

#### Код Рида-Маллера

#### Бведение

Свойства

параметрь кода

Плоткина Минимально расстояние

Декодироі ние

Пара слов о синдромах Алгоритм Рида

домашне задание

1сточники

#### Код Рида-Маллера

#### Илья Коннов

Факультет компьютерных наук

Высшая Школа Экономики

11 февраля 2022 г.



#### Код Рида-Маллера

1. Если вы смотрите презентацию, то на сером фоне справа иногда видны некоторые ценные комментарии, для которых поля слайда оказались слишком узки. Если вы читаете pdf-ку, то эти комментарии уже находятся в самом подходящем для них месте в тексте (а в правых полях видны заголовки слайдов). Если вы смотрите мой доклад и видите этот текст, то что-то пошло серьёзно не так. Да, у этого одного файла есть три разные версии.

Код Рида-Маллера

Илья Коннов

Финульте компьютерных карх

Высши Школо Экономия

11 фавраля 2022 г.

# Введение

Код Рида-Маллера

Введение

Свойства і параметрь

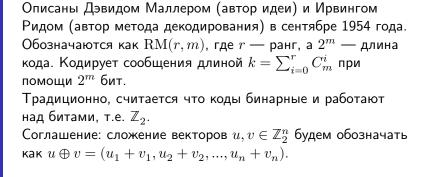
тараметрь Кода Конструкция Плоткина

Плоткина Минимальное расстояние

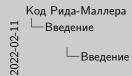
декодирова ние Пара слов о синдромах

Домашне задание

Источник



◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ 夕久○



Описаны Давидом Малляром (автор идеи) и Ирвингом Ридом (автор митода декодирования) в сънтября 1954 года Обозначаются как  $\mathrm{RM}(r,m)$ , где r= рам, а  $2^m-$  длина кода. Кодирует сообщения длиной  $k=\sum_{i=0}^r C_m^i$  при повьощи  $2^m$  бит.

Традиционно, считается что ходы бинарные и работают над битаме, т.е.  $\mathbb{Z}_2$ . Соглашение: сложение векторое  $u,v\in\mathbb{Z}_2^n$  будем обозначати как  $u\oplus v=(u_1+v_1,u_2+v_2,...,u_n+v_n)$ .

# Булевы функции и многочлен Жегалкина

Код Рида-Маллера

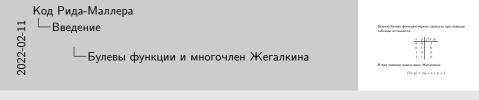
Введение

Всякую булеву функцию можно записать при помощи таблицы истинности

$\boldsymbol{x}$	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

И при помощи многочлена Жегалкина:

$$f(x,y) = xy + x + y + 1$$



## Многочлены Жегалкина

#### Код Рида-Маллера

Введение

Свойства Гараметрь

араметрь ода Конструкция Плоткина

Конструкция Плоткина Минимальное расстояние

Цекодирование Пара слов о синдромах Алгоритм Рида

Домашне задание

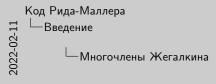
адание Істочники



$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{S \subseteq \{1, ..., m\}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

Например, для m=2:  $f(x_1,x_2)=c_1\cdot x_1x_2+c_2\cdot x_1+c_3\cdot x_2+c_4\cdot 1$  Всего  $n=2^m$  коэффициентов для описания каждой функции.

4D>4A>4E> E 999



В общам случае, многочлены будут иметь следующий вид  $f(x_1,x_2,...,x_m) = \sum_{S \subseteq \{1,...,m\}} c_S \prod_{i \in S} x_i$ 

Например, для m=2:  $f(x_1,x_2)=c_1\cdot x_1x_2+c_2\cdot x_1+c_3\cdot x_2+c_4\cdot 1$  Всего  $n=2^m$  хозффициентов для описания каждой функции.



# Функции небольшой степени

Код Рида-Маллера

Введение

Рассмотрим функции, степень многочленов которых не больше r:

$$\{f(x_1, x_2, ..., x_m) \mid \deg f \le r\}$$

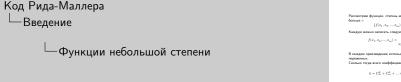
Каждую можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, ..., m\} \\ |S| \le r}} c_S \prod_{i \in S} x_i$$

В каждом произведении используется не больше rпеременных.

Сколько тогда всего коэффициентов используется?

$$k = C_m^0 + C_m^2 + \dots + C_m^r = \sum_{i=0}^r C_m^i$$



- Сколько тогда всего коэффициентов используется  $k = C_m^0 + C_m^2 + ... + C_m^r = \sum_i C_m^i$
- 1. Замечу, что при  $S=\emptyset$ , мы считаем, что  $\prod_{i\in S}x_i=1$ , таким образом всегда появляется свободный член.
- 2. Если говорить несколько проще, то для составления многочленов мы сложим сначала одночлены (x + y + z + ...), затем произведения одночленов (xy + yz + xz + ...) и т.д. вплоть до r множителей (поскольку мы работаем в поле  $\mathbb{Z}_2$ , здесь нету  $x^2, y^2, z^2$ , т.к.  $a^2 = a$ ). Тогда легко видеть, почему kименно такое: мы складываем все возможные перестановки сначала для 0 переменных, потом для одной, двух, и так до всех r



## Идея кодирования

Код Рида-Маллера

11

Кодирование

Свойства и параметрь

Конструкция Плоткина Минимально расстояние

ие

глара слов о синдромах Алгоритм Рида

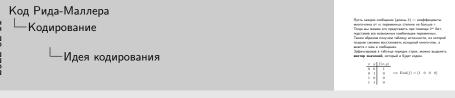
Домашне задание

1сточники

Пусть каждое сообщение (длины k) — коэффициенты многочлена от m переменных степени не больше r. Тогда мы можем его представить при помощи  $2^m$  бит, подставив все возможные комбинации переменных. Таким образом получим таблицу истинности, из которой позднее сможем восстановить исходный многочлен, а вместе с ним и сообщение. Зафиксировав в таблице порядок строк, можно выделить

вектор значений, который и будет кодом.





- 1. Их  $2^m$ , поскольку рассматриваем многочлены только над  $\mathbb{Z}_2$  от m переменных.
- 2. Вектор значений обозначается  $\operatorname{Eval}(f)$  столбец таблицы истинности, содержащий значения функции. Имеет смысл только при зафиксированном порядке строк в таблице. У меня он везде самый обычный, как в примере выше.



# Пример

#### Код Рида-Маллера

.,

Кодирование

Свойства параметр кола

> Конструкция Плоткина Минимальное

декодирова ние Пара слов о

Домашне залание

Источники

r=1 (степень многочлена), m=2 (переменных). Это  $\mathrm{RM}(1,2)$ .

■ Тогда наш многочлен:  $f(x,y) = c_1 x + c_2 y + c_3$ .

**©** Сообщение: **101**, тогда f(x,y) = x + 0 + 1.

■ Подставим всевозможные комбинации:

$\boldsymbol{x}$	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

■ Получили код: Eval(f) = 1100.





1. Здесь и далее я для краткости и удобства записываю битовые векторы не как  $(1 \ 0 \ 0 \ 1)$ , а как 1001 при помощи нескучного шрифта.

# Декодирование когда потерь нет

Код Рида-Маллера

Кодирование

 Мы получили код: 1100 ■ Представим таблицу

истинности.

■ Подстановками в

 $x y \mid f(x,y)$ 

Подстановками в  $f(x,y)=c_1x+c_2y+c_3$  получим СЛАУ.  $\begin{cases} c_3=1\\ c_2+c_3=1\\ c_1+c_2+c_3=0\\ c_1+c_2+c_3=0 \end{cases}$ 

 $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1,$ исходное сообщение: 101.

Код Рида-Маллера -Кодирование -Декодирование когда потерь нет

1. Теперь покажем, как можно декодировать когда потерь нет. Этот пример продолжение предыдущего.





Код

Рида-Маллера

# Коды 0-го порядка

Кодирование

зойства и граметры

кода Конструкция Плоткина

иинимальное расстояние Цекодирова ие

Пара слов о синдромах Алгоритм Рида

Домашн задание

задание Источники Для случая  $\mathrm{RM}(0,m)$  нужна функция от m аргументов, степени не выше 0.

- $f(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$
- $g(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$

#### Таблица истинности:

◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ 夕久○

Вывод: это  $2^m$ -кратное повторение символа

- Сообщение 0 даст код  $\underbrace{\mathbf{00...0}}_{2^m}$
- lacktriangle Сообщение 1 даст код  $\underbrace{11...1}^{2^m}$

Код Рида-Маллера

Кодирование

Кодирование

Кодирование

Кодирование

Кодирование

Коды 0-го порядка

- 1. Отдельно стоит рассмотреть вариант кода при r=0, он нам в будущем пригодится для доказательств.
- 2. Таких функций существует всего лишь две, поскольку мы можем влиять лишь на свободный член. Все остальные коэффициенты обнуляются из-за требования  $\deg f \leq 0$ .
- 3. Здесь число строк, как и в любой другой таблице истинности, равно  $2^m$ , а колонки с значениями никак не зависят от аргументов функций. Получается две колонки одна с нулями, другая с единицами.

# Доказательство линейности

Код Рида-Маллера

Свойства и параметры кода

-Доказательство линейности

сообщений ( $\mathbb{Z}_2^k$ ) в пространство слов ( $\mathbb{Z}_2^m$ ).

(длины  $2^m$ ). Именно он и называется кодом.

операция сложения побитовая.

1. Хотим показать, что этот код является линейным, т.е. что его кодовые слова образуют линейное пространство, и у нас есть изоморфизм из пространства

Для этого необходимо немного формализовать всё описанное раньше.

2. Пояснение: перебираем все векторы  $a_i$  ( $2^m$  штук), подставляем каждый в

 $p_{\scriptscriptstyle T}$  в качестве переменных и таким образом получаем вектор значений

3. Напомню, что базис пространства многочленов выглядит примерно так:

сообщения и умножаем его на соответствующий базисный вектор. Очевидно,

 $p_{(x+y)} = p_x + p_y$ . Обратите внимание, что сообщение x это не просто число  $(\mathbb{Z}_{2^k})$  и мы рассматриваем его биты, а реально вектор битов  $(\mathbb{Z}_2^k)$ . У него

4. Здесь я использую запись  $C(x)_i$  для i-го элемента вектора C(x). Поскольку i произвольное, то и весь вектор получился равен. Таким образом, этот код

действительно линейный и к нему применимы уже известные теоремы!

1, x, y, z, xy, yz, xz (для трёх переменных, степени не выше 2). Чтобы преобразовать сообщение в многочлен, мы берём каждый бит

такое преобразование будет изоморфизмом. Именно поэтому

Пусть C(x) нодирует сообщение  $x \in \mathbb{Z}_+^k$  в код  $C(x) \in \mathbb{Z}_+^m$  $C(x) = (p_s(a_i) \mid a_i \in \mathbb{Z}_2^m)$ 

пинейное пространство, то  $p_{(\mu m_0)} = p_\mu + p_\mu$  $C(x \oplus y)_i = p_{(x \cap y)}(a_i) = p_x(a_i) + p_y(a_i) = C(x)_i + C(y)_i$ T.e.  $\forall x, y \ C(x \oplus y) = C(x) + C(y)$ , y, r, a.

Пусть C(x) кодирует сообщение  $x \in \mathbb{Z}_2^k$  в код  $C(x) \in \mathbb{Z}_2^m$ .

где  $p_x(a_i)$  — соответствующий сообщению x многочлен.

x. Поскольку многочлены степени не выше r образуют

линейное пространство, то  $p_{(x \oplus y)} = p_x + p_y$ .

т.е.  $\forall x, y \quad C(x \oplus y) = C(x) + C(y)$ , ч.т.д.

 $C(x) = (p_x(a_i) \mid a_i \in \mathbb{Z}_2^m)$ 

Причём  $p_{x}$  берёт в качестве своих коэффициентов биты из

 $C(x \oplus y)_i = p_{(x \oplus y)}(a_i) = p_x(a_i) + p_y(a_i) = C(x)_i + C(y)_i$ 

◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ 夕久○

Рида-Маллера

Свойства и параметры

Тогда:

кода



## Последствия линейности

Код Рида-Маллера

Свойства и параметры кода

**1** Существует порождающая матрица G.

$$C(x) = x_{1 \times k} G_{k \times n} = c_{1 \times n}$$

2 Минимальное растояние будет равно минимальному весу Хемминга среди всех кодов.

$$d = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq 0}} w(c)$$

3 Корректирующая способность:

$$t = \left| \frac{d-1}{2} \right|$$





- 1. Так можно кодировать сообщения x в коды c. Но искать её мы не будем, обойдёмся одними многочленами, это интереснее.
- 2. Вес Хэмминга вектора количество в нём ненулевых элементов.
- 3. Доказательство очень просто: минимальное расстояние вес разности каких-то двух различных кодов, но разность двух кодов тоже будет кодом, т.к. мы в линейном пространстве. Значит достаточно найти минимальный вес, но не учитывая нулевой вектор, т.к. разность равна нулю тогда и только тогда, когда коды равны.
- 4. Однако мы ещё не знаем как выглядят наши коды (как выглядят таблицы истинности функций степени не больше r?). А значит не можем ничего сказать про минимальное расстояние.



#### Конструкция Плоткина: многочлены

Код Рида-Маллера

введение

Кодирован

Свойства и параметрь

Конструкция Плоткина Минимально

Декодиров: ние

Пара слов о синдромах Алгоритм Рида

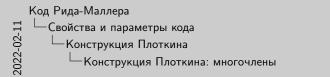
-----задание

сточники

Хотим понять как выглядят кодовые слова.

- Код таблица истинности функции  $f(x_1,...,x_m)\in \mathrm{RM}(r,m)$ , причём  $\deg f\leq r$ .
- Разделим функцию по  $x_1$ :  $f(x_1,...,x_m) = g(x_2,...,x_m) + x_1h(x_2,...,x_m).$
- $lacksymbol{\blacksquare}$  Заметим, что  $\deg f \leq r$ , а значит  $\deg g \leq r$  и  $\deg h \leq r-1.$





- Kog таблица истинности ф  $f(x_1,...,x_m) \in \text{RM}(r,m)$ , при
- В Разделим функцию по  $x_1$ :  $f(x_1,...,x_m) = g(x_2,...,x_m) + x_1h(x_2,...,x_m)$
- В Заметим, что  $\deg f \le r$ , а значит  $\deg g \le r$  и  $\deg h \le r 1$ .
- 1. Порядок очевидно не больше r, потому что это условие для включения в пространство кодов  $\mathrm{RM}(r,m)$ .
- 2. Теперь у нас есть две функции от меньшего числа аргументов. Очевидно, так можно сделать всегда, когда  ${\sf m}>1$ .

## Конструкция Плоткина: таблица истинности

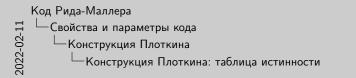
#### Код Рида-Маллера

Panee:  $f(x_1,...,x_m) = g(x_2,...,x_m) + x_1h(x_2,...,x_m)$ .

■ Заметим, что таблица истинности f состоит из двух частей: при  $x_1=0$  и при  $x_1=1$ .

$$\operatorname{Eval}(f) = \left(\frac{\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f)}{\operatorname{Eval}^{[x_1=1]}(f)}\right)$$

- Причём  $\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f) = \operatorname{Eval}(g)$ , а  $\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f) \oplus \operatorname{Eval}^{[x_1=1]}(f) = \operatorname{Eval}(h)$ .
- Таким образом,  $\operatorname{Eval}(f) = (\operatorname{Eval}(g) \mid \operatorname{Eval}(g) \oplus \operatorname{Eval}(h)).$



Рамов:  $f(x_1,...,x_m) = g(x_2,...,x_m) + x_1h(x_2,...,x_m)$ .  $\blacksquare$  Заметим, что таблица истинности f состоит из частей: при  $x_1 = 0$  и при  $x_1 = 1$ .

 $\text{Eval}(f) = \frac{1}{\left(\text{Eval}^{(\sigma_1-1)}\right)}$ 

- $\blacksquare$  Причём  $\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f) = \operatorname{Eval}(g)$ , а  $\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f) \oplus \operatorname{Eval}^{[x_1=1]}(f) = \operatorname{Eval}(h)$
- Eval(f) =  $(\text{Eval}(g) \mid \text{Eval}(g) \oplus \text{Eval}(h))$
- 1. Теперь рассмотрим те же функции, но со стороны их таблиц истинности. Нам же интересны именно коды, а они как раз очень тесно связаны с этими таблицами.
- 2. Про обозначения:  $\operatorname{Eval}(f)$  таблица для всей функции (вектор значений, елси точнее),  $\operatorname{Eval}^{[x_1=0]}(f)$  кусок таблицы при  $x_1=0$ ,  $\operatorname{Eval}^{[x_1=1]}(f)$  кусок таблицы при  $x_1=1$ . Они нам после этого доказательства больше не понадобятся.
- 3. Это всё следует из ранее полученного утверждения. Если мы подставим  $x_1=0$ , то останется только g первое равенство очевидно. Если же мы рассмотрим  $\mathrm{Eval}^{[x_1=1]}(f)$ , то получим  $\mathrm{Eval}(g+h)$ , но если туда прибавить ещё раз  $\mathrm{Eval}(g)$ , то останется только  $\mathrm{Eval}(h)$  (поскольку 1+1=0 в  $\mathbb{Z}_2$ ) получили второе равенство.
- 4. Палочка по центру конкатенация векторов.

# Конструкция Плоткина: вывод

Рида-Маллера

Конструкция

Если дана  $f(x_1,...,x_m)$ , причём  $\deg f \leq r$ , то можно её

разделить:  $f(x_1,...,x_m) = g(x_2,...,x_m) + x_1h(x_2,...,x_m)$ 

Также известно, что

 $\text{Eval}(f) = (\text{Eval}(q) \mid \text{Eval}(q) \oplus \text{Eval}(h)).$ 

Заметим, что  $\operatorname{Eval}(f)$  – кодовое слово (как и для q, h). Тогда:

 $c = \text{Eval}(f) \in \text{RM}(r, m)$  (T.K.  $\deg f \le r$ )

 $u = \text{Eval}(q) \in \text{RM}(r, m - 1)$  (т.к.  $\deg q \le r$ )

 $v = \text{Eval}(h) \in \text{RM}(r-1, m-1)$  (T.K.  $\deg h < r-1$ ) **Утверждение:** Для всякого кодового слова  $c \in \mathrm{RM}(r,m)$ можно найти  $u \in RM(r, m-1)$  и  $v \in RM(r-1, m-1)$ , такие что  $c = (u \mid u + v)$ . ◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ 夕久○

Свойства и параметры кода  $f(x_1, ..., x_m) = g(x_1, ..., x_m) + x_1h(x_1, ..., x_m)$ Конструкция Плоткина  $\text{Eval}(f) = (\text{Eval}(g) \mid \text{Eval}(g) \oplus \text{Eval}(h)).$ —Конструкция Плоткина: вывод Утверждение: Для всякого корового слова  $c \in RM(r, m)$ 1. Теперь собираем всё это в одно важное утверждение. 2. Причём мы уже знаем, что  $\deg g \leq r$  и  $\deg h \leq r-1$ , если  $\deg f \leq r$ 3. Напомню, что RM(r, m) включает в себя все функции (их таблицы

истинности, если точнее) от m аргументов и степени не выше r. Очевидно,

Если дана  $f(x_1,...,x_m)$ , причём  $\deg f \leq r$ , то можно еї

матрицы, но мы этим не будем заниматься.

Код Рида-Маллера

наши годятся. 4. Что здесь важно отметить — оба наших новых кодовых слова u,vполучились «меньше», чем исходное c. Это позволяет, во-первых, устраивать индукцию по m, чем мы скоро и займёмся. Во-вторых, это позволяет легко строить большие порождающие



## Минимальное расстояние

код Рида-Маллера

Хотим найти минимальное расстояние для кода  $\mathrm{RM}(r,m)$ 

$$d = \min_{c \in C} w(c)$$

Предположим, что  $d=2^{m-r}$  и докажем по индукции.

**База:**  $\mathrm{RM}(0,m)$  — единственный бит потворён  $2^m$  раз.

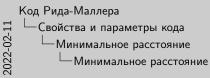
Очевидно, 
$$w(\underbrace{11...1}_{2m}) = 2^m = 2^{m-0} \ge 2^{m-r}$$
.

Гипотеза: Если  $v \in \text{RM}(r-1, m-1)$ , то  $w(v) > 2^{m-r}$ .

**Шаг:** Хотим доказать для  $c \in RM(r, m)$ .

$$\begin{split} w(c) &= w((u \mid u \oplus v)) \stackrel{(1)}{=} w(u) + w(u \oplus v) \geq \\ &\stackrel{(2)}{\geq} w(u) + (w(v) - w(u)) = w(v) \stackrel{IH}{\geq} 2^{m-r} \blacksquare \end{split}$$





 $d=\min_{c\in C,c\ne 0}w(c)$  Прадволожим, что  $d=2^{m-r}$  и докажам по индукции База:  $\mathrm{RM}(0,m)$  — единственный бит потворён  $2^m$  у

База: RM(0, m) — единственный бат потворіи  $2^{th}$ Очендво,  $w(\underline{11...1}) = 2^m = 2^{tm/2} \ge 2^{tm}$ . Гипотела: Entir e RM(r - 1, m - 1), то  $w(v) \ge 2^m$ Шат: Хотии доказать для  $c \in RM(r, m)$ .  $w(c) = w(u \mid u \oplus v) \stackrel{(i)}{=} w(u) + w(u \oplus v) >$ 

 $w(v) = w(u \mid u \oplus v) = w(u) + w(u \oplus v) \ge$   $\stackrel{(2)}{\ge} w(u) + (w(v) - w(u)) = w(v) \stackrel{IH}{\ge} 2^{uv - r} \blacksquare$ 

- 1. Случай  $\mathrm{RM}(0,m)$  мы разбирали раньше, но я напомню. Здесь длина сообщения равна  $k=\sum_{i=0}^r C_m^i=C_m^0=1$ , а длина кода  $n=2^m$ . Причём мы просто берём один бит (соответсвует функции  $f(x_1,...,x_m)=0$  или  $f(x_1,...,x_m)=1)$  и повторяем его  $2^m$  раз (в таблице истинности). Замечу, что не рассматриваю второй случай w(00...0), поскольку он нам не нужен для расчёта минимального расстояния. Вариант с нулевым вектором явно выкидывается, см. определение d выше.
- 2. Теперь немного объяснений. Переход (1):  $w((x\mid y))=w(x)+w(y)$ . Вес это всего лишь число ненулевых элементов, поэтому нет разницы как мы будем группировать части вектора. Переход (2):  $w(u\oplus v)\geq w(v)-w(u)$ . Если у нас в v стоит w(v) бит, то прибавив к нему u, мы сможем изменить (обнулить) не больше w(u) бит. Возможно появится больше единиц, но нас интересует нижняя граница. Переход (IH): предположение индукции в чистом виде.

## Свойства и параметры

#### Код Рида-Маллера

...

Кодирован

Свойства параметры кода

Конструкция Плоткина Минимальное расстояние

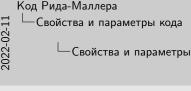
Цекодирование

Домашне

Істочники

#### Для бинарного кода $\mathrm{RM}(r,m)$ :

- r < m
- Длина кода:  $2^m$
- Длина сообщения:  $k = \sum_{i=0}^r C_m^i$
- Минимальное расстояние:  $d = 2^{m-r}$
- Корректирующая способность:  $t = 2^{m-r-1} 1$
- lacktriangle Существует порождающая матрица G для кодирования
- $\blacksquare$  Проверочная матрица H совпадает с порождающей для  $\mathrm{RM}(m-r-1,m)$



Для бинарного кода RM(r, m):

п ≤ m
 Плина кода: 2<sup>m</sup>

■ Длина кода:  $2^m$ ■ Длина сообщения:  $k = \sum_{i=1}^{n} C_{im}^i$ 

■ Минимальное расстояние:  $d = 2^{m-r}$ ■ Корректирующая способность:  $t = 2^{m-r-1} - 1$ 

Существует порождающая матрица G для

проверочная матрица H совпадает с порож для RM(m — r — 1, m)

- 1. Теперь можно подвести итоги исследования свойств.
- 2. , поскольку  $t=\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2^{m-r}}{2}-\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor2^{m-r-1}-0.5\right\rfloor=2^{m-r-1}-1$
- 3. , она позволяет делать так: C(x)=xG. Но я, как обычно, её избегаю. Рекомендую почитать «Коды Рида-Маллера: Примеры исправления ошибок», если интересно.
- 4. , но это я это доказывать не собираюсь. Но его можно найти в «Reed-Muller Codes: Theory and Algorithms», раздел Duality.

# Как линейный код

#### Код Рида-Маллера

Введение

Свойства параметры

Конструкция Плоткина Минимально расстояние

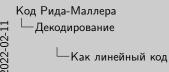
# Декодирование Пара слов о синдромах

Домашн задание

1сточники

Этот код является линейным кодом, к нему применимы все обычные (и неэффективные методы):

- Перебор по всему пространству кодовых слов в поисках ближайшего.
- $\blacksquare$  С использованием синдромов:  $s=rH^T$ .



Этот код является линейным кодом, к нему применимы обычные (и неэффективные методы):

ближайшего.

 $\blacksquare$  C использованием синдромов:  $s=rH^T$ 

- 1. Этот способ применим ко всем кодам, но никто в здравом уме им не пользуется.
- 2. Здесь s синдром, r полученное сообщение, H проверочная матрица. Этот метод обычен для линейных кодов.
- 3. Эти способы нужно иметь ввиду, но о них было рассказано и без меня, так что я их пропущу.



### Синдромы и как их использовать

#### Код Рида-Маллера

Введение

Свойства параметры кода

Конструкци: Плоткина Минимальн расстояние

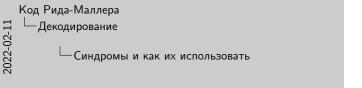
Декодирование
Пара слов о синдромах
Алгоритм Рида

Домашне вадание

сточники

Пусть у нас в полученном сообщении r есть ошибка e. Тогда r=v+e, где v — кодовое слово, которое крайне легко можно декодировать. Получается, что  $s=rH^T=(v+e)H^T=vH^T+eH^T=eH^T$ , поскольку  $vH^T=0$  (есть такое свойство). Мы можем перебрать всевозможные ошибки (e), для каждой посчитать синдром и записать всё это в таблицу. Тогда чтобы восстановить сообщение, нужно посчитать синдром, по таблице найти ошибку и исправить её.

◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ 夕久○



Πρετη για ε παηγείωσει codiquiera r «στο αυπάια ε. Τότρι r = +ε, t  $par : — συρακο codio, κότορο πράλιο παίτο μένους διαστραφοιάτει. Πουγείατο, κότορο πράλιο <math>r = rH^2 : -(\epsilon + \epsilon)H^2 : = rH^2 + \epsilon H^2 + \epsilon H^2 + \epsilon H^2$ , ποσοπλέγει εκταιοιιστώνια συμάτος το αυτόπου, δία μένα καιαφοίρεται εκταιοιίστου, δία μένα καιαφοίρεται εκταιοιίστου, δία μένα καιαφοίρεται το αυτόποια δία το πάποιας. Τότη το πάποιας το δία το πάποιας το συμάτο αυτόποιας το πάποιας το συμάτο αυτόποιας κάτα το συμάτος καιαφοίρει καιαφοίρει και μένα συμάτος αυπάγει αυπάγει

- 1. Я не стал включать это в презентацию, но вообще-то говоря метод полезный, так что пусть будет здесь.
- 2. Источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейный\_код



Код Рида-Маллера

TODO

Домашнее

задание

# 

# Код Рида-Маллера –Домашнее задание 2022-02-11





#### Код Рида-Маллера

Бведение

Кодирова

Свойства

Конструкция Плоткина Минимально расстояние

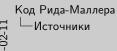
Декодиро ние Пара слов о синдромах

Домашне задание

Источники

- I https://arxiv.org/pdf/2002.03317.pdf великолепный обзор, очень рекомендую.
- http://dha.spb.ru/PDF/ReedMullerExamples.pdf
   очень хорошо и подробно, но используется подход через матрицы, а не через полиномы, а это не весело.
- https:
  //en.wikipedia.org/wiki/Reed-Muller\_code —
  кратко, чётко, понятно, но не описано декодирование.
- 4 https://ru.bmstu.wiki/Коды\_Рида-Маллера в целом всё есть, но написано очень непонятно;





- https://arxiv.org/pdf/2002.03317.pdf великолепный обзор, очень рекомендую.
- http://dha.spb.ru/PDF/ReedMullerExamples.pdf — очень хорошо и подробно, но используется подход через матрицы, а не через полиномы, а это не весело.
- //en.wikipedia.org/wiki/Reed-Muller\_code кратко, чётко, понятно, но не описано декодирование. в https://ru.bmstu.wiki/Коды\_Рида-Маллера — в
- Бонусный раздел, который не включён в основную презентацию, но может быть очень полезен.