Persiapan UTS II

Mengerjakan Soal UTS II Tahun Lalu

Mohammad Rizka Fadhli

30 November 2021

Soal 1

Diberikan sistem persamaan tak-linear berikut:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$f_2(x, y) = xy - 1 = 0$$

- Kemungkinan apa yang bisa terjadi jika kita menggunakan metode Newton untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut?
- Berikanlan deskripsi penyelesaian sistem persamaan tak linear menggunakan metode hibrida, khususnya metode Newton dan metode optimisasi global!

Jawab

Jawaban sub soal I

Metode Newton memiliki skema iterasi sebagai berikut:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J(X^{(k)})^{-1} F(X^{(k)})$$

dengan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dan J adalah matriks Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x}(X) & \frac{\delta f_1}{\delta y}(X) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x}(X) & \frac{\delta f_2}{\delta y}(X) \end{bmatrix}$$

Dari f_1, f_2 yang diketahui, kita bisa tuliskan J sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Agar skema iterasi bisa dilakukan, maka J harus **tak singular**. Artinya $det(J) \neq 0$.

$$2x^2 - 2y^2 \neq 0 \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 < 0 \\ 2x^2 - 2y^2 > 0 \end{cases}$$

Kita bisa tuliskan:

$$\begin{gathered} 2x^2 - 2y^2 < 0 \\ x^2 < y^2 \\ (\tfrac{x}{y})^2 < 1 \end{gathered}$$

atau

$$\begin{gathered} 2x^2 - 2y^2 > 0 \\ x^2 > y^2 \\ (\tfrac{x}{y})^2 > 1 \end{gathered}$$

Selain itu, agar iterasi cepat konvergen, maka $\rho(J) < 1$. Kita bisa tuliskan kembali:

$$\max \lambda_J < 1$$

Maka pemilihan *initial* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ menjadi **krusial**.

Coba kita gambar f_1, f_2 terlebih dahulu:

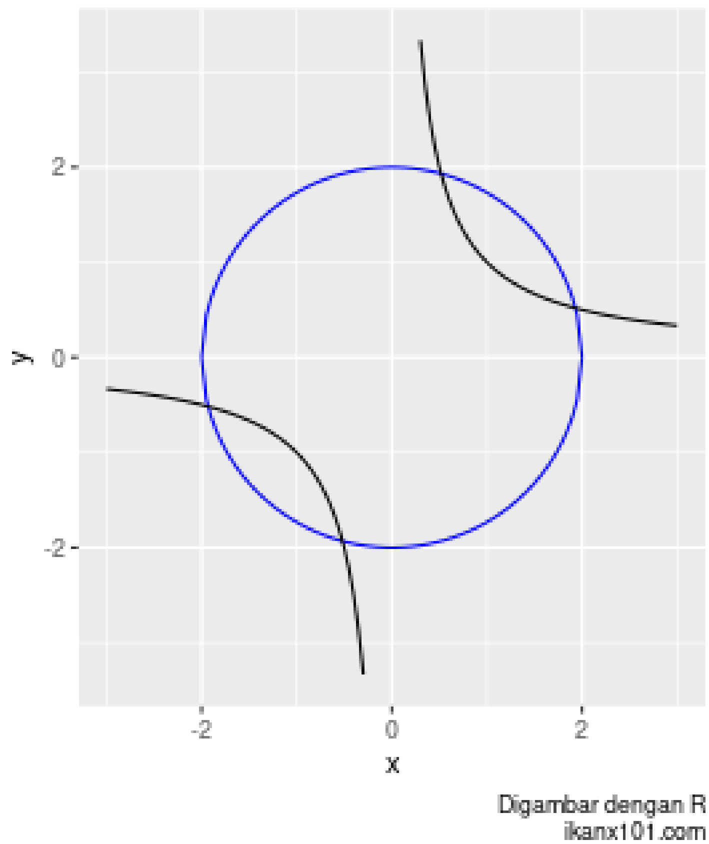

Figure 1: Soal SPNL

Terlihat ada 4 buah titik solusi, jika kita jalankan skema iterasinya untuk titik awal:

1. $x = -3, y = -1$
2. $x = -1, y = -3$
3. $x = 3, y = 1$
4. $x = 1, y = 3$

```
## $`Initial (x,y)`
## [1] 1 3
##
## $`Solusi Final: `
##           [,1]
## [1,] 0.5176381
## [2,] 1.9318517
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5
```

```
## $`Initial (x,y)`
## [1] 3 1
##
## $`Solusi Final: `
##           [,1]
## [1,] 1.9318517
## [2,] 0.5176381
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5
```

```
## $`Initial (x,y)`
## [1] -3 -1
##
## $`Solusi Final: `
##            [,1]
## [1,] -1.9318517
## [2,] -0.5176381
```

```
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5

## $`Initial (x,y)`
## [1] -1 -3
##
## $`Solusi Final: `
##            [,1]
## [1,] -0.5176381
## [2,] -1.9318517
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5
```

Jawaban sub soal II

Jika kita hendak menggunakan metode optimisasi global, berarti kita harus mengubah bentuk f_1, f_2 menjadi suatu F agar **bisa dicari nilai max atau min globalnya**.

Sistem di atas memiliki solusi $x = (x, y)^T$ jika $F(x)$ yang kita definisikan sebagai:

$$F(x) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|}$$

Terlihat bahwa $F(x)$ memiliki nilai max $= 1$. Maka penyelesaiannya menjadi penyelesaian masalah optimisasi (maksimasi).

Perhatikan grafik $F(x) = 1$ sebagai berikut:

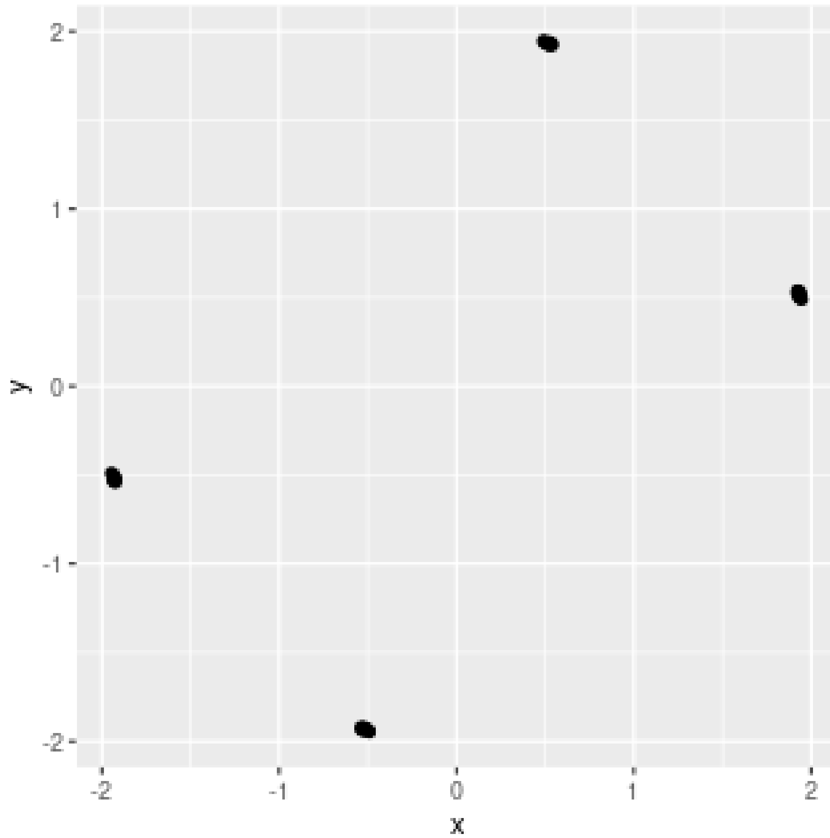

Figure 2: F baru dari f1 dan f2

Terlihat bahwa x, y yang mengakibatkan $F(x) = 1$ adalah solusi dari SPNL yang dimaksud.

Soal 2

Untuk masalah:

$$
\begin{array}{lcr}
\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} & 0 < x < L & 0 < t < T \\
u(x,0) = g(x) & & 0 \leq x \leq L \\
u(0,t) = a(t) & u(L,t) = b(t) & 0 < t < T
\end{array}
$$

- Berikanlah skema beda hingga nya menggunakan metode BTCS!
- Selidiki kestabilam dari skema yang diperoleh!

Jawab

Jawaban Sub Soal I

Metode implisit menggunakan skema *backward difference* untuk $u_t(x_i, t_j)$ dan *central difference* untuk $u_{xx}(x_i, t_j)$.

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - k)}{k} + O(k)$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} + O(h^2)$$

Skema Iterasi dari bentuk di atas adalah:

$$w_{i,j-1} = -\lambda w_{i+1,j} + (1 + 2\lambda) w_{i,j} - \lambda w_{i-1,j}$$

dengan $w_{i,j}$ menghampiri $u(x_i, t_j)$ dan $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

Perhatikan dari skema iterasi di atas, nilai-nilai w pada saat ke j dikaitkan pada saat waktu ke $j - 1$. Sehingga vektor $w^{(j)}$ secara implisit didapatkan dari sistem persamaan linear:

$$Aw^{(j)} = w^{(j-1)}, j = 1, 2, .., j_{max}$$

dengan nilai-nilai batas $w_{0,j} = w_{m,j} = 0$. Jika matriks A **tidak singular**, maka kita akan dapatkan skema iterasi dalam bentuk aljabar berikut:

Skema Iterasi dalam Aljabar

$$w^{(j)} = A^{-1}w^{(j-1)} = .. = (A^{-1})^{(j)}w^{(0)}, j = 1, 2, .., j_{max}$$

dengan orde galat $O(k + h^2)$. Persamaan di atas harus selalu diselesaikan setiap waktu j.

dengan:

$$w^{(j)} = \begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ .. \\ w_{m-1,j} \end{pmatrix}$$

dan matriks tridiagonal berukuran $(m - 1) \times (m - 1)$ berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & .. & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & .. & .. \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

Jawaban Sub Soal II

Agar stabil, maka matriks A harus memenuhi $\rho(A^{-1}) < 1$. Maka kita akan hitung berapa nilai $\rho(A^{-1})$.

$\rho(A^{-1})$ dihitung dari $\max \lambda_{A^{-1}}$ dimana λ adalah nilai eigen dari matriks A^{-1}.

Tuliskan matriks A dalam bentuk berikut:

$$A = I + \lambda G$$

dengan:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & .. & 0 \\ -1 & 2 & -1 & .. & .. \\ 0 & -1 & 2 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kita tahu dalam aljabar:

1. Jika μ^G adalah nilai eigen dari matriks G, maka $1 + \lambda\mu^G$ merupakan nilai eigen dari matriks $I + \lambda G$.
2. Jika μ^A adalah nilai eigen dari matriks A, maka $\frac{1}{\mu^A}$ adalah nilai eigen dari matriks A^{-1}.

Maka kita bisa dapatkan nilai eigen dari A^{-1} adalah:

$$\mu^{A^{-1}} = \frac{1}{1 + \lambda\mu^G}$$

Mari kita cari nilai dari μ^G.

Lemma

Dengan memanfaatkan lemma berikut ini:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & .. & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & .. & .. \\ 0 & \gamma & \alpha & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & \beta \\ 0 & .. & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari G adalah:

$$\mu_k^G = \alpha + 2\beta\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\cos\frac{k\pi}{n+1}$$

Dengan mensubstitusi α, β, γ, n didapatkan:

$$\mu_k^G = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$$

Kita substitusikan μ^G ke dalam $\mu^{A^{-1}}$. Sehingga didapatkan:

$$\mu^{A^{-1}} = \frac{1}{1 + \lambda 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right)}$$

Kita tahu bahwa:

$$\lambda = \frac{k}{h^2} > 0$$

dan

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right) > 0$$

Sehingga didapatkan $|\mu^{A^{-1}}| < 1$.

Maka terlihat jelas bahwa $\rho(A^{-1}) < 1$.

Kesimpulan Metode BTCS **stabil tanpa syarat**.