

Мини-задача #15 (1 балл)

Реализовать собственный динамический массив, в котором поддержаны операции:

1. Доступа к элементу по индексу
2. Добавление элемента в конец
3. Удаления последнего элемента

Операции работают за $O(1)$ или $O^*(1)$.

Обрабатывается случаи выхода за границу массива и удаление элемента из пустого массива.

Пользоваться готовыми библиотечными решениями нельзя.

Мини-задача #16 (1 балл)

По заданному связному списку нужно найти цикл в нем и вернуть номер узла, с которого он начался.

Нельзя:

1. Модифицировать элементы списка
2. Пользоваться встроенными коллекциями

Нужно: использовать только $O(1)$ дополнительной памяти.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/linked-list-cycle-ii/>

Мини-задача #17 (1 балл)

По заданному связному списку и двум значениям элементов из него: построить новый связный список в котором все элементы между заданных в условии идут в обратном порядке.

Для решения используйте **однопроходный** алгоритм.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/reverse-linked-list-ii/>

Алгоритмы и структуры данных

Элементарные структуры данных



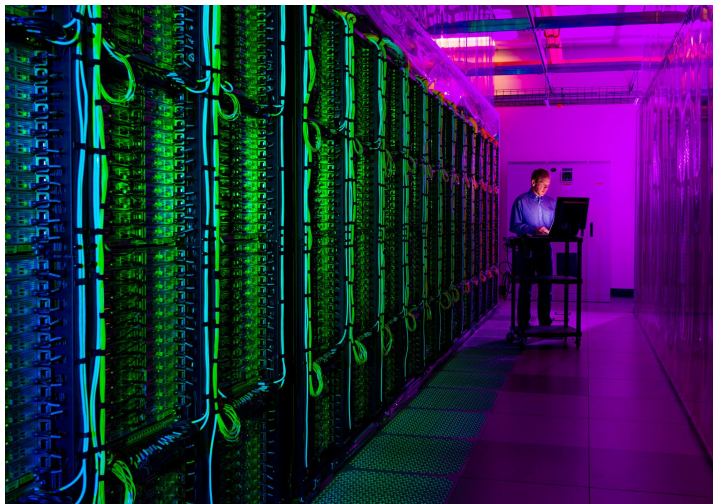
Алгоритмы и структуры данных

Элементарные структуры данных



Задача

Реализовать **хранилище** однотипных данных
(например, чисел)



Задача

Реализовать **хранилище** однотипных данных
(например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

Как реализовывать будем?

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

Как реализовывать будем?

Массив!

33	2	3	12	7	4	8
----	---	---	----	---	---	---

$$a[i] = *(a + i)$$

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

Сложность?

33	2	3	12	7	4	8
----	---	---	----	---	---	---

$$a[i] = *(a + i)$$

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

Сложность? $O(1)$

33	2	3	12	7	4	8
----	---	---	----	---	---	---

$$a[i] = *(a + i)$$

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

2. Добавление элемента в "конец"

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

2. Добавление элемента в "конец"

3. Удаление последнего элемента

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

2. Добавление элемента в "конец"

3. Удаление последнего элемента

Как реализовывать будем?

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

2. Добавление элемента в "конец"

3. Удаление последнего элемента



Как реализовывать будем? Массив!

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

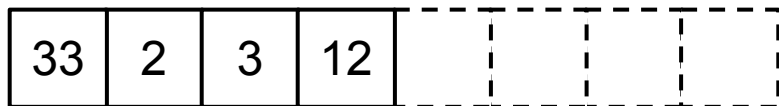
2. Добавление элемента в "конец"

3. Удаление последнего элемента

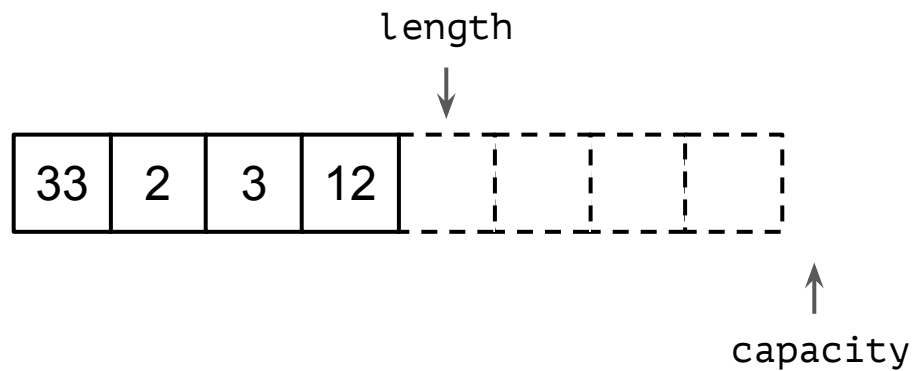


Как реализовывать будем? **Динамический** массив!

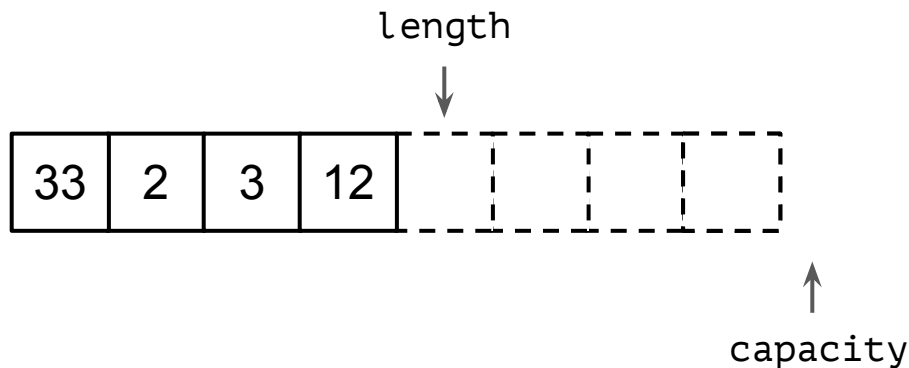
Динамический массив



Динамический массив

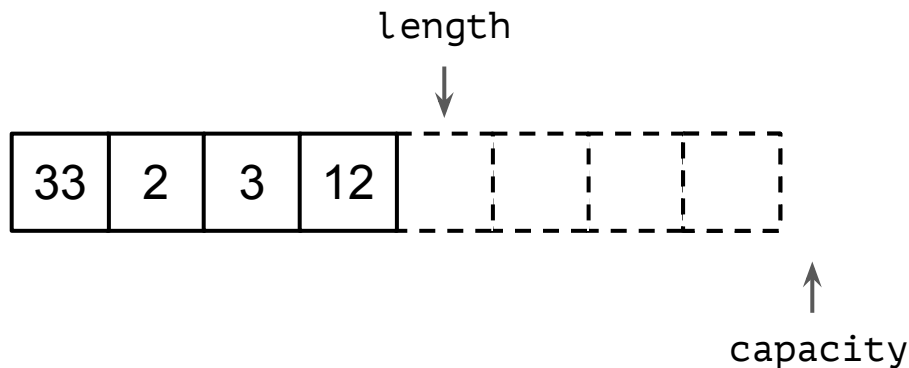


Динамический массив



```
def add(self, value: int):  
    if self.length < self.capacity:  
        self.data[self.length] = value  
        self.length += 1
```

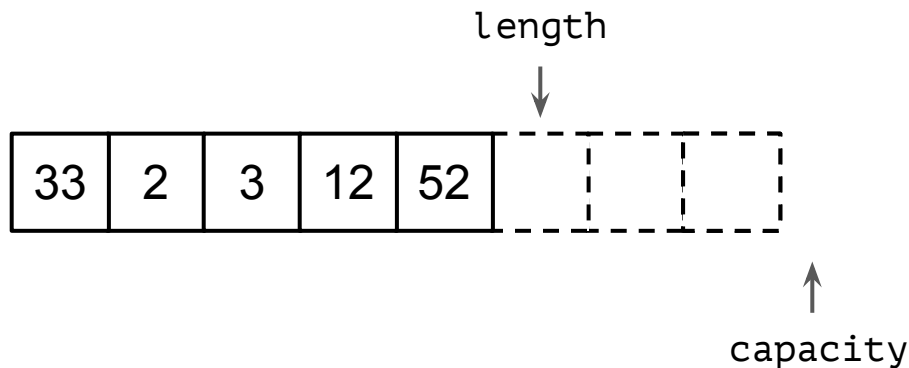
Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
```

```
def add(self, value: int):  
    if self.length < self.capacity:  
        self.data[self.length] = value  
        self.length += 1
```

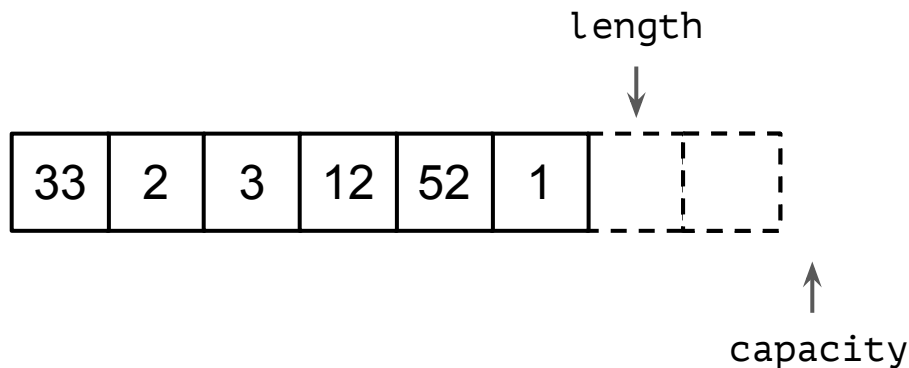
Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
```

```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

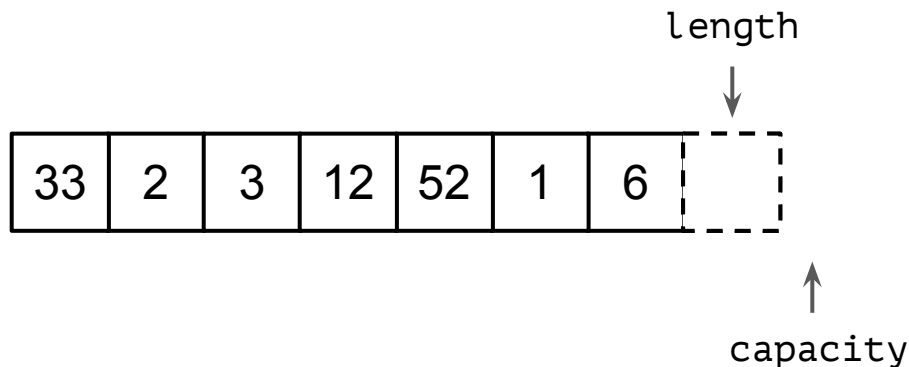
Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
vector.add(1)
```

```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

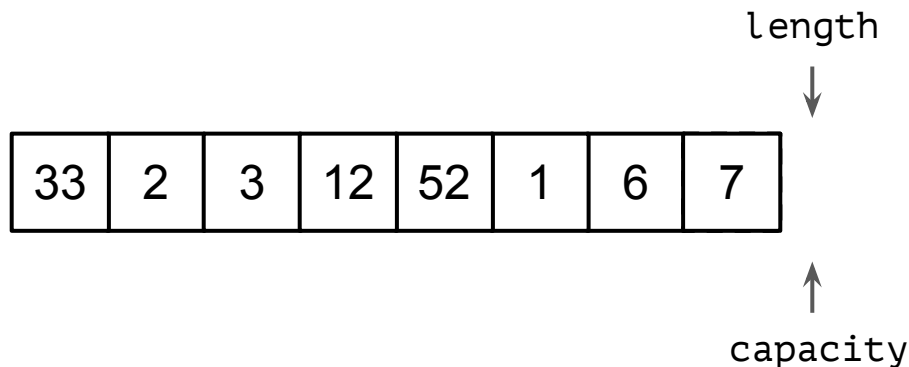
Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
vector.add(1)
vector.add(6)
```

```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

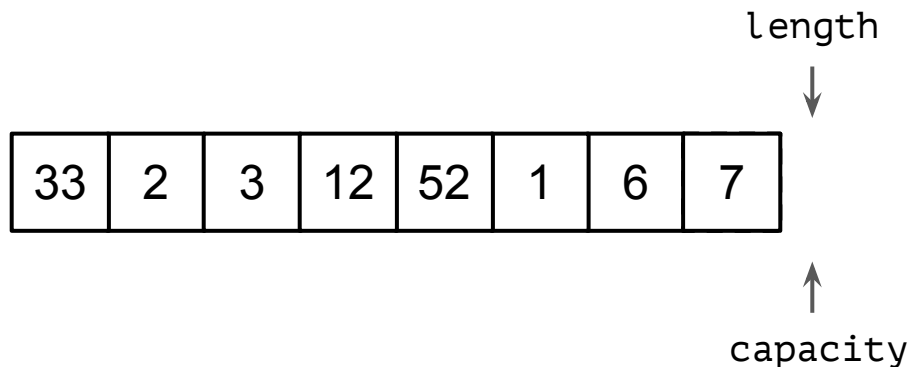

Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
vector.add(1)
vector.add(6)
vector.add(7)
```

```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

Динамический массив

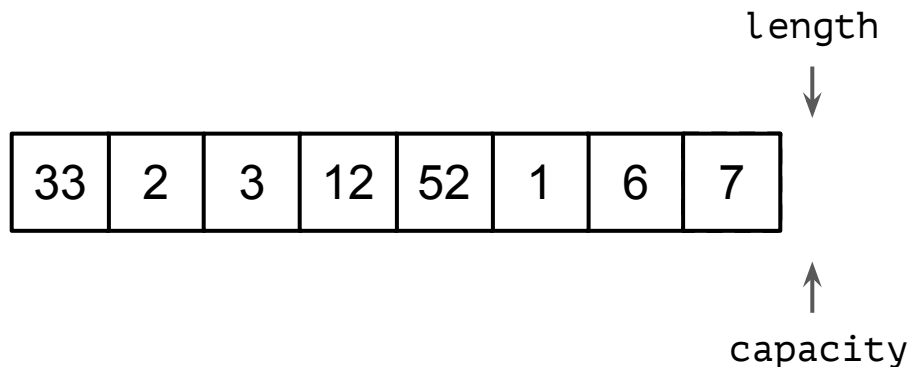


```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
vector.add(1)
vector.add(6)
vector.add(7)
vector.add(11)
```

```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

Что делать?

Динамический массив



```
vector = Vector(33, 2, 3, 12)
vector.add(52)
vector.add(1)
vector.add(6)
vector.add(7)
vector.add(11)
```

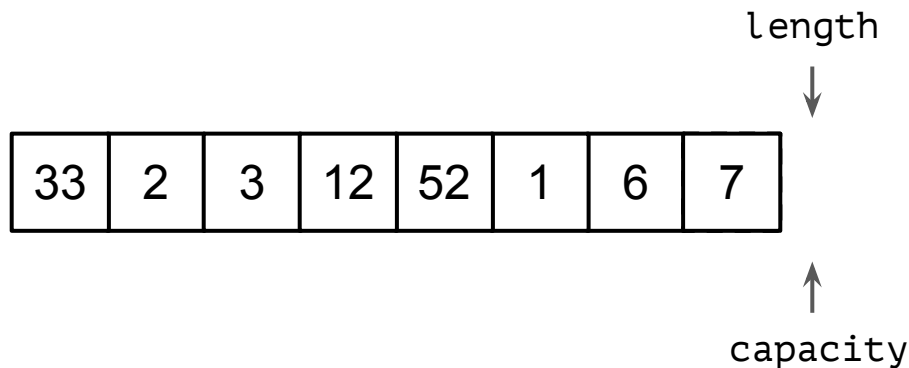


```
def add(self, value: int):
    if self.length < self.capacity:
        self.data[self.length] = value
        self.length += 1
```

Что делать?

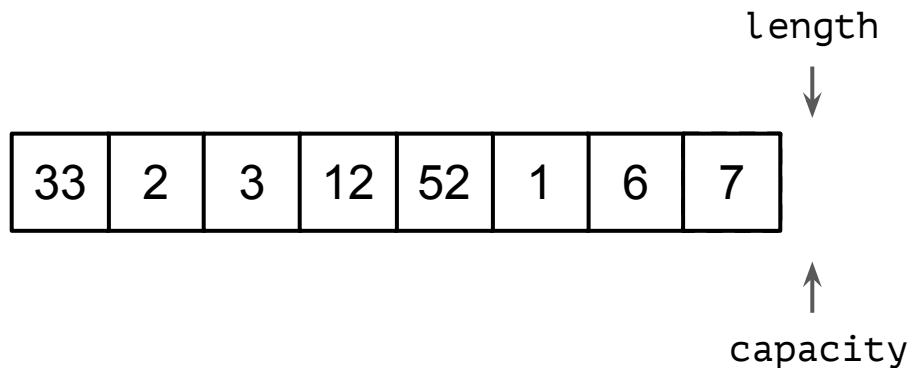
Реаллоцировать!

Динамический массив



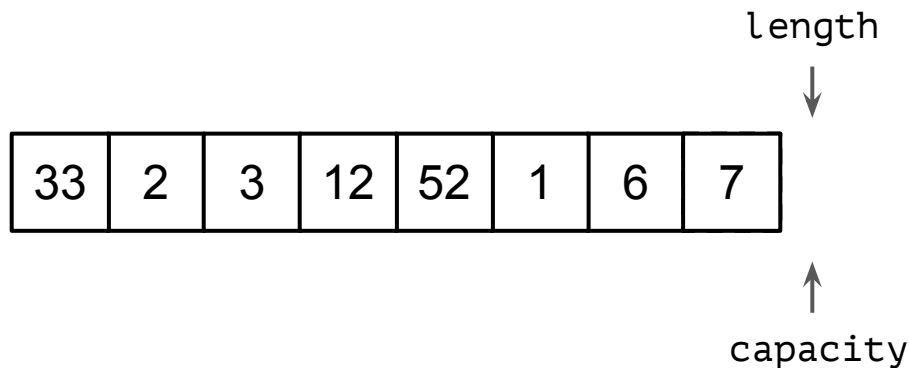
```
def add(self, value: int):  
    if self.length < self.capacity:  
        self.data[self.length] = value  
        self.length += 1
```

Динамический массив



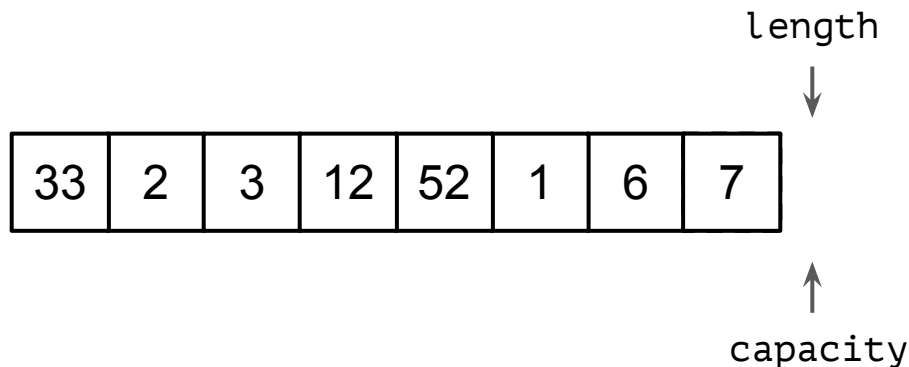
```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        ...  
        ...  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

Динамический массив



```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity = ???  
        self.data = reallocate(self.data, ???)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

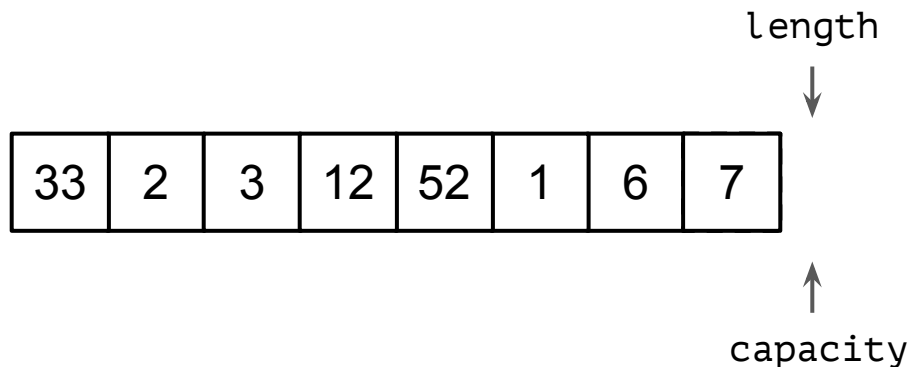
Динамический массив



А насколько
увеличивать размер?

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity = ???  
        self.data = reallocate(self.data, ???)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

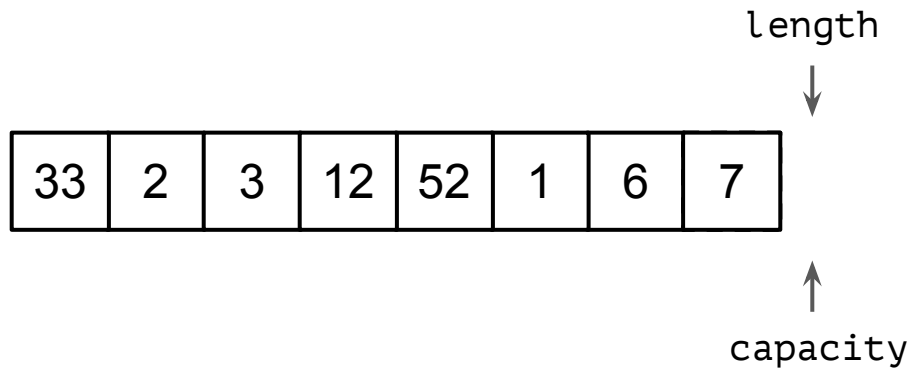
Динамический массив



А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

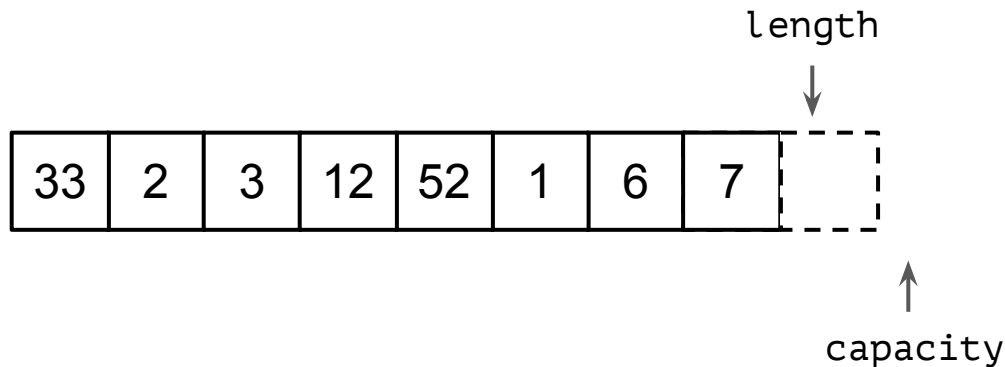



А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

```
vector.add(4)
```

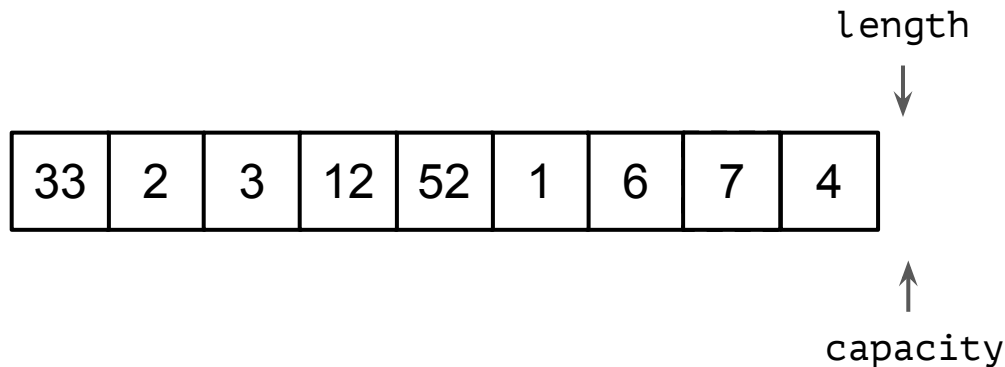


А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

```
vector.add(4)
```

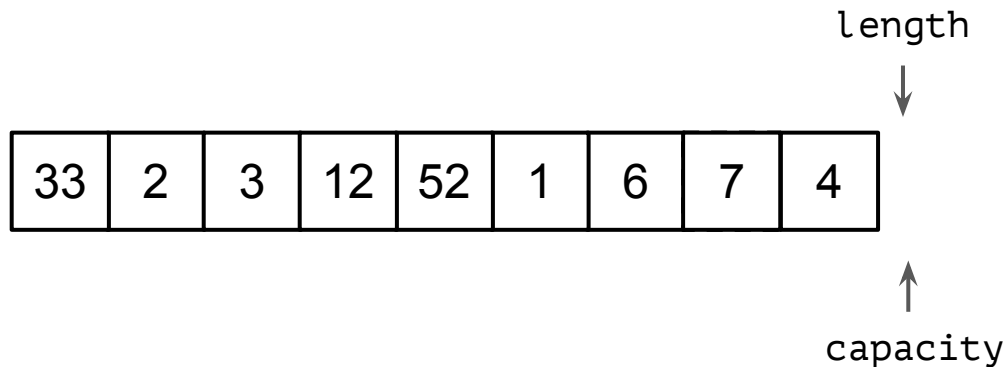


А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

```
vector.add(4)
```



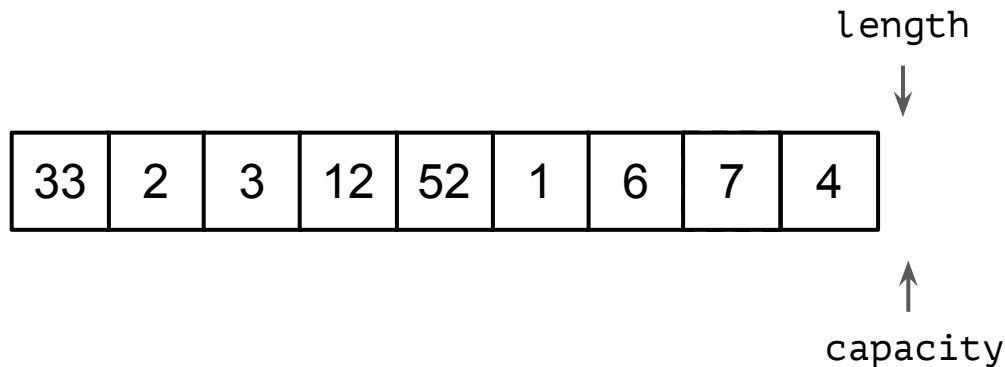
А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1 элемент

```
def add(self, value: int):
    if self.length == self.capacity:
        self.capacity += 1
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)

    self.data[self.length] = value
    self.length += 1
```

`vector.add(4)` reallocate - **дорогая** операция,
подразумевающая копирование **всех** элементов



А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

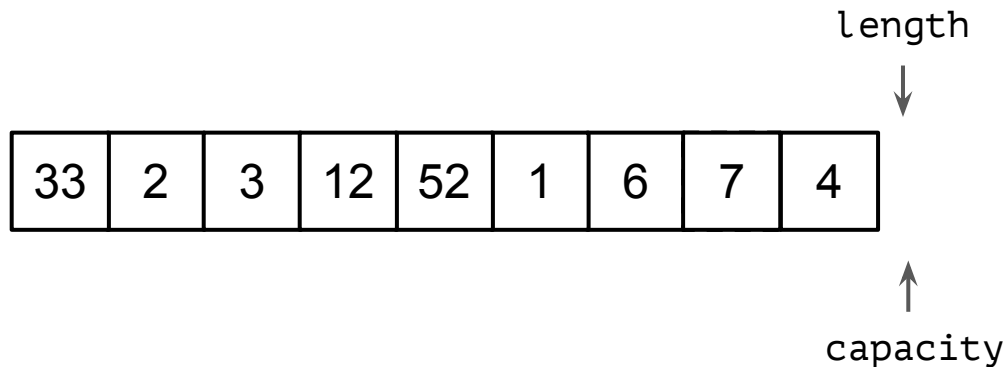
```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)
```

```
self.data[self.length] = value  
self.length += 1
```

Тогда сложность
функции add?

vector.add(4)

reallocate - **дорогая** операция,
подразумевающая копирование **всех** элементов



А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

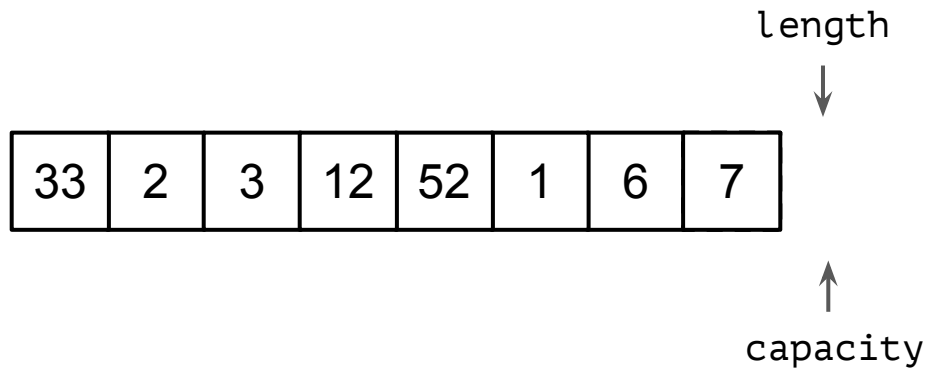
```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)
```

```
self.data[self.length] = value  
self.length += 1
```

Тогда сложность
функции add? $O(n)$!

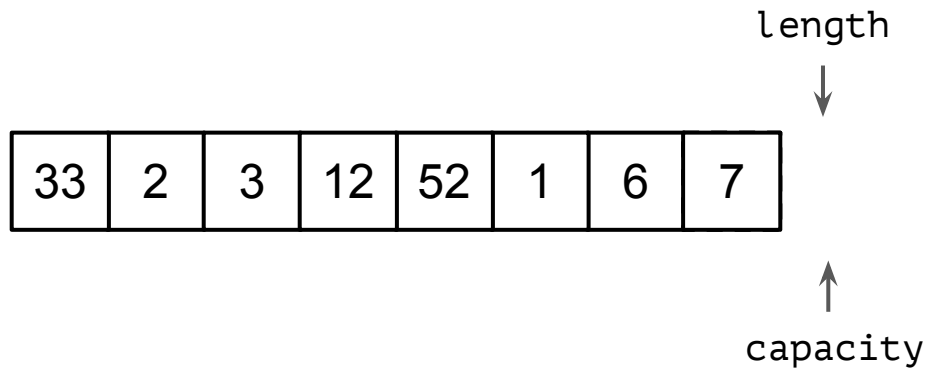
vector.add(4)

reallocate - **дорогая** операция,
подразумевающая копирование **всех** элементов



Но при анализе сложности запросов к структурам данных часто не останавливаются на сложности в **худшем** (или даже в **среднем**).

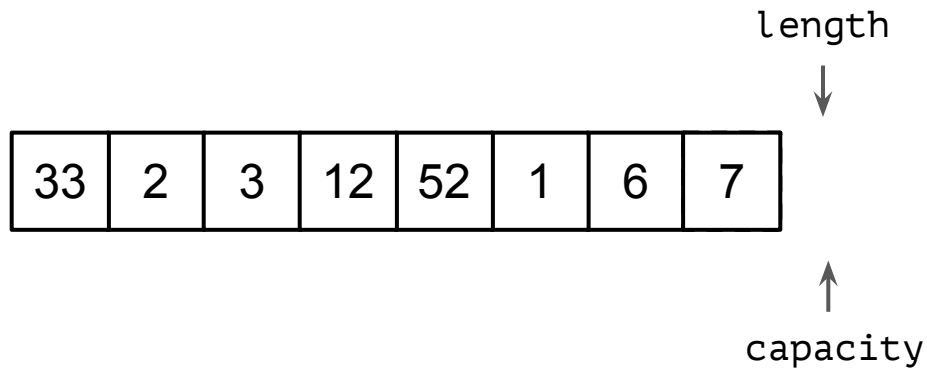
А проводят амортизационный анализ и вычисляют амортизированное (учётное) время работы запроса.



Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук



Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы
последовательности запросов?

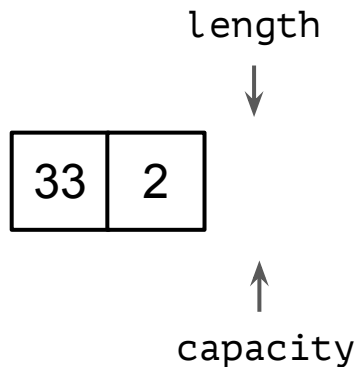


Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

```
vector.add(33)  
vector.add(2)  
...  
vector.add(6)  
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы
последовательности запросов?



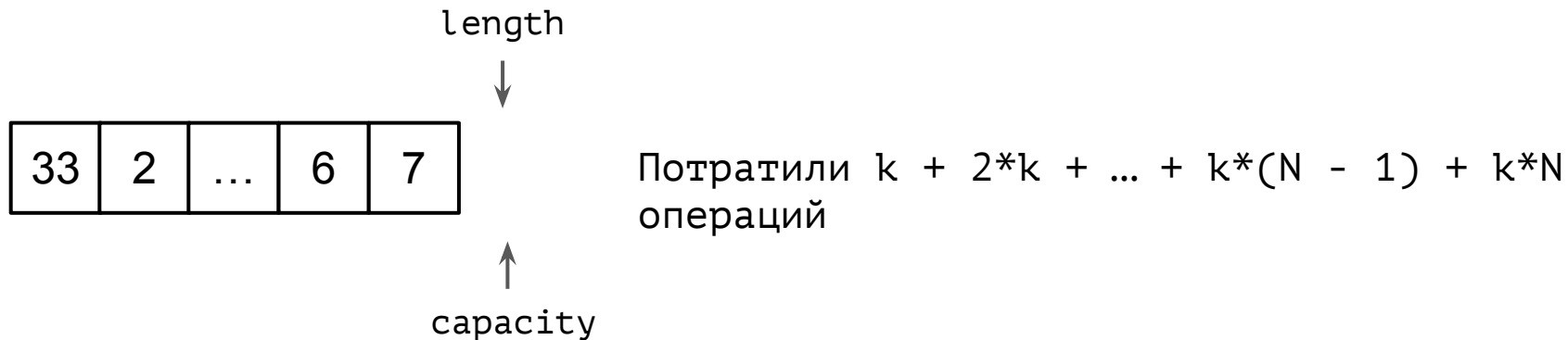
Потратили $k + 2*k$ операций

Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы последовательности запросов?

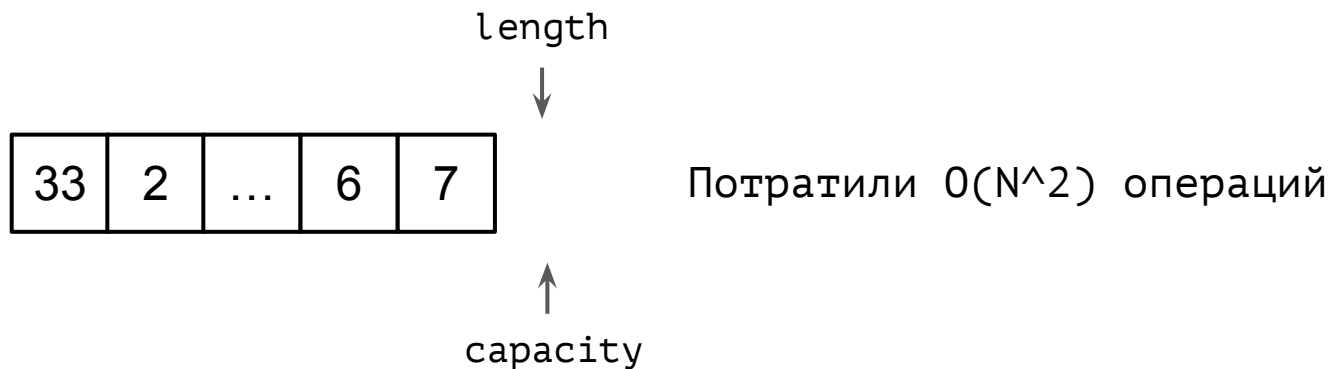


Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы последовательности запросов?



Пусть есть последовательность запросов к динамическому массиву:

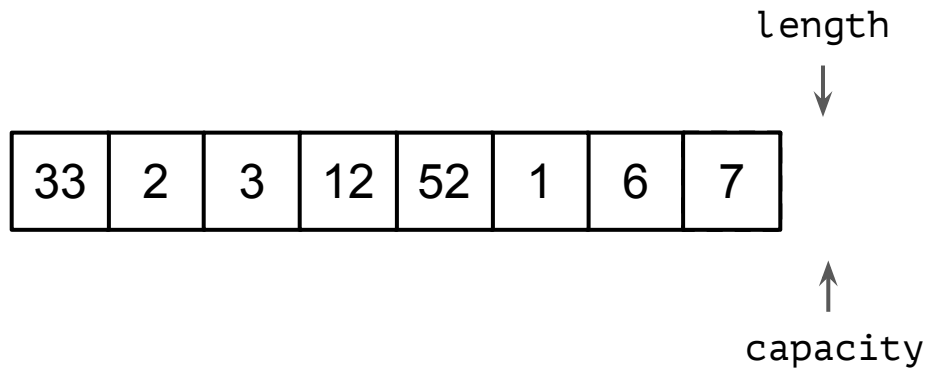
```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук

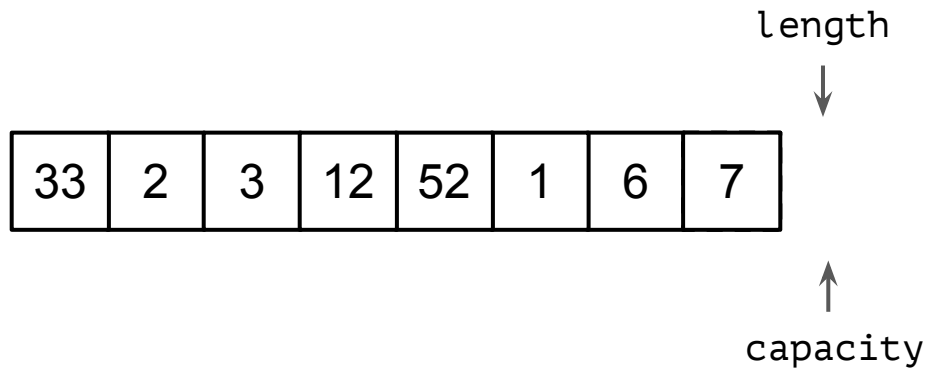
Оцените **общее** время работы последовательности запросов?

$O(N^2)$



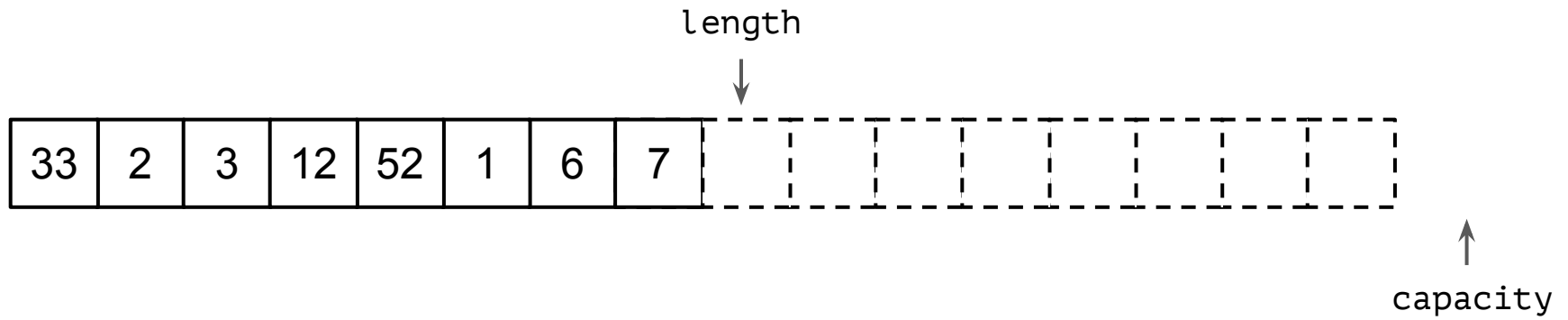


Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.



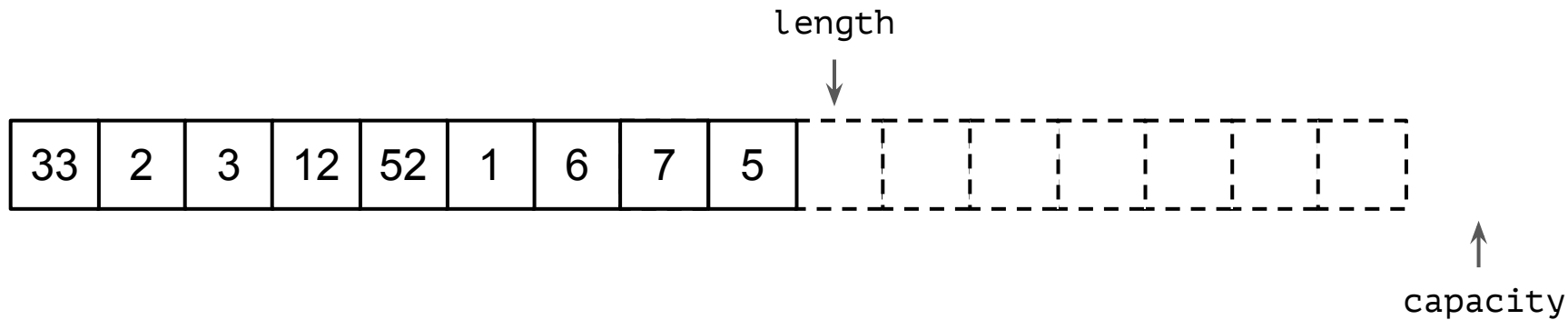
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5)
```



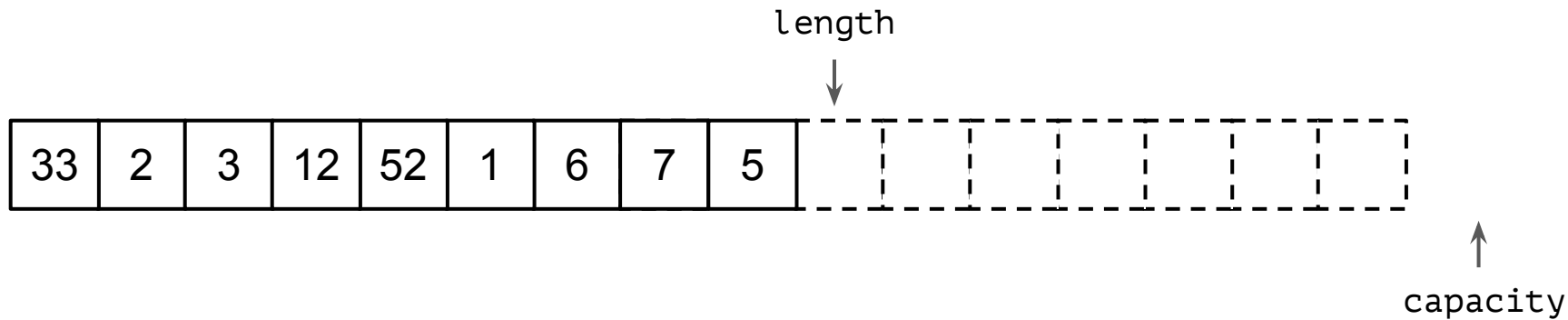
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5)
```

Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

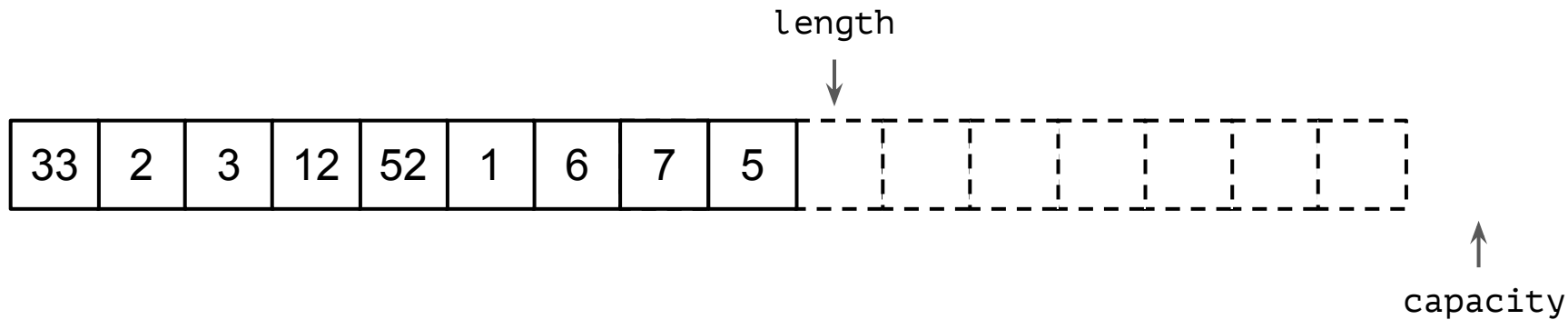
```
vector.add(5)
```



Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5)
```

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

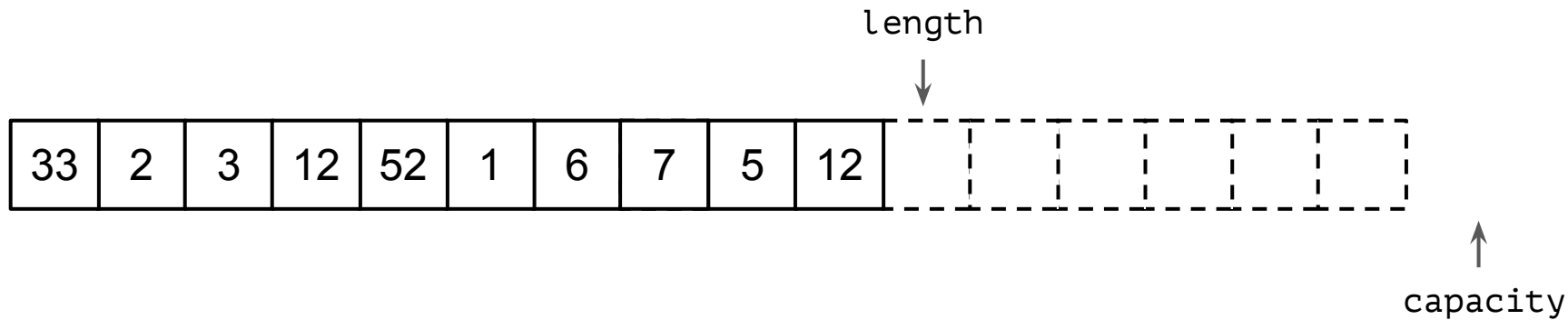


Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5)
```

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

Но что можно сказать про следующие операции?

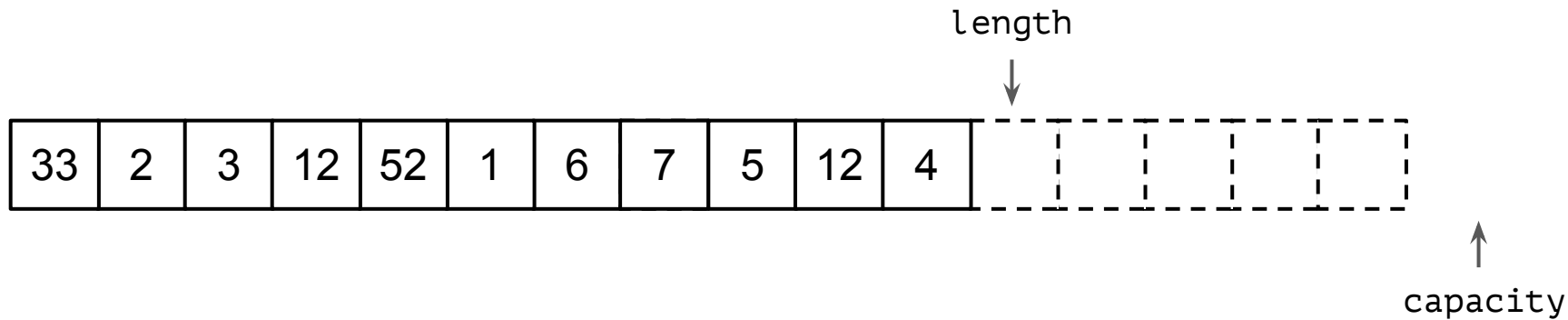


Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5) => vector.add(12)
```

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

Но что можно сказать про следующие операции?

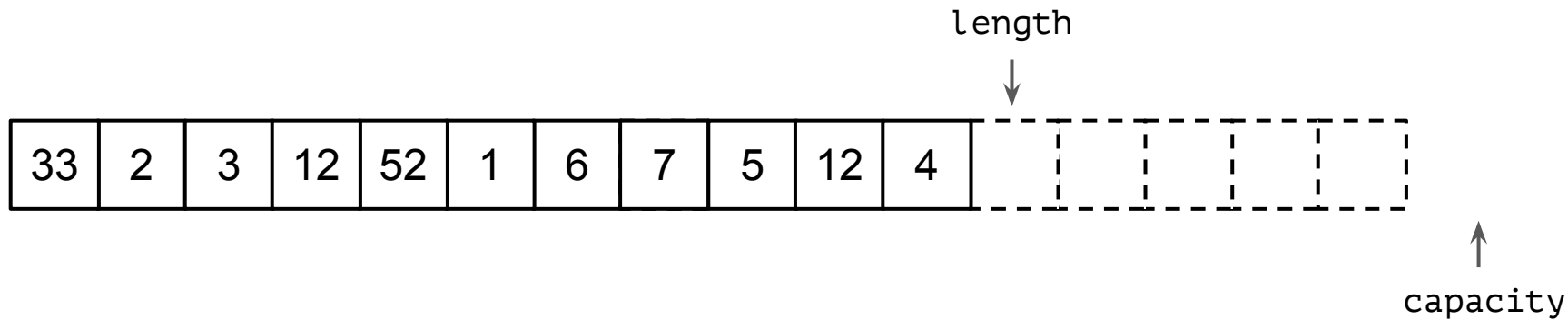


Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5) => vector.add(12) => vector.add(4)`

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

Но что можно сказать про следующие операции?

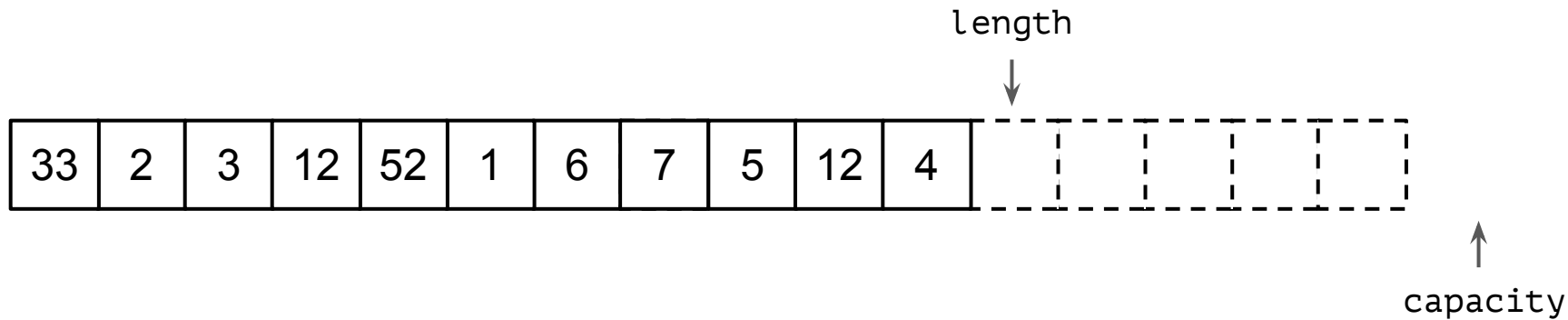


Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5) => vector.add(12) => vector.add(4)
```

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

Но что можно сказать про следующие операции? Они работают за k



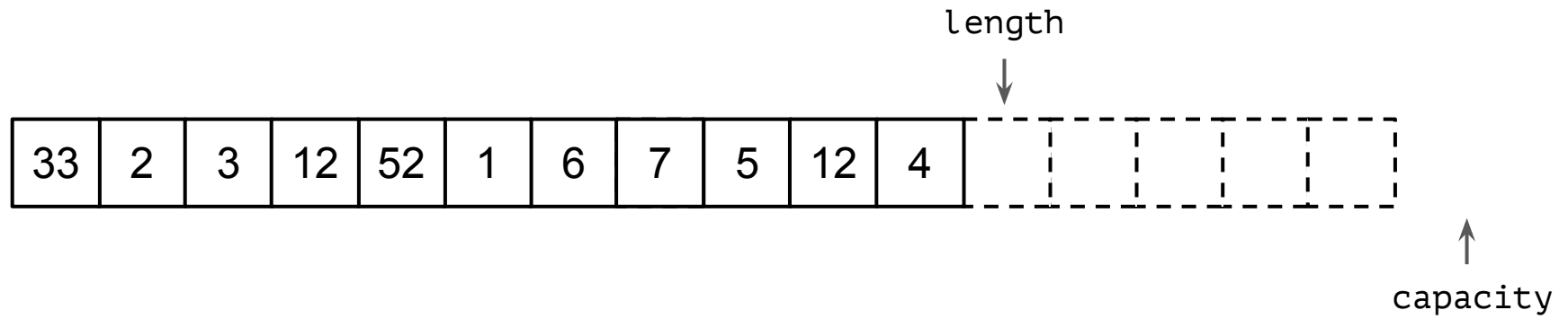
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5) => vector.add(12) => vector.add(4)`

Пока снова не
придет **расплата**

Очевидно, что вот такой запрос **дорогой** - мы тратим $k \cdot N$ операций, где N - количество уже элементов в массиве.

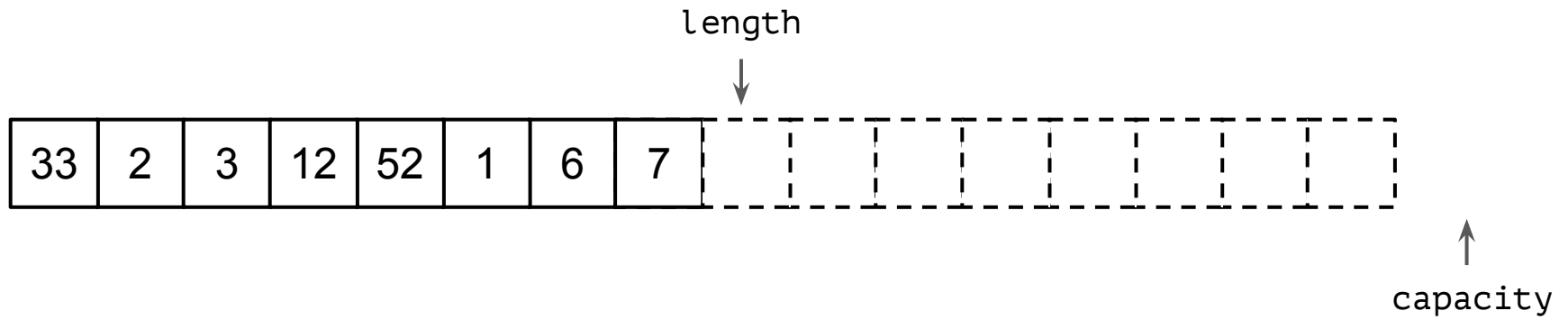
Но что можно сказать про следующие операции? Они работают за k



```
vector.add(33)  
vector.add(2)  
...  
vector.add(6)  
vector.add(7)
```

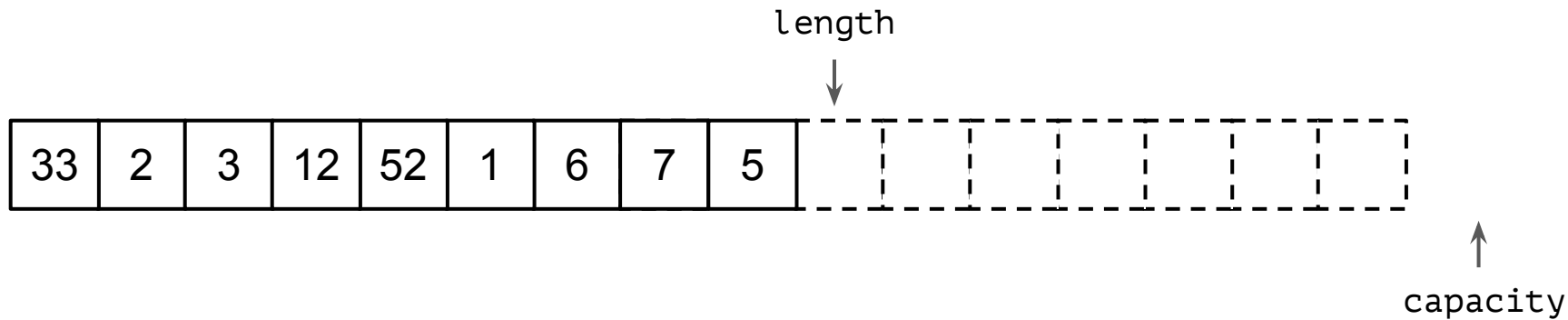
} N штук

Оцените **общее** время работы
последовательности запросов?



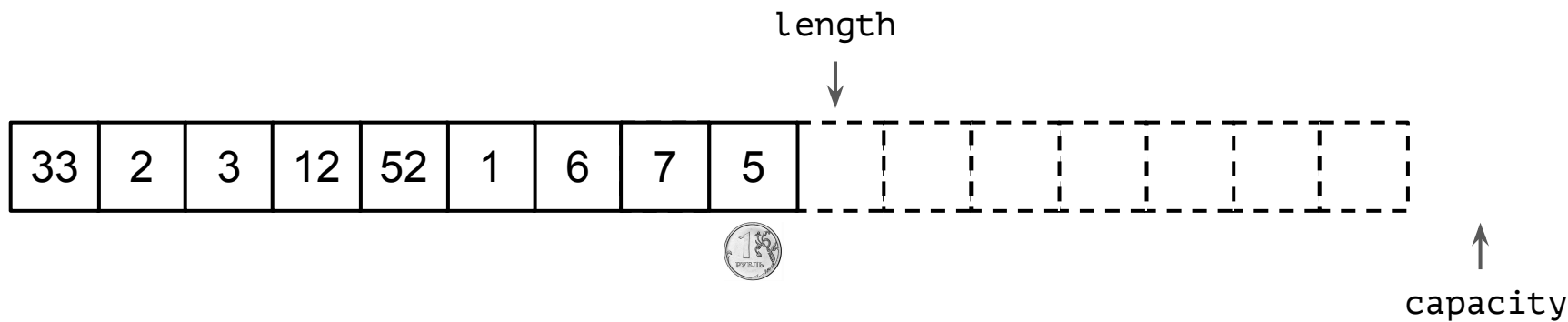
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

```
vector.add(5)
```



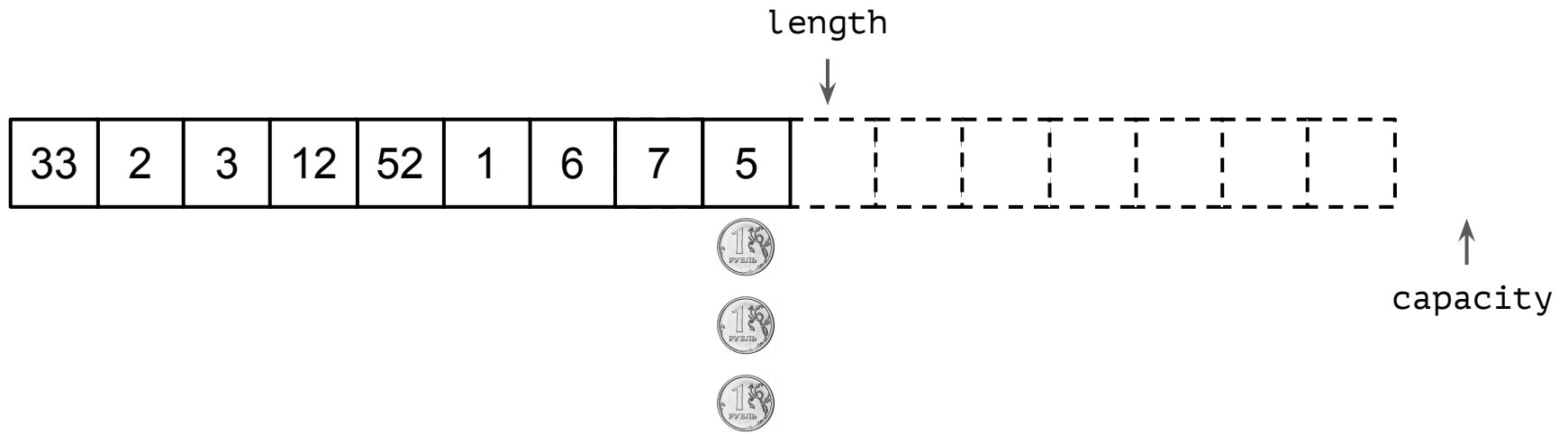
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили k операций



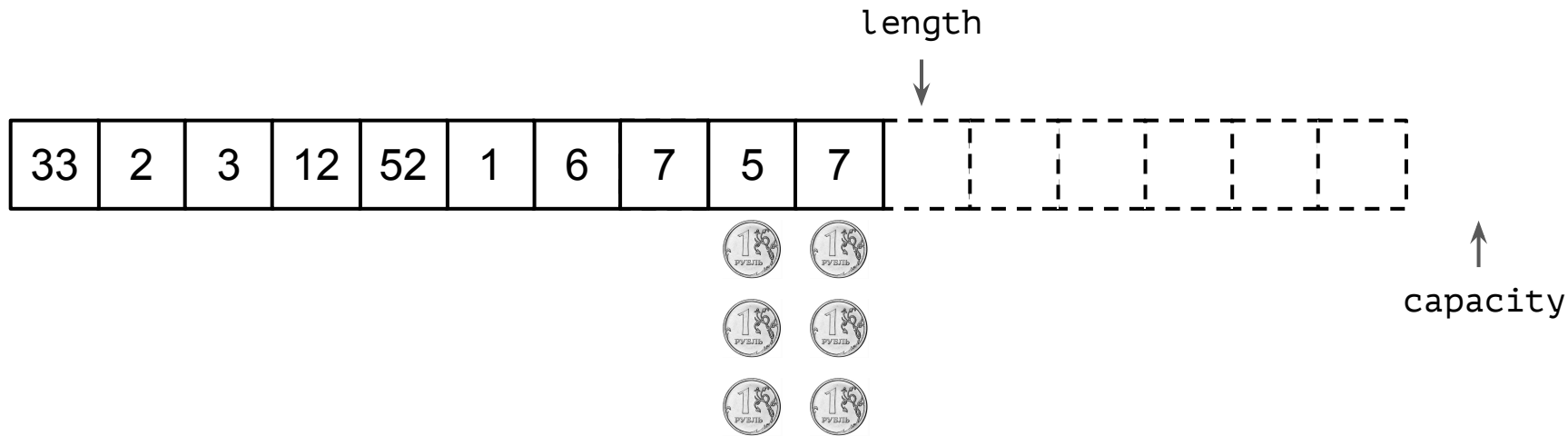
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили k операций (пусть это 1 рубль)



Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

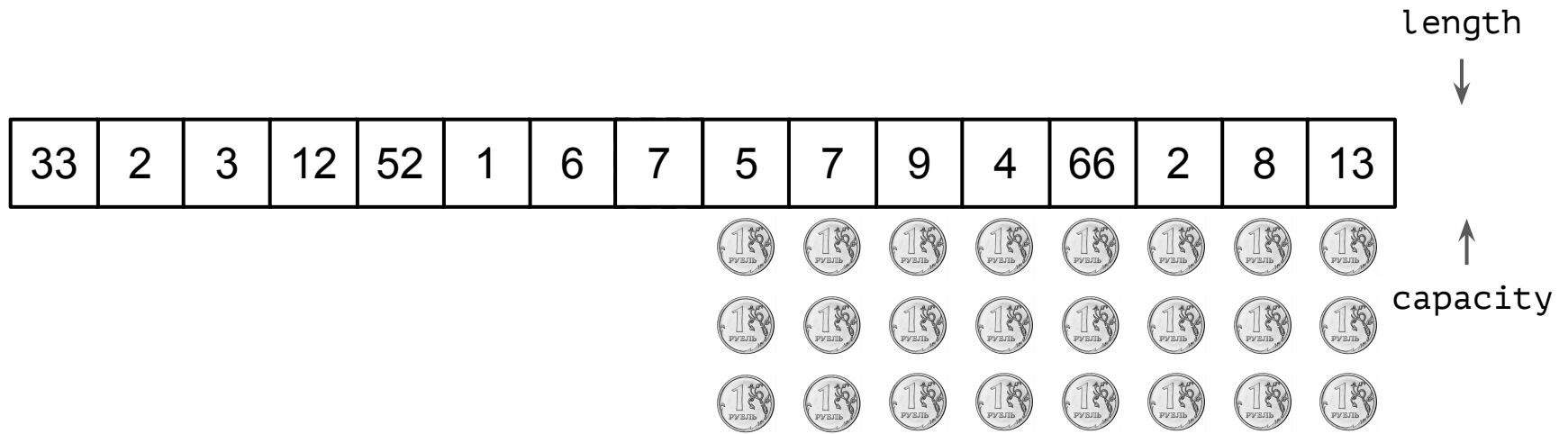
`vector.add(5)` - потратили k операций (пусть это 1 рубль)
а пусть потратили $3*k$ (нам жалко что ли)



Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили k операций (пусть это 1 рубль)
а пусть потратили $3*k$ (нам жалко что ли)

`vector.add(7)` - опять



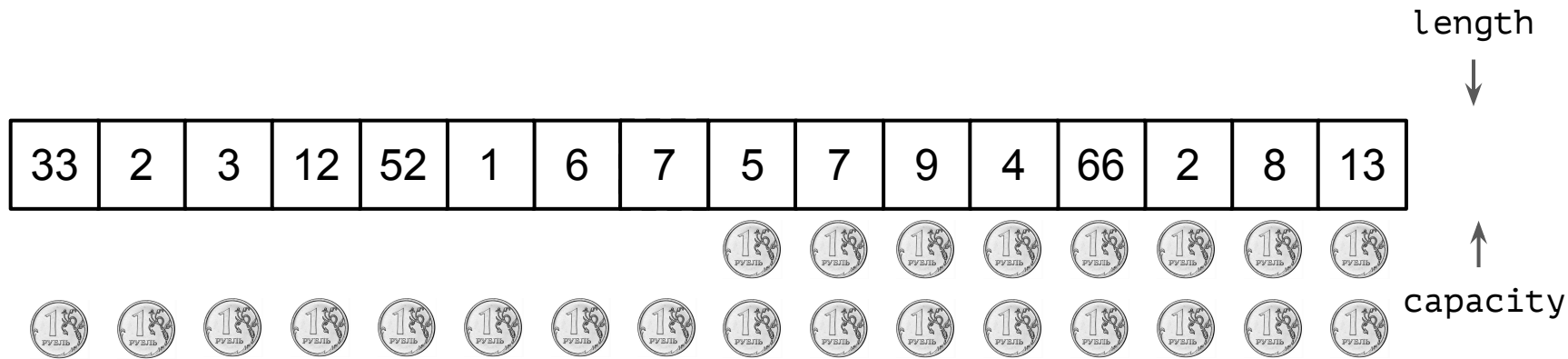
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили k операций (пусть это 1 рубль)
а пусть потратили $3*k$ (нам жалко что ли)

`vector.add(7)` - опять

...

`vector.add(13)` - опять



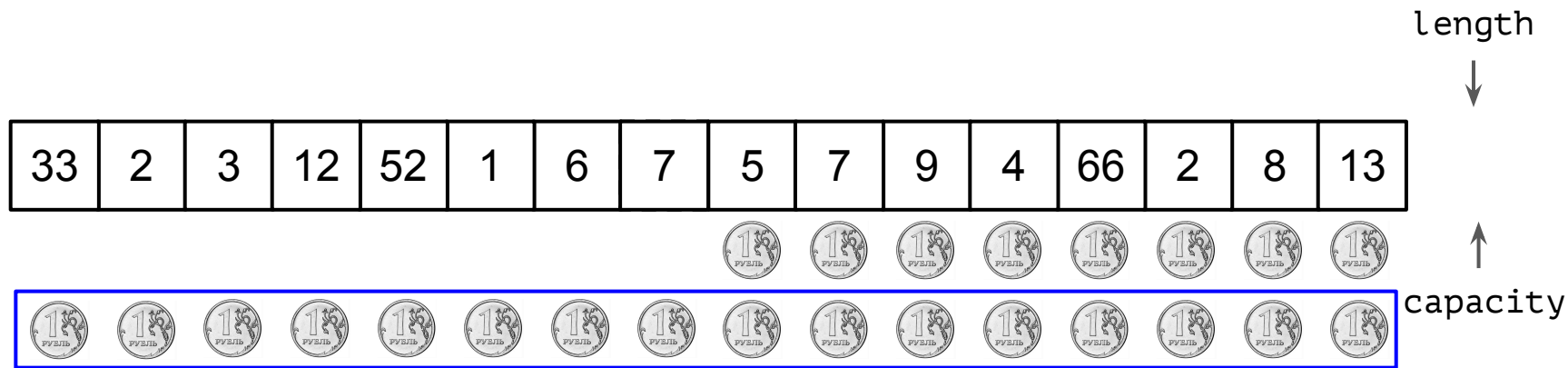
Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили k операций (пусть это 1 рубль)
а пусть потратили $3*k$ (нам жалко что ли)

`vector.add(7)` - опять

...

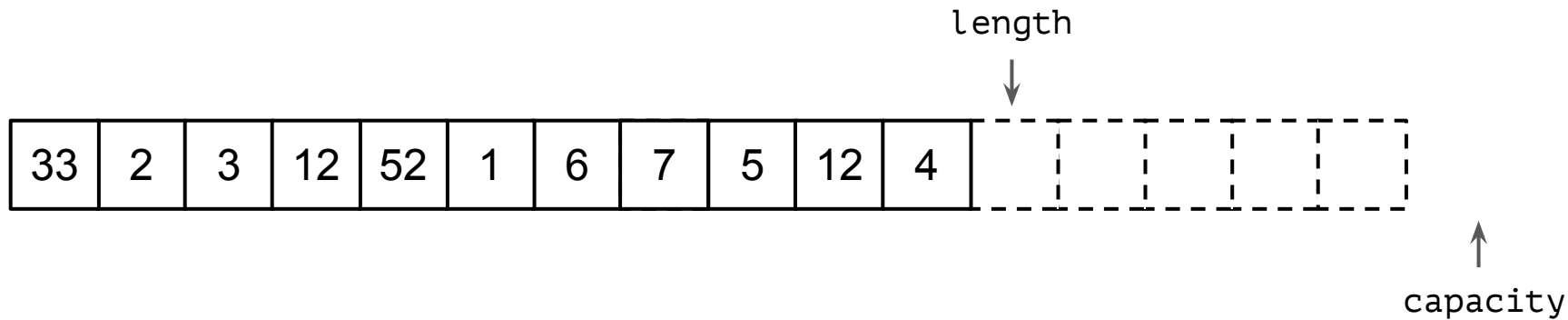
`vector.add(13)` - опять



Эти деньги пойдут на следующий `reallocate` (тут как раз стоимость `N` операций)

Альтернативный вариант: давайте каждый раз (когда память кончается) увеличивать размер **в два** раза.

`vector.add(5)` - потратили `k` операций (пусть это 1 рубль)
а пусть потратили $3*k$ (нам жалко что ли)
`vector.add(7)` - опять
...
`vector.add(13)` - опять

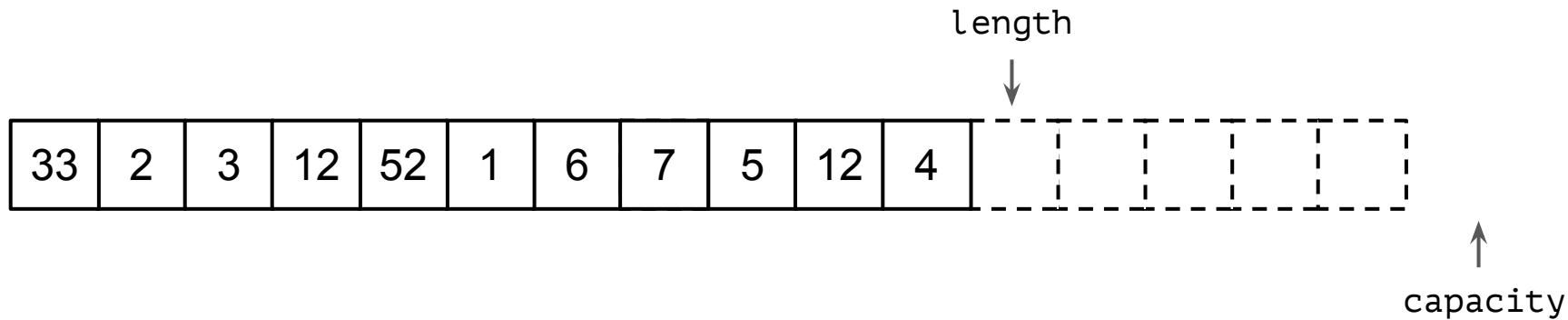


```
vector.add(33)  
vector.add(2)  
...  
vector.add(6)  
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы
последовательности запросов?

Все время работы - $O(N)$, т.к.
[можно считать, что] каждый
запрос был за $O(1)$



Тогда говорят, что **амортизационное** (учётное) время работы запроса `add` — $O(1)$

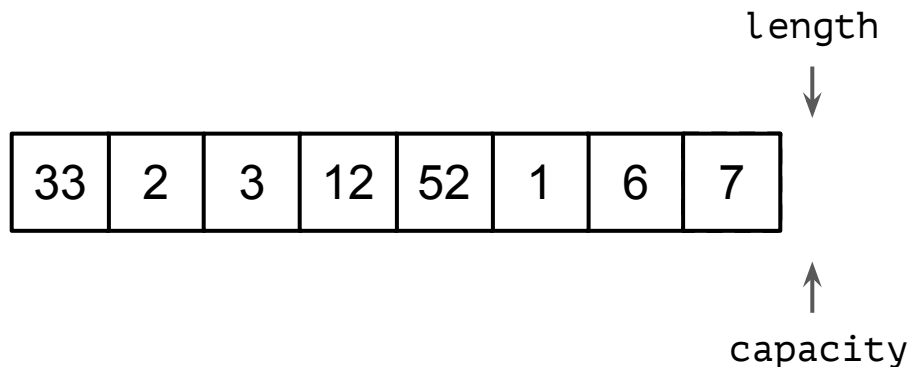
```
vector.add(33)
vector.add(2)
...
vector.add(6)
vector.add(7)
```

} N штук

Оцените **общее** время работы последовательности запросов?

Все время работы — $O(N)$, т.к. [можно считать, что] каждый запрос был за $O(1)$

Динамический массив

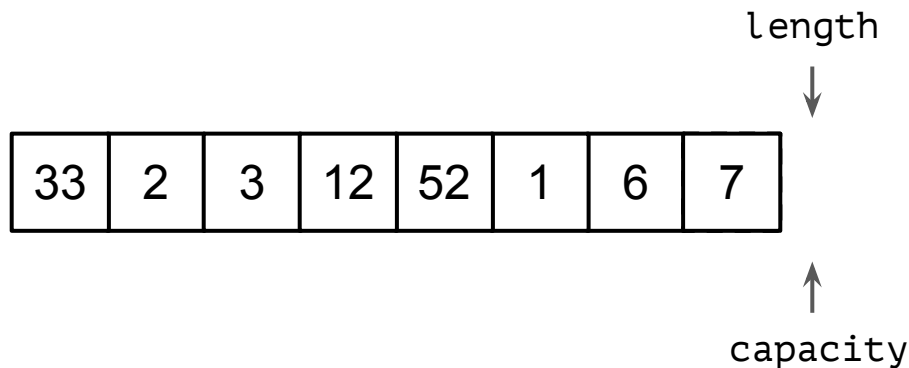


А насколько
увеличивать размер?

Допустим, на 1
элемент

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity += 1  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```

Динамический массив



А насколько
увеличивать размер?

в 2 раза, чтобы
получить $0*(1)$

```
def add(self, value: int):  
    if self.length == self.capacity:  
        self.capacity *= 2  
        self.data = reallocate(self.data, self.capacity)  
  
    self.data[self.length] = value  
    self.length += 1
```



Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

1. Доступ к i -ому элементу

2. Добавление элемента в "конец"

3. Удаление последнего элемента

Как реализовывать будем? **Динамический** массив!

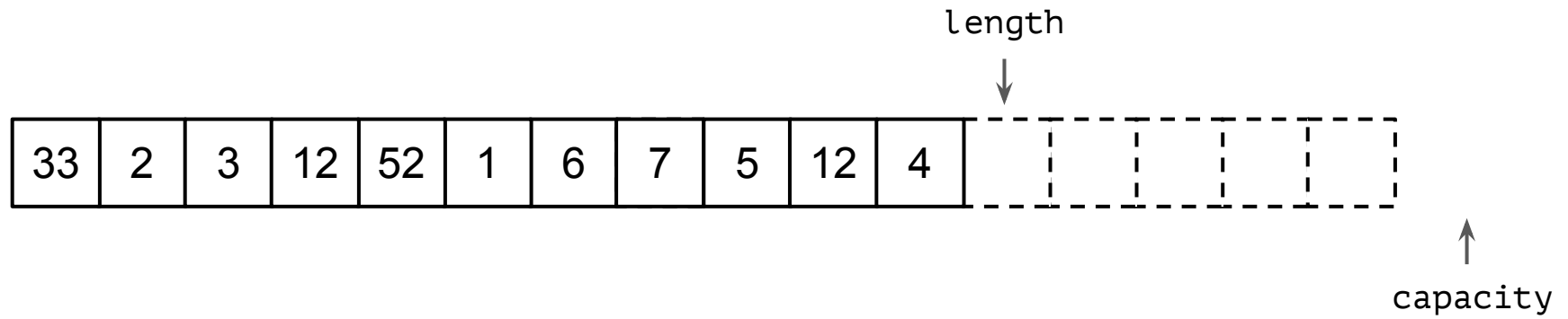
Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

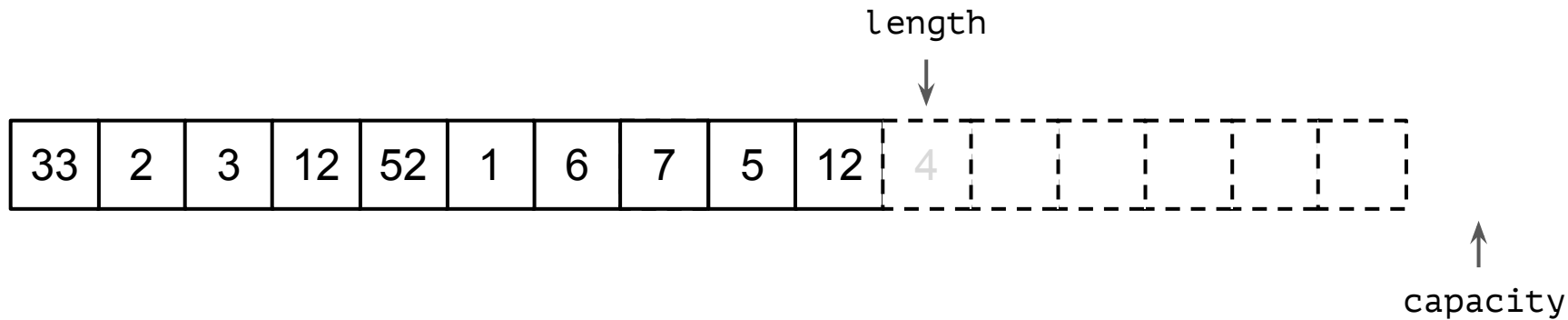
- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(1)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O^*(1)$
- 3. Удаление последнего элемента

Как реализовывать будем? **Динамический** массив!



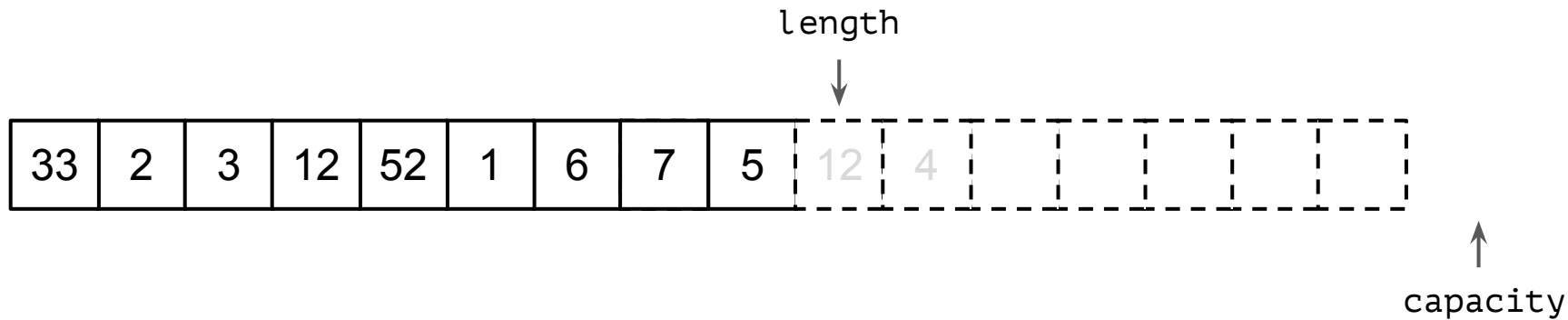
Как удалять последний элемент?

`vector.remove()`



Как удалять последний элемент?

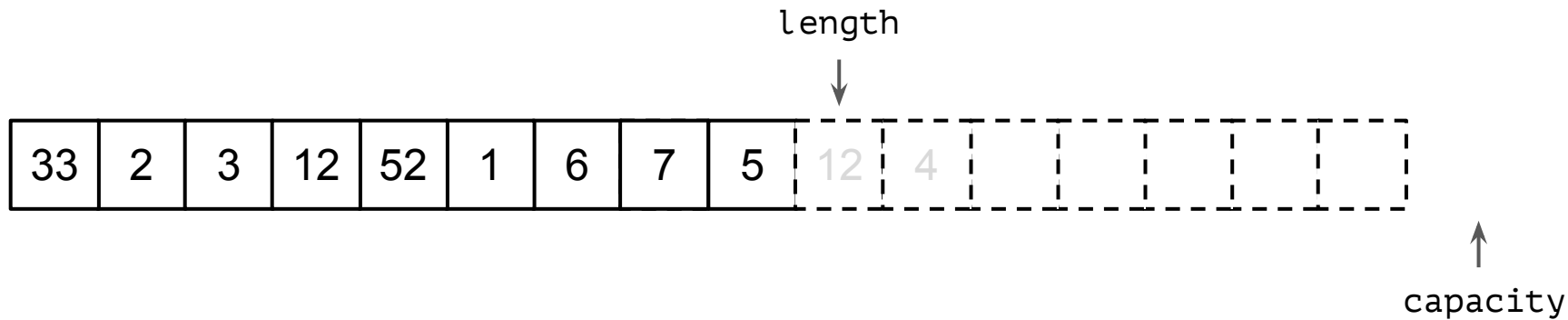
`vector.remove()`



Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

```
vector.remove()  
vector.remove()
```

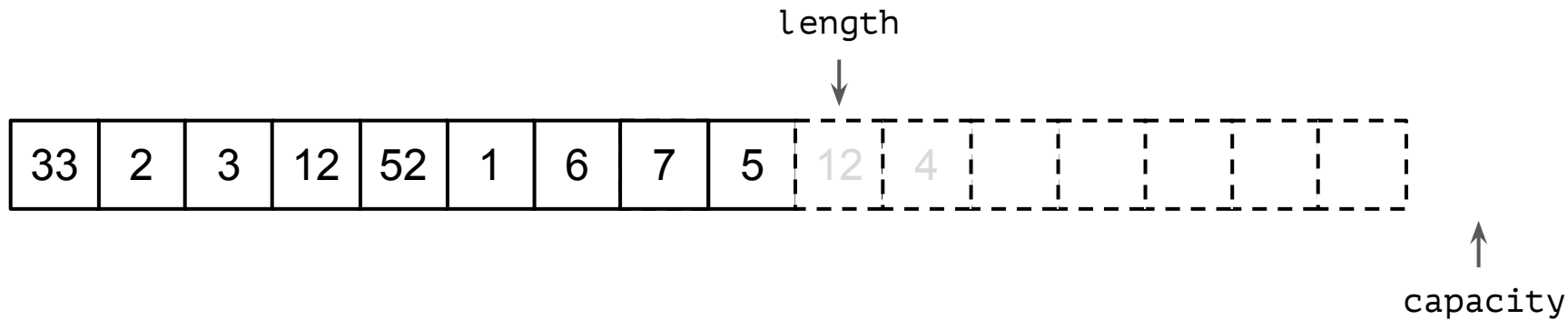


Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда?

```
vector.remove()  
vector.remove()
```

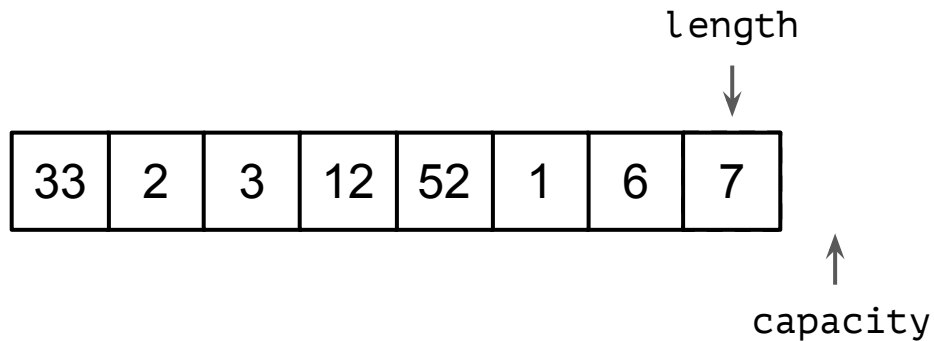


Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

```
vector.remove()  
vector.remove()
```

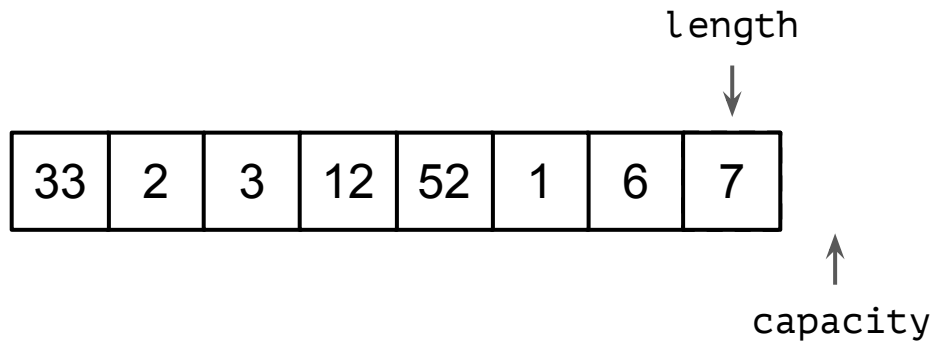


Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

```
vector.remove()  
vector.remove()  
...  
vector.remove()
```



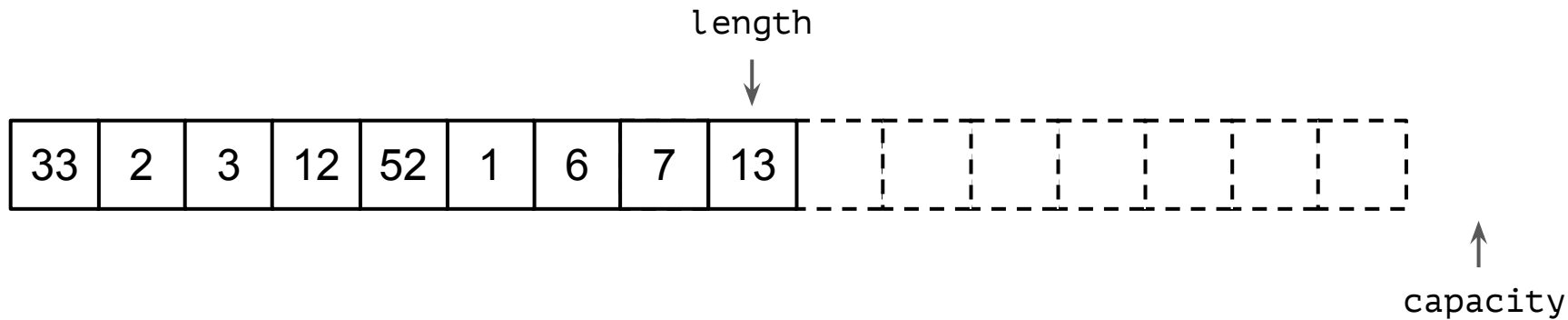
Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

```
vector.add(13)
vector.remove()
vector.add(13)
vector.remove()
```



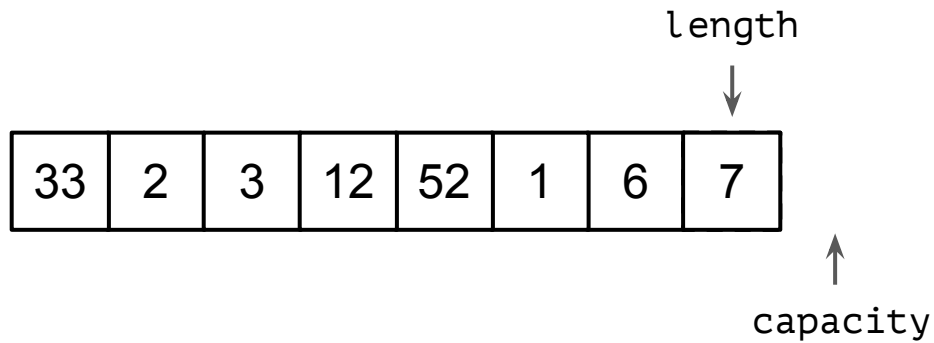
Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

```
vector.add(13) ←  
vector.remove()  
vector.add(13)  
vector.remove()
```



Как удалять последний элемент?

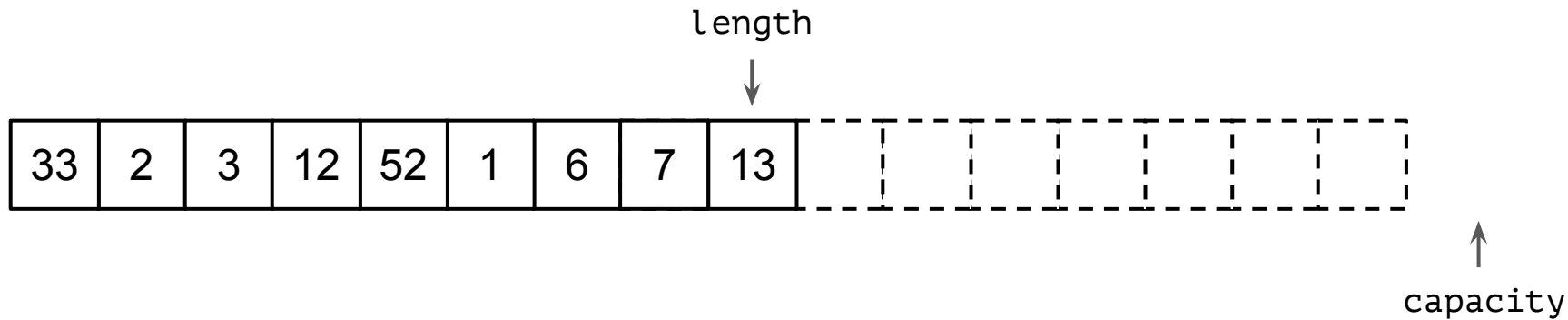
Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

```
vector.add(13)
vector.remove()
vector.add(13)
vector.remove()
```





Как удалять последний элемент?

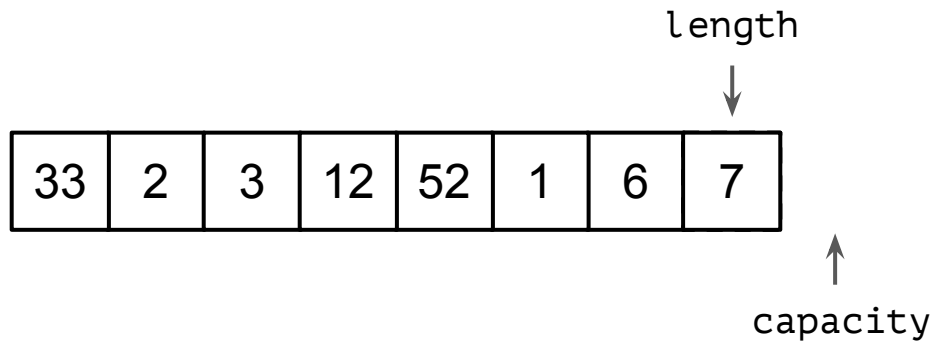
Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

```
vector.add(13)
vector.remove()
vector.add(13)
vector.remove()
```





Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

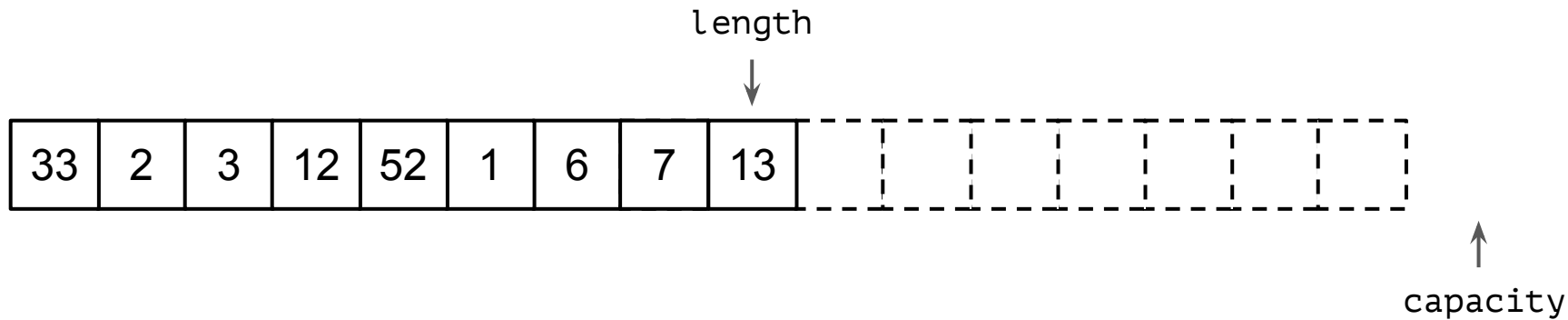
Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

```
vector.add(13)
vector.remove()
vector.add(13)
vector.remove()
```



Такая ситуация называется **trashing** и из-за нее амортизация работает хуже



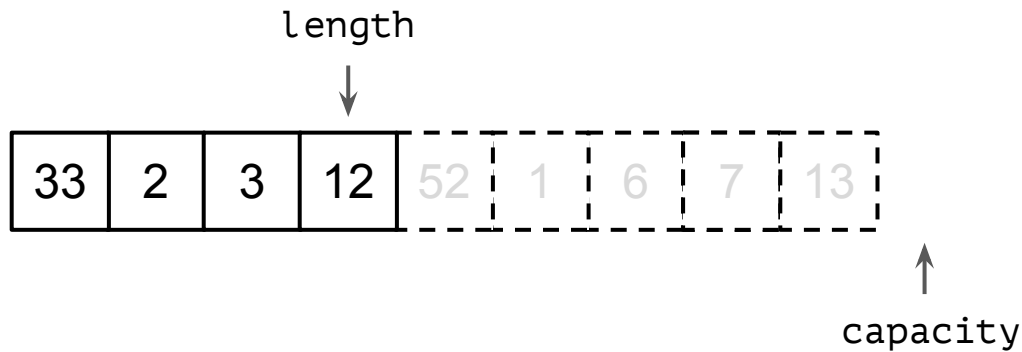
Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

Решение - сдувать массив, когда заполненной остается **одна четверть**.



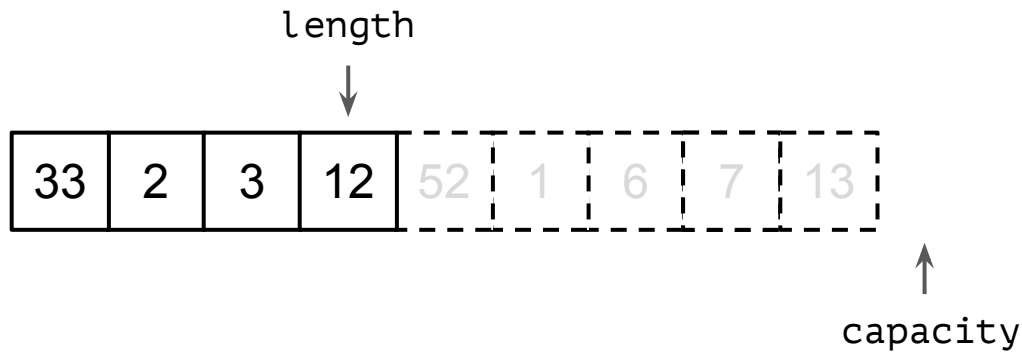
Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

Решение - сдувать массив, когда заполненной остается **одна четверть**.



Как удалять последний элемент?

Но если вы хоть немного экономите память, то вы захотите "сдуть" (shrink) массив.

Когда? **Наивный** подход - когда дошли до середины.

Но теперь представьте, что дальнейшая последовательность такая:

Решение - сдувать массив, когда заполненной остается **одна четверть**. Такое решение дает амортизационное время работы запросов $O(1)$

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(1)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O^*(1)$
- 3. Удаление последнего элемента

Как реализовывать будем? **Динамический** массив!

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(1)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O^*(1)$
- ✓ 3. Удаление последнего элемента $O^*(1)$

Как реализовывать будем? **Динамический** массив!

Мини-задача #15 (1 балл)

Реализовать собственный динамический массив, в котором поддержаны операции:

1. Доступа к элементу по индексу
2. Добавление элемента в конец
3. Удаления последнего элемента

Операции работают за $O(1)$ или $O^*(1)$.

Обрабатывается случаи выхода за границу массива и удаление элемента из пустого массива.

Пользоваться готовыми библиотечными решениями нельзя.

Динамические массивы

Минусы такого решения?

Динамические массивы

Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее,
но сложность в худшем случае высокая.

Динамические массивы

Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее, но сложность в худшем случае высокая.
2. Избыточное потребление памяти (если значения большого размера)

Динамические массивы

Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее, но сложность в худшем случае высокая.
2. ~~Избыточное потребление памяти (если значения большого размера).~~ Редкая ситуация, тогда можно хранить массив ключей.

Динамические массивы

Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее, но сложность в худшем случае высокая.
2. ~~Избыточное потребление памяти (если значения большого размера)~~. Редкая ситуация, тогда можно хранить массив ключей.
3. Бывают операции и страшнее добавления

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(1)$

✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O^*(1)$

✓ 3. Удаление последнего элемента $O^*(1)$

4. Удалить элемент из "начала"?

Динамические массивы

Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее, но сложность в худшем случае высокая.
2. ~~Избыточное потребление памяти (если значения большого размера)~~. Редкая ситуация, тогда можно хранить массив ключей.
3. Бывают операции и страшнее добавления

Альтернативы?

Динамические массивы

Связные списки!

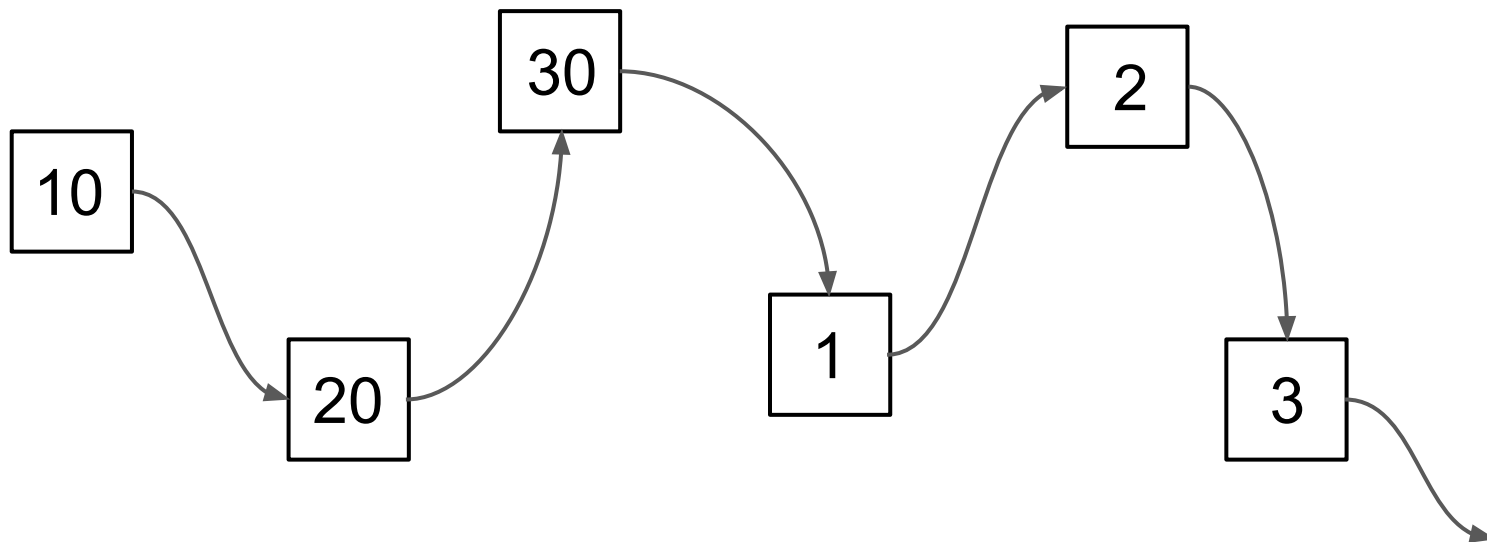
Минусы такого решения:

1. Учётное время работы хорошее, но сложность в худшем случае высокая.
2. ~~Избыточное потребление памяти (если значения большого размера)~~. Редкая ситуация, тогда можно хранить массив ключей.
3. Бывают операции и страшнее добавления

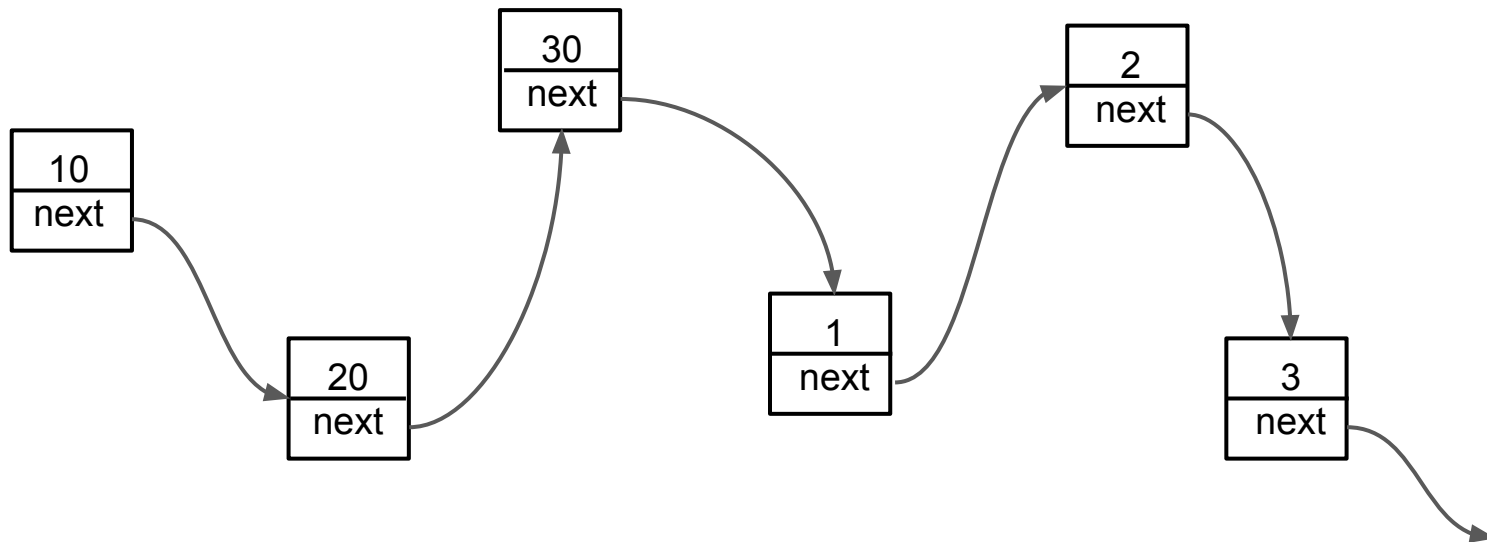
Связные списки

10	20	30	1	2	3
----	----	----	---	---	---

Связные списки



Связные списки



```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None
```

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node
```

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head
```

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head
```

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head
```

```
def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
```

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head
```

```
def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
    node = self.head
    for i in [0; k):
        if not node:
            return None
        node = node.next
    return node
```



```

class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head

```

```

    def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
        node = self.head
        for i in [0; k):
            if not node:
                return None
            node = node.next
        return node

    def sum(self) -> int:

```

```

class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head

```

```

    def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
        node = self.head
        for i in [0; k):
            if not node:
                return None
            node = node.next
        return node

    def sum(self) -> int:
        node = self.head
        res = 0
        while node:
            res += node.val
            node = node.next
        return res

```

```

class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt

    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None

    def add_to_tail(self, val):
        node = LinkedList.Node(val)
        if self.tail:
            self.tail.next = node
            self.tail = node
        else:
            self.head = self.tail = node

    def add_to_head(self, val):
        node = LinkedList.Node(val, self.head)
        self.head = node
        if not self.tail:
            self.tail = self.head

```

```

    def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
        node = self.head
        for i in [0; k):
            if not node:
                return None
            node = node.next
        return node

    def sum(self) -> int:
        node = self.head
        res = 0
        while node:
            res += node.val
            node = node.next
        return res

```

Оцените сложности операций?

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt
```

```
def __init__(self):
    self.head = self.tail = None
```

```
def add_to_tail(self, val):
    node = LinkedList.Node(val)
    if self.tail:
        self.tail.next = node
        self.tail = node
    else:
        self.head = self.tail = node
```

$O(1)$

```
def add_to_head(self, val):
    node = LinkedList.Node(val, self.head)
    self.head = node
    if not self.tail:
        self.tail = self.head
```

$O(1)$

```
def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
    node = self.head
    for i in [0; k):
        if not node:
            return None
        node = node.next
    return node
```

```
def sum(self) -> int:
    node = self.head
    res = 0
    while node:
        res += node.val
        node = node.next
    return res
```

Оцените сложности операций?

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt
```

```
def __init__(self):
    self.head = self.tail = None
```

```
def add_to_tail(self, val):
    node = LinkedList.Node(val)
    if self.tail:
        self.tail.next = node
        self.tail = node
    else:
        self.head = self.tail = node
```

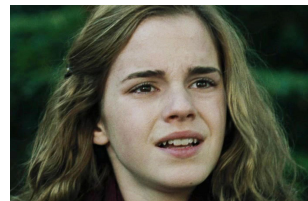
$O(1)$

```
def add_to_head(self, val):
    node = LinkedList.Node(val, self.head)
    self.head = node
    if not self.tail:
        self.tail = self.head
```

$O(1)$

```
def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
    node = self.head
    for i in [0; k):
        if not node:
            return None
        node = node.next
    return node
```

$O(n)$



```
def sum(self) -> int:
    node = self.head
    res = 0
    while node:
        res += node.val
        node = node.next
    return res
```

Оцените сложности операций?

```
class LinkedList:
    class Node:
        def __init__(self, val, nxt=None):
            self.val = val
            self.next = nxt
```

```
def __init__(self):
    self.head = self.tail = None
```

```
def add_to_tail(self, val):
    node = LinkedList.Node(val)
    if self.tail:
        self.tail.next = node
        self.tail = node
    else:
        self.head = self.tail = node
```

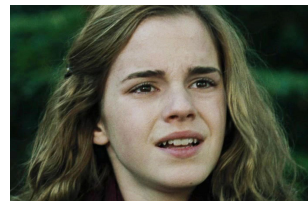
$O(1)$

```
def add_to_head(self, val):
    node = LinkedList.Node(val, self.head)
    self.head = node
    if not self.tail:
        self.tail = self.head
```

$O(1)$

```
def get_kth_node(self, k: int) -> Node:
    node = self.head
    for i in [0; k):
        if not node:
            return None
        node = node.next
    return node
```

$O(n)$



```
def sum(self) -> int:
    node = self.head
    res = 0
    while node:
        res += node.val
        node = node.next
    return res
```

$O(n)$

Оцените сложности операций?

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(1)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O^*(1)$
- ✓ 3. Удаление последнего элемента $O^*(1)$

Как реализовывать будем? **Динамический** массив!

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(n)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O(1)$
- ✓ 3. Удаление последнего элемента $O(1)$

Как реализовывать будем? **Связный** список!

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(n)$

✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O(1)$

✓ 3. Удаление последнего элемента $O(1)$

4. Удалить элемент из "начала"?

Задача

Реализовать **хранилище** однотипных упорядоченных данных (например, чисел)

Которое бы поддерживало следующие **запросы**:

- ✓ 1. Доступ к i -ому элементу $O(n)$
-
- ✓ 2. Добавление элемента в "конец" $O(1)$
- ✓ 3. Удаление последнего элемента $O(1)$
- ✓ 4. Удалить элемент из "начала"? $O(1)$

Связные списки

Минусы такого решения?

Связные списки

Минусы такого решения:

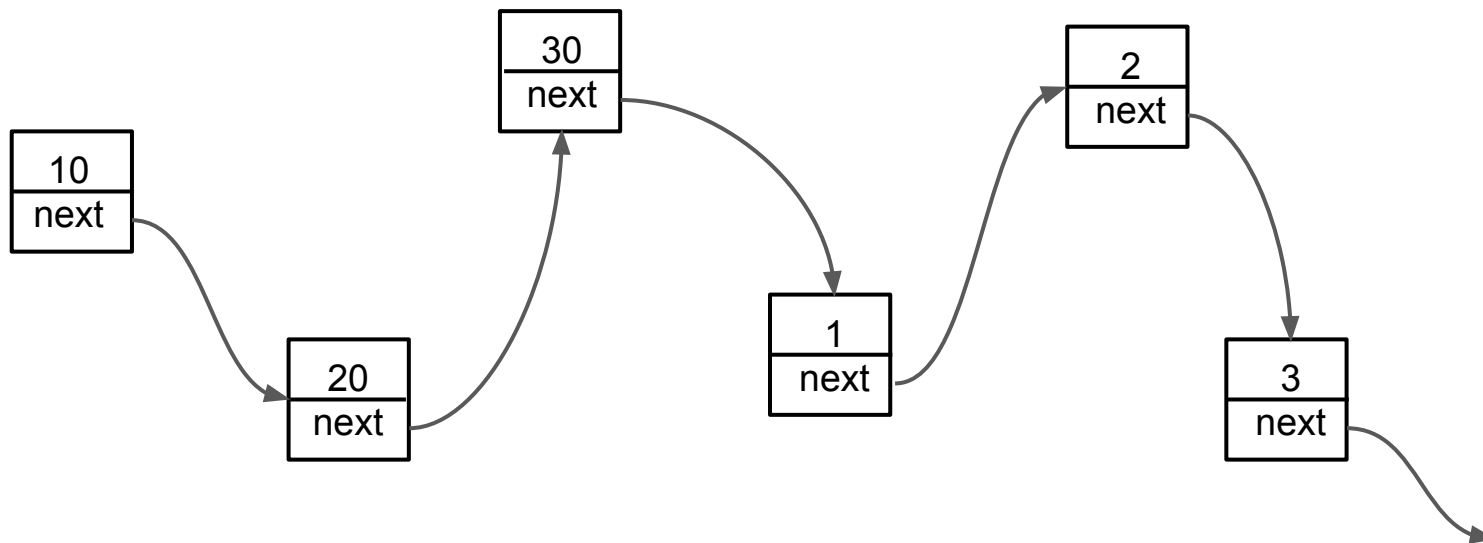
1. Взятие i -ого за линию.

Связные списки

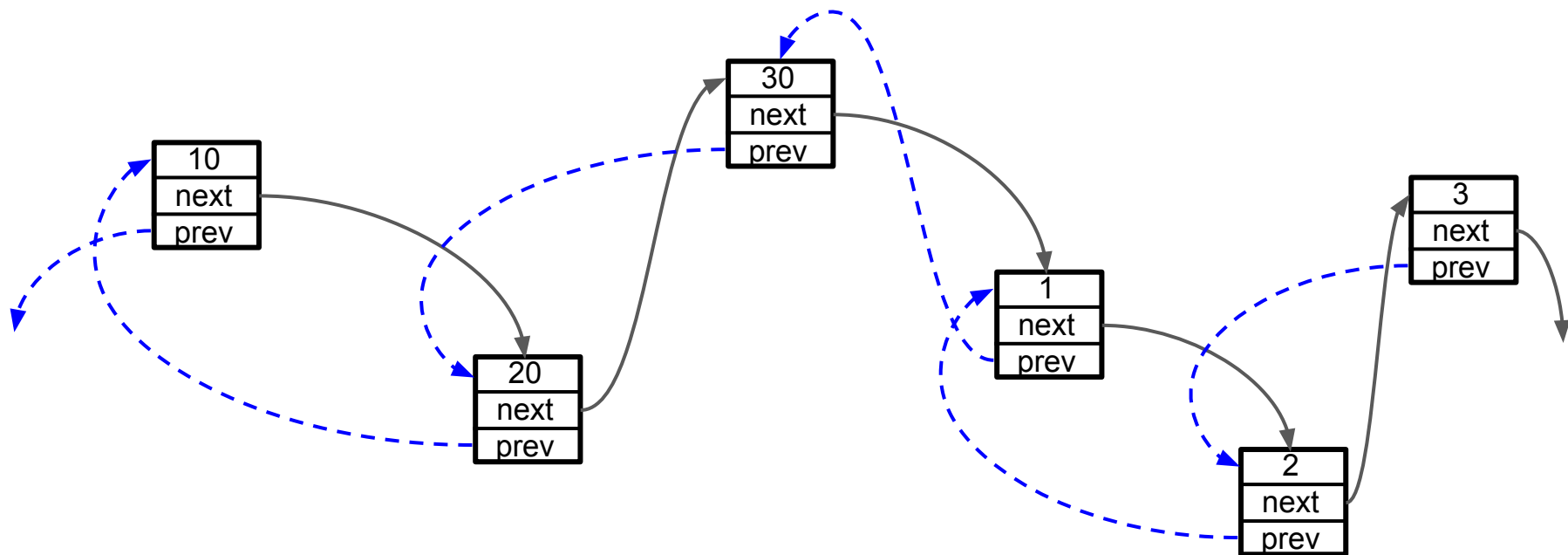
Минусы такого решения:

1. Взятие i -ого за линию.
2. Нужно хранить память на следующий элемент (а иногда и на предыдущий, такие списки называются **двусвязными**)

Односвязные списки



Двусвязные списки



Связные списки

Минусы такого решения:

1. Взятие i -ого за линию.
2. Нужно хранить память на следующий элемент (а иногда и на предыдущий, такие списки называются **двусвязными**)
3. Теряется **локальность** данных (последовательный доступ дольше)

Динамические массивы VS связанные списки

	Массивы	Списки
Взятие элемента по индексу	$O(1)$	$O(N)$
Добавление/удаление в конец	$O(N)$, но $O^*(1)$	$O(1)$

Динамические массивы VS связанные списки

	Массивы	Списки
Взятие элемента по индексу	$O(1)$	$O(N)$
Добавление/удаление в конец	$O(N)$, но $O^*(1)$	$O(1)$
Поиск по значению	$O(N)$	$O(N)$

Динамические массивы VS связанные списки

	Массивы	Списки
Взятие элемента по индексу	$O(1)$	$O(N)$
Добавление/удаление в конец	$O(N)$, но $O^*(1)$	$O(1)$
Поиск по значению	$O(N)$	$O(N)$
Поиск по значению в отсортированном	$O(\log N)$	$O(N)$

Мини-задача #16 (1 балл)

По заданному связному списку нужно найти цикл в нем и вернуть номер узла, с которого он начался.

Нельзя:

1. Модифицировать элементы списка
2. Пользоваться встроенными коллекциями

Нужно: использовать только $O(1)$ дополнительной памяти.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/linked-list-cycle-ii/>

Мини-задача #17 (1 балл)

По заданному связному списку и двум значениям элементов из него: построить новый связный список в котором все элементы между заданных в условии идут в обратном порядке.

Для решения используйте **однопроходный** алгоритм.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/reverse-linked-list-ii/>

Takeaways

- Амортизационный анализ, как альтернатива СЛОЖНОСТИ В худшем случае.

Takeaways

- Амортизационный анализ, как альтернатива сложности в худшем случае.
- Динамические массивы и правила их расширения и сдвигания.

Takeaways

- Амортизационный анализ, как альтернатива сложности в худшем случае.
- Динамические массивы и правила их расширения и сдвигания.
- Связные списки, как альтернатива динамическим массивам.
- Trade-offs



Мини-задача #15 (1 балл)

Реализовать собственный динамический массив, в котором поддержаны операции:

1. Доступа к элементу по индексу
2. Добавление элемента в конец
3. Удаления последнего элемента

Операции работают за $O(1)$ или $O^*(1)$.

Обрабатывается случаи выхода за границу массива и удаление элемента из пустого массива.

Пользоваться готовыми библиотечными решениями нельзя.

Мини-задача #16 (1 балл)

По заданному связному списку нужно найти цикл в нем и вернуть номер узла, с которого он начался.

Нельзя:

1. Модифицировать элементы списка
2. Пользоваться встроенными коллекциями

Нужно: использовать только $O(1)$ дополнительной памяти.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/linked-list-cycle-ii/>

Мини-задача #17 (1 балл)

По заданному связному списку и двум значениям элементов из него: построить новый связный список в котором все элементы между заданных в условии идут в обратном порядке.

Для решения используйте **однопроходный** алгоритм.

Решение проверить на leetcode:

<https://leetcode.com/problems/reverse-linked-list-ii/>