

Обозначается как $\text{RM}(r, m)$, где r — ранг, а 2^m — длина кода. Кодировать сообщения длиной $k = \sum_{i=0}^r C_m^i$ при помощи 2^m бит. Традиционно, считается что коды бинарные и работают над битами, т.е. \mathbb{F}_2 .

Соглашение: сложение векторов $u, v \in \mathbb{F}_2^n$ будем обозначать как $u \oplus v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$.

1 Введение

Всякую булеву функцию можно записать при помощи таблицы истинности:

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Или при помощи многочлена Жегалкина:

$$f(x, y) = xy + x + y + 1$$

В общем случае, многочлены будут иметь следующий вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, m\}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

Например, для $m = 2$: $f(x_1, x_2) = c_{12} \cdot x_{\{1\}}x_2 + c_{\{2\}} \cdot x_2 + c_{\{1\}} \cdot x_1 + c_{\emptyset} \cdot 1$
Всего $n = 2^m$ коэффициентов для описания каждой функции.

Рассмотрим функции, степень многочленов которых не больше r :

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \deg f \leq r\}$$

Каждую можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |S| \leq r}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

В каждом произведении используется не больше r переменных.

Замечу, что при $S = \emptyset$, мы считаем, что $\prod_{i \in S} x_i = 1$, таким образом всегда появляется свободный член.

Сколько тогда всего коэффициентов используется?

$$k = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^r = \sum_{i=0}^r C_m^i$$

Если говорить несколько проще, то для составления многочленов мы сложим сначала одночлены $(x + y + z + \dots)$, затем произведения одночленов $(xy + yz + xz + \dots)$ и т.д. вплоть до r множителей (поскольку мы работаем в поле \mathbb{F}_2 , здесь нету x^2, y^2, z^2 , т.к. $a^2 = a$). Тогда легко видеть, почему k именно такое: мы складываем все возможные перестановки сначала для 0 переменных, потом для одной, двух, и так вплоть до r (не больше, ведь $\deg f \leq r$).

2 Кодирование

Пусть каждое сообщение (длины k) — коэффициенты многочлена от m переменных степени не больше r . Тогда мы можем его представить при помощи 2^m бит, подставив все возможные комбинации значений переменных. Их 2^m , поскольку рассматриваем многочлены только над \mathbb{F}_2 от m переменных. Таким образом получим таблицу истинности, из которой позднее сможем восстановить исходный многочлен, а вместе с ним и сообщение.

Зафиксировав в таблице порядок строк, можно выделить **вектор значений**, который и будет кодом.

x	y	$f(x, y)$	
0	0	1	$\Rightarrow \text{Eval}(f) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

Булевы
функции и
многочлен
Жегалкина

Многочлены
Жегалкина

Функции
небольшой
степени

Идея
кодирования

Вектор значений — обозначается $\text{Eval}(f)$ — столбец таблицы истинности, содержащий значения функции. Имеет смысл только при зафиксированном порядке строк в таблице. У меня он везде самый обычный, как в примере выше.

Пример

Здесь и далее я для краткости и удобства записываю битовые векторы не как $(1 \ 0 \ 0 \ 1)$, а как **1001** при помощи нескучного шрифта.

- $r = 1$ (степень многочлена), $m = 2$ (переменных). Это $\text{RM}(1, 2)$.
- Тогда наш многочлен: $f(x_1, x_2) = c_{\{2\}}x_2 + c_{\{1\}}x_1 + c_{\emptyset}$.
- Сообщение: **011**, тогда $f(x_1, x_2) = 0 + x_1 + 1$.
- Подставим всевозможные комбинации:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Обратите внимание на то, какой используется порядок переменных в таблице истинности. Очень важно чтобы при кодировании и декодировании было согласие и взаимопонимание касательно того, какому набору переменных соответствует каждая строчка.

- Получили код: $\text{Eval}(f) = \mathbf{1100}$.

Декодирование когда потерь нет

Теперь покажем, как можно декодировать когда потерь нет. Этот пример — продолжение предыдущего.

- Мы получили код: **1100**
- Представим таблицу истинности.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

- Подстановками в $f(x_1, x_2) = c_2x_2 + c_1x_1 + c_0$ получим СЛАУ.

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_2 + c_0 = 1 \\ c_1 + c_0 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_0 = 0 \end{cases}$$
- $c_{\{1\}} = 1, c_{\{2\}} = 0, c_{\emptyset} = 1$, исходное сообщение: **011**.

Коды 0-го порядка

Отдельно стоит рассмотреть вариант кода при $r = 0$, он нам в будущем пригодится для доказательств.

Для случая $\text{RM}(0, m)$ нужна функция от m аргументов, степени не выше 0. Таких функций существует всего лишь две, поскольку мы можем влиять лишь на свободный член. Все остальные коэффициенты обнуляются из-за требования $\deg f \leq 0$.

- $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$
- $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$

Таблица истинности:

	x_1	x_2	\dots	x_m	$f(x_1, \dots, x_m)$	$g(x_1, \dots, x_m)$
2^m	0	0	\dots	0	0	1
	0	0	\dots	1	0	1
			\ddots		\vdots	\vdots
	1	1	\dots	1	0	1

Здесь число строк, как и в любой другой таблице истинности, равно 2^m , а колонки со значениями никак не зависят от аргументов функций. Получается две колонки — одна с нулями, другая с единицами.

Вывод: это 2^m -кратное повторение символа

- Сообщение 0 даст код $\underbrace{00\dots0}_{2^m}$
- Сообщение 1 даст код $\underbrace{11\dots1}_{2^m}$

**Коды m -го
порядка**

Есть ещё один тривиальный случай, когда $m = r$.

Есть m переменных, и мы рассматриваем многочлены $f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m] : \deg f \leq m$, т.е. все возможные. Для $\text{RM}(m, m)$ мы используем все доступные коэффициенты многочлена для кодирования сообщения. Тогда нет избыточности: $k = \sum_{i=0}^m C_m^i = 2^m = n$ — длина сообщения равна длине кода.

Чем меньше порядок кода r , тем больше избыточность.

3 Свойства кода

**Доказатель-
ство
линейности**

Хотим показать, что этот код является линейным, т.е. что его кодовые слова образуют линейное пространство, и у нас есть изоморфизм из пространства сообщений (\mathbb{F}_2^k) в пространство слов (\mathbb{F}_2^m) .

Для этого необходимо немного формализовать всё описанное раньше.

Пусть $C(x)$ кодирует сообщение $x \in \mathbb{F}_2^k$ в код $C(x) \in \mathbb{F}_2^m$.

$$C(x) = (p_x(a_i) \mid a_i \in \mathbb{F}_2^m)$$

где $p_x(a_i)$ — соответствующий сообщению x многочлен. Пояснение: перебираем все векторы a_i (2^m штук), подставляем каждый в p_x в качестве переменных и таким образом получаем вектор значений (длины 2^m). Именно он и называется кодом.

Причём p_x берёт в качестве своих коэффициентов биты из x . Поскольку многочлены степени не выше r образуют линейное пространство, то $p_{(x \oplus y)} = p_x + p_y$.

Напомним, что базис пространства многочленов выглядит примерно так: $1, x, y, z, xy, yz, xz$ (для трёх переменных, степени не выше 2).

Чтобы преобразовать сообщения в многочлен, мы берём каждый бит сообщения и умножаем его на соответствующий базисный вектор. Очевидно, такое преобразование будет изоморфизмом. Именно поэтому $p_{(x \oplus y)} = p_x + p_y$. Обратите внимание, что сообщение x это не просто число (\mathbb{Z}_2^k) и мы рассматриваем его биты, а реально вектор битов (\mathbb{Z}_2^k) . У него операция сложения побитовая.

Тогда:

$$C(x \oplus y)_i = p_{(x \oplus y)}(a_i) = p_x(a_i) + p_y(a_i) = C(x)_i + C(y)_i$$

т.е. $\forall x, y \quad C(x \oplus y) = C(x) + C(y)$, ч.т.д.

Здесь я использую запись $C(x)_i$ для i -го элемента вектора $C(x)$. Поскольку i произвольное, то и весь вектор получился равен. Таким образом, этот код действительно линейный и к нему применимы уже известные теоремы!

**Последствия
линейности**

1. Существует порождающая матрица G .

$$C(x) = x_{1 \times k} G_{k \times n} = c_{1 \times n}$$

Так можно кодировать сообщения x в коды c . Но искать её мы не будем, обойдёмся одними многочленами, это интереснее.

2. Минимальное расстояние будет равно минимальному весу Хемминга среди всех кодов. Вес Хемминга вектора — количество в нём ненулевых элементов.

$$d = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq 0}} w(c)$$

Доказательство очень просто: минимальное расстояние — вес разности каких-то двух различных кодов, но разность двух кодов тоже будет кодом, т.к. мы в линейном пространстве. Значит достаточно найти минимальный вес, но не учитывая нулевой вектор, т.к. разность равна нулю тогда и только тогда, когда коды равны.

3. Корректирующая способность:

$$t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

Однако мы ещё не знаем как выглядят наши коды (как выглядят таблицы истинности функций степени не больше r ?). А значит не можем ничего сказать про минимальное расстояние.

3.1 <

trans:0>Конструкция Плоткина

**Конструкция
Плоткина:
многочлены**

Хотим понять как выглядят кодовые слова.

- Код — вектор значений функции $f(x_1, \dots, x_m) \in \text{RM}(r, m)$, причём $\deg f \leq r$. Порядок очевидно не больше r , потому что это условие для включения в пространство кодов $\text{RM}(r, m)$.
- Разделим функцию по x_1 : $f(x_1, \dots, x_m) = g(x_2, \dots, x_m) + x_1 h(x_2, \dots, x_m)$. Теперь у нас есть две функции от меньшего числа аргументов. Очевидно, так можно сделать всегда, когда $m > 1$.
- Заметим, что $\deg f \leq r$, а значит $\deg g \leq r$ и $\deg h \leq r - 1$.

**Конструкция
Плоткина:
таблица
истинности**

Теперь рассмотрим те же функции, но со стороны их таблиц истинности. Нам же интересны именно коды, а они как раз очень тесно связаны с этими таблицами.

Ранее: $f(x_1, \dots, x_m) = g(x_2, \dots, x_m) + x_1 h(x_2, \dots, x_m)$.

- Заметим, что таблица истинности f состоит из двух частей: при $x_1 = 0$ и при $x_1 = 1$.

$$\text{Eval}(f) = \begin{pmatrix} \text{Eval}^{[x_1=0]}(f) \\ \text{Eval}^{[x_1=1]}(f) \end{pmatrix}$$

Про обозначения: $\text{Eval}(f)$ — таблица для всей функции (вектор значений, если точнее), $\text{Eval}^{[x_1=0]}(f)$ — кусок таблицы при $x_1 = 0$, $\text{Eval}^{[x_1=1]}(f)$ — кусок таблицы при $x_1 = 1$. Они нам после этого доказательства больше не понадобятся.

- Причём $\text{Eval}^{[x_1=0]}(f) = \text{Eval}(g)$, а $\text{Eval}^{[x_1=0]}(f) \oplus \text{Eval}^{[x_1=1]}(f) = \text{Eval}(h)$. Это всё следует из ранее полученного утверждения. Если мы подставим $x_1 = 0$, то останется только g — первое равенство очевидно. Если же мы рассмотрим $\text{Eval}^{[x_1=1]}(f)$, то получим $\text{Eval}(g + h)$, но если туда прибавить ещё раз $\text{Eval}(g)$, то останется только $\text{Eval}(h)$ (поскольку $1 + 1 = 0$ в \mathbb{F}_2) — получили второе равенство.
- Таким образом, $\text{Eval}(f) = (\text{Eval}(g) \mid \text{Eval}(g) \oplus \text{Eval}(h))$. Палочка по центру — конкатенация векторов.

**Конструкция
Плоткина:
вывод**

Теперь собираем всё это в одно важное утверждение.

Если дана $f(x_1, \dots, x_m)$, причём $\deg f \leq r$, то можно её разделить:

$$f(x_1, \dots, x_m) = g(x_2, \dots, x_m) + x_1 h(x_2, \dots, x_m)$$

Причём мы уже знаем, что $\deg g \leq r$ и $\deg h \leq r - 1$, если $\deg f \leq r$

Также известно, что $\text{Eval}(f) = (\text{Eval}(g) \mid \text{Eval}(g) \oplus \text{Eval}(h))$.

Заметим, что $\text{Eval}(f)$ — кодовое слово (как и для g и h).

Тогда: $c = \text{Eval}(f) \in \text{RM}(r, m)$ (т.к. $\deg f \leq r$)
 $u = \text{Eval}(g) \in \text{RM}(r, m - 1)$ (т.к. $\deg g \leq r$)
 $v = \text{Eval}(h) \in \text{RM}(r - 1, m - 1)$ (т.к. $\deg h \leq r - 1$)

Напомню, что $\text{RM}(r, m)$ включает в себя **все** функции (их таблицы истинности, если точнее) от m аргументов и степени не выше r . Очевидно, наши годятся.

**Конструкция
Плоткина**

Теорема. Для всякого кодового слова $c \in \text{RM}(r, m)$ можно найти $u \in \text{RM}(r, m - 1)$ и $v \in \text{RM}(r - 1, m - 1)$, такие что $c = (u \mid u + v)$.

Что здесь важно отметить — оба наших новых кодовых слова u, v получились «меньше», чем исходное c .

Это позволяет, во-первых, устраивать индукцию, чем мы скоро и займёмся. Во-вторых, это позволяет легко строить большие порождающие матрицы, но мы этим не будем заниматься.

3.2 Минимальное расстояние

Хотим найти минимальное расстояние для кода $\text{RM}(r, m)$

Минимальное
расстояние

$$d = \min_{c \in C, c \neq 0} w(c)$$

Предположим, что $d = 2^{m-r}$ и докажем по индукции.

База: $\text{RM}(0, m)$ — единственный бит повторён 2^m раз. Очевидно, $w(\underbrace{11\dots 1}_{2^m}) = 2^m = 2^{m-0} \geq 2^{m-r}$.

Случай $\text{RM}(0, m)$ мы разбирали раньше, но я напомним. Здесь длина сообщения равна $k = \sum_{i=0}^r C_m^i = C_m^0 = 1$, а длина кода $n = 2^m$. Причём мы просто берём один бит и повторяем его 2^m раз (в таблице истинности).

Замечу, что не рассматриваю второй случай $w(00\dots 0)$, поскольку он нам не нужен для расчёта минимального расстояния. Вариант с нулевым вектором явно выкидывается, см. определение d выше.

Гипотеза: Если $v \in \text{RM}(r-1, m-1)$, то $w(v) \geq 2^{m-r}$.

Шаг: Хотим доказать для $c \in \text{RM}(r, m)$.

$$\begin{aligned} w(c) &\stackrel{(1)}{=} w((u \mid u \oplus v)) \stackrel{(2)}{=} w(u) + w(u \oplus v) \geq \\ &\stackrel{(3)}{\geq} w(u) + (w(v) - w(u)) = w(v) \stackrel{IH}{\geq} 2^{m-r} \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь немного объяснений.

Переход (1): используем конструкцию Плоткина, чтобы разбить c на конкатенацию двух кодовых слов поменьше.

Переход (2): $w((x \mid y)) = w(x) + w(y)$. Вес это всего лишь число ненулевых элементов, поэтому нет разницы как мы будем группировать части вектора.

Переход (3): $w(u \oplus v) \geq w(v) - w(u)$. Если у нас в v стоит $w(v)$ бит, то прибавив к нему u , мы сможем изменить (обнулить) не больше $w(u)$ бит. Возможно появится больше единиц, но нас интересует нижняя граница.

Переход (IH): предположение индукции в чистом виде.

До этого мы доказали, что расстояние между кодами не может превышать 2^{m-r} . Однако из этого не следует, что код с таким весом действительно существует. Поэтому чтобы завершить доказательство того, что минимальное расстояние $d = 2^{m-r}$, нужно показать существование такого кода.

Дано: $\text{RM}(r, m)$, $0 \leq r \leq m$

Хотим: такой $c \in \text{RM}(r, m)$, что $w(c) = 2^{m-r}$

Рассмотрим функцию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^r x_i = x_1 x_2 \dots x_r$$

Очевидно, $\deg(f) \leq r$, а значит она подходит под требования $\text{RM}(r, m)$.

В её таблице истинности ровно 2^{m-r} строк, когда $f(\dots) = 1$:

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r$					$x_{r+1} \quad \dots \quad x_m$					f
1	1	...	1		*	...	*			1
⋮	⋮	⋱	⋮		⋮	⋱	⋮			⋮
1	1	...	1		*	...	*			1

Небольшое пояснение: функция равна единице тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1$. Получается, r аргументов из m зафиксированы, но другие могут меняться произвольно. Получается как раз 2^{m-r} вариантов. На этом доказательство о минимальном весе можно завершить.

3.3 Параметры

Теперь можно подвести итоги исследования свойств. Для бинарного кода $\text{RM}(r, m)$:

- $0 \leq r \leq m$
- Длина кода: 2^m

Код с весом
 2^{m-r}

Свойства и
параметры

- Длина сообщения: $k = \sum_{i=0}^r C_m^i$
- Минимальное расстояние: $d = 2^{m-r}$
- Корректирующая способность: $t = 2^{m-r-1} - 1$, поскольку $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2^{m-r}}{2} - \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2^{m-r-1} - 0.5 \rfloor = 2^{m-r-1} - 1$
- Существует порождающая матрица G для кодирования, она позволяет делать так: $C(x) = xG$. Но я, как обычно, её избегаю. Рекомендую почитать «[Коды Рида-Маллера: Примеры исправления ошибок](#)», если интересно.
- Проверочная матрица H совпадает с порождающей для $RM(m-r-1, m)$, но это я это доказывать не собираюсь. Однако доказательство можно найти в «[Reed-Muller Codes: Theory and Algorithms](#)», раздел Duality.

Возможные варианты

$m \backslash r$	0	1	2	3	4
1	$k = 1$ $n = 2$ $t = 0$	$k = 2$ $n = 2$ $t = 0$	—	—	—
2	$k = 1$ $n = 4$ $t = 1$	$k = 3$ $n = 4$ $t = 0$	$k = 4$ $n = 4$ $t = 0$	—	—
3	$k = 1$ $n = 8$ $t = 3$	$k = 4$ $n = 8$ $t = 1$	$k = 7$ $n = 8$ $t = 0$	$k = 8$ $n = 8$ $t = 0$	—
4	$k = 1$ $n = 16$ $t = 7$	$k = 5$ $n = 16$ $t = 3$	$k = 11$ $n = 16$ $t = 1$	$k = 15$ $n = 16$ $t = 0$	$k = 16$ $n = 16$ $t = 0$

У красных кодов минимальное расстояние d равно единице — они совершенно бесполезны, там количество кодов равно количеству сообщений; у желтых кодов $d = 2$ — они могут определить наличие ошибки, но не могут её исправить. Для всех остальных кодов $d = 2(t+1)$.

Напоминание: k — длина сообщения, n — длина кода, а t — количество ошибок, которое код точно сможет исправить. Заодно о параметрах кода: m — количество переменных у функции (очень влияет на длину кода), а r — максимальная степень многочлена (очень влияет на длину сообщения, и соответственно надёжность кода), причём $r \leq m$. Конечно, таблицу можно продолжать и дальше.

И кстати, случай $m = 0, k = 0$ (не влез) будет собой представлять кодирование единственного бита совершенно без изменений.

4 Декодирование

Как линейный код

Этот код является линейным кодом, к нему применимы все обычные (и неэффективные методы):

- Перебор по всему пространству кодовых слов в поисках ближайшего. Этот способ применим ко всем кодам, но никто в здравом уме им не пользуется.
- С использованием синдромов: $s = rH^T$. Здесь s — синдром, r — полученное сообщение, H — проверочная матрица. Этот метод обычен для линейных кодов.

Эти способы нужно иметь в виду, но о них было рассказано и без меня, так что я их пропущу.

4.1 Алгоритм Рида

Определения

Начать стоит с нескольких определений, без которых алгоритм Рида объяснить не получится.

1. Пусть $A \subseteq \{1, \dots, m\}$ для $m \in \mathbb{N}$
2. Подпространство $V_A \subseteq \mathbb{F}_2^m$, которое обнуляет все v_i , если $i \notin A$: $V_A = \{v \in \mathbb{F}_2^m : v_i = 0 \forall i \notin A\}$

3. Аналогично для $V_{\bar{A}}$, где $\bar{A} = \{1, \dots, m\} \setminus A$: $V_{\bar{A}} = \{v \in \mathbb{F}_2^m : v_i = 0 \ \forall i \in A\}$

Пример:

- Пусть $m = 3, A = \{1, 2\}$, тогда...
- $\mathbb{F}_2^m = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ — все 8 векторов этого пространства
- $V_A = \{000, 010, 100, 110\}$ ($v_3 = 0 \ \forall v$) — обнулилась третья позиция, первые две остались
- $\bar{A} = \{1, 2, 3\} \setminus A = \{3\}$
- $V_{\bar{A}} = \{000, 001\}$ ($v_1 = v_2 = 0 \ \forall v$) — осталась только третья позиция, остальные обнулились.

Если фиксировано $V_A \subseteq \mathbb{F}_2^m$, то для каждого $b \in \mathbb{F}_2^m$ существует смежный класс $V_A + b$:

$$(V_A + b) = \{v + b \mid v \in V_A\}$$

Утверждается, что если брать $b \in V_{\bar{A}}$, то полученные смежные классы будут все различны (и это будут все смежные классы). Почему все смежные классы $(V_A + b)$ можно получить именно перебором $b \in V_{\bar{A}}$ можно найти в разделе «Дополнительные доказательства» из пдфки [\[ссылка\]](#)

*Смежные
классы*

Теперь, наконец, сам алгоритм Рида с объяснением, что тут происходит. Почему он именно такой и почему это работает — см. раздел (на русском) «Reed's Algorithm: Unique decoding up to half the code distance» [??] в пдфке.

Декодирует сообщение u , если использовался $\text{RM}(r, m)$. Для $\text{RM}(2, 2)$: $f(x_1, x_2) = u_{\{1,2\}}x_1x_2 + u_{\{2\}}x_2 + u_{\{1\}}x_1 + u_{\emptyset}$.

*Алгоритм Рида
для кода
 $\text{RM}(r, m)$*

```

Data: vector  $y = (y_z \in \mathbb{F}_2 \mid z \in \mathbb{F}_2^m)$ 
for  $t \leftarrow r$  to 0 do
  foreach  $A \subseteq \{1, \dots, m\}$  with  $|A| = t$  do
     $c = 0$ 
    foreach  $b \in V_{\bar{A}}$  do
       $c += \left( \sum_{z \in (V_A + b)} y_z \right) \bmod 2$ 
    end
     $u_A \leftarrow 1 \ [c \geq 2^{m-t-1}]$ 
  end
   $y -= \text{Eval} \left( \sum_{\substack{A \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |A|=t}} u_A \prod_{i \in A} x_i \right)$ 
end

```

На вход поступает бинарный вектор y длины 2^m . Это вектор значений функции, возможно с ошибками (но их не больше, чем $t = 2^{m-r-1} - 1$). Цель — восстановить все коэффициенты при многочлене вида $f(x_1, \dots, x_m) = u_{\emptyset} + u_1x_1 + x_2x_2 + \dots + u_{1,2,\dots,r}x_{1,2,\dots,r}$, где $\deg f \leq r$. Обратите внимание, что для индексов при u используются подмножества $A \subseteq \{1, \dots, m\}$, $|A| \leq r$, причём каждый u_A умножается на моном $\prod_{i \in A} x_i$.

Будем восстанавливать сначала коэффициенты u_A при старших степенях, потом поменьше и так пока не восстановим их все. Начинаем с $t = r$. Хотим восстановить все коэффициенты при мономах степени t . Для этого перебираем все A , $|A| = t$ и для каждого восстанавливаем коэффициент u_A при $x_{A_1}x_{A_2}\dots x_{A_t}$.

Чтобы восстановить коэффициент, нужно перебрать все смежные классы вида $(V_A + b)$:

$$\begin{aligned}
 V_A &= \{v \in \mathbb{F}_2^m \\
 &\quad : v_i = 0 \ \forall i \notin A\} \\
 b &\in \{v \in \mathbb{F}_2^m \\
 &\quad : v_i = 0 \ \forall i \in A\}
 \end{aligned}$$

Считаем количество (c) смежных классов, в которых $\sum_{z \in (V_A + b)} y_z = 1 \pmod{2}$. Если это количество больше порогового значения, то считаем, что $u_A = 1$, иначе же $u_A = 0$. Пороговое

значение (2^{m-t-1}) здесь — половина от числа смежных классов. Таким образом, если большинство сумм дало 1, то $u_A = 1$, иначе $u_A = 0$.

Затем мы вычитаем из y (вектор значений функции) всё найденное на этой итерации, после чего переходим к мономам меньшей степени. Повторять до восстановления всех коэффициентов.

4.1.1 Пример

Пример

Ранее: 011 кодируется как 1100 при помощи $\text{RM}(1, 2)$ (см. [самый первый пример](#)).

Положим $y_{00} = 1, y_{01} = 1, y_{10} = 0, y_{11} = 0$ — именно так, поскольку 1100 — вектор значений, который мы сейчас распаковываем обратно в таблицу истинности. В индексе при y находится вектор значений переменных, а его (y) значение — значение функции при этих аргументах.

Здесь $m = 2$, значит $A \subseteq \{1, 2\}$. Причём $r = 1$, т.е. $|A| \leq 1$.

Как происходит кодирование, схематически:

$$101 \rightsquigarrow (f(x_1, x_2) = x_1 + 1) \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc|c} x_1 & x_2 & f \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} y_{00} = 1 \\ y_{01} = 1 \\ y_{10} = 0 \\ y_{11} = 0 \end{array} \rightsquigarrow 1100$$

Теперь начинаем декодирование.

Шаг 1/3: $t = 1, A = \{1\}$

- Здесь $V_A = \{00, 10\}$ (меняется только первый бит), $V_{\bar{A}} = \{00, 01\}$ (первый бит обнулился). Нужно рассмотреть два смежных класса — по одному на каждый вектор из $V_{\bar{A}}$.
- $(V_A + 00) = \{00, 10\}$, сумма: $y_{00} + y_{10} = 1 + 0 = 1$
- $(V_A + 01) = \{01, 11\}$, сумма: $y_{01} + y_{11} = 1 + 0 = 1$
- Итого: $u_A = u_{\{1\}} = 1$

Шаг 2/3: $t = 1, A = \{2\}$

- Здесь $V_A = \{00, 01\}$, $V_{\bar{A}} = \{00, 10\}$. Нужно рассмотреть два смежных класса — по одному на каждый вектор из $V_{\bar{A}}$.
- $(V_A + 00) = \{00, 01\}$, сумма: $y_{00} + y_{01} = 1 + 1 = 0$
- $(V_A + 10) = \{10, 11\}$, сумма: $y_{10} + y_{11} = 0 + 0 = 0$
- Итого: $u_A = u_{\{2\}} = 0$

Перед переходом к $t = 0$, нужно вычесть из y вектор значений следующей функции:

$$g(x_1, x_2) = u_{\{2\}}x_2 + u_{\{1\}}x_1 = 0x_2 + 1x_1 = x_1$$

Здесь мы берём все u , полученные при $t = 1$, домножаем каждую на соответствующие ей x -ы и получаем функцию от m переменных.

Вычислим $\text{Eval}(g)$:

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Очень важно, чтобы у вас во всех таблицах истинности (в т.ч. той, которая использовалась при кодировании для получения y) был одинаковый порядок строк. Иначе чуда не выйдет.

Тогда $y \leftarrow y - \text{Eval}(g) = 1100 \oplus 0011 = 1111$. Полезно заметить, что в \mathbb{F}_2 сложение и вычитание — одно и то же.

Продолжение примера: $t = 0$

Теперь $y_{00} = 1, y_{01} = 1, y_{10} = 1, y_{11} = 1$

Шаг 3/3: $t = 0, A = \emptyset$

- Здесь $V_A = \{00\}$, но $V_{\bar{A}} = \{00, 01, 10, 11\}$. Нужно рассмотреть **четыре** смежных класса.

- $(V_A + 00) = \{00\}$, сумма: $y_{00} = 1$
- $(V_A + 01) = \{01\}$, сумма: $y_{01} = 1$
- $(V_A + 10) = \{10\}$, сумма: $y_{10} = 1$
- $(V_A + 11) = \{11\}$, сумма: $y_{11} = 1$
- Итого: $u_A = u_{\emptyset} = 1$

Получили $u_{\{2\}} = 0, u_{\{1\}} = 1, u_{\emptyset} = 1$. Это значит, что исходный многочлен был таков:

$$f(x_1, x_2) = u_{\{2\}}x_2 + u_{\{1\}}x_1 + u_{\emptyset} = 0 + x_1 + 1,$$

а исходное сообщение: 011, как и ожидалось.

Время работы

Утверждается, что время работы алгоритма — $O(n \log^r n)$, где $n = 2^m$ — длина кода.

5 Домашнее задание

Вариант 1

1. Закодировать сообщение: 1001.
2. Декодировать код, если ошибок нет: 1010, использовался $\text{RM}(1, 2)$.
3. Декодировать код, полученный с ошибками: 1101 1010, использовался $\text{RM}(1, 3)$

Вариант 2

1. Закодировать сообщение: 0101.
2. Декодировать код, если ошибок нет: 0110, использовался $\text{RM}(1, 2)$.
3. Декодировать код, полученный с ошибками: 1111 0100, использовался $\text{RM}(1, 3)$

1.1 Дополнительные доказательства

Далее я подробно доказываю некоторые утверждения, которые не были мне совершенно очевидны, и которые я не смог доказать в четыре слова чтобы включить в основной текст.

Лемма. Для подпространства V_A (размерности $|A|$ в пространстве \mathbb{F}_2^m) существует $2^{m-|A|}$ смежных класса вида $V_A + b := \{z + b \mid z \in V_A\}$, где фиксировано $b \in \mathbb{F}_2^m$.

Доказательство. Из теоремы Лагранжа, известно что $|G| = |H| \cdot [G : H]$, где $H \subseteq G$, а $[G : H]$ — число различных смежных классов. В нашем случае, $H = V_A, G = \mathbb{F}_2^m$. Тогда $|V_A| = 2^{\dim V_A} = 2^{|A|}$. Таким образом получаем:

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|\mathbb{F}_2^m|}{|V_A|} = \frac{2^m}{2^{|A|}} = 2^{m-|A|} \quad \square$$

Лемма. $\text{Eval}_z(x_A) = 1$ если и только если $z_i = 1 \forall i \in A$, причём существует только один такой $z \in (V_A + b)$.

Доказательство. Во-первых, $\text{Eval}_z(x_A) = \text{Eval}_z(x_{A_1}x_{A_2}\dots x_{A_k})$ по определению x_A . Конечно же, оно будет верно если и только если $x_{A_1} = x_{A_2} = \dots = x_{A_k} = 1$. Другими словами, $\forall i \in A \quad z_i = 1$, если подставить значения вектор z на место переменных x . Таким образом, первая часть доказана.

Напомним определение V_A :

$$V_A = \{z \in \mathbb{F}_2^m \mid z_i = 0 \forall i \notin A\}$$

Теперь докажем существование вектора. Пусть искомый вектор существует и равен $z = v + b, v \in V_A$. Требуется, чтобы $z_i = 1 \forall i \in A$. Т.е. $v_i + b_i = 1$, а значит $v_i = 1 - b_i$ (при $i \in A$, конечно). Такой v действительно существует в подпространстве V_A , потому что определение никак не ограничивает элементы $v_i, i \in A$.

Единственность следует из того, что все остальные элементы v обязательно обнуляются по определению V_A ($v_i = 0$, если $i \notin A$). Теперь можно сказать, что $v_i = \begin{cases} 1 + b_i, & i \in A \\ 0, & i \notin A \end{cases}$ и никак иначе, из чего получаем единственность искомого $z = v + b$. \square

Лемма. *Размерность V_A равна $|A|$.*

Доказательство. Это почти очевидное утверждение. Если рассмотреть каждый из векторов в V_A , то у него могут меняться только те координаты, которые не обнулены, и их ровно $|A|$. Получается по одному базисному вектору на каждый элемент из $|A|$. \square

Следующая теорема необходима для эффективной реализации алгоритма Рида на нормальном языке программирования.

Теорема. *Пусть $\bar{A} = \{1, \dots, m\} \setminus A$. Для фиксированного A , множество смежных классов $\{V_A + b \mid b \in V_{\bar{A}}\}$ будет содержать их все, причём все различны.*

Доказательство. Здесь используются верхние индексы, никакого возведения в степень.

Сначала докажем, что все эти смежные классы различны. Рассмотрим любые два: $(V_A + b^1)$ и $(V_A + b^2)$, где $b^1, b^2 \in V_{\bar{A}}$ и $b^1 \neq b^2$. Можно сказать, что векторы b^1 и b^2 отличаются хотя бы в одном бите, назовём его i -ым. Причём $i \in \bar{A}$, поскольку все другие биты в $V_{\bar{A}}$ обнулены. Покажем, что любые векторы $x \in (V_A + b^1)$ и $y \in (V_A + b^2)$ тоже будут отличаться в i -ом бите.

$$\begin{array}{lll} x = v^1 + b^1 & y = v^2 + b^2 & b^1 \neq b^2 \\ x_i = v_i^1 + b_i^1 & y_i = v_i^2 + b_i^2 & b_i^1 \neq b_i^2 \end{array}$$

Заметим, что $v_i^1 = v_i^2 = 0$, поскольку $v_1, v_2 \in V_A$, но $i \notin A$. Получается, что $x_i = 0 + b_i^1$ и $y_i = 0 + b_i^2$, причём $b_i^1 \neq b_i^2$. Таким образом $x \neq y$ для любых $x \in (V_A + b^1), y \in (V_A + b^2)$.

Теперь докажем, что мы перечислили все смежные классы. Как доказано ранее, их всего $2^{m-|A|}$. С другой стороны, $|V_{\bar{A}}| = 2^{|\bar{A}|} = 2^{m-|A|}$. Поскольку все элементы множества различны, то оно содержит все смежные классы. \square