UTS 1 SK5001 20921004

Nama : M. RIZKA FADHLI
NIM : 20921004

SOAL 1

Jawab: Misal kita memiliki n pasang data = $\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ \vdots \\ x_n, y_n \end{pmatrix}$

fungsi linear didefinisikan $f(x) = y = ax + b$.

error didefinisikan : $err = \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i) \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2$$

Agar error minimum, maka:

$$\frac{\partial error}{\partial a} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial error}{\partial b} = 0$$

Akibatnya: $\frac{\partial error}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - ax_i - b) = 0$ ...(1)

$$\frac{\partial error}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \quad (2)$$

Tuliskan : $a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$ ...(1)

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b.n = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{...(2)}$$

Kita bisa tuliskan dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Karena x_i dan y_i diketahui kita bisa

menghitung $\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Sehingga kita bisa tuliskan sbg $Ax = b$.

Jika A inversible maka kita bisa mendapat

nilai a dan b untuk:

$$f(x) = y = ax + b$$

UTS 1 SK 5001 20921004

SOAL 2

Jawab: Misal $S(x)$ di $[0,2]$

$$S(x)\begin{cases} S_0(x) = 1+2x-x^3 \ ; & 0\leq x<1 \\ S_1(x) = 2+a(x-1)+b(x-1)^2+c(x-1)^3 \ ; & 1\leq x<2 \end{cases}$$

diketahui: 2 interval dg $h_0 = h_1 = 1$.

dari:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3$$

Didapat:

$a_0 = 1 \quad c_0 = 0$

$b_0 = 2 \quad d_0 = -1$

Pada: $S_1(x) = 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3$

didapat: $a_1 = 2 \quad c_1 = b$

$b_1 = a \quad d_1 = c$

kita tahu bahwa:

$$b_1 = b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^2$$

Maka: $a = 2 + 2.0.1 + 3.-1.1^2$

$a = 2 - 3$

$\boxed{a = -1}$

kita tahu bahwa:

$$c_1 = c_0 + 3d_0h_0$$

Maka: $b = 0 + 3.-1.1$

$\boxed{b = -3}$

kita tahu bahwa:

$$d_1 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0}$$

Maka: $c = \dfrac{-3-0}{3.1}$

$\boxed{c = -1}$

didapat: $a = -1$

$b = -3$

$c = -1$

UTS 1 SK5001 20921004

Nama : M RIEKA FADHLI
NIM : 20921004

Soal 3

Misalkan suatu SPL $Ax = b$ hendak diselesaikan dg iteratif.

Dg menuliskan $A = D + C$ diperoleh skema iterasi.

$$Dx^{(k+1)} = -Cx^{(k)} + b.$$

a. Berikanlah uraian persyaratan agar skema iterasi menghasilkan solusi yg konvergen!

b. Selanjutnya dgn D = diagonal matriks. Berikan syarat cukup agar A menghasilkan solusi yg konvergen!

Jawab

a. Misalkan SPL $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$

A bisa kita tuliskan sbg $A = D + C$
dg D = matriks diagonal
C = Upper + Lower Matriks tanpa diagonal.

Shg : $(D+C)x = b$

Skema iterasi : $Dx^{(k+1)} = -Cx^{(k)} + b$

kita tuliskan :

$$x^{k+1} = -D^{-1}Cx^{(k)} + b$$

Misal $-D^{-1}C$ kita tuliskan sbg matriks iterasi B.

Maka sesuai teorema, B akan konvergen jika dan hanya jika $\rho(B) < 1$.

Ini merupakan syarat perlu.

Oleh karena kita tahu bahwa $\rho(B) \leq \|B\|$ utk semua natural norm, maka syarat cukupnya agar B konvergen adalah $\|B\| < 1$.

b. Misal SPL $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$

Agar SPL bisa diselesaikan, maka A harus inversible (bisa di-inverse-kan).

Agar A konvergen maka A harus diagonal kuat.

Atau bisa dituliskan :

$$D = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Jawab :

a. Pada metode SOR, skema iterasinya adalah sbb:

Tulis : $A = D + L + U$

$$x^{k+1} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)}_{\text{Matriks iterasi } = T\omega} x^k + \omega(D+\omega L)^{-1} b$$

$\rho(T\omega)$ didefinisikan sebagai $\max|\lambda_i|$ ....(1)

dg λ_i adalah vektor eigen dari $T\omega$.

Mari kita hitung $\det(T\omega)$:

$$\det(T\omega) = \det((D+\omega L)^{-1}) \det((1-\omega)D - \omega U)$$

$$= \det(D^{-1}) \det((1-\omega)D - \omega U)$$

$$= \det((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)$$

$$= \det((1-\omega)I)$$

$$= (1-\omega)^n \quad \text{....(2)}$$

Perhatikan bahwa $\det(T\omega)$ juga bisa dihitung

sebagai: $\det(T\omega) = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 . .. \lambda_n$

$$= \prod_i \lambda_i \quad \text{....(3)}$$

Perhatikan kembali 1, 2, 3

$$\det(T\omega) = \prod_i \lambda_i = (1-\omega)^n \leq \max|\lambda_i|^n$$

akibatnya $\rho(T\omega) \geq |\omega - 1|$

b. Agar $T\omega$ konvergen, maka : $\rho(T\omega) < 1$.

atau $|\omega - 1| < 1$

atau $0 < \omega < 2$.