. Кос О.И. Математическая модель управления техническим состоянием элементов сложных технических систем на основе закона распределения функции отказов элементов. / О.И. Кос, В.Ю. Смирнов // — Известия РАН. Теория и системы управления. — М.: Российская академия наук, 2022. — 3–10 с.

2. Кос О.И. Применение генетического алгоритма в задаче оптимизации замены элементов системы. / О.И. Кос, В.Ю. Смирнов // — Известия РАН. Теория и системы управления. — ООО «Трансстройиздат», 2014. — 76–89 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ТЕМПЕРАТУРОЙ<sup>1</sup>

**Е.И. Костенко** (Воронеж, ВГУ)

*ekaterinarshina@mail.ru*

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . В  $Q_T = [0, T] \times \Omega$ ,  $T > 0$ , рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [\nu(\theta) \mathcal{E}(v) - \kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds] + \nabla p = f;$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0 \text{ в } Q_T, \quad v(t, x) |_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega, \quad v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = [\nu(\theta) \mathcal{E}(v) + \kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds] : \mathcal{E}(v) + g;$$

$$\theta |_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0.$$

Здесь  $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ ,  $\theta(t, x)$  и  $p(t, x)$  — вектор - функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно,  $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — тензор скоростей деформации с компонентами

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026.

© Костенко Е.И., 2024

$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ,  $f$  — плотность внешних сил,  $g$  — источник внешнего тепла,  $\kappa > 0$  — время ретардации (запаздывания),  $\chi > 0$  — коэффициент теплопроводности,  $\nu > 0$  — вязкость жидкости. Знак  $\text{Div}$  обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов — столбцов матрицы. Функция  $I_2$  определяется равенством:  $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$ .

На функцию  $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : \kappa(s)$  наложены естественные ограничения:  $\kappa(s)$  должна быть определенная при  $s \geq 0$  непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

$$(\kappa_1) \quad 0 < C_1 \leq \kappa(s) \leq C_2 < \infty;$$

$$(\kappa_2) \quad -s\kappa'(s) \leq \kappa(s), \text{ при } \kappa'(s) \leq 0; \quad (\kappa_3) \quad |s\kappa'(s)| \leq C_3 < \infty.$$

Здесь и далее через  $C_i$  обозначаются различные константы.

Рассматриваемая задача является продолжением цикла работ, посвященных исследованию моделей термовязкоупругих сред (см. напр. [1]–[5] и имеющуюся там библиографию).

Слабое решение будет находиться в следующих функциональных пространствах

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0, T; V), v' \in L_2(0, T; V^*)\},$$

$$W_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)), 1 < p < +\infty\}.$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$  и  $0 < C_4 < \nu(\theta) < C_5$ ,  $\kappa$  удовлетворяет условиям  $(\kappa_1) - (\kappa_3)$ ,  $f \in L_2(0, T; V^*)$ ,  $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$ ,  $v_0 \in H$ ,  $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ . Тогда при  $1 < p < 4/3$  существует хотя бы одно слабое решение изучаемой начально-краевой задачи.

### Литература

1. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова / А.В. Звягин, В.П. Орлов // Известия Вузов. Математика. — 2014. — Н. 9. — С. 69–74.
2. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2016. — Н. 10. — С. 70–75.
3. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.

4. Звягин А.В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — Н. 3. — С. 91–95.

5. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности / А.В. Звягин // Математические Заметки. — 2019. — Т. 105, В. 6. — С. 839–856.

# УСТОЙЧИВОСТЬ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ<sup>1</sup>

**Д.С. Костерин** (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)  
*kosterin.dim@mail.ru*

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)u(t, x + s)ds$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x).$$

Здесь  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $D_0$ , — матрицы размера  $n \times n$ ,  $F(*, *)$ ,  $F_3(*, *, *)$  — линейные по каждому аргументу вектор-функции,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

Исследуется динамика данной краевой задачи в окрестности её нулевого решения. Нулевое решение асимптотически устойчиво, если все собственные значения матриц

$$A_0 + \varepsilon A_1 + \frac{1}{2\pi} \varepsilon D_0 \int_0^{2\pi} \exp(iks)ds, \quad k \in \mathbb{Z}$$

имеют отрицательную вещественную часть. Заметим, что при  $k \neq 0$  все эти матрицы равны  $A_0 + \varepsilon A_1$ , а при  $k = 0$  имеем матрицу  $A_0 + \varepsilon(A_1 + D_0)$ . Это означает, что устойчивость нулевого решения

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>

© Костерин Д.С., 2024



рассматриваемой краевой задачи определяется в основном собственными значениями матрицы  $A_0$ .

Пусть  $A_0$  имеет простое нулевое собственное значение, а все остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательную вещественную часть. Тогда решение исходной краевой задачи будем искать в виде асимптотического ряда

$$u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x) a + \varepsilon^2 u_{20} \xi^2(\tau, x) + \dots$$

Подставив его в исходную систему уравнений, приравняв между собой коэффициенты при разных степенях  $\varepsilon$ . Тогда при  $\varepsilon^2$  получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta \xi^2 + \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx, \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x),$$

которую будем называть квазинормальной формой. Здесь и далее  $\tau = \varepsilon t$ . Если при построении получилось  $\delta = 0$ , то решение краевой задачи ищем в виде асимптотического ряда по степеням  $\varepsilon^{1/2}$ .

Тогда квазинормальная форма будет иметь вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta_1 \xi^3 + \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx, \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x).$$

Пусть теперь матрица  $A_0$  имеет пару чисто мнимых собственных значений  $\pm i\omega$ , а все остальные её собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Тогда решение исходной краевой задачи будем искать в виде

$$u(t, x) = \varepsilon^{1/2} (a \xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{a} \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \\ + \varepsilon (u_{20} |\xi(\tau, x)|^2 + u_{21} \xi^2(\tau, x) \exp(2i\omega t) + \bar{u}_{21} \bar{\xi}^2(\tau, x) \exp(-2i\omega t)) + \dots$$

Тогда квазинормальная форма будет иметь вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \sigma \xi |\xi|^2 + \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx, \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x).$$

В работе показано наличие кусочно-постоянных по  $x$  решений у перечисленных квазинормальных форм, представлены результаты об устойчивости этих решений.

## Литература

1. Кащенко С.А. Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно-распределенных уравнений / С.А. Кащенко, Д.С. Костерин, С.Д. Глызин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, №2. — С. 263–275.
2. Глызин С.Д. Взаимодействие двух волн в модели Ферми-Паста-Улама / С.Д. Глызин, С.А. Кащенко, А.О. Толбей // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, №5. — С. 548–558.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ГЕНЕРАТОРОМ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННОЙ $C_0$ -ПОЛУГРУППЫ

**В.А. Костин, Д.В. Костин, М.Н. Силаева** (Воронеж, ВГУ)  
*vkostin@mail.ru, dvk605@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru*

В соответствии со схемой, изложенной в [1] при исследовании корректной разрешимости задач, связанных с уравнением

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

проводятся исследования для оператора  $A$ , удовлетворяющего условию  $\|U(t)\| \leq Me^{-\omega t}$ , ( $\omega > 0$ ). Это обеспечивает существование дробных степеней оператора  $A$ , для резольвент которых выполняется оценка

$$\left\| \prod_{i=1}^n R(A, z_i) \right\| = \left\| \prod_{i=1}^n (z_i I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{\prod_{i=1}^n (z_i + \omega)}.$$

Для таких операторов также определена отрицательная дробная степень  $A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1}A^{\frac{1}{2}}$ .

Справедливо утверждение: *если  $V(t) = U_{\frac{1}{2}}(t)$ , то функция*

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)z_T, \quad (2)$$

*является ослабленным решением уравнения (1).*

Непрерывность функций  $A^{1/2}u(t)$  и  $\frac{du(t)}{dt}$  на замкнутом интервале  $[0, T]$  и функции  $\frac{d^2 u(t)}{dt^2}$  на открытом интервале  $t \in (0, T)$  следуют из свойств  $V(t)$ .

Справедливо и обратное утверждение: если функция  $u(t)$  в (2) — ослабленное решение, то  $z_0, z_T \in D(A^{1/2})$ . Так как функция  $A^{1/2}u(t)$  непрерывна при  $t \in [0, T]$ , то из (2) имеем равенства

$$z_0 = u(0) - V(T)z_t \in D(A^{1/2}),$$

$$z_T = u(T) - V(t)z_t \in D(A^{1/2}).$$

Теорема (см. теорему 2.4.1 из [1], стр. 307) о представлении ослабленного и обобщенного решений переносится и на наш случай в следующем виде

**Теорема 1.** Если оператор  $A$  в уравнении (1) такой, что оператор  $-A$  является генератором полугруппы  $U(t)$  класса  $C_0$  с условием  $\|U(t)\| \leq Me^{-\omega t}$ , ( $\omega > 0$ ), то всякое обобщенное решение уравнения (1) имеет вид (2), и, наоборот, функция (2) является обобщенным решением уравнения (1) при любых  $z_0, z_T \in E$ .

Результат о представлении ограниченного решения уравнения (1), рассмотренного на полуоси  $[0, \infty)$ , в нашем случае, содержит следующая

**Теорема 2.** Если  $A$  оператор, удовлетворяет условиям теоремы 1, то для любого  $u_0 \in E$  существует единственное ограниченное на полуоси  $[0, \infty)$  обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию  $u(0) = u_0$ . Это решение задается формулой  $u(t) = V(t)u_0$ , и справедлива оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\sqrt{\omega}t} \|u(0)\|.$$

Это решение будет ослабленным, если  $u_0 \in D(A^{1/2})$ .

### Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

# ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПОГРУЖЕНИЯ СВАИ В ГРУНТ

Д.В. Костин, А.А. Тарабанько, С.Л. Царев (Воронеж, ВГУ)

*duk605@mail.ru, a-tarabanko2015@mail.ru, s@tzareff.ru*

В настоящем исследовании рассматривается математическая модель импульсного погружателя свайных конструкций в грунт [1]. Модель состоит из двух компонент. Первая компонента моделирует работу сваевдавливающего устройства с точки зрения генерации вибрационного воздействия. Для этого определяется вид вынуждающей силы, которая обеспечивает погружение свайного элемента в грунт. Предполагается, что свая жестко присоединена к вибровозбудителю, который создает  $n$ -гармоническую вынуждающую силу по закону  $q = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(\omega k t)$ , где  $\lambda_k$  – коэффициенты асимметрии. Исследование оптимального набора коэффициентов описано в работах [2 - 4].

Вторая компонента моделирует взаимодействие погружаемого элемента и сопротивляющейся среды. Описание производится с точки зрения механики процесса. Исследуется случай сваи малого сечения, в связи с чем силой лобового сопротивления можно пренебречь. Предполагается, что сила трения зависит от скорости погружения сваи. В результате декомпозиции исследуемой модели получено следующее нелинейное дифференциальное уравнение вибрационного погружения:

$$\ddot{x} + \sigma s(\dot{x}) + f(\dot{x})x - q = P, \quad (1)$$

где  $f(\dot{x}) = k_0 + k_1 \dot{x}$ . Здесь  $x = x(t)$  – глубина погружения свайной конструкции,  $\dot{x}$  – скорость погружения,  $t$  – время,  $k_0$  – суммарный коэффициент сопротивления и сухого трения на боковой поверхности сваи,  $k_1$  – коэффициент вязкого трения на боковой поверхности сваи,  $P$  – вес свайной конструкции. Граничными условиями были выбраны скорость и глубина погружения в начальный момент времени, т.е.  $\dot{x}(0) = 0, x(0) = a \geq 0$ .

В соответствии с известным принципом вибрационной механики разделения в сумму медленного и быстрого движений [5], решение было представлено в виде суммы двух компонент  $x(t) = y(t) + u(t)$ . Это позволяет свести (1) к системе нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + k_0 y + \omega k_1 (\dot{y} y + \dot{y} u + y \dot{u}) = P, \\ \ddot{u} + k_0 u + k_1 \dot{u} u = q. \end{cases}$$

Последняя система не решается в точном виде. Разумной задачей является построение приближенных решений. Для исследуемой системы это было сделано с помощью метода Галеркина [6] и процедуры градиентного спуска. Дальнейшая работа будет посвящена исследованию свойств полученного приближенного решения.

### Литература

1. Костин Д.В. Нелинейная математическая модель импульсного погружателя / Д.В. Костин, Т.И. Костина, А.В. Журба, А.С. Мызников // Челябинский физико-математический журнал. — 2021. — Т. 6, № 1. — С. 34–41.
2. Ермоленко В.Н. Оптимизация полигармонического импульса / В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. : Математическое моделирование и программирование. Челябинск. — 2012. — № 27(286). — Вып. 13. — С. 35–44.
3. Костин В.А. Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. 2012. — Т. 445. № 3. — С. 271–273.
4. Костин Д.В. Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии / Д.В. Костин // Математический сборник. — 2016. — Т. 207. — № 12. — С. 90–109.
5. Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. — М. : Физматлит, 1994. — 400 с.
6. Красносельский М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутницкий, В.Я. Стеценко. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

## ОДНА МНОГОШАГОВАЯ ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ИГРА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ<sup>1</sup>

К.Н. Кудрявцев (Челябинск, ЮУрГУ)  
*kudrkn@gmail.com*

Рассматривается иерархическая многошаговая позиционная линейно-квадратичная игра

$$\langle \{1, 2, 3\}, \Sigma, \{\mathcal{A}_i\}_{i=1,2,3}, \mathcal{Z}, \{\mathcal{J}_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, <https://rscf.ru/project/23-21-00539/>.

© Кудрявцев К.Н., 2024

В (1) множество порядковых номеров игроков  $\{1, 2, 3\}$ . Игрок 1 является лидером, а остальные два игрока находятся на нижнем уровне иерархии. Интервал продолжительности игры  $[0, K]$  ( $K > 0$  — целое число) делится числами  $\{0, 1, \dots, K-1, K\} = \mathbf{K}$  на  $K$  частей единичной длины. Фазовый вектор  $x \in \mathbf{R}^n$ , позицией игры (1) в момент времени  $k$  будет пара  $(k, x) \in \mathbf{K} \times \mathbf{R}^n$ , задана априори (или выбрана) начальная позиция  $(t_0, x_0) \in \{0, 1, \dots, K-1, K\} \times \mathbf{R}^n$ . Изменение управляемой системы  $\Sigma$  с возрастанием времени  $k = t_0, t_0 + 1, \dots, K-1$  описывается разностным векторным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + u_1 + u_2 + u_3 + z, \quad x(t_0) = x_0, \quad (k = t_0, t_0 + 1, \dots, K-1),$$

где  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица ( $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ),  
 $u_i \in \mathbf{R}^n$  — управляющее воздействие игрока  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  
 $z \in \mathbf{R}^n$  — неопределенный фактор.

Стратегию  $U_i(k)$  игрока  $i$  в момент времени  $k = 0, 1, \dots, K-1$  отождествляем с  $n$ -вектор-функцией  $u_i(k, x) = P_i(k)x$ , где  $n \times n$ -матрица  $P_i(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , факт отождествления будем записывать в виде  $U_i(k) \div u_i(k, x) = P_i(k)x$ , множество таких стратегий  $U_i(k)$  обозначим через  $\mathfrak{A}_i(k)$ ; фактически стратегия  $U_i(k)$  — позиционная, так как зависит от реализующейся позиции игры  $(k, x)$ , а ее вид означает, что выбор своей стратегии  $U_i(k)$  игроком  $i$  сводится к выбору постоянной  $n \times n$ -матрицы  $P_i(k)$ . Поэтому, множеством стратегий игрока  $i$  в игре (1) с начальной позицией  $(t_0, x_0)$  будет

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i = (U_i(t_0), U_i(t_0+1), \dots, U_i(K-1)) \mid U_i(k) \div u_i(k, x) = P_i(k)x \quad \forall k = t_0, \dots, K-1, x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Неопределенность  $Z(k)$  в момент времени  $k = 0, 1, \dots, K-1$  будем отождествлять уже с  $n$ -вектор-функцией вида

$$z(k, x, u_1, u_2, u_3) = Q(k)x + R_1(k)u_1 + R_2(k)u_2 + R_3(k)u_3,$$

где  $Q(k), R_1(k), R_2(k), R_3(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , то есть

$$Z(k) \div z(k, x, u_1, u_2, u_3) = Q(k)x + R_1(k)u_1 + R_2(k)u_2 + R_3(k)u_3.$$

При формировании неопределенностей подразумевается «информационная дискриминация игроков» — неопределенность  $Z(k)$  в момент времени  $k$  формируется на основе «знания» не только позиции игры  $(k, x)$ , но и реализаций в этот момент стратегий игроков, то

есть в виде контрситуаций. Тогда множеством неопределенностей  $Z$  в игре (1) с начальной позицией  $(t_0, x_0)$  будет

$$\begin{aligned} Z = \{ Z = (Z(t_0), Z(t_0+1), \dots, Z(K-1)) \mid Z(k) \div z(k, x, u_1, u_2, u_3) = \\ = Q(k)x + \sum_{i=1}^3 R_i(k)u_i \quad \forall Q(k), R_1(k), R_2(k), R_3(k) \in \mathbf{R}^{n \times n} \}. \end{aligned}$$

Функция выигрыша  $i$ -го игрока квадратична и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(U^*, Z^*, t_0, x_0) = x'(K)C_i x(K) + \\ + \sum_{k=t_0}^{K-1} (u'_i[k]D_i(k)u_i[k] + z'[k]L_i(k)z[k]) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

значение которой и есть выигрыш этого игрока.

В игре (1) предполагается следующая схема информационного взаимодействия: игрок 1, являющийся лидером, передает игрокам нижнего уровня информацию о множестве своих «чистых» стратегий. На основе этой информации, игрок 2 и 3 формирует свои стратегии, как функции от «чистых» стратегий игрока верхнего уровня. На втором шаге, игроки нижнего уровня передают первому игроку информацию о выбранных ими стратегиях, после чего игрок 1 выбирает свою стратегию, стремясь максимизировать свой выигрыш. При этом, в процессе принятия решения, игроки вынуждены рассчитывать на возможность реализации любой неопределенности, о которой они не имеют никакой стохастической информации.

Используя подходы из [1, 2], для игры (1) в докладе формализуется понятие гарантированного по Парето равновесия по Штакельбергу и приводятся достаточные условия его существования.

### Литература

1. Жуковский В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 27–44.
1. Жуковский В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 3–45.

# ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И КОРРЕКТНОЕ УСЛОВИЕ ОСТАНОВКИ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ

О.А. Кузенков (Ниžний Новгород, ННГУ)  
*kuzenkov\_o@mail.ru*

В стохастических методах глобальной оптимизации существует проблема корректного условия останков работы алгоритма. Наиболее простым условием является ограничение на число шагов. Однако нет никакой гарантии, что полученное за фиксированное число шагов алгоритма решение будет хорошей аппроксимацией искомого оптимума. Другим возможным условием останков является прекращение улучшения значения целевой функции. Если, начиная с некоторого момента, получаемое решение практически не меняется, то процесс оптимизации заканчивается. Но для эвристических методов есть опасность прекращения улучшений из-за попадания в локальный экстремум. В результате может иметь место ситуация, что разные алгоритмы в одной и той же задаче дают отличающиеся результаты. Значительно более эффективным условием останков является условие достижения заданной точности приближения точки оптимума. Такое условие используется в некоторых сходящихся алгоритмах детерминированного поиска: в методе «золотого сечения», в методе Пиявского и т.п. Однако использование этого условия в стохастических алгоритмах сталкивается с серьезными затруднениями. Здесь обычно невозможно оценить полученную точность приближения.

Целью настоящей работы является установление новых, более корректных условий останков метода стохастической глобальной оптимизации. В основе исследования лежит информационный анализ оптимизационных процедур. Метод оптимизации рассматривается как процесс постепенного получения все большей информации о расположении точки глобального оптимума. В качестве основного рабочего примера используется сравнительно новый и достаточно простой стохастический метод многоэкстремальной многомерной оптимизации SoFA (Survive of the Fittest Algorithm), который относится к классу эволюционных методов [1].

Проведенный анализ позволяет сформулировать условие останков алгоритма, которое в ряде случаев гарантирует достижение



заданного разнообразия множества точек испытаний и получение нужного количества информации с заданной вероятностью.

Исследование позволяет сделать заключение о значимости информационного анализа для совершенствования методов современных информационных технологий. Выявленные в ходе исследования методологические принципы понимания и анализа информации внедрены в учебный процесс подготовки бакалавров информационных технологий в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского при модернизации дисциплины «Математическое моделирование процессов отбора» [2-4].

### **Литература**

1. Morozov A.Y. Global optimization in hilbert spaces using the Survival of the Fittest Algorithm. / A.Y. Morozov, S.K. Sandhu, O.A. Kuzenkov // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Т. 103. — С. 106007.
2. Кузенков О.А. Компьютерная поддержка учебно-исследовательских проектов в области математического моделирования процессов отбора / О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, Т.П. Киселева // Образовательные технологии и общество. — 2019. — Т. 22. № 1. — С. 152-163.
3. Кузенков О.А. Использование электронных средств обучения при модернизации курса «Математическое моделирование процессов отбора» / Кузенков О.А., Кузенкова Г.В. Киселева Т.П. // Образовательные технологии и общество. — 2018. — Т. 21. № 1. — С. 435-448.
4. Кузенков О.А. Взаимосвязь между проектом МЕТАМАТН и продолжающейся реформой высшего образования в России / Кузенков О.А., Захарова И.В. // Образовательные технологии и общество. — 2017. — Т. — 20. № 3. — С. 279-291.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ<sup>1</sup>

**Р.Ч. Кулаев** (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, СОГУ)  
*kulaevrch@mail.ru*

В докладе обсуждается вопрос о существовании решения нелинейной краевой задачи четвертого порядка на графе  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' &= f(x, u, p(x)u''), \quad x \in \Gamma, \\ u|_{\partial\Gamma} &= u''|_{\partial\Gamma} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\partial\Gamma$  – множество граничных вершин  $\Gamma$ . При этом, под дифференциальным уравнением в (1) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' = f_i(x, u_i, u_i''), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma), \tag{2}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине  $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u_k(a), \quad i, k \in I(a), \quad (pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a)u_i'(a) &= 0, \quad \alpha_i(a) > 0, \\ \sum_{i \in I(a)} (pu'')_i'(a) &= f(a, u_k(a), u_k''(a)), \quad a \in J(\Gamma). \end{aligned} \tag{4}$$

Задача (1), порожденная соотношениями (2)–(4), моделирует малые деформации стержневой системы с условиями  $\delta$ -типа (см.[1]). В этом случае равенства (3)–(4) задают условия на смещения и изгибающие моменты: перемещения всех соединяемых ребер непрерывны, а изгибающие моменты знаковсогласованы [2,3]. Последнее условие – это условие динамического равновесия.

Далее считаем, что выполнены условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ ;
- $\alpha_i(a) > 0$  для всех  $i \in I(a)$  и  $a \in J(\Gamma)$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой Министерства науки и высшего образования РФ (грант на создание и развитие НОМЦ СОГУ соглашение № 075-02-2024-1447)

Обозначим через  $L_0$  линейный дифференциальный оператор, порождаемый линейным уравнением

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' &= h(x), \quad x \in E(\Gamma), \\ u_i(a) &= u_k(a), \quad (pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a), \quad i, k \in I(a); \\ \sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a)u'_i(a) &= 0, \quad \sum_{i \in I(a)} (pu'')'_i(a) = h(a), \quad a \in J(\Gamma), \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Кратко данную линейную задачу можно записать в виде

$$L_0u = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (5)$$

а исходная нелинейная задача тогда запишется в виде

$$L_0u = f(x, u, u''), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (6)$$

**Теорема 1.** Дифференциальный оператор  $L_0 : C^4[\Gamma] \rightarrow C[\Gamma]$  краевой задачи (LP) обратим, а его функция Грина  $G(x, s)$  положительна на множестве  $\Gamma \times \Gamma$ .

**Теорема 2.** (принцип максимума) Всякое нетривиальное решение краевой задачи

$$L_0u \geq 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geq 0, \quad u''|_{\partial\Gamma} \leq 0,$$

положительно на графе  $\Gamma$ .

**Определение 1.** Функция  $\alpha \in C^4[\Gamma]$  называется нижним решением задачи (NP), если

$$L_0\alpha \leq f(x, \alpha, \alpha''), \quad x \in \Gamma, \quad \alpha|_{\partial\Gamma} \leq 0, \quad \alpha''|_{\partial\Gamma} \geq 0.$$

**Определение 2.** Функция  $\beta \in C^4[\Gamma]$  называется верхним решением задачи (NP), если

$$L_0\beta \geq f(x, \beta, \beta''), \quad x \in \Gamma, \quad \beta|_{\partial\Gamma} \geq 0, \quad \beta''|_{\partial\Gamma} \leq 0.$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены следующие условия:

- (i) существуют  $\alpha$  и  $\beta$ , верхнее и нижнее решения, задачи (NP), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}\alpha(x) &\leq \beta(x) \text{ для всех } x \in \Gamma; \\ \beta''(x) &\leq \alpha''(x) \text{ для всех } x \in E(\Gamma);\end{aligned}$$

- (ii)  $f$  удовлетворяет условиям

$$f(x, s, v) - f(x, t, v) \leq 0 \text{ для } \alpha(x) \leq s \leq t \leq \beta(x), \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma,$$

$$f(x, u, s) - f(x, u, t) \geq 0 \text{ для } \beta''(x) \leq s \leq t \leq \alpha''(x), \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда существуют две монотонные последовательности  $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ , неубывающая и невозрастающая соответственно с  $\alpha_{[0]} = \alpha$  и  $\beta_{[0]} = \beta$ , которые сходятся равномерно к экстремальным решениям задачи (NP) из порядкового отрезка  $[\alpha, \beta]$ .

### Литература

1. Xu G.Q. Differential equations on metric graph. / Xu G.Q., Mastroakis, N.E. // Wseas Press, 2010.
2. Dekoninck B. The Eigenvalue Problem for Network of Beams, in Generalized Functions / Dekoninck B., Nicase S. // Linear Algebra Appl. 2000. V. 314. № 1-3. P. 165–189.
3. Kulaev R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph / R.Ch. Kulaev. // Mediterr. J. Math. — 2022. V. 19:73.
4. Kulaev, R.Ch. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network / Kulaev, R.Ch., Urtaeva A.A. // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. 1–21.

# ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЕРАТОР<sup>1</sup>

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)

*kulikov\_d\_a@mail.ru*

Как правило, для моделирования макроэкономической динамики используют обыкновенные дифференциальные уравнения (см., например, [1,2]). При этом центральное место занимает вопрос об объяснении явления цикличности рыночной экономики. Вместе с тем в монографии [1], а также и других работах была высказана идея о существенном влиянии на экономическую динамику пространственных факторов.

В докладе это будет проиллюстрировано на примере одной из известных математических моделей макроэкономики – "мультипликатор – акселератор", которую предложено дополнить слагаемыми, призванными учесть пространственное распределение

$$Y_t = I - aY + d_1 Y_{xx}, \quad I_t = bY_t - cI + F(Y_t) + d_2 Y_{xx}, \quad (1)$$

где  $a, b, c, d_1, d_2$  – положительные или неотрицательные постоянные,  $Y(t, x)$  – национальный доход,  $I(t, x)$  – индуцированные инвестиции. Последние слагаемые призваны учесть на феноменологическом уровне влияние пространственного распределения.

В работах [1-5] система (1) была сведена к анализу следующего дифференциального уравнения с частными производными, которое после перенормировок и преобразований имеет следующий вид

$$u_{tt} - 2\alpha u_t - 2\beta u_{xxt} + \sigma^2 u - u_{xx} = (F_j(u))_t, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$  ( $\beta \geq 0, \sigma > 0$ ),  $u = u(t, x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Уравнение (2) будем изучать вместе с краевыми условиями

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (3)$$

Пусть нелинейное слагаемое выбрано одним из двух следующих способов: 1)  $F_1(u) = -(u^3)_t$ , 2)  $F_2(u) = -(u \int_0^\pi u^2 dx)_t$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

© Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г., 2024

В докладе предполагается изложить результаты анализа поведения решений краевой задачи (КЗ) (2), (3) в следующих случаях:

- 1)  $\alpha = \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ; 2)  $\alpha = m^2\beta + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ;
- 3)  $\alpha = \varepsilon, \beta = 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 < 1, \gamma > 0$ .

Используя методы анализа бесконечномерных динамических систем можно показать, что для КЗ (2), (3) справедливо следующее.

В случае 1) она имеет асимптотически орбитально устойчивый пространственно однородный цикл при обоих вариантах выбора нелинейности.

В случае 2) КЗ (2),(3) имеет седловой (неустойчивый) пространственно неоднородный цикл.

В случае 3) при первом выборе нелинейного слагаемого КЗ (2), (3) имеет асимптотически большое число устойчивых циклов, а существующие при этом инвариантные торы неустойчивы. При втором выборе  $F(u)$  КЗ (2), (3) имеет асимптотически большое число неустойчивых (седловых) инвариантных циклов и торов.

### Литература

1. Puu T. Nonlinear Economic Dynamics. Berlin / Т. Puu. — Berlin. : Springer-Verlag, 1989. — 333 p.
2. Zhang W.B. Synergetic economics. Time and change in nonlinear economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 246 p.
3. Косарева Е.С. Об одной нелинейной краевой задачи, моделирующей экономические циклы /Е.С. Косарева, А.Н. Куликов // Моделир. и анализ информ. систем. — 2003. — Т. 10. — №. 2. — С. 18-21.
4. Колесов А.Ю. Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-акселератор /А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // ДАН. — 2008. — Т. 420. — №. 6. — С. 739-743.
5. Куликов А.Н. О возможности реализации сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности в обобщенной модели «мультипликатор-акселератор» / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // ВИНТИ РАН. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — Т. 203. — С. 39-49.

# ТЕОРЕМА О РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПОТЕНЦИАЛОМ ИЗ $L_p(0, 2\pi)$ , $p > 2$ .

**В.М. Курбанов, Л.З. Буксаева** (Баку, Азербайджанский  
Государственный Педагогический Университет)  
*q.vali@yahoo.com, leylabuksayeva.80@yahoo.com*

Пусть интервал  $(0, 2\pi)$  точками  $\{\xi\}_{i=0}^m$ ,  $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = 2\pi$ , разбит на интервал  $G_l = (\xi_{l-1}, \xi_l)$ ,  $l = \overline{1, m}$ .

Рассмотрим оператор Дирака

$$Ly \equiv B \frac{dy}{dx} + P(x)y, \quad x \in G = \cup_{l=1}^m G_l,$$

где  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ ,  $b_{ii} = 0$ ,  $b_{i,3-i} = (-1)^{i-1}$ ,  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ ,  $P(x) = \text{diag}(p(x), q(x))$ , причем  $p(x)$  и  $q(x)$  комплекснозначные суммируемые на  $(0, 2\pi)$  функции.

Следуя [1-2], будем понимать корневые (т.е. собственные и присоединенные) вектор-функции оператора, безотносительно к виду краевых условий и условия «сшивания» (см. [3-4]). Пусть  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$  - произвольная система, составленная из корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора  $L$ , а  $\{\lambda_k\}$  - соответствующая ей система собственных значений и выполняются условиям  $A_2$  (условия В.А. Ильина):

1) система вектор-функций  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$  полна и минимальна в  $L_2^2(0, 2\pi)$ .

2) система собственных значений  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  удовлетворяет двум неравенствам:

$$|Im \lambda_k| \leq C_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad \sum_{t \leq |\lambda_k| \leq t+1} 1 \leq C_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Для произвольной  $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$  составим частичную сумму порядка  $n$  биортогонального разложения по системе  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ :

$$\sigma_n(x, f) = \sum_{k=1}^n (f, v_k) u_k(x), \quad x \in G.$$

Для каждого  $j = 1, 2$  рассмотрим  $j$ -ю компоненту частичной суммы

$$\sigma_n^j(x, f) = \sum_{k=1}^n (f, v_k) u_k^j(x), \quad x \in G.$$

сравним с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье соответствующей  $j$ -й компоненты  $f_j(x)$  вектор-функции  $f(x)$

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} f_j(y) dy,$$

порядка  $\nu = |\lambda_n|$ .

Будем говорить, что  $j$ -я компонента разложения вектор-функции  $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$  в биортогональный ряд по системе  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$  равносходится равномерно на любом компакте множества  $G = \bigcup_{l=1}^m G_l$  с разложением соответствующей  $j$ -й компоненты  $f_j(x)$  вектор-функции в  $f(x)$  тригонометрический ряд Фурье, если на любом компакте  $K \subset G$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n^j(\cdot, f) - S_{|\lambda_n|}(\cdot, f_j)\|_{C(K)} = 0.$$

**Теорема 1.** Пусть  $P(x) \in L_p(0, 2\pi) \otimes C^{2 \times 2}$ ,  $p > 2$ , и система  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$  удовлетворяет двум условиям  $A_2$ . Тогда для того чтобы каждая  $j$ -я ( $j = 1, 2$ ) компонента разложения произвольной вектор-функции  $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$  в биортогональный ряд по системе  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$  равносходилась равномерно на любом компакте  $K_0 \subset G$  с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей  $j$ -й компоненты  $f_j(x)$  вектор-функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта  $K_0 \subset G$  существовала постоянная  $C(K_0)$ , обеспечивающая справедливость для всех номеров  $k$  неравенства

$$\|u_k\|_{L_2^2(K_0)} \|v_k\|_{L_2^2(0, 2\pi)} \leq C(K_0).$$

### Литература

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. / В.А. Ильин // Дифференц. Уравнения. 1980. — Т.16, — №5, — С.771–794.
2. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II. / В.А. Ильин // Дифференц. Уравнения. 1980. — Т.16, №6, — С.980–1009.



3. Курбанов В.М. О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака. / В.М. Курбанов, Буксаева Л.З. // Дифференц. Уравнения. 2019. — Т.55, — №8, — С.1079–1089.

4. Буксаева Л.З. Теорема о равномерной равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, отвечающих разрывным операторам Дирака / Буксаева Л.З. // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII Посвящается Юрию Ивановичу Сапронову (75-летию со дня рождения) (3–9 мая 2022 г.), — С 48–50.

## НЕРАВЕНСТВО РИССА ДЛЯ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СУММИРУЕМЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.М. Курбанов, Х.Р. Годжаева (Азербайджан,  
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет)  
*q.vali@yahoo.com* , *mehdizade.xedice@gmail.com*

Рассмотрим на интервале  $G = (0, 1)$ , оператор

$$L\psi = \psi'' + P_1(x)\psi' + P_2(x)\psi$$

с суммируемыми матричными коэффициентами  $P_1(x) = (p_{1i,j}(x))_{i,j=1}^{\infty}$ ,  $P_2(x) = (p_{2i,j}(x))_{i,j=1}^{\infty}$ .

Корневые вектор-функций (собственные и присоединенные вектор-функции) понимаются обобщенной трактовке (безотносительно к краевым условиям) [1].

Через  $L_p^m(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , обозначим пространством-компонентных вектор-функций  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$  с нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,m} = \left( \int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left( \int_G \left( \sum |f_i(x)|^2 \right)^{1/2} dx \right)^{1/p}.$$

Пусть  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  - произвольная система, составленная из корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора  $L$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  - соответствующая ей система собственных значений. Кроме того, каждая вектор-функция  $\psi_k(x)$  входит в систему  $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

вместе со всеми соответствующими ей присоединенными функциями меньшего порядка.

**Определение.** Система  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q^m(G)$  называется *риссовой* (или удовлетворяет *неравенству Рисса*), если существует постоянная  $M = M(p)$  такая, что для любой вектор-функций  $f(x) \in L_p^m(G)$ ,  $1 < p \leq 2$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ , выполняется неравенство

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^q \right)^{1/q} \leq M \|f\|_p.$$

где  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .

Обозначим  $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ ,  $\operatorname{Re} \mu_k \geq 0$ .

Главным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема** (Критерий риссовости). Пусть  $p_{ij}(x) \in L_1(G)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ , длина цепочки корневых вектор-функций равномерно ограничена и существует постоянная  $C_0$  такая, что

$$|Im \mu_k| \leq C_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда для риссовости системы,  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  где  $\{\psi_k(x)\} = \psi_k(x) \|\psi_k(x)\|_q^{-1}$ , необходимо и достаточно существование константы такой, что

$$\sum_{\tau \leq \operatorname{Re} \mu_k \leq \tau+1} 1 \leq M_1, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2)$$

**Замечание.** В достаточной части теоремы условие равномерной ограниченности цепочек корневых вектор-функций можно опустить, ибо оно является следствием условия (2).

### Литература

1. Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка / В.А. Ильин // Докл. АН СССР. 1983. — Т.273. №5. — С.1048-1053

2. Курбанов В.М. О неравенстве Хаусдорфа-Юнга для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора  $n$ -го порядка / В.М. Курбанов // Дифференциальные уравнения. — 1997, — Т.33, №3, — С.356-367.

3. Курбанов В.М. Об аналоге теоремы Рисса и базисность в системы корневых функции дифференциального оператора  $l, (II)$  /

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

**В.Г. Курбатов, Е.Д. Хороших, В.Ю. Чурсин** (Воронеж, ВГУ)  
*kv51@inbox.ru*

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) - Ax(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

с комплексным матричным коэффициентом  $A$  размера  $M \times M$ , спектр которого не пересекает полуось  $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ . В этих условиях при любой непрерывной ограниченной  $f$  рассматриваемое уравнение имеет единственное ограниченное решение  $x$ , и это решение задается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s) ds,$$

где функция Грина  $G$  представима в виде

$$G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.$$

Очевидно,  $G(-t) = G(t)$ . Поэтому достаточно найти  $G(t)$  при  $t \geq 0$ .

Непосредственно проверяется, что функции

$$l_{n,\tau}(t) = \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t), \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $\tau > 0$  — параметр масштабирования (сжатия-растяжения), а  $L_n$  — многочлены Лагерра, образуют ортонормированный базис в пространстве  $L_2[0, \infty)$ . Предлагается искать приближение к  $G$  в виде

$$G_{N,\tau,A}(t) = \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,A} l_{n,\tau}(t),$$

где  $N$  — небольшое число, а

$$Q_{n,\tau,A} = \int_0^\infty G(t) l_{n,\tau}(t) dt.$$

Для коэффициентов  $Q_{n,\tau,A}$  получены рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} Q_{0,\tau,A} &= -\sqrt{\tau}(\sqrt{A})^{-1}(2\sqrt{A} + \tau \mathbf{1})^{-1}, \\ Q_{n+1,\tau,A} &= (2\sqrt{A} - \tau \mathbf{1})(2\sqrt{A} + \tau \mathbf{1})^{-1} Q_{n,\tau,A}. \end{aligned}$$

Точность приближения, очевидно, зависит от параметра масштабирования  $\tau$ . Целью работы является нахождение  $\tau$ , для которого величина

$$\|G_A - G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\int_0^\infty \|G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\|_F^2 dt}$$

близка к минимальной; здесь  $\|\cdot\|_F$  — норма Фробениуса.

Рассмотрим функцию

$$\xi(N, \tau, \lambda) = \int_0^\infty \left| g_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda} l_{n,\tau}(t) \right|^2 dt,$$

где

$$q_{n,\tau,\lambda} = - \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}} l_{n,\tau}(t) dt, \quad \lambda \notin \mathbb{R}_-.$$

Получена формула

$$\xi(N, \tau, \lambda) = \frac{\tau}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{|2\sqrt{\lambda} + \tau|^2 - |2\sqrt{\lambda} - \tau|^2} \cdot \left| \frac{2\sqrt{\lambda} - \tau}{2\sqrt{\lambda} + \tau} \right|^{2N+2}.$$

Предположим, что матрица  $A$  диагонализуема, т. е. существует обратимая матрица  $T$  и диагональная матрица  $D$ , для которых  $A = TDT^{-1}$ . В этом случае:

$$\|G_A - G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)} \leq \varkappa(T) \sqrt{\sum_{k=0}^M \xi(N, \tau, \lambda_k)},$$

где  $\varkappa(T) = \|T\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \|T^{-1}\|_{2 \rightarrow 2}$  — число обусловленности матрицы  $T$ ,  $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$  — норма матрицы, порожденная евклидовой нормой в  $\mathbb{C}^M$ , а  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы  $A$ .

В качестве оптимального  $\tau$  рекомендуется взять точку минимума функции

$$\rho(N, \tau) = \sum_{k=0}^M \xi(N, \tau, \lambda_k).$$

Приводятся результаты численных экспериментов.

# ПОВЕРХНОСТИ НА СОБСТВЕННО ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВОЙ ГРУППЕ

**В.А. Кыров** (Горно-Алтайск, ГАГУ)

*KyrovVA@yandex.ru*

Рассмотрим матричную группу Ли [1]:

$$G : \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $(x, y, z)$  — точка группы Ли, а  $\alpha, \beta$  — постоянные. Коммутационные соотношения для алгебры Ли этой группы следующие:

$$AG : [e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = -\beta e_2, [e_3, e_1] = \alpha e_1.$$

Левоинвариантная метрика вычисляется в работе [1]:

$$ds^2 = e^{-2\alpha z} dx^2 + e^{-2\beta z} dy^2 + e^{-(\alpha+\beta)z} dz^2.$$

Связность Леви-Чивиты [1]:

$$\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_3, \nabla_{e_1} e_2 = 0, \nabla_{e_1} e_3 = -\alpha e_1, \nabla_{e_2} e_1 = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \beta e_3, \nabla_{e_2} e_3 = -\beta e_2, \nabla_{e_3} e_1 = 0, \nabla_{e_3} e_2 = 0, \nabla_{e_3} e_3 = 0.$$

Обозначим через  $\Sigma$  поверхность, вложенную в  $G$ , и  $f : \Sigma \rightarrow G$  — вложение.  $z = x + iy$  — конформный параметр на  $\Sigma$ , а  $I = e^{2\varphi} dz d\bar{z}$  — индуцированная метрика [2].

Так как метрика левоинвариантна, то полагаем  $\Psi = f^{-1}\partial f$ ,  $\Psi^* = f^{-1}\bar{\partial}f$ , следовательно  $\Psi = \sum_{k=1}^3 Z_k e_k$ ,  $\Psi^* = \sum_{k=1}^3 \bar{Z}_k e_k$ . При этом  $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0$ ,  $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2}e^{2\varphi}$ , следовательно  $Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2)$ ,  $Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2)$ ,  $Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2$ . Тогда деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} D\psi &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{\alpha + \beta}{4} |\psi_1|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4} \bar{\psi}_1 \frac{\bar{\psi}_2^2}{\psi_1^2} + \frac{H}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= -\frac{\alpha + \beta}{4} |\psi_2|^2 - \frac{\alpha - \beta}{4} \bar{\psi}_2 \frac{\bar{\psi}_1^2}{\psi_2^2} + \frac{H}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \end{aligned}$$

где  $H$  — средняя кривизна поверхности.

Вычисляются:

дифференциал Хопфа поверхности в  $G$ :

$$A = (\bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2) + \frac{\beta - \alpha}{4} (\bar{\psi}_2^4 - \psi_1^4)$$

и уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \partial \psi_1 &= \varphi_z \psi_1 + \psi_2 A e^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4} \psi_1^2 \bar{\psi}_2 + \frac{\alpha - \beta}{4} \bar{\psi}_2^3, \\ \partial \psi_2 &= -U \psi_1, \\ \bar{\partial} \psi_1 &= V \psi_2, \\ \bar{\partial} \psi_2 &= \varphi_{\bar{z}} \psi_2 - \psi_1 \bar{A} e^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4} \bar{\psi}_1 \psi_2^2 + \frac{\alpha - \beta}{4} \bar{\psi}_1^3. \end{aligned}$$

Уравнения Кодацци принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{4} e^{2\varphi} - |A|^2 e^{-2\varphi} &= \\ \frac{(\alpha + \beta)^2}{16} e^{2\varphi} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} (\psi_1^2 \psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2 \bar{\psi}_2^2) + \\ \frac{(\alpha - \beta)^2}{16} (6|\psi_1|^2 |\psi_2|^2 - |\psi_1|^4 - |\psi_2|^4), \\ A_{\bar{z}} e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2} e^{\varphi} &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2^3 - \psi_1^3 \psi_2) + \\ \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) \psi_1 \bar{\psi}_2. \end{aligned}$$

### Литература

1. Кыров В.А. Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли / В.А. Кыров // Математические заметки СВФУ. — 2023. — Т. 30, № 4. — С. 24–36. DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36
2. Бердинский Д.А. Поверхности в трехмерных группах Ли / Д.А. Бердинский, И.А. Тайманов // Сиб. математ. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1248–1264.

## АКТУАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

М.А. Лаврентьева, Л.В. Левина, В.Б. Пеньков

(Липецк, ЛГТУ)

*satalkina\_lyubov@mail.ru*

Актуальное состояние исследований в термоупругости отражено в диссертационных работах различного уровня, выполненных в последнее время. Тематика исследований: 1) динамика физики нелинейных термоупругих объектов (D. Soni, 2023); 2) идентификация параметров среды средствами теории игр (R. Chamekh, 2019); 3) формирование граничных элементов, отражающих характер включений в среде (Chao Wu, 2021); 4) высокоскоростной гранично-элементный метод оценки состояния вплоть до разрушения (B. Liu, 2022); 5) сравнительный анализ численных методов (A. Ghavamian, 2020); 6) микротрещино-образование объектов классических и нелинейных сред (F. Rabette, 2021); 7) «пространственно-временной» подход в оценке конечных деформаций (R. Al Nahas, 2021); 8) пошаговое проектирование литьевых форм (F. Zwicke, 2020).

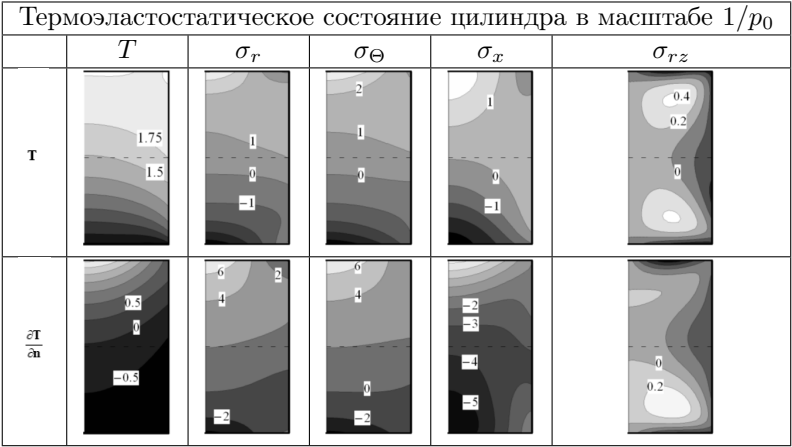
Эти исследования выполнены на фоне ряда трудов, соответствующих последнему времени. Краткий список авторов: 1) N. Boudrahem, A. Berboucha, 2021; 2) R.M. Kushnir, Y.V. Tokovyy, D.S. Boiko, 2019; 3) S.B. Pimpale, C.S. Sutar, K.K. Chaudhari, 2021; 4) K. Xie, H. Song, P. Schiavone, C. Gao, 2024; 5) K. Wang, P. Li, K. Zhang, 2023; 6) M.T. Ebrahimi, D.S. Balint, D. Dini, 2023; 7) Chen-Hao Tan, Bing-Bing Xu, Yong-Tong Zheng, Si-Qi Zhang, Wen-Wei Jiang, Kai Yang, Xiao-Wei Gao, 2024; 8) Heng Liang Zhang, Seonho Kim, Geehong Choi, Dan Mei Xie, Hyung Hee Cho, 2021; 9) M.R. Hematiyan, M. Mohammadi, Chia-Cheng Tsai, 2021.

Энергетический метод граничных состояний (МГС) обладает рядом достоинств: универсальность (задачи математической физики: термостатика, упругость, термоэластостатика, электростатика, ...); самодостаточность (для оценки точности не требуется сравнения с результатами, полученными иными подходами); численно-аналитическая форма представления результатов (существуют подходы к построению полнопараметрических аналитических решений). Основы МГС изложены в диссертациях: Пеньков В.Б., 2002; Харитоненко А.А., 2006; Саталкина Л.В., 2010; Иванычев Д.А., 2010; Стебенев И.Н., 2013; Шульмин А.С., 2014; Рязанцева Е.А., 2015; Новикова

О.С., 2019. МГС использует изоморфные гильбертовы пространства внутренних и граничных состояний (с равными скалярными произведениями изоморфных пар), системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения решения по базисам, организованным на подходе Треффца.

В таблице приведены результаты анализа двух задач, в которых термоупругий цилиндр сжимается равномерными осевыми усилиями интенсивности  $p_0$  по торцам и растягивается радиальными усилиями по боковой поверхности  $\mathbf{p} = p_0\{(1 - z^2) \cos \varphi, (1 - z^2) \sin \varphi, 0\}$ . Безразмерные термоупругие параметры таковы:  $\lambda=\mu=1, \alpha=0,0045$ .

Таб. 1. Термоэластостатическое состояние цилиндра.



Температурное воздействие задано в вариантах:

1) задача Дирихле:

$$T = \begin{cases} 0, S_1 \\ \sqrt{4 - (z - 1)^2}, S_2 \\ 2, S_3 \end{cases} \quad ;$$

2) задача Неймана:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} 0, S_1 \\ -1 - z, S_2 \\ 8(1 - r^2), S_3 \end{cases} .$$

216



Граничные условия удовлетворяют требованиям стационарности. Требуется определить внутреннее термо-напряженное состояние тела.

Сравнение полей температуры, радиальных, окружных, осевых и сдвиговых напряжений свидетельствует о существенном влиянии температурных напряжений на их общую картину и позволяет осуществлять качественные выводы.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О РАСПОЛОЖЕНИИ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ О КОНТАКТЕ НЕОДНОРОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА<sup>1</sup>

**Н.П. Лазарев** (Якутск, СВФУ)  
*nyurgunlazarev@yandex.ru*

Рассмотрена вариационная задача о равновесии трехмерного упругого тела с жестким включением. Нелинейное условие Синьорини накладывается на заданной части внешней границы тела и описывает контакт с недеформируемым препятствием. На другой части границы задается однородное условие Дирихле. Обратная задача заключается в определении расположения жесткого включения при условии, что известны перемещения на заданной части внешней границы. Установлена непрерывная зависимость решений прямой задачи от вариации параметров расположения включения. Доказана разрешимость обратной задачи. В отличие от ранее изученных задач об оптимальном расположении жестких включений в [1,2], в настоящей постановке учитывается изменение расположения включения не только за счет параллельных переносов, но и поворотов. Для двумерного случая задача оптимального расположения жестким включением для контактной задачи исследована в [3].

### Литература

1. Lazarev N. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack / N. Lazarev, H. Itou // Math. Mech. Solids. — 2019. — V. 24. — P. 3743–3752.
2. Lazarev N. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies /

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

© Лазарев Н.П., 2024

N. Lazarev, E. Rudoy // J. Comput. Appl. Math. — 2022. — V. 403. — P. 113710.

3. Lazarev N.P. Optimal location and shape of a rigid inclusion in a contact problem for inhomogeneous two-dimensional body / N.P. Lazarev, E.F. Sharin, G.M. Semenova, E.D. Fedotov // Сиб. электрон. матем. изв. — 2022. — Т. 19, № 2. — С. 627–638.

## ФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОРГАНИЗАЦИИ НЕЙРОСЕТЕЙ

**И.А. Латыпов, Н.В. Латыпова** (Ижевск, УдГУ)

*symposium2016@mail.ru, latypova-nv@yandex.ru*

Фрактальность — неотъемлемое свойство любого природного объекта или процесса. Фрактальный подход прочно вошёл в научный обиход и исследования учёных. Искусственные нейронные сети (ИНС) созданы по аналогии с биологическими (или естественными) сетями нейронов, по которым передаются сигналы в головной мозг. Основной элемент любой модели ИНС — это формальный нейрон. Нейрон вычисляет скалярное произведение входного сигнала  $x$  и вектора весов  $w$ . Затем это произведение с помощью некоторой функции активации  $F$  преобразуется в выход нейрона — некоторое значение  $y$ :

$$y(x, w) = F(x \cdot w). \quad (1)$$

Не имеет смысла даже перечислять появившееся большое количество интересных моделей и алгоритмов, связанных с ИНС, которые как раз и зависят от подбора весов и функции активации. Принцип работы, промежуточная статистика и соответственно сам процесс принятия решения скрыты от наблюдателя: на входе делается запрос, на выходе ИНС даёт некоторый ответ. Специфика нейросети не гарантирует абсолютной правдивости результатов. Применение фрактальной организации при построении ИНС позволяет сгладить описанные недостатки или уменьшить их влияние.

В самом деле, существуют разные подходы использования фрактальности при создании ИНС, которые приводят к понятию фрактальных нейронных сетей. Первый заключается в том, что фрактальные свойства синтезируются и встраиваются в саму математическую модель ИНС при построении (например, [1]), что при простоте реализации увеличивает скорость работы сети и даёт возможность практического обнаружения глобального минимума функции

ошибки. Другими словами, фрактальные нейронные сети позволяют оценить достоверность полученных сетью результатов. При втором подходе фрактальными свойствами обладают разрабатываемые электронные структуры, которые при интегрировании с ИНС расширяют функциональные и «интеллектуальные» возможности последней [2].

В биологических системах благодаря свойству самоподобия и повторяющейся организации элементов (нейроны, органеллы, макромолекулы и др. клетки) на разных уровнях получаются сети внутри сетей — своеобразная мета-сеть. Примеры такой фрактальной организации природных нейронных сетей подробно описаны в [3; 4].

В [5] для построения фрактальной нейронной сети описывается применение систем итерируемых функций (СИФ) как совокупности сжимающих отображений вместе с задаваемой итерационной схемой. Пусть теперь для построения нейрона в формуле (1) в качестве функции активации берётся преобразование Хатчинсона, определяемое СИФ с соответствующими вероятностями для выбора сжимающего отображения, входящего в систему. Набор СИФ можно найти с помощью генетического алгоритма. Полученное устройство называют вероятностным гипернейроном [5], а ИНС — случайной итеративной нейронной сетью.

Резюмируя, стоит отметить, что закладывая фрактальность при построении и организации ИНС, мы с одной стороны, приближаемся к пониманию законов природы и человеческого сознания, моделируя их объекты, а с другой — увеличиваются скорость сети и достоверность полученных ею результатов.

### Литература

1. Юрков Д.А. Синтез нейронных сетей с фрактальной структурой / Д.А. Юрков // ВЕЖПТ. — 2009. — №3 (40). — С. 39–44.
2. Алюшин А.В. Фрактальные нейронные сети на основе импульсных нейронов и мемристоров / А.В. Алюшин, С.А. Алюшин // Научный альманах. — 2016. — №10-3 (24) — С. 22–25.
3. Молчатский С.Л. Фрактальная организация и самоорганизация нейронных структур мозга: монография / С.Л. Молчатский. — Самара : ПГСГА, — 2015. — 133 с.
4. Исаева В.В. Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе: монография / В.В. Исаева, Ю.А. Каретин, А.В. Чернышев, Д.Ю. Шкуратов. — Владивосток : Изд-во «Дальнаука», 2004. — 162 с.

5. Макаренко Н.Г. Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое / Н.Г. Макаренко // Научная сессия МИФИ-2002. IV Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2002»: Лекции по нейроинформатике. Часть 2. — М. : МИФИ. —2002. — 172 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЯЧЕЕК ВОРОНОГО В ПРОБЛЕМЕ РАССЕЯНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ, ЗАДАНЫМ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКОЙ<sup>1</sup>

Д.Р. Лепетков (Тула, ТулГУ)

*Lepetkov@ya.ru*

Изучается проблема рассеяния плоской звуковой волны  $\Psi_i(x) = Ae^{ikxd}$  абсолютно жестким телом  $D \subset \mathbb{R}^3$  с кусочно - гладкой поверхностью  $S$ . Для расчета потенциала рассеянной волны  $\Psi_s(x)$  применяется граничное интегральное уравнение Бертон -Миллера

$$C(x)\Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' + \Psi_i(x) + \frac{i}{k} \left( \int_S \partial_{n,n'}^2 G(x', x) \Psi(x') dx' + \partial_n \Psi_i(x) \right), \quad x \in S,$$

где  $\Psi = \Psi_s + \Psi_i$ ,  $G = G_k$  — функция Грина для уравнения Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $\Psi_s(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx'$ ,  $x \in D^c$ .

Использование уравнения Бертон -Миллера позволяет решить проблему неединственности решения [1, 2]. Здесь интегралы являются сингулярными, для их регуляризации применяется метод на основе тождеств для функции Грина  $G_0$  [3].

Данные формулы составляют сущность метода граничных элементов. Рассматривается случай, когда тело произвольное и его поверхность  $S$  задается нерегулярным треугольным мешем без края, состоящим из множеств вершин  $V$ , треугольных граней  $F$  и внешних вершинных нормалей  $N$ . Данный случай отличается от вариантов задания границы  $uv$ -поверхностями как в COMSOL или [2].

Для численного решения выбран метод коллокаций, обоснование которого дается, например, в [4]. Его идея следующая. Меш разбивается на элементарные области Вороного  $S_i$  с центрами в вершинах  $x_i \in V$  и площадями  $w_i$ . Неизвестный суммарный потенциал

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ(соглашение №073-00033-24-01)

© Лепетков Д.Р., 2024

$\Psi(x)$  аппроксимируется на  $S$  кусочно-постоянной функцией со значениями  $\Psi^{(i)}$  в вершинах  $x_i$  и участками постоянства  $S_i$ . Интегралы вида  $\int_S f(x) dx$  заменяются квадратурными формулами  $\sum_i w_i f(x_i)$ . Для регуляризации сингулярных интегралов используется градиент  $\nabla\Psi$ . Для его оценки на нерегулярной сетке применяется приближение  $\Psi$  линейной функцией по вершинам из окрестности  $x_i$ . В итоге, задача сводится к решению системы линейных уравнений  $(A^{(i,j)})(\Psi^{(j)}) = (B^{(i)})$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, |V| - 1$ .

Данный метод успешно валидировался на шаре, где известно аналитическое решение. Результаты также сравнивались с решением COMSOL, они оказались идентичными.

Предложенный метод имеет недостаток, связанный с размером системы линейных уравнений. Данная система, как известно, является заполненной. В экспериментах она составлялась и решалась за приемлемое время для числа вершин  $|V|$  порядка 20000. Однако реальные модели, например, получаемые 3D-сканированием, часто содержат сотни тысяч и миллионы вершин. Поэтому в таких случаях требуется то или иное упрощение. Естественный подход состоит в симплификации меша до нужного числа вершин, например, методом схлопывания ребер на основе квадрик. Однако в этом случае появляются большие грани, теряется геометрия и точность интегрирования снижается. Поэтому выбран комбинированный подход, сохраняющий точность приближенного интегрирования, но понижающий размер системы. Для этого как и в первом случае число вершин меша сокращается до нужного субсэмплингом при помощи квадрик или пуассоновского диска. После этого исходный меш разбивается на большие ячейки Вороного с центрами в сэмплированных вершинах. В каждой такой ячейке потенциал  $\Psi$  считается постоянным. Большие ячейки Вороного состоят из исходных элементарных ячеек  $S_i$ , поэтому численное интегрирование по ним точнее, чем в первом случае. Для построения ячеек Вороного применялась NetworkX реализация алгоритма из [5]. Эксперименты показали, что такой подход позволяет без потери точности обрабатывать большие меши или сокращать на порядок время счета.

### Литература

1. Burton A.J. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems / A.J. Burton , G.F. Miller // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1971. — V. 323, no. 1553. — P. 201–210.

2. Simpson R.N. Acoustic isogeometric boundary element analysis / R.N. Simpson, M.A. Scott, M. Taus, D.C. Thomas, H. Lian // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2014. — V. 269. — P. 265–290.

3. Liu Y.J. Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations / Y.J. Liu, T.J. Rudolph // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 1991. — V. 8, no. 6. — P. 301–311.

4. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца / Э.Г. Халилов // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2016. — Т. 56, № 7. — С. 1340–1348.

5. Erwig M. The graph Voronoi diagram with applications / M. Erwig // *Networks.* — 2000. — V. 36. — P. 156–163.

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕЛОСТНОЙ КАРТИНЫ МИРА ШКОЛЬНИКА**

**Н.И. Лобанова<sup>1</sup>, Н.Н. Яремко<sup>2</sup>** (Зеленокумск; Москва)

*lobantchik@yandex.ru, yaremki@yandex.ru*

В работе рассматривается проблема формирования целостной картины мира школьника при изучении дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования. Отличительными особенностями построения методики курса дифференциальных уравнений являются, во-первых, использование различных ИТ-инструментов и ИТ-средств при нахождении аналитических решений дифференциальных уравнений и, во-вторых, тщательный отбор и структурирование математического содержания курса в строгом соответствии с целью обучения – формированием ЦКМ школьника [1,2,3]. К изучению берутся наиболее общие естественно – научные и социальные законы, формой выражения которых являются дифференциальные уравнения и которые свидетельствуют о целостности и единстве окружающего мира. Такие особенности курса позволяют избежать дублирования классической вузовской учебной дисциплины и свести к минимуму технические вычислительные трудности [4,5,6]. Изучение дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования позволяет предоставить школьникам возможность удовлетворить свои образовательные потребности вне школы, познакомиться с новыми математическими понятиями и методами,

расширить математический кругозор, развить интерес к математике, достичь определённых результатов в плане формирования целостной картины мира. Методические построения основаны на положениях системно-деятельностного подхода, реализуют теоретические утверждения практико-ориентированного обучения, приемы и методы математического моделирования [7,8,9].

### Литература

1. Яремко Н.Н. Изучение старшими школьниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н.Н. Яремко, Н.И. Лобанова // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы: Материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. — Смоленск: Изд-во СмолГУ 2023 года. — С. 315-318.

2. Лобанова Н.И. Логистический закон как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника / Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко // Образование и общество. 2023 № 3(140). — С. 28–34

3. Егупова М.В. Математическое моделирование как необходимый компонент математического образования школьников Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования: монография / М.В. Егупова // под ред. Т. И. Шукшиной; Мордов. гос. пед. университет. — Саранск, 2022, Глава VI, — 102–121с.

4. Лобанова Н.И. Методические особенности построения курса дифференциальных уравнений с целью формирования целостной картины мира школьника / Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2023. № 1 (90). — С. 257–265.

5. Родина Л.И. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач / Л.И. Родина, А.В. Егорова // 2022 г, Издательство ВлГУ. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. — 83 с.

6. Селютин В. Д. Пропедевтика обучения решению некорректных задач при подготовке будущего учителя математики в вузе / В.Д. Селютин, Н.Н. Яремко // Ученые записки Орловского государственного университета. 2022. № 1(94). — С. 268–272.

7. Селютин В.Д. Применение линейных регрессионных моделей в педагогических исследованиях / В.Д. Селютин, Е.В. Лебедева, Н.Н. Яремко // Ученые записки Орловского государственного университета. — Орёл — 2018. №3 (80). — С.354–359.

8. Яремко Н.Н. Содержательная трансформация математической практико-ориентированной задачи в уровнем образовании. Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования / Н.Н. Яремко, Н.Б. Тихонова, М.В. Глебова // Мордов. гос. пед. университет. — Саранск, — 2022, Глава IV, 62–78с.

9. Lobanova N.I. Elements of the theory of differential equations as a means of forming holistic picture of the world among senior students / N.I. Lobanova, N.V. Ammosova, M.A. Rodionov, I.V. Akimova, N.P. Puchcov // International Congress on Academic Research in Society, Technology and Culture (october 24–25, 2020 Grozny) — Т. 107 pp. 981–989

## О СУЩЕСТВЕННЫХ СПЕКТРАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Лобода, А.Х. Сташ (Майкоп, АГУ)

*n-loboda@yandex.ru, aidamir.stash@gmail.com*

В работах [1,2] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем. В настоящей работе будем рассматривать *верхние* и *нижние сильные* и *слабые* показатели колеблемости *знаков*, *нулей*, *корней* и *гиперкорней*. Ранее сильные показатели колеблемости назывались полными частотами, а слабые показатели — векторными частотами.

Подсчет показателя колеблемости происходит путем усреднения числа нулей (или знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения  $x$  дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается слабый показатель колеблемости, а если после, то — сильный показатель колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения  $y$  линейного уравнения  $n$ -го порядка осуществляется переход к вектор-функции  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ .

Исследования спектров (т.е. множеств различных значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [1,3] и полностью завершено в [4]. Из результатов указанных работ следует, что спектры показателей колеблемости любой автономной системы содержат единственное существенное



значение (т.е. это значение принимается на решениях, множество начальных значений которых имеет положительную меру Лебега).

В работе [5] установлена возможность реализации не более чем счетных существенных спектров показателей блуждаемости линейных однородных двумерных дифференциальных систем. Оказалось, что эти результаты можно обобщить и на все показатели колеблемости.

**Теорема 1.** *Для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, существует двумерная линейная однородная ограниченная дифференциальная система (периодическая, если все элементы заданного множества соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причем все значения указанных показателей существенны.*

**Теорема 2.** *Для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой, существует двумерная линейная ограниченная система, у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причем все значения указанных показателей существенны.*

### Литература

1. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.
3. Бурлаков Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.
4. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568.
5. Шишляников Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишляников // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1586–1587.

# РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ<sup>1</sup>

И.С. Ломов (Москва, МГУ)

lomov@cs.msu.ru

## Аннотация

При минимальных условиях на данные смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения построено обобщенное решение задачи. Уравнение в общем случае не допускает разделения переменных. Рассмотрены двухточечные краевые условия, содержащие производные функций. Решение представлено в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача.

Исследуется следующая обобщенная смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x, t)u(x, t) + f(x, t), (x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + a_1 u(0, t) + b_1 u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + a_2 u(0, t) + b_2 u(1, t) = 0, t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

где коэффициенты  $a_i, b_i, i = 1, 2$ , — произвольные комплексные числа,  $q, f, \varphi$ , — комплекснозначные функции,  $f(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ , суммируемая функция,  $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T)\}$ ,  $T > 0$  — произвольно зафиксированное число,  $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$ , суммируемые функции, а потенциал  $q(x, t)$  таков, что найдется функция  $q_0(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$ , так что справедливо  $|q(x, t)| \leq q_0(x)$  для всех  $(x, t) \in Q$ , и функция  $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ .

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Внешний вид ее такой же, как и у обычной смешанной задачи и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

© Ломов И.С., 2024

функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией.

Ряд формального решения может быть и расходящимся. Следуя рекомендациям Л. Эйлера для нахождения его суммы привлекаем еще аксиому о перестановке в ряде операций интегрирования и суммирования.

В статье А.П. Хромова и В.В. Корнева [1] найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи (1)–(3) в случае  $q = q(x)$ ,  $f = 0$ , и получена формула для этого решения. *Сильным решением* называем функцию, удовлетворяющую условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) — почти всюду в полуполосе  $Q$ .

Наша задача — найти формулу для обобщенного решения задачи (1)–(3) при минимальных ограничениях на данные задачи.

**Теорема 1.** Пусть для задачи (1)–(3) выполняются следующие условия: функции  $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$ ,  $f(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$  для любого  $T > 0$ , функция  $q(x, t)$  такова, что найдется функция  $q_0(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$ , так что справедливо  $|q(x, t)| \leq q_0(x)$  для  $(x, t) \in Q$ , и функция  $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$  для любого  $T > 0$ . Тогда задача (1)–(3) имеет обобщенное решение, которое представляется формулами

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta, \quad (4)$$

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \quad a_k(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta, \tau) d\eta,$$

$k \geq 1$ , где функции  $\tilde{f}(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ ,  $\tilde{f}_k(\eta, \tau) = f_k(\eta, \tau) = -q(\eta, \tau)a_k(\eta, \tau)$  при  $\eta \in [0, 1]$ ,  $k \geq 0$ , при каждом  $\tau$ , далее функции  $f(\eta, \tau)$ ,  $f_k(\eta, \tau)$  продолжаются специальным образом по переменной  $\eta$  на всю числовую прямую, функция  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 1]$ , далее функция  $\varphi(x)$  продолжается на всю прямую. Ряд в формуле (4) сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике  $Q_T$  при любом  $T > 0$  с экспоненциальной скоростью.

Ранее для обобщенной смешанной задачи для телеграфного уравнения, краевое условие которой содержало значение решения во внутренней точке отрезка, были изложены два способа построения обобщенного решения ([2]).

## Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Костин // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.
2. Ломов И.С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1471–1483.

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ДВУХСКОРОСТНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)

*lomovcev@bsu.by*

В первой четверти плоскости  $G_\infty$  решена смешанная задача

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) - \\ - a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x, t) - a_1(a_2)_x u_x(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t(x, t) + \beta(t)u_x(x, t) + \gamma(t)u(x, t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где  $a_1, a_2, f, \varphi, \psi, \mu$  – заданные вещественные функции своих переменных  $x$  и  $t$  первой четверти плоскости  $G_\infty = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ .

Пусть  $C^k(\Omega)$  – множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega$  плоскости  $R^2$  и  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .

Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a_{3-i}(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

которые имеют неявные общие интегралы  $g_i(x, t) = C_i, C_i \in R, i = 1, 2$ . Если в уравнении (1) коэффициенты  $a_{3-i}$  строго положительны, т. е.  $a_{3-i}(x, t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0, (x, t) \in G$ , то в силу (4) переменная  $t$  на характеристиках  $g_1(x, t) = C_1, C_1 \in R$ , строго убывает, на характеристиках  $g_2(x, t) = C_2, C_2 \in R$ , строго возрастает вместе с ростом переменной  $x$ . Поэтому неявные функции  $y_i = g_i(x, t) = C_i, x \geq 0, t \geq 0$ , обладают строго монотонными неявными обратными функциями

$x = h_i\{y_i, t\}$ ,  $t \geq 0$ , и  $t = h^{(i)}[x, y_i]$ ,  $x \in R$ ,  $i = 1, 2$ . По определению обратных отображений на четверти плоскости  $G_\infty$  они удовлетворяют следующим тождествам обращения из [1]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, t \geq 0; h_i\{g_i(x, t), t\} = x, x \geq 0, i = 1, 2, \quad (5)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, x \geq 0; h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, t \geq 0, i = 1, 2, \quad (6)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, x \geq 0; h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, t \geq 0, i = 1, 2. \quad (7)$$

Когда коэффициенты  $a_{3-i}(x, t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a_{3-i} \in C^2(G_\infty)$ , тогда неявные функции  $g_i$ ,  $h_i$ ,  $h^{(i)}$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$ ,  $t$ ,  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ , на  $G_\infty$  [1].

Из постановки смешанной задачи (1)–(3) для классических решений  $u \in C^2(G_\infty)$  вытекает необходимость гладкости

$$f \in C(G_\infty), \varphi \in C^2[0, +\infty[, \psi \in C^1[0, +\infty[, \mu \in C^1[0, +\infty[. \quad (8)$$

В граничном режиме (3) и его первой производной по  $t$  полагаем  $t = 0$  и в силу начальных условий (2) при  $x = 0$  и уравнения (1) при  $x = 0$ ,  $t = 0$  находим необходимые условия согласования

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \gamma(0)\psi(0) + \\ & + \alpha(0)[f(0, 0) + (a_2(0, 0) - a_1(0, 0))\psi'(0) + a_1(0, 0)a_2(0, 0)\varphi''(0) + \\ & + ((a_2)_t(0, 0)/a_2(0, 0))\psi(0) + a_1(0, 0)(a_2)_x(0, 0)\varphi'(0)] = \mu'(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Характеристика  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  делит  $G_\infty$  на  $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}$  и  $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}$ .

В работе [2] методом корректировки найдены на  $G_-$ ,  $G_+$  и  $G_\infty$  следующие классические (дважды непрерывно дифференцируемые) решения с необходимой и достаточной гладкостью (12) и (13):

$$\begin{aligned} F_i(x, t) = & \int_0^{g_2(x, t)} \int_{h_1\{g_1(((-1)^{i+1}g_2(x, t), g_2(x, t)), \tau)\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)E(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} d\delta d\tau + \\ & + \int_{g_2(x, t)}^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)E(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} d\delta d\tau, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$E(\delta, \tau) = \exp \left\{ \int_{g_1(\delta, \tau)}^{g_1(x, t)} \frac{a_2^2(a_2/a_1)_{\tilde{\delta}} - a_2(a_2/a_1)_{\tilde{\tau}}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1)_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})} ds \right\}.$$

В силу (4)–(7) методом неявных характеристик из [1] доказана

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $a_{3-i}(x, t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a_{3-i} \in C^2(G_\infty)$ ,  $i = 1, 2$ , и нехарактеристическая косая производная в (3), т.е.  $a_1(0, t)\alpha(t) \neq \beta(t)$ ,  $t \geq 0$ . Тогда для существования единственного и устойчивого классического решения  $u \in C^2(G_\infty)$  смешанной задачи (1)–(3) в  $G_\infty$  необходимо и достаточно требований гладкости и условий согласования (8)–(10) и

$$\int_0^t f(h_i\{g_i(x, t), \tau\}, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), i = 1, 2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{(-1)^{i+1}g_2(x, t)}^{h_2\{g_2(x, t), g_2(x, t)\}} f(\delta, g_2(x, t)) d\delta - \int_{g_2(x, t)}^t f(h_2\{g_2(x, t), \tau\}, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^{g_2(x, t)} f(h_1\{g_1((-1)^{i+1}g_2(x, t), g_2(x, t), \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), i = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

Классическим решением задачи (1)–(3) в  $G_\infty$  является функция

$$\begin{aligned} & u_-(x, t) = \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) - F_1(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + \\ & + \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{a_1(\nu, 0)[\varphi'(\nu) - (F_1)_\nu(\nu, 0)] + \psi(\nu) - (F_1)_t(\nu, 0)}{a_1(\nu, 0) + a_2(\nu, 0)} d\nu + \\ & + F_1(x, t), (x, t) \in G_-, \\ & u_+(x, t) = \varphi(0) - F_1(0, 0) + F_1(x, t) + \\ & + \int_0^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{a_1(\nu, 0)[\varphi'(\nu) - (F_1)_\nu(\nu, 0)] + \psi(\nu) - (F_1)_t(\nu, 0)}{a_1(\nu, 0) + a_2(\nu, 0)} d\nu + \\ & + \frac{1}{\eta(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} \eta(\rho) \left\{ \frac{a_1(0, \rho)\mu(\rho)}{a_1(0, \rho)\alpha(\rho) - \beta(\rho)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a_1(0, \rho)[a_2(0, \rho)\alpha(\rho) + \beta(\rho)]}{a_2(0, \rho)[a_1(0, \rho)\alpha(\rho) - \beta(\rho)]} \left[ \left( \frac{a_1(\nu, 0)[\varphi'(\nu) - (F_1)_\nu(\nu, 0)]}{a_1(\nu, 0) + a_2(\nu, 0)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\psi(\nu) - (F_1)_t(\nu, 0)}{a_1(\nu, 0) + a_2(\nu, 0)} \right) \Big|_{\nu=h_1\{g_1(0, \rho), 0\}} \frac{\partial h_1\{g_1(0, \rho), 0\}}{\partial \rho} - \mathfrak{F}'_1(\rho) \right] - \\
& - \frac{a_1(0, \rho)\gamma(\rho)}{a_1(0, \rho)\alpha(\rho) - \beta(\rho)} \left[ \varphi(0) + F_2(0, \rho) - F_1(0, 0) - \mathfrak{F}_1(\rho) + \right. \\
& \left. + \int_0^{h_1\{g_1(0, \rho), 0\}} \frac{a_1(\nu, 0)[\varphi'(\nu) - (F_1)_\nu(\nu, 0)] + \psi(\nu) - (F_1)_t(\nu, 0)}{a_1(\nu, 0) + a_2(\nu, 0)} d\nu \right] - \\
& - (F_2)_\rho(0, \rho) - \frac{[a_1(0, \rho) + a_2(0, \rho)]\beta(\rho)}{a_2(0, \rho)[a_1(0, \rho)\alpha(\rho) - \beta(\rho)]} \mathfrak{F}_2(\rho) \Big\} d\rho, (x, t) \in G_+.
\end{aligned}$$

Здесь функция  $\mathfrak{F}_1(\rho) = F_2(0, \rho) - F_1(0, 0)$ , интегрирующий множитель  $\eta(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{a_1(0, \tilde{\rho})\gamma(\tilde{\rho})}{a_1(0, \tilde{\rho})\alpha(\tilde{\rho}) - \beta(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} \right\}$  и сумма интегралов чётно-нечётного порядка следования  $\mathfrak{F}_2(\rho) = [A_2 - A_4 + A_6 - A_8](0, \rho)$  со своими знаками в производной  $(F_2)_\rho(0, \rho)$  по  $\rho$  от функции  $F_2(0, \rho)$  из (11).

**Следствие 1.** Если правая часть  $f$  уравнения (1) зависит только от  $x$  или  $t$  и непрерывна по  $x$  или  $t$ , то теорема 1 верна без интегральных требований гладкости (12), (13) на  $f$  [2] ([3]).

**Следствие 2.** В требованиях гладкости (12) и (13) принадлежность интегралов множеству  $C^1(G_\infty)$  эквивалентна их принадлежности множеству  $C^{(1,0)}(G_\infty)$  или  $C^{(0,1)}(G_\infty)$ , где  $C^{(1,0)}(G_\infty)$  и  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  – множества непрерывно дифференцируемых по  $x$  или  $t$  и непрерывных по  $t$  или  $x$  функций на  $G_\infty$  [2] ([3]).

Автор благодарит за помощь, консультацию и поддержку своего научного руководителя, профессора Юрчука Николая Иосифовича.

### Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
2. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных в классические решения модельного волнового уравнения с переменными скоростями  $a_1(x, t)$  и  $a_2(x, t)$  в первой четверти плоскости. / Ф.Е. Ломовцев // Вестник ФФИ. – 2023. – № 4. – С. 53–83.

3. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части (с постоянными скоростями  $a_1$  и  $a_2$ ). / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.

## НОРМАЛИЗАЦИЯ УРОВНЯ ГЛЮКОЗЫ В КРОВИ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Ю.П. Луговскова (Оренбург, ОГУ)

*ulia-lugovskova@inbox.ru*

В работе представлен метод дифференциальных игр для построения синтезированного управления в приложении к задаче регуляции углеводного обмена у больных сахарным диабетом первого типа путем подбора оптимальной последовательности моментов и доз введения экзогенного инсулина с целью нормализации уровня глюкозы в крови в пределах показателей заданного интервала значений.

Для изучения закономерностей гомеостатической системы углеводного обмена в организме человека рассмотрена математическая модель переменных состояний - глюкозы  $G = G(t)$ ; инсулина  $I = I(t)$  в единственном кровеносном компартменте, представленная негладкой системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \alpha(G - G_0)\theta(G - G_0) - \beta I + bu(t) \\ \frac{dG}{dt} &= \gamma(G_0 - G)\theta(G_0 - G) - \sigma GI + aS(t) \end{aligned} \quad (1)$$

В модели (1) параметры — неотрицательные величины, значения которых получены на основе исследования модели и проведения вычислительных экспериментов;  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, определяющая негладкость системы дифференциальных уравнений. Функция  $u(t)$  описывает поступление искусственного инсулина извне для больных диабетом;  $S(t)$  — экзогенный источник поступления глюкозы за счет приема пищи.

В силу отсутствия полной информации о параметрах процесса задача синтеза решается с применением метода дифференциальных игр, в которой рассматривается стратегия поддержания заданного уровня глюкозы в крови в условиях действия возмущений  $S(t)$  и  $u(t)$  в формате антагонистической игры.



Практическая реализация результатов синтеза, основанного на необходимости решения нелинейного уравнения с параметрами, зависящими от состояния в реальном масштабе времени, основана на применении метода теории гарантирующего управления.

Проведение анализа различных методов решения поставленной задачи управления динамикой инсулин-глюкоза показал эффективность всех полученных схем введения искусственного инсулина на стабилизацию углеводного обмена, а следовательно на их применимость к предложенной в работе задаче управления сахарным диабетом первого типа.

### Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М. : Мир, 1967. — С. 479
2. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенным объектом. / В.Н. Афанасьев // Изв. РАН: ТиСУ. — 2010. — №1. — С. 16-23
3. Широкова Н.А. Математическое моделирование баланса инсулин-глюкоза в крови и системы регуляции гликемии у пациентов с сахарным диабетом / Н.А. Широкова // Математические структуры и моделирование — 2002. — вып. 10. — С. 106-115.

## ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА КОНЦЕ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

**В.В. Лысенко, Ф.Е. Ломовцев** (Минск, БГУ)  
*valery.sholomitskaya@gmail.com, lomovcev@bsu.by*

**Вспомогательная нехарактеристическая смешанная задача.** Решена и найден критерий корректности вспомогательной смешанной задачи с нехарактеристическими вторыми частными производными на конце полуограниченной струны

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1a_2u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$\Gamma(t)u \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]_{x=0} =$$

$$= \mu(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где в уравнении (1) коэффициенты  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  и в граничном режиме (3) для любого момента времени  $t$  вторые частные производные направлены не вдоль критической характеристики  $x = a_1 t$ , уравнения (1), т.е.  $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \neq 0, t \geq 0$ .

Уравнению (1) соответствует два различных семейства характеристик  $x - a_1 t = C_1, x + a_2 t = C_2, C_1, C_2 \in R = ] - \infty, + \infty[$ .

**Определение 1.** Характеристика  $x = a_1 t$ , где  $a_1 > 0$ , называется к р и т и ч е с к о й для уравнения (1) на множестве  $G_\infty = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ .

Критическая характеристика  $x = a_1 t, a_1 > 0$ , делит первую четверть  $G_\infty$  на множества  $G_- = \{ \{x, t\} \in G_\infty : x > a_1 t, t > 0 \}$  и  $G_+ = \{ \{x, t\} \in G_\infty : x \leq a_1 t, x \geq 0 \}$ , где  $G_\infty = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ .

Из статьи [1] известно понятие характеристической первой косой производной, т.е. характеристических первых частных производных в граничном условии (3). Понятие характеристических вторых частных производных для граничного условия (3) введено в [2].

**Определение 2.** Граничный режим (3) называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м, а вторые частные производные в (3) – х а р а к т е р и с т и ч е с к и м и, если  $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) = 0, t \geq 0$ .

Пусть  $C^k(\Omega)$  – множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega \subset R^2$  и  $C_0(\Omega) = C(\Omega)$ .

**Определение 3.** К л а с с и ч е с к и м решением смешанной задачи (1)–(3) на  $G_\infty = [0, \infty[ \times [0, \infty[$  называется функция  $u \in C^2(G_\infty)$ , удовлетворяющая поточечно уравнению (1) для всех  $\{x, t\} \in \dot{G}_\infty, G_\infty = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ , в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов значений функции  $u(\dot{x}, \dot{t})$  и ее соответствующих частных производных во внутренних точках  $\{\dot{x}, \dot{t}\} \in \dot{G}_\infty$  при  $\dot{x} \rightarrow x, \dot{t} \rightarrow t$  к соответствующим граничным точкам  $\{x, t\} \in G_\infty$ .

Для классических решений  $u \in C^2(G_\infty)$  из уравнения (1), начального состояния (2) и граничного режима (3) вытекает необходимость требований гладкости:

$$f \in C(G_\infty), \varphi \in C^2[0, +\infty[, \psi \in C^1[0, +\infty[, \mu \in C[0, +\infty[. \quad (4)$$

Дополнительные необходимое (и достаточные) интегральные требования гладкости (7) и (8) на правую часть  $f$  волнового уравнения (1) указаны ниже в формулировке теоремы 1.

В граничном режиме (3) мы полагаем  $t = 0$ , вычисляем значения левой части полученного равенства с помощью начального состояния

(2) при  $x = 0$  и уравнения (1) при  $x = 0, t = 0$  и соответственно получаем необходимость условия согласования

$$\begin{aligned} \zeta(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0)] + \xi(0)\psi'(0) + \theta(0)\varphi''(0) + \\ + \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \end{aligned} \quad (5)$$

В следующей теореме 1 используются обозначения

$$\begin{aligned} F_i(x, t) = \\ = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[ \int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t, \tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_i(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$t_i(x) = (-1)^i \left( t - \frac{x}{a_1} \right), \quad x_i(t, \tau) = \left[ 1 - (-1)^i \left( \frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 t) - a_2 \tau,$$

$$i = 1, 2, \quad \Phi(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi(x + a_2 t) + a_2 \varphi(0) + \int_0^{x+a_2 t} \psi(s) ds \right\},$$

$$P(t) = \mu(t) - \Gamma(t)(\Phi(x, t) + F_2(x, t)),$$

$$\chi(a, b) = \exp \left\{ -a_1 \int_a^b \sigma(s) ds \right\}, \quad \sigma(t) = \frac{\beta(t) - a_1 \alpha(t)}{a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t)},$$

$$F(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.$$

Частные классические решения  $F_1$  и  $F_2$  из (6) неоднородного уравнения (1) соответственно в  $G_-$  и  $G_+$  найдены методом коррективки пробных решений в классические решения работы [3], где доказана необходимость и достаточность гладкости (7) и (8) на  $f$ .

В статье [2] доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть непрерывны коэффициенты:  $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C[0, +\infty[$ , нехарактеристичны вторые частные производные граничного режима (3):  $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \neq 0, t \in [0, +\infty[$ , и существует нетривиальное решение  $v \in C^2[0, +\infty[$ ,  $v(\rho) \neq 0, v'(\rho) \neq 0, \rho \in [0, +\infty[$ , обыкновенного дифференциального уравнения

$$[a_1^2 \zeta(\rho/a_1) - a_1 \xi(\rho/a_1) + \theta(\rho/a_1)] v''(\rho) -$$

$$-[\beta(\rho/a_1) - a_1\alpha(\rho/a_1)]v'(\rho) + \gamma(\rho/a_1)v(\rho) = 0.$$

Смешанная задача (1)–(3) в  $G_\infty$  имеет единственное и устойчивое по  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  классическое решение и  $\in C^2(G_\infty)$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (4), (5), и

$$J_1(x, t) \equiv \int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J_{i+1}(x, t) &\equiv \left[ 1 - (-1)^i \left( \frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] \int_0^{t_i(x)} f(x_i(t, \tau), \tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_i(x)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Классическим решением  $u \in C^2(G_\infty)$  нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) на  $G_\infty$  является функция

$$\begin{aligned} u_-(x, t) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1\varphi(x + a_2t) + a_2\varphi(x - a_1t) + \int_{x-a_1t}^{x+a_2t} \psi(s) ds \right\} + \\ &+ F(x, t), \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_+(x, t) &= v(a_1t - x) \left\{ \int_0^{t_2(x)} \frac{a_1^2}{v^2(a_1s)} \int_0^s \frac{v(a_1\tau)\chi(s, \tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau) - a_1\xi(\tau) + \theta(\tau)} d\tau ds + \right. \\ &\left. \frac{a_1v(0)[\psi(0) - a_2\varphi'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{t_2(x)} \frac{\chi(s, 0)}{v^2(a_1s)} ds \right\} + \Phi(x, t) + F_2(x, t), \quad (x, t) \in G_+, \end{aligned} \quad (10)$$

**Замечание 1.** Если правая часть  $f$  уравнения (1) не зависит от переменной  $x$  или  $t$ , то требования гладкости на  $f$  из (7) и (8) эквивалентны требованию непрерывности  $f$  по  $t$  или  $x$ . Если же непрерывная правая часть  $f \in C(G_\infty)$  зависит от переменных  $x$  и  $t$ , то в теореме 1 благодаря равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^t f \left( \left| x + (-1)^i a_i(t - \tau) \right|, \tau \right) d\tau \right) =$$

$$= \frac{(-1)^i}{a_i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t f \left( \left| x + (-1)^i a_i (t - \tau) \right|, \tau \right) d\tau \right) - f(x, t) \right], i = 1, 2, \quad (11)$$

требования (7) и (8) эквивалентны принадлежности интегралов из (7) и (8) множествам  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  или  $C^{(1,0)}(G_\infty)$ , т.е. множествам непрерывных по  $x$  и непрерывно дифференцируемых по  $t$  на  $G_\infty$  или непрерывно дифференцируемых по  $x$  и непрерывных по  $t$  функций на  $G_\infty$ . Сначала равенства (11) выводятся для более гладких  $f \in C^1(G_\infty)$  и потом предельным переходом по  $f$  распространяются на непрерывные функции  $f \in C(G_\infty)$  с условиями (7) и (8).

**Физико-геометрическая интерпретация** решений вспомогательных смешанных задач проводится с целью поиска их множества зависимости, т.е. множества изменения независимых переменных в исходных данных задач и коэффициентах уравнения и краевых условий. В ней определяющей составляющей является геометрическая интерпретация решений, в которой нуждается решение и исследование смешанных задач о колебаниях ограниченной струны с помощью результатов исследования вспомогательных смешанных задач о колебаниях полуограниченной струны. Физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательной смешанной задачи для волнового уравнения с одной скоростью  $a_1 = a_2 = \text{const}$  при нестационарной нехарактеристической первой косої производной на конце полуограниченной струны проведена в [4, с. 55–60]. В настоящем докладе дана аналогичная физико-геометрическая интерпретация классических решений (9), (10) вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) для волнового уравнения с двумя скоростями  $a_1 \neq a_2$  при нестационарных нехарактеристических вторых частных производных полуограниченной струны.

### Литература

1. Барановская, О. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косої производной в краевом условии. / О. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45. — № 8. — С. 1188–1191.
2. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта — 2019. — № 3 (104). — С. 5–17.

3. Ломовцев, Ф. Е. Метод коррективки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. / Ф. Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2017. — № 3 — С. 38–52.

4. Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: Дис. ... кан-та физ.-мат. наук / ИМ НАН РБ. — Минск, 2017. — 258 с.

## О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ШАРЕ<sup>1</sup>

**Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина** (Воронеж, ВГУ;  
Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина; Липецк, РАНХиГС;  
Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского);

*levnlya@mail.ru; kalitvin@gmail.com; marina.lapsh@yandex.ru*

Многочисленные задачи, порожденные сферической симметрией, приводят к преобразованию Радона специального вида, введенного в [1]:  $K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) x_1^\gamma dx$ ,  $\gamma > 0$ , где  $\langle x, \theta \rangle$  — скалярное произведение  $n$ -мерных векторов,  $\theta$  — единичный вектор нормали к плоскости  $\langle x, \theta \rangle = p$ , а символ  $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ) обозначает действие оператора Пуассона по переменной  $x_1$ . Это преобразование называется *преобразованием Радона — Киприянова*.

Произведем вращение  $f(x_1, x') \rightarrow f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$  и введем обозначения  $\tilde{f}(z) = f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$ ,  $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z: z_2 > 0\}$ . При этом  $K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z)$ , где  $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle = \langle z, \Theta \rangle\}^+$  — полуплоскость ( $z_2 > 0$ ). Для удобства полуплоскость интегрирования обозначим  $\Theta_\perp^+ = \{z: \langle \Theta, z \rangle = p, z_2 > 0\}$ . При фиксированном векторе  $\Theta$  примем обозначение  $K_{\gamma, \Theta}[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p)$ .

Следуя [2], запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости  $\Theta_\perp^+$  в  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ :

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z).$$

**Двойственное преобразование в  $R_1$ .** Через  $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$  обозначим подпространство пространства Л.Шварца пробных функ-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).  
© Ляхов Л.Н., Калитвин В.А. Лапшина М.Г., 2024

ций, четных по Киприянову (см. [3], с.21) по переменной  $x_1$ . Пусть  $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$  и  $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ . Введем линейную форму в  $\mathbb{R}_1$

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_1^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp.$$

Положив  $y = p\Theta + z \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{y = (z_1, z_2, x') : z_2 > 0\}$ , получим  $\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \Theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx'$  с двойственным оператором  $K_{\gamma, \Theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle))$ . Справедливо равенство

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

где  $K_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx$  — оператор, полученный дополнительным интегрированием по сфере оператора, двойственного к преобразованию Радона-Киприянова.

### Преобразование Фурье—Бесселя:

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) j_\nu(x_1 \xi_1) e^{-i \langle x', \xi' \rangle} x_1^\gamma dx, \quad \gamma = 2\nu + 1 > 0,$$

$$F_B^{-1} \left[ \widehat{f} \right] (x) = (2\pi)^{1-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu + 1) F_B[\widehat{f}](-x) = f(x).$$

где  $j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{t^\nu} J_\nu(t)$ ,  $J_\nu$  — функция Бесселя первого рода.

Обобщенная свертка Пуассона:

$(f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_{x_1}^{y_1} f(x_1, x' - y') g(y) y_1^\gamma dy_1 dy'$ , где обобщенный сдвиг Пуассона определен формулой

$$T_{x_1}^{y_1} f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \alpha}, x'\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Если  $f, g \in S_{ev}$ , то

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[u](\xi, t) K_\gamma[v](\xi; p-t) dt.$$

**Лемма 1.**  $\widehat{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1) \omega(p\theta)$ , где  $\omega \in S_{ev}$ .

**Теорема 1.** Если  $g \in \mathbb{Z}_n^+$ , то

$$\begin{aligned} F_{(p \rightarrow s)} \left[ K^\# g \right] (s\theta) &= \\ &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1) |\xi|^{1-n} \left[ \widehat{g} \left( \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{g} \left( -\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right]. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Если  $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ , то

$K_\gamma^\# K_\gamma[f](x) = |S_1(n-1)| \left( \frac{1}{|x|} * f \right)_\gamma$ , где  $|S_1(n-1)|$  — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}_{n-1}$ .

### Литература

1. Киприянов И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // Докл. АН СССР. — 1998. — 360. — № 2. — С. 157–160.

2. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии / Ф. Наттерер. — М.: Мир. — 1990. — С. 279.

3. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М.: Наука. — 1997. — С. 199.

4. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. / Б.М. Левитан. — УМН. — 1951. — Т.6. — № 2. — С. 102–143.

## О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА<sup>1</sup>

**Л.Н. Ляхов, С.А. Рошупкин** (Воронеж, ВГУ,  
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк,  
Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)  
*levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru*

Использованное здесь преобразование в одномерном случае введено в [1]. Преобразование Фурье-Бесселя-Киприянова-Катрахова функций определенных в  $R_n$  задается следующим выражением

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{R_n} \Lambda_{\gamma}^{+}(x, \xi) u(x) (x^2)^{\nu + \frac{1}{2}} dx, \quad x^{\gamma} = \prod_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2}.$$

Это преобразование обратимо (см. [2]):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_B^{-1}[u](x) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n 2^{2(\nu_i+1)} \Gamma^2(\nu_i+1)} \mathcal{F}_B[u](-x) = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n 2^{2(\nu+1)} \Gamma^2(\nu+1)} \int_{R_n} \Lambda_{\gamma}^{-}(x, \xi) u(\xi) (\xi^2)^{\nu + \frac{1}{2}} d\xi. \end{aligned}$$

Ядро этих преобразований имеет вид:

$$\Lambda_{\gamma}^{\pm}(x, \xi) = \prod_{j=1}^n \left[ j_{\gamma_j - \frac{1}{2}}(x_j \xi_j) \mp i \frac{x_j \xi_j}{\gamma + 1} j_{\gamma_j + \frac{1}{2}}(x_j \xi_j) \right].$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00387).  
© Ляхов Л.Н., Рошупкин С.А., 2024



Пусть  $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $B_{\gamma_i} = \partial_{x_i}^2 + \frac{\gamma_i}{x_i} \partial_{x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k, & 1 \leq i \leq n, \\ \partial_{x_i} B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}, & \alpha_i = 2k+1, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Класс  $\Xi_{ev}^m$  состоит из бесконечно дифференцируемых функций  $a(x, \xi)$ , четных по каждой координате аргументов  $(x, y) \in \mathbb{R}_{2n}$  и удовлетворяющих неравенству:

$$\left| (\partial_B^\alpha)_x (\partial_B^\beta)_\xi a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|},$$

при любых  $\alpha, \beta$  с константами  $C_{\alpha, \beta}$ , независимыми от  $x$  и  $\xi$ .

Сингулярным псевдодифференциальным оператором Киприянова-Катрахова  $A = a(x; D_B)$  с символом  $a(x; \xi)$  назовем оператор, действующий на четные функции из пространства Шварца  $(S_{ev})$  по формуле

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} \Lambda_\gamma^+(x, \xi) a(x; \xi) u(x) (x')^\gamma dx.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом  $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$  и пусть на единичной сфере  $\Sigma_n^+ = \{\xi : |\xi|=1\}$  символ  $Re a(x, \xi)$  ограничен снизу некоторой константой  $C$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует константа  $C' = C'(\varepsilon)$  такая, что для всех бесконечно дифференцируемых функций  $u(x)$ , четных по каждой координате аргумента справедливо неравенство

$$Re(Au, u)_\gamma + C' \|u\|_{\frac{m-1}{2}, \gamma}^2 \geq (C - \varepsilon) \|u\|_{\frac{m}{2}, \gamma}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом  $a(x, \xi) \in S_{ev}^m$ . Тогда для любого действительного числа  $s$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует константа  $C_{s, \varepsilon} = C$  такая, что

$$\|\mathcal{A}u\|_{s-m, \gamma} \leq (K + \varepsilon) \|u\|_{s, \gamma} + C \|u\|_{s-1/2, \gamma}.$$

Полученные неравенства необходимы для построения соответствующих регуляризаторов В-эллиптических сингулярных псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова.

### Литература

1. Киприянов И.А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов, / И.А. Киприянов, В.В. Катрахов // Матем. сб., — 104(146):1(9) — (1977), — С. 49–68.

2. Катрахов В.В. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов/ В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 681–695

## О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

М.Г. Мажгихова (Грозный, ЧГУ)

*mazhgihova.madina@yandex.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

где  $\alpha \in (n-1, n]$ ,  $D_{0t}^{\alpha}$  — оператор Римана-Лиувилля [1]

$$D_{st}^{\alpha}g(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n}g(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\lambda$  — произвольная константа.

**Регулярным решением** уравнения (1) назовем функцию  $u(t)$  такую, что  $u(t) \in L(0, 1)$ ,  $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0, 1)$  и удовлетворяющую уравнению (1) для всех  $0 < t < 1$ .

**Задача.** Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-\beta_k} u(t) = c_i, & i = \overline{1, p}, \\ \sum_{k=1}^n b_{jk} \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-\beta_k} u(t) = d_j, & j = \overline{1, q}, \end{cases}$$

где  $a_{ik}, b_{jk}$  — заданные постоянные,  $p, q \geq 1$  и  $p+q = n$ ,  $\beta_i$  — элементы из множества  $\{1, \dots, n\}$ .

В работе развит метод функции Грина для решения краевой задачи с обобщенными условиями типа Штурма и доказана теорема

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (проект № FECS-2020-0001).

© Мажгихова М.Г., 2024

существования и единственности решения этой задачи. Решение задачи выписано в терминах функции Грина.

### Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ПРИ ВАРИАЦИЯХ ЕГО ПОТЕНЦИАЛА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. Мазепа, Д.К. Рябошлыкова (Волгоград, ВолГУ)

*elena.mazepa@volsu.ru, daria\_ryaboshlikova@volsu.ru*

В данной работе изучаются решения неоднородного эллиптического уравнения вида:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = h(x), \quad (1)$$

на некомпактном римановом многообразии  $M$ . Здесь  $c(x) \geq 0$  и  $c(x), h(x) \in C^{0,\alpha}(G)$  для любого  $G \subset\subset M$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Под решением уравнения (1) понимаем функцию  $u \in C^2(M)$ .

Пусть  $M$  - полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения  $M = B \cup D$ , где  $B$  - некоторый компакт, а  $D$  изометрично произведению  $[r_0; +\infty) \times S_1 \times S_2 \dots \times S_k$  (где  $r_0 > 0, S_i$  - компактные римановы многообразия без края) и имеет метрику  $ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + \dots + g_k^2(r)d\theta_k^2$ . Здесь  $g_i(r)$  - положительные, гладкие на  $[r_0; +\infty)$  функции, а  $d\theta_i^2$  - метрика на  $S_i$ . Пусть  $\dim S_i = n_i$ . Ясно, что  $\dim M = n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1$ . Всюду в дальнейшем будем считать, что на  $D$   $h_1(r) \leq h(r, \theta_1, \dots, \theta_k) \leq h_2(r)$ , где  $h_1(r), h_2(r) \in C^{0,\alpha}(R_+)$ .

Пусть на  $D$   $c(r, \theta_1, \dots, \theta_k) \equiv c(r)$ .

Введем обозначения:  $S(t) = g_1^{n_1}(t) \cdot \dots \cdot g_k^{n_k}(t)$ ,

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left( \int_{r_0}^t c(z)S(z)dz \right) dt, \quad I_i = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left( \int_{r_0}^t \frac{S(z)}{g_i^2(z)} dz \right) dt,$$

$$K = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} dt, \quad K_h = K + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left( \int_{r_0}^t \max |h_1(z)|, |h_2(z)| S(z) dz \right) dt,$$

$$I_h = I + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left( \int_{r_0}^t \max |h_1(z)|, |h_2(z)| S(z) dz \right) dt,$$

где  $r_0 > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Справедливы следующие утверждения, которые были представлены в работе [1].

**Теорема 1.** Пусть риманово многообразие  $M$  и правая часть уравнения (1) таковы, что  $I_h < \infty$  ( $K_h < \infty$ , если  $c(x) \equiv 0$ ),  $I_1 = \dots = I_s = \infty$ ,  $I_i < \infty$  для всех  $i = s+1, \dots, k$ ,  $0 \leq s \leq k$ . Тогда для любой непрерывной на  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$  функции  $\Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$  на  $M$  существует единственное ограниченное решение  $u(x)$  уравнения (1) такое, что на  $D$  выполнено  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ .

Далее наряду с уравнением (1) рассмотрим на  $M$  уравнение

$$L_1 u \equiv \Delta u - c_1(x)u = h(x), \quad (2)$$

где  $0 \leq c_1(x) \leq c(x)$ . Здесь  $c_1(x) \geq 0$ ,  $c_1(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ ,  $c(x)$  определено выше.

Ранее в работе [2] была показана взаимосвязь разрешимости краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии  $M$  для уравнений (1) и (2).

Объединяя результаты теоремы 1 и работы [2], получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть риманово многообразие  $M$  и правая часть уравнения (2) таковы, что  $I_h < \infty$ ,  $I_1 = \dots = I_s = \infty$ ,  $I_i < \infty$  для всех  $i = s+1, \dots, k$ ,  $0 \leq s \leq k$ . Тогда для любой непрерывной на  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$  функции  $\Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$  на  $M$  существует единственное ограниченное решение  $u(x)$  уравнения (2) такое, что на  $D$  выполнено  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ .

### Литература

1. Мазепа Е.А. Асимптотическое поведение решений неоднородного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях / Е.А. Мазепа, Д. К. Рябошлыкова // Изв. вузов. Матем. — 2024. — № 1. — С. 35–49.

2. Mazepa E.A. Boundary-value problems for the inhomogeneous Schrodinger equation with variations of its potential on non-compact Riemannian manifolds / E.A. Mazepa, D.K. Ryaboshlykova // Пробл. анал. Issues Anal. — V. 10(28), № 3. — 2021. — С. 113–128.

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА  
ОТ НЕКОТОРОГО ФИКСИРОВАННОГО  
ЗАПАЗДЫВАНИЯ**

**Е.И. Маркина** (Воронеж, ВГУ)  
*elizavetamarkina2002@gmail.com*

Рассматривается задача о периодических решениях автономного уравнения нейтрального типа

$$x'(t) = f(\varepsilon, x(t - h_0 - \varepsilon h), x'(t - h_0 - \varepsilon h)), \quad (1)$$

с малым отклонением аргумента от фиксированного запаздывания  $h_0 > 0$ .

В уравнении (1) оператор  $f$  действует из  $[0, 1] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^m$ .

В случае, когда  $h_0 = 0$  — такая задача рассматривалась в [1]. Целью настоящей работы является получение аналогичного результата в случае, когда  $h_0 > 0$ .

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (1) превращается в уравнение нейтрального типа следующего вида:

$$x'(t) = f(0, x(t - h_0), x'(t - h_0)), \quad (2)$$

Будем предполагать, что выполнены следующие требования:

1) оператор  $f$  непрерывен по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица с константой  $k < 1$  по третьей переменной;

2) уравнение (2) имеет нестационарное  $T_0$  — периодическое решение  $\varphi$  т. е

$$\varphi'(t) = f(0, \varphi(t - h_0), \varphi'(t - h_0));$$

3) отображение  $f(0, x, y)$  непрерывно дифференцируемо по второй и третьей переменным в окрестности множества

$$\{(\varphi(t - h_0), \varphi'(t - h_0)) : t \in [0, T_0]\}.$$

Положим:

$$a(t) = \left. \frac{\partial f(0, x, y)}{\partial x} \right|_{x=\varphi(t-h_0), y=\varphi'(t-h_0)}$$

и

$$b(t) = \frac{\partial f(0, x, y)}{\partial y} \Big|_{x=\varphi(t-h_0), y=\varphi'(t-h_0)}.$$

Тогда  $\varphi'$  является решением уравнения:

$$x'(t) = a(t)x(t-h_0) + b(t)x'(t-h_0). \quad (3)$$

Будем также предполагать, что выполнено следующее предположение:

4) уравнение (3) не имеет  $T_0$  — периодических решений, линейно независимых с  $\varphi'$  и присоединенных к  $\varphi'$  решений Флоке.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения 1) — 4). Тогда для любого  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon_\delta > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\delta]$  уравнение (1) имеет  $T$  — периодическое решение  $x_\varepsilon$ , для которого справедливы неравенства

$$|T - T_0| < \delta \text{ и } \sup_{\tau} \left\| x_\varepsilon \left( \frac{T\tau}{T_0} \right) - \varphi(\tau) \right\| + \sup_{\tau} \left\| \frac{T}{T_0} x'_\varepsilon \left( \frac{T\tau}{T_0} \right) - \varphi'(\tau) \right\| < \delta.$$

### Литература

1. Ахмеров Р.Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, А.Е. Родкина — Новосибирск : Наука, 1986. — 264 с.

## ЭНТРОПИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

М.Н. Машкин, В.Ю. Смирнов (Москва, МАИ)

*mnmashkin@yandex.ru*

Определено конечное значение информационной энтропии для распределения непрерывной случайной величины.

Вероятность фиксированного значения непрерывной случайной величины равна нулю [1], что даёт бесконечность информационной энтропии при использовании бесконечно малых интервальных значений вероятности. В этом случае используют относительную энтропию, что нашло применение в расчётах пропускной способности

каналов связи и в обработке отсчётов в виде интервалов [2]. В работе рассматривается предельный случай равенства нулю интервала значений вероятности.

Информационная энтропия в nat для значений случайной величины равна:

$$H = - \sum_{i=1}^n \ln p_i^{p_i},$$

где  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

При условии дискретности событий с количеством  $n \rightarrow \infty$  и при равномерном законе распределения все вероятности событий (состояний) одинаковы и равны  $p$ . С учётом  $np = 1$ , получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -n \ln (1/n)^{(1/n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln (1/n)) = \infty.$$

Следовательно, в случае дискретного множества  $p_i$  вычисление  $H$  даёт очевидный результат равный  $\infty$ . В этом случае исключается вариант равенства нулю вероятности состояния, т.е.  $p \neq 0$ .

В случае непрерывного закона распределения случайной величины, что соответствует состоянию сингулярности пространства, когда дискретность случайной величины исключена ввиду отсутствия фактора времени, информационная энтропия может быть определена, с учётом  $n \rightarrow \infty$  и  $p_i = 1/n$ , следующим образом:

$$H = n \lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_i^{p_i} = \infty \cdot 0.$$

Таким образом, получаем неопределённость:  $H = \infty \cdot 0$ .

Для устранения неопределённости и с учётом плотности вероятности – производной от функции распределения вероятности (вероятность – функционал по определению), обладающей непрерывностью, применим правило Лопиталя. Что позволяет для одномерного пространства получить следующее выражение:

$$H = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\ln p_i)}{(1/p_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\ln p_i)'}{(1/p_i)'} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1/p_i)}{(\ln e/p_i^2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{\ln e}.$$

При законе равной плотности вероятности, т.е.  $np = 1$ , и при  $n \rightarrow \infty$  получим:

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{\ln e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \frac{(1/n)}{\ln e} \right) = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Для произвольного непрерывного закона распределения случайной величины, определённой на отрезке  $[a, b]$  получим:

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{\ln e} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(\xi_i) \Delta x_i}{\ln e} = \frac{1}{\ln e} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Вывод: Информационная энтропия распределения непрерывной случайной величина равняется 1 nat.

### Литература

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. / А.Н. Колмогоров // М.: Наука, 1974. — 120 с.
2. Mashkin, M. N. (2018) Fractional Degrees of Freedom in Statistics. Volume 14. Progress in physics. Issue 3 (July), 159–164. — <http://www.ptep-online.com/2018/PP-54-10.PDF>

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ И ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ<sup>1</sup>

Мельников Н.Б.,

Резер Б.И. (Москва, МГУ; Екатеринбург, ИФМ УрО РАН)

*melnikov@cs.msu.ru, reser@imp.uran.ru*

В теории среднего поля Стонера намагниченность  $m_z = 2\mu_B \bar{s}_z$ , пропорциональная среднему спину  $\bar{s}_z$ , получается из решения системы уравнений (см., напр., [1])

$$\bar{s}_z = \frac{1}{2}(\bar{n}_{\uparrow} - \bar{n}_{\downarrow}), \quad n_e = \bar{n}_{\uparrow} + \bar{n}_{\downarrow}, \quad (1)$$

где среднее число электронов  $\bar{n}_{\sigma}$  со спином  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  или  $\pm 1$  вычисляется по формуле

$$\bar{n}_{\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_{\sigma}(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \nu_{\sigma}(\varepsilon) \equiv \nu(\varepsilon + \sigma U \bar{s}_z).$$

Здесь  $f(\varepsilon) = [\exp((\varepsilon - \mu)/T) + 1]^{-1}$  — функция Ферми ( $\mu$  — химический потенциал,  $T$  — температура в энергетических единицах), а

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039-4).

© Мельников Н.Б., Резер Б.И., 2024



число электронов  $n_e$  вычисляется по формуле

$$n_e = 2 \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} \nu(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где  $\varepsilon_F$  — уровень Ферми. Немагнитная плотность электронных состояний d-электронов металла  $\nu(\varepsilon)$  (на атом, d-полосу и спин), константа взаимодействия  $U$  и уровень Ферми  $\varepsilon_F$  являются известными входными данными. Система уравнений (1) решается относительно  $\bar{s}_z$  и  $\mu$  при каждом значении параметра  $T \geq 0$ .

**Теорема.** Пусть выполнено условие

$$U \frac{2\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F)\nu_{\downarrow}(\varepsilon_F)}{\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F) + \nu_{\downarrow}(\varepsilon_F)} > 1. \quad (2)$$

Тогда справедливы разложения

$$\begin{aligned} \bar{s}_z(T) &= \bar{s}_z(0) - \alpha T^2 + \dots \\ \mu(T) &= \varepsilon_F - \beta T^2 + \dots \end{aligned}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F)\nu'_{\downarrow}(\varepsilon_F) - \nu_{\downarrow}(\varepsilon_F)\nu'_{\uparrow}(\varepsilon_F)}{\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F) + \nu_{\downarrow}(\varepsilon_F) - 2U\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F)\nu_{\downarrow}(\varepsilon_F)}, \\ \beta &= \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu'_{\uparrow}(\varepsilon_F) + \nu'_{\downarrow}(\varepsilon_F) - U[\nu'_{\uparrow}(\varepsilon_F)\nu_{\downarrow}(\varepsilon_F) + \nu'_{\downarrow}(\varepsilon_F)\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F)]}{\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F) + \nu_{\downarrow}(\varepsilon_F) - 2U\nu_{\uparrow}(\varepsilon_F)\nu_{\downarrow}(\varepsilon_F)}. \end{aligned}$$

Ранее асимптотические формулы для намагнитченности в теории среднего поля Стонера были получены для  $\nu(\varepsilon)$ , пропорциональной  $\sqrt{\varepsilon}$  (свободные электроны) [2], и для произвольной  $\nu(\varepsilon)$  лишь в двух предельных случаях [3]. Наша асимптотическая формула для намагнитченности справедлива в общем случае, а асимптотическая формула для химического потенциала обобщает известное разложение, справедливое для свободных электронов (см., напр., [4]),

$$\mu(T) = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)} T^2 + \dots$$

на случай произвольной  $\nu(\varepsilon)$ . Неравенство (2) обобщает известный критерий Стонера  $U\nu(\varepsilon_F) > 1$ . Полученные формулы могут быть использованы для исследования температурной зависимости намагнитченности в сплавах 3d-металлов (см., напр., [5]).

## Литература

1. Melnikov N.B. Dynamic Spin Fluctuation Theory of Metallic Magnetism / N.B. Melnikov, B.I. Reser — Berlin : Springer, 2018.
2. Stoner E.C., Collective Electron Ferromagnetism / E.C. Stoner // Proc. R. Soc. A: Math. — 1938. — Vol. 165 — P. 372–414.
3. Thompson E.D. The low temperature variation of the saturation magnetization of ferromagnetic metals and alloys / E.D. Thompson, E.P. Wohlfarth, A.C. Bryan // Proc. Phys. Soc. — 1964. — Vol. 83 — P. 59–70.
4. Fetter A.L. Quantum Theory of Many-Particle Systems / A.L. Fetter, J.D. Walecka — Mineola, NY : Dover, 2003.
5. Melnikov N.B. Relation between Magnetism and Electronic Structure of 3d-Metal Alloys in the Stoner Theory and in the DSFT // Phys. Met. Metallogr. / N.B. Melnikov, A.S. Gulenko, B.I. Reser — 2024. — Vol. 125 — P. 49–55.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОСПАЛЕНИЯ НА ВИРУСНУЮ ИНФЕКЦИЮ<sup>1</sup>

А.С. Мозохина (Москва, РУДН)

*mozokhina-as@rudn.ru*

В предыдущих работах было показано, что распространение вирусной инфекции по ткани или культуре клеток описывается системой реакционно-диффузионных уравнений [1, 2]. Известно, что при попадании инфекции в организм развивается воспалительная реакция. При этом слишком интенсивная воспалительная реакция приводит к патологическим состояниям (например, цитокиновый шторм), а длительно протекающее воспаление может стать причиной некоторых заболеваний (например, атеросклероз).

В настоящей работе сформулирована математическая модель на основе нелокальных уравнений реакции-диффузии, описывающая влияние воспаления, а именно воспалительных цитокинов, производимых заражёнными клетками, на распространение вирусной инфекции в ткани. Рассматриваются однородная и неоднородная по пространству постановки. Для однородной по пространству постановки (случай перемешивания) определены стационарные точки и найдено условие устойчивости стационарного состояния, соответствующего отсутствию инфекции. Для неоднородной постановки получены оценки на скорость распространения вирусной инфекции ме-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

© Мозохина А.С., 2024

тодом линеаризации и на полную вирусную нагрузку (интеграл от концентрации вируса по пространственной переменной). Установлена зависимость этих величин от параметров, характеризующих воспаление, и связь полученных формул с результатами, полученными в предыдущей модели [1]. Результаты анализа и численного моделирования рассматриваемой модели показывают, что производство воспалительных цитокинов заражёнными эндотелиальными клетками способствует разрешению вирусной инфекции, уменьшению инфекционности и тяжести заболевания [3].

### Литература

1. Ait Mahiout L. Virus replication and competition in a cell culture: Application to the SARS-CoV-2 variants / L. Ait Mahiout, A. Mozokhina, A. Tokarev, V. Volpert // Appl.Math. Lett. — 2022. — Т. 133. — С. 108217.
2. Ait Mahiout L. Infection spreading in cell culture as a reaction-diffusion wave / L. Ait Mahiout, N. Bessonov, B. Kazmierczak, G. Sadaka, V. Volpert // ESAIM: M2AN. — 2022. — Т. 56. — С. 791–814.
3. Mozokhina A. Modeling of viral infection with inflammation / A. Mozokhina, L. Ait Mahiout, V. Volpert // Mathematics. — 2023. — Т. 11. — С. 4095.

## ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Л.А. Мышеловка, Ю.П. Вирченко (Белгород, БелГУ)  
*virch@bsu.edu.ru*

Развивается флуктуационная «квазимикроскопическая» теория радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельных диэлектриках на основе статистических полуфеноменологических представлений. Она исходит из кинетических представлений переноса тепла излучением в среде и в математическую модель теории включается переносящее тепло излучение электромагнитное поля.

В рамках подхода, использованного в работе [1], рассматривается одномерная задача об эволюции распределения температуры  $T(x, t)$  в ограниченном образце с учётом радиационно-кондуктивного теплообмена. Изменение со временем  $T(x, t)$  описывается уравнением

теплопроводности

$$\dot{T}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $P(x, t)$  – поток энергии излучения, переносящего тепло.

Рассматривается среда идеального диэлектрика с учетом явления дисперсии при распространении в них электромагнитного излучения. Она обладает зависящими от частоты  $\omega$  поля диэлектрической  $\varepsilon(\omega)$  и магнитной  $\mu(\omega)$  проницаемостями. С целью определенности постановки задачи, связанной с уравнением (1), вычисляется плотность потока  $P(x, t)$  энергии электромагнитного поля в точке  $x$  среды в момент времени  $t$ , излучаемого малым объемом, окружающим точку  $x$ . Плотность потока  $P(x, t)$  рассматривается как функция от локальной температуры  $T(x, t)$ . Согласно канонам электродинамики, функционал  $P(x, t)$ , в случае идеальной диэлектрической среды, определяется в виде

$$P(x, t) = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c^2} ([\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)])_x,$$

где  $\varepsilon, \mu$  – соответственно, электрическая и магнитная восприимчивости среды,  $\mathbf{E}(x, t)$ ,  $\mathbf{H}(x, t)$  – векторные поля электрической и магнитной составляющие теплового электромагнитного излучения. Поля  $\mathbf{E}(x, t)$  и  $\mathbf{H}(x, t)$  подчинены уравнениям Максвелла в среде,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \gamma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(x, t), \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Токовое слагаемое в первом уравнении, согласно «флуктуационно-диссипационной теореме», представлено в виде двух слагаемых. Первое из них  $\gamma \mathbf{E}$ , связанное с мнимой частью проводимости среды, описывает поглощение средой электромагнитной теплового излучения, а второе — «флуктуационный» ток  $\mathbf{j}(x, t)$  описывает процесс генерации излучения тепловыми колебаниями среды.

Так как поля порождаются тепловыми флуктуациями  $\mathbf{E}(x, t)$  и  $\mathbf{H}(x, t)$ , то они должны рассматриваться как стохастическими. При этом флуктуационный ток представляет собой стохастический источник, который математически моделируется обобщённым гауссовским случайным процессом белого шума, как по времени, так и по пространственной координате. Для того чтобы  $P(x, t)$  было функцией от имеющейся в каждой фиксированной пространственно-временной точке локальной температуры  $T(x, t)$  необходимо, чтобы

такими функциями были поля  $\mathbf{E}(x, t)$ ,  $\mathbf{H}(x, t)$ . Это, в свою очередь, требует чтобы таковой являлась амплитуда  $A[T(x, t)]$  стохастического источника,

$$\langle \mathbf{j}(x, t) \rangle = 0, \quad \langle j_k(x, t) j_l(x', t') \rangle = \delta_{kl} A[T(x, t)] \delta(t - t') \delta(x - x').$$

Здесь угловые скобки обозначают математическое ожидание.

Для вычисления потока  $P(x, t)$ , решается стационарная задача на отрезке вещественной оси для системы стохастических уравнений (2) с граничными условиями непрерывности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и их производных по  $x$ . Математическое ожидание, определяющее поток  $P(x, t)$ , вычисляется в коротковолновой асимптотике, когда частота  $\omega$  фурье-образов полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  стремится к бесконечности.

### Литература

1. Вирченко Ю.П. Неравновесная термодинамика радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрических средах / Ю.П. Вирченко, М.А. Сапрыкин // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. — 2011. — Т. 23(118), № 25. — С. 158-167.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

А.Н. Наимов, М.В. Быстрецкий (Вологда, ВоГУ)

*naimovan@vogu35.ru, pmbmv@bk.ru*

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x''(t) = Q(t, x'(t) - B(t, x(t))) + f(t, x(t), x'(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Здесь  $Q, B : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^2$  — непрерывные отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1)  $Q(t + \omega, y) \equiv Q(t, y)$ ,  $B(t + \omega, y) \equiv B(t, y)$ ;
- 2)  $\exists m > 1$   $Q(t, \lambda y) \equiv \lambda^m Q(t, y) \quad \forall \lambda > 0$ ;
- 3)  $B(t, \lambda y) \equiv \lambda B(t, y) \quad \forall \lambda > 0$ ;
- 4)  $f(t + \omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$ ;
- 5)  $(|y_1| + |y_2|)^{-m} |f(t, y_1, y_2)| \rightrightarrows 0$  при  $|y_1| + |y_2| \rightarrow \infty$ .

Отображение  $f$  называем возмущением.

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032 <https://rscf.ru/project/23-21-00032/>

© Наимов А.Н., Быстрецкий М.В., 2024

Цель работы — нахождение условий на  $Q$  и  $B$ , обеспечивающих существование  $\omega$ -периодических решений системы уравнений (1) при любом возмущении  $f$ . Решение  $x(t) \in C^2(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^2)$  системы уравнений (1) называем  $\omega$ -периодическим, если  $x(t + \omega) \equiv x(t)$ .

В работе [1] исследовано существование периодических решений системы уравнений вида (1) в многомерном случае, когда главная нелинейная часть  $Q$  не зависит от  $t$ . В этом случае если имеет место априорная оценка периодических решений, то по известной схеме можно вычислить вращение соответствующего вполне непрерывного векторного поля, нули которого являются периодическими решениями системы уравнений (1). Если вращение отлично от нуля, то согласно принципу ненулевого вращения существуют периодические решения. В многомерном случае, когда  $Q$  зависит от  $t$ , весьма проблематично вычисление вращения порождаемого вполне непрерывного векторного поля.

В настоящей работе исследовано существование периодических решений двумерной системы уравнений (1) предполагая, что главная нелинейная часть  $Q$  зависит от  $t$ . Сначала сформулирована и доказана теорема об априорной оценке  $\omega$ -периодических решений. В условиях априорной оценки, применяя результаты работы [2], доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования  $\omega$ -периодических решений.

Пусть наряду с условиями 1–5 выполнены следующие условия:

6) при любом фиксированном  $t_0$  система уравнений  $y' = Q(t_0, y)$  не имеет ненулевых ограниченных решений;

7) система уравнений  $y' = B(t, y)$  не имеет ненулевых  $\omega$ -периодических решений.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия 1–7, то для  $\omega$ -периодических решений системы уравнений (1) имеет место априорная оценка*

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < M, \quad (2)$$

где  $M$  не зависит от  $x(t)$ .

Для нахождения условий существования  $\omega$ -периодических решений предположим, что вместо условия (7) выполнено условие

8)  $B(t, y) \equiv B_0(y)$  и система уравнений  $y' = B_0(y)$  не имеет ненулевых ограниченных решений.

Обозначим через  $\gamma_0(Q)$ ,  $\gamma(B_0)$  вращения (степени отображения) двумерных векторных полей  $Q(t_0, \cdot)$ ,  $B_0 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  на единичной окружности  $|y| = 1$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1–6, 8. Если  $\gamma_0(Q) \neq 0$ ,  $\gamma(B_0) \neq 0$ , то при любом возмущении  $f$  существует  $\omega$ -периодическое решение системы уравнений (1). И обратно, если система уравнений (1) имеет  $\omega$ -периодическое решение при любом возмущении  $f$ , то  $\gamma_0(Q) \neq 0$ .

### Литература

1. Мухамадиев Э. О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. урав. — 2024. — Т. 60, № 3. — С. 336–345.
2. Мухамадиев Э. О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов, М.М. Кобилзода // Дифференц. урав. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 203–209.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

С.А. Никитина (Челябинск, ЧелГУ)

*nikitina@csu.ru*

Рассматривается применение методов нечеткого моделирования для анализа эффективности инвестиционных инструментов. При выборе финансовой стратегии в ситуации неопределенности такой анализ помогает оценивать и принимать решение.

Поскольку параметры финансовой системы в условиях неопределенности бывает невозможно установить точно, то возникают задачи, которые описываются рядом характеристик, имеющих нечеткую природу.

В работе была задана система показателей для оценки инвестиционной стратегии. Зачастую на уровень эффективности инвестиции значительное влияние оказывают показатель адекватности доходности, приемлемый уровень риска и достаточная степень ликвидности вложений, поэтому эти характеристики были выбраны как основополагающие для оценки инвестиционной стратегии [1]. Однако в дальнейшем для уточнения полученной в работе модели могут быть добавлены другие показатели, при этом основной алгоритм вычисления оценки эффективности останется прежним. Значимость каждого показателя устанавливается с помощью весовых коэффициентов,

для определения которых можно применить метод попарных сравнений и шкалу Саати [2].

Для описания финансовых инструментов введены специальные лингвистические переменные, для каждой из которых были заданы терм-множества. Каждый терм представляет собой нечеткое число треугольного, трапециевидного или (L-R)-типа. После фиксации текущих значений, характеризующих финансовую систему, производится процедура фаззификации, то есть введения нечеткости. Затем определенным образом выполняется операция свертки по всем уровням показателей модели с учетом весовых коэффициентов значимости [3]. В результате получаем общую агрегированную характеристику инвестиционного инструмента, по которой возможно сделать вывод относительно уровня его эффективности.

### Литература

1. Пупенцова С.В. Оценка рисков инновационного проекта, основанная на синтезе методов нечетких множеств и анализа иерархий / С.В. Пупенцова, И.И. Поняева. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. — 2020. — Т. 13, № 6. — С. 66–78.
2. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Т.Л. Саати. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 308 с.
3. Батыршин И.З. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика / И.З. Батыршин, А.О. Недосекин, А.А. Стецко и др. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 208 с.

## О МЕТОДЕ СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ<sup>1</sup>

В.В. Обуховский, С.В. Корнев, Е.Н. Гетманова

(Воронеж, ВГПУ)

*ekaterina\_getmanova@bk.ru*

Для  $\tau > 0$  обозначим символом  $\mathcal{C}$  пространство  $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$  непрерывных функций  $x : [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и пусть  $I = [0, T]$ ,  $T > 0$ . Для функции  $x(\cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$  символом  $x_t \in \mathcal{C}$  обозначается функция, заданная как  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [- \tau, 0]$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках реализации Президентской программы исследовательских проектов (проект № 22-71-10008).

© Обуховский В.В., Корнев С.В., Гетманова Е.Н., 2024



В настоящей работе исследуется периодическая задача для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида: (1) :  $x'(\omega, t) \in \varphi(\omega, t, x(\omega, t)) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t)$ , (2) :  $x(\omega, 0) = x(\omega, T)$ , для всех  $\omega \in \Omega$ , где отображение  $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и мультиотображение  $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяют условию  $T$ -периодичности по второму аргументу и выполнены следующие условия:  $\varphi 1$ )  $\varphi: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — случайное отображение такое, что  $\varphi(\omega, \cdot, \cdot)$  непрерывно для любого  $\omega \in \Omega$ ;  $\mathcal{F} 1$ )  $\mathcal{F}: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$  — случайный  $u$ -мультиоператор;  $\mathcal{F} 2$ ) существует функция  $k: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что (j)  $k(\omega, \cdot) — L^2$ -интегрируема для любого  $\omega \in \Omega$ , (jj)  $k(\cdot, t) —$  измерима п.в.  $t \in I$ , и  $\|\mathcal{F}(\omega, t, x_t)\| := \sup\{|z|: z \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t)\} \leq k(\omega, t)(1 + \|x_t\|)$  для всех  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in I$  и  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Под случайным решением задачи (1), (2) понимается функция  $\xi: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что (i) оператор  $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega, \cdot) \in C([\tau, T]; \mathbb{R}^n)$  измерим; (ii) для каждого  $\omega \in \Omega$  абсолютно непрерывная функция  $\xi(\omega, \cdot) \in C([\tau, T]; \mathbb{R}^n)$  удовлетворяет (1), (2) для п.в.  $t \in I$ .

Из условий  $(\mathcal{F} 1)$ ,  $(\mathcal{F} 2)$  следует, что мультиоператор суперпозиции  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}: \Omega \times C([\tau, T]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$ , заданный как  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n): f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s) \text{ п.в. } s \in I\}$  корректно определен,  $\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)\|_2 = \sup\{\|f\|_2: f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)\}$  (см., напр., [1]).

Согласно  $(\varphi 1)$  можно определить мультиоператор суперпозиции  $\mathfrak{P}: \Omega \times C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$ , соответствующий включению (1), следующим образом:  $\mathfrak{P}(\omega, x) = \{h \in L^2(I, \mathbb{R}^n): h(s) = \varphi(\omega, s, x(s)) + f(s) \text{ п.в. } s \in I \text{ для некоторого } f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)\}$ .

Символом  $C_T$  обозначим пространство непрерывных  $T$ -периодических функций  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ . Через

$\|x\|_2 = \left( \int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$  обозначим норму в  $L^2$ .

**Определение 1.** (ср. [3]) Случайный потенциал  $\mathcal{G}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (1), если найдется  $N > 0$  такое, что для всех  $\omega \in \Omega$  и всех абсолютно непрерывных  $x \in C_T$  с  $\|x\|_2 \geq N$ , выполнено соотношение  $\int_0^T \langle \nabla \mathcal{G}(\omega, \cdot), h_\omega(s) \rangle ds > 0$  для всех суммируемых сечений  $h_\omega \in \mathfrak{P}(\omega, x)$ .

Под случайным топологическим индексом  $Ind \mathcal{G}$  случайного невырожденного потенциала  $\mathcal{G}$  понимается случайная топологическая степень  $Deg(\nabla \mathcal{G}, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$  (см. [2]).

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная строгая интегральная направляющая функция с ненулевым случайным топологическим индексом. Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют константы  $\varepsilon > 0$ ,  $K > 0$  и  $\beta \geq 1$  такие, что

$$\|\nabla \mathcal{G}_\omega\| \geq \varepsilon \|\tilde{x}\|^\beta - K \quad \text{и} \quad \langle \varphi(\omega, s, \tilde{x}), \nabla \mathcal{G} \rangle \geq \varepsilon \|\nabla \mathcal{G}_\omega\|^2,$$

для любых  $\omega \in \Omega$ ,  $s \in I$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ .

2) для любого  $\omega \in \Omega$  и абсолютно непрерывной функции  $x(\omega, \cdot) \in C_T$ , выполнено:  $\limsup_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon^2 T^{(1-\beta)/2}$ . Тогда задача (1),

(2) имеет случайное решение.

### Литература

1. Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: Либроком, — 2011.

2. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — № 40. — P. 337–358.

3. Kornev S. On periodic solutions for a class of random differential inclusions / S. Kornev, E. Getmanova, V. Obukhovskii, N.-C. Wong // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2021. — V 22. — № 8. — P. 1615–1626.

## О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $q \in (1, 2)$ С НЕВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ<sup>1</sup>

**В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян, М.С. Сорока**  
(Воронеж, ВГПУ)

*valerio-ob2000@mail.ru, garikpetrosyan@yandex.ru,  
marya.afanasowa@yandex.ru*

Рассматривается задача Коши для полулинейного дробного дифференциального включения в сепарабельном банаховом пространстве  $E$  следующего вида:

$${}^C D_0^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22–71–10008).

© Обуховский В.В., Петросян Г.Г., Сорока М.С., 2024

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad (2)$$

где  ${}^C D_0^q$ ,  $1 < q < 2$ , — дробная производная Герасимова-Капуто,  $F : [0, T] \times E \multimap E$  — почти полунепрерывное снизу многозначное отображение с компактными значениями,  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  — замкнутый линейный (не обязательно ограниченный) оператор в  $E$  и  $x_0, x_1 \in E$ .

Предполагается, что оператор  $A$  удовлетворяет условию

(A)  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  замкнутый линейный оператор в  $E$  порождает сильно непрерывное семейство равномерно ограниченных косинус оператор-функций  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ .

На многозначное отображение  $F$  накладываются следующие условия:

(F1)  $F : [0, T] \times E \multimap E$  — почти полунепрерывно снизу;

(F2) Существует константа  $K > 0$  такая, что

$$\|F(t, x)\|_E \leq K(1 + \|x\|_E) \text{ для п.в. } t \in [0, T];$$

(F3) Существует функция  $\mu \in L^\infty([0, T])$  такая, что для любого ограниченного множества  $Q \subset E$  имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \chi(F(J_{t,\tau} \times Q)) \leq \mu(t)\chi(Q), \text{ для п.в. } t \in [0, T],$$

где  $\chi$  — мера некомпактности Хаусдорфа в  $E$ ,  $J_{t,\tau} = [t-\tau, t+\tau] \cap [0, T]$ .

С применением теории мер некомпактности и уплотняющих операторов доказан следующий аналог классического свойства связности по Кнезеру.

**Теорема 1.** При выполнении условий (A), (F1) – (F3) множество  $\Sigma_{x_0}^F$  решений задачи (1)-(2) связно.

### Литература

1. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 2001. — 242 p.
2. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam : Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006. — 541 p.
3. Obukhovskii V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gel'man. — Singapore : World Scientific, 2020. — 220 p.
4. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 340 p.

# О МОДЕЛЯХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ОЛДРОЙДОВСКОГО ТИПА<sup>1</sup>

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)

*orlov\_vp@mail.ru*

Пусть ограниченная область  $\Omega \in R^N$ ,  $N = 2, 3$  такова, что  $\Omega = \Omega_0 \setminus (\cup_{i=1}^K \bar{\Omega}_i)$ . Здесь  $\Omega_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, K$  ограниченные области с непересекающимися границами, причем  $\Omega_i \subset \Omega_0$  при  $i = 1, \dots, K$ .

В  $Q_T = [0, T] \times \Omega$  рассматривается задача (задача А) о движении вязкоупругой жидкости олдرويدского типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta u + \operatorname{grad} p - \\ \mu_1 \operatorname{Div} \int_{\tau_u(t, x)}^t G(s-t) \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x)) ds = f, \\ \operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \end{aligned}$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(t, x) = \varphi(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega.$$

Здесь  $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$  и  $p(t, x)$  искомые скорость движения и давление жидкости, матрица  $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$ ,  $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  — тензор скоростей деформаций. Дивергенция  $\operatorname{Div} \mathcal{E}(u)$  матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, константы  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$ . Ядро  $G(t-s)$  удовлетворяет оценке  $|G(t-s)| \leq M(t-s)^{\gamma_1-1}$ ,  $0 < \gamma_1 < 2$ . Вектор-функция  $z(\tau; t, x)$  является решением задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

и определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени  $t$  находится в точке  $x \in \Omega$ . Пусть

$$W_1(0, T) \equiv \{v : v \in L_2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad v' \in L_1(0, T; V^{-1})\}.$$

Функция  $\tau_u(t, x) = \inf\{\tau : z(s; t, x) \in \Omega, s \in (\tau, t]\}$  означает момент вхождения в  $\Omega$  частицы жидкости, которая в момент времени  $t$  находится в точке  $x \in \Omega$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (Грант № 22-11-00103).

© Орлов В.П., 2024

Предполагается, что  $\varphi(x)$  удовлетворяет необходимому условию

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot n(x) dx = \sum_{i=0}^K \int_{\Gamma_i} \varphi(x) \cdot n(x) dx$$

( $n(x)$  - внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ), и является следом на  $\partial\Omega$  гладкой на  $\Omega_0$  соленоидальной функции  $a(x)$ .

Введем  $W_1 = \{v : v \in L_2(0, T; V), v' \in L_1(0, T; V^{-1})$  (определение пространств  $H$  и  $V$  на  $\Omega$  см. в [1]). Пусть  $b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i \partial v_j / \partial x_i w_j dx$ , где  $u, v, w \in V$ .

Представим  $u$  в виде  $u = v + a$ .

Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v^0 \in H$ . Слабым решением задачи  $A$  называется функция  $v \in W_1$ , удовлетворяющая тождеству

$$\begin{aligned} d(v, \varphi) / dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \varphi / \partial x_i) + \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_1 \left( \int_{\tau_{v+a}(t, x)}^t G(s-t) \mathcal{E}(v+a)(\tau, z(s; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \\ \langle f, \varphi \rangle - b(v, a, \varphi) - b(a, v, \varphi) - b(a, a, \varphi) - \mu_0 (\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\varphi)) \end{aligned}$$

при любой  $\varphi \in V$  и п.в.  $t \in [0, T]$ , и условию  $v(0) = u^0 - a$ .

При некоторых ограничениях на граничную функцию  $\varphi$  устанавливается существование слабого решения задачи  $A$ .

Результат получен совместно с В.Г. Звягиным.

### Литература

1. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1987. — 408 с.
2. Коробков М.В. Задача протекания для уравнений Навье-Стокса / М.В. Коробков, К. Пилецкас, В.В. Пухначёв, Р. Руссо // УМН. — 2014. — т. 69, выпуск 6(420). — С. 115–176.
3. Звягин В.Г. О слабой разрешимости дробных моделей вязкоупругой жидкости высокого порядка / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Изв. РАН. Сер. : Математика. — 2024. — № 88(1). — С. 58–81.

# ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ЖЁСТКОГО ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

С.Н. Ощепкова, А.С. Спивак (Воронеж, ВГУИТ, ВГУ)  
*alexslnger@yandex.ru*

В докладе обсуждается аналог теоремы о среднем для гармонических в смысле жёсткого лапласиана функций на стратифицированном множестве. Хорошо известно, что для таких функций, как и в случае классического лапласиана, имеет место равенство нулю интеграла от нормальной производной по замкнутой гладкой поверхности [1]. А именно,

$$\int_S (\nabla u)_\nu d\mu = 0,$$

где  $\mu$  — так называемая стратифицированная мера, а  $(\nabla u)_\nu$  — «стратифицированный» аналог нормальной производной. Тем не менее точного аналога теоремы о среднем по метрическим сферам до сих пор нет. Мы представим некоторую версию теоремы о среднем в случае двумерных плоских стратифицированных множеств. Например, в случае, когда две двумерные страты (допустим, верхняя и нижняя открытые полуплоскости стандартной системы координат) примыкают к одномерной страте (оси  $Ox$ ), имеет место формула

$$u(P_0) = \frac{u(P_1) + u(P_2)}{2} + \frac{1}{2} \int_{S_R(P_0)} u dl - \frac{1}{2} \iint_{B_R(P_0)} \frac{u}{r} ds,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — точки оси  $Ox$ , отстоящие на расстоянии  $R$  от точки  $P_0$ , лежащей на этой же оси.

## Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, — 2005. — 272 с.

# ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ СТЕФАНА-ДИРИХЛЕ

Е.Ю. Панов (Великий Новгород, НовГУ)

*eugeny.panov@novsu.ru*

В области  $t, x > 0$  рассматривается многофазная задача Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1)$$

где  $u_0 \leq u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_D$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  — температуры фазовых переходов,  $a_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, m$ , — коэффициенты диффузии для  $i$ -ой фазы. Рассматриваются непрерывные, кусочно  $C^2$ -гладкие решения  $u = u(t, x)$ , удовлетворяющие (1) в классическом смысле в областях  $u_i < u(t, x) < u_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , заполненных соответствующими фазами. На неизвестных линиях  $x = x_i(t)$  фазовых переходов, где  $u = u_i$ , должно выполняться условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \quad (2)$$

в котором  $k_i > 0$  — коэффициент теплопроводности  $i$ -ой фазы, а  $d_i \geq 0$  — скрытая удельная теплота  $i$ -го фазового перехода. В (2) односторонние пределы  $u_x(t, x_i(t)+)$ ,  $u_x(t, x_i(t)-)$  на линии  $x = x_i(t)$  берутся из областей с более высокой (соответственно — более низкой) температурой. Из физических соображений константы Стефана  $d_i$  должны быть положительными. Мы ослабляем это требование, предполагая, что  $d_i \geq 0$ , причём  $d_1 > 0$ , если  $u_0 = u_1$ . Добавим к нашей задаче также начальное и краевое условия

$$u(0, x) = u_0, \quad u(t, 0) = u_D. \quad (3)$$

Ввиду инвариантности задачи (1),(2),(3) относительно группы преобразований  $(t, x) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ , естественно искать автомодельное решение  $u = u(t, x) = u(\xi)$ ,  $\xi = x/\sqrt{t}$ . Из условий (3) следует, что  $u(0) = u_D$ ,  $u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_0 < u_D$ , так что функция  $u(\xi)$  убывает (случай  $u_D \leq u_0$  разбирается аналогично). Решение задачи (1),(2),(3) получается “склеиванием” автомодельных решений уравнений теплопроводности (1) и имеет вид (см. [1]):

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad (4)$$

$$\xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, m,$$

где  $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_m > \xi_{m+1} = 0$ ,  $F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds$  (считаем, что  $F(+\infty) = 1$ ). Параболы  $\xi = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , на которых  $u = u_i$ , являются неизвестными линиями фазовых переходов и подлежат определению из условий (2):

$$d_i \xi_i / 2 + \frac{k_i(u_{i+1} - u_i) F'(\xi_i / a_i)}{a_i(F(\xi_{i+1} / a_i) - F(\xi_i / a_i))} -$$

$$\frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) F'(\xi_i / a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i / a_{i-1}) - F(\xi_{i-1} / a_{i-1}))} = 0.$$

Оказалось, что эта нелинейная система алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора параметров  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  градиентна, то есть имеет вид  $\nabla E(\bar{\xi}) = 0$ , где

$$E(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^m k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i / a_i) - F(\xi_{i+1} / a_i)) + \sum_{i=1}^m d_i \xi_i^2 / 4,$$

$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega$ , открытый выпуклый конус  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  задан неравенствами  $\xi_1 > \dots > \xi_m > 0$ . Основным результатом работы является следующая

**Теорема 1.** *Функция  $E(\bar{\xi})$  коэрцитивна и строго выпукла в  $\Omega$ . Поэтому, она имеет единственную критическую точку  $\bar{\xi}_0 \in \Omega$ , которая является точкой глобального минимума. Координаты этой точки определяют единственное решение (4) задачи (1), (2), (3).*

Аналогичные результаты были получены ранее для задачи Стефана-Римана на прямой  $x \in \mathbb{R}$ , см. [2, 3].

### Литература

1. Карслоу Г. Теплопроводность твёрдых тел / Г. Карслоу. Д. Егер — М.: Наука, 1964. — 488 с.
2. Panov E.Yu. Solutions of an Ill-Posed Stefan Problem / E.Yu. Panov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 274, no. 4. — P. 534–543.
3. Панов Е.Ю. О структуре слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного уравнения диффузии / Е.Ю. Панов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — Т. 69, № 4. — С. 676–684.



# УЛУЧШЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В УСРЕДНЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.Е. Пастухова (Москва, РТУ-МИРЭА)

*pas-se@yandex.ru*

В  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , рассмотрим операторы четного порядка  $2m \geq 4$

$$(L_\varepsilon u)_j = (-1)^m \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (A_{\alpha\beta}^{jk}(x/\varepsilon) D^\beta u_k), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

с  $\varepsilon$ -периодическими коэффициентами,  $\varepsilon$  — малый параметр. Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  — мультииндексы длины  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ ;  $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ; коэффициенты  $\mathbf{A} = \{A_{\alpha\beta}^{jk}(y)\}$  — измеримые комплекснозначные функции для всех целых  $1 \leq j, k \leq n$  и мультииндексов  $\alpha, \beta$ ,  $|\alpha| = |\beta| = m$ . Введём  $A_{\alpha\beta} = \{A_{\alpha\beta}^{jk}\}_{j,k=1}^n$  —  $(n \times n)$ -матрицы для любых фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда (1) записывается короче как

$$L_\varepsilon u = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x/\varepsilon) D^\beta u).$$

Коэффициенты в (1) подчинены условиям:  $\|\mathbf{A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_1$  и

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (D^\alpha \varphi, A_{\alpha\beta} D^\beta \varphi) \geq \lambda_0 \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$$

с константами  $\lambda_1, \lambda_0 > 0$ , где  $(F, G)$  и  $\|F\|$  означают скалярное произведение и норму в пространстве  $L^2$ . Усредненным для  $L_\varepsilon$  является оператор той же структуры

$$\hat{L} = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha \hat{A}_{\alpha\beta} D^\beta,$$

но с постоянными коэффициентами, которые находятся через решения периодических задач на ячейке  $Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ . Известно [1], что ператоры  $L_\varepsilon$  и  $\hat{L}$  связаны сильной резольвентной сходимостью в пространстве  $L^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; этот результат усилен в [2] до сходимости резольвент в операторной  $(L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d))$ -норме с оценкой скорости сходимости порядка  $\varepsilon$ .

Укажем аппроксимацию резольвенты  $(L_\varepsilon + I)^{-1}$  в операторной  $(L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d))$ -норме с погрешностью порядка  $\varepsilon^2$ :

$$\|(L_\varepsilon + I)^{-1} - \mathcal{U}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2, \quad C = \text{const}(d, n, \lambda_0, \lambda_1), \quad (2)$$

где

$$\mathcal{U}_\varepsilon = (\hat{L} + I)^{-1} - \varepsilon(\hat{L} + I)^{-1}B(\hat{L} + I)^{-1} + \varepsilon^m \mathcal{K}_m(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon),$$

$$\mathcal{K}_m(\varepsilon)f = \sum_{k=1}^n \sum_{|\gamma|=m} (N_\gamma^k)^\varepsilon D^\gamma \Theta^\varepsilon u_k,$$

$$\mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon)f = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{|\delta|=m+1} (N_\delta^k)^\varepsilon D^\delta \Theta^\varepsilon u_k + \sum_{|\gamma|=m} (N_\gamma^k)^\varepsilon D^\gamma \Theta^\varepsilon u_k^1 \right)$$

с функциями  $u = (\hat{L} + I)^{-1}f$  и  $u^1 = -(\hat{L} + I)^{-1}B(\hat{L} + I)^{-1}f$ . Выше участвуют подходящий сглаживающий оператор  $\Theta^\varepsilon$ , дифференциальный оператор порядка  $2m+1$  с постоянными коэффициентами

$$Bu = (-1)^m \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|=m, |\delta|=m+1} D^\alpha b_{\alpha\delta}^k D^\delta u_k$$

(коэффициенты  $b_{\alpha\delta}^k$  находятся через решения задач на ячейке  $Y$ ), а также  $N_\gamma^k(y)$  и  $N_\delta^k(y)$  — сами решения задач на ячейке.

Оценка (2) обобщает результат из [3], где рассмотрены скалярные (т.е.,  $n=1$  в (1)) самосопряженные операторы  $L_\varepsilon$  с вещественными коэффициентами. Из (2), переходя к более слабой операторной  $L^2$ -норме, получаем  $L^2$ -аппроксимацию резольвенты  $(L_\varepsilon + I)^{-1}$  в виде суммы  $(\hat{L} + I)^{-1} - \varepsilon(\hat{L} + I)^{-1}B(\hat{L} + I)^{-1}$  с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ .

### Литература

1. Жиков В. В. Усреднение и  $G$ -сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Х. Т. Нгоан // Успехи мат. наук. — 1979. Т. 34, № 5. — С. 65—133.
2. Pastukhova S. E. Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators / S. E. Pastukhova // Applicable Analysis — 2016. V. 95, — P. 1449—1466.
3. Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvent in homogenization of higher order operators. Selfadjoint case / S. E. Pastukhova // J. Math. Sci. — 2022. V. 262, № 3. — P. 312—328.

# ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЛАПЛАСИАНА НА КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ

О.М. Пенкин, А.А. Поздняков (Воронеж, ВГУ)

*o.m.penkin@gmail.com, andruwapozd@gmail.com*

Как известно (см. [1]), спектр частот собственных колебаний сетки из струн близок, при определённых условиях к аналогичному спектру мембраны. Пока это доказано только для регулярных сеток (ячейка является квадратом). В данном докладе мы останавливаемся только на первом собственном значении, но основываемся на подходе, отличном от того, который приведён в упомянутой в ссылке книге. А именно, мы опираемся на принцип Рэлея, согласно которому

$$\lambda_Q = \inf_{U_Q} \frac{\iint_Q \sigma_Q |\nabla u|^2 dx dy}{\iint_Q \rho_Q u^2 dx dy}, \quad \lambda_G = \inf_{U_G} \frac{\int_G \sigma_G |\nabla u|^2 dl}{\int_G \rho_G u^2 dl},$$

где  $\lambda_Q$  и  $\lambda_G$  — первые собственные значения мембраны, заполняющей квадрат  $Q$  и, соответственно, сетки из струн, связанных в виде графа  $G$ , «заполняющей» квадрат  $Q$ . Между плотностями  $\rho_Q$  и  $\rho_G$ , а также напряжением  $\sigma_Q$  и натяжением  $\sigma_G$ , предполагаются выполненными следующие соотношения:

$$2\rho_G h + m = \rho_Q h^2, \quad \sigma_G = \sigma_Q h$$

где  $h$  — размер ячейки струнной сетки (длина струн, из которых составлена сетка). Мы показываем, что при данных условиях имеет место неравенства  $\lambda_Q = \lambda_G$ .

## Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров // М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2005. — С. 272.

# ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ, СОДЕРЖАЩЕГО ФУНКЦИЮ МАКДОНАЛЬДА<sup>1</sup>

**А.В. Перескоков** (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)  
*pereskocov62@mail.ru*

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в  $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\kappa|q - q'|) |\psi(q')|^2 dq') \psi = \lambda \psi, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

обозначает двумерный осциллятор,  $K_0(x)$  — функция Макдональда,  $\kappa > 0$  — параметр,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Задача (1) относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора  $\mathbf{H}$  равны единице.

Хорошо известно, что при  $\varepsilon = 0$  собственные значения  $\lambda = \lambda(\varepsilon)$  задачи (1) имеют вид  $\lambda(0) = n + 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Рассмотрим случай, когда число  $n$ , задающее невозмущенное собственное значение, велико (для определенности будем считать, что  $\lambda$  имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$ ). Сформулируем основной результат.

Для каждого числа  $k = 0, 1, 2, \dots$  собственные значения задачи (1) при  $n \rightarrow \infty$  задаются асимптотической формулой

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n} 2(k!)^2} \left\{ \frac{A_{2k}(\kappa^2)}{\kappa} \exp\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2}\right) - \frac{2B_{2k-1}(\kappa^2)}{\sqrt{\pi}} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (2)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

— интеграл вероятностей,  $A_{2k}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и  $B_{2k-1}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — системы многочленов степени  $2k$  и  $2k - 1$  соответственно, определяемые равенствами [1]

$$A_{2k}(x) =$$

---

<sup>1</sup> Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № FSWF-2023-0012)

© Перескоков А.В., 2024

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{x}{4}\right) \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^k \partial \eta^k} \left[ \frac{1}{(1-\omega)(1-\eta)} \exp\left(\frac{x(1-\omega\eta)}{4(1-\omega)(1-\eta)}\right) \right] \Big|_{\omega=\eta=0}, \\
B_{2k-1}(x) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^k \partial \eta^k} \left[ \frac{1}{(1-\omega)(1-\eta)} \exp\left(\frac{x(1-\omega\eta)}{4(1-\omega)(1-\eta)}\right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\omega\eta}}{2\sqrt{(1-\omega)(1-\eta)}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \right\} \right] \Big|_{\omega=\eta=0}, \\
B_{-1}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

В частности, при  $k = 0, 1, 2$  формула (2) принимает вид

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,0}(\varepsilon) &= n + 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}2\kappa} \exp\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
\lambda_{n,1}(\varepsilon) &= n + 1 + \\
&+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}32} \left\{ \frac{(\kappa^2 + 4)^2}{\kappa} \exp\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2}\right) - \frac{2(\kappa^2 + 6)}{\sqrt{\pi}} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
\lambda_{n,2}(\varepsilon) &= n + 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}2048} \left\{ \frac{(\kappa^4 + 16\kappa^2 + 32)^2}{\kappa} \exp\left(\frac{\kappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(\kappa^6 + 30\kappa^4 + 268\kappa^2 + 648)}{\sqrt{\pi}} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь  $n \rightarrow \infty$ .

Разложение (2) описывает спектр оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются около собственных значений невозмущенного оператора **Н**. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окрестности.

### Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotics of the spectrum of a Hartree type operator with self-consistent potential including the Macdonald function / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2024. — V. 279, № 4. — P. 508–524.

# **О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА FINE-TUNING BERT ДЛЯ СОКРЫТИЯ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ТЕКСТОВЫХ СООБЩЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ИМЕНОВАННЫХ СУЩНОСТЕЙ**

**И.В. Петров** (Воронеж, ВГУ)

*steam-ilka@yandex.ru*

С ростом объемов онлайн-коммуникаций и расширением применения автоматизированных систем анализа данных возрастает необходимость в защите персональной информации от несанкционированного доступа. Традиционные методы шифрования данных не всегда способны адекватно реагировать на изменяющийся контекст сообщений и требуют дополнительных ресурсов для анализа и обработки информации. В данной работе предложен метод динамического шифрования индивидуальных данных через дообучение предварительно обученной модели BERT, который позволяет автоматически распознавать и шифровать чувствительные персональные данные, такие как имена людей, названия организаций и адреса, в текстовых сообщениях с высокой точностью и скоростью.

В работе было показано, что дообученная на задаче NER модель BERT способна с высокой точностью идентифицировать и шифровать персональные данные в текстах различной тематики. Использование метода «fine-tuning» позволило значительно улучшить качество распознавания сущностей по сравнению с традиционными методами обработки естественного языка (регулярные выражения и словари).

Для проверки эффективности предложенного метода был проведен ряд экспериментов, в ходе которых модель BERT дообучалась на различных наборах данных для задачи NER. Результаты экспериментов показали, что модель способна эффективно распознавать именованные сущности в тексте. В частности, была достигнута высокая точность распознавания имен, адресов и названий организаций, что делает предложенный метод перспективным для использования в сферах, требующих высокой степени конфиденциальности информации.

## Литература

1. Sang E.F. Introduction to the CoNLL-2003 shared task: Language-independent named entity recognition / E. F. Sang, F.D. Meulder // arXiv preprint cs/0306050. — 2003.
2. Дейтел П. Python. Искусственный интеллект, большие данные и облачные вычисления / П. Дейтел, Х. Дейтел ; перевел с английского Е. Матвеев. // — Санкт-Петербург : Питер, 2020. — С. 861.
2. Покорный Ю.В. Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети / Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 59, № 3. — С. 115–150.
3. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning / C.M. Bishop// — Springer Science+Business Media, LLC, 2006. — P. 729.

## ОБОБЩЕННАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОРЯДКА $q \in (1, 2)^1$

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГПУ)

*garikpetrosyan@yandex.ru*

Рассматривается обобщенная периодическая задача для полулинейного дробного дифференциального включения в сепарабельном банаховом пространстве  $E$  следующего вида:

$${}^C D_0^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = kx(T), \quad x'(0) = x_1, \quad (2)$$

где  ${}^C D_0^q$ ,  $1 < q < 2$ , — дробная производная Герасимова-Капуто,  $F : [0, T] \times E \rightrightarrows E$  — полунепрерывное сверху многозначное отображение с компактными значениями,  $k$  — положительная константа,  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  — замкнутый линейный (не обязательно ограниченный) оператор в  $E$ , порождающий семейство сильно непрерывных равномерно ограниченных косинус оператор-функций  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$  и  $x_1 \in E$ .

## Литература

1. Ахмеров Р.Р. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений ней-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-71-10008).

© Петросян Г.Г., 2024

трального типа / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 3. – С. 537 – 540.

2. Каменский М.И. О принципе усреднения для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве с отклоняющимся аргументом и малым параметром / М.И. Каменский, Г.Г. Петросян // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. – Т. 204. – С. 74-84.

3. Петросян, Г.Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2022. - Т. 32, № 3. - С. 415-432.

4. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. - 2020. - Т. 25, №. 131. - С. 284–289.

5. Afanasova M.S. On a generalized boundary value problem for a feedback control system with infinite delay / M.S. Afanasova V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan // Vestnik Udmurtskogo Universiteta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki. - 2021. - V. 31, Is. 2. P. 167-185.

6. Afanasova M.S. A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions / M.S. Afanasova V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan // Advances in Systems Science and Applications. - 2021. - V. 21, № 3. - P. 40-62.

7. Couchouron J.-F. Abstract topological point of view and a general averaging principle in the theory of differential inclusions / J.-F. Couchouron, M. Kamenskii M. // Nonlinear Analysis. - 2000. - V. 42, № 6. – P. 1101-1129.

8. Kamenskii, M. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de Fitte, J.-C. Yao // Mathematics. - 2022. - V. 10, Is. 2. - P. 219-231.

9. Kamenskii M.I. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Mathematics. - 2021. - Vol. 9, Is. 2. - P. 136-154.

10. Gurova I.N. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations /



I.N. Gurova, M.I. Kamenskii // Differential Equations, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 106 – 112.

11. Obukhovskii V. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, C.F. Wen, V. Bocharov // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2022. — Vol. 6, № 3. — P. 185-197

12. Petrosyan, G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order / G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. - 2020. - V. 34. - P. 51-66.

## **АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>**

**С.И. Пискарев** (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)  
*piskarev@gmail.com*

Дискретизация уравнений в частных производных разностными схемами бурно развивающаяся область современной математики. Акценты сместились в настоящий момент на дробные уравнения. Такие задачи отличаются от классических тем, что гладкость начальных данных и скорость сходимости разностных схем имеют специфическую связь. В случае дискретизации дробных уравнений неравенство коэрцитивности, как и в классическом случае, позволяет получить двусторонние оценки скорости сходимости. О таких особенностях для дробных уравнений мы и поговорим.

### **Литература**

1. Li Liu. Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations. / Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev Sergey // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Cham Switzerland. — 2023. — V. 423, PP. 89-113.

2. Li Liu. Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in  $L^p([0, 1], \Omega)$ . / Fan Zhenbin, Li Gang, S. Piskarev // Applied Mathematics and Computation. — 2021. — V. 389, Article 125574.

3. Piskarev S. Unstable manifolds for fractional differential equations. / S. Siegmund // Eurasian journal of mathematical and computer applications. — 2022. — V. 10, PP. 58 – 72.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-21-00005).  
© Пискарев С.И., 2024

4. Piskarev S. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. / A. Ovchinnikov. // World Scientific, 2023. 204 pp.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА УЧАСТКАХ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТНЫМИ РЕЖИМАМИ<sup>1</sup>

М.А. Погребняк (Ярославль, ЯрГУ)

*pogrebnyaktaksim@mail.ru*

Работа посвящена расширению математической модели движения транспортного потока, предложенной в [1, 2]. Расширенная модель описывает динамику движения нескольких автомобилей на участках с различными скоростными режимами.

Разделим весь участок дороги на  $M \in \mathbb{N}$  интервалов. Обозначим за  $\varphi^m$  начало  $m$ -ого интервала.

Будем считать, что водитель транспортного средства стремится ехать с максимальной допустимой скоростью на каждом участке:

$$V_{\max,n}^m = v_{\max,n}^m, \quad \text{если } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1}.$$

Введем функцию  $V_{\min,n}^m$  вида:

$$V_{\min,n}^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau), v_{\max,n}^{m+1}), \quad \text{при } n > 1 \text{ и } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1},$$

будет описывать скорость под которую транспортное средство должно подстраивать свою текущую скорость ( $V_{\min,1}^m = V_{\max,1}^{m+1}$ ).

Транспортное средство должно заранее обратить внимание на начало следующего интервала и подстроить свою скорость:

$$\Phi_n^m = \begin{cases} \min(\varphi_n^{m+1}, x_{n-1}(t - \tau)), & \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n \geq V_{\max,n}^{m+1}, \\ x_{n-1}(t - \tau), & \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n < V_{\max,n}^{m+1}. \end{cases}$$

Таким образом, модель для движения транспортного потока на участках с различными скоростными интервалами будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1^m [a_1 (V_{\max,1}^m - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1^m) H_1^m, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n^m [a_n (V_n^m - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n^m) H_n^m, \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

© Погребняк М.А., 2024

где  $a_n > 0$  — коэффициент чувствительности.  $P_n^m$  — логистическая функция вида:

$$P_n^m = \frac{V_{max,n}^m - V_n^m}{1 + \exp[k_n(-\Delta x_n^m(t, \tau) + S_n^m)]} + V_n^m,$$

в которой  $\Delta x_n^m(t, \tau) = \Phi_n^m - x_n(t)$ ,  $k_n > 0$  — скорость логистического роста. Функция  $V_n^m$  имеет вид:

$$V_n^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau), V_{max,n}^m) \quad \text{при } n > 1, \quad V_1^m = V_{max,1}^m.$$

$S_n$  — параметр логистической кривой, который отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестает превалировать над преследующим:

$$S_n^m = (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + \tau \Delta \dot{x}_n^m(t, \tau),$$

в которой  $\Delta \dot{x}_n^m(t, \tau) = V_{min,n}^m - \dot{x}_n(t)$ ,  $\tau$  — время реакции водителя,  $t_b$  — время срабатывания тормозной системы,  $\mu$  — коэффициент трения скольжения,  $g$  — ускорение свободного падения. Параметр  $l_n$  — сумма безопасного расстояния между двумя соседними автомобилями и длины впереди идущей машины.

Функция Хевисайда  $H_n^m$  имеет вид:

$$H_n^m = \begin{cases} q_n \left( \dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l \dot{x}_n^m(t, \tau)} \right)^2, & q_n \left( \dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l \dot{x}_n^m(t, \tau)} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & q_n \left( \dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l \dot{x}_n^m(t, \tau)} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

где  $\Delta_l \dot{x}_n^m(t, \tau) = \Phi_n^m - x_n(t) - l_n$ , а  $q_n > 0$  описывает интенсивность торможения автомобиля.

Релейная функция  $R_n^m$  имеет вид:

$$R_n^m = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n^m(t, \tau) > (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n^m(t, \tau) \leq (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n. \end{cases}$$

### Литература

1. Погребняк М.А. Моделирование движения транспортного потока / М.А. Погребняк. // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 10. — С. 95–109.
2. Погребняк М.А. Оценка параметров в модели транспортного потока // Математическое моделирование / М.А. Погребняк. // Математическое моделирование. — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 131–140.

# К ВОПРОСУ О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

М.В. Половинкина, И.П. Половинкин

(Воронеж, ВГУИТ, ВГУ)

*polovinkin@yandex.ru*

Рассмотрим начально–краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\vartheta}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = 0, \quad u(x, +0) = \varphi(x),$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\vartheta > 0$ . Пусть  $W_2^n$  означает множество всех функций  $g \in L_2(0, \pi)$ , у которых  $\partial^{n-1}g(\cdot)/\partial x^{n-1}$  абсолютно непрерывна на  $[0, \pi]$ ,

$$\|\partial^n g(\cdot)/\partial x^n\|_{L_2(0, \pi)} \leq 1, \quad \text{где } \|g(\cdot)\|_{L_2(0, \pi)} = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Функция  $\varphi(\cdot) \in W_{2, \gamma}^n$  может быть разложена на промежутке  $(0, 1)$  в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \sin(\kappa x)$$

Следуя [1], введем в рассмотрение "информационный" оператор  $F_{\delta}^N$ , который каждой функции  $\varphi \in W_2^n$  ставит в соответствие некоторый вектор  $y = (y_1, \dots, y_N)$  приближенных значений первых  $N$  коэффициентов в разложении функции  $\varphi$ , удовлетворяющий условию

$$\sum_{\kappa=1}^N |a_{\kappa} - y_{\kappa}|^2 < \delta^2, \quad \delta > 0,$$

и зададимся целью по этим данным восстановить решение рассматриваемой начально–краевой задачи в момент времени  $T > 0$  в классе  $W_2^n$ . Методом восстановления будем считать всякий оператор  $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \rightarrow L_{2, \gamma}(0, 1)$ , следуя [1]. Пусть

$$U(n, N, \delta) = \{(\varphi, y) : \varphi \in W_2^n, y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N,$$

$$\sum_{\kappa=1}^N |a_{\kappa} - y_{\kappa}|^2 < \delta^2\}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(0,1)} \sup_{(\varphi, y) \in U(m, N, \delta)} \|u(\cdot, T) - \mathbf{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(0,1)}.$$

Метод, на котором достигается введенная в этом определении точная нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

Пусть  $\omega_\kappa = \kappa^{2n}$ ,  $\mu_\kappa = j_\zeta^2(\kappa T)$ ,

$$A = \max_{1 \leq \kappa \leq N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}, \quad B = \max_{\kappa > N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n}},$$

где

$$j_\zeta(z) = \frac{2^\zeta \Gamma(\zeta + 1)}{z^\zeta} J_\zeta(z) = \Gamma(\zeta + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \zeta + 1)},$$

$\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера,  $J_\zeta(\cdot)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $\zeta = (\vartheta - 1)/2$ . Пусть для некоторых чисел  $1 \leq p \leq N$ ,  $q > N$  и  $p \leq r \leq N$  выполнены равенства

$$A = \frac{\mu_p}{\omega_p}, \quad B = \frac{\mu_q}{\omega_q}, \quad \mu_r - B\omega_r = \max_{p \leq \kappa \leq N} (\mu_\kappa - B\omega_\kappa).$$

Эти числа определяются неоднозначно, так что для определенности будем считать, что  $p$  — наибольшее, а  $q$  и  $r$  — наименьшие из чисел, для которых выполнены соответствующие равенства. Число  $r$  определяется из условия

$$j_\zeta^2(rT) - Br^{2n} = \max_{p \leq \kappa \leq N} (j_\zeta^2(\kappa T) - B\kappa^{2n}).$$

Числа  $\{s_\varrho\}$  определяются с помощью условия

$$\frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} = \max_{s_\varrho \leq \kappa \leq r} \frac{j_\zeta^2(\kappa T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{\kappa^{2n} - s_\varrho^{2n}},$$

$\varrho = 1, \dots, h-1$ ,  $s_0 = p$ ,  $s_h = r$ . Далее положим

$$G_\varrho = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1} - s_\varrho} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > B \right\}.$$

Получен [2] аналог теоремы [1] об оптимальном восстановлении решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

**Теорема.**

1. При  $B \geq A$  для любого  $\delta > 0$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^n},$$

метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.

2. При  $B < A$ ,  $s_{\varrho+1}^{-n} \leq \delta < s_\varrho^{-n}$ ,  $\varrho = 1, \dots, h-1$ ,

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{j_\zeta^2(s_\varrho T) \frac{s_{\varrho+1}^{2n} \delta^2 - 1}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} + j_\zeta^2(s_{\varrho+1} T) \frac{1 - \delta^2 s_\varrho^{2n}}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}}},$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_\varrho} \left( 1 + \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1} T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} j_\zeta^2(s_\varrho T) - s_\varrho^{2n} j_\zeta^2(s_{\varrho+1} T)} \kappa^{2n} \right)^{-1} \times \\ \times y_\kappa j_\zeta(\kappa T) \sin(\kappa x)$$

оптимальный.

3. При  $B < A$ ,  $\delta < r^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 j_\zeta^2(rT) + j_\zeta^2(qT) \frac{1 - \delta^2 r^{2n}}{q^{2n}}},$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_h} \left( 1 + \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n} j_\zeta^2(rT) - r^{2n} j_\zeta^2(qT)} \kappa^{2n} \right)^{-1} \times \\ \times y_\kappa j_\zeta(\kappa T) \sin(\kappa x)$$

оптимальный.

4. При  $B < A$ ,  $\delta \geq p^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}},$$

метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.

## Литература

1. Виск Н. Д. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным / Н. Д. Виск, К. Ю. Осипенко // Математические заметки. – 2007. – Т. 81, № 6. – С. 803–815.
2. Половинкина М. В. Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений / М. В. Половинкина, И. П. Половинкин // Прикладная математика & Физика. – 2023. – Т. 55, № 4. – С. 330–338.

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ БАЛАНСИРОВКА ОБУЧАЮЩЕГО НАБОРА ДАННЫХ МЕТОДОМ СОГЛАСОВАННОГО СИНТЕЗА

**И.Е. Попов, А.С. Резникова** (Волгоград, ВолГУ)

*popov.larion@volsu.ru, pib-201\_613411@volsu.ru*

При работе с моделями машинного обучения важную роль имеет обучающий набор данных. В зависимости от его качества определяется обобщающая способность моделей и их точность. Качество данных принято характеризовать их корректностью, а также полнотой [1]. Последнее характеризует репрезентативность выборки. При этом зачастую полнота выборки слабо представлена в малых наборах данных. В данной работе для повышения качества выборки была проведена пространственная балансировка методом согласованного синтеза. Будем считать синтез согласованным в том случае, если значения признаков не нарушают логику формирования признакового описания объекта, а созданные значения соответствуют действительно возможным (к такому синтезу, например, относится алгоритм SMOTE [2]).

Малые объемы выборки частое явление в медицинской области. В настоящем исследовании были использованы данные, полученные в ходе обследований молочных желез методом микроволновой радиотермометрии. Изначальная выборка в силу своего малого объема имела слабое разнообразие. Также в ней наблюдалась значительная несбалансированность. В результате анализа данных были определены информативные области [3]. Информативные области сформированы по основным признакам для каждого из 6 классов выборки [4]. Также были выдвинуты гипотезы о характерном распределении значений признаков. Далее, синтезировался дополняющий набор данных. Его объединение с изначальным способствовало получению данных, обладающих свойствами полноты и разнообразия.

Для оценки качества осуществленной балансировки проводилась многоклассовая классификация на трех наборах данных: изначальном, сбалансированном количественно и сбалансированном пространственно. Результаты представлены на рисунке 1. Здесь  $th0-th5$  – точность определения каждого из классов.  $m_{eff}$  – эффективность, равная среднему геометрическому по точности определения каждого из классов. В результате пространственной балансировки удалось повысить эффективность на 13.5% относительно изначальной выборки и на 6.2% относительно количественной балансировки. Предложенный метод балансировки позволяет как количественно сбалансировать данные, так и повысить их полноту.

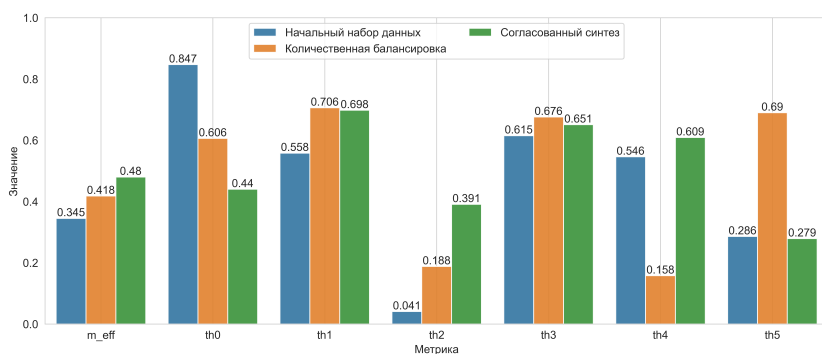


Рис. 1: Результаты вычислительных экспериментов.

## Литература

1. Jain A. Overview and importance of data quality for machine learning tasks. / A. Jain, H. Patel, L. Nagalapatti, N. Gupta, S. Mehta, S. Guttula, S. Mujumdar, S. Afzal, R. Sharma Mittal, V. Munigala // In Proceedings of the 26th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — 2020 — pp. 3561–3562.
2. Fernandez A. / SMOTE for Learning from Imbalanced Data: Progress and Challenges, Marking the 15-year Anniversary /A. Fernandez, S. Garcia, F. Herrera, N. Chawla — Journal of Artificial Intelligence Research. — 2018. — V. 61, pp. 863-905.
3. Лосев А. Г. Интеллектуальный анализ термометрических данных в диагностике молочных желез / А. Г. Лосев, В. В. Левшинский // Управление большими системами: сборник трудов. — 2017. — № 70. — С. 113-135.



4. Замечник Т.В. Управляемый классификатор в диагностике рака молочной железы по данным микроволновой радиотермометрии / Т.В. Замечник, А.Г. Лосев, А.Ю. Петренко // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — Т. 22. — № 3. — С. 52-66.

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ЯДРЕ ОПЕРАТОРА СЛЕДА<sup>1</sup>

Л.В. Провоторова (Москва, НИУ МЭИ)  
*prolubov2000@yandex.ru*

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с липшицевой границей  $\Gamma$ . Рассматривается краевая задача

$$-\Delta u(x) = h(x), x = (x_1, x_2) \in G, \quad (1)$$

$$(u|_{\Gamma}, \tau) = 0, \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right)_{norm} = f(\gamma), \gamma \in \Gamma, \quad (3)$$

где  $h(x) = (h_1(x), h_2(x)) \in L_2(G)$  – заданная вектор-функция,  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  – касательный вектор к границе  $\Gamma$ ,  $f \in L_2(\Gamma)$ , причем  $(f, \tau) = 0$  почти всюду на  $\Gamma$ . В этой задаче вектор-функция  $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$  – искомая величина.

Будем искать слабое решение этой задачи, то есть вектор-функцию  $u(x)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству, эквивалентному задаче (1) – (3).

Введем пространство функций, удовлетворяющих условию (2):

$$W_{2,norm}^1(G) = \{u(x) \in W_2^1(G) | (u|_{\Gamma}, \tau) = 0\}.$$

Проверим, что задача (1) – (3) эквивалентна интегральному тождеству

$$\int_G (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{\Gamma} (f, v|_{\Gamma}) d\gamma = \int_G (h, v) dx, \quad (4)$$

где  $u \in W_{2,norm}^1(G)$ , пробные функции  $v \in W_{2,norm}^1(G)$  произвольны.

---

<sup>1</sup> Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

© Провоторова Л.В., 2024

**Определение.** Функция  $u \in W_{2,norm}^1(G)$  называется слабым решением задачи (1) – (3), если для любой пробной функции  $v(x) \in W_{2,norm}^1(G)$  выполняется интегральное тождество

$$\int_G (\nabla u, \nabla v) dx - \int_\Gamma (f, v|_\Gamma) d\gamma = \int_G (h, v) dx.$$

**Определение.** Краевая задача для уравнений с частными производными называется слабо корректной по Адамару-Петровскому, если выполнены следующие требования: слабое решение существует и единственно, а также решение непрерывно зависит от данных задачи в том смысле, что справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{L_2(G)} \leq M (\|h\|_{L_2(G)} + \|f\|_{L_2(\Gamma)}). \quad (5)$$

**Теорема.** Пусть  $h \in L_2(G)$ ,  $f \in L_2(\Gamma)$ ,  $(f, \tau) = 0, \gamma \in \Gamma$ . Задача (1) – (3) слабо корректна тогда и только тогда, когда для любой функции  $u \in W_{2,norm}^1(G)$  справедливо неравенство

$$\int_G |u|^2 dx \leq M \int_G |\nabla u|^2 dx, \quad (6)$$

где  $M > 0$  – постоянная.

В дополнение к изложенной теореме существенную роль играет

**Лемма.** Если область  $G$  такова, что на границе  $\Gamma$  найдется хотя бы одна пара точек, в которых касательные векторы неколлинеарны, то для любой функции  $u \in W_{2,norm}^1(G)$  справедливо неравенство

$$\int_G |u|^2 dx \leq M \int_G |\nabla u|^2 dx,$$

где  $M > 0$  – постоянная.

### Литература

1. Дубинский Ю.А. О ядрах операторов следа и краевых задачах теории поля // Проблемы математического анализа : Выпуск 106. — С. 73–89, 2020.
2. Дубинский Ю.А. О ядрах функционалов следа и граничных задачах теории поля на плоскости / Ю.А. Дубинский // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова — 2021. — № 312. — С. 158–169.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. / А.Н Колмогоров, С.В Фомин // — М. :Наука, Главная редакция физико-математической литературы, — 1976. — 542с.

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА СМО С ДИФфуЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА, НЕНУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Д.Б. Прокопьева, Ю.И. Коробецкая,

Н.И. Головки (Владивосток, ТОВВМУ, ДВФУ)

*prokopievad@yandex.ru, golovko.ni@dvfu.ru, korobetskaya.yui@dvfu.ru*

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью  $\mu$ . На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого  $\lambda(t)$  изменяется на промежутке  $[\alpha, \beta]$  и представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса  $a \neq 0$ , коэффициентом диффузии  $b > 0$  и упругими границами  $\alpha, \beta$ .

Обозначим в стационарном режиме число заявок в СМО через  $\hat{\nu}$ , интенсивность входного потока через  $\hat{\lambda}$ . Пусть  $q_k(x)dx = P\{\hat{\nu} = k, x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$  — стационарные характеристики числа заявок,  $k \geq 0$ ;  $f(x)dx = P\{x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$  — стационарная плотность интенсивности входного потока,  $x \in [\alpha, \beta]$ . Интегралы  $\int_{\alpha}^{\beta} q_k(x)dx = p_k$ ,  $k \geq 0$ , представляют собой стационарное распределение числа заявок.  $f(x), q_k(x) \in C^2[\alpha, \beta]$ .

Анализ необходимого условия существования стационарного режима для такой СМО и  $f(x)$  приведены в [1]. В данной работе для указанной СМО доказаны достаточные условия существования стационарного режима по числу заявок.

Пусть  $M\hat{\nu}$  среднее число заявок в СМО в стационарном режиме,  $M(x)$  — плотность распределения среднего числа заявок по интенсивности  $\hat{\lambda}$ :

$$M(x)dx = \sum_{k \geq 1} kP\{\hat{\nu} = k, x \leq \hat{\lambda} < x + dx\} = \sum_{k \geq 1} kq_k(x) dx.$$

Среднее число заявок выражается через  $M(x)$  следующим образом:  $M\hat{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} M(x) dx$ .

В [1] представлена первая модель стационарной СМО относительно стационарных характеристик числа заявок  $q_k(x), k \geq 0$ .

Введем производящую функцию  $R(x, z) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k$  с областью определения  $D = D_{xz} \cup \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ , где

$$D_{xz} = \{(x, z) : x \in [\alpha, \beta], |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{(x, z) : 1 < z < 1 + \varepsilon_0 < \mu/\beta, z \in \mathbb{R}, x \in [\alpha, \beta]\}, \varepsilon_0 > 0,$$

$\varepsilon_0$  — некоторая малая величина, показанная ниже.

Производящая функция  $R(x, z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$R''_{xx}(x, z) - \frac{2a}{b} R'_x(x, z) - \frac{2}{b} (1 - z) \left(x - \frac{\mu}{z}\right) R(x, z) = \Psi(x, z), \quad (1)$$

где  $\Psi(x, z) = \frac{2\mu}{bz} (1 - z) q_0(x)$ , с краевыми условиями

$$\frac{b}{2} R'_x(x_i, z) - a R(x_i, z) = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta. \quad (2)$$

**Теорема 1.** *Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при выполнении равенства  $q_0(x) = (1 - x/\mu)f(x)$  краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, определенное на множестве  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ .*

В работе получено однородное уравнение относительно  $M(x)$  :

$$\frac{b}{2} M'(x) - a M(x) = 0 \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$\frac{b}{2} M'(\alpha) - a M(\alpha) = 0, \quad \frac{b}{2} M'(\beta) - a M(\beta) = 0. \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Если выполняются условия теоремы 1, то существует и единственна плотность среднего числа заявок  $M(x)$ , как решение краевой задачи (3), (4), которая имеет вид  $M(x) = M\hat{\nu} \cdot f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ .*

### Литература

1. Прокопьева Д.Б. Анализ уравнений типа Колмогорова – Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка, ненулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головкин // Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения - XXXIV: Материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвященной 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понtryгина. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2023. — С. 324–326.

# ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ПРИ $\delta$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ВЕРШИНАХ

В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)

pryad@mail.ru

Ниже все понятия, связанные с геометрическим графом и дифференцированием функций, определённых на нём, понимаются как и в [1]. Пусть  $\Gamma$  — открытый конечный и связный геометрический граф,  $J$  и  $\partial\Gamma$  — множества его, соответственно, внутренних и граничных вершин. Рассмотрим задачу

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad x \in \Gamma \setminus J, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h) u_h^+(a, t) = k(a) u(a, t), \quad a \in J, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(b, t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \text{ и } u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

где  $u_h^+(a, t)$  — правая производная  $u(\cdot, t)$  в вершине  $a$  по допустимому относительно  $\Gamma$  единичному вектору  $h$ ,  $D(a)$  — множество таких векторов, числа  $\alpha(a, h)$  и  $k(a)$  и функция  $\varphi$  заданы. Решение задачи (1)-(4) понимается классически.

Пусть  $G : \Gamma \times (\Gamma \setminus J) \rightarrow \mathbb{R}$  — функция Грина краевой задачи

$$-y''(x) = f(x), \quad x \in \Gamma \setminus J, \quad (5)$$

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h) y_h^+(a) = k(a) y(a), \quad a \in J, \quad (6)$$

$$y(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad (7)$$

понимаемая в смысле связной версии (см. в [1] гл. 3, п. 3.2.3, а также гл. 6); здесь  $f$  — произвольная заданная функция, равномерно непрерывная на каждом из рёбер  $\Gamma$ .

Определим функцию  $g(x, t, s)$  следующим набором требований: 1)  $g : \bar{\Gamma} \times [0; +\infty) \times (\Gamma \setminus J) \rightarrow \mathbb{R}$ , 2)  $g$  непрерывна, 3)  $g(x, 0, s) = G(x, s)$ , 4)  $g_t(x, 0, s) = 0$  при  $x \neq s$ , 5) для любой  $s \in \Gamma \setminus J$  функция  $g(\cdot, \cdot, s)$  удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in ((\Gamma \setminus J) \times (0; +\infty)) \setminus \chi(s),$$

условиям трансмиссии

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h) u_h^+(a, t) = k(a) u(a, t), \quad (a, t) \in (J \times (0; +\infty)) \setminus \chi(s),$$

и краевым условиям (3); здесь  $\chi(s)$  — объединение всех характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(s; 0)$ .

**Теорема.** Пусть задача (5)-(7) невырождена. Пусть  $\varphi$  непрерывна на  $\Gamma$ , причём

1)  $\varphi''$  равномерно непрерывна на любой компоненте связности множества  $\Gamma \setminus J$ ,

2)  $\varphi$  удовлетворяет условиям (6) и (7),

3)  $\varphi_{hh}^{++}(a) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a)$  для всех  $a \in J$  и  $h, \eta \in D(a)$ ,

4)  $\varphi_{hh}^{++}(b) = 0$  для всех  $b \in \partial\Gamma$  и  $h \in D(b)$ .

Тогда решение задачи (1)-(4) представимо в виде

$$u(x, t) = - \int_{\Gamma \setminus J} g(x, t, s) \varphi''(s) ds, \quad x \in \bar{\Gamma}, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Как доказано в [1] (в гл. 4), задача (5)-(7) невырождена, например, если  $\partial\Gamma \neq \emptyset$  и все числа  $\alpha(a, h)$  положительны, а все  $k(a)$  — неотрицательны. Если же  $\partial\Gamma = \emptyset$ , то от чисел  $k(a)$  достаточно дополнительно потребовать положительности хотя бы одного из них.

### Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГЛУ)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система в частных производных

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = B \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} + Du(t, s) \quad (1)$$

с условиями

$$x(0, s) = a_0(s), \quad x(T, s) = b_0(s), \quad (2)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $s \in [0, S]$ ;  $x(t, s) \in R^n$ ;  $u(t, s) \in R^m$ ;  $B, D$  — матрицы соответствующих размеров. Решается задача управления, а именно, построения в аналитическом виде пары функций  $(u, x)$ : функции управления  $u = u(t, s)$  и функции состояния  $x = x(t, s)$ , удовлетворяющей условиям (2) и дополнительному условию

$$x(t, 0) = \gamma_0(t). \quad (3)$$

Прямоугольной матрице  $D : R^m \rightarrow R^n$  соответствуют расщепления пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim } D \dot{+} \text{Ker } D, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im } D \dot{+} \text{Coker } D,$$

обуславливающие расщепление функции состояния на компоненты  $x_1(t, s) \in \text{Coker } D$  и  $u_1(t, s) \in \text{Im } D_0$  вида

$$x(t, s) = x_1(t, s) + u_1(t, s). \quad (4)$$

В случае  $\dim \text{Coker } D > 0$  реализуется первый шаг метода каскадной декомпозиции ([1] — [6]), подразумевающий переход от системы (1) с условиями (2) — (3), к редуцированной системе

$$\frac{\partial x_1(t, s)}{\partial t} = B_1 \frac{\partial x_1(t, s)}{\partial s} + D_1 \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial s} \quad (5)$$

с условиями

$$\frac{\partial^j x_1(t, s)}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = a_{1j}(s), \quad \frac{\partial^j x_1(t, s)}{\partial t^j} \Big|_{t=T} = b_{1j}(s), \quad j = \overline{0, 1}. \quad (6)$$

$$x_1(t, 0) = \gamma_1(t), \quad u_1(t, 0) = \eta_1(t). \quad (7)$$

Рассматривается случай сюръективной матрицы  $D_1$ , при выполнении условий  $\dim \text{Ker } D_j = 0 \quad j = \overline{0, 1}$ . Разработан метод построения базисной функции вида  $X_1(t, s) = \sum_{k=1}^4 \varphi_{1k}(s) \cdot \psi_{1k}(t)$ , удовлетворяющей условиям (6) и однозначно определяющей пару функций:  $x_1(t, s)$ ,  $u_1(t, s)$ , таких что функция состояния  $x(t, s)$  вида (4) удовлетворяет условиям (2)-(3). Подстановка этой функции  $x(t, s)$  в уравнение (1) позволяет единственным образом найти функцию  $u(t, s)$ .

Разработана методика построения базисных функций  $X_1(t, s)$  в различной форме: полиномиальной, экспоненциальной, дробно-рациональной. Для каждой базисной функций построены соответствующие решения задачи управления - пары функций  $(x, u)$ .

### Литература

1. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, № 7, P. 1189–1202.
2. Zubova C.П. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, № 5, P. 774–791.
3. Zubova C.П. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, 2021. — Vol. 44, № 15, P. 11998–12009.
4. Zubova C.П. Solution of a semi-boundary value problem for a degenerate partial differential equation / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, № 9, P. 1182–1194.
5. Раецкая Е.В. Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных разного порядка / Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. — 2023. — Т. 16, № 1. — С. 93–104.
6. Раецкая Е.В. Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных / Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. — 2023. — Т. 16, № 3. — С. 94–104.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ УПРАВЛЕНИЯ И СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**К.А. Раецкий** (Воронеж, ВГУ)

*kraetsky@mail.ru*

Решается задача моделирования стабилизированной траектории  $\bar{x}(t)$  системы

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + f(t), \quad (1)$$



с условиями

$$\bar{x}(t_0) = x^*, \bar{x}(t_i) = x_i, i = 1, 2, \dots k, \quad (2)$$

и условием экспоненциального сближения с программной траекторией  $x(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Задача моделирования состоит в построении множества стабилизирующих траекторий  $\bar{x}(t)$ , удовлетворяющих (1) - (2), и выборе одной траектории  $\bar{x}(t)$ , более подходящей для практического применения. При необходимости строится  $\bar{u}(t)$ , под воздействием которого, при выполнении начального состояния  $x^*$ , траекторией динамической системы (1) будет на практике именно  $\bar{x}(t)$  со свойствами (2), ввиду единственности решения начальной задачи для (1). Если подходящая траектория не находится, то управление  $\bar{u}(t)$  строить не нужно, а следует искать подходящую траекторию в другом классе вектор-функций.

Для решения поставленной задачи моделируются вспомогательные траектории  $y(t)$ , удовлетворяющие системе

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t) \quad (3)$$

и условиям

$$y(t_0) = x^* - x_0, y(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots k, \quad (4)$$

$$\|y(t)\| \leq ce^{-\omega t}. \quad (5)$$

Здесь  $v(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ ,  $v(t)$  — стабилизирующее управление. Для моделирования экспоненциально стабилизирующей траектории применяется метод неопределенных коэффициентов, разработанный в [1],[2], состоящий в следующем: рассматриваются модели  $y(t)$  в виде

$$y(t) = \sum_{j=1}^r e^{-c_j t} \alpha_j, \quad (6)$$

где  $c_j$  — скалярные величины, от выбора которых зависит форма траектории,  $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$  — неопределенные коэффициенты, число  $r$  зависит от количества моментов  $t_i$ ,  $i = 0, 1, \dots k$ , и от свойств матриц  $A$  и  $B$ . При подходящем наборе  $c_j$  и  $\alpha_j$  условие (5) будет выполнено.

Вектор-функция  $v(t)$  строится в виде

$$v(t) = \sum_{j=1}^r e^{-c_j t} \beta_j \quad (7)$$

с неопределенными векторными коэффициентами  $\beta_j \in \mathbb{R}^m$ .

Подстановка выражений (6), (7) в уравнение (3) и условия (4), приводит к линейной алгебраической системе, решение которой осуществимо современными вычислительными средствами [3].

Исследуется разрешимость полученной системы и определяются классы экспоненциальных функций, для которых полученная система разрешима.

Приводится пример, наглядно демонстрирующий эффективность применения предлагаемого метода.

### **Литература**

1. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P. Zubova, K.A. Raetskiy // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2021. — Vol. 18, № 6, — P. 7861–7876.

2. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями / К.А. Раецкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — Т. 1, № 50, — С. 65–80.

3. Раецкий К.А. Программа для решения задачи управления состоянием стационарной линейной динамической системы / К.А. Раецкий // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. — 2022667066. — 14.09.2022. — Заявка № 2022666539 от 07.09.2022.

## **ПРИМЕНЕНИЕ КУМУЛЯНТОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА**

**А.М. Райцин** (Москва, МТУСИ)  
*arcadiyram@rambler.ru*

Важной задачей при разработке оптико-электронных комплексов с лазерными источниками излучения является идентификация пространственного распределения интенсивности (РИ) лазерного пучка. В силу большого числа различных причин, излучаемое РИ часто не укладывается в расчетную модель гауссова пучка, являющегося решением уравнения квазиоптики, и при практическом использовании лазеров возникает задача оценивания отличия (сходства) излучаемого РИ с пространственным распределением Гаусса. В работе предлагается мера отличия (сходства) упомянутых РИ, использующая их

кумулянты  $\chi_i, i = 0, 1, 2, 3 \dots$ , основанная на факте ограниченного числа кумулянтов  $\chi_0, \chi_1, \chi_2$  для пространственного РИ Гаусса и являющаяся альтернативой к известным мерам [1].

РИ излучаемого поля в поперечном сечении лазерного пучка имеет вид  $I(x, y)$ . Для простоты в работе рассмотрен одномерный случай РИ, т.е.  $I(x) = I(x, y^*)$ , где  $y^*$  - фиксированная координата в поперечном сечении лазерного пучка.

Используя известную связь между моментами и кумулянтами РИ [2-3]

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ju)^i}{i!} m_i = \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (ju)^k \right),$$

в работе показано, что мера отличия (сходства)  $\mu(x)$  рассматриваемых РИ определяется выражением

$$\mu(x) = \frac{I(x)}{Ig(x)} = 1 + \left| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\beta_i}{i! D^{i/2}} H_i \left( \frac{x}{\sqrt{D}} \right) \right|, \quad (1)$$

где  $Ig(x) = \frac{m_0}{\sqrt{2\pi D}} \exp \left( -\frac{x^2}{2D} \right)$  - РИ Гаусса,  $m_0 = \exp(\chi_0)$ ,

$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i I(x) dx$  - моменты РИ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,

$D = \frac{m_2}{m_0} = \bar{m}_2 = \chi_2$ ,  $\beta_i = \frac{m_i}{m_0} = \bar{m}_i$ ,  $H_i \left( \frac{x}{\sqrt{D}} \right)$  - многочлены Эрмита,  $i = 3, 4, 5 \dots$

Второе слагаемое формулы (1) обуславливает отличие (сходство) излучаемого РИ от РИ Гаусса. При этом для двух слагаемых этой суммы имеют место соотношения

$$\beta_3 = \bar{m}_3 = \chi_3, \beta_4 = \bar{m}_4 = \chi_4$$

и в работе получена простая формула для оценки верхней границы меры отличия (сходства) РИ ( $\mu(x) \leq \bar{\mu}$ )

$$\bar{\mu} = 1 + \frac{|\gamma_3|}{3} + \frac{|\gamma_4|}{4}, \quad (2)$$

где  $\gamma_3 = \frac{\bar{m}_3}{\bar{m}_2^{3/2}}$ ,  $\gamma_4 = \frac{\bar{m}_4}{\bar{m}_2^2} - 3$ .

Моменты, входящие в формулу (2), определяются по результатам измерения РИ излучаемого поля. Рассмотренная мера может быть обобщена для двумерных пространственных РИ.

## Литература

1. Raitsin A.M. Bases for the Identification of Spatial Distributions of Intensity Laser Beams // A.M.Raitsin, M.V. Ulanovskii // Measurement Techniques — 2022 — volume 65, pp. 258–265. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11018-022-02077-6>
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразование / А.Н. Малахов // М. : Сов.радио,— 1978, — 376 с.
3. Безуглов Д.А. Кумулянтный метод определения закона распределения / Д.А.Безуглов, С.А.Швидченко // Научные технологии в космических исследованиях Земли — 2011 — №1, — С. 11–14.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров, А.М. Сергеева

(Москва, НИУ МЭИ)

*rasulzoda55@gmail.com, fedorovUS@mpei.ru, HmelevsAM@mpei.ru*

Пусть область  $D$  ограничена простым ляпуновским контуром  $\Gamma$ , охватывающим точку  $z_0 = 0$ . Пусть попарно непересекающиеся окружности  $\gamma_j$  с центром  $z_j$  радиуса  $r_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , лежат в области  $D$  и не проходят через точку  $z_0$ . Пусть  $\rho(z)$  есть расстояние от точки  $z$  до множества  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ . Очевидно, в достаточно малой окрестности  $\gamma_j$  функция  $\rho(z)$  совпадает с  $|\rho_j(z)|$ , где  $\rho_j(z) = |z - z_j| - r_j$ . Рассмотрим в области  $D_0 = D \setminus (\gamma \cup \{0\})$  уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{\rho(z)}u + \frac{b(z)}{|z|^m}\bar{u} = f, \quad (1)$$

где положительное число  $m < 1$  и функции  $a, b \in C(\overline{D})$ . Предполагается, что на каждой окружности  $\gamma_j$  функция  $|a(z)|$  постоянна, более точно,

$$a(z) = a_j^* u_j(z), \quad u_j(z) = \frac{z - z_j}{|z - z_j|} \frac{|z - z_j| - r_j}{||z - z_j| - r_j|}, \quad z \in \gamma_j, \quad (2)$$

с некоторыми  $a_j^* \in \mathbb{C}$ . Кроме того, разность

$$A_0(z) = \frac{a(z)}{\rho(z)} - \sum_{j=1}^n a_j^* \frac{u_j(z)}{\rho_j(z)} \in L^p(D), \quad (3)$$

где показатель  $p > 2$  в дальнейшем фиксирован. Решение ищется в классе  $W_{loc}^{1,p}(D_0)$ , т.е. в классе функций, принадлежащих  $W^{1,p}(G)$  в любой области  $G$ , которая вместе со своим замыканием содержится в  $D_0$ . Что касается правой части  $f$ , то она выбирается в классе  $L^p(D)$ .

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши–Римана (1), коэффициент которой при  $u$  допускают особенность первого порядка на окружности  $\gamma$  найдено интегральное представление. Переходим к рассмотрению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - A(z)u = f$$

с коэффициентом  $A(z) = a(z)\rho^{-1}$ , который согласно (3) записываем в виде

$$A(z) = \sum_{j=1}^n a_j^* \frac{u_j(z)}{\rho_j(z)} + A_0(z), \quad a_j^* \in \mathbb{C}, \quad A_0(z) \in L^p(D).$$

**Лемма.** Пусть функция  $A_0(z) \in L^p(D)$  и  $\omega_* = 2 \sum_{j=1}^n a_j^* \ln ||z - z_j| - r_j|$ .

Тогда функция

$$\Omega(z) = \omega_*(z) + (TA_0)(z), \quad z \in D_0, \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению  $\Omega_{\bar{z}} = A$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $\Omega(z)$  имеет вид (5) и  $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$ . Тогда общее решение уравнения (1) с  $b = 0$ , в классе  $C(\overline{D} \setminus \gamma)$  дается формулой

$$u = e^{\Omega}[\varphi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где  $\varphi \in C(\overline{D} \setminus \gamma)$  — произвольная аналитическая функция в открытом множестве  $D \setminus \{\gamma\}$ .

В работе получено интегральное представление уравнения (1) и для случая  $b(z) \neq 0$ .

### Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа // Обобщенные аналитические функции — 2-е изд., М. : Наука, — 1988. — 510 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения // Н.И. Мусхелишвили / Сингулярные интегральные уравнения — М. : Наука, 1968. — 511 с.

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.Б. Расулов, Н.В. Якивчик (Москва, НИУ МЭИ)

*rasulzoda55@gmail.com, YakivchikNV@mpei.ru*

Пусть односвязная область  $D$  ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром  $\Gamma$ , составленным из гладких дуг  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  и ориентированным против часовой стрелки. Множество  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  концов этих дуг обозначим  $F$ . Он разбивает плоскость на «конечную» —  $D$  и «бесконечную» —  $D'$  области. Для определенности пусть  $0 \in D$  и  $D_0 = D \setminus \{0\}$ ,  $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$  при  $\varepsilon > 0$  и, следовательно,  $\infty \in D'$ .

Рассмотрим в области  $D_0$  уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) = f(z) \quad (1)$$

с коэффициентом  $a(z) \in C(D \cup \Gamma)$ , который  $n$  раз непрерывно дифференцируем в достаточно малой окрестности нуля, где  $\alpha \geq 1$ ,  $n = [\alpha]$  — целая часть  $\alpha$ . Функция  $f$  в правой части (1) принадлежит  $L^p_{loc}(D_0)$ ,  $p > 2$ , т.е.  $L^p_{loc}(D_0) = \{f : f \in L^p_{loc}(D_\varepsilon) \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$ .

Решение ищется в классе  $W^{1,p}_{loc}(D_0)$ , т.е. в классе функций, принадлежащих  $W^{1,p}(G)$  в любой области  $G$ , которая вместе со своим замыканием содержится в  $D_0$ . Что касается правой части  $f$ , то она выбирается в классе  $L^p(D)$ .

Функцию  $a(z)$  в окрестности особой точки  $z = 0$  можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p(z) + a_0(z), \quad \text{где} \quad a_0(z) = o(z^n), \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Здесь  $p(z) = 2 \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} z^{k_1} \bar{z}^{k_2}$  — ее главная часть,  $k = (k_1, k_2)$ ,  $a_{k_1 k_2}$  — коэффициенты ряда Тейлора,  $a_0(z)$  — ее остаток в форме Пеано.

**Лемма 1.** *Если  $\alpha > 1$ , то существует регулярное решение уравнения*

$$\Omega_{\bar{z}} = |z|^{-\alpha} a(z),$$

представимое в виде

$$\Omega(z) = \omega(z) + h(z), \quad (2)$$

где

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{2}{|z|^\alpha} \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha} + T(|\zeta|^{-\alpha} a_0)(z) & \text{при } \alpha \neq 2(k_2+1), \\ \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} z^{k_1-k_2-1} \ln \bar{z} + T(|\zeta|^{-\alpha} a_0)(z) & \text{при } \alpha = 2(k_2+1), \end{cases}$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \omega(\tau, j) \right] \ln(z - \tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C_{(+0)}^\mu(S_{\tau,j}, \tau),$$

$\sigma_{\tau,j} = 1$  или  $\sigma_{\tau,j} = -1$ , если  $\tau$  является соответственно правым или левым концом дуги  $\Gamma_{\tau,j}$ .

Определение и свойства оператора  $T$  подробно изложены в [1], а определение класса  $C_{(+0)}^\mu(S_{\tau,j}, \tau)$  приведено в [2].

**Теорема 1.** Пусть число  $\alpha \geq 1$  и функция  $\Omega$  определена по формуле (2) и правая часть  $f$  удовлетворяет условию  $e^{-\Omega} f = f_0 \in L^p(D)$  с  $p > 2$ . Тогда любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$u = e^\Omega [\varphi + T f_0],$$

где  $\varphi \in C(\bar{D} \setminus F)$  — произвольная аналитическая в области  $D_0$  функция, которая для заданного семейства  $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$  вещественных чисел подчиняется степенному поведению

$$\varphi(z) = O(1) (z - \tau)^{\lambda_\tau} \quad \text{при } z \rightarrow \tau.$$

### Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Физматгиз, 1959. — 628 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968. — 511 с.
3. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Функц. анализ, СМФН. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.
4. Аверьянов Г.Н. Асимптотика решений задачи линейного сопряжения в угловых точках кривой // Г.Н. Аверьянов, А.П. Солдатов // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 9. — С. 1150–1159.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ОСОБОЙ ЭКСТРЕМАЛЬЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**М.И. Ронжина, Л.А. Манита** (Москва, РГУ нефти и газа  
(НИУ) имени И.М. Губкина, Москва, НИУ ВШЭ, МИЭМ)  
*ronzhina.m@gubkin.ru, lmanita@hse.ru*

Наличие особых экстремалей второго порядка характерно для задач оптимального управления, аффинных по двумерному ограниченому управлению  $u$ . В докладе будут представлены результаты для задач оптимального управления, аффинных по двумерному управлению из круга. В рассматриваемом классе задач решения в окрестности особой экстремали, как правило, определяются решениями обобщения задачи Фуллера на случай управления из круга:

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf_u, \quad \dot{x} = y, \dot{y} = u, \|u\| \leq 1, x, y, u \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

В задаче (1) начало координат является единственной особой экстремалью второго порядка. Имеется семейство решений в виде логарифмических спиралей, которые попадают в начало координат за конечное время, при этом управление совершает счетное число оборотов по границе круга [1].

В [2] исследовалась задача, аффинная по управлению из круга, гамильтонова система которой имеет большую размерность. Было доказано, что в окрестности особой экстремали второго порядка существует семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей, которые попадают в особую экстремаль за конечное время, при этом управление совершает счетное число оборотов по границе круга. В случае, когда гамильтонова система имеет малую размерность, решения в виде логарифмических спиралей найдены только для некоторых конкретных задач оптимального управления [1], [3], [4].

В докладе будет рассмотрено нелинейное возмущение задачи (1):

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf_u, \quad \dot{x} = y, \dot{y} = u + f(x, y), \|u\| \leq 1, x, y, u \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

где функция  $f(x, y)$  достаточно гладкая,  $f(0, 0) = 0$  и  $\exists C > 0$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|f(\lambda^2 x, \lambda y)|}{\lambda} < C.$$



Для задачи (2) начало координат является единственной особой экстремалью и имеет порядок 2.

**Теорема.** В достаточно малой окрестности начала координат существует семейство экстремалей задачи (2) в виде логарифмических спиралей

$$\begin{aligned}x(t) &= k_x(t)(T-t)^2 e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_x(t)}, \\y(t) &= k_y(t)(T-t) e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_y(t)}, \\u(t) &= e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_u(t)}, \quad t \leq T, \\x(t) &= y(t) = u(t) = 0, \quad t \geq T.\end{aligned}$$

Здесь  $k_{x,y}(t)$ ,  $\varphi_{x,y,u}(t)$  и  $\varphi_0(t)$  ограничены,  $\alpha = \pm\sqrt{5}$ .

Построенное семейство экстремалей попадает в начало координат за конечное время, при этом управление совершает счетное число оборотов по границе круга. Данный результат является обобщением результата, полученного в [3].

### Литература

1. Zelikin M.I. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering / M.I. Zelikin, V.F. Borisov — Boston : Birkhäuser, 1994. — 244 p.
2. Ронжина М.И. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуцкий // Труды МИАН. — 2021. — Т. 315. — С. 222–236.
3. Manita L. A. Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem / L.A. Manita, M.I. Ronzhina // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2022. — Vol. 27, No. 6. — P. 3325–3343.
4. Ronzhina M.I. Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // Regular and Chaotic Dynamics. — 2023. — Vol. 28, No. 2. — P. 148–161.

# ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СДВИГАМИ И СЖАТИЕМ АРГУМЕНТА<sup>1</sup>

**Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов**

(Москва, Российский университет дружбы народов,  
Грозный, Чеченский государственный университет)

Пусть  $p > 1$ , а компакт  $K \subset R^n$  и ограниченная область  $\Omega \subset R^n$  таковы, что  $p^{-1}\Omega - K \subset \Omega$ .

Пусть, кроме того,  $\nu \in (C(K))^*$  есть регулярная (комплексная) борелевская мера на  $K$ , а  $\tilde{\nu}(\xi) = \int_K e^{-ih\xi} d\nu(h)$  – ее характеристическая функция. Оператор со сдвигами и сжатием аргумента определим следующим образом:

$$Tu(x) = \int_K u(p^{-1}x - h) d\nu(h).$$

**Лемма.** Оператор  $T$  есть ограниченный линейный оператор в пространствах Соболева  $H^s(\Omega)$  ( $s \in R$ ). Его спектральный радиус в пространстве  $L_2(R^n)$  равен

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in R^n} |\tilde{\nu}(\xi) \tilde{\nu}(p\xi) \dots \tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{\frac{1}{m}}.$$

Если число  $\alpha \in C$  таково, что  $|\alpha| < 1/\rho(T)$ , то при всех  $s \geq 0$  оператор  $I + \alpha T : H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$  имеет ограниченный обратный. Если же для некоторого положительного числа  $s$  выполнено более сильное условие  $|\alpha| < 1/(p^s \rho(T))$ , то ограниченно обратимым будет и оператор  $I + \alpha T : H^{-s}(\Omega) \rightarrow H^{-s}(\Omega)$ .

Рассмотрим в  $\Omega$  краевую задачу

$$\begin{aligned} -\Delta(u(x) + \alpha Tu(x)) &= f(x) \quad (x \in \Omega), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Считая  $f \in L_2(\Omega)$ , под обобщенным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию  $u$  из пространства Соболева  $H_0^1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^n \left( (u + \alpha Tu)_{x_j}, v_{x_j} \right)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

---

<sup>1</sup> Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FECS-2020-0001).

при любой функции  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Теорема.** При выполнении неравенства  $|\alpha| < p/\rho(T)$  задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение  $u \in H_0^1(\Omega)$  для любой функции  $f \in L_2(\Omega)$ . Если при этом  $f \in H^k(\Omega)$ , а  $\partial\Omega \in C^{k+2}$ , то  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  ( $k$ - целое неотрицательное).

Продемонстрировано на примере, что при больших значениях коэффициента  $\alpha$  задача (1), (2) может иметь при любой функции  $f \in L_2(\Omega)$  бесконечно много обобщенных решений.

В монографии [1] построена теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, а в работе [2] рассмотрены эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатиями/растяжениями. Принципиальным ограничением этой работы было предположение, что все сжатия имеют один и тот же центр, что существенно сужало круг изучаемых задач. В докладе впервые рассматривается эллиптическое уравнение со сжатиями, центры которых «размазаны» по области.

### Литература

1. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A.L. Skubachevskii // Basel: Birkhauser Verlag, 1997. — 293 p.
2. Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский // СМФН — 2014. — Т. 54, — С. 3–138

## АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВСПЛЕСКА В ДРЕВОВИДНОЙ СЕТИ

В.А. Русаков (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

*vrusakov@sfedu.ru*

Явление всплеска динамического потока (обзор теории динамических потоков дан в [1]), заключающееся в превышении в некоторый момент времени суммарной величины потока по впадающим в сток дугам сети над величиной максимального стационарного потока для той же сети рассмотрено в [2, 3, 4]. Величина максимального всплеска динамического потока является важной характеристикой сети, наряду с величиной максимального стационарного потока, поскольку позволяет оценить максимальную загруженность сети для всего бесконечного множества допустимых динамических потоков.

Для нахождения потока, приводящего к максимальному всплеску в сети в [2] описан алгоритм, названный алгоритмом Эдмондса-Карпа с обратным поиском, вычислительная сложность которого оценивается как  $O(|X|^3 * i^2)$ , где  $|X|$  — количество вершин в сети, а  $i$  — время образования максимального всплеска. Суть данного алгоритма заключается в последовательном нахождении увеличивающих путей по направлению от стока к источнику и построении по исходной сети вспомогательной сети. Количества вершин и дуг вспомогательной сети превышают аналогичные величины исходной сети не меньше чем в  $i$  раз.

В данной работе предложен альтернативный алгоритм нахождения максимального всплеска, более эффективный по числу операций и по используемой памяти, чем алгоритм Эдмондса-Карпа с обратным поиском, а именно обладающий квадратичной от размеров сети временной сложностью и использующий вспомогательную сеть, размер которой не превышает размеров исходной сети. Однако, основным недостатком предлагаемого метода является его применимость только для динамических потоков в древовидных сетях (определение древовидной сети дано в [4]). Доказательство корректности приведенного алгоритма основывается на свойствах древовидных сетей.

Вспомогательным методом в предложенном алгоритме является алгоритм поиска максимального потока в древовидной сети, имеющий линейную вычислительную сложность от размеров сети. Однако, вместо предложенного алгоритма, для поиска ближайшего к стоку минимального разреза может быть использован любой алгоритм поиска максимального потока, вычислительная сложность которого не превышает  $O(|X|^2 + |U|^2)$  ( $|U|$  — количество дуг сети).

### Литература

1. Aronson J.E. A survey of dynamic network flows / J.E. Aronson // Annals of Operations Research — 1989. — Vol. 20. P. 1–66.
2. Водолазов Н.Н. Максимальный всплеск в сети и максимальный объем сети / Н.Н. Водолазов, Я.М. Ерусалимский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки, №6. — 2010. — С. 9–13.
3. Ерусалимский Я.М. О всплесках динамического потока и минимальных разрезах / Я.М. Ерусалимский, А.Е. Куликовский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. — 2014. — №4. — С. 5–8.
4. Erusalimskiy I.M. Some networks that allow splashes of dynamic flows and finding the maximum splash value / I.M. Erusalimskiy,

## ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕННО ТРАНССАСАКИЕВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

**А.Р. Рустанов, О.Е. Арсеньева, С.В. Харитонов**

(Москва, НИУ МГСУ, Москва, МПГУ, Оренбург, ОГУ)

*aligadzhi@yandex.ru, oe.arseneva@mpgu.su, hcb@yandex.ru*

**Определение 1 [1].** Почти контактная метрическая структура называется приближенно трансасакиевой (короче, *NTS-структурой*), если ее линейное расширение принадлежит классу  $W_1 \oplus W_4$  почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. Почти контактное метрическое многообразие, снабженное *NTS-структурой*, называется *NTS-многообразием*.

**Определение 2 [1, 2].** *NTS-структура* с замкнутой контактной формой называется собственной *NTS-структурой*.

**Определение 3 [1, 2].** Собственное *NTS-многообразие* с гармонической контактной формой называется гармоническим, а число  $\chi = -\frac{1}{2n}\delta\eta$  — его характеристикой.

**Теорема 1.** Для любого гармонического *NTS-многообразия* имеют место тождества:

$$1) R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi - R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$

$$2) R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi + R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$

$$3) R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$

$$4) R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0; \text{ for all } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (1)$$

**Теорема 2.** Тензор Риччи гармонического *NTS-многообразия* удовлетворяет тождествам:

$$1) S(\xi, \Phi^2 X) = 0; \quad 2) S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) = S(\Phi X, \Phi Y), \text{ for all } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

**Теорема 3.** Кривизна Риччи гармонического *NTS-многообразия*  $M$  в направлении структурного вектора не положительна; она равна нулю тогда и только тогда когда  $M$  — точнейшее косимплектическое многообразие.

**Теорема 4.** Гармоническое *NTS-многообразие* Эйнштейна является многообразием неположительной скалярной кривизны.

**Теорема 5.** *Не существуют гармонического NTS-многообразия постоянной положительной кривизны.*

**Теорема 6.** *Гармоническое NTS-многообразие является пространством постоянной кривизны  $k = -\chi^2$  тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ , снабженному канонической косимплектической структурой.*

**Теорема 7.** *Гармоническое NTS-многообразие точечно постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны является многообразием глобально постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной кривизны  $-\chi^2$ , т.е. когда оно канонически конциркулярно многообразию  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ , снабженному канонической косимплектической структурой.*

**Теорема 8.** *Гармоническое NTS-многообразие является многообразием точечно постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий:*

1)  $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{R}$ ; 2)  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ ; 3)  $\mathbf{CH}^n \times \mathbf{R}$ ; 4)  $M^2 \times \mathbf{R}$ ; 5)  $S^6 \times \mathbf{R}$ , снабженных канонической точнейшей косимплектической структурой. Здесь  $S^6$  — шестимерная сфера,  $M^2$  — келерово многообразие. При этом гармоническое NTS-многообразие является многообразием глобально постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ , снабженному канонической косимплектической структурой.

### Литература

1. Кириченко В.Ф. О геометрии приближенно трансасакиевых многообразий / В.Ф. Кириченко // Доклады Академии Наук. — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 733–736.
2. Rustanov A.R. Geometry of harmonic nearly trans-Sasakian manifolds / A.R. Rustanov // Axioms. — 2023. V. 12, № 8. — 744. <https://doi.org/10.3390/axioms12080744>.

# ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

RykhlovVS@yandex.ru

1. Рассмотрим обобщённую неоднородную начально-граничную задачу (НГЗ) для волнового уравнения со смешанной производной

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где  $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$ ;  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ ;  $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$ ,  $f(x, t)$  является функцией класса  $\mathcal{Q}$  и все эти функции являются комплекснозначными. Здесь и далее считаем, что функция  $f(x, t)$  переменных  $(x, t) \in Q$  есть функция класса  $\mathcal{Q}$ , если  $f(x, t) \in L_1(Q_T)$  при любом  $T > 0$ , где  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ .

Для волнового уравнения выполняется условие  $p_1^2 - 4p_2 > 0$ , то есть корни  $\omega_1, \omega_2$  характеристического многочлена вещественны. Предположим далее

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \quad (4)$$

Это соответствует регулярной по Биркгофу оператор-функции (о.-ф.), связанной с НГЗ (1)–(3) (см. далее).

Требуется найти решение НГЗ (1)–(3) в области  $Q$  при как можно более слабых условиях на функции  $\varphi(x), \psi(x), q(x), f(x, t)$ .

**Определение 1.** Задачу (1)–(3), в которой  $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$ ,  $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$ ,  $q(x) \in L_1[0, 1]$  и  $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ , назовём классической НГЗ.

**Определение 2.** Под классическим решением (к.р.) классической НГЗ понимается функция  $u(x, t)$  переменных  $(x, t) \in Q$ , которая:

- а) непрерывна вместе с  $u_x(x, t)$  и  $u_t(x, t)$ , при этом  $u_x(x, t)$  и  $u_t(x, t)$  абсолютно непрерывны и по  $x$ , и по  $t$ , и почти всюду (п.в.) в  $Q$  выполняется равенство  $u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t)$ ;
- б) удовлетворяет условиям (2)–(3) на границе множества  $Q$  и уравнению (1) п.в. в  $Q$ .

Для к.р. задачи (1)–(3) по необходимости должны выполняться условия (далее ссылаемся на них, как на условия (N)): 1) функции

$\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$ ,  $\psi(x)$  абсолютно непрерывны и 2)  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  и  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ .

С задачей (1)–(3) тесно связана спектральная задача  $L(\lambda)y = 0$ , порожденная о.-ф.  $L(\lambda)$  вида

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y - q(x)y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Известно, что числа

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{где } \lambda_k^0 = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1},$$

являются собственными значениями (с.з.) о.-ф.  $L(\lambda)$ , простыми при  $|k| \geq k_1 \gg 1$ , где  $k_1 \in \mathbb{N}$ . При этом  $\lambda_k^0$  являются с.з.  $L(\lambda)$  в случае нулевого потенциала.

2. Пусть  $\gamma_k$  есть окружности  $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k^0| = \delta\}$ , а  $\delta > 0$  настолько мало, что внутри  $\gamma_k$  находится по одному с.з.  $\lambda_k$  при  $|k| \geq k_2 \gg 1$ , где  $k_2 \in \mathbb{N}$ .

Обозначим через  $R_\lambda$  резольвенту о.-ф.  $L(\lambda)$ ,  $G(x, \xi, \lambda)$  её функцию Грина,  $R_{1\lambda}$  интегральный оператор с ядром  $G_\xi(x, \xi, \lambda)$ . Зафиксируем  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$  и число  $r > 0$  так, что при  $|k| \geq k_0$  внутри  $\gamma_k$  находится по одному с.з. и все  $\gamma_k$  при  $|k| \geq k_0$  находятся вне контура  $|\lambda| = r$ .

**Теорема 1.** Если  $u(x, t)$  есть к.р. задачи (1)–(3), выполняется (4) и  $u_{tt} \in \mathcal{Q}$ , то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k| \geq k_0} \int_{\gamma_k} \right) \left( -p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + \right. \\ \left. + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (5)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по  $x \in [0, 1]$  при любом фиксированном  $t > 0$ .

Из теоремы 1 видно, что задача (1)–(3) и ряд (5) тесно связаны: если эта задача имеет к.р., то для него справедлива формула (5). При этом функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  должны удовлетворять условиям (N).

Следуя методу, используемому в [1–2], расширим понятие этой связи. Ряд справа в (5) имеет смысл для любых функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,



$q(x) \in L_1[0, 1]$  и  $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ , хотя теперь он может и не быть сходящимся. Будем считать, что он является формальным решением (рядом) задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально.

**Определение 2.** В случае  $f(x, t) \in \mathcal{Q}$  и  $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$  будем называть формальный ряд справа в (5) обобщенным решением (о.р.) задачи (1)–(3), а саму задачу — обобщенной НГЗ.

3. Рассмотрим случай  $q(x) \equiv 0$ . С использованием метода, предложенного в [1–2] к простейшей смешанной задаче для уравнения колебания струны (использование аксиом расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера и аксиомы:  $\int \sum = \sum \int$ , где  $\int$  — определенный интеграл, предложенной в [1–2]) доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ ,  $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ ,  $q(x) \equiv 0$  и выполняется условие (4), то для о.р.  $u(x, t)$  НГЗ (1)–(3) справедлива формула

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (5)$$

где

$$v(x, t) := \zeta(\{\alpha(x, t)\}) - \zeta(\{\beta(x, t)\}),$$

$$\zeta(x) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left( \widehat{\varphi}(x) - \omega_1 \omega_2 \widetilde{\Psi}(x) \right),$$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a); \\ \omega_1 \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1). \end{cases} \quad \widetilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a); \\ \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1), \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad \eta(s) = \frac{\{s\}}{a} \chi(a - \{s\}) + \frac{1 - \{s\}}{1 - a} \chi(\{s\} - a),$$

$$\alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$$

$\chi(x)$  — функция Хевисайда,  $\{x\}$  — дробную часть числа  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Рассмотрим случай  $q(x) \not\equiv 0$ . Используя подход, разработанный в работе [3] с привлечением приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов в случае потенциала  $q(x) \in L_1[0, 1]$ , получена формула для решения в виде быстро сходящегося ряда.

Чтобы сформулировать полученный результат, введем линейный оператор,

$$(\mathcal{B}f)(x, t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) f(\xi, \tau) d\xi,$$

действующий из  $D(\mathcal{B}) \subset L_1(Q_T)$  в  $C(Q_T)$ . Сужение этого оператора на пространство  $C(Q_T)$  будем обозначать  $B$ . Показано, что оператор  $B$  является линейным ограниченным оператором.

Введем чисто формально функцию  $w(x, t) := (Bv)(x, t)$ . Ввиду специальной структуры функции  $v(x, t)$ , доказывается, что если  $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$ , то  $w(x, t)$  является функцией из пространства  $C(Q_T)$  при любом  $T > 0$ . Следовательно можно образовать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n w)(x, t). \quad (6)$$

**Теорема 3.** *Если  $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$  то ряд (6) сходится абсолютно и равномерно в пространстве  $C(Q_T)$  к непрерывной функции  $W(x, t)$ , при этом сходимость ряда не медленнее экспоненциального, и функция*

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t)$$

*является единственным о.р. задачи (1)–(3) в случае  $f = 0$ .*

### Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 319–324.
2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида / А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, № 3. — С. 322–331.
3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, №4. — С. 215–238.

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

**К.Б. Сабитов** (Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова  
УФИЦ РАН; Стерлитамак, Стерлитамакский филиал  
Уфимского университета науки и технологий)  
*sabitov\_fmfm@mail.ru*

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптического-гиперболического типа

$$\mathcal{L}u = u_{zz} + (\operatorname{sgn} z)(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y, z) \quad (1)$$

в области

$$Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, -\alpha < z < \beta\}, \\ D = \{(x, y) \mid 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} F_1(x, y, z) = f_1(x, y)g_1(z), & z > 0, \\ F_2(x, y, z) = f_2(x, y)g_2(z), & z < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$\alpha, \beta, p, q$  – заданные положительные действительные числа, и поставим следующую краевую задачу на сопряжения на плоскости изменения типа, которую назовем первой граничной задачей.

**Первая граничная задача.** *Найти функцию  $u(x, y, z)$ , удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, z) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q_+ \cup Q_-), \quad u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} \in L(D); \quad (3)$$

$$\mathcal{L}u(x, y, z) \equiv F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in Q_+ \cup Q_-; \quad (4)$$

$$u(x, y, z)|_{x=0} = u(x, y, z)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leq z \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, y, z)|_{y=0} = u(x, y, z)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leq z \leq \beta; \quad (6)$$

$$u(x, y, z)|_{z=-\alpha} = \psi(x, y), \quad u(x, y, z)|_{z=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (7)$$

где  $F_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  – заданные достаточно гладкие функции, при этом  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  удовлетворяют условиям согласования с граничными данными (5),  $Q_+ = Q \cap \{z > 0\}$ ,  $Q_- = Q \cap \{z < 0\}$ .

Отметим, что ранее в работах [1] – [15] и других изучены задачи Трикоми и Геллерстедта для многомерных уравнений смешанного типа в парашютообразных областях, где гиперболическая часть

ограничена коническими поверхностями, а эллиптическая часть представляет собой область типа полусферы, в частности, полусферу и цилиндр, образующие которого параллельны оси  $Oz$ .

В работе Проттера М. [1] впервые была приведена постановка аналога задачи Трикоми для трехмерного вырождающегося уравнения смешанного типа, где доказывалась единственность решения этой задачи. Позже была показана ошибочность полученных в этой работе результатов.

Первые постановки аналога задачи Трикоми для трехмерного уравнения типа (1) принадлежат советским ученым А.В. Бицадзе [2], С.П. Пулькину [3]. Более доказательные утверждения А.В. Бицадзе были приведены в работах [4], где, когда эллиптическая часть  $S$  границы области состоит из двух конических поверхностей, методом интегральных тождеств доказана единственность сильного решения задачи и на основании априорной оценки установлено существование слабого обобщенного решения. В работе Нахушева А.М. [5, с. 126 – 130] этот результат перенесен для более общей поверхности  $S$ , но при некоторых ограничениях на нее.

С.П. Пулькин [6] в области вращения вокруг оси  $Oz$  предложил другой подход, основанный на представлении решения в цилиндрических координатах в виде суммы тригонометрического ряда. При этом коэффициенты ряда определяются как решения плоской задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом

$$v_{rr} + (\operatorname{sgn} z)v_{zz} + \frac{2p}{r}v_r = 0,$$

где  $p = n + 1/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = v(r, z)$ .

В случае, когда эллиптическая часть  $S$  границы области являются цилиндром, А.В. Бицадзе [7], используя преобразования Фурье, решение трехмерной задачи Трикоми свел к плоской задаче. Затем многими математиками с указанными выше методами исследовались трехмерные аналоги задач Трикоми и Геллерстедта для вырождающихся уравнений смешанного типа, уравнений с сингулярными коэффициентами и общих многомерных уравнений смешанного типа [8] – [15].

Задача Дирихле для многомерных уравнений смешанного типа изучались в работах [16] – [18] и других. В монографии [16, с. 129 – 136] изучена задача Дирихле в области  $Q$  для уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + u_{zz} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0.$$

Здесь установлен критерий единственности решения задачи, при этом возникающие малые знаменатели не исследованы, поэтому обоснование сходимости построенных рядов, то есть обоснование существования решения задачи, остается не доказанным. Аналогичная ситуация и в статье [17], где рассматривается уравнение смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами. В работе [18] и в других работах этого автора изучается задача Дирихле для многомерных уравнений смешанного типа эллипτικο-гиперболического типа в цилиндрической области, к сожалению, из-за возникающих малых знаменателей отсутствуют четкие обоснования сходимости рядов при доказательстве теорем единственности и существования решения задачи Дирихле.

В данной работе показано, что корректность постановки задачи (3)–(7) существенным образом зависит от длин ребер  $p$ ,  $q$  и  $\alpha$  параллелепипеда  $Q_-$  гиперболической части области  $Q$ . Установлен критерий единственности решения этой задачи. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

### Литература

1. Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type / M.H. Protter // Jour. of Rational Mechanics and Analysis. — 1954. V. 3. №5. — P. 435 – 446.
2. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях / А.В. Бицадзе // Докл. АН СССР. 1956. Т.110, №6. С. 901–902.
3. Пулькин С.П. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве / С.П. Пулькин // Ученые записки Куйбышевского госпединститута. — 1956. Вып. 14. — С. 63–77.
4. Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях / А.В. Бицадзе // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 143. №5. — С. 1017-1019
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. / А.М. Нахушев // М.: Наука, — 2006. — 287 с.
6. Пулькин С.П. Исследование по уравнениям смешанного типа. / С.П. Пулькин // Диссертация д-ра физ.-мат. наук. Казань: КГУ, — 1958.

7. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми / А.В. Бицадзе // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 143. №5. — С. 1017 – 1019.
8. Каратопраклиев Г.Д. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа в многомерных областях / Г.Д. Каратопраклиев // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 188. №6. — С. 1223 – 1226
9. Aziz A.K. Frankl-Morawetz problem in  $\mathbb{R}^3$  / A.K. Aziz, M. Schneider // SIAM J. Math. Anal. — 1979. V. 10, №5. — P. 913–921.
10. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. / А.Г. Кузьмин // Л.: Изд-во ЛГУ, — 1990. — 208 с.
11. Салахитдинов М.С. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнений смешанного типа / М.С. Салахитдинов, Б. Исломов // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311, №4. — С. 797 – 801.
12. Попиванов Н.И. Краевая задача для нелинейного уравнения Трикоми в пространстве  $\mathbb{R}^3$  / Н.И. Попиванов, М. Шнайдер // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27. № 4. — С. 648 – 655.
13. Lupo D. Critical exponents for semilinear equations of mixed elliptic-hyperbolic and degenerate types / D. Lupo, R.P. Kevin // Comm. Pure. Appl. Math. — 2003. 56: — С. 403 – 424.
14. Rassias J. M. Tricomi – Protter Problem of nD Mixed Type Equations / J.M. Rassias // International Journal of Applied Mathematics and Statistics. — 2007. — Vol. 8. №M 07. — p. 76 – 86.
15. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. / К.Б. Сабитов // М.: ФИЗМАТЛИТ, — 2014. — 304 с.
16. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. / М.М. Хачев // Нальчик: Изд-во «Эльбрус», — 1998. — 169 с.
17. Уринов А.К. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами / А.К. Уринов, К.Т. Каримов // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. — 2017. — Т. 21. № 4. — С. 665 – 683.
18. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболических уравнений / С.А. Алдашев // Нелинейные колебания. — 2013. — Т. 16. №4. — С. 435 – 451.

# ВАРИАЦИОННЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА-ВОЛЬТЕРРА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**В.Ж. Сакбаев** (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, МФТИ;  
Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН)  
*fumi2003@mail.ru*

Самосопряженный оператор Лапласа-Вольтерра  $\Delta$  в пространстве функций бесконечномерного аргумента задается с помощью введения на пространстве последовательностей  $E = \ell_2$  трансляционно инвариантной конечно-аддитивной меры  $\lambda$ . Полугруппа  $e^{t\Delta}$ ,  $t \geq 0$ , порождаемая оператором Лапласа-Вольтерра в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = L_2(E, \lambda, \mathbb{C})$  квадратично интегрируемых по мере  $\lambda$  функций, сглаживает произвольную функцию так, что любая функция из пространства образов  $\bigcup_{t>0} e^{t\Delta}(\mathcal{H}) \equiv C_\Delta^\infty$  обладает лежащей в пространстве  $\mathcal{H}$  производной любого порядка по любому базисному направлению (см. [1]).

В общем случае среди "бесконечно дифференцируемых" в указанном выше смысле функций из пространства  $C_\Delta^\infty$  существуют разрывные. Более того, функции из пространств  $C_\Delta^\infty$  и  $\mathcal{H}$  не обладают свойством непрерывности в среднем квадратичном относительно сдвига аргумента на векторы пространства  $E$ .

Найдено инвариантное относительно полугруппы  $e^{t\Delta}$ ,  $t \geq 0$ , подпространство  $\mathcal{H}_0$  такое, что любая функция из образа  $\bigcup_{t>0} e^{t\Delta}(\mathcal{H}_0)$  является непрерывной. И найдено такое плотное в пространстве аргументов  $E$  подпространство  $E_1$ , что функции из пространства  $\mathcal{H}$  непрерывны в среднем квадратичном относительно сдвига аргумента на векторы из пространства  $E_1$ .

Установлено, что полугруппа  $e^{t\Delta}$ ,  $t \geq 0$ , задается представлением в пространстве  $\mathcal{H}$  полугруппы операторов свертки с гауссовскими мерами на пространстве  $E$ . Получены необходимые и достаточные условия сильной непрерывности полугруппы  $e^{t\Delta}$ ,  $t \geq 0$ . Описано поведение полугруппы в случае отсутствия сильной непрерывности

В случае сильной непрерывности полугруппы  $e^{t\Delta}$ ,  $t \geq 0$ , пространство Соболева  $W_{2,\Delta}^1$  вводится как область определения замыкания квадратичной формы  $K_\Delta(u) = -(\Delta u, u)$ ,  $u \in C_\Delta^\infty$ . Пространство Соболева  $W_{2,\Delta}^2$  вводится как область определения замыкания квадратичной формы  $K_{\Delta,2}(u) = (\Delta u, \Delta u)$ ,  $u \in C_\Delta^\infty$ . Установлено,

что каждая функция из пространства  $W_{2,\Delta}^1$  обладает квадратично интегрируемым следом на гиперповерхности  $E_j^a = \{x \in E : x_j = a\}$ , а произвольная функция  $u \in W_{2,\Delta}^2$  обладает на гиперповерхности  $E_j^a = \{x \in E : x_j = a\}$  квадратично интегрируемым следом нормальной производной  $\frac{\partial}{\partial e_j} u$ .

Исследована краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \text{ в } \Pi, \quad u|_{\partial\Pi} = 0, \quad (1)$$

на непустом параллелепипеде  $\Pi = \{x \in E : a_j < x_j < b_j, j \in \mathbb{N}\}$ , с положительной мерой  $\lambda(\Pi)$ , задаваемой безусловно сходящимся произведением  $\prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$ .

Обозначим через  $\dot{W}_{2,\Delta}^1(\Pi)$  подпространство обращающихся в нуль вне множества  $\Pi$  функций в банаховом пространстве функций  $W_{2,\Delta}^1(\Pi)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2(\Pi, \Lambda, \mathbb{C}) \equiv \mathcal{H}_{\Pi}$ . Тогда задача Дирихле (1) имеет единственное решение, являющееся точкой минимума функционала

$$J(u) = \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathcal{H}_{\Pi}}^2 + 2(u, f)_{\mathcal{H}_{\Pi}}, \quad u \in \dot{W}_{2,\Delta}^1. \quad (2)$$

Для анализа связи задачи Дирихле (1) и вариационной задачи (2) установлена формула Гаусса-Остроградского для функций из пространства  $W_{2,\Delta}^2$  на параллелепипеде  $\Pi$ .

### Литература

1. Busovikov V.M. Sobolev spaces of functions on Hilbert space endowed with shift-invariant measures and approximations of semigroups / V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev // Izvestiya Mathematics. — 2020. — Т. 84, № 4. — Р. 694–721.

## АНАЛИЗ АКТУАЛЬНЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ РЕЙТИНГОВЫХ СИСТЕМ

**И.А. Седых, И.В. Стругов** (Липецк, ЛГТУ)

*sedykh-irina@yandex.ru, strugov.ilya@yandex.ru*

В современном информационном обществе рейтинговые системы играют ключевую роль в самых различных областях. Оценки и ранжирование применяются как для товаров и услуг, так и для пользователей и информационных ресурсов, нередко являясь основой для рекомендательных систем.



В данной работе рассматриваются актуальные методы моделирования рейтинговых систем и анализируются подходы, предложенные в материалах исследований мирового уровня.

Рассматривается разработка рейтинговой шкалы для оценки позитивного поведения. При этом описываются особенности исследования при работе с социальным рейтингом, а также изучаются принципы выбора ключевых параметров для системы.

Изучается разработка системы рейтинга для оценки уязвимости жилых строений на основе набора экспертных оценок, метода Делфи, а также проведение анализа выявленных несоответствий.

Описывается исследование роли социальной активности в контексте разработки системы социальных рекомендаций, а также явления гомофилии, его интерпретации и влияния при работе с данными, характеризующими социальное поведение.

Выполняется анализ подходов к оценке надёжности рейтинга для систем принятия решений в случае модели с несколькими атрибутами, подразумевающей случай ассиметричного доступа к информации.

Приводится пример использования ассиметричной шкалы рейтинга в рамках разработки информативных рейтинговых систем, а также приводится обоснование значимости вербальной структуры при разработке подобных систем.

Также проводится исследование способов использования методов машинного обучения на разных этапах моделирования рейтинговых систем.

Предлагается описание варианта использования сетей Петри в структурной основе моделируемой рейтинговой системы.

### **Литература**

1. Попов Ю.Л. Рейтинговая система / Ю.Л. Попов, В.Н. Подлеснов, В.И. Садовников, Е.Р. Андросюк, В.Г. Кучеров // Высшее образование в России — М. : Московский политехнический университет, 2001. — С. 131–137.
2. Ricci F. Recommender Systems: Handbook / F. Ricci, L. Rokach, B. Shapira, P. Kantor — New York : Springer, 2010. — 842 p.
3. Cressey J.M. Development of a Brief Rating Scale for the Formative Assessment of Positive Behaviors: thes... doct. phylosophy (School Psychology) — Amherst —2010. — 126 p.
4. Cattano C. Development of a Rating System to Measure the Vulnerability of Residential Homes to Natural Hazards: thes... doct. phylosophy (Civil Engineering) — Clemson —2013. — 245 p.

5. Mukamakuza C.P. The Role of Activity and Similarity in Rating and Social Behavior in Social Recommender Systems / C.P. Mukamakuza, H. Werthner, D. Sacharidis // International Journal on Artificial Intelligence Tools — Singapore : World Scientific, 2019. — Vol. 28, I. 06.

6. Zhao S. The reliability analysis of rating systems in decision making: When scale meets multi-attribute additive value model / S. Zhao, Y. Dong, Y. He // Decision Support Systems — Netherlands : Elsevier Science, 2020. — Vol. 138., I. 3.

7. Garg N. Designing Informative Rating Systems: Evidence from an Online Labor Market / N. Garg, R. Johari // Manufacturing & Service Operations Management — United States : INFORMS, 2021. — Vol. 23., I. 4.

8. Vasin M.V. The need for disruption in the credit ratings landscape: a model for machine learning computed credit ratings: theses... doct. philosophy (Accounting) — Christchurch — 2022. — 309 p.

9. Седых И.А. Определение оптимального набора переменных при помощи методов машинного обучения при исследовании рейтинговых систем / И.А. Седых, И.В. Стругов // Вестник ВГТУ — 2023. — Т. 19, № 2. — С. 72–78.

10. Стругов И.В. Исследование специфики разработки модели рейтинговой системы на основе сети Петри / И.В. Стругов, И.А. Седых // Нано-био-технологии. Теплоэнергетика. Математическое моделирование : сборник статей — Липецк : ЛГТУ, 2023. — С. 215–223.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, УПРАВЛЕНЧЕСКИХ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ**

**И.А. Седых, А.А. Тамбовцев** (Липецк, ЛГТУ)

*sedykh-irina@yandex.ru, sasha.tambovtsev.585@mail.ru*

В современном мире с постоянным развитием научно-технического прогресса существует высокая потребность новых способов отображения моделей параллельных процессов, показывающих одновременную работу нескольких процессоров. С этой задачей хорошо справляются сети Петри, так как имеют высокую эффективность и моделирующие возможности. Это связано с тем, что сети Петри являются интеграцией графа и дискретной динамической системы, что позволяет моделировать, создавать и рассматривать как статические, так и динамические модели представляемого объекта.

Понятие «сети Петри» впервые использовал Карл Петри в 1962 году в своей диссертации «Связь с автоматами» [1]. С этого времени появилось множество вариаций данных моделей.

Сейчас сети Петри по-прежнему актуальны, они продолжают развиваться и улучшаться, о чём свидетельствует наличие работ о применении, исследовании и модернизации сетей Петри.

В своей работе «Формальная семантика и автоматическая проверка иерархических мультимедийных сценариев с интерактивным выбором» [2] Хайм Ариас говорил, что сети Петри обладают интересными характеристиками, так как являются полезным визуальным инструментом для простого моделирования, интерпретации и анализа систем с параллельностью, синхронизацией и разделением ресурсов. Они обеспечивают компактное представление систем с очень большим пространством состояний и допускают модульное представление. Это позволяет разложить большие системы на несколько подсистем, которые взаимодействуют между собой.

Также в данной работе отмечается, что с помощью сетей Петри можно изучать два типа свойств: зависящие от начальной маркировки (поведенческие) и независящие от неё (структурные).

В работе [2] рассматриваются Time Stream Petri Nets (сети Петри временного потока). Отмечается, что возможности таких моделей могут быть использованы для моделирования мультимедийных систем. Данные модели позволяют учитывать, как временной недетерминизм распределенных систем, так и временную изменчивость объектов.

Отдельно Хайм Ариас также выделил Colored Petri Nets (CPN, цветные сети Петри) - это графический язык дискретно-событийного моделирования, объединяющий сети Петри с языком функционального программирования для получения масштабируемой модели для параллельных систем.

В работе «Формальное моделирование и проверка систем управления поездом» [3] Юйчэнь Се рассказывает о вариативности сетей Петри. По его мнению, прежде чем появится новая сеть, будет создано множество различных вариаций уже существующих сетей Петри. Использование высокоуровневых сетей Петри облегчает этап моделирования сложных дискретно-событийных моделей, поскольку модели могут быть компактными и хорошо структурированными.

В работе Луис Сесар Маркес Де Васконселос «Генерация трасс для моделирования «Vanets» с помощью цветных сетей Петри» [4] с помощью цветных сетей Петри была представлена модель для тести-

рования системы, предназначенной для создания и улучшения работы приложений и программ, позволяющих определять ситуацию на дорогах: обнаружение заторов, определение состояния дороги и обнаружение аварий, а также осуществлять управление движением и поиском мест досуга и развлечений по маршруту следования.

Ещё одним примером применения сетей Петри может послужить работа Жозе Элунда «Моделирование с несколькими ограничениями гибкой производственной системы» [5]. В данной работе Жозе предлагает инструмент, основанный на имитационной модели с использованием иерархических цветных сетей Петри. Свой выбор он обосновывает тем, что сети Петри и их графическое представление позволяют упростить описание процессов. Использование сетей Петри при моделировании позволяет предсказать поведение системы на этапе производства и предотвратить тупиковые ситуации.

### Литература

1. Petri C. Kommunikation mit Automaten: thes... doct/ Petri C.// Philosophy —: Darmstadt — 1962. — 128 p.
2. Jaime E. Arias Almeida. Formal semantics and automatic verification of hierarchical multimedia scenarios with interactive choices: thes... doct./ E Jaime.e //Informatique — Bordeaux — 2015. — 98 p.
3. Vasconcelos, Luis Cesar Marques de. / Trget: Geracão de traces para simulação de VANETs por meio de redes de petri coloridas / Luis Cesar Marques de Vasconcelos. — 2017. — 86 p.
4. Yuchen Xie. Modelisation et Verification Formelles de Systemes de Contrôle de Trains: thes.../ doct. Automatique, genie informatique, traitement du signal et des images — ,Ecole centrale de Lille — 2019. — 251 p.
5. Jose Eloundou. Modelisation multi-contraintes d'un systeme de production flexible: thes... / J. Eloundon// doct. Informatique — Rouen — 2016. — 201 p.

## ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

В.В. Сёмина, Г.В. Сёмин (Липецк, ЛГТУ)

*pravilnik@mail.ru*

В XXI веке в связи глобальным распространением Интернета развитие и распространение современных информационных технологий

происходит молниеносно, их использование позволяет существенно повысить вовлеченность студентов в образовательный процесс [1].

Студенты технических специальностей изучают разделы высшей математики в течение первых двух лет обучения, математические объекты: матрицы, векторы, комплексные числа, а также дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, различные методы и алгоритмы оптимизации, интерполяции используются в других дисциплинах.

Упростить понимание графиков функций, матриц и векторов студентами, вовлечь их в процесс обучения и упростить работу преподавателя помогают современные цифровые технологии [2,3], которые рассматриваются в данной работе: «белые» доски (Miro, Ziteboard, sBoard, BitPaper), создание обучающих игр [4] (Desmos), математические графические калькуляторы (Desmos, Geogebra), онлайн и офлайн математические пакеты (Wolfram Mathematica, Mathlab, Mathcad), облачные сервисы и даже социальные сети.

Была произведена модернизация рабочей программы дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», разработаны лекционные и практические занятия с использованием цифровой технологии «белая» доска, созданы обучающие игры в цифровой среде Desmos, предложено использование облачных сервисов для организации самостоятельной работы студентов и автоматизации проверки работ, разработаны прикладные кейсы, требующие применения изученного теоретического материала к реальным, а не абстрактным задачам для направления подготовки «Электроэнергетика и электротехника».

### Литература

1. Воронин Д.М. Технологии цифрового образования : учебное пособие / Д.М. Воронин. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 171 с.
2. Биджиева С.Х. Геймификация образования: проблемы использования и перспективы развития / С.Х. Биджиева, Ф.А. Урусова, // Мир науки. Педагогика и психология. — 2020. — № 4. — С. 1–10.
3. Semina V.V. Application of Modern Digital Technologies in Education / V.V. Semina, G.V. Semin // 3rd International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education : materials of International Conference. — Lipetsk. — 2023. — P. 1024–1028.
4. Сёмина В.В. Обучающие игры для решения задач векторной алгебры / В.В. Сёмина, А.О. Мананников // Нано-биотехнологии. Теплоэнергетика. Математическое моделирование : ма-

**ПРИМЕНЕНИЕ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ**  
**В.В. Сёмина, Г.В. Сёмин, А.М. Шмырин** (Липецк, ЛГТУ)  
*pravilnik@mail.ru*

Система вентиляции и кондиционирования воздуха (СВКВ) в производственных помещениях представляет собой сложную систему, математическое моделирование которой требует моделирования самого здания, а также работы узлов, агрегатов внутреннего и наружного вентиляционного оборудования. Провести системный анализ связей между множеством подсистем и их элементами, параметрически идентифицировать уравнения с большим числом неизвестных параметров позволяют окрестностные модели.

Окрестностный подход к моделированию сложных систем [1], разработанный Блюминым С.Л., Шмыриным А.М., Карабутовым Н.Н. и др., позволяет частично исключить анализ «физики» процессов и минимизировать количество экспериментальных данных, что является преимуществом перед классическими моделями по принципу «белый ящик» и моделями на основе нейросетей. Окрестностные системы обобщают традиционные дискретные модели, такие как дискретно-аргументные модели различных видов, конечные и клеточные автоматы, сингулярные модели.

Окрестностная система представляет совокупность связанных узлов, для каждого из которых определено входное, выходное воздействие и состояние. Удобно рассматривать окрестностную структуру в виде оснащённого орграфа. Под оснащением узлов или связей понимается набор переменных модели. Чтобы построить окрестностную структуру требуется провести анализ технологической схемы процесса, по которой далее строится окрестностная система в виде системы функциональных зависимостей между переменными, определенными в окрестностной структуре. Уравнения в окрестностной системе могут быть линейные, билинейные, трилинейные и др.

Данное исследование является продолжением работ [2,3], в которой окрестностной подход был применен для моделирования системы фильтрации и СВКВ в цеху обжига клинкера цементного производства. Цель работы — решение задачи оптимального управле-

ния системой отопления и СВКВ в помещении плавательного бассейна на основе модернизации окрестностных моделей слабосвязанных окрестностных систем, алгоритмов декомпозиции и агрегирования, предложенных в [2].

СВКВ в производственном помещении состоят из различного оборудования, которое контролирует микроклимат и распределение воздуха в помещении. При этом СВКВ потребляют до 60

Для того, чтобы окрестностная модель СВКВ была более универсальной, модель [3] была скорректирована в узлах, связанных с поступлением вредных веществ в воздух рабочей зоны помещения. Ранее в качестве вредного вещества, поступающего в рабочую зону на примере цеха обжига клинкера, рассматривалась клинкерная пыль. Но многие производственные помещения, склады сталкиваются с другой проблемой, а именно – нарушение допустимых показателей влажности воздуха. Особенно это касается помещений с наличием большой площади открытой поверхности воды (плавательные бассейны, аквапарки и др.) Если СВКВ не обеспечивает допустимые показатели влажности воздуха в производственных помещениях, то это способствует поломкам дорогостоящего оборудования, вызывает разрушение конструкций здания, наносит вред здоровью людей.

Был проведен системный анализ систем отопления и СВКВ в помещении плавательного бассейна спортивного корпуса, на основе которого построена окрестностная структура и соответствующая ей окрестностная система СВКВ. Результаты параметрической идентификации предложенных окрестностных моделей свидетельствуют о близости теоретических значений зависимых переменных в уравнениях моделей регуляции температуры и влажности.

### Литература

1. Блюмин С.Л. Окрестностные системы / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин. — Липецк : ЛЭГИ, 2005. — 131 с.
2. Сёмина В.В. Идентификация слабосвязанных окрестностных систем / В.В. Сёмина // Вестник ВГТУ. — 2019. — № 2. — С. 69–75.
3. Semina V.V. Mathematical Modeling of Energy-saving Ventilation Systems / V.V. Semina, G.V. Semin, S. Valtchev, V.N. Meshcheryakov, O. Kryukov // Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA) : materials of International Conference. — Lipetsk. — 2023. — P. 1028–1032.

# МУРАВЬИНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

К.С. Ситников, А.А. Андрианова (Казань, КФУ)

*kissitnikov@stud.kpfu.ru, Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru*

Муравьиный алгоритм — это метаэвристический алгоритм оптимизации, вдохновленный поведением муравьев при поиске пути к источнику пищи. Он может применяться, в частности, при решении задачи построения оптимального маршрута, которая является важной задачей транспортной логистики. В рамках данной работы рассматривается применение вариаций муравьиного алгоритма и экспериментальная оценка их эффективности.

Введем основные понятия и обозначения, применяемые в муравьиных алгоритмах. Переход муравья между точками согласно [1] зависит от:

1) Памяти муравья — перечня посещенных точек  $J_{i,k}$ , где  $k$  — номер муравья, а  $i$  — текущая точка.

2) Видимости — величины, выражающей эвристическое желание посетить точку  $j$  из точки  $i$ . Она обратна расстоянию  $D_{ij} - \mu_{ij} = \frac{1}{D_{ij}}$ .

3) Следа феромона на ребре — подтвержденное муравьиным опытом желание посетить точку  $j$  из точки  $i$ . Количество феромонов на ребре  $(i, j)$  на итерации  $t$  обозначим как  $\tau_{ij}(t)$ .

Выбор следующей точки муравья на маршруте осуществляется вероятностным образом. Вероятность перехода  $k$ -го муравья из точки  $i$  в точку  $j$  на итерации  $t$  определяется по формуле (1) [2]:

$$P_{ijk}(t) = \begin{cases} \frac{|\tau_{ij}(t)|^\alpha |\mu_{ij}|^\beta}{\sum_{j \in J_{i,k}} |\tau_{ij}(t)|^\alpha |\mu_{ij}|^\beta}, & \text{если } j \in J_{i,k}, \\ 0, & \text{если } j \notin J_{i,k}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — два регулируемых параметра. При  $\alpha = 0$  выбор производится на основе жадного подхода выбора ближайшей непосещенной точки, при  $\beta = 0$  будет учитываться феромонное усиление.

По завершении маршрута каждый муравей  $k$  откладывает на ребре  $(i, j)$  количество феромона, определяемое по формуле (2):

$$\Delta\tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, & \text{если } (i, j) \in T_k(t), \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin T_k(t), \end{cases} \quad (2)$$



где  $T_k(t)$  — маршрут, пройденный муравьем  $k$  на итерации  $t$ , а  $L_k(t)$  — длина этого маршрута.  $Q$  является регулируемым параметром.

Обновление феромона рассчитывается по формуле  $\tau_{ij}(t+1) = (1-p)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t)$ , где  $\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij,k}(t)$ , где  $m$  — количество муравьев в колонии. На начальном этапе количество феромона принимается равным небольшому положительному числу  $\tau_0$ . Число муравьев назначается равным количеству пунктов, которые необходимо посетить. Количество феромона, откладываемого на ребрах наилучшего текущего маршрута  $T^+$ , принимается равным  $\frac{Q}{L^+}$ , где  $L^+$  — длина маршрута  $T^+$ .

В рамках экспериментального исследования на примере построения маршрутов по городу Казани оценивалась важность учета данных о феромоне и данных о расстоянии между пунктами. Для заданного набора точек в рамках каждого эксперимента входные параметры количества муравьев и итераций алгоритма, а также начальный уровень феромона и распыление оставались неизменными, равными 2, 15, 0.11 и 0.5. Регулируемые параметры в каждом из трех проводимых экспериментов устанавливались отличными друг от друга:  $\alpha = 1, 4$  и  $\beta = 2, 5$  в первом,  $\alpha = 4$  и  $\beta = 0$  во втором,  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$  в третьем эксперименте. Наилучшие показатели времени и пройденного расстояния были показаны в третьем эксперименте, который основывает выбор следующего пункта только на основании данных о близости непосещенных пунктов. Так, в одном из запусков эксперимента были показаны результаты 37,15 минут и 25278 метров дистанции в третьем эксперименте против 38,38 минут и 26245 метров в эксперименте, где учитываются и известные данные о расстоянии, и данные о феромоне, оставленном популяцией муравьев. Использование только данных о феромоне показывает худшие результаты - в указанном примере 41,97 минут и 28936 метров.

## Литература

1. Халипова Н. Разработка метода построения рационального маршрута автомобильных грузовых перевозок на основе модифицированного муравьиного алгоритма. / Н. Халипова, А. Пасичнюк, Л. Лесникова. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2018. — №3 (91). — С. 68–75.

2. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы / С.Д. Штовба. — Текст : электронный // Exponenta Pro. Математика в приложениях. — 2003. — № 4. — С. 70–75.

# О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ КОШИ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)

*su1951@mail.ru*

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$If = I(f; x) = \int_{-1}^1 p(t) \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1,$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши, где  $f(x)$  — заданная плотность интеграла. Следуя [1], через  $H_{mq,r,s}(x) = H_{mq,r,s}(f; x)$  обозначим интерполяционный полином Эрмита порядка  $mq - 1 + r + s$ , удовлетворяющий условиям

$$H_{mq,r,s}^{(i)}(f; x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = \overline{0, q-1}, \quad k = \overline{1, m},$$

$$H_{mq,r,s}^{(j)}(f; -1) = f^{(j)}(-1), \quad j = \overline{0, s-1},$$

$$H_{mq,r,s}^{(l)}(f; 1) = f^{(l)}(1), \quad l = \overline{0, r-1},$$

где  $0 \leq r, s \leq q$ ,  $x_k$  — нули полинома Якоби  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ .

Рассмотрим случай  $q = 2$ ,  $r = 1$ ,  $s = 1$  (см., напр., [2]). Аппроксимируя плотность интеграла полиномом  $H_{2m,1,1}(x) = H_{2m,1,1}(f; x)$ , получим квадратурную формулу

$$If = I(H_{2m,1,1}f; x) + R_{2m,1,1}f =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} (f(x_k)A_k(x) + f'(x_k)B_k(x)) + R_{2m,1,1}f, \quad (2)$$

где  $A_0(x) = \frac{f(-1)}{2\omega_m^2(-1)}I((1-x)\omega_m^2(x))$ ,  $A_{m+1}(x) = \frac{f(1)}{2\omega_m^2(1)}I((1+x)\omega_m^2(x))$ ,

$$A_k(x) = I \left( \frac{1-x^2}{1-x_k^2} \left( 1 - \left( \frac{2x_k}{1-x_k^2} - \frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right) (x-x_k) \right) l_{km}^2(x) \right),$$

$$k = \overline{1, m}, \quad B_0(x) = B_1(x) = 0, \quad B_k(x) = I \left( \frac{1-x^2}{1-x_k^2} (x-x_k) l_{km}^2(x) \right),$$

$$k = \overline{1, m}, \quad \omega_m(x) = \prod_{k=1}^m (x-x_k), \quad l_{km}(x) = \frac{\omega_m(x)}{\omega_m'(x_k)(x-x_k)}, \quad (3)$$

а  $R_{mq,r,s}f = R_{mq,r,s}(f; x)$  — остаточный член.

Для нахождения интегралов  $I(K_{2m+1}(x))$  приведенных в (3), где  $K_{2m+1}(x)$  многочлен степени не выше  $2m+1$ , имеем

$$I(K_{2m+1}(x)) = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \times$$

$$\times \frac{K_{2m+1}(t) - K_{2m+1}(x)}{t-x} dt + K_{2m+1}(x) I(1; x). \quad (4)$$

Интеграл  $I(1; x)$  вычисляется точно [3] (формула 3.228.3). Так как  $\frac{K_{2m+1}(t) - K_{2m+1}(x)}{t-x} = \sum_{v=1}^{2m+1} b_v \sum_{\mu=1}^v t^{\mu-1} x^{v-\mu}$ , где  $b_v (v = \overline{0, 2m+1})$  — коэффициенты многочлена  $K_{2m+1}(x)$ , то вычисление интеграла в (4) сводится к вычислению моментов весовой функции. Если  $\alpha > -1, \beta > -1$ , то [4]

$$\mu_p = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta x^p dx =$$

$$= \sum_{n=0}^p a_n \frac{(-1)^n 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\beta+1) \Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+2)},$$

$$a_n = \frac{2^n p! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(p-n)! \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} F(n-p, \alpha+n+1; 2n+\alpha+\beta+2; 2)$$

где  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция,  $F(a, b; c; z)$  — гипергеометрическая функция. Легко найти значения моментов для наиболее важных частных случаев значений  $\alpha, \beta$  ( $p$  — четное,  $\mu_p = 0$  при  $p$  — нечетном):  $\alpha = \beta = 0 \implies \mu_p = \frac{2}{p+1}$ ;  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \implies \mu_p = \frac{(p-1)!!\pi}{p!!}$ ;  $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \implies \mu_p = \frac{(p-1)!!\pi}{(p+2)!!}$ .

Через  $E_n(\varphi)$  обозначим наилучшее приближение функции  $\varphi(x)$  алгебраическими полиномами степени не выше  $n$ .

С помощью результатов работ [1], [5] доказывается

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in C^{(q-1)}([-1; 1])$ ,  $q \geq 1$ . Если  $q(2\alpha + 1) \leq 4r < q(2\alpha + 1) + 4$ ,  $q(2\beta + 1) \leq 4s < q(2\beta + 1) + 4$ , то  $\|I(f - H_{mq,r,s}f)\|_C = O((mq + r + s)^{1-q} E_{(m-1)q+r+s}(f^{(q-1)}) \ln^2 m)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $f(x) \in C^{(1)}([-1; 1])$ ,  $-\frac{1}{2} < \alpha$ ,  $\beta \leq \frac{1}{2}$ . Тогда  $\|R_{2m,1,1}f\|_C = O(m^{-1} E_{2m}(f') \ln^2 m)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $f'(x) \in H_\gamma([-1; 1])$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $-\frac{1}{2} < \alpha$ ,  $\beta \leq \frac{1}{2}$ . Тогда  $\|R_{2m,1,1}f\|_C = O(m^{-\gamma-1} \ln^2 m)$ .

Полиномы Эрмита можно применить и для аппроксимации понимаемого в смысле конечной части по Адамару гиперсингулярного интеграла

$$I_\rho f = I_\rho(f; x) = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{f(t)}{(t-x)^{\rho+1}} dt,$$

$$\rho = 1, 2, \dots, -1 < x < 1, \alpha > -1, \beta > -1.$$

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in C^{(q-1)}([-1; 1])$ ,  $q \geq 1$ . Если  $\rho \leq q - 1$ ,  $2\rho + q(2\alpha + 1) \leq 4r < 2\rho + q(2\alpha + 1) + 4$ ,  $2\rho + q(2\beta + 1) \leq 4s < 2\rho + q(2\beta + 1) + 4$ , то  $\|I_\rho f - H_{mq,r,s}^{(\rho)} f\|_C = O((mq + r + s)^{1-q-\rho} E_{(m-1)q+r+s}(f^{(q-1)}) \ln^2 m)$ .

### Литература

1. Vecchia B.D. Simultaneous approximation by Hermite interpolation of higher order / B.D. Vecchia, G. Mastroianni, P. Vertesi // J. of Computational and Applied Math. — 1994. V.50. — P. 233–240.
2. Привалов А.А. Теория интерполирования функций. Кн.1. / А.А. Привалов. — Саратов : Изд-во Саратовского ун-та. — 1990. — 230 с.
3. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.
4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. — М. : Мир. — 1980. — 509 с.
5. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М.А. Шешко // Изв. вузов. Матем. — 1976. № 12. — С. 108–118.

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

П.С. Соловьёв (Казань, КФУ)

pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Пусть  $\Omega$  — открытое ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$  с непрерывной по Липшицу границей  $\Gamma$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $n \geq 2$ . Изучается задача нахождения наименьшего собственного значения  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\Lambda = [0, \infty)$ , и соответствующей положительной собственной функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющих в обобщённом смысле однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка и однородному граничному условию Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p(\lambda s) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = r(\lambda s)u, x \in \Omega, \quad u = 0, x \in \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $p(\eta)$ ,  $r(\eta)$ ,  $\eta \in \Lambda$ ,  $s(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  — заданные функции.

При фиксированном  $\eta \in \Lambda$  через  $\gamma(\eta)$  обозначим минимальное собственное значение задачи на собственные значения

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p(\eta s) \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = \gamma(\eta) r(\eta s)w, x \in \Omega, \quad w = 0, x \in \Gamma. \quad (2)$$

Тогда собственное значение  $\lambda$  задачи (1) является корнем характеристического уравнения  $\gamma(\lambda) = 1$ .

Предположим, что выполнены следующие условия.

1) Функции  $p(\eta)$ ,  $r(\eta)$ ,  $\eta \in \Lambda$ ,  $s(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , являются непрерывными положительными.

2) Функции  $p(\eta)$ ,  $r(\eta)$ ,  $\eta \in \Lambda$ , являются неубывающими.

3) Справедливо соотношение  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{p(\eta)}{r(\eta)} = 0$ .

4) При  $c \in (1, \infty)$  существует конечный предел  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{r(c\eta)}{r(\eta)}$ .

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие 1). Тогда минимальное собственное значение  $\gamma(\eta)$  задачи (2) является положительным простым и соответствует единственной нормированной положительной почти всюду в  $\Omega$  собственной функции.

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия 1)–4). Тогда  $\gamma(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1)–4). Минимальное простое собственное значение  $\lambda$  задачи (1), отвечающее единственной нормированной положительной почти всюду в  $\Omega$  собственной функции  $u$ , существует тогда и только тогда, когда  $\gamma(\xi) > 1$  для некоторого  $\xi \in \Lambda$ .

Обозначим через  $\varkappa$  минимальное собственное значение задачи

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \varkappa v, x \in \Omega, \quad v = 0, x \in \Gamma.$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1)–4),  $\varkappa p(0)/r(0) > 1$ . Тогда существует минимальное простое собственное значение  $\lambda$  задачи (1), отвечающее единственной нормированной положительной почти всюду в  $\Omega$  собственной функции  $u$ .

Для  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i < \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обозначим

$$\overline{Q} = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i], \quad \varkappa_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\pi}{\beta_i - \alpha_i} \right)^2.$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1)–4),  $\varkappa_0 p(0)/r(0) > 1$ ,  $\overline{Q} \subseteq \overline{\Omega}$ . Тогда существует минимальное простое собственное значение  $\lambda$  задачи (1), отвечающее единственной нормированной положительной почти всюду в  $\Omega$  собственной функции  $u$ .

Полученные результаты могут быть применены при математическом моделировании баланса заряженных частиц высокочастотного индукционного разряда пониженного давления [1,2].

### Литература

1. Абдуллин И.Ш. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения / И.Ш. Абдуллин, В.С. Желтухин, Н.Ф. Кашапов. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2000. — 348 с.
2. Желтухин В.С. О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления / В.С. Желтухин // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 5. — С. 26–31.

# ОЦЕНКИ ЧИСЛА НЕСАМОПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПУТЕЙ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Р.Е. Солонченко, Ю.П. Вирченко (Белгород, БГТУ)

*virch@bsu.edu.ru*

Исследуется проблема об укладке несамопересекающихся/неспрямляемых путей на квадратной решетке  $\mathbb{Z}^2$ , которая является бесконечным графом с бинарным отношением смежности  $\varphi(\cdot, \cdot)$  ее узлов. Это отношение устанавливается формулой  $\varphi(x, y) \Leftrightarrow y - x \in \{\pm \mathbf{e}_j; j \in \{1, 2\}\}$ , где  $\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{e}_2 = \langle 0, 1 \rangle$  — орты решетки. Путем  $\gamma(x)$  длины  $n$  с началом в узле  $x \in \mathbb{Z}^2$  называется последовательность  $\gamma(x) = \langle x, x_1, \dots, x_n \rangle$ , в которой  $x_j \in \mathbb{Z}^2$  и выполняется  $\varphi(x_j, x_{j-1})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  с  $x_0 \equiv x$ . Путь называется несамопересекающимся, если для любой пары  $\{j, k\}$  номеров имеет место  $x_j \neq x_k$ . Такой путь называется неспрямляемым, если  $|x_j - x_k| > 1$  для всех  $k \neq j \pm 1$ . Пусть  $\mathfrak{A}_n(x)$  — класс неспрямляемых путей длины  $n$  с начальным узлом  $x$ . Задача состоит в том, чтобы вычислить асимптотику функции  $M_n = |\mathfrak{A}_n(x)|$  от  $n \in \mathbb{N}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Положительно направленными путями  $\gamma(x) = \langle x, x_1, \dots, x_n \rangle$  будем называть такие, у которых  $x_k - x = n_k^{(1)} \mathbf{e}_1 + n_k^{(2)} \mathbf{e}_2$  с  $n_k^{(j)} \geq 0$ ,  $k = 1 \div n$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Все положительно направленные пути являются неспрямляемыми. Число всех положительно направленных путей длины  $n$ , очевидно, равно  $2^n$ . Тогда, так как число всех путей на квадратной решетке длины  $n$  с фиксированным начальным узлом равно  $3^n$ , то имеет место асимптотическая формула  $M_n = nO(1)$ , где  $2 \leq O(1) \leq 3$ . Следовательно,

$$2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ln M_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln M_n \leq 3.$$

Гипотеза состоит в том, что существует постоянная

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} \ln M_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln M_n, \quad 2 < a < 3.$$

Требуется определить (возможно точнее) эту постоянную.

Предлагается численный статистический подход для определения постоянной  $a$  на основе метода Монте-Карло. Он основан на построении специального случайного процесса с дискретным временем  $\langle \tilde{k}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$  и использовании его эргодических свойств. С этой целью, строится процесс *случайного блуждания с ограничениями*

$\langle \tilde{x}_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ . Он, в свою очередь, основан, при фиксации начального узла  $\tilde{x}_0 = x$ , на процессе случайных сдвигов  $\langle \tilde{\mathbf{e}}_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$  так, что  $\tilde{x}_m = \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{e}}_l$ .

Процесс случайных сдвигов строится следующим образом.  $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \pm \mathbf{e}_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  с вероятностью  $1/4$  для каждого значения. Если определена случайная последовательность  $\langle \tilde{\mathbf{e}}_k; k = 1 \div n \rangle$  и имеется  $l$  возможных сдвигов  $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}$ , для которых  $|\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_k| > 1$ ,  $k = 1 \div n - 1$ ,  $l \in \{1, 2, 3\}$ , то вероятность реализации любого из них равна  $1/l$ . Если же множество таких сдвигов пусто, то соответствующий узел  $\tilde{x}_n$  является точкой остановки, и соответствующий сдвиг  $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = 0$  с вероятностью 1. Обозначив набор сдвигов  $\{\mathbf{e}_s : |\mathbf{x}_n + \mathbf{e}_s - \mathbf{x}_k| > 1, k = 1 \div n - 1\} = \Sigma_n$ , указанное условие при построении случайного процесса сдвигов сформулируем в виде определения условной вероятности

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = \mathbf{e}_s | \tilde{x}_j = x_j, j = 1 \div n - 1; \mathbf{e}_s \in \Sigma_n, |\Sigma_n| = l\} = 1/l, \quad l \neq 0$$

и  $\Pr\{\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = 0 | \tilde{x}_j = x_j, j = 1 \div n - 1; |\Sigma_n| = 0\} = 1$ . Построенный, таким образом, процесс сдвигов оказывается эргодическим стационарным после исключения конечных случайных траекторий.

Случайный процесс сдвигов индуцирует эргодический стационарный случайный процесс  $\langle \tilde{k}_n = |\Sigma_n|; n \in \mathbb{N} \rangle$ , траектории которого определяют значение функционала  $\tilde{M}_n = \prod_{j=1}^n \tilde{k}_j$ . Тогда  $\langle \ln \tilde{M}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$  стремится по вероятности при  $n \rightarrow \infty$  к процессу со стационарными приращениями. При этом  $\ln \tilde{M}_n = \sum_{l=1}^n \ln \tilde{k}_l$ . Поэтому предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{M}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \ln \tilde{k}_l,$$

существует в силу эргодичности и, с вероятностью 1, имеет неслучайный предел, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \tilde{M}_n/n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln M_n/n$ , который является искомой постоянной  $a$ . Тогда, для вычисления этой постоянной, достаточно сгенерировать методом Монте-Карло одну траекторию процесса случайных сдвигов.

### Литература

1. Антонова Е.С. Непрямляемые пути на периодических графах / Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко // Дифференциальные уравнения и их приложения : материалы международной конференции. — Белгород : «Политерра», 2013. — С. 16–17.



# ЧИСЛЕННОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СТЕКЛОПАКЕТАХ

П.А. Сомова, Е.И. Гурина (Томск, ТГУ)

*p.a.somova@gmail.com*

В последние годы практически все развитые страны периодически обновляют требования к нормативным документам, определяющим уровень защиты зданий от тепловых потерь. Исследования закономерностей теплопереноса, улучшение на их основе теплотехнических свойств строительных элементов и, как результат, повышение энергоэффективности зданий становятся приоритетными задачами. Актуальность данной проблемы подчеркивается не только в контексте современного строительства, но и в свете постоянного развития новых строительных материалов и технологий. В работе анализируется распространение тепла в составной конструкции теплоизоляционного окна, в наружной и внутренней створках которого установлены однокамерный и двухкамерный стеклопакеты. Величина воздушного промежутка между стеклопакетами — 200 мм. Формула остекления  $4M_1 - 16 - 4M_1 - 200 - 4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$ .

Поставленная в работе задача решается несколькими этапами. На первом этапе моделируется процесс распространения тепла внутри однокамерного стеклопакета с формулой остекления  $4M_1 - 16 - 4M_1$  с наполнением межстекольного пространства осушенным воздухом, на втором этапе моделируется процесс распространения тепла внутри двухкамерного стеклопакета с формулой остекления  $4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$ , с наполнением в виде осушенного воздуха.

В процессе теплообмена в двухкамерном стеклопакете участвуют пять слоев с различными теплофизическими свойствами, для каждого из слоев стеклопакета используется свое дифференциальное уравнение теплопроводности с соответствующими значениями  $\rho$  (плотность),  $\lambda$  (коэффициент теплопроводности) и  $C_p$  (удельная теплоемкость) [1,2]:

$$\rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < L_{gl}; \quad 1.1$$

$$\rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, L_{gl} < x < L_{air}; \quad 1.2$$

$$\rho_3 C_{\rho_3} \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, L_{air} < x < L_{gl2}; \quad 1.3$$

$$\rho_4 C_{\rho_4} \frac{\partial T_4}{\partial x} = \lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}, L_{gl2} < x < L_{air2}; \quad 1.4$$

$$\rho_5 C_{\rho_5} \frac{\partial T_5}{\partial x} = \lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2}, L_{air2} < x < L. \quad 1.5$$

$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 1,15$  (Вт/м·°C);  $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = 2560$  (кг/м<sup>3</sup>);  $C_{\rho_1} = C_{\rho_3} = C_{\rho_5} = 670$  (Дж/кг·°C) — параметры стекла марки М1;  $\lambda_2 = \lambda_4 = 0,0257$  (Вт/м·°C);  $\rho_2 = \rho_4 = 1,186$  (кг/м<sup>3</sup>);  $C_{\rho_2} = C_{\rho_4} = 1005$  (Дж/кг·°C) — параметры осушенного воздуха.

В начальный момент времени температура каждой части конструкции принимается одинаковой и равной:  $T(t, x) |_{t=0} = 25^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq x \leq L$  (1.6), на левой границе рассматривается граничное условие I рода:  $T_{room}(t, x) |_{x=0} = 25^\circ\text{C}$ ,  $t > 0$  (1.7).

Граничные условия IV рода действуют в зоне контакта стекла и межстекольного пространства, заполненного осушенным воздухом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=L_{gl}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_{gl}} \\ T_1(t, L_{gl}) = T_2(t, L_{gl}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_{air}} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_{air}} \\ T_2(t, L_{air}) = T_3(t, L_{air}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_{gl2}} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=L_{gl2}} \\ T_3(t, L_{gl2}) = T_4(t, L_{gl2}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=L_{air2}} = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} |_{x=L_{air2}} \\ T_4(t, L_{air2}) = T_5(t, L_{air2}) \end{array} \right\} \quad 1.8$$

На выходе из рассматриваемой области действует граничное условие III рода:  $\lambda_5(\frac{\partial T_5}{\partial x}) = k(T_5 - T_{cp})$ ,  $t > 0$  (1.9), где  $k = 10$  (Вт/м<sup>2</sup>·°C) — коэффициент теплоотдачи между стеклом и воздухом,  $T_{cp} = -21^\circ\text{C}$ .

Дифференциальные уравнения в частных производных (1.1- 1.5) с начально-краевыми условиями (1.6) - (1.9), а также иными условиями однозначности (геометрическими, теплофизическими) составляют полную математическую формулировку рассматриваемой задачи [1,3]. Численное решение поставленной задачи реализовано на C++ на основе метода конечных разностей с использованием явной разностной схемы. Верификация полученных численных результатов проводилась с данными, полученными в результате компьютерного моделирования процесса теплопередачи в конструкции теплоизоляционного окна в пакете гидродинамики Ansys Fluent.

## Литература

1. Берковский Б.М. Разностные методы исследования задач теплообмена. / Б.М. Берковский. — Минск : Наука и техника, 1976. — 141 с.
2. Basok, B.I. Numerical Modeling of Heat Transfer Through a Triple-Pane Window. / B.I. Basok, , B.V. Davydenko, , S.A. Isaev, et al. // J Eng Phys Thermophy №89, 2016 С. 1277–1283, <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1492-7>
3. Математическое моделирование влияния теплофизических свойств на эффективность стеклопакетов. Ч.1. // Сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции. . — Томск, 2023 : С. 65–76, URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?pff=1&id=54155544>

## О РЕШЕНИИ ОДНОГО ГИСТЕРЕЗИСНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГТУ)

*stenyuhin@mail.ru*

Физическая система с гистерезисом модели Bouc-Wen описывается гомотопическим отображением

$$\Phi_{BW}(u, z, t) = \alpha ku(t) + (1 - \alpha)Dkz(t), \quad (1)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $k > 0$ ,  $D > 0$  и  $u(t)$ ,  $z(t)$  — кусочно- дифференцируемые функции, связанные уравнением

$$\dot{z}(t) = \dot{u}(t)(\alpha - [\beta \text{sign}(z(t)\dot{u}(t)) + \gamma]|z(t)|^n), \quad (2)$$

$\alpha, \beta > 0$ ,  $\gamma, n$  — числа,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{u}$  — производная по времени,  $t \in [-a; a]$ ,  $a > 0$ .

Положим, что эволюция модели определяется гармоникой

$$u(t) = A \sin \omega t, \quad \dot{u}(t) = A\omega \cos \omega t,$$

$$\beta_i = \beta \text{sign}(z(t)\dot{u}(t)) + \gamma = \begin{cases} \beta_1 = -\beta + \gamma, \\ \beta_2 = \beta + \gamma, \end{cases} \quad i = 1; 2. \quad (3)$$

Тогда уравнение гистерезиса (2) примет вид

$$\dot{z}(t) = A\omega \cos \omega t (\alpha - \beta_i |z(t)|^n), \quad (4)$$

$$\beta_i = \beta \operatorname{sign}(A\omega z(t) \cos \omega t) + \gamma, \quad i = 1; 2.$$

Рассмотрим уравнение гистерезиса (4) с дифференциальным оператором дробного порядка  $k$  при  $n = 1$  с начальным условием, получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d^k}{dt^k} z(t) = -A\beta_i \omega \cos \omega t |z(t)| + A\alpha \omega \cos \omega t, \\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} z(t)|_{t \rightarrow 0} = b_1. \end{cases} \quad (5)$$

**Теорема 1.** *Решением задачи*

$$\begin{cases} \frac{d^k}{dt^k} z(t) = -A\beta_i \omega \cos \omega t |z(t)|, \\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} z(t)|_{t \rightarrow 0} = b_1. \end{cases}$$

*является функция*

$$z(t) = b_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-A\beta_i \omega)^{j-1} \cdot \frac{t^{kj-1}}{\Gamma(kj)} = b_1 \cdot t^{k-1} \cdot E_{k,k}(-A\beta_i \omega t^k),$$

где  $E_{k,k}(\cdot)$  — функция Миттаг-Леффлера.

**Теорема 2.** *Решением задачи (5) является функция*

$$\begin{aligned} z(t) = & b_1 \cdot t^{k-1} \cdot E_{k,k}(-A\beta_i \omega t^k) + \\ & + A\alpha \omega \int_0^t (t-\tau)^{k-1} \cdot E_{k,k}[(-A\beta_i \omega)(t-\tau)^k] \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned}$$

### Литература

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

# О ВЛИЯНИИ АППРОКСИМАЦИИ STSP-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НА ОЦЕНКУ ИНТЕРВАЛА ОХВАТА НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

А.В. Степанов (Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)  
*stepanov17@yandex.ru*

Рассмотрено стандартное двустороннее степенное распределение (Standard Two-Sided Power Distribution, STSP) [1], плотность которого определена на отрезке  $[0, 1]$  и имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} p \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}, & 0 < x \leq \theta, \\ p \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{p-1}, & \theta \leq x < 1; \end{cases}$$

здесь  $p > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Важным преимуществом данного распределения является простота проводимых математических выкладок (при достаточно широком разнообразии), и, как следствие, простота выражений для интервалов охвата. Например, для симметричного случая ( $\theta = 0.5$ ) интервал охвата, отвечающий уровню доверия  $P_0$ , имеет вид:  $[\frac{1}{2} \sqrt[p]{1-P_0}, 1 - \frac{1}{2} \sqrt[p]{1-P_0}]$ . Для асимметричного ( $\theta > 0.5$ ) STSP-распределения односторонний интервал охвата определяется следующим образом:  $[\theta \sqrt[p]{\frac{1-P_0}{\theta}}, 1]$  (выражение для асимметричного двустороннего интервала охвата выглядит несколько сложнее). Для симметричного случая также получено выражение для коэффициентов охвата.

Оценивание интервалов охвата является важной задачей при обработке измерительных данных (их рассматривают в качестве меры расширенной неопределенности [2]). В работе изучалось влияние выбора аппроксимации плотности непрерывного распределения измеряемой величины (вообще говоря, неизвестной), на получаемые оценки. Оценивание проводилось методом Монте-Карло для некоторых семейств аппроксимируемых (модельных) измерений. А именно, по сгенерированной из модельного непрерывного распределения  $f_0$  выборке заданной длины  $n$  получали оценки  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{p}$  параметров аппроксимирующего STSP-распределения (используя метод максимального правдоподобия и метод моментов), которые, в свою очередь, применялись для вычисления интервала охвата  $\hat{I} = [\hat{c}_1, \hat{c}_2]$  аппроксимирующего распределения. Указанный интервал служил оценкой интервала охвата для исходного (аппроксимируемого) распределения,

а показателем качества данной оценки, — отклонение интеграла  $\hat{P}_0$  от плотности  $f_0$  по отрезку  $\hat{I}$  от исходного уровня доверия  $P_0$  (при этом, естественно, ожидалось, что величина  $\hat{P}_0$  не будет значимо, т.е. больше, чем на единицы процентов, отличаться в меньшую сторону от  $P_0$ ). В качестве метрик выступали как усредненное по экспериментам (прогонам) значение величины  $\hat{P}_0$ , так и процентное соотношение числа экспериментов, для которых величина  $|\hat{P}_0 - P_0|$  незначима, к их общему числу. Рассматривались также доверительные границы для  $\hat{P}_0$ . Оценивались как симметричные, так и асимметричные (двусторонние и односторонние) интервалы охвата. Эксперименты проводились для различных значений  $n$ . В качестве аппроксимируемых распределений рассматривались, в частности: само STSP; равномерное и усеченное нормальное распределение (определенные на отрезке  $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 1]$ ); бета-распределение. Особый интерес может представлять случай, когда плотность исходного распределения сосредоточена вблизи одного из концов отрезка  $[0, 1]$  [3]. Было показано, что при рассмотрении модельных распределений из семейства STSP оценки границ являются смещенными (вследствие смещенности  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{p}$ ), но, в большинстве случаев, отклонение  $\hat{P}_0$  от  $P_0$  не является значимым. В качестве альтернативы методам максимального правдоподобия и моментов рассматривался также метод выбора наилучшего STPS-приближения из конечного множества таких приближений [4].

### Литература

1. Kotz S. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications / S. Kotz, J.R. Van Dorp — World Scientific Publishing, — 2004.
2. Stoudt S. Coverage Intervals / S. Stoudt, A. Pintar, A. Possolo // Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology. — 2021. — P. 126.
3. Cowen S. Reporting measurement uncertainty and coverage intervals near natural limits / S. Cowen, S. Ellison // The Analyst. — 2006. — P 131.
4. Тырсин А.Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения / А.Н. Тырсин // Вестник ЮУрГУ, Серия Математика. Механика. Физика. — 2017. — Т. 9, вып. 1. — С. 31–38.

# УНИМОДАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ЭКСТЕНСИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А.М. Теволде, Ю.П. Вирченко (Белгород, БелГУ)

virch@bsu.edu.ru

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия унимодальности распределения вероятностей функционала, который представляется суммой набора независимых, одинаково распределенных случайных неотрицательных величин  $\tilde{x}_k$  со случайным числом слагаемых, распределенным по Пуассону. Общее распределение слагаемых  $\tilde{x}_k$  сосредоточено на отрезке  $[0, 1]$  и таково, что  $\Pr\{\tilde{x}_k = 0\} \neq 0$ . Его абсолютно непрерывная часть асимптотически близка к равномерному распределению.

Рассмотрим последовательность  $\langle \tilde{x}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$  неотрицательных независимых, одинаково распределенных величин с общей плотностью распределения  $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$  и функционал  $H[\tilde{x}_k] = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \tilde{x}_k$ , со случайным числом  $\tilde{n}$  слагаемых так, что значения  $n \in \mathbb{N}$  случайной величины  $\tilde{n}$  распределены по Пуассону,  $\Pr\{\tilde{n} = n\} = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$ , где  $H[\tilde{x}_k] \equiv 0$  при  $n = 0$ . Тогда плотность распределения случайных значений функционала  $H[\tilde{x}_k]$  имеет вид  $e^{-\lambda} \delta(x) + g(x)$ , где  $\delta(\cdot)$  — обобщенная функция Дирака и плотность  $g$  абсолютно непрерывной части распределения дается формулой

$$g(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} w_*^m(x), \quad x \in [0, \infty), \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Здесь  $w_*^m$  —  $m$ -я степень операции свертки плотности  $w$ , определяемая при  $[0, \infty)$  рекуррентно как

$$(w_*^m)(x) = \int_0^x w(x-y)(w_*^{m-1})(y)dy, \quad m \geq 1, \quad N \geq 2.$$

Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Плотность  $g$  представима в виде*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta(x-k)\theta(k+1-x)R_{k+1}(x)$$

с коэффициентами

$$R_k(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l!(m-l)!} (x-l)^{m-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где каждая из функций  $R_k(x) > 0$  определена в  $[k, k+1)$  и при этом  $\lim_{x \rightarrow k-0} R_k(x) = R_{k+1}(k)$  при  $k > 1$  и их производные  $\dot{R}_k(x)$  удовлетворяют  $\lim_{x \rightarrow k-0} \dot{R}_k(x) = \dot{R}_{k+1}(k)$  при  $k > 2$ .

**Теорема 2.** Если параметр  $\lambda > 0$  удовлетворяет условию

$$1 > \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{m!(m-1)!},$$

то функция  $g$  имеет единственный максимум в точке  $x_* = 1$ . Если, наоборот,  $g$  имеет единственный максимум в  $x_*$ , то, с необходимостью, параметр  $\lambda$  удовлетворяет условию

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{\lambda^{m-2}}{m!(m-2)!} < 1/2.$$

Качественный анализ плотности  $g$  и доказанные в результате этого анализа утверждения Теорем 1 и 2, связаны с изучением математической модели электрического пробоя тонкой пленки полимерного материала, в котором случайным образом, в среднем однородно с малой плотностью распределены вкрапления материала, обладающего существенно меньшей электрической прочностью по сравнению с материалом пленки. Эти вкрапления, имеют сферическую форму и обладают случайным размером. Анализ такой модели, в нескольких отличных условиях производился в работе [1], где вкрапления имели форму полусфер с экспоненциально распределенным размером.

С физической точки зрения интерес представляет поиск условий, при которых происходит нарушение унимодальности плотности  $g$ .

### Литература

1. Virchenko Yu.P. Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel-lacquer coatings / Yu.P. Virchenko, A.D. Novoseltsev // Journal of Physics: Conf. Series. — 2021. — V.1902. — 012091.



# ЭФФЕКТ КЛЕТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ БИЛЛИАРДОВ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

С.А. Титаренко (Санкт-Петербург, ТПП СПб)

*titarenko.sa@gmail.com*

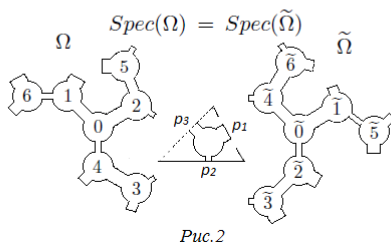
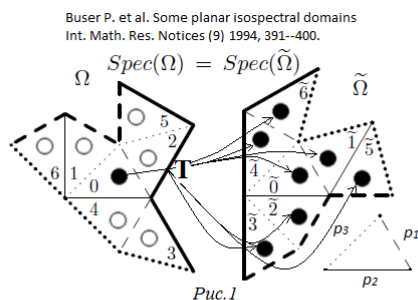
Квантовый бильярд — это область  $\Omega$ , где локализована частица с энергетическим спектром  $\{0 < E_1 < E_2 \leq \dots\}$ , определяемым уравнением Шрёдингера как собственные значения лапласиана:  $-\Delta W_n = E_n W_n$ ,  $W_n|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $W_n$  — волновые функции частицы. На рис.1 даны авторы и найденная ими пара бильярдов  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  (внутренние построения наши), спектры которых совпадают как счетные спектры множества  $E_n = \tilde{E}_n, \forall n$ , но сами бильярды неизометричны. Любые такие бильярды клеточны, и их волновые функции переплетены ортогональной симметричной матрицей  $t$  (см. доказательство для общего случая в нашем препринте Санкт-Петербургского математического общества №04, 2020)  $\Rightarrow$  для 7-клеточных бильярдов рис.1 справедлива формула переплетения:  $\tilde{W} = \sum_{i=0}^6 \sum_{\tilde{j}=0}^6 t_{i\tilde{j}} \tilde{W}_i(\tilde{j})$ . Здесь  $\tilde{W} := \tilde{W}_n; W_i(\tilde{j}) :=$

сужение  $W_n$  на  $i$ -ю клетку из  $\Omega$ , перенесенное клеточной изометрией  $T$  (рис.1) в  $\tilde{j}$ -ю клетку из  $\tilde{\Omega}$ . Цель данной работы: напрямую найти матрицу  $t$  для модельного примера рис.1, проиллюстрировав общий случай. Обозначив  $a_{j+1} = t_{0\tilde{j}}$ , выпишем найденную матрицу 7 x 7 (см. пояснения ниже и рис.1):

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{2} & \tilde{3} & \tilde{4} & \tilde{5} & \tilde{6} \\
\hline
0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
1 & a_5 & -a_2 & a_4 & a_3 & a_1 & -a_6 & -a_7 \\
2 & a_2 & a_1 & -a_3 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_5 \\
3 & a_6 & a_3 & -a_1 & a_4 & -a_7 & -a_2 & -a_5 \\
4 & a_3 & a_6 & a_1 & -a_4 & -a_5 & a_2 & -a_7 \\
5 & a_7 & -a_1 & -a_4 & -a_3 & a_2 & a_6 & -a_5 \\
6 & a_4 & -a_6 & a_5 & -a_3 & -a_1 & -a_2 & a_7
\end{array} \tag{1}$$

$W_1 = W_0$  на ребре  $p_3$  (пунктир) в  $\Omega \Rightarrow$  на  $p_3$  между клетками  $\tilde{4}$  и  $\tilde{0}$  в  $\tilde{\Omega}$  должно выполняться  $t_{1\tilde{4}}W_1(\tilde{4}) = t_{0\tilde{0}}W_0(\tilde{0}) \Rightarrow t_{1\tilde{4}} = t_{0\tilde{0}} = a_1; t_{1\tilde{0}} = t_{0\tilde{4}} = a_5$ . Аналогично для  $p_3$  между клетками  $\tilde{2}$  и  $\tilde{3}: t_{1\tilde{2}} = t_{0\tilde{3}} = a_4; t_{1\tilde{3}} = t_{0\tilde{2}} = a_3$ . Нулевое краевое условие на ребре  $p_3$

(пунктир) в клетке  $\tilde{1}$  обеспечивается вычитанием изометрично перенесенных сужений  $\Rightarrow t_{1\tilde{6}} = -t_{0\tilde{6}} = -a_7$  и т.д. до заполнения матрицы  $t$  (1). Ее ортогональность требует единичных квадратов норм столбцов  $t_{\tilde{0}} \dots t_{\tilde{6}} \Rightarrow 7$  линейных уравнений для  $a_j^2$ :  $\tilde{0} : a_1^2 + \dots + a_7^2 = 1$ ;  $\tilde{1} : 2(a_2^2 + a_1^2 + a_6^2) + a_3^2 = 1$ ;  $\tilde{2} : 2(a_3^2 + a_4^2 + a_1^2) + a_5^2 = 1$ ;  $\tilde{4} : 2(a_5^2 + a_1^2 + a_7^2) + a_2^2 = 1$ ;  $\tilde{3} : 4a_4^2 + 3a_3^2 = 1$ ;  $\tilde{5} : 4a_6^2 + 3a_2^2 = 1$ ;  $\tilde{6} : 4a_7^2 + 3a_5^2 = 1$ . Обозначая неизвестные как  $a^2$  и  $b^2$ :  $a_2^2 = a_3^2 = a_5^2 = a^2$ ;  $a_1^2 = a_4^2 = a_6^2 = a_7^2 = b^2$ , из 7 уравнений нормировки имеем равенство:  $4a^2 + 3b^2 = 1$ .(\*) Возьмем для  $a_j$  при извлечении корней  $+a$  и  $+b$  и подставим в матрицу  $t$  (1). Ортогональность разных столбцов  $t_j$  ( $6 \times 7/2=21$  уравнение, выписываем только первое) замечательно дает одно и то же равенство:  $(t_{\tilde{0}}, t_{\tilde{1}}) = 0 \Rightarrow ba + a(-a) + ab + ba + ab + b(-b) + b(-b) = 4ab - 2b^2 - a^2 = 0$ .(\*\*) Система (\*) и (\*\*) для  $a$  и  $b$  совпадает с уравнениями, найденными Бузером и соавт. (рис. 1) иным способом.



Построение переплетающей матрицы  $t$  — это прямое доказательство равенства спектров билиардов рис.1: сужения волновых функций  $W_n$  на клетки из  $\Omega$ , изометрично перенесенные в клетки  $\tilde{\Omega}$

и гладко «склеенные» с соблюдением нулевого краевого условия, дают в сумме  $\widetilde{W}_n$  и  $\widetilde{E}_n = E_n$ . Это чисто алгебраическое доказательство, кроме наличия трех отрезков на границе клетки и отсутствия самоналожений при зеркальных отражениях клеток, не накладывает ограничений на их геометрию и размерность  $\Rightarrow$  выбирая разные клетки, мы неограниченно генерируем новые примеры изоспектральных неизометричных билиардов. Например, взяв клетку на рис.2, получим новые билиарды с одинаковым (но другим!) спектром. Взяв на рис.2 вместо кругов с отсеченными круговыми сегментами шары, у которых соответствующие шаровые сегменты отсечены плоскостями, перпендикулярными горизонтальной плоскости, подсоединив в местах отсечений сплошные цилиндры диаметрами  $p_1, p_2, p_3$  и отражая такие клетки относительно круговых торцов цилиндров, мы получим трехмерные изоспектральные билиарды. Если наклонить отсекающие плоскости, получатся более сложные изоспектральные тела. Существование сплетающей матрицы  $t$  есть необходимое, но не достаточное условие неизометричности билиардов с одинаковым спектром: правильный треугольник в качестве клетки дает изометричные 7-клеточные «пропеллеры».

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ И АКУСТИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ<sup>1</sup>

Ж.Д. Тотиева

(Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, СКЦМИ ВНЦ РАН)

*jannatuaeva@inbox.ru*

Рассматривается волновое уравнения с памятью и акустическими граничными условиями:

$$u_{tt} - u_{xx} + \int_0^t k(t-s)u_{xx}(x, s) ds = 0, \quad (x, t) \in I \times (0, T), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} \equiv 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$\left[ u_x - \int_0^t k(t-s)u_x(x, s) ds \right] \Big|_{x=l} = y'(t), \quad 0 < t < T, \quad (13)$$

$$u_t|_{x=l} = -py'(t) - qy(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1379

© Тотиева Ж.Д., 2024

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in I, \quad (5)$$

где  $u(x, t)$  есть потенциал скорости;  $k(t)$  ядро памяти;  $y(t)$  смещение на границе  $x = l$ ;  $T$ ,  $p$ ,  $q$  фиксированные положительные постоянные,  $I = (0, l) \subset \mathbb{R}$ .

Ядро интегрального слагаемого (памяти) описывает вязкие свойства среды и не поддается непосредственному измерению. Предположим, что известна следующая информация:

$$\int_0^l \varphi(x) u_x(x, t) dx = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$u_x(x, t) \Big|_{x=0} = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где  $g(t)$ ,  $f(t)$  данные измерений, в частности,  $f(t)$  представляет усредненную скорость на  $I$ ,  $\varphi$  есть функция, зависящая от типа измерительного прибора, для которой  $\text{supp}(\varphi) \subseteq I$ .

Если функция  $k(t)$  известна, то начально-краевая задача (1)-(5) определения  $u(x, t)$  и  $y(t)$  называется **прямой задачей**. **Обратная задача** заключается в восстановлении  $u(x, t)$ ,  $y(t)$  и  $k(t)$  из системы (1)-(7).

Качественное исследование прямой задачи (1)-(5) в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) с границей  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  класса  $C^2$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ , было представлено в работе [1]. Ниже используются стандартные обозначения соболевских пространств [2]. Предполагается, что:

$$(i1) \quad u_0(x), u_1(x) \in H^4(I), \varphi(x) \in H_0^3(I).$$

$$(i2) \quad \alpha^{-1} := \int_0^l \varphi'(x) u_0''(x) dx \neq 0.$$

$$(i3) \quad g(t) \in H^2(0, T), f(t) \in H^4(0, T) :$$

$$y'(0) = u_0'(l), \quad y''(0) = u_1'(l) - k(0)u_0'(l),$$

$$k(0) = \alpha(f'''(0) - \int_0^l v_0(x) \varphi'''(x) dx),$$

$$\int_0^l \varphi(x) u_0'(x) dx = - \int_0^l \varphi'(x) u_0(x) dx = f(0),$$

$$\int_0^l \varphi(x) u_1'(x) dx = - \int_0^l \varphi'(x) u_1(x) dx = f'(0),$$

$$\int_0^l \varphi(x) u_0''(x) dx = - \int_0^l \varphi'(x) u_0'(x) dx = f''(0).$$

$$- \int_0^l \varphi'(x) [u_1''(x) - k(0)u_0''(x)] dx = f'''(0).$$

Исследование разрешимости задачи (1)-(7) целесообразнее проводить в терминах функций  $v := u_t + (py' + qy)\frac{x}{l}$ , так как в этом случае для  $v$  имеем нулевые граничные условия, что необходимо при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (i1)-(i3). Тогда существует такое  $\tau \in (0, T)$ , что обратная задача (1)-(7) имеет единственное решение

$$(v, k, y) \in H^3(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times H^1(0, \tau) \times H^3(0, \tau).$$

### Литература

1. Park J.Y. Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions / J.Y. Park, S.H. Park // Nonlinear Anal. — 2011. V. 74, № 3. — P. 993–998.
2. Evans L.C. Partial Differential Equations / L.C. Evans. — Amer. Math. Soc., Grad. Stud. Math., vol. 19, Second Edition, Providence, RI, 2010. — 749 p.

## О ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

**Н.И. Трусова, И.В. Барышева, Е.В. Фролова**

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

*trusova.nat@gmail.com*

Пусть  $D = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$  — конечный замкнутый параллелепипед в  $\mathbb{R}_n$ ,  $\alpha, \bar{\alpha}$  — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса  $(1, 2, \dots, n)$  и  $D = D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar{\alpha}}}$ . Обозначим через  $m$  размерность параллелепипеда  $D_{x_\alpha}$  ( $1 \leq m \leq n$ ), тогда параллелепипед  $D_{x_{\bar{\alpha}}}$  будет иметь размерность равную  $n - m$ .

Рассмотрим частно-интегральный оператор  $K$

$$\left(K_\alpha^{(m)}u\right)(x) = \int_{D_{t_\alpha}} \kappa(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}}),$$

в котором ядро

$$\kappa = \frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}$$

при  $\beta < m$  имеет слабую особенность.

Частно-интегральные операторы со слабой особенностью ранее изучались в пространстве непрерывных функций двух переменных в [1]. Классические интегральные операторы такого вида хорошо изучены в работах [2, 3, 4].

Обозначим через  $L_{\mathbf{p}}(D)$  анизотропное пространство Лебега, где мультииндекс  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $p_i \geq 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ), норма в котором определяется равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left( \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left[ \int_{a_1}^{b_1} |u(x)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots dx_{n-1} \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $p, p'$  — фиксированные сопряженные показатели Гельдера, число  $\beta$  удовлетворяет условию  $\beta p p' < m$ , функция  $u \in L_{(p,p^2)}(D_{t_\alpha}, D_{x_\alpha})$  и  $k(x; t_\alpha) \in L_{((p')^2, pp', pp')}(D_{t_\alpha}, D_{x_\alpha}, D_{x_\alpha})$ . Тогда для ЧИ-оператора  $K_\alpha^{(m)}$  справедлива следующая равномерная оценка

$$\|K_\alpha^{(m)} u\|_{L_p(D)} \leq A \|k\|_{L_{((p')^2, pp', pp')}(D_{t_\alpha}, D_{x_\alpha}, D_{x_\alpha})} \|u\|_{L_{(p,p^2)}(D_{t_\alpha}, D_{x_\alpha})},$$

где

$$A = \left[ \int_{D_{x_\alpha}} \left( \int_{D_{t_\alpha}} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p p'}} dt_\alpha \right)^{\frac{p}{p'}} dx_\alpha \right]^{\frac{1}{p^2}}.$$

Ограниченность константы  $A$  следует из оценки

$$\begin{aligned} A &\leq \left[ \int_{D_{x_\alpha}} \left( \int_{B_R} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p p'}} dt_\alpha \right)^{\frac{p}{p'}} dx_\alpha \right]^{\frac{1}{p^2}} = \\ &= \left[ \int_{D_{x_\alpha}} \left( \frac{|S_1(m)| R^{m-\beta p p'}}{m - \beta p p'} \right)^{\frac{p}{p'}} dx_\alpha \right]^{\frac{1}{p^2}} = \\ &= \left( \frac{|S_1(m)| R^{m-\beta p p'}}{m - \beta p p'} \right)^{\frac{1}{p p'}} |D_{x_\alpha}|^{\frac{1}{p^2}}, \end{aligned}$$

полученной переходом к сферическим координатам, где  $B_R$  — шар с центром в точке  $x_\alpha$  и радиуса  $R$  большего, чем диаметр параллелепипеда  $D_\alpha$ :  $B_R = \{t_\alpha : |x_\alpha - t_\alpha| < R\}$ ,  $|S_1(m)|$  — площадь поверхности сферы единичного радиуса в  $\mathbb{R}_m$ ,  $|D_{x_\alpha}|$  — объём параллелепипеда.

## Литература

1. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
4. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.

## ПРОБЛЕМА ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**Е.Л. Туренова, И.В. Добрынина** (Москва, МГТУ ГА, МТУСИ)  
*turenova@yandex.ru, ivdobrynina@rambler.ru*

Современное общество и процессы, связанные с его информатизацией, вносят коррективы в преподавательскую деятельность, что заставляет преподавателей повышать темп и эффективность обучения студентов, в том числе такой дисциплине, как высшая математика.

Ценность математических знаний известна всем, однако найти оптимальный баланс теории и практики удастся немногим. Зачастую ситуацию улучшает моделирование и алгоритмизация. Остановимся на последней. Известные ученые так или иначе изучали проблему формирования алгоритмического мышления, равно как и связанную с ней алгоритмическую деятельность, назовем лишь некоторых из них: Л.В. Виноградова, Л.М. Фридман, А.Я. Хинчин и другие [1]. В вузах данная проблема тесным образом переплетается с вопросом сформированности компетенций выпускника в соответствии с основной образовательной программой.

Ввиду нехватки в учебных планах часов на изучение той или иной темы преподаватель зачастую на лекционных либо практических занятиях ограничивается лишь озвучиванием алгоритмов решения тех или иных задач, которые затем прорабатываются на конкретных примерах. С одной стороны, это дает возможность сэкономить время, воспользоваться готовыми алгоритмами. С другой, встает вопрос механического запоминания алгоритмов, которые к промежуточной аттестации сильно возрастают в числе. В результате студент,

беря билет и ознакомившись с задачами, не всегда может вспомнить нужный алгоритм и тем более применить его.

Авторами [2] предлагается следующее. Во-первых, тщательно разработать учебные планы вместе с выпускающими кафедрами. Во-вторых, важны составление рабочих программ и оценочных средств для того, чтобы суметь проработать каждый раздел рабочей программы в теории и практике. С этой целью на кафедре математического анализа Московского технического университета связи и информатики (МТУСИ) создан расширенный учебно-методический комплекс, причем в интерактивной форме. Он позволяет глубже изучить теоретический материал, на его основе понять алгоритмы решения основных задач, закрепить и проверить свои знания. Комплекс содержит и так называемые семестровые индивидуальные домашние задания, позволяющие более тщательно проработать основные вопросы дисциплины. Все это помогает не только лучше распознавать основные классы задач, но и обоснованно проходить шаги нужного алгоритма. Конечно, в МТУСИ изучаются вопросы математической логики и теории алгоритмов, поэтому студенты сами могут составить требуемые алгоритмы решения задач, в ряде вузов приходится основываться на школьных знаниях. Поэтому роль преподавателя в формировании алгоритмического мышления возрастает.

В последнее время используют различные программы для решения задач высшей математики, однако и здесь хорошему профессионалу необходимо понимать алгоритмы, в них заложенные [3].

Не все задачи являются алгоритмически разрешимыми. Выделить разрешимые зачастую является предметом научного исследования [4].

### Литература

1. Антонова Н. А. Современные требования информационного общества к уровню алгоритмической подготовки специалистов информационного профиля / Н.А. Антонова // Наука и ее роль в современном мире: материалы междунар. науч.-практ. конф. — Караганды: Караганд. ун-т «Болашак», 2009. — Т. 4. — С. 89–94.

2. Туренова Е.Л. Руководство к решению задач по функциям многих переменных / Е.Л. Туренова, И.В. Добрынина. — М. : Спутник+, 2022. — 82 с.

3. Туренова Е.Л. О применении информационных технологий в решении систем линейных уравнений / Е.Л. Туренова, И.В. Добрынина // Математика и ее приложения в науке и образовании : ма-



териалы межвуз. научн. семинара. — С.-П.: Изд-во С.-П. ун-та ГПС МЧС России, 2014. — С. 275–282.

4. Добрынина И.В. Об алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой / И.В. Добрынина, Е.Л. Туренова // Мягкие измерения и вычисления. — 2021. — Т. 39, № 2. — С. 7–14.

## **ИТЕРАЦИОННАЯ ВЫПУКЛАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РОБАСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

**А.Н. Тырсин** (Екатеринбург, УрФУ)

*at2001@yandex.ru*

При построении линейных регрессионных моделей в ряде случаях приходится сталкиваться со стохастической неоднородностью данных. Это проявляется в нарушении условий теоремы Гаусса-Маркова, в частности наблюдения могут быть засорены грубыми ошибками. В этих условиях оценивание регрессионных зависимостей выполняют с помощью робастных (устойчивых) методов [1]. Параметры модели определяются с помощью решения задачи минимизации по выборке данных  $(x_{i1}, \dots, x_{im}, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \rho \left( \left| y_i - a_0 - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \right) \Rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}}, \quad (1)$$

где  $\rho(\cdot)$  — определенная на положительной полуоси вогнутая или выпукло-вогнутая функция потерь, для которой: 1)  $\rho(0) = 0$ ; 2)  $\forall x > 0 \rho'(x) > 0$ ; 3)  $\exists c \geq 0 : \forall x \leq (>)c \rho''(x) \geq (<)0$ .

Целевая функция  $Q(\mathbf{a})$  — не выпуклая, поэтому задача (1) в общем случае может иметь множество локальных минимумов. Это приводит к значительному росту вычислительной трудоемкости ее решения, что затрудняет применение робастных методов для динамического моделирования быстроменяющихся процессов в режиме реального времени.

В [2] предложен один из вариантов снижения вычислительной сложности решения задачи (1) путем сведения к решению последовательности выпуклых задач минимизации взвешенным методом наименьших модулей (ВМНМ). Данный алгоритм может быть обобщен следующим образом.

Случай 1.  $0 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x^2} < \infty$ . Вместо задачи (1) итерационно решаем последовательность задач минимизации взвешенным методом наименьших квадратов (ВМНК)

$$W^{(k)}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} (y_i - a_0 - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij})^2 \Rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}},$$

где  $p_i^{(k)} = \frac{\rho(|y_i - a_0^{(k-1)} - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij}|)}{(y_i - a_0^{(k-1)} - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij})^2}$ ,  $a_j^{(k-1)}$  — ВМНК-оценки на  $(k-1)$ -й итерации,  $a_j^{(0)}$  — МНК-оценки,  $p_i^{(0)} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Случай 2.  $0 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x} < \infty$ . Вместо задачи (1) итерационно решаем последовательность задач минимизации ВМНМ

$$V^{(k)}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} |y_i - a_0 - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij}| \Rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m+1}},$$

где  $p_i^{(k)} = \frac{\rho(|y_i - a_0^{(k-1)} - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij}|)}{|y_i - a_0^{(k-1)} - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij}|}$ ,  $a_j^{(k-1)}$  — ВМНМ-оценки на  $(k-1)$ -й итерации,  $a_j^{(0)}$  — МНМ-оценки,  $p_i^{(0)} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Случай 3.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x} = \infty$ . Все узловые точки будут задачи локальными минимумами функции  $Q(\mathbf{a})$  [3], и задачу (1) нельзя свести к последовательности выпуклых задач минимизации.

### Литература

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. — М. : Финансы и статистика, 1985. — 488 с.
2. Панюков А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. — 2007. — № 1. — С. 6–11.
3. Тырсин А.Н. Оценивание линейной регрессии на основе обобщенного метода наименьших модулей / А.Н. Тырсин, Л.А. Соколов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 134–142.

**ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО  
ПОРЯДКА**

**Т.А. Ульвачёва** (Воронеж, ВГПУ)  
tanya438@mail.ru

Пусть  $E_1, \dots, E_n$  — банаховы пространства. Будем рассматривать банахово пространство  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  с нормой

$$\|x\|_E = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i},$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Рассмотрим систему полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в пространстве  $E$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_0^{q_1} x_1(t) \in A_1 x_1(t) + F_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \\ ..... \\ {}^C D_0^{q_n} x_n(t) \in A_n x_n(t) + F_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \end{array} \right. \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  ${}^C D_0^{q_i}$  — производные Капуто дробных порядков  $q_i$ ,  $0 < q_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; линейные операторы  $A_i : D(A_i) \subseteq E_i \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  удовлетворяют следующему условию:

(A<sub>i</sub>)  $A_i$  — неплотно определенные операторы Хилле-Йосида, порождающие сильно непрерывные ограниченные полугруппы.

Символом  $Kv$  будем обозначать совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства. Определим многозначную нелинейность  $F: [0, T] \times E \rightarrow Kv(E)$  как

$$F(t, x) = F_1(t, x) \times \dots \times F_n(t, x),$$

где каждый мультиоператор  $F_i: [0, T] \times E \rightarrow Kv(E_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  удовлетворяет следующим условиям:

( $F1_i$ ) для любого  $x \in E$  мультифункция  $F_i(\cdot, x): [0, T] \rightarrow Kv(E_i)$  имеет сильно измеримое сечение;

$(F2_i)$  для п.в.  $t \in [0, T]$  мультиотображение  $F_i(t, \cdot): E \rightarrow Kv(E_i)$  полунепрерывно сверху;

(F3<sub>i</sub>) для некоторого  $p_i > \frac{1}{q_i}$  мультиоператор  $F_i$  является локально  $p_i$ -интегрально ограниченным.

Введем в пространстве  $E$  векторную меру некомпактности (МНК) Хаусдорфа  $\mathcal{X}$ , положив для ограниченного множества  $\Omega \subset E$ :

$$\mathcal{X}(\Omega) = \left( \chi_1(\Omega_1), \dots, \chi_n(\Omega_n) \right)^T \in \mathbb{R}_+^n,$$

где  $\chi_i$  — МНК Хаусдорфа в пространстве  $E_i$ , а  $\Omega_i$  обозначает проекцию множества  $\Omega$  на  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Пусть многозначная нелинейность  $F$  удовлетворяет следующему условию  $\mathcal{X}$ -регулярности:

(F4<sub>i</sub>) существуют функции  $\mu_i \in L_+^{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  такие, что для любого ограниченного множества  $\Omega \subset E$  выполнено

$\mathcal{X}(F(t, \Omega)) \leq \mathcal{M}(t)\mathcal{X}(\Omega)$  п.в.  $t \in (0, T)$ , где матрица  $\mathcal{M}(t)$  имеет вид:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n(t) \end{pmatrix}$$

Мы будем рассматривать задачу о существовании интегральных решений  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  системы (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$x_1(0) = x_{01} \in \overline{D(A_1)}, \dots, x_n(0) = x_{0n} \in \overline{D(A_n)}. \quad (2)$$

**Теорема 1.** При выполнении условий  $(A_i), (F1_i) - (F4_i)$  существует  $\tau$ ,  $0 < \tau \leq T$  такое, что задача (1), (2) имеет интегральное решение на промежутке  $[0, \tau]$ .

Для формулировки глобальной теоремы существования решения заменим условия (F3<sub>i</sub>) на условия подлинейного роста:

(F3'<sub>i</sub>) для каждого  $i = 1, \dots, n$  существует функция  $\alpha_i(\cdot) \in L_+^{p_i}(0, T)$  такая, что  $\|F_i(t, x)\|_{E_i} \leq \alpha_i(t)(1 + \|x_i\|_{E_i})$  п.в.  $t \in [0, T]$ .

**Теорема 2.** При выполнении условий  $(A_i), (F1_i), (F2_i), (F3'_i), (F4_i)$  множество всех интегральных решений задачи (1), (2) на промежутке  $[0, T]$  непусто и компактно.

### Литература

1. Obukhovskii V. On semilinear differential inclusions in Banach spaces with nondensely defined operators / V. Obukhovskii, P. Zecca // J. Fixed Point Theory Appl. — 2011. — Vol.9, no. 1. — P.85–100.

# УСЛОВИЯ ПРОСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ<sup>1</sup>

А.А. Уртаева (Владикавказ, СОГУ им. К.Л. Хетагурова)

urtaeva-96@mail.ru

В докладе обсуждаются свойства кратности собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка на графе  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda \rho(x)u, \\ u|_{\partial\Gamma} &= u'|_{\partial\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\partial\Gamma$  — множество граничных вершин  $\Gamma$ . При этом, под дифференциальным уравнением в (1) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' + r_i(x)u = \lambda \rho_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (2)$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине  $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I(a)} [(p_i u_i'')'_{\nu}(a) - q_i(a)u_i'(a)] + r(a)u(a) = \lambda \rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

Уравнение (2)–(4) моделирует малые деформации стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения (см. [1, 2] и [3, § 5.18]).

Всюду далее мы используем терминологию и обозначения работ [1, 2]. Далее считаем, что выполнены условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$  и  $q \in C^1[(\Gamma)]$ ,  $q(x) \geq 0$  on  $E(\Gamma)$ ;
- $r, \rho \in C[\Gamma]$ ,  $r(x) \geq 0$ ,  $\rho(x) > 0$  на  $\Gamma$ ;
- $\beta_i(a) \geq 0$ ,  $\vartheta_i(a) \geq 0$  и  $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$  для всех  $a \in V(\Gamma)$ ,  $i \in I(a)$ .

Изучается вопрос о простоте собственных значений спектральной задачи (1).

**Лемма.** Дифференциальный оператор  $L$ , краевой задачи (1), является самосопряженным. Спектр  $\Lambda$  оператора  $L$  дискретен.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой Министерства науки и высшего образования РФ (грант на создание и развитие НОМЦ СОГУ соглашение № 075-02-2024-1447)

**Теорема 1.** *Ведущее собственное значение  $\lambda_0$  дифференциального оператора  $L$  является простым, а соответствующие собственные функции не имеют нулей в  $\Gamma$ .*

Поскольку дифференциальный оператор  $L$  является самосопряженным, то кратность его собственных значений совпадает с размерностью соответствующего собственного подпространства. Поэтому вопрос о кратности точки спектра оператора  $L$  удобно обсуждать в форме вопроса о размерности пространства всех решений однородной краевой задачи

$$Lu - \lambda \rho u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u'_\nu)|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Обозначим это пространство через  $\mathcal{S}(L)$ . Очевидно, что  $\dim \mathcal{S}(L) \leq 4n$ , где  $n$  — число ребер графа  $\Gamma$ .

**Определение 1.** Точку  $x_0 \in \Gamma$ , не являющуюся внутренней вершиной кратности больше двух, будем называть *простой*, если множество  $\Gamma \setminus x_0$  не связно.

**Определение 2.** Задачу (5) назовём *простой*, если у некоторого ее решения все нули в  $\Gamma$  являются простыми. В частности, если существует решение задачи (5) без нулей в  $\Gamma$ , то такая задача также называется простой.

**Теорема 2.** *Если задача (5) простая, то  $\dim \mathcal{S}(L) = 1$ .*

### Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2007. — 272 с.
2. Kulaev R.Ch. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // R.Ch. Kulaev, A.A. Urtaeva // Math. Meth. Appl. Sci. (2023), 1–21.
3. Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering / S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr. — Wiley, 1990 — 672 p.

# РАЗРЕШЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛУ)

vum1@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$A \frac{d^2 u}{dt^2} = B \frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t), \quad (1)$$

где  $A, B, C$  — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства  $\mathcal{X}_1$  в банахово пространство  $\mathcal{X}_2$ ;  $\overline{\text{dom}} A = \mathcal{X}_1$ ;  $\overline{\text{dom}} B = \mathcal{X}_1$ ;  $\overline{\text{dom}} C = \mathcal{X}_1$ ;  $f(t)$  — заданная функция со значениями в  $\mathcal{X}_2$ ;  $t \in [0; t_k]$ .

Оператор  $A$  фредгольмов с нулевым индексом, обладающий одномерным ядром. Исследуется случай:

$$\langle QB e, \varphi \rangle = 0, \quad \langle (QBA^-B + QC)e, \varphi \rangle \neq 0. \quad (2)$$

В работе [1] получен следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнено (2), и функция  $f(t)$  дважды дифференцируема. Тогда уравнение (1) равносильно системе:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = K_1 \frac{du}{dt} + K_0 u(t) + F(t),$$

$$\langle (QB \frac{du}{dt} + QCu(t) + Qf(t)), \varphi \rangle = 0,$$

$$\langle ((QBA^-B + QC) \frac{du}{dt} + QBA^-Cu(t) + QBA^-f(t) + Q \frac{df}{dt}), \varphi \rangle = 0,$$

в обозначениях:

$$K_1(\cdot) = A^-B(\cdot) - \frac{\langle (QB(A^-B)^2 + QBA^-C + QCA^-B)(\cdot), \varphi \rangle}{\langle (QBA^-B + QC)e, \varphi \rangle} e,$$

$$K_0(\cdot) = A^-C(\cdot) - \frac{\langle (QBA^-BA^-C + QCA^-C)(\cdot), \varphi \rangle}{\langle (QBA^-B + QC)e, \varphi \rangle} e,$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, № 24-21-20012, <https://rscf.ru/project/24-21-20012/>

© Усков В.И. , 2024

$$F(t) = A^- f(t) - \frac{\langle (QBA^- BA^- f(t) + QCA^- f(t) + QBA^- \frac{df}{dt} + Q \frac{d^2 f}{dt^2}), \varphi \rangle}{\langle (QBA^- B + QC)e, \varphi \rangle} e.$$

Теперь для уравнения (1) поставим задачу Коши:

$$u(0) = u^0 \in \mathcal{X}_1, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1 \in \mathcal{X}_1. \quad (3)$$

Из теоремы 1 следует теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполнено (2). Пусть операторы  $K_1, K_0$  ограничены, функция  $F(t)$  непрерывна. Тогда решение задачи (1), (3) существует при выполнении условий согласования:

$$\langle (QBu^1 + QCu^0 + Qf(0)), \varphi \rangle = 0,$$

$$\langle (((QBA^- B + QC)u^1 + QBA^- Cu^0 + QBA^- f(0) + Q \frac{df}{dt}(0)), \varphi \rangle = 0$$

и единственно.

Более общий случай  $n$ -мерного ядра с переменными операторными коэффициентами рассмотрен в работе [2]. Результат применялся при исследовании рабочего процесса шнекороторного метателя лесопожарного грунтомета в работе, которое планируется опубликовать в «Лесотехническом журнале».

### Литература

1. Усков В.И. Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве / В.И. Усков // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 140. — С. 375–385.
2. Усков В.И. Задача Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве / В.И. Усков // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2023. — № 4. — С. 70–80.



# ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГТУ и БГУ)

*ustilko@tut.by, lomovcev@bsu.by*

Решается следующая характеристическая смешанная задача

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1a_2u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_n = [0, d] \times [0, d_{n+1}], d_n = \frac{(n-1)d}{a_1 + a_2}, n = 1, 2, \dots,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), x \in [0, d], d > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha_i(t)(u_t(x, t) + (-1)^{i+1}a_iu_x(x, t)) + \gamma_i(t)u(x, t)]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t), \quad (3)$$

где исходные данные смешанной задачи  $f, \varphi, \psi, \mu_i$  — заданные вещественные функции своих переменных  $x, t$ , коэффициенты граничных условий  $\alpha_i, \gamma_i$  — вещественные функции переменной  $t$  и постоянные скорости волн  $a_1 > 0, a_2 > 0, \hat{d}_i = (i-1)d, i = 1, 2$ .

Найдены в явном аналитическом виде формулы единственных и устойчивых гладких решений смешанной задачи для волнового уравнения (1) при характеристической первой косою производной в нестационарном граничном режиме для полуограниченной струны в статье [1]. В ней также установлен критерий корректности по Адамару из требований гладкости и условий согласования исходных данных этой характеристической смешанной задачи.

**Теорема 1.** Пусть в граничных режимах (3) вещественные коэффициенты  $\alpha_i, \gamma_i \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}], k = 1, 2, \dots, n, \gamma_i(t) \neq 0, t \in [0, d_{n+1}], i = 1, 2, n = 1, 2, 3, \dots$ . Для того, чтобы характеристическая смешанная задача (1)–(3) в  $Q_n$  имела единственное и устойчивое по исходным данным  $f, \varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$  классическое решение  $u \in C^2(Q_n)$  необходимо и достаточно требований гладкости:

$$\varphi \in C^{n+1}[0, d], \psi \in C^n[0, d], f \in C^{n-k}(G_k), \mu \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}],$$

$$G_k = [0, d] \times [d_k, d_{k+1}];$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_i(t) \varphi'(\hat{d}_i - (-1)^i a_{3-i} t_k), \quad \alpha_i(t) \psi(\hat{d}_i - (-1)^i a_{3-i} t_k), \\
& \alpha_i(t) \int_{d_k}^t f(\hat{d}_i - (-1)^i a_{3-i}(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}], \\
& \int_{d_k}^t f(x - (-1)^i a_{3-i}(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-k+1}(G_k), \\
& \frac{a_2 + 2a_1}{a_1} \int_{d_k}^{(x/a_1)-t} f\left(\frac{a_2 + 2a_1}{a_1}(x - a_1 t) - a_2 \tau, \tau\right) d\tau + \\
& + \int_{(x/a_1)-t}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-k+1}(\Delta_{3k-2}), \\
& - \frac{a_{3-i}}{a_i} \int_{d_k}^{t - \frac{\hat{d}_i - (-1)^i x}{a_i}} f((-1)^{i+1} a_{3-i}(t - \frac{\hat{d}_i - (-1)^i x}{a_i} - \tau), \tau) d\tau + \\
& + \int_{t - \frac{\hat{d}_i - (-1)^i x}{a_i}}^t f(x + (-1)^i a_i(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-k+1}(\Delta_{3k-1} \cup \Delta_{3k}),
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, t \in [d_k, d_{k+1}], k = \overline{1, n},$$

$$\Delta_{3k-2} = \{(x, t) \in G_k : x \geq a_1 t_k, x + a_2 t_k \leq d, x \in [0, d]\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \{(x, t) \in G_k : x \leq a_1 t_k, x \in [0, a_1 d_2]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{(x, t) \in G_k : x + a_2 t_k \geq d, x \in [a_1 d_2, d]\},$$

$$t_k = t - d_k, k = \overline{1, n},$$

и два набора условий согласования, аналогичных условиям из [2].

**Замечание.** Получены также явные формулы единственных классических решений  $u \in C^2(Q_n)$  смешанной задачи (1)–(3).

### Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косо́й производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений / Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). — 2020. — № 2 (56). — С. 21–36.

2. Устилко Е.В. Условия согласования значений характеристической косо́й производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения / Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2020. — Т. 1. — С. 30–37.

**ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ  
С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ**

**К.Д. Федоров** (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики)  
*konstantin-dubna@mail.ru*

Пусть на интервале  $(0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ , задано множество точек

$$\{t_1, \dots, t_N \in (0, T) \mid 0 < t_1 < \dots < t_N < T\}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

В полосе  $D = \mathbb{R} \times (0, T)$  выделяется полуограниченная область  $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ . Ее боковая граница  $\Sigma$  определяется непрерывной функцией, производная которой кусочно-непрерывна со множеством (1) точек разрыва первого рода.

Пусть

$$P_0 = (g(0), 0), \quad P_k = (g(t_k), t_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad P = \{P_0, \dots, P_N\}.$$

Через  $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P)$  обозначим пространство (вектор-) функций  $u$ , непрерывных вместе со своей первой пространственной производной в  $\bar{\Omega}$  и имеющих непрерывные и ограниченные вторую пространственную и первую временную производные в  $\bar{\Omega} \setminus P$ , для которых конечно выражение

$$\begin{aligned} \|u; \Omega\|^{(2)} = & \sum_{2r+s \leq 2} \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \\ & + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega, \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \end{aligned}$$

В  $D$  рассматривается равномерно-параболический матричный оператор  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{l=0}^2 A_l(x, t) \frac{\partial^l u}{\partial x^l}$ , где  $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ ,  $m \geq 1$ . Предполагается, что коэффициенты  $a_{ijl}$  определены и ограничены в  $\bar{D}$  и  $|\Delta_{x,t} a_{ijl}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$  в  $\bar{D}$ , где  $\omega_0$  — модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини:

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Для первой начально-краевой задачи:

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u \Big|_{t=0} = h, \quad u \Big|_{\Sigma} = \psi, \quad (2)$$

доказывается, что если функция  $f$  непрерывна, ограничена в  $\overline{D}$  и  $|\Delta_x f(x, t)| \leq \omega(|\Delta x|)$  в  $\overline{D}$ , где  $\omega$  — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини:

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

функция  $h$  непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными, функция  $\psi$  непрерывна, ее производная кусочно-непрерывна со множеством (1) точек разрыва первого рода и выполнено условие согласования:

$$\psi(0) = h(g(0)),$$

то классическое решение  $u \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega})$  задачи (2) принадлежит пространству  $C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$  и справедлива соответствующая оценка.

Существование и единственность решения поставленной задачи в классе  $C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega})$  следует из [1 — 3].

### Литература

1. Baderko E.A. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // *Applicable Analysis*. — 2021. — Vol. 100, № 13 — P. 2900–2910.
2. Бадерко Е.А. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // *Дифференциальные уравнения*. — 2022. — Т. 58, № 10. — С. 1333–1343.
3. Бадерко Е.А. О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2023. — Т. 63, № 4. — С. 584–595.

# МАССИВНЫЕ МНОЖЕСТВА И КОНУСЫ МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ<sup>1</sup>

В.В. Филатов (Волгоград, ВолГУ)

*filatov@volsu.ru*

Работа посвящена изучению свойств ограниченных решений полулинейных эллиптических уравнений вида

$$Lu \equiv \Delta u - q(x)u = 0 \quad (1)$$

на модельных многообразиях. Предполагается, что функция  $q(x) \geq 0$  — липшицева функция.

Одним из истоков данной тематики является классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством поверхностей параболического типа является выполнение на них теоремы типа Лиувилля, утверждающей, что всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на таких поверхностях является тождественной постоянной. Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, говорят, что некомпактное многообразие имеет параболический тип, если всякая положительная супергармоническая функция на нём является константой. В противном случае, говорят, что некомпактное риманово многообразие имеет гиперболический тип.

В значительной части работ римановы многообразия описывались в терминах различных кривизн, роста объёма, выполнения изопериметрических неравенств и так далее. Большинство указанных характеристик являются достаточно традиционными в римановой геометрии, понятны большинству исследователей, но далеко не всегда эффективно характеризуют поведение решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях. Во многих случаях применение емкостной техники позволяет получать более точные результаты (обзор данной тематики можно найти, например в [1]).

Приведём один из новых результатов в данном направлении. Для его формулировки нам понадобится понятие  $L$  — массивных множеств. Пусть  $M$  — произвольное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Будем говорить, что  $\Omega$  является  $L$  - массивным,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

© Филатов В.В., 2024

если на  $M$  существует  $v$  - нетривиальное субрешение полулинейного уравнения (1), такое, что  $0 \leq v < 1$  и  $v = 0$  в  $M \setminus \Omega$ . Функцию  $v$  будем называть  $L$  - допустимой для  $\Omega$ .

В работе [2] доказано, что на  $M$  существует нетривиальное ограниченное решение полулинейного уравнения (1) тогда и только тогда, когда на  $M$  существует  $L$  — массивное подмножество.

Пусть  $M$  - полное риманово многообразие, представимое в виде объединения  $M = B \cup D$ , где  $B$  - некоторый компакт, а  $D$  изометрично прямому произведению  $(r_0, +\infty) \times S$ , где  $S$  - замкнутое (компактное с пустым краем) многообразие с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь  $g(r)$  - положительная, гладкая на  $(r_0; +\infty)$  функция, а  $d\theta^2$  - метрика на  $S$ . Примерами таких многообразий являются евклидово пространство ( $g(r) = r$ ), пространство Лобачевского ( $g(r) = \operatorname{sh} r$ ), поверхности вращения и другие.

Будем говорить, что  $D_1$  - конус модельного многообразия, если  $D_1$  изометрично прямому произведению  $[r_0, +\infty) \times \Omega \subset S$  (где  $r_0 > 0$ ,  $\Omega$  - открытое подмножество  $S$  с непустым гладким краем). Очевидно, что  $D_1 \subset D$ . Обозначим

$$J = \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) dt \int_{r_0}^t q(z) g^{n-1}(z) dz < \infty.$$

Сформулируем основной результат текущей работы.

**Теорема 1.** Пусть многообразие  $M$  такое, что  $J < \infty$ . Тогда  $D_1$  является  $q$  - массивным множеством.

### Литература

1. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.
2. Losev A.G. Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds / A.G. Losev, V.V. Filatov // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2021. — Т. 31, № 4. — С. 629–639.

# ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ<sup>1</sup>

М.Н. Филиппов, Д.В. Туртин, М.А. Степович,  
В.В. Калманович (Москва, ИОНХ им. Н.С. Курнакова РАН,  
Иваново, ИВГУ, Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)  
*mn@filippov.org.ru, turtin@mail.ru, m.stepovich@mail.ru,  
v572264@yandex.ru*

Электронно-зондовые технологии широко используются в различных отраслях науки, техники, производства. При взаимодействии электронного зонда с конденсированным веществом возникает ряд физических явлений, одним из которых является нагрев мишени. Для количественного описания этого явления ранее рассматривались математические модели, описываемые стационарными дифференциальными уравнениями теплопроводности — см., например [1–3] и литературу там же. Однако при реализации некоторых режимов работы электронно-зондовых устройств (например, катодолюминесценции [4]) используется импульсное облучение мишени. При этом характерный диаметр области, в которой рассеивается энергия электронного пучка, составляет единицы микрометра и менее. Поскольку кинетика нагрева электронным зондом анализируемого микрообъёма практически не поддаётся экспериментальному исследованию, для количественного описания этого процесса особое значение приобретают методы математического моделирования.

В настоящей работе рассмотрена математическая модель изменения температуры образца, основанная на классическом нестационарном уравнении теплопроводности с правой частью, в которой плотность источников тепла модулирована синусоидальной функцией либо прямоугольными импульсами:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\vec{r}, t) + \frac{1}{c\rho_0} \rho(\vec{r}, t).$$

Здесь  $u$  — температура перегрева образца,  $a^2 = \lambda/c\rho_0$  — температуропроводность образца,  $\lambda$  — теплопроводность образца,  $c$  — теплоёмкость образца,  $\rho_0$  — плотность образца,  $\rho(\vec{r}, t)$  — плотность мощности источников тепла в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ .

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069

© Филиппов М.Н., Туртин Д.В., Степович М.А., Калманович В.В., 2024

## Литература

1. Амрастанов А.Н. Тепловое воздействие электронного зонда при рентгеноспектральном наноанализе / А.Н. Амрастанов, А.Ю. Кузин, В.Б. Митюхляев, Е.В. Серегина, М.А. Степович, П.А. Тодуа, М.Н. Филиппов // Измерительная техника. — 2017. — № 6. — С. 13-15.

2. Амрастанов А.Н. Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом / А.Н. Амрастанов, Е.В. Серегина, М.А. Степович, М.Н. Филиппов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2018. — № 8. — С. 48-52.

3. Амрастанов А.Н. Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом / А.Н. Амрастанов, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2018. — Т. 82, № 9. — С. 1304-1309.

4. Степович М.А. Количественная катодOLUMИНЕСЦЕНТНАЯ МИКРОСКОПИЯ ПРЯМОЗОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ : Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / М.А. Степович. — М. : Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2003. — 351 с.

## ОБ $n$ -КОМПОНЕНТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

**В.И. Фомин** (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)  
*vasiliyfomin@bk.ru*

В [1,2] рассмотрены  $n$ -компонентные операторы двух типов: векторные, т.е. операторы, действующие из векторного пространства в векторное пространство, и векторно-функциональные, т.е. операторы, действующие из векторного пространства в функциональное пространство. В данной работе изучаются  $n$ -компонентные функциональные операторы, т.е. операторы, действующие из функционального пространства в функциональное пространство.

Ниже используются следующие общепринятые обозначения ([3, с. 60, 96]):  $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$  — нормированное пространство ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство  $\mathcal{N}_1$  в нормированное пространство  $\mathcal{N}_2$ ;  $C([a, b]; B)$  — вещественное банахово пространство непрерывных на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  функций



со значениями в банаховом пространстве  $B$  с естественными линейными операциями  $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ ,  $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$  и нормой

$$\|x\|_{C([a,b];B)} = \max_{a \leq t \leq b} \|x(t)\|_B. \quad (1)$$

В дальнейшем без дополнительных ссылок неоднократно используется следующий известный факт ([4, с. 91]): нормированное пространство  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, B)$  ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство  $\mathcal{N}$  в банахово пространство  $B$ , является банаховым пространством.

Пусть  $E, H$  — вещественные банаховы пространства;  
 $\Phi = C([a, b]; E)$ ,  $\Psi = C([a, b]; H)$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $n$  фиксировано;  
 $\{X_i\}_{i=1}^n$ ,  $\{Y_i\}_{i=1}^n$  — семейства вещественных банаховых пространств;  
 $\Phi_i = C([a, b]; X_i)$ ,  $\Psi_i = C([a, b]; Y_i)$ ;  $W_i = C([a, b]; \mathcal{L}(X_i, Y_i))$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Известно ([5, с. 124]), что прямое произведение банаховых пространств является банаховым пространством. Следовательно,

$$\vec{\Phi} = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_n = \{\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i = u_i(t) \in \Phi_i, i = \overline{1, n}\},$$

$$\vec{\Psi} = \Psi_1 \times \Psi_2 \times \dots \times \Psi_n = \{\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i = v_i(t) \in \Psi_i, i = \overline{1, n}\} —$$

вещественные банаховы пространства  $n$ -компонентных функций с покомпонентными линейными операциями и нормой

$$\|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}} = \|u_1\|_{\Phi_1} + \|u_2\|_{\Phi_2} + \dots + \|u_n\|_{\Phi_n},$$

$$\|\vec{v}\|_{\vec{\Psi}} = \|v_1\|_{\Psi_1} + \|v_2\|_{\Psi_2} + \dots + \|v_n\|_{\Psi_n},$$

т.е. в силу (1)

$$\|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}} = \max_{a \leq t \leq b} \|u_1(t)\|_{X_1} + \max_{a \leq t \leq b} \|u_2(t)\|_{X_2} + \dots + \max_{a \leq t \leq b} \|u_n(t)\|_{X_n},$$

$$\|\vec{v}\|_{\vec{\Psi}} = \max_{a \leq t \leq b} \|v_1(t)\|_{Y_1} + \max_{a \leq t \leq b} \|v_2(t)\|_{Y_2} + \dots + \max_{a \leq t \leq b} \|v_n(t)\|_{Y_n}.$$

В частности, при  $\Phi_i = \Phi$ ,  $\Psi_i = \Psi$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получаем вещественные банаховы пространства  $\Phi^n = \Phi \times \Phi \times \dots \times \Phi$ ,  $\Psi^n = \Psi \times \Psi \times \dots \times \Psi$ .

По определению,  $n$ -компонентный функциональный оператор  $\vec{F} : \vec{\Phi} \rightarrow \vec{\Psi}$  первого типа — это оператор  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , где  $F_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i)$ ,  $F_i$  фиксированы,  $i = \overline{1, n}$ , действующий по следующему закону:

$$\vec{F}\vec{u} = (F_1 u_1(t), F_2 u_2(t), \dots, F_n u_n(t)) \quad (2)$$

для любого элемента  $\vec{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in \vec{\Phi}$ .

Определение (2) корректно, так как  $F_i u_i(t) \in \Psi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ибо композиция ограниченного линейного оператора и непрерывной векторной функции является непрерывной векторной функцией. Обозначим множество  $n$ -компонентных операторов вида (2) символом  $M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ . Любой оператор  $\vec{F} \in M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  является линейным (это следует из линейности его компонент  $F_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ). Введём в множестве  $M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  естественные линейные операции. Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u} \in \vec{\Phi}$ ;  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ,  $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_n) \in M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ . По определению,  $(\vec{F} + \vec{G})\vec{u} = \vec{F}\vec{u} + \vec{G}\vec{u}$ ,  $(\alpha\vec{F})\vec{u} = \alpha\vec{F}\vec{u}$ . Используя формулу (2), приходим к выводу:

$$\vec{F} + \vec{G} = (F_1 + G_1, F_2 + G_2, \dots, F_n + G_n), \alpha\vec{F} = (\alpha F_1, \dots, \alpha F_n). \quad (3)$$

Выполнимость аксиом линейного пространства для линейных операций (3) очевидна. Для каждого оператора  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  справедливо неравенство  $\|\vec{F}\vec{u}\|_{\vec{\Psi}} \leq c_1 \|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}}$ ,  $\forall \vec{u} \in \vec{\Phi}$ , где  $c_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \|F_i\|_{L(X_i, Y_i)}$ . Это означает, что каждый оператор  $\vec{F} \in M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  ограничен и для его естественной нормы

$$\|\vec{F}\|_{M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})} = \inf \left\{ c : \|\vec{F}\vec{u}\|_{\vec{\Psi}} \leq c \|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}}, \forall \vec{u} \in \vec{\Phi} \right\} \quad (4)$$

справедлива оценка  $\|\vec{F}\|_{M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})} \leq c_1$ . Надеясь множество  $M_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  линейными операциями (3), нормой (4) и учитывая, что  $\vec{\Psi}$  — банахово пространство, получаем вещественное банахово пространство  $\mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  ограниченных линейных  $n$ -компонентных функциональных операторов первого типа, действующих из  $\vec{\Phi}$  в  $\vec{\Psi}$  по закону (2). Частными случаями этого пространства являются пространства  $\mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \vec{\Phi}) = \mathcal{L}_c(\vec{\Phi})$ ,  $\mathcal{L}_c(\Phi^n, \vec{\Psi})$ ,  $\mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \Psi^n)$ ,  $\mathcal{L}_c(\Phi^n, \Psi^n)$ ,  $\mathcal{L}_c(\Phi^n, \Phi^n) = \mathcal{L}_c(\Phi^n)$ . Введя в пространстве  $\mathcal{L}_c(\vec{\Phi})$  операцию умножения  $(\vec{F}\vec{G})\vec{u} = \vec{F}(\vec{G}\vec{u})$ , получаем вещественную банахову алгебру  $\mathcal{B}_c(\vec{\Phi})$ , в частности, алгебру  $\mathcal{B}_c(\Phi^n)$ .

Если  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \Psi^n)$ , то для компонент элемента  $\vec{F}\vec{u} = (F_1u_1(t), F_2u_2(t), \dots, F_nu_n(t))$  справедливы включения  $F_iu_i(t) \in \Psi, i = \overline{1, n}$ . Следовательно, эти компоненты можно суммировать. Это позволяет ввести следующее понятие.

По определению,  $n$ -компонентный функциональный оператор  $\vec{F} : \vec{\Phi} \rightarrow \Psi$  второго типа — это оператор  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , где  $F_i \in \mathcal{L}(X_i, H)$ ,  $F_i$  фиксированы,  $i = \overline{1, n}$ , действующий по следующему закону:

$$\vec{F}\vec{u} = F_1u_1(t) + F_2u_2(t) + \dots + F_nu_n(t) \quad (5)$$

для любого элемента  $\vec{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in \vec{\Phi}$ .

Обозначим множество  $n$ -компонентных операторов вида (5) символом  $M_c(\vec{\Phi}, \Psi)$ . Любой оператор  $\vec{F} \in M_c(\vec{\Phi}, \Psi)$  линеен. Для каждого  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in M_c(\vec{\Phi}, \Psi)$  справедливо неравенство  $\|\vec{F}\vec{u}\|_{\Psi} \leq c_2\|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}}, \forall \vec{u} \in \vec{\Phi}$ , где  $c_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \|F_i\|_{\mathcal{L}(X_i, H)}$ , т.е. оператор  $\vec{F}$  ограничен и  $\|\vec{F}\|_{M_c(\vec{\Phi}, \Psi)} \leq c_2$ . Введя в множестве  $M_c(\vec{\Phi}, \Psi)$  естественные линейные операции и норму и учитывая, что  $\Psi$  — банахово пространство, получаем вещественное банахово пространство  $\mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \Psi)$  ограниченных линейных  $n$ -компонентных функциональных операторов второго типа, действующих из  $\vec{\Phi}$  в  $\Psi$  по закону (5). Частными случаями этого пространства являются пространства  $\mathcal{L}_c(\Phi^n, \Psi), \mathcal{L}_c(\vec{\Phi}, \Phi), \mathcal{L}_c(\Phi^n, \Phi)$ . Условимся называть операторы вида (2), (5)  $n$ -компонентными функциональными операторами с постоянными компонентами.

По определению,  $n$ -компонентный функциональный оператор  $\vec{\mathcal{A}} : \vec{\Phi} \rightarrow \vec{\Psi}$  третьего типа — это оператор  $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t))$ , где  $A_i(t) \in W_i, A_i(t)$  фиксированы,  $i = \overline{1, n}$ , действующий по следующему закону:

$$\vec{\mathcal{A}}\vec{u} = (A_1(t)u_1(t), A_2(t)u_2(t), \dots, A_n(t)u_n(t)) \quad (6)$$

для любого элемента  $\vec{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in \vec{\Phi}$ .

Определение (6) корректно, так как  $A_i(t)u_i(t) \in \Psi_i, i = \overline{1, n}$ , ибо, как известно ([6, с.143]), композиция непрерывной операторной функции и непрерывной векторной функции является непрерывной векторной функцией. Обозначим множество  $n$ -компонентных операторов вида (6) символом  $M_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ . Любой оператор  $\vec{\mathcal{A}} \in M_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$

линеен. Для каждого оператора  $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)) \in M_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  справедливо неравенство  $\|\vec{\mathcal{A}}\vec{u}\|_{\vec{\Psi}} \leq c_3 \|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}}, \forall \vec{u} \in \vec{\Phi}$ , где  $c_3 = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \max_{a \leq t \leq b} \|A_i(t)\|_{\mathcal{L}(X_i, Y_i)} \right)$ , т.е. оператор  $\vec{\mathcal{A}}$  ограничен и  $\|\vec{\mathcal{A}}\|_{M_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})} \leq c_3$ . Наделяя множество  $M_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  естественными линейными операциями и нормой и учитывая, что  $\vec{\Psi}$  — банахово пространство, получаем вещественное банахово пространство  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$  ограниченных линейных  $n$ -компонентных функциональных операторов третьего типа, действующих из  $\vec{\Phi}$  в  $\vec{\Psi}$  по закону (6). Частными случаями этого пространства являются пространства  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \vec{\Phi}) = \mathcal{L}_v(\vec{\Phi})$ ,  $\mathcal{L}_v(\Phi^n, \vec{\Psi})$ ,  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \Psi^n)$ ,  $\mathcal{L}_v(\Phi^n, \Psi^n)$ ,  $\mathcal{L}_v(\Phi^n, \Phi^n) = \mathcal{L}_v(\Phi^n)$ . Введя в пространстве  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi})$  операцию умножения  $(\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}})\vec{u} = \vec{\mathcal{A}}(\vec{\mathcal{B}}\vec{u})$ , получаем вещественную банахову алгебру  $\mathcal{B}_v(\vec{\Phi})$ , в частности, алгебру  $\mathcal{B}_v(\Phi^n)$ .

Если  $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)) \in \mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \Psi^n)$ , то для компонент элемента  $\vec{\mathcal{A}}\vec{u} = (A_1(t)u_1(t), A_2(t)u_2(t), \dots, A_n(t)u_n(t))$  справедливы включения  $A_i(t)u_i(t) \in \Psi, i = \overline{1, n}$ . Следовательно, эти компоненты можно суммировать. Значит, можно ввести следующее понятие.

По определению,  $n$ -компонентный функциональный оператор  $\vec{\mathcal{A}} : \vec{\Phi} \rightarrow \Psi$  четвёртого типа — это оператор  $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t))$ , где  $A_i(t) \in C([a, b]; \mathcal{L}(X_i, H))$ ,  $A_i(t)$  фиксированы,  $i = \overline{1, n}$ , действующий по следующему закону:

$$\vec{\mathcal{A}}\vec{u} = A_1(t)u_1(t) + A_2(t)u_2(t) + \dots + A_n(t)u_n(t) \quad (7)$$

для любого элемента  $\vec{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in \vec{\Phi}$ .

Обозначим множество  $n$ -компонентных операторов вида (7) символом  $M_v(\vec{\Phi}, \Psi)$ . Любой оператор  $\vec{\mathcal{A}} \in M_v(\vec{\Phi}, \Psi)$  линеен. Для каждого  $\vec{\mathcal{A}} = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)) \in M_v(\vec{\Phi}, \Psi)$  справедливо неравенство  $\|\vec{\mathcal{A}}\vec{u}\|_{\Psi} \leq c_4 \|\vec{u}\|_{\vec{\Phi}}, \forall \vec{u} \in \vec{\Phi}$ , где  $c_4 = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \max_{a \leq t \leq b} \|A_i(t)\|_{\mathcal{L}(X_i, H)} \right)$ , т.е. оператор  $\vec{\mathcal{A}}$  ограничен и  $\|\vec{\mathcal{A}}\|_{M_v(\vec{\Phi}, \Psi)} \leq c_4$ . Введя в множестве

$M_v(\vec{\Phi}, \Psi)$  естественные линейные операции и норму и учитывая, что  $\Psi$  — банахово пространство, получаем вещественное банахово пространство  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \Psi)$  ограниченных линейных  $n$ -компонентных функциональных операторов четвёртого типа, действующих из  $\vec{\Phi}$  в  $\Psi$  по закону (7). Частными случаями этого пространства являются пространства  $\mathcal{L}_v(\Phi^n, \Psi)$ ,  $\mathcal{L}_v(\vec{\Phi}, \Phi)$ ,  $\mathcal{L}_v(\Phi^n, \Phi)$ .

Условимся называть операторы вида (6), (7)  $n$ -компонентными функциональными операторами с переменными компонентами.

### Литература

1. Фомин В.И. Об  $n$ -компонентных операторах / В.И. Фомин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXIV: Материалы международной Воронежской весенней матем. шк. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 405 – 409.
2. Фомин В.И. Об  $n$ -компонентных векторно-функциональных операторах / В.И. Фомин // Материалы международной Воронежской зимней матем. шк. С.Г. Крейна — 2024. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. — С. 270 – 274.
3. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека, ред. С.Г. Крейн / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
4. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1072 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА КРУГЕ<sup>1</sup>

**Б.Н. Хабибуллин**

(Уфа, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН)

*khabib-bulat@mail.ru*

$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел,  $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ . Произвольную функцию  $Z: D \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0$  на области  $D \subset \mathbb{C}$  называем *распределением точек* на  $D$  [1; пп. 0.1.2–0.1.3] с *кратностями*  $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (код научной темы FMRS-2022-0124).

© Хабибуллин Б.Н., 2024

точек  $z \in D$  в  $\mathbb{Z}$ . Если  $f$  — голоморфная функция на области  $D \subset \mathbb{C}$ , то распределение точек

$$\text{Zero}_f: z \mapsto \sup_{z \in D} \left\{ p \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \mid \limsup_{z \neq w \rightarrow z} \frac{|f(w)|}{|w - z|^p} < +\infty \right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

называем *распределением корней* голоморфной функции  $f$  на  $D$ , а  $f$  *обращается в нуль на  $\mathbb{Z}$*  и пишем  $f(\mathbb{Z}) = 0$ , если  $\text{Zero}_f \geq \mathbb{Z}$  на  $D$ . В этом случае  $\mathbb{Z}$  — это *подраспределение корней функции  $f$* .

Пусть  $M: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  — расширенная вещественная функция на области  $D$ . Распределение точек  $\mathbb{Z}$  на  $D$  называем *распределением единственности для функции  $M$  на  $D$* , если любые две голоморфные на  $D$  функции  $f$  и  $g$ , разность  $f - g$  которых обращается в нуль на  $\mathbb{Z}$ , при ограничениях  $\ln|f| \leq M$  и  $\ln|g| \leq M$  на  $D$  совпадают на  $D$ , т.е.  $f = g$  на  $D$ .

Рассматриваем случай лишь субгармонической на области  $D$  функции  $M \not\equiv -\infty$  с *распределением масс Рисса*  $\Delta_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M$ , где  $\Delta$  — *оператор Лапласа*, действующий на обобщённых функций.

**Основная задача** — *какие соотношения между  $\mathbb{Z}$  и  $\Delta_M$  гарантируют, что  $\mathbb{Z}$  — распределение единственности для  $M$ ?*

Здесь обсуждается только случай, когда область  $D := D(R_0)$  — *открытый круг радиуса  $R_0 > 0$  с центром в нуле*. В частности, при  $R_0 = +\infty$  открытый круг  $D(+\infty)$  — это комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ .

Пусть число  $p > 0$ , а  $s \geq 0$  — конечная  *$p$ -тригонометрически выпуклая  $2\pi$ -периодическая функция на  $\mathbb{R}$* , т.е. для любых чисел  $\theta_1 < \theta < \theta_2 < \theta_1 + \pi/p$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  из  $s(\theta_j) \leq c_1 \sin p\theta_j + c_2 \cos p\theta_j$  при  $j = 1, 2$  следует  $s(\theta) \leq c_1 \sin p\theta + c_2 \cos p\theta$ . Распределению точек  $\mathbb{Z}$  и распределению масс Рисса  $\Delta_M$  на  $D(R_0)$  сопоставим *радиально-аргументные считающие функции по  $s$* :

$$\mathbb{Z}^{\mathbf{r}\text{-}\mathbf{a}(s)}(t)_{0 \leq t < R_0} := \mathbb{Z}(0) \sup_{\theta \in \mathbb{R}} s(\theta) + \sum_{0 < |z| \leq t} \mathbb{Z}(z) s(\arg z) \geq 0,$$

$$\Delta_M^{\mathbf{r}\text{-}\mathbf{a}(s)}(t)_{0 \leq t < R_0} := \Delta_M(\{0\}) \sup_{\theta \in \mathbb{R}} s(\theta) + \iint_{0 < |z| \leq t} s(\arg z) d\Delta(z) \geq 0.$$

Функцию  $F: (0, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$  называем  *$\pm p$ -степенно выпуклой на  $(0, R)$* , если для любых  $0 < t_1 < t < t_2 < R_0$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  из пары неравенств  $F(t_j) \leq c_1 t_j^p + c_2 t_j^{-p}$  при  $j = 1, 2$  следует  $F(t) \leq c_1 t^p + c_2 t^{-p}$ .

**Теорема** (2024 г.). Пусть  $0 < r_0 < R_0 \leq +\infty$ ,  $Z$  — распределение точек, а  $M \not\equiv -\infty$  — субгармоническая функция на  $D(R_0)$  и

$$C_M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{R_0 > r \rightarrow R_0} +\infty. \quad (1)$$

Если точная верхняя грань величины

$$\frac{r^p}{\max\{1, C_M(r)\}} \int_r^R (F(t) - F(R)) d(Z^{\mathbf{r}-\mathbf{a}(s)}(t) - \Delta_M^{\mathbf{r}-\mathbf{a}(s)}(t)) \quad (2)$$

по всем парам из  $2\pi$ -периодической  $p$ -тригонометрически выпуклой функции  $s$  на  $\mathbb{R}$  с нормировкой  $\sup_{\mathbb{R}} s = 1$  при  $p > 0$  и убывающей  $\pm p$ -степенно выпуклой функции  $F \geq 0$  на  $(0, R_0)$  с нормировкой-пределом  $\lim_{0 < t \rightarrow 0} t^p F(t) = 1$ , по всем  $p > 0$  и по всем  $(r, R) \subset (r_0, R_0)$  равна  $+\infty$ , то  $Z$  — распределение единственности для  $M$ .

Приведённый признак распределения единственности новый даже при любом фиксированного  $p > 0$  с фиксированной парой функций  $s, F$  при замене точной верхней грани на верхний предел по  $R \rightarrow R_0$  как для плоскости, так и для круга. Уже в этом очень частном случае признак «чувствует» изменение кратности одной точки на единицу и точен. Получен ряд его приложений к вопросам аппроксимации экспоненциальными системами через версии для целых функций на  $\mathbb{C}$ . Версии этой теоремы для функций многих вещественных и комплексных переменных пока в стадии разработки.

### Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi+176 с. <http://www.researchgate.net/publication/271841461>

## О ГЛАДКОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ<sup>1</sup>

В.Л. Хацкевич, О.А. Махинова (Воронеж,  
ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина)  
*vlkhats@mail.ru*

Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в работах [1-3] и получили дальнейшее развитие в [4-7].

---

<sup>1</sup>

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре [1] и связанной с ним производной по Сеиккала [3].

Обычно [4] при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают уравнение (или систему уравнений) для соответствующих  $\alpha$ -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных  $\alpha$ -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [4, 5], это не всегда так.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа [6]. Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

Пусть на вход последовательного колебательного контура, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = \tilde{y}(t), a_2 = L > 0, a_1 = R > 0, a_0 = \frac{1}{RC} > 0 \quad (1)$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал  $\tilde{y}(t)$ .

Отметим, что  $\alpha$ -индексы  $z_\alpha^\pm(t)$  нечеткого решения  $\tilde{z}(t)$  дифференциального уравнения (1) в указанных предположениях удовлетворяют соотношениям ( $\forall \alpha \in [0, 1], \forall t \in (-\infty, \infty)$ )

$$a_2 (z_\alpha^\pm)''(t) + a_1 (z_\alpha^\pm)'(t) + a_0 z_\alpha^\pm(t) = y_\alpha^\pm(t). \quad (2)$$

Нечеткозначную функцию  $\tilde{z}(t)$ ,  $\alpha$ -индексы которой удовлетворяют равенствам (2), будем называть ультраслабым решением уравнения (1).

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (1) удовлетворяют условиям  $a_i > 0 (i = 0, 1, 2)$  и  $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ . Пусть входной сигнал  $\tilde{y}(t)$  является непрерывной ограниченной при  $t \in (-\infty, \infty)$  нечеткозначной функцией. Тогда для нечеткого ультраслабого сигнала  $\tilde{z}(t)$  на выходе динамической системы (1) справедливо представление



$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(t-s)\tilde{y}(s)ds. \quad (3)$$

Здесь  $G_2(t)$  – функция Грина задачи об ограниченных решениях для скалярного дифференциального уравнения  $a_2x'' + a_1x' + a_0x = f(t)$  с непрерывной и ограниченной на всей числовой оси вещественнозначной функцией  $f(t)$ , имеющая вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественные, различные и отрицательные корни характеристического уравнения  $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ).

Отметим, что (3) является слабым решением, а именно решением указанного ниже нечеткого интегрального уравнения.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех  $t \geq 0$  нечеткозначная функция (3) является решением следующего нечеткого интегрального уравнения

$$\begin{aligned} a_2\tilde{z}(t) + a_1 \int_0^t \tilde{z}(s)ds + a_0 \int_0^t \int_0^\tau \tilde{z}(s)dsd\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau \tilde{y}(s)dsd\tau + a_2\tilde{z}(0) + t(a_2\tilde{w}(0) + a_1\tilde{z}(0)). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь нечеткие числа  $\tilde{z}(0)$  и  $\tilde{w}(0)$  определяются равенствами

$$\tilde{z}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}) \tilde{y}(s) ds, \quad (5)$$

$$\tilde{w}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}) \tilde{y}(s) ds, \quad (6)$$

а  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  – корни характеристического уравнения  $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ .

Выясним, когда ультраслабое решение (3) нечеткого дифференциального уравнения (1) является дифференцируемой по Сеиккала нечеткозначной функцией.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно нечеткозначная функция  $\tilde{y}(t)$  непрерывно дифференцируема по Сеиккала при  $\forall t \in (-\infty, \infty)$ . Тогда ультраслабое ограниченное решение  $\tilde{z}(t)$  нечеткого дифференциального уравнения (1), определяемое формулой (3), дифференцируемо по Сеиккала при  $\forall t \in (-\infty, \infty)$  и удовлетворяет при  $\forall t \in (0, \infty)$  следующему нечеткому интегродифференциальному уравнению

$$a_2(\tilde{z})'(t) + a_1\tilde{z}(t) + a_0 \int_0^t \tilde{z}(s)ds = \int_0^t \tilde{y}(s)ds + a_2\tilde{w}(0) + a_1\tilde{z}(0),$$

где  $\tilde{z}(0)$  и  $\tilde{w}(0)$  определены формулами (5), (6).

Такое решение естественно назвать сильно-слабым решением уравнения (1).

Отметим, что первоначально уравнение последовательного колебательного контура записывается именно как интегродифференциальное уравнение [8]. Уравнение (1) получается последующим дифференцированием.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и дополнительно правая часть уравнения (1)  $\tilde{y}(s)$  дважды непрерывно дифференцируема по Сеиккала. Тогда ультраслабое ограниченное решение  $\tilde{z}(t)$ , определяемое формулой (3), также дважды дифференцируемо по Сеиккала и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (1).

Таким образом, в условиях теоремы 4 формула (3) дает сильное ограниченное решение уравнения (1).

### Литература

1. Puri M.L. Differential of fuzzy functions / M. L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — V.91. — P. 552-558.
2. Kaleva O. Fuzzy differential equations / O. Kaleva // Fuzzy sets and systems — 1987. — V.24. — № 3. — P. 301-317.
3. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem / S. Seikkala // Fuzzy Sets and Systems — 1987. — V.24 — № 3. — P. 319-330.
4. Khastan A. New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability /

A. Khastan, F Bahrami, K. Ivaz // Boundary Value Problems — 2009. — № 7. — P. 1-13.

5. Allahviranloo T. A new method for solving fuzzy linear differential equations / T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, S. Salahshour, A. Hakimzadeh // Soft Computing — 2011. — V. 92. — P. 181-197.

6. Ahmad L. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform / L. Ahmad, M. Farooq, S. Abdullah // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics — 2014. — P. 1-20.

7. Хацкевич В.Л. Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения / В.Л. Хацкевич // Автоматика и телемеханика — 2023. — .No 8. — С. 43-60.

8. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков // М.: Высшая школа — 1988. — 448 с.

## СВОЙСТВО СОЛНЕЧНОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННО СЛАБО КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ<sup>1</sup>

**И.Г. Царьков** (Москва, МГУ, Московский центр  
фундаментальной и прикладной математики)

*tsar@mech.math.msu.su*

В работе изучается более слабая непрерывность  $\varepsilon$ -выборки по сравнению с обычной непрерывностью (из сильной топологии в сильную). Прежде всего обращается внимание на свойства пространства и множества в нем, гарантирующие при наличии такой выборки свойства солнечности множества.

Через  $(KK)$  обозначим класс всех действительных банаховых пространств, обладающих свойством Кадеца-Кли, то есть таких пространств, что из условий: последовательность  $\{x_n\} \subset X$  слабо сходится к  $x \in X$  и  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  ( $n \rightarrow \infty$ ) вытекает, что существует подпоследовательность, сильно сходящаяся к точке  $x$ . Через  $(KKs)$  обозначим класс всех действительных банаховых пространств, для которых из всякой направленности  $(x_\alpha) \subset X$ , слабо сходящейся к некоторой точке  $x \in X$  и такой, что  $\|x_\alpha\| \rightarrow \|x\|$ , можно выделить сходящуюся в сильной топологии к  $x$  подпоследовательность. Отметим, что  $(KK) \cap (Rf) = (KKs) \cap (Rf)$ , где  $(Rf)$  — класс всех рефлексивных пространств.

Отметим, что этим двум классам пространств  $(KK)$  и  $(KKs)$ , в частности, принадлежат пространства суммируемых последователь-

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00204).

© Царьков И.Г., 2024

ностей  $\ell^1$ , а также пространства  $(CLUR)$  и пространства Ефимова-Стечкина.

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольного множества  $M$  в некотором линейном нормированном пространстве  $X$  через  $\varrho(y, M)$  обозначим расстояние от точки  $y \in M$  до множества  $M$ , т.е. величину

$$\inf_{z \in M} \|z - y\|.$$

Через  $P_M x = P_M(x)$  обозначим множество всех ближайших точек из  $M$  для  $x \in X$ , т.е. множество

$$\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}.$$

Отображение  $P_M$  называют метрической проекцией на множество  $M$ . Через

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\} \text{ и } S(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$$

обозначим соответственно шар и сферу с центром  $x$  радиуса  $r \geq 0$ . В случае  $x = 0$  и  $r = 1$  будем вместо указанных обозначений писать  $B$  и  $S$  – соответственно единичные шар и сферу. Через  $X^*$  обозначим сопряженное к  $X$  пространство и через  $S^*$  – единичную сферу пространства  $X^*$ . Для произвольных  $x \in X$  и  $\delta > 0$  рассмотрим также метрическую  $\delta$ -проекцию  $P_M^\delta x$ , представляющую собой множество

$$\{y \in M \mid \|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta).$$

В этой работе мы будем изучать множества, для которых для всех  $\varepsilon > 0$  существуют аддитивные  $\varepsilon$ -выборки, являющиеся непрерывными отображениями из сильной топологии пространства  $X$  в слабую топологию этого же пространства, короче говоря, являющиеся  $pw$ -непрерывными.

**Определение 1.** Пусть  $\varepsilon \geq 0$ ,  $M \subset X$ . Отображение  $\varphi : X \rightarrow M$  называется аддитивной  $\varepsilon$ -выборкой, если для всех  $x \in X$  выполняется неравенство

$$\|\varphi(x) - x\| \leq \varrho(x, M) + \varepsilon$$

**Определение 2.** Пусть  $\emptyset \neq M \subset X$ . Точка  $x \in X \setminus M$  называется точкой солнечности, если существует точка  $y \in P_M x \neq \emptyset$  (называемая точкой светимости) такая, что  $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$

для всех  $\lambda \geq 0$  – это геометрически означает, что из точки  $y$  исходит луч (солнечный луч), проходящий через  $x$ , для каждой точки которого  $y$  является ближайшей из  $M$ .

Точка  $x \in X \setminus M$  называется точкой строгой солнечности, если  $P_M x \neq \emptyset$  и каждая точка  $y \in P_M x$  является точкой светимости для  $x$ . Если все точки из  $K \subset X \setminus M$  являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество  $M$  называют солнцем (строгим солнцем) относительно множества  $K$ . В случае, когда  $K = X \setminus M$ , говорят, что  $M$  – солнце (строгое солнце). Чебышевским множеством называется такое множество, для которого каждая точка пространства  $X$  имеет единственную ближайшую в этом множестве. Чебышевским солнцем называется чебышевское множество, являющееся строгим солнцем.

**Теорема 1.** Пусть  $K$  – ограничено слабо компактное, непустое подмножество в  $X$  такое, что для всех  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -выборка, являющаяся пв-непрерывным отображением на  $K$ . Тогда, если  $X \in (KKs)$  (в частности  $X \in (KK) \cap (Rf)$ ), то множество  $K$  является солнцем в пространстве  $X$ .

**Определение 2.** Пусть  $M$  – непустое подмножество линейного нормированного пространства  $(X, \|\cdot\|)$ . Точку  $x \in X$  называют точкой аппроксимативной компактности, если для любой последовательности  $\{y_n\} \subset M : \|x - y_n\| \rightarrow \varrho(x, M)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) существует подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}$ , сходящаяся к некоторой точке  $y_0 \in M$ . Обозначение:  $x \in AC(M)$ . Если  $AC(M) = X$ , множество  $M$  называется аппроксимативно компактным.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – банахово пространство, и для аппроксимативно компактного множества  $M \subset X$  и для произвольных числа  $\delta > 0$  и непустого компакта  $K \subset X$  существует пв-непрерывная  $\delta$ -выборка  $\chi : K \rightarrow M$ . Тогда существует непрерывная (из сильной в сильную топологию)  $\varepsilon$ -выборка  $g : X \rightarrow M$  для всех  $\varepsilon > 0$ .

# ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ<sup>1</sup>

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)

tsekan@grsu.by

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с запаздыванием вида:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t) + B(t, \mu) u(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ z_0(\theta) &\equiv 0, \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0), \quad z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$ ,  $h = \text{const} > 0$ ,  $p \triangleq \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования,  $e^{-ph}$  — оператор чистого запаздывания:  $e^{-ph} z(t) = z(t - h)$ ,  $z(t) = \{x(t), y(t)\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) \triangleq \mathbf{A}_\mu = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\} \mathbf{A}(t, e^{-ph})$ ,  $B(t, \mu) \triangleq B_\mu = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\} B(t)$ ,  $\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}$ ,  $B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$ ,  $A_{ij}(\cdot) \in C^1[T; \mathbb{R}^{n_1 \times n_j}]$ ,  $i = 1, 2, j = 0, 1$ ,  $A_s(\cdot) \in C^1[T; \mathbb{R}^{n_2 \times n_{k-2}}]$ ,  $s = 3, 4$ ,  $B_i(\cdot) \in L^2[T; \mathbb{R}^{n_i \times r}]$ ,  $i = 1, 2$ .

**Предположения.**  $\forall t \in T$  1)  $\text{Re } \lambda < -\gamma < 0, \gamma = \text{const} > 0$ ,  $\forall \lambda: \det(\lambda E_{n_2} - A_4(t)) = 0$ ; 2)  $\|A_4(t)\| \leq c$ ; 3)  $\|\dot{A}_4(t)\| \leq \beta$ .

Продолжим  $A_s(t)$ ,  $s = 3, 4$ , на  $(-\infty, t_1]$  так, что они ограничены, непрерывно дифференцируемы и  $A_4(t)$  удовлетворяет предположению 1) для  $\forall t \in (-\infty, t_1]$ .

Определим множество  $\mathcal{M}^{v \times s}(\mu, e^{-ph})$  нестационарных операторов  $\mathbf{M}(t, \mu, e^{-ph})$  ( $t \in T$ ) из  $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^s)$  в  $\mathbb{R}^v$ , с ограниченными на  $(-\infty, t_1]$  элементами из кольца  $C((-\infty, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, z]]$ ,  $z = e^{-ph}$ . Для произвольных  $k, s, v \in \mathbb{Z}_+$  введем класс  $\mathcal{M}_{kT}^{v \times s}(\mu, e^{-ph})$  операторов  $\mathbf{M}(t, \mu, e^{-ph})$  ( $t \in T$ ) из  $PC([t - kh, t]; \mathbb{R}^s)$  в  $\mathbb{R}^v$ , с ограниченными на  $[t - kh, t_1]$  элементами из кольца  $C([t - kh, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, z]]$ ,  $z = e^{-ph}$ :  $\mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in \mathcal{M}_{1T}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ ,  $B(t) \in \mathcal{M}_{1T}^{n \times r}(\mu, e^{-ph})$ . Множества операторов вида  $\mathbf{A}_\mu$ ,  $B_\mu$  обозначим  $\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ ,  $\mathcal{B}_T^{n \times r}(\mu)$ . Согласно включению  $\mathcal{M}_{1T}^{n \times n}(\mu, e^{-ph}) \subset \mathcal{M}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$  определим

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф22-050  
© Цехан О.Б., 2024

множества  $\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ ,  $\mathcal{B}^{n \times r}(\mu, e^{-ph})$  как расширение множеств  $\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ ,  $\mathcal{B}_T^{n \times r}(\mu)$ .

Множество  $\Sigma_\mu$  систем (1) с  $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ ,  $B_\mu \in \mathcal{B}_T^{n \times r}(\mu)$  с пространством состояний  $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$  погрузим во множество  $\tilde{\Sigma}_\mu$  систем вида (1) с пространством состояний  $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$  и с оператором вида  $\mathbf{A}_\mu$ , в котором матричные блоки  $A_{i0}$ ,  $A_{i1}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $A_j$ ,  $j = \overline{3, 4}$ , являются функциональными матрицами с элементами из кольца  $C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^n)[[\mu, z]]$ ,  $z = e^{-ph}$ :  $\Sigma_\mu \subset \tilde{\Sigma}_\mu$ .

Рассмотрим в  $\mathcal{M}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$  группу  $\mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$  непрерывно дифференцируемых на  $(-\infty, t_1]$  невырожденных при каждом  $t \in (-\infty, t_1]$   $n \times n$ -матричных операторов  $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$ , аналогично в  $\mathcal{M}_{kT}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$  — группу  $\mathcal{G}_{kT}^n(\mu, e^{-ph})$ :  $\mathcal{G}_{kT}^n(\mu, e^{-ph}) \subset \mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$ . С каждым оператором  $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$  связывается определенное на пространстве  $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$  нелокальное (по времени) преобразование переменных состояния системы из  $\tilde{\Sigma}_\mu$ , которое порождает обратимый оператор преобразования системы  $\tilde{\Sigma}_\mu$ , действующий на пару  $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu) \in (\mathcal{A}^{n \times n}, \mathcal{B}^{n \times r})$  по правилу:

$$\mathbf{G} * (\mathbf{A}_\mu, B_\mu) = \left( \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}}, \mathbf{G}^{-1} B_\mu \right) \triangleq (\mathbf{A}_{\xi\eta}, \mathbf{B}_{\xi\eta}).$$

**Утверждение.** Пусть элементы  $A_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{0, 1}$ ,  $A_s(t)$ ,  $s = \overline{3, 4}$ , определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на  $(-\infty, t_1]$ ; выполнены предположения 1)-3). Тогда для любой системы  $\{\mathbf{A}_\mu, B_\mu\} \in \tilde{\Sigma}_\mu$  для всех достаточно малых  $\mu \in (0, \mu^0]$  1) в группе  $\mathcal{G}^n$  есть преобразование  $\mathbf{K}$ , приводящее ее к системе с блочно-диагональной матрицей

$$\mathbf{A}_{\xi\eta} = \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}), \mu^{-1} \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \},$$

где  $\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{M}^{n_1 \times n_1}$ ,  $\mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{M}^{n_2 \times n_2}$  представимы в виде асимптотических рядов по параметру  $\mu$ ; 2) в группе невырожденных преобразований  $\mathcal{G}_{kT}^n$  есть преобразование  $\mathbf{K}^{[k]}$ , являющееся аппроксимацией преобразования  $\mathbf{K}$  и приводящее  $\{\mathbf{A}_\mu, B_\mu\}$  к системе, блочная матрица которой имеет диагональные блоки, являющиеся  $O(\mu)$ -возмущением блоков  $\mathbf{A}_\xi$ ,  $\mathbf{A}_\eta$  из матрицы  $\mathbf{A}_{\xi\eta}$  расщепленной системы и внедиагональные матричные блоки, элементы которых имеют порядок малости не менее  $O(\mu^k)$ .

# КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Е.С. Чеб (Минск, БГУ)

cheb@bsu.by

Рассматривается корректно поставленная смешанная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, в случае наличия у него одной кратной характеристики. Получены условия существования единственного классического решения, непрерывно зависящего от правой части, начальных и граничных данных.

Рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 4a \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} + 6a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + 4a^3 \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t), (x, t) \in Q_n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

Пусть коэффициент  $a > 0$ . Уравнение (1) имеет одну характеристику  $x - at$  кратности четыре.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t \in [0, t_{n+1}], \quad \left. \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t \in [t_1, t_{n+1}], \quad s = 0, 1, \quad (3)$$

Здесь  $Q_n = \cup_{k=0}^n G_k$ ,  $G_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq at, x \in [0, l], t \in [0, t_1]\}$ ,  $G_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : (k-1)l \leq at - x \leq kl, x \in [0, l], t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]\}$ ,  $t_k = kl/a$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Выбор таких граничных условий гарантирует корректность задачи (1)–(4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

**Теорема.** *Задача (1)–(4) на  $Q_n$  имеет единственное классическое решение  $u \in C^4(Q_n)$  в треугольнике  $G_0$  вида*



$$\begin{aligned}
u_0(t, x) &= \varphi_0(x + at) + t[\varphi_1(x + at) - a\varphi'_0(x + at)] + \\
&+ \frac{1}{2}t^2[\varphi_2(x + at) - 2a\varphi'_1(x + at) + a^2\varphi''_0(x + at)] + \\
&+ \frac{1}{6}t^3[\varphi_3(x + at) - 3a\varphi'_2(x + at) + 3a^2\varphi''_1(x + at) - a^3\varphi^{(3)}_0(x + at)], \\
&+ F_0(x, t), F_0(x, t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^3}{3!} f(x - at + a\tau, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

при выполнении условий гладкости  $\varphi_j \in C^{(7-j)}[0, l]$ ,  $j \in \overline{0, 3}$ ,  $f \in C(G_0)$ ,  $(F_0)_x, (F_0)_t \in C^3(G_0)$ , и на  $G_k$  вида

$$\begin{aligned}
u_k(t, x) &= \frac{(x - l)^2(l + 2x)}{l^3} \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{x(x - l)^2}{l^2} \mu_2\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\
&+ \frac{x^2(3l - 2x)}{l^3} \nu_1\left(t - \frac{x - l}{a}\right) + \frac{x^2(x - l)}{l^2} \nu_2\left(t - \frac{x - l}{a}\right) + \\
&+ \frac{x(x - l)^2}{al^2} \mu'_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{x^2(l - x)}{al^2} \nu'_1\left(t - \frac{x - l}{a}\right) + \\
&+ M_k(x, t) + F_k(x, t), F_k(x, t) = \int_{t_{k-1}}^t \frac{(t - \tau)^3}{3!} f(|x - at + a\tau|, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

при выполнении условий гладкости функций  $\mu_i \in C^{(6-i)}[0, t_{k+1}]$ ,  $\nu_i \in C^{(6-i)}[t_1, t_{n+1}]$ ,  $i = 1, 2$ , основных условий согласования  $\varphi_j(0) = \mu_1^{(3-j)}(0)$ ,  $\varphi'_j(0) = \mu_2^{(3-j)}(0)$ ,  $j = \overline{0, 3}$ ,  $a^4\mu_1^{(4)} = f(0, 0) - \varphi_0^{(4)}(0) - 4a^3\varphi_1^{(3)}(0) - 6a^2\varphi_2^{(2)}(0) - 4a\varphi_3'(0)$  и дополнительных условий согласования.

Слагаемое  $M_k(x, t)$  включает слагаемые вида  $\int_{t_{k-1}}^t \frac{(t - \tau)^3}{3!} f(|x - at + a\tau|, \tau) d\tau$  при  $x = 0, l$ , его производные по  $t$  и производные по  $x$  при  $x = 0, l$ , преобразованные как в [2].

## Литература

1. Чеб, Е.С. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой / Е.С. Чеб, Е.С. Симинская // Вестник БелГУ. Прикладная математика&Физика. — 2020. — Т. 1, № 1. — С. 11–18.

2. Ломовцев Ф.Е. Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными условиями на концах / Ф.Е. Ломовцев // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2019. — С. 184–185.

# ИЕРАРХИЧЕСКИЕ РЕШЕТОЧНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ

Д.А. Черкашин, Ю.П. Вирченко (Белгород, БГТУ)

*virch@bsu.edu.ru*

Численно исследуется задача теории перколяции бернуллиевского поля на иерархических графах  $\Gamma^{(n)}$  порядка  $n \in \mathbb{N}_+$ , порождаемых квадратной решеткой. Для произвольного бесконечного связного графа  $\Gamma = \langle V_\Gamma, \varphi \rangle$  с множеством вершин  $V_\Gamma$  и бинарным симметричным *отношением смежности*  $\varphi$  на  $V_\Gamma$  такая задача ставится следующим образом [1]. На множестве  $V_\Gamma$  графа определяется случайное однородное бернуллиевское поле  $\tilde{\rho} \in \{0, 1\}^{V_\Gamma}$  так, что  $E\tilde{\rho}(x) = c$ ,  $x \in V_\Gamma$ ,  $0 < c < 1$ ,  $c$  — вероятность заполнения фиксированной вершины. Тогда на каждой реализации  $\tilde{\rho}$  определен случайный подграф  $\Gamma_{\tilde{\rho}}$  графа  $\Gamma$  с множеством вершин  $V_{\tilde{\rho}} = \{x \in V_\Gamma : \tilde{\rho}(x) = 1\}$  и отношением смежности  $\varphi_{\tilde{\rho}}$ , которое является сужением отношения смежности  $\varphi$ . Требуется вычислить вероятность  $P(c)$  существования бесконечного несамопересекающегося пути  $\gamma$  с начальной фиксированной вершиной  $\mathbf{0} \in V_\Gamma$ .

Введем для любого множества  $Z$  вершин из  $V_\Gamma$  множество  $\partial_+ Z = \{y \in V_\Gamma \setminus Z : \exists(x \in Z : \varphi(y, x))\}$  его внешних граничных вершин. Точно также определим множество  $\partial_- Z = \{y \in Z : \exists(x \notin Z : \varphi(y, x))\}$  множество внутренних граничных вершин.

Пусть графы  $\Upsilon$  и  $\Upsilon'$  являются подграфами графа  $\Gamma$ , то есть определяются одним и тем же отношением смежности  $\varphi$  на  $\Gamma$ . Пусть множества  $V_{Upsilonpsilon}$  и  $V_{\Upsilon'}$  таковы, что  $V_\Upsilon \cap V_{\Upsilon'} = \{x\}$ . Граф  $\Gamma(x)$  с множеством вершин  $V_\Upsilon \cup V_{\Upsilon'}$  с отношением смежности  $\varphi$  назовем склейкой графов  $\Upsilon$  и  $\Upsilon'$  по вершине  $x$ . Операцию склеивания обозначим посредством знака  $\vee$  и запишем  $\Gamma(x) = \Upsilon \vee \Upsilon'$ . Определение операции склеивания обобщается на произвольную совокупность графов  $\Upsilon$  и  $\Upsilon_j$ ,  $j = 1 \div s$ , которые являются подграфами одного и того графа с отношением смежности  $\varphi$  и соответствующие им множества вершин таковы, что множества  $V_{\Upsilon_j}$ ,  $j = 1 \div s$  попарно не пересекаются и  $V_\Upsilon \cap V_{\Upsilon_j} = \{x_j\}$ .

Склейкой такой совокупности графов по совокупности вершин  $\Sigma = \{x_j; j = 1 \div s\}$  назовем граф  $\Gamma(\Sigma)$  с отношением смежности  $\varphi$  и

множеством вершин  $V_\Upsilon \cup \left( \bigcup_{j=1}^s V_{\Upsilon_j} \right)$ . Этот граф обозначим как

$$\Gamma(\Sigma) = \bigcup_{z \in \Sigma} \Upsilon \vee \Upsilon_z, \quad \Upsilon_{x_j} \equiv \Upsilon_j, \quad j = 1 \div s.$$

Положим, что  $\Gamma$  является квадратной решеткой, то есть  $V_\Gamma = \mathbb{Z}^2$  и отношение смежности  $\varphi$  определяется формулой  $\varphi(x, y) \Leftrightarrow y = x \pm \mathbf{e}_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , где  $\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{e}_2 = \langle 0, 1 \rangle$ . Иерархический граф  $\Gamma^{(n)}$  порядка  $n$ , порождаемый квадратной решеткой, определяется следующим образом. Обозначим посредством  $Z_n \subset \mathbb{Z}^2$  множество вершин

$$\left\{ x_1 + x_2 : x_j \in \left\{ \alpha_l l \mathbf{e}_j; \alpha_l \in \{\pm 1\}, l = 0 \div n \right\}, j \in \{1, 2\} \right\}.$$

Далее, определим для каждого фиксированного  $n \in \mathbb{N}_+$  множество  $Z^{(n)} = Z_n \cup \partial_+ Z_n$ . Очевидно, что  $Z^{(n)} \rightarrow \mathbb{Z}^2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что число вершин в  $Z_n$  равно  $(2n+1)^2$ , а число вершин в  $\partial_+ Z_n$  равно  $4(2n+1)$  так, что число вершин в  $Z^{(n)} = (2n+1)(2n+5)$  равно  $n \in \mathbb{N}_+$ .

Введем бесконечную расширяющуюся последовательность  $\langle \Gamma_m^{(n)}; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$  графов, где  $V_{\Gamma_0^{(n)}} = Z^{(n)}$ . Номер  $m$  будем называть поколением иерархической модели. Графы  $\Gamma_m^{(n)}$  определим рекуррентно по  $m \in \mathbb{N}_+$ . Для каждого значения  $m+1$  граф  $\Gamma_{m+1}^{(n)}$  определяется склеиванием графа  $\Gamma_m^{(n)}$  с соответствующим этому уровню совокупностью графов  $\Upsilon_m^{(n)}(u)$ ,  $u \in \partial_+ \Gamma_m^{(n)}$ ,

$$\Gamma_{m+1}^{(n)} = \left( \bigcup_{u \in \Sigma} \Gamma_m^{(n)} \vee \Upsilon_m^{(n)}(u) \right),$$

каждый из которых построен на множестве  $V_{\Upsilon_m^{(n)}(u)} = Z^{(n)}(u)$  вершин так, что все эти множества попарно не пересекаются и каждый из них изоморфен, с точки зрения отношения связности, графу  $\Gamma_0^{(n)}$ , причем такой изоморфной связи вершина  $u$  переходит в вершину  $\mathbf{0}$  на  $\mathbb{Z}^2$ . Таким образом, совокупность всех графов  $\Upsilon_m^{(n)}(u)$ ,  $u \in \partial_+ \Gamma_m^{(n)}$  собой набор из  $[4(2n+1)]^m$  экземпляров одного и того же графа  $\Gamma_0^{(n)}$ .

### Литература

1. Кестен Х. Теория просачивания (перколяции) для математиков / Х. Кестен. — М. : Мир, 1986. — 392 с.

# ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И МНОГОЧЛЕНАМИ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ<sup>1</sup>

Е.Е. Читоркин (Самара, Самарский университет; Саратов, СГУ)  
*chitorkin.ee@ssau.ru*

Работа посвящена обратной задаче Штурма-Лиувилля вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$y^{[1]}(0) = 0, \quad r_1(\lambda)y^{[1]}(\pi) + r_2(\lambda)y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где  $q(x)$  — комплекснозначный сингулярный потенциал из класса  $W_2^{-1}(0, \pi)$ ,  $\lambda$  — спектральный параметр,  $r_1(\lambda)$  и  $r_2(\lambda)$  — взаимно простые многочлены,  $y^{[1]} := y' - \sigma(x)y$  — так называемая квази-производная,  $\sigma(x)$  — первообразная  $q(x)$ , то есть  $q = \sigma'$  в смысле обобщенных функций,  $\sigma \in L_2(0, \pi)$ .

Пусть степени многочленов равны  $p \geq 0$ , а  $\{c_i\}_{i=0}^p$  и  $\{d_i\}_{i=0}^p$  — коэффициенты многочленов  $r_1(\lambda)$  и  $r_2(\lambda)$  при  $\lambda^i$ , соответственно. Будем считать, что  $c_p = 1$ , а старшие коэффициенты многочлена  $r_2(\lambda)$  могут быть нулевыми. Обозначим класс таких пар многочленов как  $\mathcal{R}_p$  и будем писать  $(r_1, r_2) \in \mathcal{R}_p$  в случае принадлежности пары многочленов данному классу.

В [1] доказано, что спектр краевой задачи  $L$  — счетное множество собственных значений, которые могут быть занумерованы как  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  согласно их асимптотике. Предположим, что все собственные значения просты. Тогда функция Вейля  $M(\lambda)$ , определенная в [2], имеет простые полюса  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , а весовые числа определяются как  $\alpha_n = \text{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda)$ ,  $n \geq 1$ . Будем называть числа  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$  спектральными данными задачи  $L$  и рассмотрим следующую обратную задачу.

**Обратная задача 1:** По спектральным данные  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$  найти  $\sigma(x)$ ,  $r_1(\lambda)$  и  $r_2(\lambda)$ .

Наряду с  $L$  рассмотрим краевую задачу  $\tilde{L} = L(\tilde{\sigma}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$  того же вида, но с другими коэффициентами.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект 21-71-10001, <https://rscf.ru/project/21-71-10001/>).

© Читоркин Е.Е., 2024

**Теорема 1.** Пусть  $\tilde{L} = L(\tilde{\sigma}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$  — фиксированная краевая задача вида (1) – (2) с  $\tilde{\sigma} \in L_2(0, \pi)$ ,  $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in \mathcal{R}_p$  и простыми собственными значениями  $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$ . Тогда существует  $\delta_0 > 0$ , зависящее от  $\tilde{L}$ , такое, что для любых комплексных чисел  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ , удовлетворяющих условию

$$\delta := \left( \sum_{n=1}^{\infty} (|\tilde{\rho}_n - \rho_n| + |\tilde{\alpha}_n - \alpha_n|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta_0,$$

где  $\rho_n := \sqrt{\lambda_n}$ ,  $\tilde{\rho}_n := \sqrt{\tilde{\lambda}_n}$ , существует комплекснозначная функция  $\sigma(x) \in L_2(0, \pi)$  и многочлены  $(r_1, r_2) \in \mathcal{R}_p$ , являющиеся решением обратной задачи 1 с данными  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ . Более того,

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{L_2} \leq C\delta, \quad |c_i - \tilde{c}_i| \leq C\delta, \quad |d_i - \tilde{d}_i| \leq C\delta, \quad i = \overline{0, p},$$

где константа  $C$  зависит только от  $\tilde{L}$ .

Доказательство теоремы 1 приведено в [2] основано на конструктивном решении обратной задачи Штурма-Лиувилля с многочленами в краевых условиях с ненулевой модельной задачей, методика получения которого описана в [3]. В общем случае  $L$  может иметь конечное число кратных собственных значений. Тогда спектральные данные определяются иначе. Локальная разрешимость и устойчивость для этого случая исследованы в [4].

### Литература

1. Chitorkin E.E. Solving the inverse Sturm-Liouville problem with singular potential and with polynomials in the boundary conditions / E.E. Chitorkin, N.P. Bondarenko // Anal.Math.Phys. — 2023. — Vol. 13. — Article number: 79.
2. Chitorkin E.E. Local solvability and stability for the inverse Sturm-Liouville problem with polynomials in the boundary conditions / E.E. Chitorkin, N.P. Bondarenko // Arxiv.org. — 2023. — <https://arxiv.org/abs/2309.01184>.
3. Bondarenko N.P. Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with a singular potential by Yurko's method / N.P. Bondarenko // Tamkang J. Math. — 2021. — Vol. 52, Issue 1. — P.125–154.
4. Chitorkin E.E. Inverse Sturm-Liouville problem with polynomials in the boundary condition and multiple eigenvalues / E.E. Chitorkin, N.P. Bondarenko // Arxiv.org. — 2024. — <https://arxiv.org/abs/2402.06215>.

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ТОКА И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОЙ ЛИНИЕЙ ТОКА И ТРЕМЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ

Е.Г. Чуб, Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)

*elenachub111@gmail.com*

При рассмотрении плоских задач фильтрации, простое и в то же время достаточно точное для инженерной практики решение дает возможность получить метод мажорантных областей [1]. Этот метод дает возможность ответить на вопрос, как изменятся основные характеристики потока при изменении границы области.

Сущность метода мажорантных областей заключается в том, что путем деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых задачу фильтрации можно решить точно. Полученные фильтрационные характеристики для этих областей заведомо должны давать верхние и нижние оценки искомых. Если вспомогательные оценки подобраны удачно, то решение получается достаточно точным, а его погрешность находится строго обосновано.

В настоящей работе приведена теорема об изменении значений функции тока и потенциальной функции, когда область фильтрации ограничена одной линией тока и тремя потенциальными линиями.

Введем предварительно следующие обозначения:  $G$  - исходная область, ограниченная кривой  $L$ ;  $G_W$  - годограф комплексного потенциала исходной области;  $\tilde{G}$  - область, полученная из исходной области вариацией ее границы;  $\tilde{L}$  - граница области  $\tilde{G}$ ;  $\tilde{G}_{W_1}$  - образ  $G_W$  в области  $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ ;  $L'$  и  $\tilde{L}'$  - совокупность потенциальных линий, входящих в состав  $L$  и  $\tilde{L}$  соответственно. Вариацией комплексного потенциала называют функцию  $\tilde{w} = \tilde{w}(z) = W_1 - W = \sigma + i\tau$ , которая удовлетворяет в области  $\tilde{G}$  той же системе дифференциальных уравнений, что и комплексный потенциал. Следовательно, по теореме о сохранении области образом  $\tilde{G}$  в плоскости  $\tilde{w} = \sigma + i\tau$  будет некоторая область  $\Omega$  - годограф вариации комплексного потенциала.

Пусть область фильтрации ограничена линией тока  $BC$  и тремя потенциальными линиями  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$ . Краевые условия для комплексного потенциала  $W(z)$  имеют вид

$$\varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -kH_0, \varphi|_{AB} = -kH, \psi|_{BC} = 0.$$

Будем называть линией промежуточного напора линию границы области фильтрации, на которых приведенный напор постоянен и принимает, промежуточное значение.

На основании выше приведенного, доказывается следующая теорема.

**Теорема .** *При вдавливании линии наименьшего напора для случая  $H > H_0 > 0$  максимальное значение функции тока уменьшется на линии промежуточного напора, т.е. на линии  $\psi|_{AD} = -kH_0$ .*

Доказательство базируется на построении годографа вариации комплексного потенциала.

Заметим, что аналогичные теоремы об изменении напоров, расходов и скоростей были приведены в работах [2,3,4].

### Литература

1. Клодина Т.В. Решение задачи фильтрации / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Сборник научных трудов «Транспорт: наука, образование, производство». Том 4: Технические и естественные науки. — Ростов-на-Дону, — 2016. — С.269-271.

2. Клодина Т.В. Теорема об оценке напоров для одного вида краевых условий области / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Инновационные процессы в научной среде: Сборник статей междунар. научно-практической конф. (7 мая 2014 г., г.Уфа) – Уфа: Аэтерна, — 2014. — С. 29–31.

3. Клодина Т.В. Определение границ расхода жидкости при одном частном случае краевых условий / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна -2020 : материалы междунар. конф. —Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020. — С. 124–125.

4. Клодина Т.В. Теорема об изменении давления при деформации линии тока / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 89–90.

# О СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЕ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ И ВЯЗКОУПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

С.А. Шабров, Ж.И. Бахтина, Т.В. Гридяева,

С.Е. Манучарова (Воронеж, ВГУ)

*shaspoteha@mail.ru, ioanna83@mail.ru, tatianavit99@mail.ru,*

*dmitrii5751@gmail.com*

В работе рассматривается модель малых поперечных колебаний струны, помещенной в вязкоупругую среду с локализованными особенностями:

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \\ - \beta(x, t) \left( u(x, t) - \int_0^t Q(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau \right) - \gamma(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \varphi_0(x), \dot{u}(x, 0) = \varphi_1(x), \quad (2)$$

которые приводят к потере гладкости у решения.

Функция  $\sigma(x)$  является строго возрастающей функцией, у которой множество точек разрыва  $S(\sigma)$  не пусто. В каждой точке  $\xi \in S(\sigma)$  уравнение задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{\Delta \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\Delta \sigma(\xi)}(\xi, t) - \\ - \beta(\xi, t) \left( u(\xi, t) - \int_0^t Q(\xi, t, \tau) u(\xi, \tau) d\tau \right) - \gamma(\xi, t) \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} + F(\xi, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Delta \psi(x) = \psi(x+0) - \psi(x-0)$  — скачок функции  $\psi(x)$  в точке  $x$ .

Решение задачи (1)–(2) мы ищем в классе функций  $u(x, t)$ , непрерывных на квадрате  $[0, l] \times [0, T]$ , каждая из которых при фиксированном  $x$  имеет непрерывные частные производные по переменной  $t$  до второго порядка включительно; при каждом  $t$  функция  $u(x, t)$  абсолютно непрерывна на  $[0, l]$  по переменной  $x$ , производная по пространственной переменной  $\sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[0, l]$ .



Следуя концепции работ [1, 2], нам удобно считать уравнение заданным на специальном расширенном отрезке  $[0, l]$ , которое строится следующим образом: обозначим через  $S_A$  множество всех точек, где  $\sigma(x)$  имеет ненулевые простые скачки, то есть имеют несовпадающие левые и правые пределы. Выбросив  $S_A$  из  $[0, l]$ , заменим каждую точку  $\xi \in S_A$  парой символов  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ . Множество, полученное из  $[0, l]$  заменой точек  $\xi \in S_A$  на соответствующие пары  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ , обозначим через  $[0, l]_{(A)}$ .

Получены достаточные условия корректной разрешимости математической модели (1)–(2).

### Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111 – 154.
2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.

## ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО РАЗНОПОРЯДКОВОГО УРАВНЕНИЯ

**Е.А. Шайна, С.А. Шабров** (Воронеж, ВГУ)

*katerinashaina@mail.ru, shaspoteha@mail.ru*

В работе доказан аналог теоремы сравнения для разнопорядковых однородных уравнений.

Функция  $\mu(x)$ , порождающая на  $[0; \ell]$  меру, предполагается строго возрастающей функцией, непрерывной на концах отрезка  $[0; \ell]$ ; функция  $\sigma(x)$  — также строго возрастающая функция, содержащая все особенности изучаемых уравнений.

Пусть даны два однородных уравнения

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \left( -(p_1 u'''_{xx\mu})'_x + r_1 u''_{xx} \right)'_x - g_1 u \right] + u q_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \left( -(p_2 v'''_{xx\mu})'_x + r_2 v''_{xx} \right)'_x - g_2 v \right] + v q_2 = 0, \quad (2)$$

причем  $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ ,  $r_1(x) \geq r_2(x) \geq 0$ ,  $g_1(x) \geq g_2(x) \geq 0$  и  $q_1(x) \geq q_2(x) \geq 0$  для всех  $x$ , принадлежащих отрезку  $[0; \ell]$ , кроме

того, предполагаются выполненными следующие условия: 1) функции  $p_i(x) > 0$  для всех  $x \in [0; \xi_1]$ , существует конечный предел  $p_i(x)$  при  $x \rightarrow \xi_1 - 0$ ,  $\inf_{[0; \xi_1]} p_i(x) > 0$ ;  $p_i(x) \equiv 0$  на  $[\xi_1; \ell]$ ; 2)  $r_i(x) \geq 0$  для всех  $x \in [0; \ell]$ ;  $\inf_{(\xi_2; \ell]} r_i(x) > 0$ ; 3)  $g_i(x) \geq 0$  для всех  $x \in [0; \ell]$ ;  $\inf_{(\xi_1; \xi_2)} g_i(x) > 0$ ; 4) функции  $x$ ,  $\mu(x)$ ,  $p_i(x)$ ,  $r_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $q_i(x)$ ,  $\Theta(x - \xi_i)$ , ( $i = 1, 2$ ) —  $\sigma$ -абсолютно непрерывны на  $[0; \ell]$ , где  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда, равная 0, если  $x < 0$  и 1, если  $x > 0$ .

Решение уравнений (1) и (2) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на  $[0; \ell]$  функций, первая производная которых  $\sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[\xi_1; \xi_2]$ ,  $u(x)$  — непрерывно дифференцируема на  $[0; \xi_1]$ ,  $g_1 u'_x(x)$  — абсолютно непрерывна на  $[0; \xi_1]$ ,  $u''_{xx}(x)$  —  $\mu$ -абсолютно непрерывна на  $[0; \xi_1]$ ;  $(p_1 u'''_{xx\mu})(x)$  — абсолютно непрерывна на  $[0; \xi_1]$ ;  $-(p_1 u'''_{xx\mu})'_x(x) + r_1 u''_{xx}(x)$  — абсолютно непрерывна на  $[0; \xi_1]$ ;  $-((p_1 u'''_{xx\mu})'_x(x) + r_1 u''_{xx}(x) - g_1 u(x))$  — абсолютно непрерывна на  $[0; \xi_1]$ ;  $u'_x$  — абсолютно непрерывна на  $[\xi_2; \ell]$ ;  $(r_1 u''_{xx})(x)$  — абсолютно непрерывна на  $[\xi_2; \ell]$ ;  $(r_1 u''_{xx})'_x - g_1 u$  —  $\sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[\xi_2; \ell]$ .

Уравнение задано на специальном расширении отрезка  $[0; \ell]$ , которое строится следующим образом.

Пусть  $I = [0; \ell] \setminus S(\sigma)$ , где  $S(\sigma)$  — множество точек разрыва функции  $\sigma(x)$  и  $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$  — метрика на  $I$ . Если  $S(\sigma) \neq \emptyset$ , то метрическое пространство  $(I, \rho)$  — неполное. Обозначим через  $\overline{[0; \ell]}_S$  стандартное пополнение  $(I, \rho)$  до полного метрического пространства. В  $\overline{[0; \ell]}_S$  каждая точка  $\xi \in S(\sigma)$  заменена на пару собственных элементов  $\{\xi - 0; \xi + 0\}$ . Уравнения (1) и (2) заданы на  $\overline{[0; \ell]}_\sigma = \overline{[0; \ell]}_S \cup S(\sigma)$ . Отметим, что для первого уравнения в  $\xi_1$  — точке соединения стержня, помещенного на «двойное» упругое основание и растянутой струны, должны выполняться четыре условия:  $u(\xi_1 - 0) = u(\xi_1 + 0)$ ,  $p_1 u'''_{xx\mu}(\xi_1 - 0) = 0$ ,  $(p_1 u'''_{xx\mu})'_x(\xi_1 - 0) - (r_1 u''_{xx})(\xi_1 - 0) = 0$ ,  $(p_1 u'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi_1 - 0) - (r_1 u''_{xx})'_x(\xi_1 - 0) + g_1 u'_x(\xi_1 - 0) - g_1 u'_x(\xi_1 + 0) + u(\xi_1) q_1(\xi_1) = 0$ ; а в  $\xi_2$  — точке соединения натянутой струны и стержня три условия:  $u(\xi_2 - 0) = u(\xi_2 + 0)$ ,  $r_1 u''_{xx}(\xi_2 + 0) = 0$ ,  $(r_1 u''_{xx})'_x(\xi_2 + 0) + g_1 u'_x(\xi_2 - 0) - g_1 u'_x(\xi_2 + 0) + u(\xi_2) q_1(\xi_2) = 0$ ; в точках  $\xi \in S(\sigma) \cap (0; \xi_1)$  должны выполняться шесть условий:  $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$ ,  $u'_x(\xi - 0) = u'_x(\xi + 0)$ ,  $pu'''_{xx\mu}(\xi - 0) = pu'''_{xx\mu}(\xi + 0) = 0$ ,  $(pu'''_{xx\mu})'_x(\xi - 0) = (pu'''_{xx\mu})'_x(\xi + 0)$ ,  $-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) - \Delta gu'_x(\xi) + u(\xi) q_1(\xi) = 0$ , здесь и далее,  $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + 0) - \varphi(x - 0)$  — полный скачок функции  $\varphi(x)$  в точке  $x$ ; если  $\xi \in S(\sigma) \cap (\xi_1; \xi_2)$ , то два условия:  $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$ ,  $-\Delta(g_1 u'_x)(\xi) + u(\xi) q_1(\xi) = 0$ ; и, на-

конец, если  $\xi \in S(\sigma) \cap (\xi_2; \ell)$ , то четыре условия:  $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$ ,  $r_1 u''_{x\mu}(\xi - 0) = r_1 u''_{x\mu}(\xi + 0) = 0$ ,  $\Delta r_1 (u''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(g_1 u'_x)(\xi) + u(\xi)q_1(\xi) = 0$ . Аналогичные равенства справедливы и для решения  $v(x)$  уравнения (2).

Основной результат работы.

**Теорема 1.** Пусть  $u(x)$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям  $u(x_1) = u(x_2) = 0$ , где  $x_1 < x_2$ , причем если  $x_1 < \xi_1$ , то  $u'_x(x_1) = u''_{xx}(x_1 + 0) = 0$ ; если  $x_1 > \xi_2$ , то  $u'_x(x_1 + 0) = 0$ , аналогично для  $x_2$ : если  $x_2 < \xi_1$ , то  $u'_x(x_2) = u''_{xx}(x_2 - 0) = 0$  и если  $x_2 > \xi_2$ , то  $u'_x(x_2 - 0) = 0$ . Также выполнены условия согласования:  $(p_2 v'''_{xx\mu})'_x \cdot v''_{xx}(x) < 0$  и  $((p_2 v'''_{xx\mu})''_{xx}(x) - (r_2 v''_{xx})) \cdot v'_x(x) > 0$  для всякого  $x \in ([0; \ell] \setminus S(\sigma)) \cap (x_1; \xi_1)$ , если  $x_1 < \xi_1$ , и  $(r_2 v''_{xx})'_x(x) \cdot v'_x(x) < 0$  для всякого  $x \in ([0; \ell]_\sigma \setminus S(\sigma)) \cap (\xi_2; x_2)$ , если  $x_2 > \xi_2$ .

Тогда для любого решения  $v(x)$  уравнения (2) существует точка  $x_0 \in (x_1; x_2)$  такая, что  $v(x_0) = 0$ , если  $x_0 \in (\xi_1; \xi_2)$ ; или  $v'(x_0) = 0$  или  $v''_{xx}(x_0 - 0) \cdot v''_{xx}(x_0 + 0) \leq 0$ , если  $x_0 < \xi_1$ ;  $v(x_0) = 0$ ,  $v'_x(x_0 - 0) \cdot v'_x(x_0 + 0) > 0$ , если  $x_0 > \xi_2$ .

## Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.

## ИНВАРИАНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

**М.В. Шамолин** (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)  
shamolin@rambler.ru

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно [1–3], облегчает их исследование, а иногда позволяет и точно их проинтегрировать. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт

вполне естествен — когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции с существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  нужно знать  $m - 1$  независимый тензорный инвариант (первый интеграл, дифференциальная форма, векторное поле и т.д.). При этом для достижения точной интегрируемости, как правило, приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, вводя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по квазискорости) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные 1-формы классов однородных по части перемен-

ных динамических систем, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. Указывается на связь наличия инвариантных линейных форм и первых интегралов.

### Литература

1. Poincaré H. Calcul des probabilités / Poincaré H. — Gauthier-Villars, Paris. 1912. — 340 p.
2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.
3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1(445). — С. 117–148.
4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях / М.В. Шамолин // Успехи матем. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209–210.
5. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2013. — Т. 449, № 4. — С. 416–419.
6. Шамолин М.В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 514, № 1. — С. 98–106.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ТЕПЛИЦА В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Р.Ф. Шамоян, В.А. Беднаж**

(Саратов, Саратовский государственный университет;  
Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский горный университет)  
*vera.bednazh@mail.ru*

Введем в рассмотрение новые пространства типа ВМОА в единичном диске следующим образом:

$$ВМОА_{s,q}(U) = \left\{ f \in H^s(U) : \|f\|_{ВМОА_{s,q}} = \right.$$

$$= \sup_{z \in U} \left( \int_T \frac{|f(\xi) - f(z)|^s}{|1 - \xi \bar{z}|^q} dm(\xi) (1 - |z|^2) \right)^{1/s}, 0 < q < \infty, 1 \leq s < \infty \Bigg\};$$

$$BMOA_s^p(U) = \left\{ f \in H^s(U) : \|f\|_{BMOA_s^p} = \right.$$

$$\left. \sup_{z \in U} \left( \int_T \frac{|f(\xi) - f(z)|^s}{|1 - \xi \bar{z}|^2} dm(\xi) (1 - |z|^2)^p \right)^{1/s}, 0 < p < \infty, 1 \leq s < \infty \right\}.$$

Цель этой заметки - сформулировать один из новых результатов о действии операторов Теплица  $T_\varphi$  в новых пространствах типа ВМОА в единичном диске.

Пусть далее  $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  - единичный диск на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $T$  - единичный круг на  $\mathbb{C}$ . Пусть также  $I = (0, 1)$  и  $H(U)$  - пространство всех аналитических функций на  $U$ ,  $dm_2$  - нормализованная мера Лебега в  $U$  и  $dm$  - нормализованная мера Лебега на  $T$ .

Пусть далее

$$F_\alpha^{p,q}(U) = \{f \in H(U) : \|f\|_{F_\alpha^{p,q}}^p =$$

$$= \int_T \left( \int_I |D^m f(r\xi)|^q (1-r)^{(m-\alpha)q-1} dr \right)^{\frac{p}{q}} d\xi < \infty \},$$

где  $0 < p, q < \infty$ ,  $m > \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , голоморфное пространство Лизоркина-Трибеля,

$$F_{\alpha,k}^{p,q}(U) = \{f \in H(U) : \|D^k f\|_{F_\alpha^{p,q}} < \infty\}, 0 < p, q, \alpha < \infty, k \in \mathbb{N}.$$

Подчеркнем, что поведение операторов в единичном полидиске существенно отличается от действия операторов  $T_\varphi$  в единичном шаре в  $\mathbb{C}^n$  (см., например, [1]).

Для формулировки основного результата определим некоторые новые функциональные пространства в единичном диске:  $A_{\alpha,m}^s(U) =$

$$= \left\{ f \in H(U) : \|f\|_{A_{\alpha,m}^s}^s = \int_U |(D^m f)(z)|^s (1 - |z|)^{\alpha-1} dm_2(z) < \infty \right\},$$

$m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < s, \alpha < \infty$  - пространство Соболева - Бергмана,

$$H_m^s(U) = \{f \in H(U) : \|D^m f\|_{H^s} < \infty, m \in \mathbb{N}, 0 < s < \infty\} -$$

пространство аналитических функций Харди-Лизоркина в единичном диске  $U$ .

Аналитическое пространство типа Бесова и типа Лизоркина-Трибеля в единичном диске определяется следующим образом:

$$A_s^{p,\tilde{q}} = \left\{ f \in H(U) : \int_I \left( \int_T |D^k f(r\xi)|^p d\xi \right)^{\tilde{q}/p} (1-r)^{\tilde{q}(k-s)-1} dr < \infty \right\},$$

$k > s, 0 < p, \tilde{q} < \infty, s \in \mathbb{R}; F_s^{p,\tilde{q}}$  - пространства, определенные аналогично пространствам  $F_{\alpha,k}^{p,q}$ , изменением порядка интегрирования.

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi \in H(U)$ ,  $\max(p, \tilde{q}) \leq \tilde{s} < \infty; p = \frac{\tilde{s}}{2}, 0 < \tilde{s} < 1; 2 - \tilde{s} \leq q < 1 + \tilde{s}$ . Тогда  $T_{\tilde{\varphi}}$  ограниченный оператор из  $A_{q/\tilde{s}}^{p,\tilde{q}}$  или  $BMOA_{\tilde{s},q}$  или из  $F_{q/\tilde{s}}^{p,\tilde{q}}$  в  $BMOA_{\tilde{s},q}$  тогда и только тогда, когда  $\varphi \in H^\infty(U)$ .

### Литература

1. Александров А.Б. Теория функций в шаре. Комплексный анализ – многие переменные – 2 / А.Б. Александров // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 8, ВИНТИ, М. — 1985. — С. 115–190.

## О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛОКАЛЬНОЙ ОДНОРОДНОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)

nashananin@inbox.ru

Пусть

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, i^2 = -1, \quad (1)$$

– линейный дифференциальный оператор порядка  $m \geq 1$  с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определенный в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (обозначения см. [1]).

Пусть  $C^\infty$ -дiffeоморфизм  $\chi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  является однопараметрической аддитивной группой  $C^\infty$ -дiffeоморфизмов области  $\Omega$  на себя, то есть:

- 1) для любого  $t \in \mathbb{R}$  отображение  $\chi_t : x \rightarrow \chi(t, x)$  является  $C^\infty$ -диффеоморфизмом  $\Omega$  на себя;
- 2)  $\chi_0 : x \rightarrow x$  для всех  $x \in \Omega$ ;
- 3)  $\chi_t \circ \chi_s = \chi_{t+s}$  для любых  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Функцию  $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  назовем  $\chi_t$ -однородной с показателем  $\gamma \in \mathbb{R}$ , если

$$(\chi_t^* u)(x) = e^{\gamma t} u(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Пусть  $x^0 \in \Omega$ . Будем говорить, что функция  $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  локально  $\chi_t$ -однородна в точке  $x^0$  с показателем однородности  $\gamma$ , если при всех  $t \in \mathbb{R}$  в точке  $x^0$  ростки функций  $\chi_t^* u$  и  $u$  удовлетворяют равенству  $(\chi_t^* u)_{x^0} \cong e^{\gamma t} u_{x^0}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Линейный дифференциальный оператор вида (1) назовем  $\chi_t$ -однородным с показателем  $\delta \in \mathbb{R}$ , если  $\chi_t^*(Pu) = e^{\delta t} P(\chi_t^* u)$ , для любой функции  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Обозначим через  $\mathcal{K}_x(P) \subset T_x^* \Omega$  ядро симметрической  $m$ -линейной формы, индуцируемой в точке  $x \in \Omega$  старшим символом оператора  $P(x, D)$ . Предположим, что:

- 1)  $\bigcup_{x \in \Omega} (x, \mathcal{K}_x(P) \setminus \{0\}) = \text{Char}(P)$ ;
- 2) размерность ядра  $\mathcal{K}_x(P)$  не зависит от точки  $x \in \Omega$ .

Если условие (2) выполнено, то множество

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \mid x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0 \ \forall \xi \in \mathcal{K}_x(P)\}.$$

является подрасслоением касательного расслоения  $T\Omega$ . Обозначим через  $\mathcal{L}(P)$  дифференциальную систему, порожденную  $C^\infty$ -сечениями подрасслоения  $L(P)$ . Система  $\mathcal{L}(P)$  порождает в  $C^\infty$ -модуле  $T\Omega$  сечений касательного расслоения фильтрацию  $C^\infty$ -подмодулей  $\mathcal{H}^j$ , в которой первый элемент  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$ , а последующие подмодули  $\mathcal{H}^{j+1}$  порождаются векторными полями из  $\mathcal{L}(P)$  и коммутаторами векторных полей вида  $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$ . Дифференциальную систему  $\mathcal{L}$  называют вполне неголономной, если найдется такое число  $r$ , что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneq \mathcal{H}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{H}^r = T\Omega.$$

**Теорема 1.** Если оператор  $P$  удовлетворяет условиям (1) и (2), является  $\chi_t$ -однородным с показателем  $\delta_P$ , индуцированная система  $\mathcal{L}(P)$  является вполне неголономной, функция  $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  является решением уравнения  $Pu = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , правая часть которого является  $\chi_t$ -однородной функцией с показателем  $\gamma_f \in \mathbb{R}$ , и является локально  $\chi_t$ -однородной в точке  $x^0$  функцией с показателем



однородности  $\gamma_f - \delta_P$ , то  $u(x)$  является  $\chi_t$ -однородной в  $\Omega$  функцией с показателем однородности  $\gamma_f - \delta_P$ .

Доказательство теоремы использует результаты статьи [2].

### Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.
2. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки 111:6 (2022), С. 921–928; Math. Notes, 111:6 (2022), P. 954–960.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРОИЧНОЙ ЛОГИКИ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

В.А. Шананин<sup>1</sup>, Д.А. Алексанян<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Москва, МАИ, <sup>2</sup>Москва, МГУСИ)

*vasiliyshananin@yandex.ru*

Искусственные нейронные сети (ИНС) представляют собой мощный и универсальный инструмент для решения широкого спектра задач в области машинного обучения и анализа данных. Традиционно ИНС базируются на двоичной логике, оперируя двумя логическими состояниями — «истина» (1) и «ложь» (0). Использование многозначных логик, в частности троичной с состояниями — «истина» (1), «неопределённость» (0) и «ложь» (-1), потенциально способно значительно расширить функциональные возможности нейросетевых архитектур и повысить эффективность их работы [1,2].

Для экспериментального исследования возможностей троичных нейронных сетей (ТНС) были разработаны специализированные программные модули на языке Python версии 3.7 с использованием фреймворка глубокого обучения TensorFlow 2.3.

В качестве базовой архитектуры была выбрана модель многослойного перцептрона (MLP). Исходная архитектура включала входной слой, 2 полносвязных скрытых слоя размерностью 128 и 64 нейрона соответственно, и выходной слой, размерность которого определялась спецификой решаемой задачи (10 нейронов для задачи классификации рукописных цифр MNIST и 1 нейрон для задачи регрессии на синтетических данных). Общее число настраиваемых параметров сети составило 13,578 для классификации и 13,505 для регрессии.

Для реализации троичной логики функции активации нейронов были модифицированы следующим образом. Вместо традиционных функций ReLU или гиперболического тангенса использовалась ступенчатая функция вида:

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{если } x > 0.5 \\ f(x) = 0, & \text{если } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ f(x) = -1, & \text{если } x < -0.5 \end{cases}$$

В качестве функции ошибки использовалась кросс-энтропия для задачи классификации и среднеквадратичная ошибка для задачи регрессии. Оптимизация параметров сети производилась методом Adam [5] с адаптивным шагом обучения и коэффициентом регуляризации по  $L2$ -норме.

Для обучения и тестирования моделей использовались датасет рукописных цифр MNIST и синтетический датасет для регрессии, сгенерированный на основе функции  $y(x) = \sin(x) + 0.1 * x + 0.05 * \text{random.randn}()$

Выбранный подход позволяет существенно повысить эффективность и обучаемость нейросетевых моделей по сравнению с традиционными подходами на основе двоичной логики. Так, на задаче классификации рукописных цифр MNIST точность ТНС достигает 98.73%, что на 0.41% выше, чем у двоичной сети, а на синтетической задаче регрессии преимущество ТНС в точности составляет 2.27 раза. При этом ТНС демонстрирует более высокую устойчивость к шумам и возмущениям во входных данных, теряя не более 5.2% точности при зашумлении 30% пикселей изображения по сравнению с 19.7% для двоичной ИНС.

Перспективы развития ТНС связаны с исследованием их возможностей для обработки разнородных типов данных, в том числе временных рядов [3], текстовой и аудиоинформации, а также с применением в системах принятия решений и управления в условиях неопределённости [4], разработкой специализированных аппаратных решений для эффективной реализации ТНС. Развитие этих направлений позволит вывести нейросетевые технологии на качественно новый уровень и откроет широкие возможности для их применения в самых разных областях науки и техники.

## Литература

1. Ямпольский Л.С. Нейротехнологии и нейрокомпьютеры. / Л.С. Ямпольский, Б.П. Ткач // — К.: ДП «Издательский дом «Персонал» 2017. — 744 с.
2. Борисов В.В. Нечеткие модели и сети. / В.В. Борисов, В.В. Круглов // — М.: Горячая линия–Телеком, 2012. — 284 с.
3. Комарцова Л.Г. Нейрокомпьютеры. / Л.Г. Комарцова, А.В. Максимов // — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 400 с.
4. Мкртчян С.О. Нейроны и нейронные сети. / С.О. Мкртчян // — М.: Энергия, 1971. — 232 с.
5. Aizenberg I., Moraga C. Multilayer feedforward neural network based on multi-valued neurons (MLMVN) and a backpropagation learning algorithm / I. Aizenberg, C. Moraga // Soft Computing. — 2007. — Vol. 11, No. 2. — P. 169–183.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗРЫВА ОБРАЗЦА ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

И.М. Шаполова, Ю.П. Вирченко (Белгород, БелГУ)

*virch@bsu.edu.ru*

Анализируется статистическая модель, позволяющая вычислить предел прочности  $p_*$  образца пористого твердотельного материала, по отношению к разрыву под действием внешней растягивающей нагрузки, как функцию от плотности пор внутри него. Образец представляется вытянутым вдоль некоторого направления  $z$ . К противоположным торцам параллелепипеда приложены направленные в противоположные стороны силы, растягивающие его вдоль этой оси. При достаточно большой величине внешней нагрузки  $p$ , при превышении ею порогового значения  $p_*$  — предела прочности на растяжение происходит разрыв образца. Этот разрыв происходит вследствие слияния пор и образования микротрещин под действием напряжений.

Основой исследования является представление о том, что предел прочности определяется наличием в нем пор, распределенных случайным образом по его объему. Полагается, что случайные точки расположения «центров» микротрещин образуют пуассоновское случайное точечное поле с плотностью  $\rho = N/|\Omega| = N/V$ ,

$N$  — число дефектов в области  $\Omega$  образца. Тогда вероятность того, что в области  $\Delta$  случайное число  $\tilde{n}$  попавших в нее пор определяется распределением Пуассона

$$\text{Pr}\{\tilde{n} = n\} = \frac{(\rho|\Delta|)^n}{n!} \exp(-\rho|\Delta|). \quad (1)$$

На основе этого распределения определяется зависящая от концентрации  $\rho$  вероятность появления величины критической флуктуации, вследствие которой возникают трещины критического размера в образце. Для установления такой связи используется закон Холла-Петча

$$d = d_0 (k/p)^{\alpha/2}, \quad (2)$$

где  $d$  — критическая длина микротрещины, начиная с которой начинается ее развитие под действием внешнего напряжения,  $\alpha > 0$  и  $k$  — т.н. постоянная Гриффитса. При этом критическая концентрация  $n_*$  пор связывается с  $d$ ,  $n_* = (d/\delta)^3$ . где  $\delta$  — характерное расстояние между ионами материала.

Пусть  $P \equiv P(p, \rho; V)$  — вероятность того, что в параллелепипеде  $\Omega$  существует малая область с критическим размером  $d$ , в которой случайное число пор превышает значение  $n_*$ . Она является функцией  $\rho$ ,  $p$  и объема образца  $V$  и интерпретируется как вероятность разрушения образца. Для проведения расчета пуассоновское поле дискретизируется посредством разбиения образца на ячейки с размером  $d$ . Трещина зарождается в какой-то из ячеек, если в ней количество пор превышает величину  $m_* = v_*/h^3 = (d/h)^3$ . В силу статистической независимости расположений пор в разных ячейках,  $P = 1 - \bar{P}_*^N$ , где  $\bar{P}_*$  — вероятность попадания в ячейку числа пор, меньшего  $m_*$ . Вследствие (1), находим

$$\bar{P}_* = 1 - \exp\left(-\rho|\Delta|\right) \sum_{m=m_*}^{\infty} \frac{(\rho|\Delta|)^m}{m!}. \quad (3)$$

Так как число  $m_* \gg 1$  очень велико, то, используя для оценки суммы формулу Стирлинга, находим

$$\bar{P}_* = (1 - \eta(\rho, p))^N, \quad \eta(\rho, p) = \frac{\exp[-\rho|\Delta|]}{\sqrt{2\pi m_*}} \left(\frac{\rho e|\Delta|}{m_*}\right)^{m_*}$$

с  $m_* \ll N$ . Формула (2) позволяет выразить вероятность  $P(p, \rho; V)$  через физически контролируемые характеристики

$$P(p, \rho; V) = 1 - (1 - \eta(\rho, p))^{V/d^3}.$$

В результате, вероятность разрыва образца дается формулой

$$P(p, \rho; V) = 1 - \exp \left( - V \eta(\rho, p) / d^3 \right),$$

а предел прочности  $p_*$  вычисляется как решение уравнения  $P(p, \rho; V) = 1 - \varepsilon$ , с малым уровнем значимости  $\varepsilon$ .

$$p_* = k C_0 \left( \frac{d_0 \rho}{V^2} \right)^{(3\alpha)^{-1}}, \quad C_0 = \text{const}.$$

### Литература

1. Вирченко Ю.П. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала / Ю.П. Вирченко, И.М. Шаполова // Прикладная математика & Физика. — 2021. — Т. 53, № 4. — С. 312–316.

## О НЕОБХОДИМОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТУДЕНТАМ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ И.А. Шкурай (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

*shkuray@sfedu.ru*

Сегодня в школьном математическом образовании одним из приоритетных направлений является подготовка обучающихся к использованию математических знаний к решению реальных (практических, прикладных) задач и формирование у них представлений о возможности реальных приложений математики. Это обусловлено широким использованием методов математики во многих областях науки и человеческой деятельности. Дополнительным фактором является появление в руках человечества нового инструмента — компьютера, способного решать в первую очередь вычислительные задачи, недоступные для «ручного счета».

В связи с этим важно сформировать у обучающихся представления о методе математического моделирования, как одном из основных методов познания окружающей действительности. Что неразрывно связано с развитием соответствующих предметных знаний и методических умений у учителей математики.

В докладе рассматривается возможность введения отдельной дисциплины по математическому моделированию в программу подготовки студентов педагогических направлений. Выделено несколько трудностей, осложняющих этот процесс.

Во-первых, в учебных планах подготовки бакалавров направления «педагогическое образование», профиль «математика» наметилась тенденция к сокращению часов на математические дисциплины, добавление же нового курса потребует перераспределения учебных часов и возможное сокращение времени, выделяемого на другие дисциплины.

Во-вторых, для эффективного внедрения математического моделирования потребуется методическая поддержка курса, разработка учебных пособий, материалов для самостоятельного изучения и практической работы студентов. А значит возникает необходимость в специалистах, обладающих достаточным опытом и знаниями в области математического моделирования.

В Южном федеральном университете подготовка учителей математики осуществляется на базе института математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича, в котором накоплен большой опыт по разработке и преподаванию курсов по математическому моделированию студентам специальностей (направлений подготовки) математика, механика, прикладная математика и информатика.

Основоположниками математического моделирования в Ростовском государственном университете (ныне ЮФУ) принято считать И.И. Воровича и Н.Н. Моисеева. Расцвет работ по математическому моделированию связан с открытием в РГУ вычислительного центра (1958 г.), а затем научно-исследовательского института механики и прикладной математики (1971 г.). В НИИ МиПМ была создана имитационная модель Азовского моря, за которую её разработчики были удостоены Государственной премии СССР. Успешное развитие научных исследований по математическому моделированию (в том числе в РГУ (ЮФУ)) и окончательное формирование его в виде отдельной области математики, неизбежно привели к разработке курса «Математическое моделирование» в виде самостоятельной учебной дисциплины. А в 1998 году была открыта кафедра математического моделирования — первая в стране кафедра такого профиля в классическом университете [1].

### Литература

1. Ерусалимский Я.М. К истории математического моделирования в Южном федеральном университете / Я.М. Ерусалимский, И.А. Шкурай // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2024. — № 1. — С. 4–16.
2. Капкаева Л.С. Формирование приемов математического моделирования у студентов педагогического направления в процессе

решения практико-ориентированных задач / Л.С. Капкаева // Современные наукоемкие технологии. — 2022. — № 12–2. — С. 323–331.

3. Мерлина Н.И. Содержательный компонент подготовки будущих учителей математики к использованию метода моделирования / Н.И. Мерлина, А.А. Садыкова // Ярославский педагогический вестник. — 2010. — № 3. — С. 129–134.

4. Нахман А.Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы / А.Д. Нахман // Научное обозрение. Педагогические науки. — 2017. — № 3. — С. 71–79.

## ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА<sup>1</sup>

С.Г. Шорохов (Москва, РУДН)  
*shorokhov-sg@rudn.ru*

Вариационные принципы для непотенциальных операторов [1] применяются для решения широкого круга теоретических и прикладных задач, моделируемых уравнениями с частными производными. Решения краевых задач для уравнений с частными производными могут аппроксимироваться искусственными нейронными сетями различной архитектуры. Для обучения таких нейронных сетей требуются функционалы потерь (ошибки), в качестве которых наряду с функционалом невязки могут быть использованы квазиклассические функционалы из вариационных принципов [1].

Рассмотрим задачу построения функционала потерь для обучения нейронной сети на основе квазиклассической вариационной формулировки краевой задачи для гиперболического уравнения

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{1}$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы.

© Шорохов С.Г., 2024

в области  $\Omega$ , имеющей форму ромба с вершинами в точках  $\Gamma_0(0, 0)$ ,  $\Gamma_1(\pi, \pi)$ ,  $\Gamma_2(2\pi, 0)$ ,  $\Gamma_3(\pi, -\pi)$ , с граничными условиями

$$\begin{cases} u|_{\gamma_1} = \chi_1(\xi), \\ u_\eta|_{\gamma_2} = \varphi_2(\eta), \\ u_\eta|_{\gamma_3} = \varphi_3(\eta), \\ u_\xi|_{\gamma_3} = \psi_3(\xi), \\ u_\xi|_{\gamma_4} = \psi_4(\xi), \end{cases} \quad (2)$$

где отрезок  $\gamma_1$  соединяет точки  $\Gamma_0(0, 0)$  и  $\Gamma_1(\pi, \pi)$ , отрезок  $\gamma_2$  соединяет точки  $\Gamma_1(\pi, \pi)$  и  $\Gamma_2(2\pi, 0)$ , отрезок  $\gamma_3$  соединяет точки  $\Gamma_2(2\pi, 0)$  и  $\Gamma_3(\pi, -\pi)$ , отрезок  $\gamma_4$  соединяет точки  $\Gamma_3(\pi, -\pi)$  и  $\Gamma_0(0, 0)$ .

Квазиклассические вариационные формулировки различных краевых задач могут быть построены на основе метода симметризирующего оператора [2]-[3].

Для краевой задачи (1)-(2) при помощи подхода В.М. Шалова [4] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Вариационный функционал для краевой задачи (1)-(2) может быть записан в виде*

$$D[u] = \int_{\Omega'} (u_\xi^2 + u_\eta^2 - 2\Phi u_\eta - 2\Psi u_\xi) d\xi d\eta + \int_{\gamma'_1} (u^2 - 2\chi_1 u) ds, \quad (3)$$

где функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  определяются следующими формулами:

$$\Phi(\eta) = \begin{cases} \varphi_2(\eta), & 0 \leq \eta \leq \pi, \\ \varphi_3(\eta), & -\pi \leq \eta < 0, \end{cases}, \quad \Psi(\xi) = \begin{cases} \psi_3(\xi), & \pi \leq \xi \leq 2\pi, \\ \psi_4(\xi), & 0 \leq \xi < \pi. \end{cases}$$

Функционал (3) содержит производные функции  $u$  первого порядка и может быть использован в задачах обучения нейронной сети, аппроксимирующей решение краевой задачи (1)-(2). При помощи подхода В.М. Филиппова [5] может быть построен функционал для уравнения (1), не содержащий производных функции  $u$ .

Приводится алгоритм обучения нейронной сети для аппроксимации краевой задачи (1)-(2) при помощи функционала (3), обсуждается построение и обучение нейронной сети с использованием фреймворка TensorFlow, анализируется качество построенной нейросетевой модели краевой задачи (1)-(2).



## Литература

1. Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов / В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.Г. Шорохов // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — Т. 40. — С. 3–176.
2. Шалов В.М. Некоторое обобщение пространства К. Фридрихса / В.М. Шалов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 2. — С. 292–294.
3. Шалов В.М. Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом / В.М. Шалов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 511–512.
4. Шалов В.М. Принцип минимума квадратичного функционала для гиперболического уравнения / В.М. Шалов // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 10. — С. 1338–1365.
5. Филиппов В.М. Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения / В.М. Филиппов // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1961–1968.

## ИНВАРИАНТНЫЕ КЛАССЫ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ

М.А. Шубарин (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

*mas102@mail.ru*

Под структурной теорией Фреше автор понимает совокупность проблем, которые можно сгруппировать следующим образом:

- «безбазисная» изоморфная классификация пространств Фреше. «Безбазисность» предполагает, что найденные необходимые и достаточные (по возможности близкие к необходимым) условия изоморфности двух пространств Фреше не будут формулироваться в терминах базисов в этих пространствах;
- описание (с точностью до изоморфизма) всех подпространств, фактор пространств и дополняемых подпространств рассматриваемого пространства Фреше;
- изоморфная классификация пространств Кёте. Используемые инвариантные характеристики определяются в терминах абсолютных базисов в рассматриваемых пространствах Кёте;

- нахождение условий существования базиса в пространстве Фреше.

Популярным инструментом решения сформулированных выше задач служат семейства пространств Фреше  $(D_j)$ ,  $(\Omega_j)$ ,  $j = 1, 2$ , называемые (в зависимости от решаемой задачи) инвариантными классами, интерполяционными классами или инвариантными идеалами пространств Фреше. Эти объекты впервые появились в работах Б. С. Митягина [1], М. М. Драгилева [2], В. П. Захарюты [3], Д. Фогта [4, 5], Д. Фогта и М.-Й. Вагнера [6], ...

Пусть  $X$  — пространство Фреше, топология в котором задаётся набором норм  $(\|\cdot\|_p)$ . Говорят, что это пространство имеет тип  $(D_1) = (DN)$ ,  $(\Omega_2) = (\underline{DN})$ , если выполняется соответственно условие (1) или (2):

$$\begin{aligned} \exists p_0 \forall p \exists p_1 = p_1(p) \exists C_1 = C_1(p_0, p, p_1) > 0 : \\ \forall x \in X \|x\|_p \leq C_1 \|x\|_{p_0}^{1/2} \|x\|_{p_1}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \exists p_0 \forall p \exists p_1 = p_1(p) \exists \alpha \in (0, 1) \exists R_1 = R_1(p_0, p, p_1) > 0 : \\ \forall x \in X \|x\|_p \leq R_1 \|x\|_{p_0}^\alpha \|x\|_{p_1}^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Говорят, что это пространство имеет тип  $(D_2) = (\overline{\Omega})$  или  $(\Omega_1) = (\Omega)$ , если выполняется соответственно условие (3) или (4):

$$\begin{aligned} \forall p_0 \exists p = p(p_0) \forall p_1 \exists C_2 = C_2(p_0, p, p_1) > 0 : \\ \forall x' \in X' \|x'\|'_p \leq C_2 (\|x'\|'_{p_0})^{1/2} (\|x'\|'_{p_1})^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \forall p_0 \exists p = p(p_0) \forall p_1 \exists R_2 = R_2(p_0, p, p_1) > 0 : \exists \tau \in (0, 1) \\ \forall x' \in X' \|x'\|'_p \leq R_2 (\|x'\|'_{p_0})^{1-\tau} (\|x'\|'_{p_1})^\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $(\|\cdot\|'_p)$  — набор сопряжённых норм в  $X'$ :

$$\|x'\|'_p := \sup\{x'(x) : \|x\|_p \leq 1\}.$$

### Литература

1. Митягин Б.С. Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах / Б.С. Митягин // *Studia Math.* — v. 37. — 171. — С.111–137.
2. Драгилев М.М. О правильных базисах в ядерных пространствах / М.М. Митягин // *Мат. сб.* — 1965. — Т.68. — № 3. — С.153–173.
3. Zachariuta V.P. On isomorphism of cartesian products of local convex spaces / V.P. Zachariuta // *Studia Math.* — 1973. — v. 46. — P. 201–221.

4. Vogt D. Charakterisierung der Unterraume von  $s$  / D. Vogt // Math. Z. — 1977. — v.155. — P.109–117.
5. Vogt D. Charakterisierung der Quotientenraume von  $s$  und eine Vermutung von Martinean / D. Vogt D., M.-J. Wagner // Studia Math. — 1980. — v.67. — P. 225–240.
6. Vogt D. Charakterisierung der Quotientenraume von  $s$  und eine Vermutung von Martinean / D. Vogt, M.-J. Wagner // Studia Math. — 1980. — v. 67. — P. 225–240.

**СОВРЕМЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ НАПИСАНИЯ  
ПРОГРАММ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»**

**А.И. Эгамов** (Нижний Новгород, ННГУ)

*albert810@yandex.ru*

В процессе разработки студентами лабораторных работ по дисциплине «Вычислительные методы» основное внимание уделяется математическим вычислениям, умению программировать на алгоритмических языках высокого уровня и правильности полученных результатов. Однако, в реальной жизненной ситуации не менее важными составляющими являются интуитивно-понятный интерфейс и наглядность выдаваемых результатов, поэтому еще со студенчества важно формировать желание и умение студентов уделять большое внимание визуальной составляющей написанной программы.

Согласно современным тенденциям студентам дается дополнительное задание: написать программу в стиле СППР (система поддержки принятия решения) [1], так как все современные программы, где предлагается сделать какой-либо выбор (госуслуги, различные маркеты и т.п.) написаны в таком стиле. В лабораторных работах по «Вычислительным методам» пользователю также приходится выбирать, например, начальные условия, вид управления, желательную (возможную) погрешность и т.д. Приветствуется, если студенты делают интерфейс программы на двух языках: русском и английском. Конечно же, объем работы для написания подобной программы довольно большой, поэтому, как правило, все вышеописанное делается в рамках учебно-исследовательского проекта в составе небольшой (4-5 человек) группы учащихся. В качестве примера выше приведен скриншот программы СППР, связанной с задачей дискретной

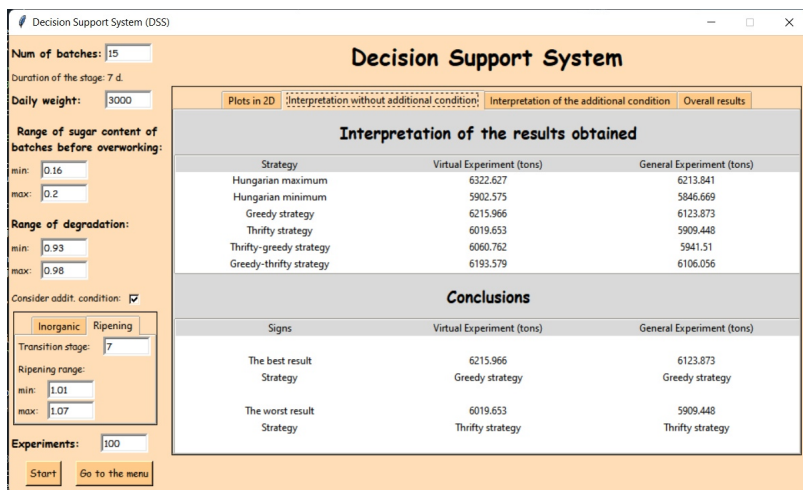


Рис. 1: Пример скриншота СППР

оптимизации. О подобном учебно-исследовательском проекте и проводимом виртуальном эксперименте подробнее можно ознакомиться в [2].

Конечно же, правильность математических выкладок и грамотное применение численных методов являются основными, важными составляющими программы, однако, требование уделить особое внимание визуальной составляющей, интуитивно-понятному интерфейсу и наличие в программе возможности получить ответ, «не вдаваясь в подробности», являются непосредственными элементами современной программы. Подобная постановка учебных задач настраивает студентов на современные тенденции в программировании, дисциплинирует и укрепляет профессиональные навыки и компетенции будущих программистов.

## Литература

1. Попов А.Л. Системы поддержки принятия решения. Учебно-методическое пособие. / А.Л. Попов // — Екатеринбург: УрГУ, 2008. — 80 с.
2. Balandin D.V. et al. Educational and Research Project «Optimization of the Sugar Beet Processing Schedule»/ D.V. Balandin, A.I. Egamov, O.A. Kuzenkov, O.V. Pristavchenko, V.K. Vildanov

// In book Voevodin V., Sobolev S., Yakobovsky M., Shagaliev R. (eds). Supercomputing. Lecture Notes in Computer Science, book series (LNCS, volume 13708) — 2022. — P. 409–422.

# О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>

А.Я. Янченко (Москва, НИУ МЭИ)

YanchenkoAY@mpei.ru

Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $l, n, d$  — натуральные;  $P \in \mathbb{C}[\omega_0, \omega_l]$ ;  $Q \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \dots, \omega_n]$ , причем:

- 1)  $P = \prod_{j=1}^d (\omega_l - \alpha_j \omega_0)$ , где все  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$ ;
- 2) степень многочлена  $Q$  по совокупности переменных  $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$  не превосходит  $d - 1$ . Пусть  $y = f(z)$  — целая функция, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$P(y, y^{(l)}) + Q(z, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Тогда либо  $f(z)$  — многочлен из  $\mathbb{C}[z]$ , либо  $f(z)$  — квазимногочлен, т.е.

$$f(z) = \sum_{j=1}^M T_j(z) e^{\beta_j z},$$

где  $M \in \mathbb{N}$ , все  $T_j(z) \in \mathbb{C}[z]$ , все  $\beta_j \in \mathbb{C}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $K$  — поле алгебраических чисел,  $[K : \mathbb{Q}] < +\infty$ . Пусть  $P_i \equiv P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) \in K[\omega_0, \dots, \omega_n]$  ( $i = 1, \dots, n$ ), причем при всех  $i$

$$P_i = a_{i, N_i}(\omega_1, \dots, \omega_n) \omega_0^{N_i} + \dots + a_{i, 0}(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

$$\text{все } a_{ij}(\omega_1, \dots, \omega_n) \in K[\omega_1, \dots, \omega_n]$$

Пусть  $\{y_i \equiv y_i(z); i = 1, \dots, n\}$  — мероморфные функции конечного порядка, являющиеся решениями системы дифференциальных

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

© Янченко А.Я., 2024

[illegible]

- а)  $y_i(z)$  голоморфны в  $z_0$  при всех  $i$ ;
- б)  $a_{i, N_i}(y_1(z_0), \dots, y_n(z_0)) \neq 0$  при всех  $i$ ;
- в)  $\frac{\partial P_i}{\partial \omega_0}(y'_i(z_0), y_1(z_0), \dots, y_n(z_0)) \neq 0$ ;
- г)  $y_1(z_0), \dots, y_n(z_0) \in K$ .

1) либо являются рациональными функциями от  $(z - z_0)$  с коэффициентами из поля  $K_1$ ;

3) либо имеют вид:

где  $\wp(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению  $(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3$ , причем  $g_2, g_3 \in K_1$ ;  $\omega_1$  — один из периодов  $\wp(z)$ ;  $R_{1,i}(t)$ ,  $R_{2,i}(t)$  — рациональные функции с коэффициентами из поля  $K_1$ .

Пусть  $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t < s$  и при любых натуральных  $n, H$  и действительном  $R > 0$   $B_{t,s}(n, H, R)$  — множество точек  $w \in \mathbb{C}$  таких, что:

- а)  $|w| \leq R$ ;  
 б)  $|g(w)| \geq e^{-(1+|w|)^p}$ ;  
 в)  $\varphi^{(t)}(w), \varphi^{(s)}(w)$  являются алгебраическими числами степени не выше  $n$  и высоты не более  $H$ .

$$a) \lim_{l \rightarrow +\infty} M_l = +\infty;$$

$$б) M_l \leq M_{l+1} \leq M_l^{1+\frac{\delta}{20(1+\rho)}} \text{ при всех } l;$$

в) при любом  $l$  найдутся натуральные  $n, H$  и действительное  $R > 0$  — такие, что  $n(n + \ln H) + R = M_l$  и число элементов во множестве  $B_{t,s}(n, H, R)$  не менее чем  $M_l^{3\rho+\delta}$ .

Тогда  $\varphi^{(t)}(z)$  является либо рациональной функцией, либо рациональной функцией от какой-либо экспоненты  $e^{\alpha z}$ , либо эллиптической функцией.

Указанные теоремы усиливают результаты из [1]–[3].

### Литература

1. Подкопаева В.А. Об одном уточнении теоремы Шнайдера-Ленга / В.А. Подкопаева, А.Я. Янченко // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 863–875.
2. Янченко А.Я. О некоторых арифметических свойствах значений целых функций конечного порядка и их первых производных / А.Я. Янченко // Мат. сборник. — 2019. — Т. 210, № 12. — С. 136–150.
3. Янченко А.Я. О целых решениях одного класса нелинейных алгебраических уравнений / А.Я. Янченко // Дифф. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1186–1192.

## CONSTRUCTING SOLUTIONS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS IN MULTIDIMENSIONAL SPACE WITH A CUT.

H.F. Gebreslasie, V.B. Vasilyev (Belgorod, BSU)

1609295@bsu.edu.ru

Let  $C^a$  and  $C^b$  be two cones in  $\mathbb{R}^2$  for positive real numbers  $a$  and  $b$ . In this article we aim to solve an elliptic pseudo-differential equation model in  $\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C^a \times C^b}$ , which involve a special wave factorization of the elliptic symbol. We are going to analyze the formula for general solution of elliptic pseudo-differential equation model given by

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b} \quad (1)$$

where:  $C_+^a \subset \mathbb{R}^2, C_+^b \subset \mathbb{R}^2$  and  $C_+^a \times C_+^b = \{x \in \mathbb{R}^4 | x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_2 > a|x_1|, x_4 > b|x_3|, a, b > 0\}$ , with integral boundary condition

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4 = f(x_1, x_3), f(x_1, x_3) \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^2) \quad (2)$$

Assuming the symbol  $A(\xi)$  of the pseudo-differential operator  $A$  satisfies the condition

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha < |A(\xi)| < c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \xi \in \mathbb{R}^4, c_1, c_2 > 0,$$

the real number  $\alpha$  is index of operator  $A$ , admits the wave factorization with respect to  $C_+^a \times C_+^b$  having index  $\varkappa$ , such that  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < \frac{1}{2}$ . By utilizing lemma 3.1,  $V_{a,b}u = FT_{a,b}F^{-1}u$  in [1], where  $F$  is Fourier transform operator and  $T_{a,b}$  is transformation operator from  $\mathbb{R}^4$  to  $\mathbb{R}^4$ . we derive a solution for (1) sought in Sobolov-Slobodetski space  $H^s(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b})$  and acquire the subsequent formula in the Fourier image of  $u$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_1(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) + A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_2(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \\ & + A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_3(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) + A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_4(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \end{aligned} \quad (3)$$

where  $A_{\neq}$  is factor in wave factorization of the operator  $A$  [1].

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) &= \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) - \frac{1}{2}S_1\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) \\ &\quad - \frac{1}{2}S_3\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) + S_{31}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) \\ \tilde{c}_2(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) &= \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) - \frac{1}{2}S_1\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}S_3\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) - S_{31}\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \\ \tilde{c}_3(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) &= \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) + \frac{1}{2}S_1\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) \\ &\quad - \frac{1}{2}S_3\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) - S_{31}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 - b\xi_4) \\ \tilde{c}_4(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) &= \frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) + \frac{1}{2}S_1\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}S_3\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) + S_{31}\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3 + b\xi_4) \end{aligned}$$

where  $S_1, S_3$  are singular integral operators and  $S_{31} = S_3S_1$  [2].

**Theorem 1.** If the symbol  $A(\xi)$  admits the wave factorization[1] with index  $\varkappa$  such that  $\varkappa - s = 1 + \delta$ ,  $|\delta| < \frac{1}{2}$ , general solution of the homogeneous equation (1) on Sobolev-Slobodetskii space  $H^s(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b})$  in Fourier image has the form in (3). where,  $\tilde{c}_0$  is an arbitrary function from the space  $H^{s-\varkappa+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ .

Applying the boundary condition (2) to the general solution yields us unique solution, hence we got the following result.



**Theorem 2.** Suppose that  $x-s = 1+\delta$ ,  $|\delta| < \frac{1}{2}$  and  $f \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ . Then the formula given by (3) is a unique solution of the equation (1) with integral boundary condition given by (2), where

$$\tilde{c}_0(\xi_1, \xi_3) = A_{\neq}(\xi_1, 0, \xi_3, 0) \tilde{f}(\xi_1, \xi_3).$$

Furthermore, we study behavior of the solutions as parameters  $a$  and  $b$  sufficiently larger,  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ .

## References

1. Vladimir B.V. Pseudo —Differential Equations and canonical Potentials : 2 —dimensional case / V.B. Vasilyev // *Opuscula Mathematica*, — 2019. — V. 39, No. 1. — P. 109–124.
2. Eskin G. Boundary Value Problems for Elliptic Pseudo Differential Equations / G. Eskin. — Am. Math. Soc. : Providence, — 1981.

## CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE DIRICHLET AND NEUMANN CONDITIONS FOR NONLINEAR BIWAVE EQUATION

**V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko** (Minsk, Institute of Mathematics  
of the National Academy of Sciences of Belarus)  
*janycz@yahoo.com*

In the domain  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$  of two independent variables  $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}$ , consider the one-dimensional nonlinear equation

$$\square_a \square_b u(t, x) = f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x), \partial_t^2 u(t, x), \partial_t \partial_x u(t, x), \partial_x^2 u(t, x), \partial_t^3 u(t, x), \partial_t^2 \partial_x u(t, x), \partial_t \partial_x^2 u(t, x), \partial_x^3 u(t, x)), \quad (1)$$

where  $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$  is the d'Alembert operator,  $f$  is a function given on the set  $\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10}$ ,  $a$  and  $b$  are real numbers such that  $0 < a < b$ .

Eq. (1) is equipped with the initial conditions

$$\partial_t^i u(0, x) = u_i(x), \quad x \in [0, \infty), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$u(t, 0) = \mu_0(x), \quad \partial_x u(t, 0) = \mu_1(x), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

where  $u_0, u_1, u_2, u_3, \mu_0$  and  $\mu_1$  are functions given on the half-line  $[0, \infty)$ .

Similar problems arise in the Timoshenko–Ehrenfest beam theory.

Some particular linear cases of the problem (1) – (3) was considered in the papers [1–3].

In this report, we construct a solution to the problem according to the following scheme [4–6]: 1) We reduce the problem (1) – (3) to an equivalent integro-differential equation using the method of characteristics. 2) We derive an apriori estimate for a solution. 3) We apply the method of continuation with respect to a parameter [7] to prove that the obtained integro-differential equation has a unique solution.

**Theorem 1.** *Let the conditions  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{10})$ ,  $u_0 \in C^4([0, \infty))$ ,  $u_1 \in C^3([0, \infty))$ ,  $u_2 \in C^2([0, \infty))$ ,  $u_3 \in C^1([0, \infty))$ ,  $\mu_0 \in C^4([0, \infty))$ ,  $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$  be satisfied, and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition with respect to the ten last variables, i.e., there exists a function  $L \in C(\overline{Q})$  such that  $|f(t, x, \mathbf{z}) - f(t, x, \mathbf{w})| \leq L(t, x) \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|_1$ . Then there exists a unique classical solution of problem (1) – (3) in the function class  $C^4(\overline{Q})$  if and only if the following matching conditions are satisfied:*

$$\begin{aligned}\mu_0(0) &= u_0(0), \\ \mu'_0(0) &= u_1(0), \quad \mu_1(0) = u'_0(0), \\ \mu''_0(0) &= u_2(0), \quad \mu'_1(0) = u'_1(0), \\ \mu'''_0(0) &= u_3(0), \quad \mu''_1(0) = u'_2(0), \\ \mu''''_0(0) &= (a^2 + b^2)u''_2(0) - a^2b^2u'''_0(0) + f(0, 0, u_0(0), u_1(0), u'_0(0), \\ &\quad u_2(0), u'_1(0), u''_0(0), u_3(0), u'_2(0), u''_1(0), u'''_0(0)), \quad \mu'''_1(0) = u'_3(0).\end{aligned}$$

## References

1. Ortner N. Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the Simply Supported Semi-Infinite Timoshenko Beam / N. Ortner, P. Wagner // Journal of Elasticity. — 1996. — V. 42. — P. 217–241.
2. Korzyuk V.I. Classical Solutions of a Mixed Problem for the One-Dimensional Biwave Equation / V.I. Korzyuk, N.V. Vinh // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. — 2016. — № 1. — P. 69–79.
3. Korzyuk V.I. Solution of a Problem for a Fourth-Order Nonstrictly Hyperbolic Equation with Double Characteristics / V.I. Korzyuk, N.V. Vinh // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. — 2017. — № 1. — P. 38–52.
4. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2023. — V. 59, № 8. — P. 1075–1089.

5. Korzyuk V.I. Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2023. — V. 59, № 9. — P. 1216–1234.

6. Korzyuk V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2023. — V.43. — P. 48–63.

7. Trenogin V.A. Global Invertibility of Nonlinear Operators and the Method of Continuation with Respect to a Parameter / V.A. Trenogin // Dokl. Math. — 1996. — V. 54, № 2. — P. 730–732.

## VARIATIONAL INEQUALITIES WITH NONLINEAR ELLIPTIC OPERATORS AND MEASURABLE BILATERAL CONSTRAINTS<sup>1</sup>

**A.A. Kovalevsky** (Yekaterinburg, IMM UB RAS and UrFU)  
*aleckvl71@mail.ru*

We consider a sequence of continuous strictly monotone coercive operators  $\mathcal{A}_s: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  in divergence form, where  $\Omega$  is a nonempty bounded open set in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) and  $p > 1$ . Along with this, for measurable functions  $\varphi, \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , we consider the set

$$V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

In so doing, we assume that the following condition is satisfied:

(C) for every nonempty open set  $\omega$  in  $\mathbb{R}^n$  with  $\bar{\omega} \subset \Omega$ , there exist functions  $\varphi_\omega, \psi_\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$  such that  $\varphi \leq \varphi_\omega \leq \psi_\omega \leq \psi$  a.e. in  $\Omega$  and  $\varphi_\omega < \psi_\omega$  a.e. in  $\omega$ .

The main result we discuss is that if the sequence  $\{\mathcal{A}_s\}$   $G$ -converges to an invertible operator  $\mathcal{A}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  and a sequence  $\{f_s\} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$  converges strongly to a functional  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , then the solutions  $u_s \in V$  of the variational inequalities

$$\forall v \in V, \quad \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0$$

converge weakly in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  to the solution  $u \in V$  of the variational inequality

$$\forall v \in V, \quad \langle \mathcal{A} u - f, u - v \rangle \leq 0$$

---

<sup>1</sup> The research funding from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Ural Federal University Program of Development within the Priority-2030 Program) is gratefully acknowledged.

© Kovalevsky A.A., 2024

and  $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \mathcal{A}u$  strongly in  $W^{-1,p'}(\Omega)$ .

A detailed proof of this result is given in [1]. In the talk, we present a scheme of the proof as well as examples where condition (C) is satisfied. We also note that, in our study, the  $G$ -convergence of the sequence  $\{\mathcal{A}_s\}$  to an invertible operator  $\mathcal{A}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  means that, for every  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\mathcal{A}_s^{-1}f \rightarrow \mathcal{A}^{-1}f$  weakly in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . On the whole, concerning the notion of  $G$ -convergence of operators and the related results, see, e.g., [3, 4].

As far as previous studies on the same topic are concerned, we mention the work [2], where it was shown that the  $G$ -convergence of a sequence of linear continuous operators  $A_s: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  in divergence form to a similar operator  $A: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  (along with an additional condition on the behavior of  $A_s$ ) implies the weak convergence of the solutions of variational inequalities with the operators  $A_s$  and the constraint set

$$K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega): \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ a.e. in } \Omega\}$$

to the solution of the corresponding variational inequality with the operator  $A$  and the same constraint set. In so doing, it was assumed that  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$  and, for every nonempty set  $\omega \subset \subset \Omega$ , there exist a number  $\delta^\omega > 0$  and functions  $\psi_1^\omega, \psi_2^\omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$  such that

$$\psi_1 \leq \psi_1^\omega \leq \psi_2^\omega \leq \psi_2 \text{ in } \Omega, \quad \psi_2^\omega - \psi_1^\omega \geq \delta^\omega \text{ in } \omega.$$

As seen, the conditions on the constraints  $\varphi$  and  $\psi$  in our study are significantly weaker than the conditions on the corresponding constraints in [2].

## References

1. Kovalevsky A.A. Convergence of solutions of nonlinear elliptic variational inequalities with measurable bilateral constraints / A.A. Kovalevsky // Results Math. — 2023. — Vol. 78, № 4. — Paper No. 145, 22 p.
2. Murat F. Sur l'homogeneisation d'inequations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe  $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega) | \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p. dans } \Omega\}$  / F. Murat // Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, No. 76013. — Univ. Paris VI, 1976.
3. Pankov A.A. Averaging and  $G$ -convergence of nonlinear elliptic operators of divergence type / A.A. Pankov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1984. — Vol. 278, № 1. — P. 37–41.

4. Zhikov V.V. Averaging and  $G$ -convergence of differential operators / V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, Ha Tien Ngoan // Russ. Math. Surv. 1979. — Vol. 34, № 5. — P. 69–147.

## **VIBRATIONS OF A CONSOLE WITH A MOVING BOUNDARY LAYING ON AN ELASTIC BASE**

**V.L. Litvinov, K.V. Litvinova** (Samara, SSTU, Moscow, MSU)

*vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru*

One-dimensional oscillatory systems, the boundaries of which move, are widespread in technology: bending vibrations of shafts, beams and rods with movable fastenings [1-3]. The occurrence of large amplitude oscillations in these objects is often unacceptable, so the analysis of resonant properties is in the foreground here. The presence of moving boundaries causes significant difficulties in describing such systems. The phenomenon of steady-state resonance and the passage through resonance for transverse vibrations of a cantilever of variable length on a spring-loaded substrate are considered.

Using the Kantorovich-Galerkin method, an approximate solution to the problem of transverse vibrations of a cantilever with a moving boundary lying on an elastic base is found. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the  $n$ th dynamic mode are presented. The phenomenon of steady-state resonance and passage through resonance is investigated. The solution was obtained for the most common case in practice, when external disturbances act on a moving boundary.

The results presented in the work make it possible to perform a quantitative analysis of the steady-state resonance and the phenomenon of passage through resonance for systems in which the oscillations are described by this problem.

### **References**

1. Litvinov V.L. Application of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries / V.L. Litvinov, V.N. Anisimov // Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. — 2018. — No. 2. pp. 70–77.
2. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length / A.A. Lezhneva // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of solids. — 1970. — No. 1. — pp. 159-161.
3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads / A.I. Vesnitsky — M.: Fizmatlit, — 2001. — 320 p.

# MODELING THE COMPETITION OF LANGUAGES IN A BILINGUAL COMMUNITY WITH THE EFFECT OF MUTUAL ASSISTANCE

**A.V. Medvedev, O.A. Kuzenkov** (Nizhniy Novgorod, UNN)  
*a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov\_o@mail.ru*

The problem of the disappearance of languages is investigated by various methods, including using mathematical modeling [1-7]. The study of the linguistic dynamics of small peoples whose languages are on the verge of extinction is especially relevant. The central task for the researcher is to identify the effects that prevent the extinction of languages.

The *purpose* of this study — construction and research of a new mathematical model of a bilingual community, which takes into account: the effect of mutual assistance within a group of speakers of the same language; the effect of language acquisition by children of bilingual parents at an early age; different prestige of languages for adults.

The following hypotheses were adopted to build the model:

- community members can speak one of two languages or two at once;  $z_1$  — the share of community members who speak only the first language,  $z_2$  — the share of community members who speak only the second language,  $z_{12}$  — the share of members Bilingual communities (Bilinguals);
- the number of any language group is non-negative:  $0 \leq z_{1,2,12} \leq 1$ ;
- the size of the community is constant over time (the number of births is equal to the number of deaths),  $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$ ;
- the coefficient  $r$  characterizes both fertility and mortality;
- the probability of simultaneous (spontaneous) learning of two languages by a child is negligible;
- bilingual children initially learn the first or second language with probabilities  $c_1$  and  $c_2$ , respectively;  $c_1 > c_2$  [6,7];
- there is a mutual assistance effect within language groups, which is determined by the coefficients:  $\alpha$ -for native speakers of the first language and  $\beta$ -for native speakers of the second language;

- the strength of the mutual aid effect is inversely proportional to the number of native speakers;
- the prestige introduced by Abrams and Strogatti is determined by the coefficients  $b_1$  and  $b_2$  for the first and second languages, respectively.
- when native speakers of different languages meet, it is possible to change the language with coefficients  $b_{1,2}$  for the first and second languages, respectively;
- it is supposed to be possible for monolingual members of the community to learn a second language by bilinguals [3];
- the principle of interaction of native speakers in the community is similar to the hypothesis of effective meetings [11].

Language dynamics is determined by the following system::

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12}) + \alpha z_1^2 (1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12}) + \beta z_2^2 (1 - z_2), \\ \dot{z}_{12} = z_1 (b_1 - \alpha z_1) (z_2 + z_{12}) + z_2 (b_2 - \beta z_2) (z_1 + z_{12}) - r z_{12}, \\ 1 < \alpha, \beta < 2, \quad c_1 + c_2 = 1, \quad b_1 \geq \alpha, \quad b_2 \geq \beta, \\ z_1 + z_2 + z_{12} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

The phase space of this system (1) is a three-dimensional standard simplex [12]. By designing, expressing  $z_{12}$  in terms of  $z_1$  and  $z_2$ , this model can be brought to a system on a plane:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 + (\alpha + b_1) z_1^2 - \alpha z_1^3, \\ \dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 + (\beta + b_2) z_2^2 - \beta z_2^3, \\ z_1 + z_2 \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

A qualitative study of the (2) system shows two possible dynamics: the survival of only one language or their coexistence. The (2) system was investigated using standard qualitative methods. The nature of the equilibrium of the states was determined by the Lyapunov method, by determining eigenvalues and by numerically constructing a phase portrait: No. 3 and No. 4 are unstable by the saddle type, and states No. 1, No. 2 and No.5 are stable by the node type (Fig. 1). The fulfillment of the inequality  $\alpha < b_1, \beta < b_2$  guarantees the coexistence of languages.

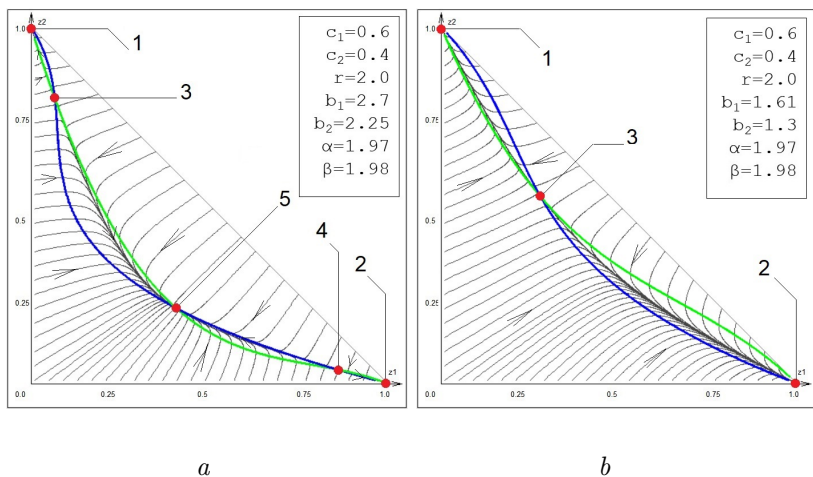


Fig. 1: Phase plane for model (2): *a* — coexistence of two languages and bilinguals,  $\alpha < b_1, \beta < b_2$ ; *b* — displacement of one language by another.

The paper analyzes the influence of different values of mutual assistance coefficients on language dynamics. Based on this analysis, it is concluded that mutual assistance within a group of native speakers of the same language prevents the formation of bilingualism and contributes to its dominance in the community under consideration. The similarity of the effect of mutual assistance of native speakers of the same language with the effect of language volatility in the AS model is noted[1]. The language dynamics is considered, based on real statistical data for some languages of England and Canada: Scottish, Welsh, English, French [13, 14]. The observed statistics were compared with the results of mathematical modeling and confirmed the adequacy of the new model. A forecast of the further development of the dynamics of these languages is constructed. The results of modeling language dynamics on the (1) model were compared with the results of the old model [10] based on the volatility effect. It is noted that in cases where the new and old models give different forecasts for the marginal development of dynamics, the modeling accuracy for the model (1) is higher.

## References

1. Abrams D. Modelling the Dynamics of Language Death. / D. Abrams, S. Strogatz // — 2003, Nature, — 424, — P. 900. <https://doi.org/10.1038/424900a>



2. Mira J., Paredes A. Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics. / J. Mira // EPL (Europhysics Letters ) — 2005, — 69, — P. 1031.
3. Castelly X. Ordering Dynamics with Two Non-Excluding Options: Bilingualism in Language Competition / X. Castelly, V. Eguíluz, M. San Miguel // New Journal of Physics, — 2006, — 8, — P. 308.
4. Baggs I. A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction. / I. Baggs, H. Freedman // J. Math. Sociol. — 1990, — 16(1) — 51–75.
5. Baggs I. Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: a mathematical model of bilingualism. / I. Baggs, H. Freedman // Math. Comput. Model. — 1993 9–18
6. Alexandrova N. The disappearance of languages, natural bilingualism and nonlinear dynamics. / N. Alexandrova // In: 8th International Conference on Cognitive Science, , Svetlogorsk, Russia — 2018. — pp. 35–37
7. Benjamins J. A Neurolinguistic Theory of Bilingualism. / J. Benjamins // Amsterdam, Philadelphia — 2004
8. Alexandrova N. Native language, foreign language and linguistic phenomena that have no name / N. Alexandrova // Questions of linguistics. — 2004 — P. 88–100
9. Alexandrova N. Bilingualism as an Unstable State. In: Velichkovsky, B.M., Balaban, P.M., Ushakov, V.L. (eds) Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Advances in Intelligent Systems and Computing / N. Alexandrova, V. Antonets, O. Kuzenkov, I.Nuidel et al. // — vol 1358. Springer
10. Medvedev A. Modeling language competition. Modern information technologies and IT education / A. Medvedev, O. Kuzenkov // — 2023
11. Volterra V. Mathematical theory of the struggle for existence / V. Volterra // Science, Moscow — 1976
12. Kuzenkov O. Mathematical modeling of selection processes / O. Kuzenkov, E. Ryabova // Education, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod — 2007 — P. 31–113
13. Sutantawibul C. Revisit language modeling competition and extinction: A Data-Driven Validation. Journal of applied mathematics and physics / C. Sutantawibul, P. Xiao, S. Richie, D. Fuentes-Rivero // — 2018 — P. 1558–1570
14. Statistics of Canada, <https://www.statcan.gc.ca>

# CONCERNING ONE EMBEDDING THEOREM

V.R. Misiuk (Grodno, GrSU)

*misiuk@grsu.by*

Consider the circle  $|z| < 1$  in the complex plane, denoted as  $D$ . For values of  $0 < p \leq \infty$ , we represent the Lebesgue space of complex functions defined on  $D$  with respect to the standard Lebesgue measure, denoted as  $L_p(D)$  and equipped with the usual quasi-norm  $\|f\|_{L_p(D)}$ . Sobolev spaces, denoted as  $W_p^s(D)$ , have been extensively explored. The subsequent Sobolev embedding theorem is widely acknowledged [1]:

$$W_q^1(D) \subset L_p(D),$$

where  $2 \leq p < \infty$  and

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

It turns out that the following analogue of the inversion of this theorem holds for rational functions of a given degree.

**Theorem 1.** *Let  $p > 2$  and*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

*Then for any rational function  $r$  of degree at most  $n$  with poles outside the circle  $D$*

$$\|r\|_{W_q^1(D)} \leq c\sqrt{n}\|r\|_{L_p(D)},$$

*where  $c > 0$  and depends only on  $p$ .*

Note that this relation is exact in the sense of the parameters  $p$  and  $n$  included in it. Note that the accuracy with respect to the growth of the factor  $\sqrt{n}$  is easily confirmed by the example of the functions  $r(z) = z^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . The quasi-norm  $\|r\|_{W_q^1}$  cannot be replaced respectively by the quasi-norm  $\|r\|_{W_u^1}$  and for no  $u > q$ . This can be verified by the example of the simplest rational function  $r(z) = (z_0 - z)^{-1}$ , for  $|z_0| > 1$ .

It should be noted that various aspects of these relations and their applications were previously studied by the author in [2], [3].

## References

1. Stein E.M. Singular integrals and differentiability properties of functions / E.M. Stein. — Princeton Univ. Press, 1970. — 371 p.

2. Misiuk V.R. Refinement of inequalities and theorems of Bernstein type theory of rational approximations with respect to the plane Lebesgue measure / V.R. Misiuk // *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno*. — 2008. № 2 (68). — P. 22–31.

3. Misiuk V.R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // *Problems of physics, mathematics and technics*. — 2010. — №.1(2). — C. 34–37.

## PARAMETER FREE CONDITIONS OF THE CONTROLLABILITY OF THREE-TIME-SCALE LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

**C.A. Naligama, O.B. Tsekhan** (Belarus, YKSU)

*chammme@gmail.com, tsekhan@grsu.by*

Consider the following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant System with multiple commensurate delays in the slow state variables (TSPLTISD) in the matrix-operator form, where  $h = \text{const} > 0$ ,  $e^{-ph}$  is the delay operator such that  $e^{-ph}v(t) = v(t - h)$ ,  $e^{-jph}v(t) = v(t - jh)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}(e^{-ph})}{\varepsilon_1} & \frac{A_{12}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{13}}{\varepsilon_1} \\ \frac{A_{21}(e^{-ph})}{\varepsilon_2} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{23}}{\varepsilon_2} \\ \frac{A_{31}(e^{-ph})}{\varepsilon_2} & \frac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{33}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{\varepsilon_1} \\ \frac{B_2}{\varepsilon_1} \\ \frac{B_3}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} u(t), \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_3}$ , with initial conditions:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ ,  $x(\theta) = \varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$ .  $A_{i1}(e^{-ph}) \triangleq \sum_{j=0}^l A_{i1j}e^{-jph}$ ,  $i =$

$\overline{1, 3}$ , the matrix operators,  $A_{i1j}, A_{i2}, A_{i3}$ ,  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = \overline{0, l}$ , be constant matrices of appropriate dimensions;  $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$ ;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  the slow, fast and fastest variables, respectively;  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^{n_3}$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  a piecewise continuous  $n_1$ -vector function;  $u \in U$ ,  $U$  a set of piecewise continuous  $r$ -vector functions for  $t \geq 0$ . For simplicity,  $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  representation is used here on.

**Definition.** For a given  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ , TSPLTISD (1) is considered to be controllable, if for any fixed initial condition as stated, there exist a time moment  $t_1 < +\infty$ , and a piecewise continuous control  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , such that for this control and corresponding solution  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ ,  $t \geq 0$ , of the system (1) with the given initial conditions the following identities are valid:

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \equiv 0, u(t) \equiv 0, t \geq t_1.$$

For any given  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , the spectrum (the set of eigenvalues) of (1) can be represented as:

$$\sigma(\varepsilon) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \omega(\varepsilon, \lambda) = 0\}.$$

For  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , let's define a matrix-valued functions:  $N(\varepsilon, \lambda, e^{-\lambda h}) \triangleq [\lambda I_{n_1+n_2+n_3} - A(\varepsilon, e^{-\lambda h}), B(\varepsilon)]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$P(\varepsilon, z) \triangleq [B(\varepsilon), A(\varepsilon, z)B(\varepsilon), \dots, A^{n-1}(\varepsilon, z)B(\varepsilon)], z \in \mathbb{C}.$$

**Theorem 1.** *For a given  $\varepsilon_1 > 0$  and  $\varepsilon_2 > 0$  TSPLTISD (1) is controllable if and only if: I) rank  $N(\varepsilon, \lambda, e^{-\lambda h}) = n$ ,  $\forall \lambda \in \sigma(\varepsilon)$ , or [III.1] there exists,  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that: rank  $P(\varepsilon, e^{-\lambda h}) = n$ ; [III.2] rank  $N(\varepsilon, \lambda, e^{-\lambda h}) = n \forall \lambda \in \sigma(\varepsilon)$  such that, rank  $P(\varepsilon, e^{-\lambda h}) < n$ .*

**Objective.** The main objective of this paper is to obtain sufficient controllability conditions for the TSPLTISD (1), independent of small parameters and robust with respect to small parameters of perturbation, i.e valid for all of their sufficiently small values.

For,  $\det A_{33} \neq 0$  and  $\det [A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}] \neq 0$ , as discussed in [1], considering the system (1),  $n_1$ -dimensional degenerate system with delay (slow subsystem, DS), a  $n_2$ -dimensional  $\varepsilon_1$ - Boundary Layer System ( $\varepsilon_1$ -BLS) without delay and the  $n_3$ -dimensional,  $\varepsilon_2$ -Boundary Layer System ( $\varepsilon_2$ -BLS) without delay can be obtained:

**Theorem 2.** *Let small parameter free DS,  $\varepsilon_1$ -BLS, and  $\varepsilon_2$ -BLS be controllable, i.e. Then, there exist  $\varepsilon_1^* \in (0, \varepsilon_1^0]$  and  $\varepsilon_2^* \in (0, \varepsilon_2^0]$  such that TSPLTISD (1) is controllable for all  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$  and  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ .*

**Summary of the Proof.** In [1], decomposition of (1) into its equivalent subsystems with separated motions without compromising the qualitative behaviors, and in [2], possibility of the asymptotic decomposition of (1) into small parameter free slow, fast and fastest subsystems have been extensively discussed. It can be proven that the degenerate system and the boundary layer systems represent asymptotic decomposition of the original TSPLTISD (1). With reference to those works, in this work with the use of deduction, it is proven that the robust sufficient conditions for the controllability of the TSPLTISD (1) can be determined based on the controllability criterion of its DS and the two BLSs of the TSPLTISD (1).

## References

1. Naligama C.A., Tsekhan O.B. Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation. Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // — 2021. — pp. 27–36.

2. Naligama C.A. Asymptotic approximations validity boundaries for decoupling transformation of three-time-scale time-invariant singularly perturbed systems with delay In Problems of Physics, Mathematics and Technics (Issue 2, pp. 83–93) / C.A. Naligama, , O.B. Tsekhan // — 2022, Francisk Skorina Gomel State University. [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_83](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_83)

## LIOUVILLE FOLIATION IN THE CONSTRAINED PROBLEM OF THREE MAGNETIC VORTICES

**G.P. Palshin** (Dolgoprudny, MIPT)

*palshin.gp@phystech.edu*

We study the generalized constrained three-vortex problem (see [1], [2]), which describes the motion of vortices in a perfect fluid and a ferromagnetic medium. One of three vortices is fixed at the origin and is called topographic since it is responsible for reflecting topographic irregularity (see [3], [4]). The model is Hamiltonian:

$$H = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \ln |r_1| + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln |r_2| + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \ln |r_1 - r_2|,$$

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

where  $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$  is a vortex coordinate,  $\Gamma_\alpha$  is a constant relative vortex intensity, and  $\lambda_\alpha$  is a constant relative vortex polarity, which takes values  $+1$  or  $-1$  depending on the direction of magnetization. Moreover, the system admits an additional first integral of motion

$$F = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2,$$

so it is completely Liouville-integrable with two degrees of freedom.

Recent research has shown that for some values of the system parameters, the Liouville foliation contains complex 3-atoms, namely the atom-bifurcation  $D_1$ , the surgery of one Liouville torus into three (see Fig. 1, a), and the atom  $D_2$ , the bifurcation two Liouville tori into two through the same singular fiber  $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1)$  (see Fig. 1, b).

The first type of bifurcation (atom  $D_1$ ) was previously found in another generalized vortex model (see [5]) and in the Goryachev–Chaplygin–Sretensky integrable case of rigid body dynamics (see [6]). The

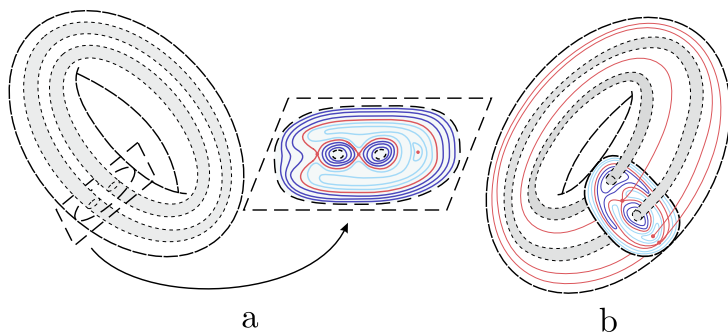


Fig. 1: Isoenergy 3-manifold and its Liouville foliation containing 3-atom  $D_1$  (a) and 3-atom  $D_2$  (b).

second type (atom  $D_2$ ) was numerically found by A.Yu. Moskvin in [7] for the Dullin–Matveev integrable case on a sphere [8].

Moreover, despite the compactness of all the bifurcations, the isoenergy surface turns out to be noncompact and diffeomorphic to an interior of an oriented toric saddle (or so-called pants).

### Литература

1. Palshin G.P. On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics / G.P. Palshin // Theor. Math. Phys. — 2022. — Vol. 212, No. 1. — P. 972–983.
2. Palshin G.P. Topology of the Liouville foliation in the generalized constrained three-vortex problem / G.P. Palshin // Mat. Sb. — 2024. — Vol. 215, No. 5. (in press).
3. Sutyurin G.G. Integrable motion of a vortex dipole in an axisymmetric flow / G.G. Sutyurin, X. Perrot, X. Carton // Physics Letters A — 2008. — Vol. 372. — P. 5452–5457.
4. Koshel K.V. Entrapping of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. I. Point vortices / K.V. Koshel, J.N. Reinaud, G. Riccardi, E.A. Ryzhov // Phys. Fluids — 2018. — Vol. 30, No. 9. — P. 096603.
5. Ryabov P.E. Bifurcation diagram of one generalized integrable model of vortex dynamics / P.E. Ryabov, A.A. Shadrin // Regul. Chaotic Dyn. — 2019. — Vol. 24, No. 4. — P. 418–431.
6. Kharlamov M.P. Topological analysis of integrable problems in the dynamics of a rigid body / M.P. Kharlamov. — Leningrad: Leningr. Gos. Univ., 1988. — 144 p.

7. Moskvina A.Yu. Topology of the Liouville foliation on a 2-sphere in the Dullin–Matveev integrable case / A.Yu. Moskvina // Sb. Math. — 2008. — Vol. 199, No. 3. — P. 411–448.

8. Dullin H.R. A new integrable system on the sphere / H.R. Dullin, V.S. Matveev // Math. Res. Lett. — 2004. — Vol. 11, No. 5–6. — P. 715–722.

## EQUIVALENT SEMI-NORMS FOR NIKOLSKII-BESOV SPACES

**A. Senouci** (Algeria, University of Tiaret)  
*kamer295@yahoo.fr*

In this work we establish the equivalence of various semi-norms involving differences for Nikolskii-Besov spaces on an interval (for details, see [2]).

We start with recalling the definitions of Nikol'skii-Besov spaces  $B_{p,\theta}^l(a,b)$  and semi-normed Nikol'skii-Besov spaces  $b_{p,\theta}^l(a,b)$  (see [1]).

**Definition 1.** Let  $l > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > l$ ,  $1 \leq p$ ,  $\theta \leq \infty$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq k$ , and  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Then  $f \in b_{p,\theta}^l(a,b)$  if  $f$  is measurable on  $(a,b)$  and the following semi-norms are finite

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)} = \left( \int_0^{\frac{b-a}{k}} \left( \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p(a,b-kh)}}{h^l} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (1)$$

if  $1 \leq \theta < \infty$  and

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)} = \sup_{h \in (0, \frac{b-a}{k})} \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p(a,b-kh)}}{h^l}, \quad (2)$$

if  $\theta = \infty$ .

Moreover,  $B_{p,\theta}^l(a,b) = b_{p,\theta}^l(a,b) \cap L_p(a,b)$  with the norm

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^l(a,b)} = \|f\|_{L_p(a,b)} + \|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)},$$

here  $\Delta_h^k f$  is the difference of order  $k$  of  $f$  with step  $h$ :

$$(\Delta_h^k f)(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x + mh).$$

Let for  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq k$ ,

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)}^{(1)} = \left( \int_0^{\frac{b-a}{\alpha_1+\alpha_2}} \left( \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p(a+\alpha_1 h, b-\alpha_2 h)}}{h^l} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (3)$$

if  $1 \leq \theta < \infty$  and

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)} = \sup_{h \in (0, \frac{b-a}{\alpha_1+\alpha_2})} \|\Delta_h^k f\|_{L_p(a+\alpha_1 h, b-\alpha_2 h)} \quad (4)$$

if  $\theta = \infty$ .

Respectively,

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)} = \|f\|_{L_p(a,b)} + \|f\|_{b_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)}.$$

**Lemma 1.** Let  $E_1, E_2$  be semi-normed spaces with the corresponding semi-norms  $\|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_{E_2}$ ,  $E_1 \subset E_2$  and  $\theta_1 = \{g \in E_1 : \|g\|_{E_1} = 0\} = \theta_2 = \{g \in E_2 : \|g\|_{E_2} = 0\}$ . Furthermore, let the space  $E_1$  be complete with respect to the semi-norms  $\|\cdot\|_{E_1}$  and  $\|\cdot\|_{E_1} + \|\cdot\|_{E_2}$ . Then there exists  $c_5 > 0$  such that

$$\|f\|_{E_2} \leq c_5 \|f\|_{E_1} \quad (5)$$

for all  $f \in E_1$ .

**Theorem 1.** Let  $l > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > l$ ,  $1 \leq p$ ,  $\theta \leq \infty$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq k$ . Then for an arbitrary interval  $(a, b)$  the semi-norms  $\|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)}$  and  $\|f\|_{b_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)}$  are equivalent. Moreover, there exists  $c_4 > 0$  is depending only on  $l, k, p, \theta, \alpha_1$  and  $\alpha_2$  such that

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)} \leq \|f\|_{b_{p,\theta}^l(a,b)} \leq c_4 \|f\|_{b_{p,\theta}^1(a,b)}^{(1)} \quad (6)$$

for all  $f \in b_{p,\theta}^l(a, b)$ .

The proof of Theorem 1 will be based on Corollary 1.1 (see [2]) a general statement (Lemma 1) for semi-normed space connected with application of the Banach theorem on the boundedness of an inverse operator and the inclusion  $b_{p,\theta}^l(a, b) \subset L_p(a, b)$ , proved in [3].

## References

1. Besov O.V. Integral representations of functions and Embedding Theorems / O.V. Besov, V.P. IL'in, S.M. Nikol'skii // 1st Edition, Nauka, Moscow, 1975 (in Russian); 2nd Edition, Nauka, Moscow, 1996 (in Russian). (English transl. of 1st edition, Vol. 1,2, Wiley, Chichester, 1979).



2. Burenkov V.I. Equivalent semi-norms for Nikol'skii-Besov spaces / V.I. Burenkov, A. Senouci // Eurasian Math. J., 2023. — V.14, n. 4 —15-22.

3. Kalyabin G.A., On functions with differences from  $L_{p(0,1)}$  / G.A. Kalyabin // Dokl. Math., — 2015. — V. 91, — P. 163-166.  
<https://doi.org/10.1134/S1064562415020155>

## A FREE BOUNDARY PROBLEM FOR THE PREDATOR-PREY MODEL WITH FEAR EFFECT

**J.O. Takhirov** (Tashkent, Institute of Mathematics)  
*[prof.takhirov@gmail.com](mailto:prof.takhirov@gmail.com)*

Fear of predators is a well-recognized phenomenon that occurs as a result of predation in a natural food chain or food web ecosystem. Wang et al. [1] published the first food chain model that considered the effect of fear of predators on the growth rate of prey. The indirect effects of fear have been studied by incorporating it into several food web and food web models in different ecological contexts. Some recent studies and field experiments suggest that predators influence their prey through more than just direct capture; they also cause fear in prey species, which reduces their rate of reproduction.

Due to the increasingly in-depth discussion of prey-predator models, more and more elements were introduced into the model. By introducing the effect of fear [2], it is concluded that the prey's fear of a predator changes the rules of its growth and development. The presence of a predator can significantly alter the behavior of the prey to the point that it can influence the prey more influentially than direct predation. Various models of the fear effect have been proposed, consisting of an ODE system.

In [3], the authors propose a mathematical model of the food chain system of an ecological community. Three species are considered: prey, intermediate predator, and primary predator, with their densities denoted  $x(t)$ ,  $y(t)$  and  $z(t)$ , respectively, at time  $t > 0$ . The model is

formulated based on a number of ecological assumptions

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= r_x - dx^2 - \alpha_1 \frac{xy}{m+x}, \\
 \frac{dy}{dt} &= \theta_1 \alpha_1 \frac{xy}{m+x} - \delta_1 y - \delta_2 y^2 - \alpha_2 yz, \\
 \frac{dz}{dt} &= \frac{\eta z}{1 + \eta_0 z} + \theta_2 \alpha_2 yz - \delta_3 z,
 \end{aligned} \tag{1}$$

where the initial population density is considered positive. In system (1), the value of the parameter  $\eta$  must be greater than the value of  $\delta_3$  - the natural mortality of top predators. Theoretical studies of predator-prey dynamics and food web structure have largely focused on specialist predators. However, it is critical to recognize the importance of generalist predators in the ecosystem as they contribute significantly to the maintenance of biodiversity and serve as effective biocontrol agents.

In this study, we constructed a food chain model that included three distinct species: prey, intermediate predators (specialists), and top predators (generalists).

Based on (1), we propose the following model that controls the spatiotemporal evolution of the prey-predator system as well as free boundaries

$$\begin{aligned}
 u_t - d_1 u_{xx} &= ru - du^2 - \alpha_1 \frac{uv}{m+u}, t > 0, -l < x < l, \\
 v_t - d_2 v_{xx} &= \theta_1 \alpha_1 \frac{uv}{m+u} - \delta_1 v - \delta_2 v^2 - \alpha_2 vw, t > 0, g(t) < x < h(t), \\
 w_t - d_3 w_{xx} &= \eta \frac{w}{1 + \eta_0 w} + \theta_2 \alpha_2 vw - \delta_3 w, t > 0, g(t) < x < h(t), \\
 v(t, x) &= w(t, x) = 0, t > 0, x \notin (g(t) < x < h(t)), \\
 g'(t) &= -\mu wx(t, g(t)), h'(t) = -\mu wx(t, h(t)), t > 0, \\
 u(0, x) &= u_0(x), -l < x < l, v(0, x) = v_0(x), w(0, x) = w_0(x), \\
 -h_0 &< x < h_0, h(0) = -g(0) = h_0.
 \end{aligned}$$

Here all initial functions and parameters are positive.

The existence, uniqueness and uniform estimates of the global solution are proved, as well as the behavior of unknown boundaries with an unlimited increase in time. With the help of the basic reproductive number  $R_0$ , sufficient conditions are created for the spread or extinction of species.

## References

1. Wang X. Modelling the fear effect in predator–prey interactions / X. Wang, L. Zanette, X. Zou // J. Mathematical Biology. — 2016. — V. 73, № 5. — pp. 1179–1204.
2. He M. Stability of a fear effect predator–prey model with mutual interference or group defense / M. He, L. Zhong // J. Biological Dynamics. — 2022. — V. 16, № 1. — pp. 480–498.
3. Pal S. Fear effect in a three-species food chain model with generalist predator / S. Pal, P.K. Tiwari, A.K. Misra, H. Wang // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2022. — V. 21, № 1. — pp. 1–33.

## STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. FOURTH TRIPLET STATE

**S.M. Tashpulatov** (Tashkent, INP)

*sadullatashpulatov@yandex.com*

We consider of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system for fourth triplet state. Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}.$$

Here  $A$  is the electron energy at a lattice site,  $B$  is the transfer integral between neighboring sites,  $\tau = \pm e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu$ , where  $e_j$  are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors,  $U$  is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons,  $\gamma$  is the spin index,  $\gamma = \uparrow$  or  $\gamma = \downarrow$ , and  $a_{m,\gamma}^+$  and  $a_{m,\gamma}$  are the respective electron creation and annihilation operators at a site  $m \in Z^\nu$ . In the six electron systems has a octet state, and quintet states, and triplet states, and singlet states. The energy of the system depends on its total spin  $S$ . Along with the Hamiltonian, the  $N_e$  electron system is characterized by the total spin  $S$ ,  $S = S_{max}, S_{max} - 1, \dots, S_{min}$ ,  $S_{max} = \frac{N_e}{2}$ ,  $S_{min} = 0, \frac{1}{2}$ .

Hamiltonian  $H$  commutes with all components of the total spin operator  $S = (S^+, S^-, S^z)$ , and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on  $S$ . The Hamiltonian

$H$  acts in the antisymmetric Fock space  $\mathbf{H}_{as} = l_2^{as}((Z^\nu)^6)$ , where  $l_2^{as}((Z^\nu)^6)$  is the subspace of antisymmetric functions of  $l_2((Z^\nu)^6)$ . Let  $\varphi_0$  be the vacuum vector in the space  $\mathbf{H}_{as}$ . The fourth triplet state corresponds to the free motion of six electrons over the lattice and their interactions with the basic functions  ${}^4t_{p,q,r,k,k,m,n \in Z^\nu}^0 = a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0$ . The subspace  ${}^4\mathbf{H}_t^1$ , corresponding to the fourth triplet state is the set of all vectors of the form  ${}^4\psi_t^1 = \sum_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu} f(p,q,r,k,m,n) {}^4t_{p,q,r,k,k,m,n \in Z^\nu}^1$ ,  $f \in l_2^{as}$ , where  $l_2^{as}$  is the subspace of antisymmetric functions in the space  $l_2((Z^\nu)^6)$ . We denote by  ${}^4H_t^1$  the restriction of operator  $H$  to the subspace  ${}^4\mathbf{H}_t^1$ .

**Theorem 1.** *If  $\nu = 1$  and  $U < 0$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  consists of the union of four segments:  $\sigma_{ess}({}^4H_t^1) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + e + z_2, b + f + z_2] \cup [c + e + z_1, d + f + z_1] \cup [e + z_1 + z_2, f + z_1 + z_2]$ , and discrete spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  is empty:  $\sigma_{disc}({}^3H_s^0) = \emptyset$ , here and hereafter  $a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$ ,  $b = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$ ,  $c = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$ ,  $d = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$ ,  $e = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$ ,  $f = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$ , and  $z_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$ ,  $z_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$ , where  $\Lambda_1 = \lambda + \gamma$ ,  $\Lambda_2 = \mu + \theta$ , and  $\Lambda_3 = \eta + \xi$ , and  $\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi$  are the quasimomentum of the electrons.*

**Theorem 2.** *If  $\nu = 1$  and  $U > 0$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  consists of the union of four segments:  $\sigma_{ess}({}^4H_t^1) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [e + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2]$ , and discrete spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  is empty:  $\sigma_{disc}({}^4H_t^1) = \emptyset$ . Here  $\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$ ,  $\tilde{z}_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$ .*

Let  $\nu = 3$ , and  $U < 0$ ,  $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$ ,  $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ , and  $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$ , and  $W$  – Watson integral.

**Theorem 3.** *a). If  $U < 0$ , and  $U < -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$ , and  $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ , or  $U < -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$ , and  $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  consists of the union of fourth segments:  $\sigma_{ess}({}^4H_t^1) = [a_1' + c_1 + e_1, b_1' + d_1 + f_1] \cup [a_1' + e_1 + z_2', b_1' + f_1 + z_2'] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$ , and discrete spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  is empty:  $\sigma_{disc}({}^4H_t^1) = \emptyset$ , here  $a_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$ ,  $b_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$ ,  $c_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ ,  $d_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ ,*

$e_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$ ,  $f_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ , and  $z'_1, z'_2$  are the same concrete numbers.

b). If  $-\frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$  and  $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ , or  $-\frac{12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$  and  $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  consists of the union of two segments:  $\sigma_{ess}({}^4H_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z'_2, b_1 + f_1 + z'_2]$ , or  $\sigma_{ess}({}^4H_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z'_1, d_1 + f_1 + z'_1]$ , and discrete spectrum of the operator  ${}^4H_t^1$  is empty:  $\sigma_{disc}({}^4H_t^1) = \emptyset$ .

# Именной указатель

- Абду Рауф Ч.М., 163  
Абдулрахман Х.Н., 33  
Абдурагимов Г.Э., 35  
Абдувахобов Д.А., 32  
Ал-Гарайхоли И.А.Х., 36  
Алексамян Д.А., 393  
Амосов А.А., 38, 40  
Андрианова А.А., 42, 320  
Анистратова Н.А., 44  
Антонов Д.Д., 48  
Арсеньева О.Е., 301  
Асхабов С.Н., 50  
Асхатов Р.М., 52  
Бахтина Ж.И., 384  
Барышева И.В., 341  
Баринов А.М., 55  
Баскаков А.Г., 58  
Баззаев А.К., 54  
Беднаж В.А., 389  
Бекежанова В.Б., 60  
Белова Д.В., 62  
Бетина А.С., 63, 64  
Быстрецкий М.В., 253  
Бирюков А.М., 66  
Бондарев А.С., 44, 67  
Боревич Е.З., 68  
Борисов Д.И., 69  
Будочкина С.А., 70  
Буксаева Л.З., 207  
Булатов Ю.Н., 72  
Булинская Е.В., 74  
Бунтова Я.С., 75  
Бурлуцкая М.Ш., 64  
Царев С.Л., 196  
Царьков И.Г., 371  
Цехан О.Б., 374  
Чебакова В.Ю., 48  
Чеб Е.С., 376  
Черепова М.Ф., 125  
Черкашин Д.А., 378  
Чирский В.Г., 160  
Читоркин Е.Е., 380  
Чуб Е.Г., 131, 382  
Чурсин В.Ю., 211  
Дайняк В.В., 110  
Давыдова М.Б., 107  
Дмитриев М.С., 48  
Добрынина И.В., 343  
Дородный М.А., 114  
Дубцов Е.С., 117  
Дубинский Ю.А., 115  
Джабраилов А.Л., 112  
Егорова А.Ю., 119  
Емельянов Д.П., 121  
Ерусалимский Я.М., 33, 122  
Эгамов А.И., 403  
Федоров К.Д., 355  
Федоров Ю.С., 292  
Филатов В.В., 357  
Филиппов М.Н., 359  
Фомин В.И., 360  
Фордук К.В., 134

- Фролова Е.В., 341  
 Фролов Д.Г., 205  
 Гаджиева Г.Р., 146  
 Гаркавенко Г.В., 58  
 Гарманова Т.А., 89  
 Гаврилова А.В., 163  
 Герасименко В.А., 91  
 Гермидер О.В., 94  
 Гетманова Е.Н., 256  
 Гилёв Н.И., 60  
 Гладышев Ю.А., 96  
 Годжаева Х.Р., 209  
 Голованева Ф.В., 135  
 Головкин Н.И., 283  
 Горелов В.А., 98, 100, 102  
 Горшков А.В., 103  
 Гридяева Т.В., 384  
 Григорьева Е.И., 105  
 Гурина Е.И., 329  
 Хабибуллин Б.Н., 365  
 Хацкевич В.Л., 367  
 Харитонов С.В., 301  
 Хороших Е.Д., 211  
 Хромов А.П., 177  
 Ибадов Э.Дж., 146  
 Иванова М.С., 148  
 Качкина А.В., 156  
 Калинин А.В., 150  
 Калитвин В.А., 238  
 Калманович В.В., 359  
 Каманда Бонгай А.Б., 79  
 Каменский М.И., 137, 152  
 Каплан Д.А., 152  
 Катрахова А.А., 154  
 Казимиров Д.Д., 89  
 Кыров В.А., 213  
 Клячин А.А., 158  
 Клячин В.А., 158  
 Кокурин М.М., 163, 165, 167  
 Кокурин М.Ю., 162  
 Колесникова И.А., 168  
 Колесникова И.В., 170  
 Колесников Г.В., 168  
 Коненков А.Н., 171  
 Корнева П.С., 152  
 Корнев С.В., 256  
 Корнев В.В., 175, 177  
 Коробецкая Ю.И., 283  
 Коростелева Д.М., 184  
 Коровина М.В., 182  
 Корзюк В.И., 173  
 Костенко Е.И., 190  
 Костерин Д.С., 192  
 Костина Л.Н., 58  
 Костин Д.В., 194, 196  
 Костин В.А., 194  
 Кос О.И., 186, 188  
 Козко А.И., 160  
 Козловская И.С., 173  
 Крымов Н.Е., 38, 40  
 Кудрявцев К.Н., 197  
 Кулаев Р.Ч., 202  
 Куликов А.Н., 205  
 Куликов Д.А., 205  
 Кунаковская О.В., 91  
 Купцов В.С., 154  
 Курбанов В.М., 207, 209  
 Курбатов В.Г., 211  
 Кузенков О.А., 200  
 Лапшина М.Г., 238  
 Латыпова Н.В., 218  
 Латыпов И.А., 218  
 Латушкин К.В., 110  
 Лаврентьева М.А., 215  
 Лазарев Н.П., 217  
 Лепетков Д.Р., 220  
 Левина Л.В., 215  
 Лысенко В.В., 233  
 Лобанова Н.И., 222  
 Лобода Н.А., 224

Ломовцев Ф.Е., 228, 233, 353  
Ломов И.С., 226  
Лошкарева Е.А., 96  
Луговская Ю.П., 232  
Лужина Л.М., 160  
Ляхов Л.Н., 238, 240  
Манита Л.А., 296  
Манучарова С.Е., 384  
Маркина Е.И., 245  
Машкин М.Н., 246  
Мазепа Е.А., 243  
Мажгихова М.Г., 242  
Мельников Н.Б., 248  
Мышеловка Л.А., 251  
Мочалов С.А., 42  
Мозохина А.С., 250  
Наимов А.Н., 253  
Никитина С.А., 255  
Обуховский В.В., 256, 258  
Орлов К.И., 102  
Орлов В.П., 260  
Ощепкова С.Н., 262  
Пахмутов Д.А., 167  
Паймеров С.К., 165  
Панов Е.Ю., 263  
Пасынков Д.В., 167  
Пастухова С.Е., 265  
Пенкин О.М., 267  
Пеньков В.Б., 215  
Перескоков А.В., 268  
Петросян Г.Г., 258, 271  
Петрова А.А., 67  
Петров И.В., 270  
Пировских О.М., 67  
Пискарев С.И., 273  
Плиева А.В., 54  
Погребняк М.А., 274  
Половинкина М.В., 276  
Половинкин И.П., 276  
Попов А.Ю., 160

Попов И.Е., 279  
Попов В.Н., 94  
Поздняков А.А., 267  
Прокопьева Д.Б., 283  
Провоторова Л.В., 281  
Прядиев В.Л., 285  
Раецкая Е.В., 145, 286  
Раецкий К.А., 288  
Райцин А.М., 290  
Расулов А.Б., 292, 294  
Резер Б.И., 248  
Резникова А.С., 279  
Рыхлов В.С., 303  
Ронжина М.И., 296  
Россовский Л.Е., 298  
Рощупкин С.А., 240  
Русаков В.А., 299  
Рустанов А.Р., 301  
Рябошлыкова Д.К., 243  
Сабитов К.Б., 307  
Сакбаев В.Ж., 311  
Седых И.А., 312, 314  
Сергеева А.М., 292  
Силаева М.Н., 194  
Ситников К.С., 320  
Смирнов В.Ю., 186, 188, 246  
Солиев Ю.С., 322  
Солонченко Р.Е., 327  
Соловьёв П.С., 325  
Сомова П.А., 329  
Сорока М.С., 258  
Спивак А.С., 262  
Сташ А.Х., 224  
Стенюхин Л.В., 331  
Степанов А.В., 333  
Степович М.А., 359  
Стругов И.В., 312  
Струков М.И., 143  
Сулейманов Р.Р., 69  
Сёмина В.В., 316, 318



- Сёмин Г.В., 316, 318  
 Шабров С.А., 135, 384, 385  
 Шайна Е.А., 385  
 Шамолин М.В., 387  
 Шамоян Р.Ф., 389  
 Шананин Н.А., 391  
 Шананин В.А., 393  
 Шаполова И.М., 395  
 Шефер И.А., 60  
 Шейпак И.А., 89  
 Шкурай И.А., 397  
 Шмырин А.М., 318  
 Шорохов С.Г., 399  
 Шубарин М.А., 401  
 Тамарова Ю.А., 81  
 Тамбовцев А.А., 314  
 Тарабанько А.А., 196  
 Теволде А.М., 335  
 Тырсин А.Н., 345  
 Титаренко С.А., 337  
 Тотиева Ж.Д., 339  
 Товсултанов А.А., 298  
 Трусова Н.И., 341  
 Турбин М.В., 141  
 Туренова Е.Л., 343  
 Туртин Д.В., 359  
 Тюхтина А.А., 150  
 Ульвачёва Т.А., 347  
 Уртаева А.А., 349  
 Ускова Н.Б., 58  
 Усков В.И., 351  
 Устилко Е.В., 353  
 Ушаков С.Н., 148  
 Васильев В.Б., 78, 79  
 Вельмисов П.А., 81  
 Вирченко Ю.П., 127, 251, 327,  
     335, 378, 395  
 Виситаева М.Б., 83, 86  
 Волков П.Е., 102  
 Якивчик Н.В., 294  
 Янченко А.Я., 405  
 Яремко Н.Н., 222  
 Задорожная Н.С., 131, 382  
 Зайцева Н.В., 133  
 Закора Д.А., 134  
 Завьялова Т.В., 129  
 Зубков П.В., 115  
 Зубова С.П., 145  
 Зверева М.Б., 137  
 Зверев А.А., 135  
 Звягин А.В., 139, 143  
 Звягин В.Г., 141  
 Жалукевич Д.С., 124  
 Женьякова И.В., 125  
 Жильцова В.В., 127  
 Gebreslasie H. F., 407  
 Korzyuk V.I., 409  
 Kovalevsky A.A., 411  
 Kuzenkov O.A., 414  
 Litvinova K.V., 413  
 Litvinov V.L., 413  
 Medvedev A.V., 414  
 Misiuk V.R., 418  
 Naligama C.A., 419  
 Palshin G.P., 421  
 Rudzko J.V., 409  
 Senouci A., 423  
 Takhirov J.O., 425  
 Tashpulatov S.M., 427  
 Tsekhan O.B., 419  
 Vasilyev V. B., 407

Н а у ч н о е и з д а н и е

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ  
ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.  
ПОНТРЯГИНСКИЕ  
ЧТЕНИЯ — XXXV**

**Материалы Международной  
Воронежской весенней математической школы**

**(26–30 апреля 2024 г.)**

*Издано в авторской редакции*

Верстка и подготовка оригинал-макета

*Д. Э. Кондаурова*

Подписано в печать 05.07.2024. Формат 60×84/16.

Усл. п. л. 25,3. Тираж 25 экз. Заказ 294

Издательский дом ВГУ

394018 Воронеж, пл. Ленина, 10

Отпечатано с готового оригинал-макета

в типографии Издательского дома ВГУ

394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3