Код Рида-Маллера

Илья Коннов
Факультет компьютерных наук
Высшая Школа Экономики

15 марта 2022 г.

Существует три различных варианта этого доклада:

1. Краткая презентация, которую несложно рассказать, но может быть сложно понять (ReedMuller-trans.pdf).
2. Более длинная презентация с ценными комментариями, дополнительными доказательствами и интересными фактами (ReedMuller-slides.pdf).
3. Текстовая статья со всем содержимым длинной презентации, комментариями на своих местах, а также бонусным приложением с более подробным описанием алгоритма (ReedMuller-article.pdf). **Вы сейчас читаете именно эту версию.** Невошедшее в презентацию помечено линиями слева, а названия слайдов можно найти справа.

Их все можно посмотреть здесь: https://sldr.xyz/ReedMuller/

По любым вопросам: r-m@sldr.xyz или t.me/iliago или vk.com/iliago.

Содержание

1 Введение 3

2 Кодирование 4

3 Свойства кода 7
- 3.1 Конструкция Плоткина . . . 8
- 3.2 Минимальное расстояние . . . 9
- 3.3 Параметры . . . 10

4 Декодирование 11
- 4.1 Алгоритм Рида . . . 12
  - 4.1.1 Пример . . . 13

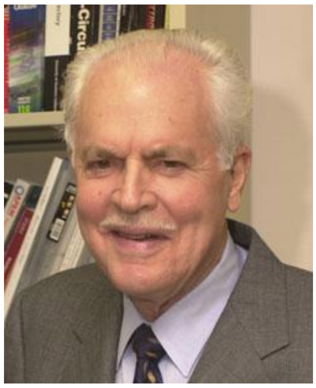
5 Домашнее задание 15

6 Источники 16

A Reed's Algorithm: Unique decoding up to half the code distance 17
- A.1 Дополнительные доказательства . . . 19
- A.2 Реализация алгоритма . . . 22

Код описан Дэвидом Маллером (автор идеи) и Ирвингом Ридом (автор метода декодирования) в сентябре 1954 года.

Авторы



Введение

Обозначается как $\mathrm{RM}(r, m)$, где r — ранг, а 2^m — длина кода. Кодирует сообщения длиной $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^i$ при помощи 2^m бит. Традиционно, считается что коды бинарные и работают над битами, т.е. $\mathbb{F}_2$.

Соглашение: сложение векторов $u, v \in \mathbb{F}_2^n$ будем обозначать как $u \oplus v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$.

1 Введение

Булевы функции и многочлен Жегалкина

Всякую булеву функцию можно записать при помощи таблицы истинности:

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Или при помощи многочлена Жегалкина:

$$f(x, y) = xy + x + y + 1$$

Многочлены Жегалкина

В общем случае, многочлены будут иметь следующий вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{S \subseteq \{1,...,m\}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

Например, для $m = 2$: $f(x_1, x_2) = c_{12} \cdot x_{\{1\}} x_2 + c_{\{2\}} \cdot x_2 + c_{\{1\}} \cdot x_1 + c_{\varnothing} \cdot 1$
Всего $n = 2^m$ коэффициентов для описания каждой функции.

Функции небольшой степени

Рассмотрим функции, степень многочленов которых не больше r:

$$\{f(x_1, x_2, ..., x_m) \mid \deg f \leq r\}$$

Каждую можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,...,m\} \\ |S| \leq r}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

В каждом произведении используется не больше r переменных.

Замечу, что при $S = \varnothing$, мы считаем, что $\prod_{i \in S} x_i = 1$, таким образом всегда появляется свободный член.

Сколько тогда всего коэффициентов используется?

$$k = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^r = \sum_{i=0}^{r} C_m^i$$

Если говорить несколько проще, то для составления многочленов мы сложим сначала одночлены $(x+y+z+...)$, затем произведения одночленов $(xy+yz+xz+...)$ и т.д. вплоть до r множителей (поскольку мы работаем в поле $\mathbb{F}_2$, здесь нету x^2, y^2, z^2, т.к. $a^2 = a$). Тогда легко видеть, почему k именно такое: мы складываем все возможные перестановки сначала для 0 переменных, потом для одной, двух, и так вплоть до r (не не больше, ведь $\deg f \leq r$).

2 Кодирование

Идея кодирования

Пусть каждое сообщение (длины k) — коэффициенты многочлена от m переменных степени не больше r. Тогда мы можем его представить при помощи 2^m бит, подставив все возможные комбинации значений переменных. Их 2^m, поскольку рассматриваем многочлены только над $\mathbb{F}_2$ от m переменных. Таким образом получим таблицу истинности, из которой позднее сможем восстановить исходный многочлен, а вместе с ним и сообщение.

Зафиксировав в таблице порядок строк, можно выделить **вектор значений**, который и будет кодом.

$$\begin{array}{cc|c} x & y & f(x,y) \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \implies \mathrm{Eval}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор значений — обозначается $\mathrm{Eval}(f)$ — столбец таблицы истинности, содержащий значения функции. Имеет смысл только при зафиксированном порядке строк в таблице. У меня он везде самый обычный, как в примере выше.

Пример

Здесь и далее я для краткости и удобства записываю битовые векторы не как $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а как `1001` при помощи нескучного шрифта.

Для кодирования очень важно понимать, как именно биты сообщения ставятся в соответствие коэффициентам многочлена. Поэтому давайте введём **соглашение**: если упорядочить элементы множества у каждого коэффициента по возрастанию, то коэффициенты сортируются в лексикографическом порядке: $c_{1,2}$ раньше $c_{1,3}$, поскольку $2 < 3$ и $c_{2,3}$ раньше $c_{3,4}$, поскольку $2 < 3$.

Пример для $m = 4$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_{\{1,2,3,4\}} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ + c_{\{1,2,3\}} x_1 x_2 x_3 + c_{\{1,2,4\}} x_1 x_2 x_4 + c_{\{1,3,4\}} x_1 x_3 x_4 + \\ + c_{\{2,3,4\}} x_2 x_3 x_4 \\ + c_{\{1,2\}} x_1 x_2 + c_{\{1,3\}} x_1 x_3 + c_{\{1,4\}} x_1 x_4 + c_{\{2,3\}} x_2 x_3 + \\ + c_{\{2,4\}} x_2 x_4 + c_{\{3,4\}} x_3 x_4 \\ + c_{\{1\}} x_1 + c_{\{2\}} x_2 + c_{\{3\}} x_3 + c_{\{4\}} x_4 + c_{\varnothing} \end{aligned}$$

Также можно кодировать множества при помощи битов, используя отношение $x \in A \iff v_x = 1$ (нумерация битов слева направо, начиная с единицы), где свойство остортированности сохраняется и хорошо видно (но только в пределах группы мнономов одной степени):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_{\texttt{1111}} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ + c_{\texttt{1110}} x_1 x_2 x_3 + c_{\texttt{1101}} x_1 x_2 x_4 + c_{\texttt{1011}} x_1 x_3 x_4 + c_{\texttt{0111}} x_2 x_3 x_4 \\ + c_{\texttt{1100}} x_1 x_2 + c_{\texttt{1010}} x_1 x_3 + c_{\texttt{1001}} x_1 x_4 + c_{\texttt{0110}} x_2 x_3 + \\ + c_{\texttt{0101}} x_2 x_4 + c_{\texttt{0011}} x_3 x_4 \\ + c_{\texttt{1000}} x_1 + c_{\texttt{0100}} x_2 + c_{\texttt{0010}} x_3 + c_{\texttt{0001}} x_4 + c_{\texttt{0000}} \end{aligned}$$

С помощью этого примера легко увидеть порядок для всех остальных конфигураций кода, если вычеркнуть заведомо невозможные слагаемые (напр., содержащие x_4 для $m = 3$ или мономы слишком большой степени для $r < 4$).

- $r = 1$ (степень многочлена), $m = 2$ (переменных). Это $\mathrm{RM}(1, 2)$.
- Тогда наш многочлен: $f(x_1, x_2) = c_{\{2\}} x_2 + c_{\{1\}} x_1 + c_{\varnothing}$.
- Сообщение: `011`, тогда $f(x_1, x_2) = 0 + x_1 + 1$.
- Подставим всевозможные комбинации:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

> Обратите внимание на то, какой используется порядок переменных в таблице истинности. Очень важно чтобы при кодировании и декодировании было согласие и взаимпонимание касательно того, какому набору переменных соответствует каждая строчка.

- Получили код: $\mathrm{Eval}(f) =$ `1100`.

Декодирование когда потерь нет

Теперь покажем, как можно декодировать когда потерь нет. Этот пример — продолжение предыдущего.

- Мы получили код: `1100`

- Представим таблицу истинности.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

- Подстановками в $f(x_1, x_2) = c_2x_2 + c_1x_1 + c_0$ получим СЛАУ.

$$\begin{cases} & & & & c_0 & = & 1 \\ & & c_2 & + & c_0 & = & 1 \\ c_1 & + & & & c_0 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & c_0 & = & 0 \end{cases}$$

- $c_{\{1\}} = 1, c_{\{2\}} = 0, c_{\varnothing} = 1$, исходное сообщение: `011`.

Коды 0-го порядка

Отдельно стоит рассмотреть вариант кода при $r = 0$, он нам в будущем пригодится для доказательств.

Для случая $\mathrm{RM}(0, m)$ нужна функция от m аргументов, степени не выше 0. Таких функций существует всего лишь две, поскольку мы можем влиять лишь на свободный член. Все остальные коэффициенты обнуляются из-за требования $\deg f \leq 0$.

- $f(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$
- $g(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$

Таблица истинности:

$$2^m \begin{cases} \begin{array}{cccc|cc} x_1 & x_2 & \ldots & x_m & f(x_1, ..., x_m) & g(x_1, ..., x_m) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{array} \end{cases}$$

Здесь число строк, как и в любой другой таблице истинности, равно 2^m, а колонки со значениями никак не зависят от аргументов функций. Получается две колонки – одна с нулями, другая с единицами.

Вывод: это 2^m-кратное повторение символа

- Сообщение 0 даст код $\underbrace{\texttt{00...0}}_{2^m}$
- Сообщение 1 даст код $\underbrace{\texttt{11...1}}_{2^m}$

Коды m-го порядка

Есть ещё один тривиальный случай, когда $m = r$.

Есть m переменных, и мы рассматриваем многочлены $f \in \mathbb{F}_2[x_1, ..., x_m] : \deg f \leq m$, т.е. все возможные. Для $\mathrm{RM}(m, m)$ мы используем все доступные коэффициенты многочлена для кодирования сообщения. Тогда нет избыточности: $k = \sum_{i=0}^{m} C_m^i = 2^m = n$ – длина сообщения равна длине кода.

Чем меньше порядок кода r, тем больше избыточность.

3 Свойства кода

Доказательство линейности

Хотим показать, что этот код является линейным, т.е. что его кодовые слова образуют линейное пространство, и у нас есть изоморфизм из пространства сообщений ($\mathbb{F}_2^k$) в пространство слов ($\mathbb{F}_2^m$).

Для этого необходимо немного формализовать всё описанное раньше.

Пусть $C(x)$ кодирует сообщение $x \in \mathbb{F}_2^k$ в код $C(x) \in \mathbb{F}_2^m$.

$$C(x) = (p_x(a_i) \mid a_i \in \mathbb{F}_2^m)$$

где $p_x(a_i)$ — соответствующий сообщению x многочлен. Пояснение: перебираем все векторы a_i (2^m штук), подставляем каждый в p_x в качестве переменных и таким образом получаем вектор значений (длины 2^m). Именно он и называется кодом.

Причём p_x берёт в качестве своих коэффициентов биты из x. Поскольку многочлены степени не выше r образуют линейное пространство, то $p_{(x \oplus y)} = p_x + p_y$.

Напомню, что базис пространства многочленов выглядит примерно так: $1, x, y, z, xy, yz, xz$ (для трёх переменных, степени не выше 2).

Чтобы преобразовать сообщение в многочлен, мы берём каждый бит сообщения и умножаем его на соответствующий базисный вектор. Очевидно, такое преобразование будет изоморфизмом. Именно поэтому $p_{(x \oplus y)} = p_x + p_y$. Обратите внимание, что сообщение x это не просто число ($\mathbb{Z}_{2^k}$) и мы рассматриваем его биты, а реально вектор битов ($\mathbb{Z}_2^k$). У него операция сложения побитовая.

Тогда:

$$C(x \oplus y)_i = p_{(x \oplus y)}(a_i) = p_x(a_i) + p_y(a_i) = C(x)_i + C(y)_i$$

т.е. $\forall x, y \quad C(x \oplus y) = C(x) + C(y)$, ч.т.д.

Здесь я использую запись $C(x)_i$ для i-го элемента вектора $C(x)$. Поскольку i произвольное, то и весь вектор получился равен. Таким образом, этот код действительно линейный и к нему применимы уже известные теоремы!

Последствия линейности

1. Существует порождающая матрица G.

   $$C(x) = x_{1 \times k} G_{k \times n} = c_{1 \times n}$$

   Так можно кодировать сообщения x в коды c. Но искать её мы не будем, обойдёмся одними многочленами, это интереснее.

2. Минимальное расстояние будет равно минимальному весу Хемминга среди всех кодов. Вес Хэмминга вектора — количество в нём ненулевых элементов.

   $$d = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq 0}} w(c)$$

   Доказательство очень просто: минимальное расстояние — вес разности каких-то двух различных кодов, но разность двух кодов тоже будет кодом, т.к. мы в линейном пространстве. Значит достаточно найти минимальный вес, но не учитывая нулевой вектор, т.к. разность равна нулю тогда и только тогда, когда коды равны.

3. Корректирующая способность:

$$t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

Однако мы ещё не знаем как выглядят наши коды (как выглядят таблицы истинности функций степени не больше r?). А значит не можем ничего сказать про минимальное расстояние.

3.1 Конструкция Плоткина

Конструкция Плоткина: многочлены

Хотим понять как выглядят кодовые слова.

- Код — вектор значений функции $f(x_1, ..., x_m) \in \mathrm{RM}(r, m)$, причём $\deg f \leq r$. Порядок очевидно не больше r, потому что это условие для включения в пространство кодов $\mathrm{RM}(r, m)$.
- Разделим функцию по x_1: $f(x_1, ..., x_m) = g(x_2, ..., x_m) + x_1 h(x_2, ..., x_m)$. Теперь у нас есть две функции от меньшего числа аргументов. Очевидно, так можно сделать всегда, когда m > 1.
- Заметим, что $\deg f \leq r$, а значит $\deg g \leq r$ и $\deg h \leq r - 1$.

Конструкция Плоткина: таблица истинности

Теперь рассмотрим те же функции, но со стороны их таблиц истинности. Нам же интересны именно коды, а они как раз очень тесно связаны с этими таблицами.

Ранее: $f(x_1, ..., x_m) = g(x_2, ..., x_m) + x_1 h(x_2, ..., x_m)$.

- Заметим, что таблица истинности f состоит из двух частей: при $x_1 = 0$ и при $x_1 = 1$.

$$\mathrm{Eval}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Eval}^{[x_1=0]}(f) \\ \hline \mathrm{Eval}^{[x_1=1]}(f) \end{pmatrix}$$

Про обозначения: $\mathrm{Eval}(f)$ — таблица для всей функции (вектор значений, если точнее), $\mathrm{Eval}^{[x_1=0]}(f)$ — кусок таблицы при $x_1 = 0$, $\mathrm{Eval}^{[x_1=1]}(f)$ — кусок таблицы при $x_1 = 1$. Они нам после этого доказательства больше не понадобятся.

- Причём $\mathrm{Eval}^{[x_1=0]}(f) = \mathrm{Eval}(g)$, а $\mathrm{Eval}^{[x_1=0]}(f) \oplus \mathrm{Eval}^{[x_1=1]}(f) = \mathrm{Eval}(h)$. Это всё следует из ранее полученного утверждения. Если мы подставим $x_1 = 0$, то останется только g — первое равенство очевидно. Если же мы рассмотрим $\mathrm{Eval}^{[x_1=1]}(f)$, то получим $\mathrm{Eval}(g+h)$, но если туда прибавить ещё раз $\mathrm{Eval}(g)$, то останется только $\mathrm{Eval}(h)$ (поскольку $1 + 1 = 0$ в $\mathbb{F}_2$) — получили второе равенство.

- Таким образом, $\mathrm{Eval}(f) = (\mathrm{Eval}(g) \mid \mathrm{Eval}(g) \oplus \mathrm{Eval}(h))$. Палочка по центру — конкатенация векторов.

Конструкция Плоткина: вывод

Теперь собираем всё это в одно важное утверждение.
Если дана $f(x_1, ..., x_m)$, причём $\deg f \le r$, то можно её разделить:

$$f(x_1, ..., x_m) = g(x_2, ..., x_m) + x_1 h(x_2, ..., x_m)$$

Причём мы уже знаем, что $\deg g \le r$ и $\deg h \le r - 1$, если $\deg f \le r$

Также известно, что $\mathrm{Eval}(f) = (\mathrm{Eval}(g) \mid \mathrm{Eval}(g) \oplus \mathrm{Eval}(h))$.

Заметим, что $\mathrm{Eval}(f)$ – кодовое слово (как и для g и h).

Тогда: $c = \mathrm{Eval}(f) \in \mathrm{RM}(r, m)$ (т.к. $\deg f \le r$)
$u = \mathrm{Eval}(g) \in \mathrm{RM}(r, m-1)$ (т.к. $\deg g \le r$)
$v = \mathrm{Eval}(h) \in \mathrm{RM}(r-1, m-1)$ (т.к. $\deg h \le r - 1$)

Напомню, что $\mathrm{RM}(r, m)$ включает в себя **все** функции (их таблицы истинности, если точнее) от m аргументов и степени не выше r. Очевидно, наши годятся.

Конструкция Плоткина

Теорема. *Для всякого кодового слова $c \in \mathrm{RM}(r, m)$ можно найти $u \in \mathrm{RM}(r, m-1)$ и $v \in \mathrm{RM}(r-1, m-1)$, такие что $c = (u \mid u + v)$.*

Что здесь важно отметить — оба наших новых кодовых слова u, v получились «меньше», чем исходное c.

Это позволяет, во-первых, устраивать индукцию, чем мы скоро и займёмся. Во-вторых, это позволяет легко строить большие порождающие матрицы, но мы этим не будем заниматься.

3.2 Минимальное расстояние

Минимальное расстояние

Хотим найти минимальное расстояние для кода $\mathrm{RM}(r, m)$

$$d = \min_{c \in C, c \neq 0} w(c)$$

Предположим, что $d = 2^{m-r}$ и докажем по индукции.

База: $\mathrm{RM}(0, m)$ — единственный бит повторён 2^m раз. Очевидно, $w(\underbrace{11...1}_{2^m}) = 2^m = 2^{m-0} \ge 2^{m-r}$.

Случай $\mathrm{RM}(0, m)$ мы разбирали раньше, но я напомню. Здесь длина сообщения равна $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^i = C_m^0 = 1$, а длина кода $n = 2^m$. Причём мы просто берём один бит и повторяем его 2^m раз (в таблице истинности).

Замечу, что не рассматриваю второй случай $w(\texttt{00...0})$, поскольку он нам не нужен для расчёта минимального расстояния. Вариант с нулевым вектором явно выкидывается, см. определение d выше.

Гипотеза: Если $v \in \mathrm{RM}(r-1, m-1)$, то $w(v) \ge 2^{m-r}$.

Шаг: Хотим доказать для $c \in \mathrm{RM}(r, m)$.

$$w(c) \overset{(1)}{=} w((u \mid u \oplus v)) \overset{(2)}{=} w(u) + w(u \oplus v) \ge$$
$$\overset{(3)}{\ge} w(u) + (w(v) - w(u)) = w(v) \overset{IH}{\ge} 2^{m-r} \blacksquare$$

Теперь немного объяснений.

Переход (1): используем конструкцию Плоткина, чтобы разбить c на конкатенацию двух кодовых слов поменьше.

Переход (2): $w((x \mid y)) = w(x) + w(y)$. Вес это всего лишь число ненулевых элементов, поэтому нет разницы как мы будем группировать части вектора.

Переход (3): $w(u \oplus v) \geq w(v) - w(u)$. Если у нас в v стоит $w(v)$ бит, то прибавив к нему u, мы сможем изменить (обнулить) не больше $w(u)$ бит. Возможно появится больше единиц, но нас интересует нижняя граница.

Переход (IH): предположение индукции в чистом виде.

Код с весом 2^{m-r}

До этого мы доказали, что расстояние между кодами не может превышать 2^{m-r}. Однако из этого не следует, что код с таким весом действительно существует. Поэтому чтобы завершить доказательство того, что минимальное расстояние $d = 2^{m-r}$, нужно показать сущестование такого кода.

Дано: $\mathrm{RM}(r, m)$, $0 \leq r \leq m$

Хотим: такой $c \in \mathrm{RM}(r, m)$, что $w(c) = 2^{m-r}$

Рассмотрим функцию:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \prod_{i=1}^{r} x_i = x_1 x_2 ... x_r$$

Очевидно, $\deg(f) \leq r$, а значит она подходит под требования $\mathrm{RM}(r, m)$.

В её таблице истинности ровно 2^{m-r} строк, когда $f(...) = 1$:

$$\begin{array}{cccc|ccc|c}
\multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r}}^{r}} & \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{x_{r+1} \quad \dots \quad x_m}}^{m-r}} & \\
x_1 & x_2 & ... & x_r & x_{r+1} & ... & x_m & f \\
\hline
1 & 1 & ... & 1 & * & ... & * & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & ... & 1 & * & ... & * & 1
\end{array}$$

Небольшое пояснение: функция равна единице тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_r = 1$. Получается, r аргументов из m зафиксированы, но другие могут меняться произвольно. Получается как раз 2^{m-r} вариантов. На этом доказательство о минимальном весе можно завершить.

3.3 Параметры

Свойства и параметры

Теперь можно подвести итоги исследования свойств. Для бинарного кода $\mathrm{RM}(r, m)$:

- $0 \leq r \leq m$
- Длина кода: 2^m
- Длина сообщения: $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^i$
- Минимальное расстояние: $d = 2^{m-r}$
- Корректирующая способность: $t = 2^{m-r-1} - 1$, поскольку $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{m-r}}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2^{m-r-1} - 0.5 \rfloor = 2^{m-r-1} - 1$

- Существует порождающая матрица G для кодирования, она позволяет делать так: $C(x) = xG$. Но я, как обычно, её избегаю. Рекомендую почитать «Коды Рида-Маллера: Примеры исправления ошибок», если интересно.

- Проверочная матрица H совпадает с порождающей для $\mathrm{RM}(m-r-1, m)$, но это я это доказывать не собираюсь. Однако доказательство можно найти в «Reed-Muller Codes: Theory and Algorithms», раздел Duality.

Возможные варианты

$m \backslash r$	0	1	2	3	4
1	$k=1$ $n=2$ $t=0$	$k=2$ $n=2$ $t=0$	—	—	—
2	$k=1$ $n=4$ $t=1$	$k=3$ $n=4$ $t=0$	$k=4$ $n=4$ $t=0$	—	—
3	$k=1$ $n=8$ $t=3$	$k=4$ $n=8$ $t=1$	$k=7$ $n=8$ $t=0$	$k=8$ $n=8$ $t=0$	—
4	$k=1$ $n=16$ $t=7$	$k=5$ $n=16$ $t=3$	$k=11$ $n=16$ $t=1$	$k=15$ $n=16$ $t=0$	$k=16$ $n=16$ $t=0$

У красных кодов минимальное расстояние d равно единице — они совершенно бесполезны, там количество кодов равно количеству сообщений; у желтых кодов $d = 2$ — они могут определить наличие ошибки, но не могут её исправить. Для всех остальных кодов $d = 2(t+1)$.

Напоминание: k — длина сообщения, n — длина кода, а t — количество ошибок, которое код точно сможет исправить. Заодно о параметрах кода: m — количество переменных у функции (очень влияет на длину кода), а r — максимальная степень многочлена (очень влияет на длину сообщения, и соотвественно надёжность кода), причём $r \leq m$. Конечно, таблицу можно продолжать и дальше.

И кстати, случай $m = 0, k = 0$ (не влез) будет собой представлять колирование единственного бита совершенно без изменений.

4 Декодирование

Как линейный код

Этот код является линейным кодом, к нему применимы все обычные (и неэффективные методы):

- Перебор по всему пространству кодовых слов в поисках ближайшего. Этот способ применим ко всем кодам, но никто в здравом уме им не пользуется.

- С использованием синдромов: $s = rH^T$. Здесь s — синдром, r — полученное сообщение, H — проверочная матрица. Этот метод обычен для линейных кодов.

Эти способы нужно иметь в виду, но о них было рассказано и без меня, так что я их пропущу.

4.1 Алгоритм Рида

Определения

Начать стоит с нескольких определений, без которых алгоритм Рида объяснить не получится.

1. Пусть $A \subseteq \{1, ..., m\}$ для $m \in \mathbb{N}$
2. Подпространство $V_A \subseteq \mathbb{F}_2^m$, которое обнуляет все v_i, если $i \notin A$: $V_A = \{v \in \mathbb{F}_2^m : v_i = 0 \ \forall i \notin A\}$
3. Аналогично для $V_{\bar{A}}$, где $\bar{A} = \{1, ..., m\} \setminus A$: $V_{\bar{A}} = \{v \in \mathbb{F}_2^m : v_i = 0 \ \forall i \in A\}$

Пример:

- Пусть $m = 3, A = \{1, 2\}$, тогда...
- $\mathbb{F}_2^m = \{\texttt{000}, \texttt{001}, \texttt{010}, \texttt{011}, \texttt{100}, \texttt{101}, \texttt{110}, \texttt{111}\}$ — все 8 векторов этого пространства
- $V_A = \{\texttt{000}, \texttt{010}, \texttt{100}, \texttt{110}\}$ $(v_3 = 0 \, \forall v)$ — обнулилась третья позиция, первые две остались
- $\bar{A} = \{1, 2, 3\} \setminus A = \{3\}$
- $V_{\bar{A}} = \{\texttt{000}, \texttt{001}\}$ $(v_1 = v_2 = 0 \, \forall v)$ — осталась только третья позиция, остальные обнулились.

Смежные классы

Если фиксировано $V_A \subseteq \mathbb{F}_2^m$, то для каждого $b \in \mathbb{F}_2^m$ существует смежный класс $V_A + b$:

$$(V_A + b) = \{v + b \mid v \in V_A\}$$

Утверждается, что если брать $b \in V_{\bar{A}}$, то полученные смежные классы будут все различны (и это будут все смежные классы). Почему все смежные классы $(V_A + b)$ можно получить именно перебором $b \in V_{\bar{A}}$ можно найти в разделе «Дополнительные доказательства» из пдфки [ссылка]

Алгоритм Рида для кода RM(r, m)

Теперь, наконец, сам алгоритм Рида с объяснением, что тут происходит. Почему он именно такой и почему это работает — см. раздел (на русском) «Reed's Algorithm: Unique decoding up to half the code distance» [A] в пдфке.

Декодирует сообщение u, если использовался RM(r, m). Для RM$(2, 2)$: $f(x_1, x_2) = u_{\{1,2\}}x_1x_2 + u_{\{2\}}x_2 + u_{\{1\}}x_1 + u_\varnothing$.

Data: *vector* $y = (y_z \in \mathbb{F}_2 \mid z \in \mathbb{F}_2^m)$
for $t \leftarrow r$ **to** 0 **do**
  foreach $A \subseteq \{1, ..., m\}$ *with* $|A| = t$ **do**
    $c = 0$
    foreach $b \in V_{\bar{A}}$ **do**
      $c \mathrel{+}= \left(\sum_{z \in (V_A + b)} y_z \right) \bmod 2$
    end
    $u_A \leftarrow \mathbf{1}\left[c \geq 2^{m-t-1}\right]$
  end
  $y \mathrel{-}= \mathrm{Eval}\left(\sum_{\substack{A \subseteq \{1,...,m\} \\ |A| = t}} u_A \prod_{i \in A} x_i \right)$
end

На вход поступает бинарный вектор y длины 2^m. Это вектор значений функции, возможно с ошибками (но их не больше, чем $t = 2^{m-r-1} - 1$). Цель — восстановить все коэффициенты при многочлене вида $f(x_1, ..., x_m) = u_\varnothing + u_1 x_1 + x_2 x_2 + ... + u_{1,2,...,r} x_{1,2,...,r}$, где $\deg f \leq r$. Обратите внимание, что для индексов при u используются подмножества $A \subseteq \{1, ..., m\}, |A| \leq r$, причём каждый u_A умножается на моном $\prod_{i \in A} x_i$.

Будем восстанавливать сначала коэффициенты u_A при старших степенях, потом поменьше и так пока не восстановим их все. Начинаем с $t = r$. Хотим восстановить все коэффициенты при мономах степени t. Для этого перебираем все $A, |A| = t$ и для каждого восстанавливаем коэффициент u_A при $x_{A_1} x_{A_2} ... x_{A_t}$.

Чтобы восстановить коэффициент, нужно перебрать все смежные классы вида $(V_A + b)$:

$$
\begin{aligned}
V_A &= \{v \in \mathbb{F}_2^m \\
&\quad : v_i = 0 \, \forall i \notin A\} \\
b &\in \{v \in \mathbb{F}_2^m \\
&\quad : v_i = 0 \, \forall i \in A\}
\end{aligned}
$$

Считаем количество (c) смежных классов, в которых $\sum_{z \in (V_A + b)} y_z = 1 \pmod 2$. Если это количество больше порогового значения, то считаем, что $u_A = 1$, иначе же $u_A = 0$. Пороговое значение (2^{m-t-1}) здесь — половина от числа смежных классов. Таким образом, если большинство сумм дало 1, то $u_A = 1$, иначе $u_A = 0$.

Затем мы вычитаем из y (вектор значений функции) всё найденное на этой итерации, после чего переходим к мономам меньшей степени. Повторять до восстановления всех коэффициентов.

4.1.1 Пример

Пример

Ранее: `011` кодируется как `1100` при помощи $\mathrm{RM}(1, 2)$ (см. самый первый пример).

Положим $y_{\texttt{00}} = 1, y_{\texttt{01}} = 1, y_{\texttt{10}} = 0, y_{\texttt{11}} = 0$ — именно так, поскольку `1100` — вектор значений, который мы сейчас распаковываем обратно в таблицу истинности. В индексе при y находится вектор значений переменных, а его (y) значение — значение функции при этих аргументах.

Здесь $m = 2$, значит $A \subseteq \{1, 2\}$. Причём $r = 1$, т.е. $|A| \leq 1$.

Как происходит кодирование, схематически:

$$\texttt{101} \rightsquigarrow (f(x_1, x_2) = x_1 + 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|cc|c|} x_1 & x_2 & f \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} y_{\texttt{00}} = & 1 \\ y_{\texttt{01}} = & 1 \\ y_{\texttt{10}} = & 0 \\ y_{\texttt{11}} = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \texttt{1100}$$

Теперь начинаем декодирование.
Шаг 1/3: $t = 1, A = \{1\}$

- Здесь $V_A = \{\texttt{00}, \texttt{10}\}$ (меняется только первый бит) , $V_{\bar{A}} = \{\texttt{00}, \texttt{01}\}$ (первый бит обнулился) . Нужно рассмотреть два смежных класса— по одному на каждый вектор из $V_{\bar{A}}$.
- $(V_A + \texttt{00}) = \{\texttt{00}, \texttt{10}\}$, сумма: $y_{\texttt{00}} + y_{\texttt{10}} = 1 + 0 = 1$
- $(V_A + \texttt{01}) = \{\texttt{01}, \texttt{11}\}$, сумма: $y_{\texttt{01}} + y_{\texttt{11}} = 1 + 0 = 1$
- Итого: $u_A = u_{\{1\}} = 1$

Шаг 2/3: $t = 1, A = \{2\}$

- Здесь $V_A = \{\texttt{00}, \texttt{01}\}$, $V_{\bar{A}} = \{\texttt{00}, \texttt{10}\}$. Нужно рассмотреть два смежных класса — по одному на каждый вектор из $V_{\bar{A}}$.
- $(V_A + \texttt{00}) = \{\texttt{00}, \texttt{01}\}$, сумма: $y_{\texttt{00}} + y_{\texttt{01}} = 1 + 1 = 0$
- $(V_A + \texttt{10}) = \{\texttt{10}, \texttt{11}\}$, сумма: $y_{\texttt{10}} + y_{\texttt{11}} = 0 + 0 = 0$
- Итого: $u_A = u_{\{2\}} = 0$

Перед переходом к $t = 0$, нужно вычесть из y вектор значений следующей функции:

$$g(x_1, x_2) = u_{\{2\}} x_2 + u_{\{1\}} x_1 = 0x_2 + 1x_1 = x_1$$

Здесь мы берём все u, полученные при $t = 1$, домножаем каждую на соответствущие ей x-ы и получаем функцию от m переменных.

Вычислим Eval(g):

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Очень важно, чтобы у вас во всех таблицах истинности (в т.ч. той, которая использовалась при кодировании для получения y) был одинаковый порядок строк. Иначе чуда не выйдет.

Тогда $y \leftarrow y - \mathrm{Eval}(g) = \mathtt{1100} \oplus \mathtt{0011} = \mathtt{1111}$. Полезно заметить, что в $\mathbb{F}_2$ сложение и вычитание — одно и то же.

Продолжение примера: $t = 0$

Теперь $y_{\mathtt{00}} = 1, y_{\mathtt{01}} = 1, y_{\mathtt{10}} = 1, y_{\mathtt{11}} = 1$

Шаг 3/3: $t = 0, A = \varnothing$

- Здесь $V_A = \{\mathtt{00}\}$, но $V_{\bar{A}} = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$. Нужно рассмотреть **четыре** смежных класса.
- $(V_A + \mathtt{00}) = \{\mathtt{00}\}$, сумма: $y_{\mathtt{00}} = 1$
- $(V_A + \mathtt{01}) = \{\mathtt{01}\}$, сумма: $y_{\mathtt{01}} = 1$
- $(V_A + \mathtt{10}) = \{\mathtt{10}\}$, сумма: $y_{\mathtt{10}} = 1$
- $(V_A + \mathtt{11}) = \{\mathtt{11}\}$, сумма: $y_{\mathtt{11}} = 1$
- Итого: $u_A = u_\varnothing = 1$

Получили $u_{\{2\}} = 0, u_{\{1\}} = 1, u_\varnothing = 1$. Это значит, что исходный многочлен был таков:

$$f(x_1, x_2) = u_{\{2\}} x_2 + u_{\{1\}} x_1 + u_\varnothing = 0 + x_1 + 1,$$

а исходное сообщение: `011`, как и ожидалось.

Время работы
Утверждается, что время работы алгоритма — $O(n \log^r n)$, где $n = 2^m$ — длина кода.

5 Домашнее задание

Замечание: каких-либо требований на методы решения нет, но если используете код — приложите его. Различных способов решить существует больше одного.

Номер варианта можете определять как $1 + ((5n + 98) \bmod 2)$, но главное напишите его и своё имя.

Для кодирования использовался тот же порядок строк в таблице истинности, что и в остальной презентации; аргументы идут по столбцам слева направо по возрастанию номера. При формировании сообщения, слагаемые сортируются лексиографически, а затем по убыванию степени (см. примеры в презентации).

Вариант 1

1. Закодировать сообщение: `1001`.
2. Декодировать код, если ошибок нет: `1010`, использовался $\mathrm{RM}(1, 2)$.

3. Декодировать код, полученный с ошибками: `1101 1010`, использовался $\mathrm{RM}(1,3)$

Вариант 2

1. Закодировать сообщение: `0101`.
2. Декодировать код, если ошибок нет: `0110`, использовался $\mathrm{RM}(1,2)$.
3. Декодировать код, полученный с ошибками: `1111 0100`, использовался $\mathrm{RM}(1,3)$

6 Источники

1. https://arxiv.org/pdf/2002.03317.pdf — великолепный обзор, очень рекомендую.
2. http://dha.spb.ru/PDF/ReedMullerExamples.pdf — очень хорошо и подробно, но используется подход через матрицы, а не через полиномы, а это не весело.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Reed–Muller_code — кратко, чётко, понятно, но не описано декодирование.
4. https://ru.bmstu.wiki/Коды_Рида-Маллера — в целом всё есть, но написано очень непонятно;

Это вольный перевод раздела V-A из «Reed-Muller Codes: Theory and Algorithms» с моими комментариями и некоторыми дополнительными доказательствами.

A Reed's Algorithm: Unique decoding up to half the code distance

В этом разделе описывается алгоритм Рида для $\mathrm{RM}(r, m)$. Он исправляет любые ошибки, вес которых не превышает 2^{m-r-1}, половину минимального расстояния кода.

Для подмножества $A \subseteq \{1, ..., m\}$ определим моном $x_A = \prod_{i \in A} x_i$, где x_i — аргументы булевой функции [напр., $x_{\{1,2\}} = x_1 x_2$]. Также будем использовать $V_A := \{z \in \mathbb{F}_2^m : z_i = 0 \, \forall i \notin A\}$ для обозначения подпространства в $\mathbb{F}_2^m$ размерности $|A|$, т.е. V_A это подпространство, в котором для всех векторов z зафиксированы биты $z_i = 0$ при $i \notin A$. Для подпространства V_A (в пространстве $\mathbb{F}_2^m$) существует $2^{m-|A|}$ смежных класса вида $V_A + b := \{z + b \mid z \in V_A\}$, где фиксировано $b \in F_2^m$ [доказательство далее]. Тогда для любого $A \subseteq \{1, ..., m\}$ и $b \in \mathbb{F}_2^m$ мы имеем

$$\sum_{z \in (V_A + b)} \mathrm{Eval}_z(x_A) = 1,$$

а для любых $A \not\subseteq B$,

$$\sum_{z \in (V_A + b)} \mathrm{Eval}_z(x_B) = 0$$

Эти две суммы над $\mathbb{F}_2$ [т.е. $1 + 1 + 1 = 1$]. Первая сумма вытекает из того, что $\mathrm{Eval}_z(x_A) = 1$ если и только если $z_i = 1 \, \forall i \in A$, причём существует только один такой $z \in (V_A + b)$ [доказательство далее]. Для доказательства второй суммы, нужно заметить, что поскольку $A \not\subseteq B$, то $\exists i \in A \setminus B$, а значит бит z_i не влияет на значение $\mathrm{Eval}_z(x_B)$. Отсюда, $\mathrm{Eval}_{z, z_i = 0}(x_B) = \mathrm{Eval}_{z, z_i = 1}(x_B)$, а значит все единички в этой сумме взаимоуничтожатся.

Предположим, что битовый вектор $y = (y_z \mid z \in \mathbb{F}_2^m)$ — зашумлённая версия кодового слова $\mathrm{Eval}(f) \in \mathrm{RM}(r, m)$, такого что y и $\mathrm{Eval}(f)$ отличаются не более чем в 2^{m-r-1} позициях. Алгоритм Рида позволяет восстановить исходное кодовое слово из y, извлекая коэффициенты полинома f. Поскольку $\deg f \leq r$, мы всегда это можем записать $f = \sum_{A \subseteq \{1, ..., m\}, |A| \leq r} u_A x_A$, где u_A — коэффициенты соответствующих мономов. Алгоритм Рида сначала извлекает все коэффициенты при монмах степени r, затем при степени $r - 1$, и так далее пока не найдёт их все.

Чтобы восстановить коэффициент u_A при $|A| = r$ [при мономе степени r], алгоритм Рида вычисляет сумму $\sum_{z\in(V_A+b)} y_z$ для каждого из 2^{m-r} смежных классов подпространства V_A, а затем выбирает коэффициент большинством голосов[1] среди этих 2^{m-r} сумм. Если там больше единиц, чем нулей, то восстаналиваем $u_A = 1$, иначе $u_A = 0$. Заметим, что если $y = \mathrm{Eval}(f)$, т.е. ошибки нет, то:

$$\sum_{s\in(V_A+b)} y_z = \sum_{s\in(V_A+b)} \mathrm{Eval}_z\left(\sum_{\substack{B\subseteq\{1,\ldots,m\}\\|B|\le r}} u_B x_B\right) = \sum_{\substack{B\subseteq\{1,\ldots,m\}\\|B|\le r}} u_B \sum_{s\in(V_A+b)} \mathrm{Eval}_z(x_B).$$

Из полученных ранее равенств и при условии, что $B \subseteq \{1,\ldots,m\}$ и $|B| \le r = |A|$, получаем $\sum_{z\in(V_A+b)} \mathrm{Eval}_z(x_B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B = A$ [из равенства: $A \subseteq B$, из ограничения: $|B| \le |A|$]. Отсюда $\sum_{z\in(V_A+b)} y_z = u_A$ для всех 2^{m-r} смежных классов вида $V_A + b$ если $y = \mathrm{Eval}(f)$. Поскольку мы допустили, что y и $\mathrm{Eval}(f)$ отличаются не более чем в 2^{m-r-1} позициях, есть меньше чем 2^{m-r-1} смежных классов, в которых $\sum_{z\in(V_A+b)} y_z \ne u_A$. После голосования большинством среди этих 2^{m-r} сумм, мы найдём правильное значение u_A.

После вычисления всех коэффициентов при мономах степени r, мы можем посчитать:

$$y' = y - \mathrm{Eval}\left(\sum_{\substack{B\subseteq\{1,\ldots,m\}\\|B|=r}} u_B x_B\right).$$

Это зашумленная версия кодового слова $\mathrm{Eval}(f-\sum_{B\subseteq\{1,\ldots,m\},|B|=r} u_B x_B) \in \mathrm{RM}(r-1,m)$, и количество оошибок в y' меньше чем 2^{m-r-1} из предположения. Тогда мы можем аналогичным образом восстановить все коэффициенты при мономах степени $r-1$ используя y'. Повторять эту процедуру пока не будут восстановлены все коэффициенты f.

Теорема. *При декодировании кода $\mathrm{RM}(r,m)$ для фиксированного r и растущего m, алгоритм Рида корректно устраняет любую ошибку с весом Хэмминга не больше 2^{m-r-1} за $O(n\log^r n)$ по времени, где $n = 2^m$ — длина кода.*

[в источнике она без доказательства, но вы можете прочитать алгоритм ниже и попытаться доказать это самостоятельно]

[1] В оригинале — «performs a majority vote»; я не смог придумать лучшего перевода.

Algorithm 1: Reed's algorithm for decoding RM(r, m)

Data: Parameters r and m of the RM code, and a binary vector $y = (y_z \mid z \in \mathbb{F}_2^m)$ of length $n = 2^m$
Result: A codeword $c \in \mathrm{RM}(r, m)$
$t \leftarrow r$
while $t \geq 0$ **do**
  foreach *subset* $A \subseteq \{1, ..., m\}$ *with* $|A| = t$ **do**
    Calculate $\sum_{z \in (V_A + b)} y_z$ for all the 2^{m-t} cosets of V_A
    $num1 \leftarrow$ number of cosets $(V_A + b)$ such that $\sum_{z \in (V_A + b)} y_z = 1$
    $u_A \leftarrow \mathbf{1}\left[num1 \geq 2^{m-t-1}\right]$
  end
  $y \leftarrow y - \mathrm{Eval}\left(\sum_{A \subseteq \{1,...,m\}, |A| = t} u_A x_A\right)$
  $t \leftarrow t - 1$
end
$c \leftarrow \mathrm{Eval}\left(\sum_{A \subseteq \{1,...,m\}, |A| \leq r} u_A x_A\right)$
return c

Подсказка: «coset» — смежный класс.

В оригинале $\mathbf{1}[\cdot]$ описана как «indicator function» (характеристическая функция), но для меня это несёт мало смысла в этом контексте. Впрочем, из доказательства понятно, что здесь должно иметься ввиду:

$$\mathbf{1}\left[num1 \geq 2^{m-t-1}\right] = \begin{cases} 1, & num1 \geq 2^{m-t-1} \\ 0, & num1 < 2^{m-t-1} \end{cases}$$

A.1 Дополнительные доказательства

Далее я подробно доказываю некоторые утверждения, которые не были мне совершенно очевидны, и которые я не смог доказать в четыре слова чтобы включить в основной текст.

Лемма. *Для подпространства V_A (размерности $|A|$ в пространстве $\mathbb{F}_2^m$) существует $2^{m-|A|}$ смежных класса вида $V_A + b := \{z + b \mid z \in V_A\}$, где фиксировано $b \in F_2^m$.*

Доказательство. Из теоремы Лагранжа, известно что $|G| = |H| \cdot [G : H]$, где $H \subseteq G$, а $[G : H]$ — число различных смежных классов. В нашем случае, $H = V_A, G = \mathbb{F}_2^m$. Тогда $|V_A| = 2^{\dim V_A} = 2^{|A|}$. Таким образом получаем:

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|F_2^m|}{|V_A|} = \frac{2^m}{2^{|A|}} = 2^{m-|A|}$$ □

Лемма. $\mathrm{Eval}_z(x_A) = 1$ *если и только если* $z_i = 1\, \forall i \in A$, *причём существует только один такой* $z \in (V_A + b)$.

Доказательство. Во-первых, $\mathrm{Eval}_z(x_A) = \mathrm{Eval}_z(x_{A_1} x_{A_2} ... x_{A_k})$ по определению x_A. Конечно же, оно будет верно если и только если $x_{A_1} = x_{A_2} = ... = x_{A_k} = 1$. Другими словами, $\forall i \in A \quad z_i = 1$, если подставить значения вектор z на место переменных x. Таким образом, первая часть доказана.

Напомню определение V_A:

$$V_A = \{z \in \mathbb{F}_2^m \mid z_i = 0\, \forall i \notin A\}$$

Теперь докажем существование вектора. Пусть искомый вектор существует и равен $z = v + b, v \in V_A$. Требуется, чтобы $z_i = 1\, \forall i \in A$. Т.е. $v_i + b_i = 1$, а значит $v_i = 1 - b_i$ (при $i \in A$, конечно). Такой v действительно существует в подпространстве V_A, потому что определение никак не ограничивает элементы $v_i, i \in A$.

Единственность следует из того, что все остальные элементы v обязательно обнуляются по определению V_A ($v_i = 0$, если $i \notin A$). Теперь можно сказать, что $v_i = \begin{cases} 1 + b_i, & i \in A \\ 0, & i \notin A \end{cases}$ и никак иначе, из чего получаем единственность искомого $z = v + b$. □

Лемма. *Размерность* V_A *равна* $|A|$.

Доказательство. Это почти очевидное утверждение. Если рассмотреть каждый из векторов в V_A, то у него могут меняться только те координаты, которые не обнулены, и их ровно $|A|$. Получается по одному базисному вектору на каждый элемент из $|A|$. □

Следующая теорма необходима для эффективной реализации алгоритма Рида на нормальном языке программрования.

Теорема. *Пусть* $\bar{A} = \{1, ..., m\} \setminus A$. *Для фиксированного* A, *множество смежных классов* $\{V_A + b \mid b \in V_{\bar{A}}\}$ *будет содержать их все, причём все различны.*

Доказательство. Здесь используются верхние индексы, никакого возведения в степень.

Сначала докажем, что все эти смежные классы различны. Рассмотрим любые два: $(V_A + b^1)$ и $(V_A + b^2)$, где $b^1, b^2 \in V_{\bar{A}}$ и $b^1 \neq b^2$. Можно сказать, что векторы b^1 и b^2 отличаются хотя бы в одном бите, назовём его i-ым. Причём $i \in \bar{A}$, поскольку все другие биты в $V_{\bar{A}}$ обнулены. Покажем, что любые векторы $x \in (V_A + b^1)$ и $y \in (V_A + b^2)$ тоже будут отличаться в i-ом бите.

$$\begin{array}{lll} x = v^1 + b^1 & y = v^2 + b^2 & b^1 \neq b^2 \\ x_i = v_i^1 + b_i^1 & y_i = v_i^2 + b_i^2 & b_i^1 \neq b_i^2 \end{array}$$

Заметим, что $v_i^1 = v_i^2 = 0$, поскольку $v_1, v_2 \in V_A$, но $i \notin A$. Получается, что $x_i = 0 + b_i^1$ и $y_i = 0 + b_i^2$, причём $b_i^1 \neq b_i^2$. Таким образом $x \neq y$ для любых $x \in (V_A + b^1), y \in (V_A + b^2)$.

Теперь докажем, что мы перечислили все смежные классы. Как доказано ранее, их всего $2^{m-|A|}$. С другой стороны, $|V_{\bar{A}}| = 2^{|\bar{A}|} = 2^{m-|A|}$. Поскольку все элементы множества различны, то оно содержит все смежные классы. $\square$

A.2 Реализация алгоритма

Замечание: этот код действительно реализует алгоритм Рида, но он использует не те же соглашения, что даны в презентации (можете проверить на примерах). Если вы собираетесь использовать его в ДЗ, убедитесь описать, чему соответствуют биты и как у вас выглядит таблица истинности.

```python
import itertools, math
__all__ = ['encode', 'decode', 'code_info']

# Возвращает длину сообщения $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^i$, корректирующую способность $t = 2^{m-r-1} - 1$ и длину кода $n = 2^m$
def code_info(r, m):
  '''
  >>> code_info(1, 2)
  {'k': 3, 'd': 2, 't': 0, 'n': 4}
  >>> code_info(2, 4)
  {'k': 11, 'd': 4, 't': 1, 'n': 16}
  '''
  return {'k': sum(math.comb(m, i) for i in range(0, r+1)),
          'd': 2**(m-r), 't': 2**(m-r - 1) - 1, 'n': 2**m}

# Возвращает $\{A \subseteq \{0, ..., m-1\} : |A| = t\}$
def subsets(m, t):
  '''
  >>> [bin(i) for i in subsets(3, 1)]
  ['0b1', '0b10', '0b100']
  >>> [bin(i) for i in subsets(3, 2)]
  ['0b11', '0b101', '0b110']
  >>> [bin(i) for i in subsets(3, 3)]
  ['0b111']
  '''
  for i in itertools.combinations(range(0, m), t):
      # $i$ содержит выбранные биты, ровно $t$ штук.
      yield sum(1 << j for j in i)

# Возвращает $\{A \subseteq \{0, ..., m-1\} : |A| \leq r\}$
def all_subsets(r, m):
  '''
  >>> [bin(i) for i in all_subsets(3, 3)]
  ['0b0', '0b1', '0b10', '0b100', '0b11', '0b101', '0b110', '0b111']
  '''
  return itertools.chain.from_iterable(
      subsets(m, t) for t in range(0, r+1))

# Вычисляет $\mathrm{Eval}\left(\sum_{A \in As} u_A x_A\right)$
def evaluate(get_As, m, u):
  '''
  f(x_0,x_1,x_2) = x_0x_2 будет иметь вектор значений 00000101
  >>> bin(evaluate(lambda: [0b101], 3, {0b101: 1}))
  '0b101'

  f(x_0,x_1) = 1 + x_1 будет иметь вектор значений 1100
  >>> bin(evaluate(lambda: [0b00, 0b10], 2, {0:1, 2:1}))
  '0b1100'
  '''
  result = 0
  for z in range(2**m):
      summ = 0
      for A in get_As():
          # Вычисляю $x_A = x_{A_1} x_{A_2} ... x_{A_k}$, подставляя в качестве $x_i = z_i$
          # Это равно единице тогда и только тогда, когда все биты из $A$ также стоят в $z$.
          xProduct = 1 if (z & A) == A else 0
          summ += u[A] * xProduct
      result = (result << 1) | (summ % 2)
  return result

# Кодирует сообщение $u$ при помощи кода $\mathrm{RM}(r, m)$
def encode(r, m, msg):
  '''
  >>> bin(encode(2, 4, [1,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0]))
  '0b1000111010001110'
  '''
  u = [None] * (2**m)
  for i, A in zip(msg, all_subsets(r, m), strict=True):
      u[A] = i
  return evaluate(lambda: all_subsets(r, m), m, u)

# Возвращает все векторы из подпространства $V \subseteq \mathbb{F}_2$,
# если даны базисные векторы для $V$.
def _subspace(basis):
  for i in range(2**len(basis)):
      result = 0
      for mask in basis:
          if (i & 1) == 1:
              result |= mask
          i >>= 1
      yield result

# Возвращает все векторы из подпространства $V_A \subseteq \mathbb{F}_2^m$
def subspaceV_A(_m, A):
  '''
  >>> [bin(i) for i in subspaceV_A(3, 0b10)]
  ['0b0', '0b10']
  >>> [bin(i) for i in subspaceV_A(3, 0b101)]
  ['0b0', '0b1', '0b100', '0b101']
  '''
  basis = []
  mask = 1
  while mask <= A:
      if (A & mask) != 0:
          basis.append(mask)
      mask <<= 1
  return _subspace(basis)

# Возвращает все векторы из подпространства $V_{\bar{A}}$
def subspaceV_minusA(m, A):
  '''
  >>> [bin(i) for i in subspaceV_minusA(3, 0b10)]
  ['0b0', '0b1', '0b100', '0b101']
  >>> [bin(i) for i in subspaceV_minusA(3, 0b101)]
  ['0b0', '0b10']
  '''
  basis = []
  for i in range(m):
      mask = 1 << i
      if (A & mask) == 0:
          basis.append(mask)
  return _subspace(basis)

# Алгоритм Рида по псевдокоду, который был в статье
def decode(r, m, y):
  '''
  Попробуйте изменить здесь бит и запустить тесты снова!
  >>> decode(2, 4, 0b1000111010001110)
  ('0b1000111010001110', [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0])
  '''
  u = [None] * (2**m)
  t = r
  while t >= 0:
      for A in subsets(m, t):
          num1 = 0
          for b in subspaceV_minusA(m, A):
              coset = (v + b for v in subspaceV_A(m, A))
              # s = $\sum_{z \in (V_A + b)} y_z$
              s = sum((y >> z) & 1 for z in coset)
              if (s % 2) == 1:
                  num1 += 1
          u[A] = int(num1 >= 2**(m - t - 1))
      y = y ^ evaluate(lambda: subsets(m, t), m, u)
      t = t - 1
  c = evaluate(lambda: all_subsets(r, m), m, u)
  msg = [u[A] for A in all_subsets(r, m)]
  return bin(c), msg

# «Тесты»:
import doctest; doctest.testmod()
# Try: `python -i ReedMuller.py`
```