SK500x PENGANTAR SAINS KOMPUTASI

Catatan Kuliah
Menggunakan R

Ikang FADHLI
ikanx101.com

29 September 2022

Contents

List of Figures

1 *Unconstrained Growth and Decay*

Pada pembahasan kali ini kita akan membahas model dimana *rate* perubahan itu proporsional dengan kondisi sekarang. Sebelumnya, mari kita bahas konsep dasar tentang **perubahan** sebagai berikut:

1.1 Konsep Dasar

1.1.1 *Rate of Change*

Misalkan dalam suatu gerak benda, y menandakan posisi dinotasikan sebagai fungsi (s) terhadap waktu (t).

Misalkan suatu mobil bergerak dari $t = 0$ h pada $s(0) = 0$ km sampai $t = 10$ h, $s(10) = 70$ km.

Rata-rata kecepatan bisa didefinisikan sebagai perubahan posisi (Δs) terhadap perubahan waktu (Δt). Pada kasus di atas:

$$\text{average velocity} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{70 - 0}{10 - 0} = 7\frac{km}{h}$$

Jika kita memperkecil perubahan Δ, kita akan dapatkan ***instantaneous rate of change***.

1.1.2 *Instantaneous Rate of Change*

Dari sini baru muncul yang namanya *derivative* atau turunan.

1.2 *Differential Equation*

Kita diperkenalkan kepada **Malthusian Model** untuk pertumbuhan penduduk, yakni:

$$\frac{dP}{dt} \sim P$$

$$\frac{dP}{dt} = rP, r \text{ is growth rate}$$

1.2.1 Contoh Kasus

Misalkan pada $t = 0$, populasi bakteri ada sebanyak 100 dengan *instantaneous growth rate* sebesar 10% di mana unit waktu yang digunakan adalah jam. Kita bisa tuliskan:

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P, P(0) = 100$$

1.3 *Finite Difference Equation*

Komputer tidak bisa menyelesaikan masalah kontinu, oleh karena itu dibutuhkan pendekatan diskrit. Maka untuk kasus model di atas, kita bisa membuat persamaan beda agar kita bisa menghitungnya.

Bentuk umumnya adalah sebagai berikut:

$$\text{new value} = \text{old values} + \text{change in value}$$

1.3.1 Algoritma

```
initialize
  sim_length
  population
  rate
  dt
compute:
  rate_per_step = rate * dt
  num_iter = sim_length / dt
for i: 1 to num_iter
  population = population + rate_per_step * population
  t = i * dt
  print(t, population)
```

1.3.2 Penyelesaian Contoh Kasus

Kita akan selesaikan contoh kasus dengan algoritma yang ada pada bagian sebelumnya.

```
# define
sim_length = 1
population = 100
rate = 0.1
dt = .05

# compute
rate_per_step = rate * dt
num_iter = sim_length / dt

for(i in 1:num_iter){
  population = population + rate_per_step * population
  t = i*dt
  print(paste("Populasi = ",population," pada t = ",t))
}
```

```
## [1] "Populasi =  100.5  pada t =  0.05"
## [1] "Populasi =  101.0025  pada t =  0.1"
```

```
## [1] "Populasi =  101.5075125  pada t =  0.15"
## [1] "Populasi =  102.0150500625  pada t =  0.2"
## [1] "Populasi =  102.525125312813  pada t =  0.25"
## [1] "Populasi =  103.037750939377  pada t =  0.3"
## [1] "Populasi =  103.552939694073  pada t =  0.35"
## [1] "Populasi =  104.070704392544  pada t =  0.4"
## [1] "Populasi =  104.591057914507  pada t =  0.45"
## [1] "Populasi =  105.114013204079  pada t =  0.5"
## [1] "Populasi =  105.639583270099  pada t =  0.55"
## [1] "Populasi =  106.16778118645  pada t =  0.6"
## [1] "Populasi =  106.698620092382  pada t =  0.65"
## [1] "Populasi =  107.232113192844  pada t =  0.7"
## [1] "Populasi =  107.768273758808  pada t =  0.75"
## [1] "Populasi =  108.307115127602  pada t =  0.8"
## [1] "Populasi =  108.84865070324  pada t =  0.85"
## [1] "Populasi =  109.392893956757  pada t =  0.9"
## [1] "Populasi =  109.93985842654  pada t =  0.95"
## [1] "Populasi =  110.489557718673  pada t =  1"
```

Berikut adalah hasil simulasi untuk t yang lebih panjang lagi.

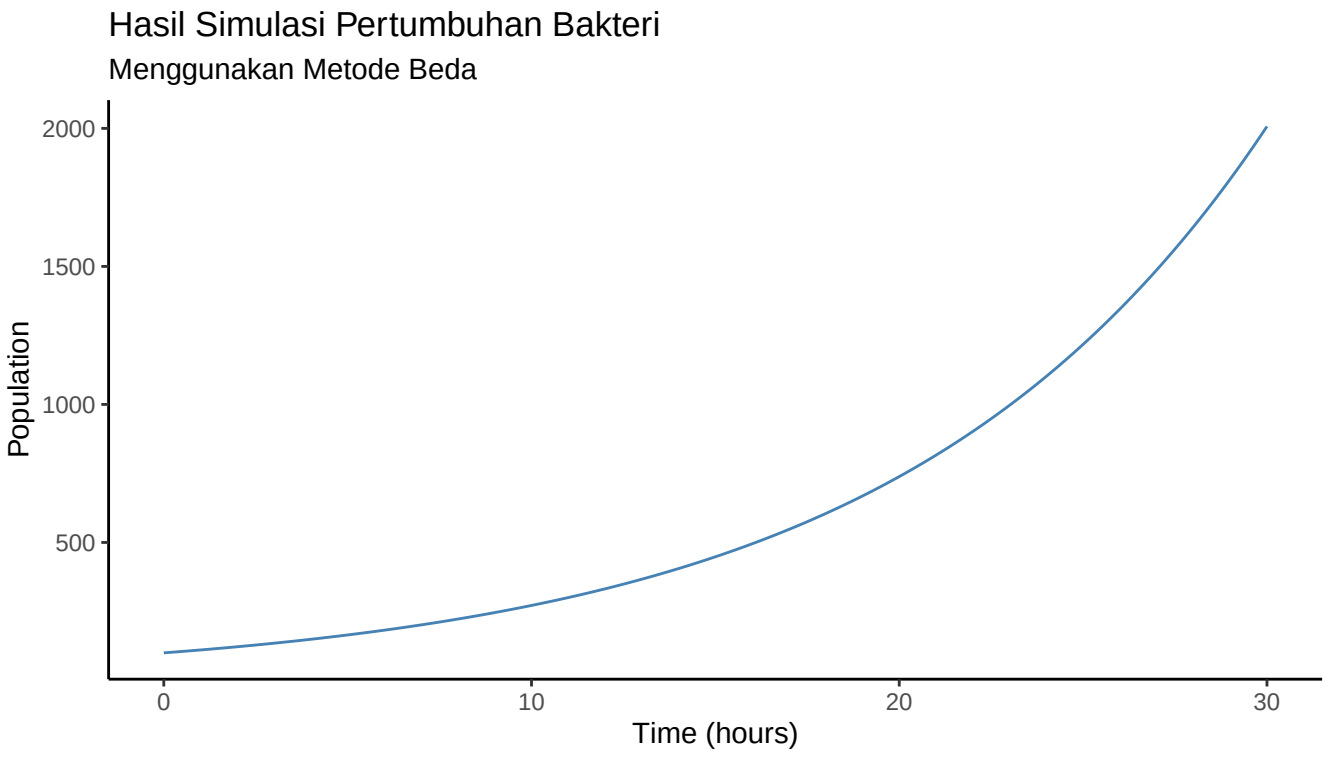

Figure 1: Hasil Simulasi Pertumbuhan Bakteri

2 Pertumbuhan Terbatas

Populasi secara teori memiliki kemampuan untuk terus bertumbuh secara eksponensial. Namun lingkungan memiliki daya dukung sehingga pertumbuhan yang terjadi menjadi terbatas. Di sini diperkenalkan konsep bernama *carrying capacity*.

Pada **Model Malthus** sebelumnya, kita miliki:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

dengan solusi analitik:

$$P = P_0 e^{rt}$$

di mana P_0 adalah populasi awal.

2.1 Model Baru dengan *Carrying Capacity*

Dalam model baru, untuk populasi awal yang jauh lebih kecil dari kapasitas lingkungan, populasi akan bertambah serupa dengan model tak terbatas.

Namun, seiring dengan mendekatnya ukuran populasi dengan kapasitas lingkungan, pertumbuhan akan semakin berkurang. Dekat dengan kapasitas lingkungan, banyaknya kematian harus serupa dengan banyaknya kelahiran, agar populasi cenderung konstan.

Untuk memperoleh pertumbuhan yang diperlambat, kita dapat mengukur banyaknya kematian sebagai hasil kali dengan banyaknya kelahiran yang dimodelkan sebagai rP.

Ketika populasi sangat kecil, hasil kali tersebut tersebut harusnya mendekati nol, karena hanya sedikit individu yang mati.

Ketika populasi dekat dengan kapasitas lingkungan, hasil kali tersebut haruslah mendekati satu. Jika D menyatakan banyaknya kematian dan M menyatakan kapasitas lingkungan, maka kita dapat memodelkan laju perubahan kematian sebagai:

$$\frac{dP}{dt} = (\frac{rP}{M})P$$

Akibatnya:

$$\frac{dP}{dt} = rP - (\frac{rP}{M})P = r(1 - \frac{P}{M})P$$

Births minus deaths

3 *Constrained Growth and Decay*

Secara alamiah, pertumbuhan populasi yang bersifat eksponensial tidak tak terbatas. Karena lingkungan punya cara sendiri untuk menopang pertumbuhan populasi tersebut. Contohnya: sumber makanan yang terbatas, adanya *predator*, penyakit, dst.

Pada kenyataannya, populasi akan bisa terus bertumbuh sampai ambang batas tertentu. Selanjutnya, akan selalu berada pada ambang batas tersebut.

3.1 Kapasitas Lingkungan

Ukuran populasi maksimum yang bisa didukung oleh lingkungan disebut dengan **kapasitas lingkungan** (*carrying capacity*).

Kita telah mengenal model pada bagian sebelumnya:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

dimana P_0 adalah populasi awal.

Lalu bagaimana kita memodelkan pertumbuhan terbatas dengan mengikutsertakan *carrying capacity*?

3.2 Model Terbatas

Pada t_0, jika populasi masih berada di bawah *carrying capacity*, maka populasi masih bisa bertumbuh. Namun saat mendekat dengan CC, maka pertambahan populasi akan melambat. Semakin mendekat lagi ke CC, banyaknya kematian harus serupa dengan banyaknya kelahiran agar populasi cenderung konstan.

Intinya kita perlu memodelkan pertumbuhan yang melambat.

Konsepnya:

```
new population = growth - death
```

Misalkan D menandakan kematian dan M menandakan CC, maka:

$$\frac{dD}{dt} = (\frac{rP}{M})P$$

Jika:

- P yang kecil, nilai D akan mendekati nol.
- P yang besar, nilai D akan mendekati *growth* (ΔP). Laju kematian akan sama dengan laju *growth*.

Akibatnya:

$$\frac{dP}{dt} = rP - (r\frac{P}{M})P$$

$$\frac{dP}{dt} = r(1 - \frac{P}{M})P$$

3.3 Model Final Simulasi Diskrit

Dengan demikian:

$$\Delta P = (rP(t - \Delta t)\Delta t) - (r\frac{P(t - \Delta t)}{M})P(t - \Delta t)\Delta t$$

Persamaan ini disebut dengan **persamaan logistik**.

3.4 Kasus Lain

Bagaimana jika $P_0 > M$?

Maka populasi akan menurun (kematian akan lebih besar dibandingkan *growth*) hingga tercapai keseimbangan pada M.

3.4.1 Algoritma

```
initialize
  sim_length
  pop
  rate
  M
  dt
compute:
  rate_per_step = rate * dt
  num_iter = sim_length / dt
for i: 1 to num_iter
  pop = pop + rate_per_step * pop - (rate_per_step * pop / M) * pop
  t = i * dt
  print(t, population)
```

4 SIR Model

Suspected, *infected*, *recovered* digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dengan populasi tertutup (tidak ada kelahiran, kematian, imigrasi, dan emigrasi).

4.1 SIR Model untuk R

Dalam suatu waktu, orang yang terkena penyakit (misalkan flu) akan sembuh. Maka R akan proporsional ke I.

$$\frac{dR}{dt} = a \times I$$

dengan a adalah *recovery rate*. Biasanya $a = \frac{1}{d}$, dimana d adalah *number of days infected*.

4.2 SIR Model untuk S

Suspect akan terkena flu saat berinteraksi dengan orang yang sakit I.

$$\frac{dS}{dt} = -r \times S \times I$$

dengan r adalah *transmission constant*.

Bagaimana cara menghitung r?

Jika:

- N adalah total populasi.
- k adalah banyaknya kontak perhari antara S dan I.
- Peluang adanya kontak dengan S adalah $\frac{S}{N}$.
- Peluang orang S terinfeksi saat kontak adalah b.

Maka:

$$\frac{dS}{dt} = -(\frac{k \times b}{N}) \times S \times I$$

4.3 SIR Model untuk I

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt} - \frac{dR}{dt}$$

5 *Errors*

Kesalahan yang mungkin terjadi saat komputasi. Beberapa istilah yang penting:

1. *Floating point number*
   - Bilangan real biasa disebut dengan *floating point*.
   - Biasanya ditulis sebagai bilangan desimal dikali 10 pangkat sesuatu $a \times 10^n$.
   - Nilai a tidak boleh **nol**.
   - a disebut **significand** atau **mantissa**.
   - n disebut **eksponen**.
2. *Significant digit*
   - Semua angka integer selain nol di depan dan belakang pada *significand*.
3. *Precision*
   - Berapa banyak *significant digit*.
4. *Magnitude*
   - 10^n dari notasi *floating point*.

Ini adalah *computational errors*:

- *Absolute and Relative Errors*
- *Round-off Errors*
- *Arithmetic Errors*
- *Error Propagation*