

# Persiapan UTS II

## Mengerjakan Soal UTS II Tahun Lalu

Mohammad Rizka Fadhli

16 December 2021

### Soal 1

Diberikan sistem persamaan tak-linear berikut:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$f_2(x, y) = xy - 1 = 0$$

- Kemungkinan apa yang bisa terjadi jika kita menggunakan metode Newton untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut?
- Berikanlan deskripsi penyelesaian sistem persamaan tak linear menggunakan metode hibrida, khususnya metode Newton dan metode optimisasi global!

### Jawab

#### Jawaban sub soal I

Metode Newton memiliki skema iterasi sebagai berikut:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J(X^{(k)})^{-1}F(X^{(k)})$$

dengan  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dan  $J$  adalah matriks Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x}(X) & \frac{\delta f_1}{\delta y}(X) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x}(X) & \frac{\delta f_2}{\delta y}(X) \end{bmatrix}$$

Dari  $f_1, f_2$  yang diketahui, kita bisa tuliskan  $J$  sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Agar skema iterasi bisa dilakukan, maka  $J$  harus **tak singular**. Artinya  $\det(J) \neq 0$ .

$$2x^2 - 2y^2 \neq 0 \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 < 0 \\ 2x^2 - 2y^2 > 0 \end{cases}$$

Kita bisa tuliskan:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 &< 0 \\ x^2 &< y^2 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 &< 1 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 &> 0 \\ x^2 &> y^2 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 &> 1 \end{aligned}$$

Selain itu, agar iterasi cepat konvergen, maka  $\rho(J) < 1$ . Kita bisa tuliskan kembali:

$$\max \lambda_J < 1$$

Maka pemilihan *initial*  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  menjadi **krusial**.

Coba kita gambar  $f_1, f_2$  terlebih dahulu:

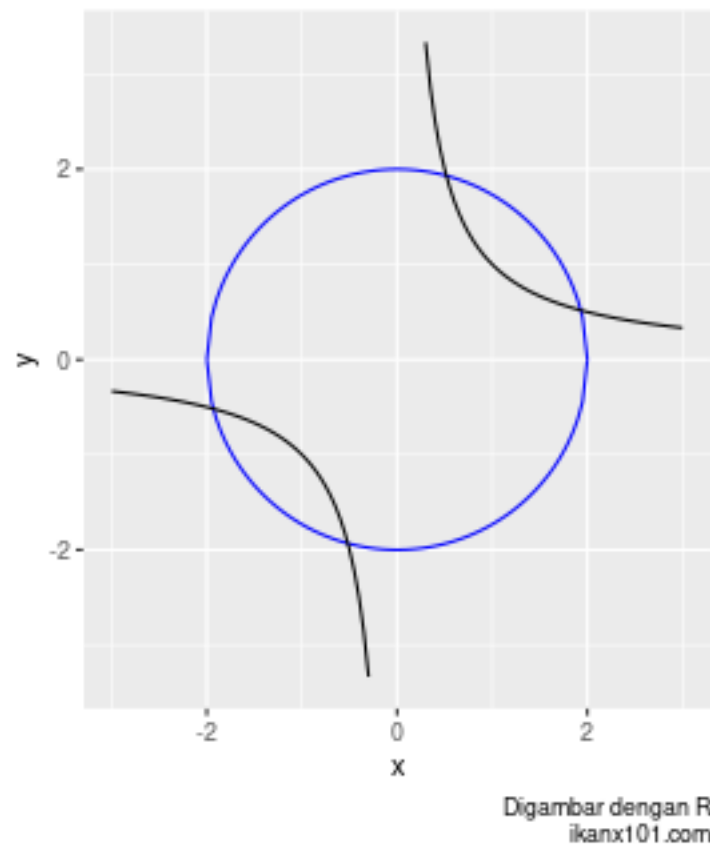


Figure 1: Soal SPNL

Terlihat ada 4 buah titik solusi, jika kita jalankan skema iterasinya untuk titik awal:

1.  $x = -3, y = -1$
2.  $x = -1, y = -3$
3.  $x = 3, y = 1$
4.  $x = 1, y = 3$

```
## $`Initial (x,y)`  
## [1] 1 3  
##  
## $`Solusi Final: `  
##      [,1]  
## [1,] 0.5176381  
## [2,] 1.9318517  
##  
## $`Banyak iterasi: `  
## [1] 5
```

```
## $`Initial (x,y)`  
## [1] 3 1  
##  
## $`Solusi Final: `  
##      [,1]  
## [1,] 1.9318517  
## [2,] 0.5176381  
##  
## $`Banyak iterasi: `  
## [1] 5
```

```
## $`Initial (x,y)`  
## [1] -3 -1  
##  
## $`Solusi Final: `  
##      [,1]  
## [1,] -1.9318517  
## [2,] -0.5176381
```

```
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5

## $`Initial (x,y)`
## [1] -1 -3
##
## $`Solusi Final: `
##           [,1]
## [1,] -0.5176381
## [2,] -1.9318517
##
## $`Banyak iterasi: `
## [1] 5
```

## Jawaban sub soal II

Jika kita hendak menggunakan metode optimisasi global, berarti kita harus mengubah bentuk  $f_1, f_2$  menjadi suatu  $F$  agar **bisa dicari nilai max atau min globalnya**.

Sistem di atas memiliki solusi  $x = (x, y)^T$  jika  $F(x)$  yang kita definisikan sebagai:

$$F(x) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |f_i(x)|}$$

Terlihat bahwa  $F(x)$  memiliki nilai  $\max = 1$ . Maka penyelesaiannya menjadi penyelesaian masalah optimisasi (maksimasi).

Perhatikan grafik  $F(x) = 1$  sebagai berikut:

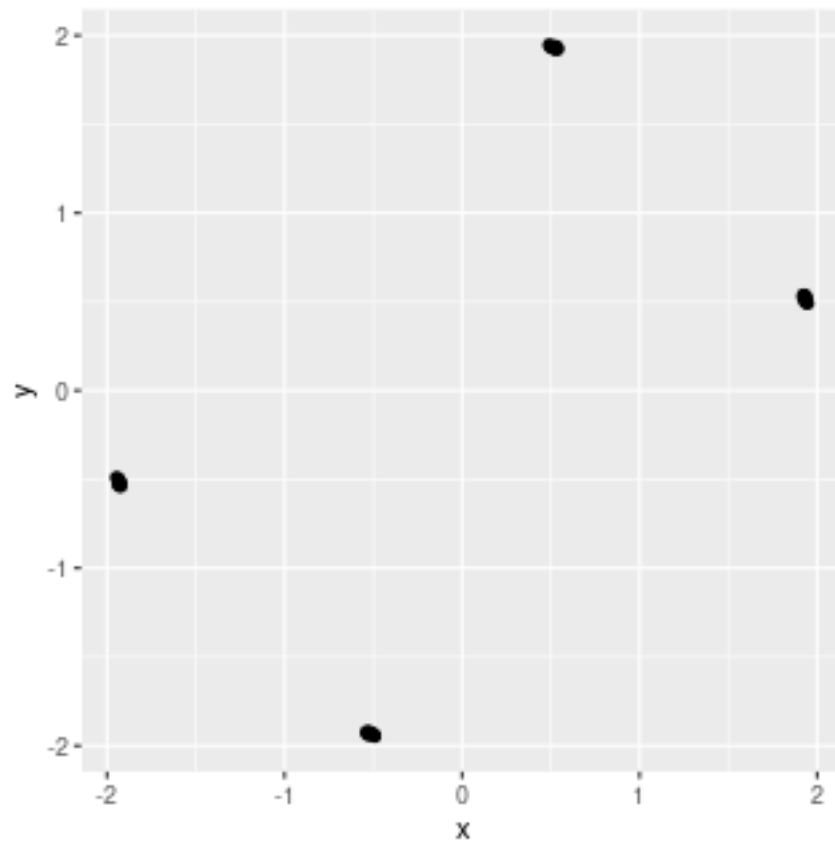


Figure 2: F baru dari f1 dan f2

Terlihat bahwa  $x, y$  yang mengakibatkan  $F(x) = 1$  adalah solusi dari SPNL yang dimaksud.

## Soal 2

Untuk masalah:

$$\begin{aligned}\frac{\delta u}{\delta t} &= \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} & 0 < x < L & \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) &= g(x) & 0 \leq x \leq L & \\ u(0, t) &= a(t) \quad u(L, t) = b(t) & 0 < t < T &\end{aligned}$$

- Berikanlah skema beda hingga nya menggunakan metode BTCS!
- Selidiki kestabilan dari skema yang diperoleh!

## Jawab

### Jawaban Sub Soal I

Metode implisit menggunakan skema *backward difference* untuk  $u_t(x_i, t_j)$  dan *central difference* untuk  $u_{xx}(x_i, t_j)$ .

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - k)}{k} + O(k)$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j))}{h^2} + O(h^2)$$

**Skema Iterasi** dari bentuk di atas adalah:

$$w_{i,j-1} = -\lambda w_{i+1,j} + (1 + 2\lambda)w_{i,j} - \lambda w_{i-1,j}$$

dengan  $w_{i,j}$  menghampiri  $u(x_i, t_j)$  dan  $\lambda = \frac{k}{h^2}$ .

Perhatikan dari skema iterasi di atas, nilai-nilai  $w$  pada saat ke  $j$  dikaitkan pada saat waktu ke  $j - 1$ . Sehingga vektor  $w^{(j)}$  secara implisit didapatkan dari sistem persamaan linear:

$$Aw^{(j)} = w^{(j-1)}, j = 1, 2, \dots, j_{max}$$

dengan nilai-nilai batas  $w_{0,j} = w_{m,j} = 0$ . Jika matriks  $A$  **tidak singular**, maka kita akan dapatkan skema iterasi dalam bentuk aljabar berikut:

## Skema Iterasi dalam Aljabar

$$w^{(j)} = A^{-1}w^{(j-1)} = \dots = (A^{-1})^{(j)}w^{(0)}, j = 1, 2, \dots, j_{max}$$

dengan orde galat  $O(k + h^2)$ . Persamaan di atas harus selalu diselesaikan setiap waktu  $j$ .  
dengan:

$$w^{(j)} = \begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \dots \\ w_{m-1,j} \end{pmatrix}$$

dan matriks tridiagonal berukuran  $(m-1) \times (m-1)$  berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & \dots \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

## Jawaban Sub Soal II

Agar stabil, maka matriks  $A$  harus memenuhi  $\rho(A^{-1}) < 1$ . Maka kita akan hitung berapa nilai  $\rho(A^{-1})$ .

$\rho(A^{-1})$  dihitung dari  $\max \lambda_{A^{-1}}$  dimana  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A^{-1}$ .

Tuliskan matriks  $A$  dalam bentuk berikut:

$$A = I + \lambda G$$

dengan:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Kita tahu dalam aljabar:

1. Jika  $\mu^G$  adalah nilai eigen dari matriks  $G$ , maka  $1 + \lambda\mu^G$  merupakan nilai eigen dari matriks  $I + \lambda G$ .
2. Jika  $\mu^A$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$ , maka  $\frac{1}{\mu^A}$  adalah nilai eigen dari matriks  $A^{-1}$ .

Maka kita bisa dapatkan nilai eigen dari  $A^{-1}$  adalah:

$$\mu^{A^{-1}} = \frac{1}{1 + \lambda\mu^G}$$

Mari kita cari nilai dari  $\mu^G$ .

### Lemma

Dengan memanfaatkan lemma berikut ini:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & .. & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & .. & .. \\ 0 & \gamma & \alpha & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & \beta \\ 0 & .. & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari  $G$  adalah:

$$\mu_k^G = \alpha + 2\beta\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \cos \frac{k\pi}{n+1}$$

Dengan mensubstitusi  $\alpha, \beta, \gamma, n$  didapatkan:

$$\mu_k^G = 4 \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2m} \right)$$

Kita substitusikan  $\mu^G$  ke dalam  $\mu^{A^{-1}}$ . Sehingga didapatkan:

$$\mu^{A^{-1}} = \frac{1}{1 + \lambda 4 \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2m} \right)}$$

Kita tahu bahwa:

$$\lambda = \frac{k}{h^2} > 0$$

dan

$$\sin^2 \left( \frac{k\pi}{2m} \right) > 0$$

Sehingga didapatkan  $|\mu^{A^{-1}}| < 1$ .

Maka terlihat jelas bahwa  $\rho(A^{-1}) < 1$ .

**Kesimpulan** Metode BTCS stabil tanpa syarat.