PRESENTASI AKHIR

PENELITIAN MANDIRI DALAM SAINS KOMPUTASI I

Mohammad Rizka Fadhli 20921004

Sains Komputasi ITB

Section 1

PENDAHULUAN

Subsection 1

Latar Belakang

Topik Permasalahan

PT. Nutrifood Indonesia adalah salah satu perusahaan *fast moving consumer goods* (*FMCG*) di Indonesia yang bergerak di bidang makanan dan minuman. Sejak 40 tahun, **Nutrifood** menawarkan berbagai jenis produk makanan dan minuman sehat kepada masyarakat Indonesia.

Untuk menjalankan produksinya, **Nutrifood** memiliki tiga *plants* yang memproduksi produk-produk yang sama (tidak ada perbedaan produk antar *plant*).

Salah satu jenis produk yang menjadi *backbone* adalah minuman serbuk.

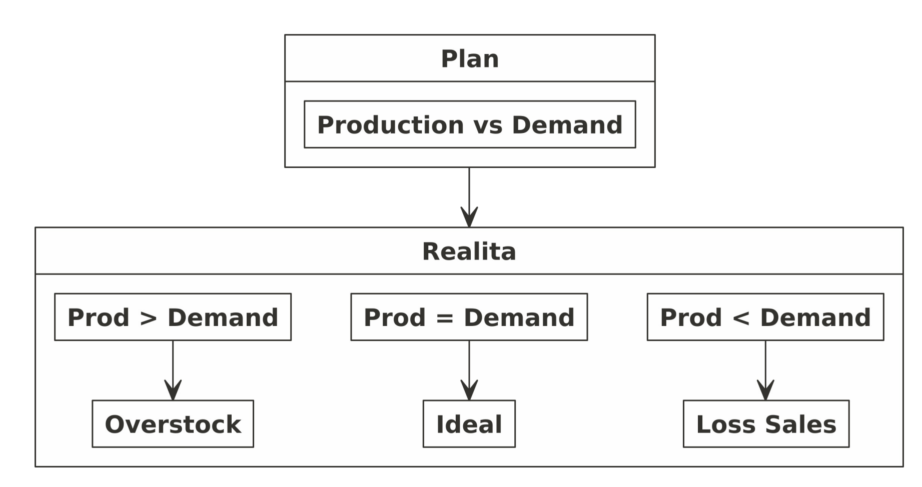
Topik Permasalahan (lanjutan)

Saat ini, ada $>$ 130 SKU minuman serbuk yang diproduksi. Beberapa SKU masuk ke dalam kategori *high demand* sedangkan beberapa lainnya masuk ke dalam kategori *medium demand* dan *low demand*.

Salah satu strategi perencanaan yang baik adalah menyelaraskan antara *production* dan *demand*.

Topik yang diangkat dalam penelitian ini adalah upaya pencegahan ***loss sales***.

Topik Permasalahan (lanjutan)



Topik Permasalahan (lanjutan)

Apa penyebab *production* $<$ *demand* ?

Ada beberapa kemungkinan:

1. Ketiadaan *raw material*.
2. *Production downtime*.
3. Perubahan *demand* mendadak.

Di antara ketiga kemungkinan tersebut, kemungkinan pertama seharusnya **berada pada kontrol kita** jika direncanakan dengan baik.

Topik Permasalahan (lanjutan)

Masing-masing produk minuman tersebut memiliki **resep** yang *unique*, namun ada beberapa komponen *raw material* digunakan oleh **keseluruhan produk**.

Nutrifood juga menerapkan prinsip ***multi supplier*** untuk menjaga keamanan pasokan dan ketersediaan *raw material*. Akibatnya masing-masing *supplier* memiliki perbedaan dalam hal:

1. Harga,
2. Minimum order,
3. Durasi pengiriman.
4. Kualitas *raw material* per *supplier*.

Topik Permasalahan (lanjutan)

Masalah Optimisasi

Setelah dilakukan *review* menyeluruh terhadap prosedur dan tata cara perhitungan serta pemesanan *raw material*, disimpulkan bahwa **ada masalah optimisasi** yang dihadapi.

Kenapa?

Kuantitas *raw material* yang hendak dibeli harus disesuaikan dengan:

- Stok existing (sedang dipakai dan belum dipakai),
- Demand produk,
- Faktor *supplier* (harga, *min order*, dan durasi pengiriman).

Secara *bussiness value*, masalah ini perlu diselesaikan dengan baik.

Catatan: Proses *review* tersebut akan menjadi pembahasan tersendiri pada **Penelitian Mandiri II**.

Subsection 2

Penelitian Mandiri dalam Sains Komputasi I

Rencana Judul Thesis

Optimisasi Pembelian Raw Material Minuman Serbuk Menggunakan Metode XXX: Studi Kasus PT. Nutrifood Indonesia.

Tujuan Penelitian Mandiri dalam Sains Komputasi I

Melakukan eksplorasi terhadap:

1. Riset operasi dan optimisasi,
2. Mempelajari jenis-jenis masalah optimisasi,
3. Mempelajari metode penyelesaian masalah optimisasi,
4. Membuat algoritma dari salah satu masalah optimisasi.

Section 2

OPTIMISASI DAN RISET OPERASI

Subsection 1

Sejarah

Optimisasi

Optimisasi adalah **proses mencari nilai yang optimal** dari suatu masalah tertentu. Dalam matematika, optimisasi merujuk pada pencarian nilai minimal atau maksimal dari suatu *fungsi real*[1]. Notasi matematikanya dapat ditulis sebagai berikut:

Misalkan suatu fungsi f yang memetakan dari himpunan A ke bilangan *real*.

$$f : A \to \mathbb{R}$$

Cari suatu nilai $x_0 \in A$ sedemikian sehingga:

- $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A$ untuk proses **minimalisasi**.
- $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A$ untuk proses **maksimalisasi**.

[1] https://id.wikipedia.org/wiki/Optimisasi

Optimisasi (lanjutan)

Di dalam kalkulus, kita mengetahui salah satu pendekatan optimisasi di fungsi satu variabel bisa didapatkan dari turunan pertama yang bernilai **nol** (bisa berupa nilai maksimum atau minimum dari fungsi tersebut).

Nilai $x_0 \in [a, b]$ disebut minimum atau maksimum di f unimodal saat memenuhi:

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = 0$$

Optimisasi (lanjutan)

Pierre De Fermat dan **Joseph-Louis Lagrange** adalah orang-orang yang pertama kali menemukan formula kalkulus untuk mencari nilai optimal. Sementara **Isaac Newton** dan **Johann C. F.Gauss** mengusulkan metode iteratif untuk mencari nilai optimal[2].

Salah satu bentuk optimisasi yakni *linear programming* dimulai oleh **Leonid Kantorovich** pada 1939. **Metode Simplex** merupakan salah satu metode penyelesaian optimisasi yang terkenal, pertama kali diperkenalkan pada 1947 oleh **George Dantzig** sementara di tahun yang sama *Theory of Duality* diperkenalkan oleh **John von Neumann**.

[2] https://empowerops.com/en/blogs/2018/12/6/brief-history-of-optimization

Riset Operasi

Riset operasi adalah metode antar disiplin ilmu yang digunakan untuk menganalisa masalah nyata dan membuat keputusan untuk kegiatan operasional organisasi atau perusahaan[3].

Riset operasi dimulai pada era Perang Dunia II. Oleh karena peperangan, diperlukan suatu cara yang efektif untuk mengalokasikan *resources* yang ada sehingga pihak militer Inggris dan Amerika Serikat mengumpulkan ilmuwan-ilmuwan untuk mencari pendekatan yang saintifik dalam memecahkan masalah(Hillier and Lieberman 2001).

[3] Pengantar Riset Operasi dan Optimisasi, KampusX: PO101

Riset Operasi (lanjutan)

Pada tahun 1940, sekelompok *researchers* yang dipimpin oleh **PMS Blackett** dari ***the University of Manchester*** melakukan studi tentang **Sistem Radar Baru Anti Pesawat Terbang**. Kelompok *researchers* ini sering dijuluki sebagai **Kelompok Sirkus Blackett** (*Blackett's circus*). Julukan ini terjadi karena keberagaman latar belakang disiplin ilmu para *researchers* tersebut. Mereka terdiri dari disiplin ilmu fisiologi, matematika, astronomi, tentara, surveyor, dan fisika. Pada 1941, kelompok ini terlibat dalam penelitian radar deteksi kapal selam dan pesawat terbang. *Blackett* kemudian memimpin *Naval Operational Research* pada Angkatan Laut Kerajaan Inggris Raya. Prinsip-prinsip ilmiah yang digunakan untuk mengambil keputusan dalam suatu operasi dinamai sebagai **Riset Operasi**(Parmono 2007).

Saat Amerika Serikat mulai terlibat pada Perang Dunia II, prinsip riset operasi juga digunakan untuk berbagai operasi militer mereka. Kelompok riset operasi AS bertugas untuk menganalisis serangan udara dan laut tentara NAZI Jerman.

Riset Operasi (lanjutan)

Selepas Perang Dunia II, penerapan riset operasi dinilai bisa diperluas ke dunia ekonomi, bisnis,*engineering*, dan sosial. Riset operasi banyak berkaitan dengan berbagai disiplin ilmu seperti matematika, statistika, *computer science*, dan lainnya. Tidak jarang beberapa pihak menganggap riset operasi itu *overlapping* dengan disiplin-disiplin ilmu tersebut.

Oleh karena tujuan utama dari aplikasi riset operasi adalah tercapainya **hasil yang optimal** dari semua kemungkinan perencanaan yang dibuat. Maka **pemodelan matematika dan optimisasi** bisa dikatakan sebagai disiplin utama dari riset operasi.

Subsection 2

Bahasan dalam Optimisasi

Bahasan dalam Optimisasi

Bahasan dalam optimisasi dapat dikategorikan menjadi:

- Pemodelan masalah nyata menjadi masalah optimisasi.
- Pembahasan karakteristik dari masalah optimisasi dan keberadaan solusi dari masalah optimisasi tersebut.
- Pengembangan dan penggunaan algoritma serta analisis numerik untuk mencari solusi dari masalah tersebut.

Masalah Optimisasi

Masalah optimisasi adalah masalah matematika yang mewakili masalah nyata (*real*). Dari ekspresi matematika tersebut, ada beberapa hal yang perlu diketahui[4], yakni:

- **Variabel** adalah suatu simbol yang memiliki banyak nilai dan nilainya ingin kita ketahui. Setiap nilai yang mungkin dari suatu variabel muncul akibat suatu kondisi tertentu di sistem.
- **Parameter** di suatu model matematika adalah suatu konstanta yang menggambarkan suatu karakteristik dari sistem yang sedang diteliti. Parameter bersifat *fixed* atau *given*.

[4] Pengantar Riset Operasi dan Optimisasi, KampusX: PO101

Masalah Optimisasi

- ***Constraints*** (atau kendala) adalah kondisi atau batasan yang harus dipenuhi. Kendala-kendala ini dapat dituliskan menjadi suatu persamaan atau pertaksamaan. Suatu masalah optimisasi dapat memiliki hanya satu kendala atau banyak kendala.
- ***Objective function*** adalah satu fungsi (pemetaan dari variabel-varibel keputusan ke suatu nilai di daerah *feasible*) yang nilainya akan kita minimumkan atau kita maksimumkan.

Ekspresi Model Matematika

Ekspresi matematika dari model optimisasi adalah sebagai berikut:

$$\textit{Cari } x \textit{ yang meminimumkan } f(x) \textit{ dengan kendala } g(x) = 0, h(x) \leq 0 \textit{ dan } x \in D.$$

Dari ekspresi tersebut, kita bisa membagi-bagi masalah optimisasi tergantung dari:

1. Tipe variabel yang terlibat.
2. Jenis fungsi yang ada (baik *objective function* ataupun *constraints*).

Subsection 3

Jenis-Jenis Optimisasi

Jenis-Jenis Masalah Optimisasi

Masalah optimisasi bisa dibagi dua menjadi dua kategori berdasarkan tipe *variables* yang terlibat[5], yakni:

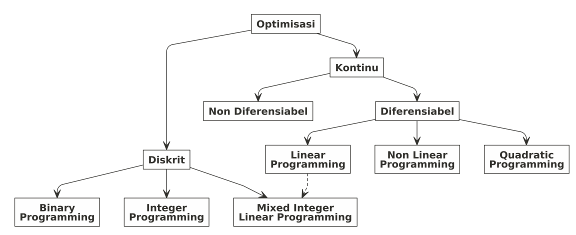


Figure 1: Optimisasi Berdasarkan Jenis Variabel

[5] Optimization problem. https://en.wikipedia.org/wiki/Optimization_problem

Jenis-Jenis Masalah Optimisasi (lanjutan)

1. *Discrete Optimization*: merupakan masalah optimisasi di mana variabel yang terkait merupakan variabel diskrit, seperti *binary* atau *integer* (bilangan bulat). Namun pada masalah optimisasi berbentuk *mixed integer linear programming*, dimungkinkan suatu masalah optimisasi memiliki berbagai jeni variabel yang terlibat (integer dan kontinu sekaligus).
2. *Continuous Optimization*: merupakan masalah optimisasi di mana variabel yang terkait merupakan variabel kontinu (bilangan *real*). Pada masalah optimisasi jenis ini, fungsi-fungsi yang terlibat bisa diferensiabel atau tidak. Konsekuensinya adalah pada metode penyelesaiannya.

Jenis-Jenis Masalah Optimisasi (lanjutan)

Selain itu, kita juga bisa membagi masalah optimisasi berdasarkan **kepastian nilai *variable* dan parameter** yang dihadapi sebagai berikut:

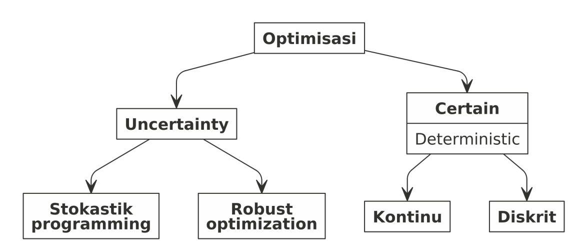


Figure 2: Optimisasi Berdasarkan Kepastian Nilai

Jenis-Jenis Masalah Optimisasi (lanjutan)

1. *Optimization under uncertainty*[6]; Pada beberapa kasus di dunia *real*, data dari masalah tidak dapat diketahui secara akurat karena berbagai alasan. Hal ini mungkin terjadi akibat:
    - Kesalahan dalam pengukuran, atau
    - Data melibatkan sesuatu di masa depan yang belum terjadi atau tidak pasti. Contoh: *demand* produk, harga barang, dan sebagainya.
2. *Deterministic optimization*;
    - Model deterministik adalah model matematika di mana nilai dari semua parameter dan variabel yang terkandung di dalam model merupakan satu nilai pasti[7].
    - Pendekatan deterministik memanfaatkan sifat analitik masalah untuk menghasilkan barisan titik yang konvergen ke solusi optimal(Lin, Tsai, and Yu 2012).
    - Semua algoritma perhitungan mengikuti pendekatan matematis yang ketat(Cavazzuti 2013).

[6] https://neos-guide.org/content/optimization-under-uncertainty
[7] Pengantar Riset Operasi dan Optimisasi, KampusX: PO101

Section 3

EKSPLORASI JENIS OPTIMISASI

Subsection 1

Linear Programming

Linear Programming

Linear programming adalah bentuk metode optimisasi sederhana yang memanfaatkan relasi linear (semua fungsi dan *constraints* merupakan fungsi linear).

Contoh Masalah *Linear Programming*

Saya memiliki area parkir seluas 1.960 m^2. Luas rata-rata untuk mobil berukuran kecil adalah 4 m^2 dan mobil besar adalah 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 250 kendaraan, biaya parkir mobil kecil adalah Rp 7.000 per jam dan mobil besar adalah Rp 12.000 per jam. Jika dalam 1 jam area parkir saya terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, maka berapa pendapatan maksimum yang bisa saya dapatkan dari tempat parkir itu?

Contoh Masalah *Linear Programming* (lanjutan)

Dari kasus di atas kita bisa tuliskan model matematikanya sebagai berikut:

Misal x_1 adalah mobil kecil dan x_2 adalah mobil besar.

$$max(7000x_1 + 12000x_2)$$

Dengan *constraints*:

$4x_1 + 20x_2 \leq 1960$ dan $x_1 + x_2 \leq 250$

serta $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.[8]

[8] https://ikanx101.com/blog/linear-r/

Subsection 2

Integer Programming

Integer Programming

Integer programming adalah bentuk metode optimisasi di mana variabel yang terlibat merupakan bilangan bulat (*integer*). Jika fungsi-fungsi yang terkait merupakan *linear*, maka disebut dengan *integer linear programming*.

Sebagai contoh, variabel yang merupakan bilangan bulat adalah banyak orang.

Contoh *Integer Programming*

Jadwal Kebutuhan Tenaga Kesehatan Suatu rumah sakit membutuhkan tenaga kesehatan setiap harinya dengan spesifikasi berikut:

Table 1: Tabel Kebutuhan Nakes Harian

hari	Min Nakes Required	Max Nakes Required
Senin	24	29
Selasa	22	27
Rabu	23	28
Kamis	11	16
Jumat	16	21
Sabtu	20	25
Minggu	12	17

Contoh *Integer Programming* (lanjutan)

Di rumah sakit tersebut berlaku kondisi sebagai berikut:

1. Setiap nakes hanya diperbolehkan bekerja selama 5 hari berturut-turut dan harus libur selama 2 hari berturut-turut.
2. Tidak ada pemberlakuan *shift* bagi nakes.

Berapa banyak nakes yang harus dipekerjakan oleh rumah sakit tersebut? Bagaimana konfigurasi penjadwalannya?

Contoh *Integer Programming* (lanjutan)

Untuk memudahkan dalam mencari solusi permasalahan di atas, kita bisa membuat tabel ilustrasi berikut:

Table 2: Konfigurasi Penjadwalan Nakes

hari	Min Nakes Required	Max Nakes Required	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
Senin	24	29	x			x	x	x	x
Selasa	22	27	x	x			x	x	x
Rabu	23	28	x	x	x			x	x
Kamis	11	16	x	x	x	x			x
Jumat	16	21	x	x	x	x	x		
Sabtu	20	25		x	x	x	x	x	
Minggu	12	17			x	x	x	x	x

Contoh *Integer Programming* (lanjutan)

Kolom $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ menandakan kelompok nakes yang perlu dipekerjaan pada hari-hari tertentu. Setiap nilai x_i tersebut merupakan **bilangan bulat positif** $x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$.

Contoh *Integer Programming* (lanjutan)

Dari ilustrasi di atas, kita bisa membuat model optimisasinya sebagai berikut:

Objective Function

$$\min \sum_{i=1}^{7} x_i$$

Contoh *Integer Programming* (lanjutan)

Constraints

- Hari Senin: $24 \leq \sum x_i \leq 29, i \in \{1, 4, 5, 6, 7\}$.
- Hari Selasa: $22 \leq \sum x_i \leq 27, i \in \{1, 2, 5, 6, 7\}$.
- Hari Rabu: $23 \leq \sum x_i \leq 28, i \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$.
- Hari Kamis: $11 \leq \sum x_i \leq 16, i \in \{1, 2, 3, 4, 7\}$.
- Hari Jumat: $16 \leq \sum x_i \leq 21, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Hari Sabtu: $20 \leq \sum x_i \leq 25, i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Hari Minggu: $12 \leq \sum x_i \leq 17, i \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Kita juga perlu perhatikan bahwa $x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.[9]

[9] https://ikanx101.com/blog/jadwal-optimal/

Subsection 3

Binary Programming

Binary Programming

Binary programming adalah bentuk metode optimisasi di mana variabel yang terlibat merupakan bilangan biner (0,1). Biasanya metode ini dipakai dalam masalah penjadwalan yang memerlukan prinsip *matching* antar kondisi yang ada.

Contoh *Binary Programming*

Jadwal Tatap Muka Terbatas Sekolah

Beberapa minggu ke belakang, kasus harian Covid semakin menurun. Pemerintah mulai melonggarkan aturan PPKM yang mengakibatkan sekolah-sekolah mulai menggelar pengajaran tatap muka terbatas (PTMT) untuk siswanya secara *offline*.

Suatu sekolah memiliki kelas berisi 20 orang siswa. Mereka hendak menggelar PTMT dengana aturan sebagai berikut:

1. PTMT digelar dari Senin hingga Jumat (5 hari).
2. Dalam sehari, siswa yang boleh hadir dibatasi 4-8 orang saja.
3. Dalam seminggu, diharapkan siswa bisa hadir 2-3 kali.
4. Siswa yang hadir di selang sehari baru bisa hadir kembali.

Contoh *Binary Programming* (lanjutan)

Dari uraian di atas, kita bisa membuat model optimisasinya sebagai berikut:

Saya definisikan $x_{i,j} \in (0,1)$ sebagai bilangan biner di mana $i \in \{1,2,..,20\}$ menandakan siswa dan $j \in \{1,2,..,5\}$ menandakan hari. Berlaku:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{siswa i tidak masuk di hari j} \\ 1, & \text{siswa i masuk di hari j} \end{cases}$$

Contoh *Binary Programming* (lanjutan)

Objective Function

Tujuan utama kita adalah memaksimalkan siswa yang hadir.

$$\max \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{20} x_{i,j}$$

Contoh *Binary Programming* (lanjutan)

Constraints

Dalam sehari, ada pembatasan jumlah siswa yang hadir $4 \leq \sum_i x_{i,j} \leq 8, j \in \{1, 2, .., 5\}$

Dalam seminggu, siswa hadir dalam frekuensi tertentu $2 \leq \sum_j x_{i,j} \leq 3, i \in \{1, 2, .., 20\}$

Ada jeda sehari agar siswa bisa masuk kembali $x_{i,j} + x_{i,j+1} \leq 1$

Jangan lupa bahwa $x_{i,j} \geq 0$.[10]

[10] https://ikanx101.com/blog/ptmt/

Contoh *Binary Programming* (lanjutan)

DEMO

Web apps untuk masalah penjadwalan sekolah tatap muka terbatas.

Subsection 4

Mixed Integer Linear Programming

Mixed Integer Linear Programming

Pada bagian sebelumnya, kita telah membahas masalah optimisasi dengan variabel berupa diskrit dan kontinu. Permasalahan *real* yang ada di kehidupan sehari-hari biasanya merupakan memiliki variabel yang *mixed* antara keduanya. Oleh karena itu, ada metode yang disebut dengan *mixed integer linear programming*. Pada masalah optimisasi tipe ini, *decision variables* yang terlibat bisa saja berupa *binary*, *integer*, dan *continuous* sekaligus.

Menyelesaikan *MILP*

MILP secara eksak bisa diselesaikan dengan metode *simplex* dengan dikombinasikan dengan teknik *branch and bound*. Penjelasan terkait ini akan dibahas pada bagian selanjutnya.

Contoh *MILP*

Pemilihan dan Penentuan Item Produksi Suatu pabrik makanan dan minuman berencana untuk membuat tiga produk baru yang bisa diproduksi di dua *plants* yang berbeda.

Table 3: Tabel Runtime Item Produk per Plant (harian - dalam jam)

Produk	Runtime Plant 1	Runtime Plant 2
Item 1	3	4
Item 2	4	6
Item 3	2	2

Contoh *MILP* (lanjutan)

Plant 1 memiliki maksimum *working hours* sebesar 30 jam perhari.

Plant 2 memiliki maksimum *working hours* sebesar 40 jam perhari.

Table 4: Tabel Profit dan Potensi Sales Item Produk

Produk	Profit per ton	Sales potential per ton
Item 1	5	7
Item 2	7	5
Item 3	3	9

Contoh *MILP* (lanjutan)

Masalah timbul saat mereka harus memilih **dua dari tiga** produk baru tersebut yang harus di produksi. Selain itu, mereka juga harus memilih **satu dari dua** *plants* yang memproduksi *items* tersebut.

Misalkan saya definisikan:

- $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ sebagai `berapa ton` yang harus diproduksi dari item i.
- $y_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3$ sebagai *binary*.
  - Jika bernilai 0, maka produk i tidak dipilih.
  - Jika bernilai 1, maka produk i dipilih.
- $z \in [0, 1]$ sebagai *binary*.
  - Jika bernilai 0, maka *plant* pertama dipilih.
  - Jika bernilai 1, maka *plant* kedua dipilih.

Contoh *MILP* (lanjutan)

Saya akan mendefinisikan suatu variabel *dummy* $M = 99999$ berisi suatu nilai yang besar. Kelak variabel ini akan berguna untuk *reinforce model* (metode pemberian *penalty*) agar bisa memilih *items* dan *plants* secara bersamaan[11].

Objective function dari masalah ini adalah memaksimalkan *profit*.

$$\max \sum_{i=1}^{3} x_i \times \text{profit}_i$$

[11] https://ikanx101.com/blog/produk-baru/

Contoh *MILP* (lanjutan)

Constraints dari masalah ini adalah:

Tonase produksi tidak boleh melebihi angka *sales potential* per items
$x_i \leq \text{sales potential}_i, i = 1, 2, 3.$

Kita akan memilih dua produk sekaligus menghitung tonase. Jika produk tersebut **dipilih**, maka akan ada angka tonase produksinya. Sebaliknya, jika produk tersebut **tidak dipilih**, maka tidak ada angka tonase produksinya $x_i - y_i \times M \leq 0, i = 1, 2, 3$ dan $\sum_{i=1}^{3} y_i \leq 2$.

Kita akan memilih *plant* dari waktu produksinya.

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - M \times z \leq 30$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + M \times z \leq 40 + M$$

Section 4

ALGORITMA PENYELESAIAN OPTIMISASI

Subsection 1

Pendekatan Penyelesaian Optimisasi

Pendekatan Penyelesaian Optimisasi

Pada bagian ini kita akan membahas macam-macam algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi.

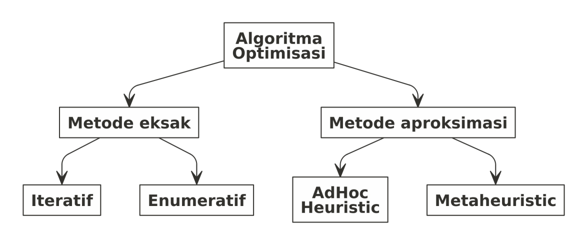


Figure 3: Algoritma Penyelesaian Optimisasi

Exact Method

Ciri khas dari *exact method* adalah metode ini menjamin penyelesaian yang optimal karena menggunakan pendekatan analitis (Rothlauf 2011). Salah satu contoh metode eksak adalah *Simplex Method*.

Approximate Method

Ciri khas dari *approximate method* adalah metode ini tidak menjamin penyelesaian yang optimal karena bersifat *aproksimasi* atau pendekatan atau hampiran(Geovanni and Summa 2018). Oleh karena itu kita perlu melakukan definisi di awal **seberapa dekat** nilai **hampiran** tersebut bisa kita terima.

Approximate Method (lanjutan)

Metode ini bisa dibagi menjadi dua berdasarkan keterkaitannya dengan suatu masalah, yakni:

1. *Heuristic*, metode ini bersifat *problem dependent*. Artinya metode tersebut hanya bisa dipakai untuk jenis permasalahan tertentu.
   - Contoh: metode *nearest neighborhood* hanya bisa dipakai untuk menyelesaikan masalah dalam lingkup *travelling salesperson problem* (**TSP**).
2. *Meta heuristic*, metode ini bersifat *problem independent*. Artinya metode tersebut tidak tergantung dari jenis permasalahan tertentu. Contoh:
   - *Genetic algorithm*.
   - *Simulated annealing*.
   - *Spiral optimization* untuk menyelesaikan masalah *mixed integer non linear programming* (Kania and Sidarto 2016).
   - *Artifical bee colony algorithm*.

Namun demikian kedua metode ini bisa saling melengkapi dalam prakteknya.

Subsection 2

Metode *Simplex*

Pendahuluan Metode *Simplex*

Metode *simplex* adalah salah satu metode yang paling umum digunakan dalam menyelesaikan permasalahan *linear programming*. Metode ini dikembangkan oleh seorang profesor matematika bernama George Dantzig[12] pada 1947 pasca perang dunia II. Sedangkan nama *simplex* diusulkan oleh Theodore Motzkin[13].

Metode *simplex* menggunakan prosedur aljabar(Hillier and Lieberman 2001). Namun *underlying concept* dari metode ini adalah *geometric*.

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/George_Dantzig
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Theodore_Motzkin

Pendekatan Metode *Simplex*

Metode *Simplex* bisa diselesaikan dengan beberapa pendekatan, yakni:

1. Geometris (untuk dua variabel),
2. Aljabar, dan
3. *Tableau*.

Contoh Masalah Optimisasi

Cari $x_1, x2$ yang max $(Z = 3x_1 + 5x_2)$ dengan *constraints*:

$$x1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$\text{serta } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Subsection 3

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS

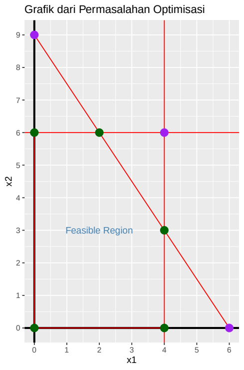


Figure 4: Grafik Permasalahan Optimisasi

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Titik-titik hijau merupakan **beberapa titik** solusi yang *feasible* karena berada pada area penerimaan seluruh *constraints* yang ada. Titik hijau ini menjadi spesial karena berada pada perpotongan 2 garis *constraints*. Selanjutnya titik hijau ini akan didefinisikan sebagai **CPF** (*corner point feasible*).

> *For a linear programming problem with n decision variables, each of its corner-point solutions lies at the intersection of n constraint boundaries. (Hillier and Lieberman 2001)*

Sedangkan titik ungu merupakan titik solusi non *feasible* karena solusi yang ada tidak berlaku untuk semua *constraints*.

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Table 5: Titik yang termasuk ke dalam CPF

Titik.ke	CPF
1	(0, 0)
2	(0, 6)
3	(2, 6)
4	(4, 3)
5	(4, 0)

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Untuk setiap permasalahan *linear programming* yang memiliki *feasible solutions* dan *feasible region* yang terbatas, berlaku:

- **Property 1**:
  - (a) If there is exactly one optimal solution, then it must be a **CPF solution**.
  - (b) If there are multiple optimal solutions (and a bounded feasible region), then at least two must be adjacent CPF solutions.
- **Property 2**: There are only a **finite number** of CPF solutions.
- **Property 3**: If a CPF solution has no adjacent CPF solutions that are better (as measured by Z), then there are no better CPF solutions anywhere. Therefore, **such a CPF solution is guaranteed to be an optimal solution** (by Property 1), assuming only that the problem possesses at least one optimal solution (guaranteed if the problem possesses feasible solutions and a bounded feasible region).

Properties di atas menjamin keberadaan solusi optimal pada CPF dari suatu masalah optimisasi *linear programming*.

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Untuk mulai melakukan metode simplex kita perhatikan kembali grafik di atas. Kita bisa temukan beberapa pasang **CPF** berbagi *constraint* yang sama satu sama lain.

Sebagai contoh:

1. CPF_1 dan CPF_2 berbagi *constraint* yang sama, yakni saat $x_1 \geq 0$.
2. CPF_2 dan CPF_3 berbagi *constraint* yang sama, yakni saat $x_2 \leq 6$.

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Definisi umum:

> *For any linear programming problem with n decision variables, two CPF solutions are **adjacent** to each other if they share $n-1$ constraint boundaries. The two adjacent CPF solutions are connected by a line segment that lies on these same shared constraint boundaries. Such a line segment is referred to as an **edge** of the feasible region.*

Feasible region di atas memiliki 5 *edges* di mana setiap 2 *edges* memotong / memunculkan **CPF**. Setiap **CPF** memiliki 2 **CPF** lainnya yang *adjacent*.

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Table 6: Adjacent CPF

Titik.ke	CPF	Adjacent.CPF
1	(0, 0)	(0, 6) dan (4, 0)
2	(0, 6)	(2, 6) dan (0, 0)
3	(2, 6)	(4, 3) dan (0, 6)
4	(4, 3)	(4, 0) dan (2, 6)
5	(4, 0)	(0, 0) dan (4, 3)

CPF pada kolom pertama *adjacent* terhadap dua **CPF** di kolom setelahnya tapi kedua **CPF** tersebut tidak saling *adjacent* satu sama lain.

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Optimality test: *Consider any linear programming problem that possesses at least one optimal solution. If a CPF solution has no adjacent **CPF** solutions that are better (as measured by Z), then it must be an optimal solution.*

Pendekatan Metode *Simplex*: GEOMETRIS (lanjutan)

Berdasarkan *optimality test* tersebut, kita bisa mencari solusi optimal dari **CPF** dengan cara mengambil **initial CPF** untuk dites secara rekursif.

- **STEP 1** Pilih *initial* **CPF**, misal $(0,0)$. Kita akan hitung nilai $Z(0,0) = 0$. Bandingkan dengan *adjacent* **CPF**-nya, yakni $Z(0,6) = 30$ dan $Z(4,0) = 12$.
- **STEP 2** Oleh karena $Z(0,6)$ memiliki nilai tertinggi, maka kita akan pilih titik ini di iterasi pertama. Kita akan bandingkan terhadap *adjacent* **CPF**-nya, yakni: $Z(2,6) = 36$. Perhatikan bahwa *adjacent* **CPF** $(0,0)$ sudah kita evaluasi pada langkah sebelumnya.
- **STEP 3** Oleh karena $Z(2,6)$ memiliki nilai tertinggi, maka kita akan pilih titik ini di iterasi kedua. Kita akan bandingkan terhadap *adjacent* **CPF**-nya, yakni: $Z(4,3) = 27$. Kita dapatkan bahwa titik $(2,6)$ menghasilkan Z tertinggi.

Kesimpulan: $(2,6)$ merupakan titik yang bisa memaksimumkan Z.

Flowchart Metode Simplex dari Contoh Masalah

Secara garis besar, *flowchart* dari metode simplex untuk masalah di atas adalah:

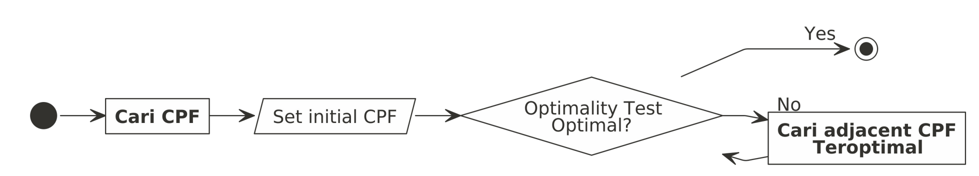


Figure 5: Algoritma Metode Simplex

Subsection 4

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR

Ide dasarnya adalah dengan mengubah pertaksamaan yang ada di *constraints* menjadi sebuah persamaan dengan menambahkan beberapa variabel *dummy*. Persamaan-persamaan tersebut akan kita jadikan SPL dan dicari solusinya dengan kondisi **semua kombinasi di mana** $n - m$ **variabel dibuat sama dengan nol** (m banyaknya persamaan dan n banyaknya variabel).

- $n - m$ variabel yang dibuat **nol** disebut dengan *non basic variables*,
- Sedangkan variabel m sisanya disebut dengan *basic variables*. Solusi dari SPL ini disebut dengan *basic solution* (Taha 2007).

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan)

Masalah Optimisasi Cari x_1, x_2 yang max $(Z = 3x_1 + 5x_2)$ dengan *constraints*:

$$x1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$\text{serta } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Pada *constraints* yang mengandung pertaksamaan $\leq$, *right hand side* menunjukkan batas dari *resources* sementara *left hand side* menunjukkan *usage* dari *resources*. Selisih antara *rhs* dan *lhs* menunjukkan **sisa** *resources* yang tidak terpakai. Kita perlu mengubah pertaksamaan yang ada menjadi bentuk persamaan dengan cara menambahkan u, v, w sebagai ***non negative slack variables*** (Taha 2007).

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan)

Oleh karena itu kita tuliskan *constraints* menjadi sebagai berikut:

$$\begin{gathered} x1 + u = 4 \\ 2x_2 + v = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + w = 18 \\ \text{dengan } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{gathered}$$

Perhatikan bahwa $m = 3$ dan $n = 5$ sehingga $n - m = 2$. Maka kita akan buat semua kombinasi *non basic variables* (berisi 2 variabel).

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan)

```
##  [1] "(x1,x2)" "(x1,u)"  "(x1,v)"  "(x1,w)"  "(x2,u)"  "(x2,v)"  "(x2,w)"
##  [8] "(u,v)"   "(u,w)"   "(v,w)"
```

Kemudian menyelesaikan *SPL* yang ada pada kondisi *non basic variables* tersebut **nol**. Dari masing-masing solusi yang ada, kita akan lihat apakah *feasible* atau tidak? Serta dievaluasi nilai z-nya.

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) I

Berikut adalah algoritma dan tabel hasilnya:

```
# set SPL dari constraints
A = data.frame(x1 = c(1,0,3),
               x2 = c(0,2,2),
               u = c(1,0,0),
               v = c(0,1,0),
               w = c(0,0,1))
# rhs
c = c(4,12,18)
# obj function
obj_f = function(data){
  # filter var
```

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) II

```
  x1 = sol_val %>% filter(var %in% c("x1"))
  x2 = sol_val %>% filter(var %in% c("x2"))
  # ambil val
  if(nrow(x1) != 1){x1 = 0}else{x1 = x1$value}
  if(nrow(x2) != 1){x2 = 0}else{x2 = x2$value}
  return(3*x1 + 5*x2)
  }

# set template hasil
hasil = data.frame(non_basic_var = paste0("(",non_basic$v1,",",non_basic$v2,")
                   basic_var = NA,
                   solusi = NA,
                   z = NA)
```

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) III

```
# iterasi
for (i in 1:nrow(non_basic)) {
  # siap print basic var
  basic_var = var_[!grepl(non_basic$v1[i],var_)]
  basic_var = basic_var[!grepl(non_basic$v2[i],basic_var)]
  basic_var = paste(basic_var,collapse = ",")
  hasil$basic_var[i] = paste0("(",basic_var,")")

  # hitung solusi SPL
  B = A %>% select(-contains(non_basic$v1[i])) %>% select(-contains(non_basic
  if(det(B) == 0){sol_print = NA}
  else{
    sol = solve(B) %*% c
    sol_print = paste(row.names(sol),sol,sep = " = ")
```

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) IV

```
  sol_print = paste(sol_print,collapse = "; ")
}
hasil$solusi[i] = sol_print

# evaluasi obj function
if(det(B) == 0){z_hit = NA}
else{
  sol_val = data.frame(var = row.names(sol),value = sol)
  z_hit = obj_f(obj_f)
}
hasil$z[i] = z_hit
}
```

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) V

Table 7: Hasil Perhitungan Simplex dengan Metode Aljabar

Non Basic Var	Basic Var	solusi	z	feasible
(x1,x2)	(u,v,w)	u = 4; v = 12; w = 18	0	Yes
(x1,u)	(x2,v,w)	NA	NA	No
(x1,v)	(x2,u,w)	x2 = 6; u = 4; w = 6	30	Yes
(x1,w)	(x2,u,v)	x2 = 9; u = 4; v = -6	45	No
(x2,u)	(x1,v,w)	x1 = 4; v = 12; w = 6	12	Yes
(x2,v)	(x1,u,w)	NA	NA	No
(x2,w)	(x1,u,v)	x1 = 6; u = -2; v = 12	18	No
(u,v)	(x1,x2,w)	x1 = 4; x2 = 6; w = -6	42	No
(u,w)	(x1,x2,v)	x1 = 4; x2 = 3; v = 6	27	Yes
(v,w)	(x1,x2,u)	x1 = 2; x2 = 6; u = 2	36	Yes

Pendekatan Metode *Simplex*: ALJABAR (lanjutan) VI

Terlihat di atas bahwa $\max z = 36$ terletak pada saat $x_1 = 2, x_2 = 6.$ Sama persis dengan perhitungan dengan pendekatan geometris.

Subsection 5

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan)

Ide dasarnya adalah melakukan **operasi baris elementer** dari persamaan *constraints* dan *objective function* yang telah diberi ***non negative slack variables***.

Contoh Masalah Cari x, y sehingga $\max\left(P = 5x + 4y\right)$ dengan *constraints*:

$$3x + 5y \leq 78$$
$$4x + y \leq 36$$
$$\text{serta } x \geq 0, y \geq 0$$

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan)

Kita perlu mengubah pertaksamaan yang ada menjadi bentuk persamaan dengan cara menambahkan u, w sebagai ***non negative slack variables*** (Taha 2007). Fungsi objectif P juga harus diubah (dipindah sisi namun P tetap positif).

$$
\begin{gathered}
3x + 5y + u = 78, \text{ dengan } u \geq 0 \\
4x + y + w = 36, \text{ dengan } w \geq 0 \\
-5x - 4y + P = 0
\end{gathered}
$$

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan)

Setelah itu kita buat matriks (dalam hal ini saya akan buatkan tabelnya) sebagai berikut:

Table 8: Initial Condition Bentuk Matriks Simplex

x	y	u	w	P	b
3	5	1	0	0	78
4	1	0	1	0	36
-5	-4	0	0	1	0

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) I

STEP 1 Kita akan pilih kolom yang memiliki nilai **negatif terbesar** pada baris terakhir, yakni kolom x. Selanjutnya kita akan pilih baris mana yang akan menjadi pivot dengan cara menghitung rasio $\frac{b}{x}$ untuk semua baris dan memilih baris dengan **rasio terendah**.

Table 9: Pemilihan Baris Pivot

x	y	u	w	P	b	rasio
3	5	1	0	0	78	26
4	1	0	1	0	36	9
-5	-4	0	0	1	0	0

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) II

STEP 2 Kita akan buat baris 2 kolom x menjadi bernilai 1, caranya dengan melakukan OBE seperti: $Row_2 = \frac{Row_2}{4}$.

Table 10: OBE Iterasi 1

x	y	u	w	P	b
3	5.00	1	0.00	0	78
1	0.25	0	0.25	0	9
-5	-4.00	0	0.00	1	0

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) III

STEP 3 Sekarang tujuan kita selanjutnya adalah membuat kolom x baris 1 dan 3 menjadi bernilai **nol**. Caranya adalah:

$$Row_1 = Row_1 - 3Row_2$$

$$Row_3 = Row_3 + 5Row_2$$

Table 11: OBE Iterasi 2

x	y	u	w	P	b
0	4.25	1	-0.75	0	51
1	0.25	0	0.25	0	9

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) IV

0	-2.75	0	1.25	1	45

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) V

STEP 4 Kita akan lakukan hal yang sama pada *step 1*, yakni memilih kolom dengan negatif terbesar. Yakni kolom y. Lalu kita akan hitung rasio setiap baris dan akan memilih rasio paling rendah.

Table 12: Pemilihan Baris Pivot Kembali

x	y	u	w	P	b	rasio
0	4.25	1	-0.75	0	51	12.00000
1	0.25	0	0.25	0	9	36.00000
0	-2.75	0	1.25	1	45	-16.36364

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) VI

STEP 5 Maka kita akan pilih baris 1 menjadi pivot. Kolom y pada baris 1 harus bernilai 1 sehingga kita harus membuat $Row_1 = \frac{4Row_1}{17}$.

Table 13: OBE Iterasi 3

x	y	u	w	P	b
0	1.00	0.2352941	-0.1764706	0	12
1	0.25	0.0000000	0.2500000	0	9
0	-2.75	0.0000000	1.2500000	1	45

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) VII

STEP 6 Kita akan buat klom y di baris 2 dan 3 menjadi **nol** dengan cara:

$$Row_2 = Row_2 - \frac{Row_1}{4}$$

$$Row_3 = Row_3 + \frac{11Row_1}{4}$$

Table 14: OBE Iterasi 4

x	y	u	w	P	b
0	1	0.2352941	-0.1764706	0	12
1	0	-0.0588235	0.2941176	0	6

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) VIII

0	0	0.6470588	0.7647059	1	78

Pendekatan Metode *Simplex*: TABLEAU (lanjutan) IX

Dari tabel terakhir di atas, kita bisa menuliskan $x = 6, y = 12$ dan nilai $\max(P) = 78$. Bagaimana dengan nilau u dan w? Karena tidak ada nlai 1 ditemukan pada kolom variabel tersebut, kita bisa simpulkan bahwa $u = 0, w = 0$.

Subsection 6

Metode *Branch and Bound* untuk *MILP*

Metode *Branch and Bound* untuk *MILP*

Metode *simplex* adalah metode eksak yang digunakan untuk menyelesaikan *linear programming*. Solusi yang dihasilkan merupakan bilangan *real* atau kontinu. Pada *MILP*, variabel yang terlibat sangat beragam (*integer*, *binary*, dan kontinu). Membulatkan bilangan solusi *linear programming* untuk mendapatkan solusi *integer* atau *binary* dari suatu masalah *MILP* tidak menjamin keoptimalan tercapai.

Oleh karena itu, kita akan melakukan pendekatan tertentu dari *linear programming* agar hasilnya bisa digunakan di *MILP*.

Relaxation of Discrete Optimization Models

Salah satu pendekatan yang bisa dilakukan adalah melakukan *constraint relaxation* (Chachuat 2011).

Definisi Model R disebut dengan *constraint relaxation* dari model P jika:

- Setiap *feasible solution* dari P juga *feasible* di R.
- P dan R memiliki fungsi objektif yang sama.

Contoh *Relaxation*

Berikut adalah *original MILP*:

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Contoh *Relaxation* (lanjutan)

Relaxation I : *relax constraints RHS*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 50$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Contoh *Relaxation* (lanjutan)

Relaxation II : *Drop constraint*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Contoh *Relaxation* (lanjutan)

Relaxation III : *remove integrality*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, 0 \leq y_1, y_2 \leq 1$$

Linear Programming Relaxation

Definisi *LP relaxation* dari *MILP* dibentuk dengan memperlakukan variabel diskrit sebagai variabel kontinu sambil mempertahankan semua *constraints* yang ada (Chachuat 2011).

$$y \in \{0, 1\} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

Linear Programming Relaxation (lanjutan)

Berikut adalah sifat dari *LP relaxation*:

1. Jika *LP relaxation infeasible*, maka model *MILP* asalnya juga.
2. Hasil optimal *LP relaxation* dari *MILP* yang bertujuan untuk maksimisasi berada pada *upper bound*.
3. Hasil optimal *LP relaxation* dari *MILP* yang bertujuan untuk minimisasi berada pada *lower bound*.
4. Jika suatu solusi optimal *LP relaxation* ternyata *feasible*, maka solusi tersebut optimal di model *MILP* asalnya.

Algoritma *Branch and Bound*

Algoritma *branch and bounds* mengkombinasikan beberapa strategi *relaxation* secara iteratif untuk memilih kemungkinan solusi paling optimal.

Ilustrasi *Branch and Bound*

Perhatikan contoh berikut:

$$\max z = 4x_1 - x_2$$

$$\text{s.t. } 7x_1 - 2x_2 \leq 14$$

$$x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Ilustrasi *Branch and Bound* (lanjutan) I

Misalkan S adalah himpunan solusi *feasible* dari *LP relaxation* (dibuat suatu *LP relaxation* dengan x berupa variabel kontinu). Menggunakan metode simplex kita bisa dapatkan $x_1 = 2.857143, x_2 = 3, z = 8.428571$.

Kita misalkan $z* = -\infty$, karena x_1 bukan integer, maka kita akan uat *branch out* dari variabel ini.

$$S_1 = S \cap \{x : x_1 \leq 2\}$$

$$S_2 = S \cap \{x : x_1 \geq 3\}$$

Ilustrasi *Branch and Bound* (lanjutan) II

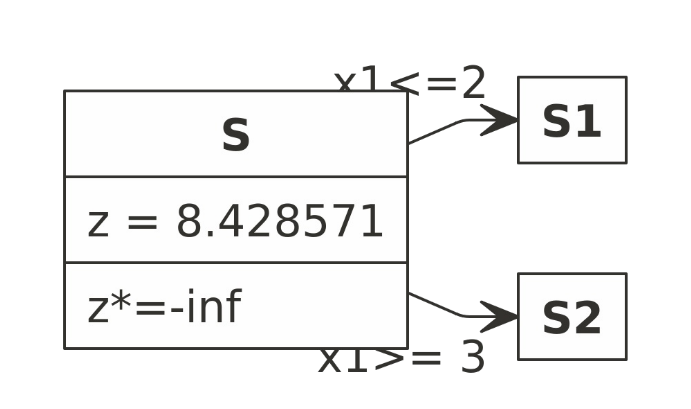


Figure 6: Branch Out Tahap I

Ilustrasi *Branch and Bound* (lanjutan) III

Kita akan evaluasi kembali dengan *LP relaxation* yang baru.

- Pada S_1 kita dapatkan dengan metode *simplex* solusinya adalah $x_1 = 2, x_2 = 0.5, z = 0.75$. Oleh karena itu, kita akan *branch out* kembali dengan pemecahan sebagai berikut:

$$S_{11} = S \cap \{x : x_2 = 0\}$$

$$S_{12} = S \cap \{x : x_2 \geq 1\}$$

- Pada S_2 kita dapatkan bahwa kondisi $x_1 \geq 3$ membuat model menjadi *infeasible*. Kita akan hentikan *branch out* dari S_2.

Ilustrasi *Branch and Bound* (lanjutan) IV

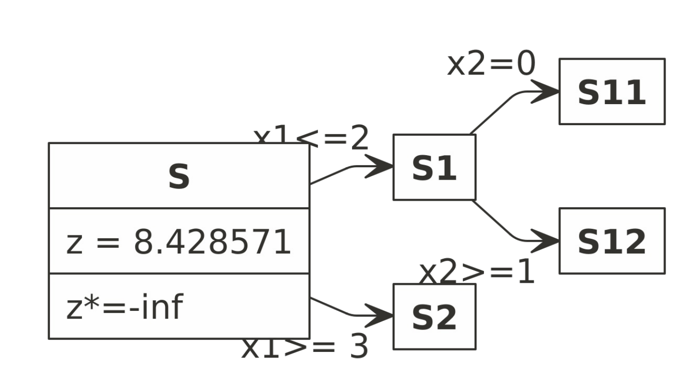


Figure 7: Branch Out Tahap II

Ilustrasi *Branch and Bound* (lanjutan) V

Kita lakukan kembali *LP relaxation* pada S_{11} dan S_{12} sebagai berikut:

- Pada S_{12}, metode simplex menghasilkan solusi $x_1 = 2, x_2 = 1, z = 7$. Kita akan *update* nilai $z* = 7$.
- Pada S_{11}, metode simplex menghasilkan solusi $x_1 = 1.5, x_2 = 0, z = 6$. Karena $z < z*$, maka tidak ada lagi *branch out*.

Solusi optimal didapatkan pada S_{12}.

Section 5

OPTIMISASI DI R

Subsection 1

R *Libraries* untuk Optimisasi

R *Libraries* untuk Optimisasi

Untuk menyelesaikan masalah optimisasi menggunakan **R**, ada beberapa *packages* yang bisa digunakan. Saya akan bahas beberapa *packages* yang biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi di **R**, yakni:

1. `boot` *packages* (Canty and Ripley 2021).
2. `ROI` *packages* (Theußl, Schwendinger, and Hornik 2020).
3. `ompr` *packages* (Schumacher 2020).

R *Library* untuk Metode *Simplex*

Pada bagian sebelumnya, kita telah membahas bagaimana cara melakukan metode *simplex* dengan operasi baris elementer.

Apakah proses operasi tersebut bisa diformalkan dalam bentuk algoritma atau ***R*** *codes?*

Salah satu dari sekian banyak *packages* yang memiliki *function* metode *simplex* yang siap pakai adalah `library(boot)` (Canty and Ripley 2021). Pada bagian ini, kita akan membahas salah satu *function* pada *library* tersebut.

Fungsi `simplex()` dari `library(boot)` digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi linear ax dengan *constraints* $A_1x \leq b_1$, $A_2x \leq b_2$, $A_3x \leq b_3$, dan $x \geq 0$. Secara *default*, *function* ini akan mengukur *minimize*. Namun kita bisa mengubahnya menjadi *maximize*.

Penggunaan `simplex()`

Penggunaannya adalah sebagai berikut:

```
simplex(a, A1 = NULL, b1 = NULL, A2 = NULL, b2 = NULL, A3 = NULL,
        b3 = NULL, maxi = FALSE, n.iter = n + 2 * m, eps = 1e-10)
```

Penggunaan `simplex()` (lanjutan)

Dimana:

- `a` = *vector* yang merupakan koefisien dari *objective function*.
- `A1` = merupakan matriks berisi koefisien dari constraints bertipa $\leq$.
- `b1` = *vector* pasangan dari matriks `A1`. Harus berisi *non-negative*.
- `A2` = merupakan matriks berisi koefisien dari constraints bertipa $\geq$.
- `b2` = *vector* pasangan dari matriks `A2`. Harus berisi *non-negative*. Perhatikan bahwa *constraints* ≥ 0 secara *default* sudah masuk.
- `A3` = merupakan matriks berisi koefisien dari constraints bertipa $=$.
- `b3` = *vector* pasangan dari matriks `A3`. Harus berisi *non-negative*. Perhatikan bahwa *constraints* ≥ 0 secara *default* sudah masuk.
- `maxi` = *logical*, secara *default* akan mencari *minimize*.

Penggunaan `simplex()` (lanjutan)

Penulis *packages* ini memberikan suatu catatan khusus, yakni:

> *The method employed here is suitable only for relatively small systems.*

ROI *Packages* di R

ROI merupakan singkatan dari **R Optimization Infrastructure** merupakan salah satu *packages* yang memberikan infrastruktur untuk menyelesaikan *linear programming*, *quadratic programming*, *conic*, dan *general non linear programming*.

ROI dikembangkan oleh **WU Vienna University of Economics and Business**[14], yakni:

- Kurt Hornik,
- David Meyer,
- Florian Schwendinger,
- Stefan Theussl,
- Diethelm Wuertz.

[14] https://epub.wu.ac.at/5858/

`ROI` *Packages* di R (lanjutan)

`ROI` bekerja dengan memanfaatkan berbagai *solver* (disebut dengan ***plugins***) yang dikembangkan oleh pihak-pihak lain. Dari masalah yang ada, kita **bisa melihat dan menentukan** *solver* apa yang bisa kita pakai untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

`ROI` *Modelling*

Framework untuk menuliskan model optimisasi menggunakan `ROI` adalah sebagai berikut:

Objective Function dimasukkan ke dalam *script* dengan format tergantung dari masalah yang dihadapi:

1. Jika berupa *linear programming*, *objective function* akan berupa `vector` numerik.
2. Jika berupa *quadratic programming*, *objective function* akan berupa `matriks`.

`ROI` *Modelling* (lanjutan)

Constraints dalam `ROI` dimasukkan dalam bentuk pisahan berikut:

$$(\textit{parameter}) + (\textit{direction}) + (\textit{rhs})$$

Bounds atau batas *decision variables* termasuk tipenya (*integer* dan *kontinu*).

`ompr` *Packages* di R

Ada satu *packages* lain di **R** yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi, yakni bernama `ompr`. *Packages* `ompr` dibuat oleh **Dirk Schumacher** pada 2018[15].

Salah satu keuntungan dari *library* ini adalah pengunaan operator *pipe* %>% pada perumusan algoritmanya. Sehingga bagi *user* yang biasa menggunakan prinsip `tidyverse` akan merasa sangat terbantu.

[15] https://www.r-orms.org/

`ompr` *Modelling* I

Framework untuk menuliskan model optimisasi menggunakan `ompr` adalah sebagai berikut:

```
# mulai membangun model
MIPModel() %>%

  # menambah variabel
  add_variable() %>%

  # set objective
  set_objective() %>%

  # menambah constraints
  add_constraint()
```

ompr *Modelling* II

Decision Variable harus didefinisikan sejak awal. Ada berapa dan tipenya seperti apa. Kita bisa menggunakan *indexed variables* untuk menghemat notasi. Berikut adalah contohnya:

```
MIPModel() %>%

  # menambah variabel integer
  add_variable(x, type = "integer") %>%

  # menambah variabel kontinu
  add_variable(y, type = "continuous") %>%

  # menambah variabel binary integer
  add_variable(z, type = "binary") %>%
```

`ompr` *Modelling* III

```
# menambah variabel dengan lower bound
add_variable(x, lb = 10) %>%

# menambah variabel dengan upper dan lower bounds
add_variable(y, lb = 5, ub = 10) %>%

# menambah 10 variabel berindeks
add_variable(p[i], i = 1:10)
```

Objective Function dan *Constraints* dalam `ompr` bisa dituliskan sebagai fungsi matematika biasa. Bahkan kita bisa menuliskan *summation* ke dalam algoritmanya. Berikut adalah contohnya:

Misal ada 3 variabel x_1, x_2, x_3, dengan *objective function* $\sum_i x_i$ dengan *constraint* $\sum_i x_i \leq 7$.

ompr *Modelling* IV

```
MIPModel() %>%
  add_variable(x[i], i = 1:3) %>%
  set_objective(sum_expr(x[i], i = 1:3)) %>%
  add_constraint(sum_expr(x[i], i = 1:3) <= 7)
```

Section 6

KOMPLEKSITAS ALGORITMA

Subsection 1

Pendahuluan

Pendahuluan

Sebuah masalah bisa diselesaikan dengan berbagai macam algoritma. Sebuah algoritma tidak hanya diharuskan **benar** tapi juga **efisien**. Efisiensi suatu algoritma biasanya diukur dari:

1. Waktu eksekusi algoritma (*runtime*).
2. Kebutuhan *memory* komputasi (*memory allocation*).

Algoritma yang baik adalah algoritma yang meminimumkan kebutuhan waktu dan *memory* (Munir 2015). Kebutuhan waktu dan *memory* dari suatu algoritma bergantung pada ukuran *input* (n) yang menyatakan jumlah data yang diproses.

Definisi Besaran yang dipakai untuk mengukur waktu dan *memory* ini disebut **kompleksitas algoritma**.

Subsection 2

Macam-Macam Kompleksitas

Perhitungan Kompleksitas Waktu

Menghitung waktu *real* dari eksekusi algoritma tidak bisa dilakukan karena bisa jadi ada perbedaan dalam hal:

1. Spesifikasi perangkat keras yang digunakan.
2. Spesifikasi perangkat lunak yang digunakan.

Definisi Perhitungan kompleksitas waktu $T(n)$ diukur dari tahapan komputasi yang dibutuhkan untuk menjalankan algoritma sebagai fungsi dari *input* n.

Perhitungan Kompleksitas Waktu (lanjutan)

Sebagai contoh, suatu algoritma yang digunakan untuk menghitung rata-rata dari suatu data $\{1, 2, .., n\}$ sebagai berikut:

```
sum = 0
for i in 1 to n:
  sum = sum + i
avg = sum / n
```

Memiliki kompleksitas waktu $T(n) = n$. Dihitung dari operasi mendasar di dalamnya yakni `sum = sum + i` yang diulang sebanyak n kali.

Perhitungan Kompleksitas Waktu (lanjutan)

Kompleksitas waktu dibedakan menjadi tiga macam:

1. **Kebutuhan waktu maksimum** terjadi saat $T(n) = \max n$.
2. **Kebutuhan waktu minimum** terjadi saat $T(n) = \min n$.
3. **Kebutuhan waktu rata-rata** terjadi saat $T(n) = \text{avg } n$

Kompleksitas Waktu Asimptotik

Kompleksitas waktu asimptotik dinotasikan sebagai O (O-besar).

Definisi $T(n) = O(f(n))$ dibaca: $T(n)$ berorde paling besar $f(n)$ bila terdapat konstanta C dan n_0 sedemikian sehingga $T(n) \leq f(n)$ untuk $n \geq n_0$.

Kompleksitas bisa berupa konstan, logaritmik, linear, kuadratik, kubik, atau eksponensial[16].

[16] https://introprogramming.info/english-intro-csharp-book/read-online/chapter-19-data-structures-and-algorithm-complexity/

Subsection 3

Macam-macam Kompleksitas O

Macam-macam Kompleksitas O I

Konstan $O(k)$ dengan k suatu nilai tertentu yang tetap. Artinya algoritma ini membutuhkan k langkah dan tidak tergantung dari berapa banyak *input* n.

Linear $O(n)$ artinya algoritma ini akan berjalan sebanyak n langkah mengikuti *input*-nya.

Logaritmik $O(log(n))$ artinya algoritma ini membutuhkan $log(n)$ langkah.

Kuadratik $O(n^2)$ artinya algoritma ini membutuhkan n^2 langkah.

Kubik $O(n^3)$ artinya algoritma ini membutuhkan n^3 langkah.

Eksponensial $O(k^n)$ untuk suatu nilai k tertentu. Artinya algoritma ini membutuhkan k^n langkah.

Section 7

References

References I

Canty, Angelo, and B. D. Ripley. 2021. *Boot: Bootstrap r (s-Plus) Functions*.

Cavazzuti, Marco. 2013. *Deterministic Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31187-1_4.

Chachuat, Benoit. 2011. "MILP: Branch-and-Bound Search." http://macc.mcmaster.ca/maccfiles/chachuatnotes/07-MILP-I_handout.pdf.

Geovanni, Luigi De, and Marco Di Summa. 2018. "Methods and Models for Combinatorial Optimization: Heuristis for Combinatorial Optimization." https://www.math.unipd.it/~luigi/courses/metmodoc1819/m02.meta.en.partial01.pdf.

Hillier, Frederick S., and Gerald J. Lieberman. 2001. *Introduction to Operations Research*. 7th ed. New York, US: McGraw Hill. www.mhhe.com.

References II

Kania, Adhe, and Kuntjoro Adji Sidarto. 2016. "Solving Mixed Integer Nonlinear Programming Problems Using Spiral Dynamics Optimization Algorithm." http://dx.doi.org/10.1063/1.4942987.

Lin, Ming-Hua, Jung-Fa Tsai, and Chian-Son Yu. 2012. "A Review of Deterministic Optimization Methods in Engineering and Management." https://doi.org/10.1155/2012/756023.

Munir, Rinaldi. 2015. *Catatan Kuliah Matematika Diskrit: Kompleksitas Algoritma*. Institut Teknologi Bandung.

Parmono, Vincentius Rachmadi. 2007. *Pengenalan Riset Operasi*. 1st ed. Jakarta, Indonesia: Universitas Terbuka. https://www.pustaka.ut.ac.id/lib/adbi4530-riset-operasi/.

Rothlauf, Franz. 2011. *Design of Modern Heuristics: Principles and Application*. 1st ed. Berlin, Germany: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-72962-4#about.

References III

Schumacher, Dirk. 2020. "ompr: Model and Solve Mixed Integer Linear Programs."

Taha, Hamdy A. 2007. *Operations Research an Introduction*. 8th ed. New Jersey, US: Prentice Hall. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-72962-4#about.

Theußl, Stefan, Florian Schwendinger, and Kurt Hornik. 2020. "ROI: An Extensible R Optimization Infrastructure." *Journal of Statistical Software* 94 (15): 1–64. https://doi.org/10.18637/jss.v094.i15.