SK5201-Introduction to Computational Science: First Exam

Tanggal:13 Oktober 2022

Waktu: 110 menit.

Aturan:

- Kerjakan soal di kertas. Tuliskan nama dan NIM anda di kertas tersebut.
- UTS ini bersifat open book dan boleh menggunakan alat bantu hitung.
- File di submit sebagai file pdf dengan nama file: NIM-Nama-UTS. Contoh: 20922000-FinnyOktariani-UTS

1. Misal tetesan air hujan yang berbentuk bola menguap saat jatuh ke bumi, tetapi tetap mempertahankan bentuk bolanya. Asumsikan laju tetesan air hujan menguap (yaitu laju perubahan massa tetesan air hujan terhadap waktu) sebanding dengan luas permukaannya, dimana konstanta perbandingannya adalah -0.02. Diketahui kerapatan (massa per volume) air adalah $1\,\frac{g}{cm^3}$. Luas permukaan bola adalah $4\pi r^2$ dan volume bola adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$, dimana r adalah jari-jari (radius) bola. Asumsikan tidak ada gaya gesek dengan udara
   (a) **[10 point]** Tuliskan persamaan diferensial dari laju perubahan massa tetesan air sebagai fungsi dari r.
   (b) **[15 point]** Tuliskan algoritma untuk menghitung massa tetesan air tiap satuan waktu.

2. Model SIR adalah model yang menggambarkan penyebaran penyakit menular yang terdiri dari tiga populasi yaitu S, populasi rentan, I, populasi terinfeksi, dan R populasi sembuh.
   (a) **[10 point]** Buatlah diagram model untuk modifikasi model SIR jika dilakukan vaksinasi untuk populasi rentan, dimana sebanyak a% populasi divaksinasi setiap harinya. Asumsikan imunitas yang disebabkan oleh vaksinasi langsung terjadi. Jelaskan jawaban Anda.
   (b) **[10 point]** Buatlah diagram model untuk modifikasi model SIR jika dilakukan vaksinasi untuk populasi rentan, dimana sebanyak a% populasi divaksinasi setiap harinya. Asumsikan imunitas yang disebabkan oleh vaksinasi baru ada b hari setelah divaksinasi. Jelaskan jawaban Anda.
   (c) **[15 point]** Buatlah diagram model untuk modifikasi model SIR jika dilakukan vaksinasi untuk populasi rentan, dimana sebanyak a% populasi divaksinasi setiap harinya. Akan tetapi, imunitas dari c% populasi hanya bertahan d hari dimana d lebih kecil dari waktu yang diperlukan untuk sembuh dari penyakit. Asumsikan imunitas yang disebabkan oleh vaksinasi langsung terjadi. Jelaskan jawaban Anda.

3. Diketahui laju pertumbuhan populasi bakteri di sebuah koloni mengikuti persamaan diferensial $\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = t - P}$ dengan P(t) adalah banyaknya populasi bakteri pada saat t.
   (a) **[15 point]** Tentukan hampiran populasi bakteri pada setiap *time-step* dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde 2 jika digunakan $t_{awal} = 0$, $t_{akhir} = 2$, $P_{awal} = 1000$, $\Delta t = 0.5$
   (b) **[5 point]** Solusi analitik dari persamaan diferensial di atas adalah $P(t) = Ce^{-t} + t - 1$ dengan C adalah sebuah konstanta. Tentukan galat relatif pada setiap *time-step*.

4. Ada dua spesies yang mendiami suatu daerah tertentu, yaitu spesies S dan spesies H. Persamaan differensial yang menggambarkan laju perubahan populasi kedua spesies tersebut adalah

$$\frac{dS}{dt} = aS\left(1 - \frac{S+H}{M}\right)$$
$$\frac{dH}{dt} = bH\left(1 - \frac{S+H}{N}\right)$$

   dimana S, H adalah jumlah populasi spesies S dan spesies H, a, b masing-masing adalah laju pertumbuhan populasi spesies S dan H, dan M, N masing-masing adalah kapasitas lingkungan untuk populasi spesies S dan H.
   (a) **[5 point]** Apakah bentuk interaksi dari spesies S dan H dalam daerah tersebut (kompetisi/pemangsa-mangsa/tidak ada interaksi)? Jelaskan jawaban Anda.
   (b) **[15 point]** Tentukan **semua** solusi setimbang dari persamaan diferensial di atas.