

# SPIRAL OPTIMIZATION ALGORITHM

Tugas Kuliah  
SK5001 Analisis Numerik Lanjut

Mohammad Rizka Fadhli  
NIM: 20921004

16 October 2021

## PENDAHULUAN

### Bahasa yang Digunakan

Saya membuat program *spiral optimization algorithm* menggunakan bahasa **R** yang bisa dieksekusi pada versi minimal 3.5.3.

### Spiral Optimization Algorithm

*Spiral Optimization Algorithm* adalah salah satu metode *meta heuristic* yang digunakan untuk mencari minimum global dari suatu sistem persamaan.

Algoritmanya mudah dipahami dan intuitif tanpa harus memiliki latar keilmuan tertentu. Proses kerjanya adalah dengan melakukan *random number generating* pada suatu selang dan melakukan rotasi sekaligus kontraksi dengan titik paling minimum pada setiap iterasi sebagai pusatnya.

Berikut adalah algoritmanya:

#### INPUT

```
m >= 2 # jumlah titik
theta # sudut rotasi (0 <= theta <= 2pi)
r      # kontraksi
k_max  # iterasi maksimum
```

#### PROCESS

```
1 generate m buah titik secara acak
  x_i

2 initial condition
  k = 0 # untuk keperluan iterasi

3 cari x_* yang memenuhi
  min(f(x_*))

4 lakukan rotasi dan kontraksi semua x_i
  x_* sebagai pusat rotasi
  k = k + 1

5 ulangi proses 3 dan 4
```

```
6 hentikan proses saat k = k_max
  output x_*
```

Berdasarkan algoritma di atas, salah satu proses yang penting adalah melakukan **rotasi** dan **konstraksi** terhadap semua titik yang telah di-*generate*.

Agar memudahkan, saya akan memberikan ilustrasi geometri beserta operasi matriks aljabar terkait kedua hal tersebut.

## Penjelasan Geometri

### Operasi Matriks Rotasi

Misalkan saya memiliki titik  $x \in \mathbb{R}^2$ . Untuk melakukan rotasi sebesar  $\theta$ , saya bisa menggunakan suatu matriks  $A_{2 \times 2}$  berisi fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan operasi matriks di atas, saya membuat **program** di **R** dengan beberapa modifikasi. Sebagai contoh, saya akan membuat program yang bertujuan untuk melakukan rotasi suatu titik  $x \in \mathbb{R}$  sebanyak  $n$  kali:

```
# mendefinisikan program
rotasi_kan = function(x0,rot){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
```

```

plot =
  ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
               data = final,
               color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

# enrich dengan garis panah
panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)

# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
    geom_segment(aes(x = x_start,
                     xend = x_end,
                     y = y_start,
                     yend = y_end),
                 data = panah,
                 arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

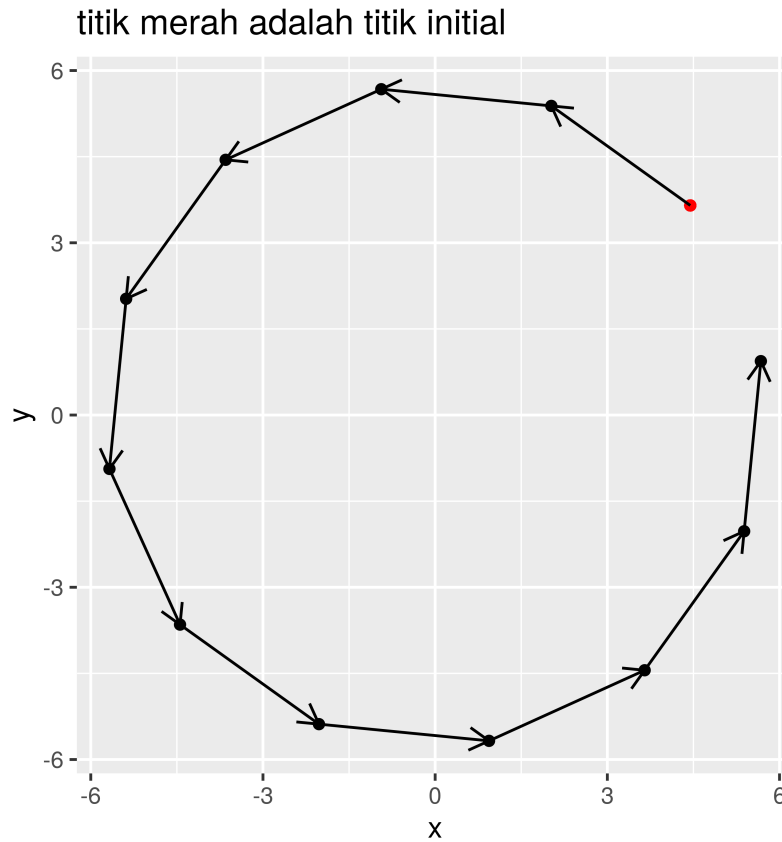
```

Berikut adalah uji coba dengan titik sembarang berikut ini:

```
# uji coba
rot = 12 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



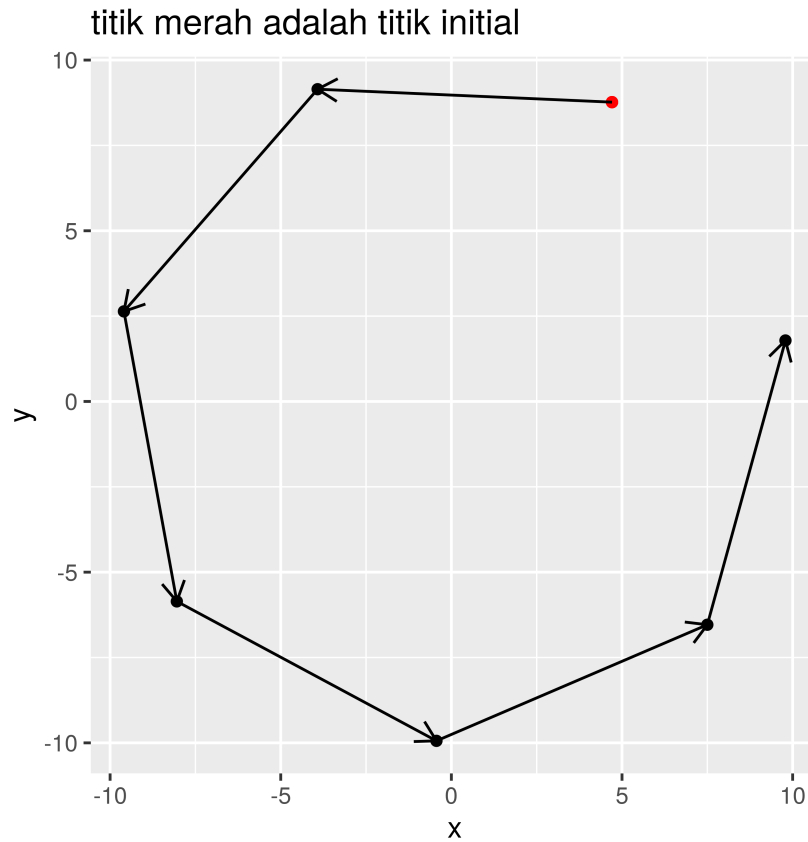
```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  4.4451  3.6501
## 2  2.0245  5.3837
## 3 -0.9385  5.6747
## 4 -3.6501  4.4451
## 5 -5.3837  2.0245
## 6 -5.6747 -0.9385
## 7 -4.4451 -3.6501
## 8 -2.0245 -5.3837
## 9  0.9385 -5.6747
## 10 3.6501 -4.4451
## 11 5.3837 -2.0245
## 12 5.6747  0.9385
```

Uji coba kembali dengan titik sembarang lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 7 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

## \$`Grafik rotasi`



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  4.707  8.767
## 2 -3.920  9.146
## 3 -9.595  2.638
## 4 -8.045 -5.857
## 5 -0.437 -9.941
## 6  7.500 -6.540
## 7  9.789  1.786
```

## Operasi Matriks Rotasi dan Konstraksi

Jika pada sebelumnya saya **hanya melakukan rotasi**, kali ini saya akan memodifikasi operasi matriks agar melakukan rotasi dan konstraksi secara bersamaan. Untuk melakukan hal tersebut, saya akan definisikan  $r, 0 < r < 1$  dan melakukan operasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu saya akan modifikasi program **R** sebelumnya menjadi sebagai berikut:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_kan = function(x0,rot,r){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan konstraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    xk = r * xk
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

  # enrich dengan garis panah
```

```

panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)
# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
  geom_segment(aes(x = x_start,
                    xend = x_end,
                    y = y_start,
                    yend = y_end),
               data = panah,
               arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

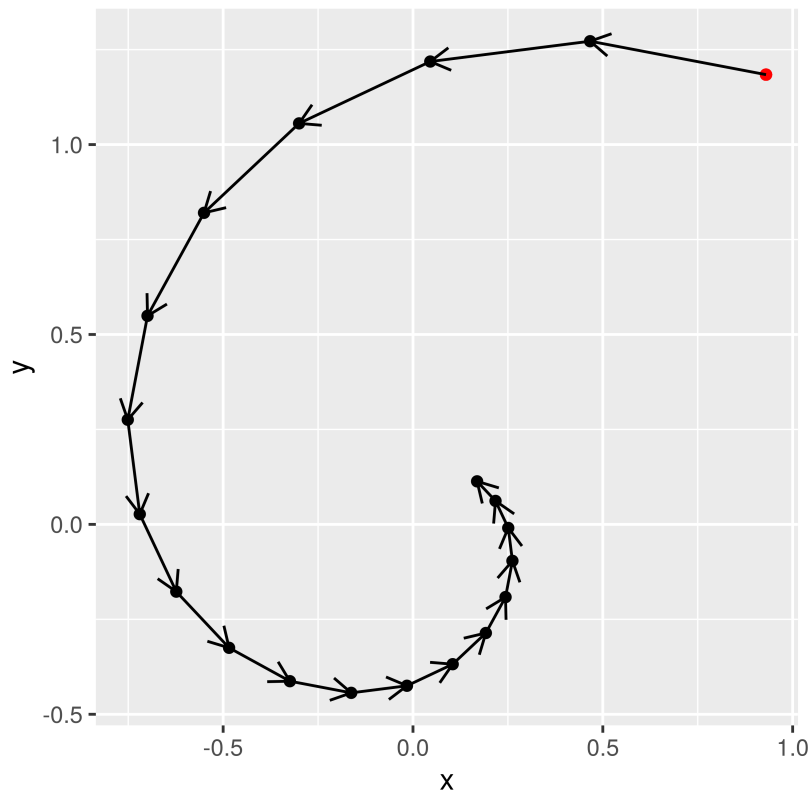
```

Saya akan uji coba untuk sembarang titik berikut ini:

```
# uji coba
rot = 20 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .9
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  0.92983  1.18411
## 2  0.46657  1.27214
## 3  0.04556  1.21865
## 4 -0.29993  1.05578
## 5 -0.55035  0.82028
## 6 -0.69921  0.54906
## 7 -0.75119  0.27551
## 8 -0.71960  0.02690
## 9 -0.62343 -0.17711
## 10 -0.48437 -0.32498
## 11 -0.32421 -0.41288
## 12 -0.16268 -0.44357
## 13 -0.01589 -0.42492
## 14  0.10458 -0.36813
```



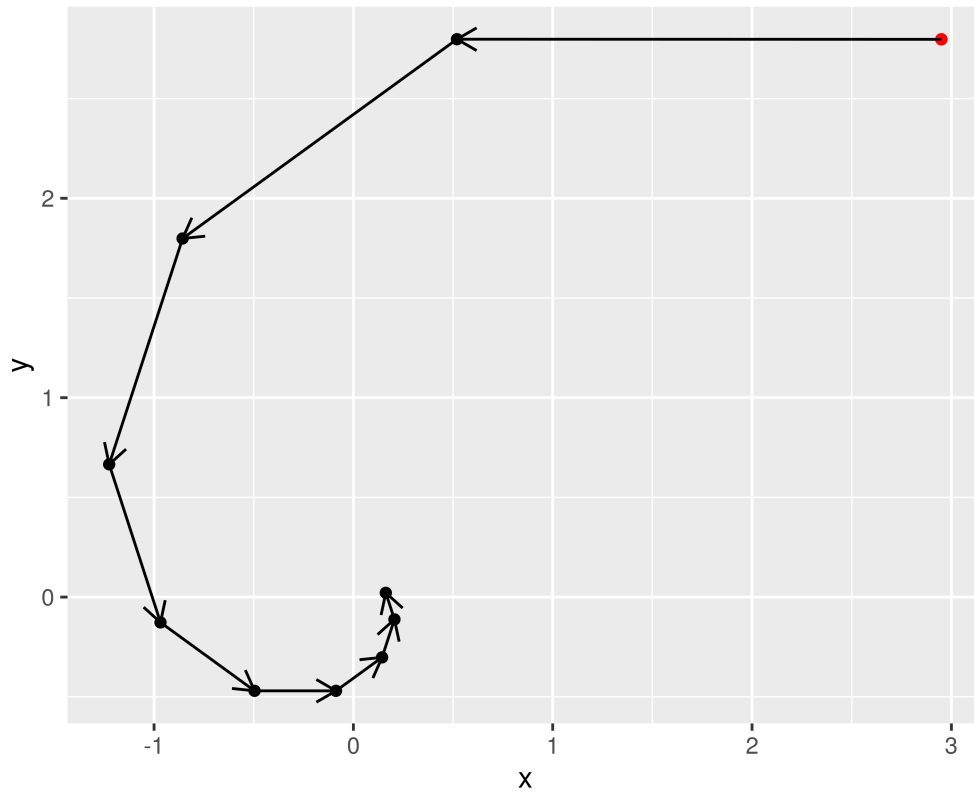
##	15	0.19190	-0.28601
##	16	0.24380	-0.19144
##	17	0.26192	-0.09606
##	18	0.25091	-0.00938
##	19	0.21738	0.06175
##	20	0.16889	0.11331

Saya akan uji coba kembali untuk sembarang titik lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .7
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  2.94986  2.79712
## 2  0.51967  2.79776
## 3 -0.85684  1.79822
## 4 -1.22512  0.66581
## 5 -0.96774 -0.12702
## 6 -0.49578 -0.47011
## 7 -0.08734 -0.47022
## 8  0.14401 -0.30223
## 9  0.20591 -0.11190
## 10 0.16265  0.02135
```

## Operasi Matriks Rotasi dan Kontraksi dengan Titik $x^*$ Sebagai Pusatnya

Salah satu prinsip utama dari *spiral optimization algorithm* adalah menjadikan titik  $x^*$  sebagai pusat rotasi di setiap iterasinya. Oleh karena itu kita akan modifikasi program bagian sebelumnya menjadi sebagai berikut:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_pusat_kan = function(x0,rot,r,x_bin){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan kontraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% (x0-x_bin) # diputar dengan x_bin sebagai pusat
    xk = x_bin + (r * xk)
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    geom_point(aes(x = x_bin[1],
                  y = x_bin[1]),
              color = "blue") +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial\ntitik biru adalah pusat rotasi")

  # enrich dengan garis panah
  panah = data.frame(
    x_start = final$x[1:(rot-1)],
    x_end = final$x[2:rot],
    y_start = final$y[1:(rot-1)],
```

```

    y_end = final$y[2:rot]
  )
  # menambahkan garis panah ke plot
  plot =
    plot +
      geom_segment(aes(x = x_start,
                        xend = x_end,
                        y = y_start,
                        yend = y_end),
                    data = panah,
                    arrow = arrow(length = unit(.3, "cm")))
  )

  # menyiapkan output
  list("Grafik rotasi" = plot,
       "Titik-titik rotasi" = final)
}

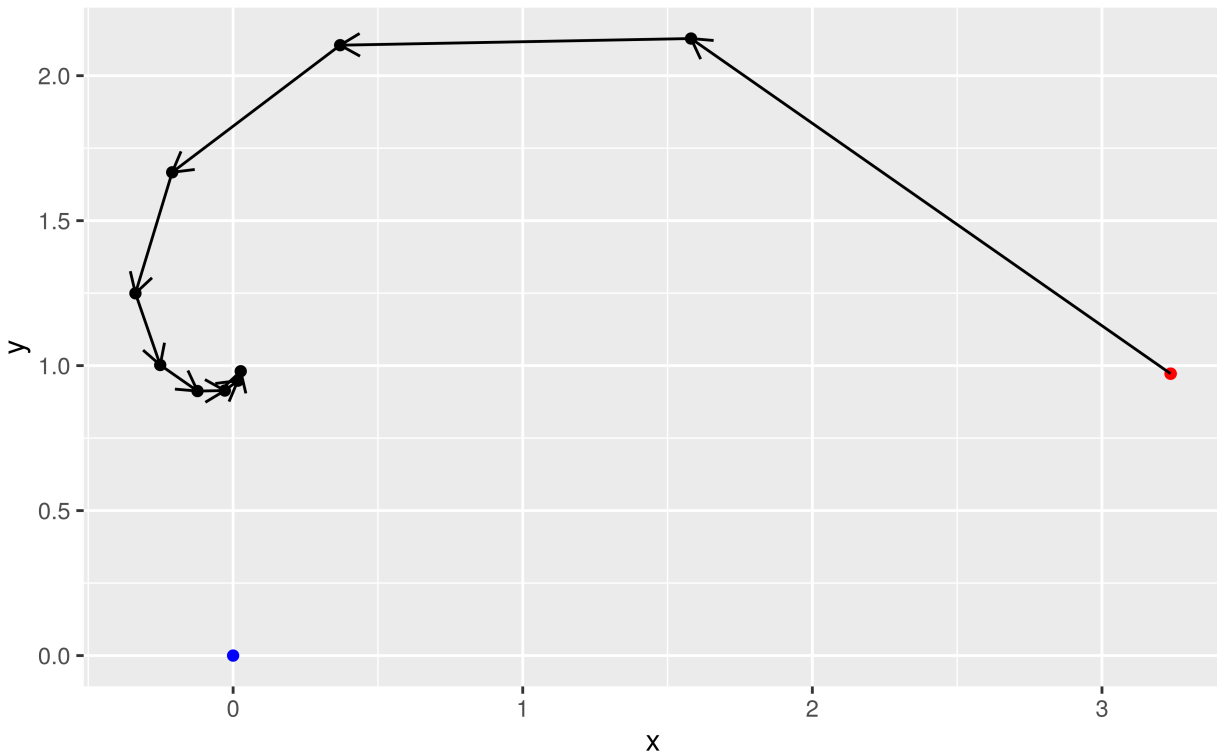
```

Saya akan coba dengan sembarang titik berikut:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
x_bintang = c(0,1) # contoh pusat rotasi
r = .6
rotasi_konstraksi_pusat_kan(x0,rot,r,x_bintang)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial  
titik biru adalah pusat rotasi



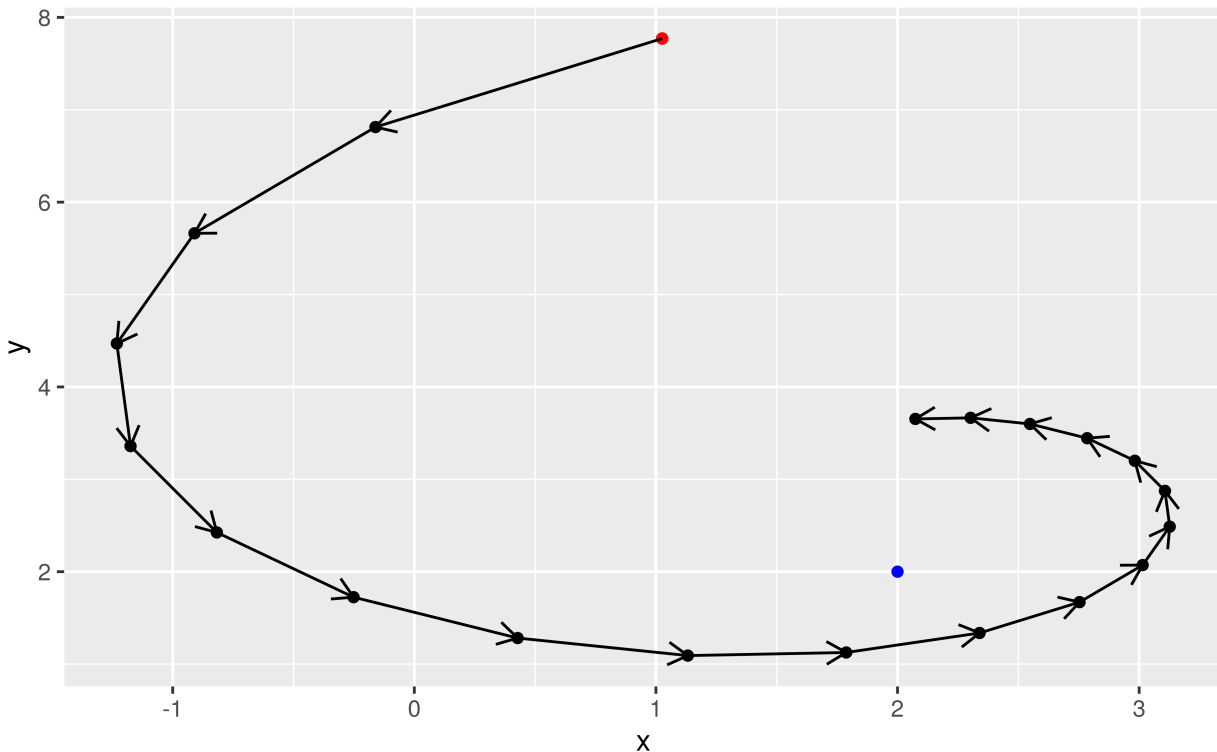
```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  3.23702 0.9722
## 2  1.58108 2.1281
## 3  0.36962 2.1052
## 4 -0.21036 1.6668
## 5 -0.33728 1.2495
## 6 -0.25171 1.0022
## 7 -0.12294 0.9123
## 8 -0.02874 0.9141
## 9  0.01636 0.9481
## 10 0.02623 0.9806
```

Saya akan coba kembali dengan sembarang titik lainnya:

```
# uji coba
rot = 20 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik
x_bintang = c(2,3) # contoh pusat rotasi
r = .9
rotasi_konstraksi_pusat_kan(x0,rot,r,x_bintang)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial  
titik biru adalah pusat rotasi



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  1.0259 7.771
## 2 -0.1607 6.813
## 3 -0.9099 5.663
## 4 -1.2313 4.470
## 5 -1.1746 3.359
## 6 -0.8173 2.425
## 7 -0.2515 1.724
## 8  0.4277 1.282
## 9  1.1320 1.092
## 10 1.7877 1.125
## 11 2.3396 1.336
## 12 2.7534 1.671
## 13 3.0146 2.072
```

##	14	3.1267	2.487
##	15	3.1069	2.875
##	16	2.9823	3.201
##	17	2.7850	3.445
##	18	2.5482	3.599
##	19	2.3026	3.665
##	20	2.0740	3.654

## Program *Spiral Optimization Algorithm*

Berbekal program yang telah dituliskan di bagian sebelumnya, kita akan sempurnakan program untuk melakukan *spiral optimization* sebagai berikut:



## SOAL 1

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \cos(2x_1) - \cos(2x_2) - 0.4 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2(x_2 - x_1) + \sin(x_2) - \sin(x_1) - 1.2 = 0$$

dengan  $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$

## JAWAB

*Contour Plot*

## SOAL 2

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) + 2 \cos(x_1) \sin(x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1) \sin(x_2) + 2 \sin(x_1) \cos(x_2) = 0$$

dengan  $0 \leq x_1, x_2 \leq 2\pi$