

# SPIRAL OPTIMIZATION ALGORITHM

Tugas Kuliah  
SK5001 Analisis Numerik Lanjut

Mohammad Rizka Fadhli  
NIM: 20921004

16 October 2021

## PENDAHULUAN

### Bahasa yang Digunakan

Saya membuat program *spiral optimization algorithm* menggunakan bahasa **R** yang bisa dieksekusi pada versi minimal 3.5.3.

### Spiral Optimization Algorithm

*Spiral Optimization Algorithm* adalah salah satu metode *meta heuristic* yang digunakan untuk mencari minimum global dari suatu sistem persamaan.

Algoritmanya mudah dipahami dan intuitif tanpa harus memiliki latar keilmuan tertentu. Proses kerjanya adalah dengan melakukan *random number generating* pada suatu selang dan melakukan rotasi sekaligus kontraksi dengan titik paling minimum pada setiap iterasi sebagai pusatnya.

Berikut adalah algoritmanya:

#### INPUT

```
m >= 2 # jumlah titik
theta # sudut rotasi (0 <= theta <= 2pi)
r      # kontraksi
k_max  # iterasi maksimum
```

#### PROCESS

```
1 generate m buah titik secara acak
  x_i

2 initial condition
  k = 0 # untuk keperluan iterasi

3 cari x_* yang memenuhi
  min(f(x_*))

4 lakukan rotasi dan kontraksi semua x_i
  x_* sebagai pusat rotasi
  k = k + 1

5 ulangi proses 3 dan 4
```

```
6 hentikan proses saat k = k_max
  output x_*
```

Berdasarkan algoritma di atas, salah satu proses yang penting adalah melakukan **rotasi** dan **konstraksi** terhadap semua titik yang telah di-*generate*.

Agar memudahkan, saya akan memberikan ilustrasi geometri beserta operasi matriks aljabar terkait kedua hal tersebut.

## Penjelasan Geometri

### Operasi Matriks Rotasi

Misalkan saya memiliki titik  $x \in \mathbb{R}^2$ . Untuk melakukan rotasi sebesar  $\theta$ , saya bisa menggunakan suatu matriks  $A_{2 \times 2}$  berisi fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan operasi matriks di atas, saya membuat **program** di **R** dengan beberapa modifikasi. Sebagai contoh, saya akan membuat program yang bertujuan untuk melakukan rotasi suatu titik  $x \in \mathbb{R}$  sebanyak  $n$  kali:

```
# mendefinisikan program
rotasi_kan = function(x0,rot){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
```

```

plot =
  ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
               data = final,
               color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

# enrich dengan garis panah
panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)

# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
    geom_segment(aes(x = x_start,
                    xend = x_end,
                    y = y_start,
                    yend = y_end),
                 data = panah,
                 arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

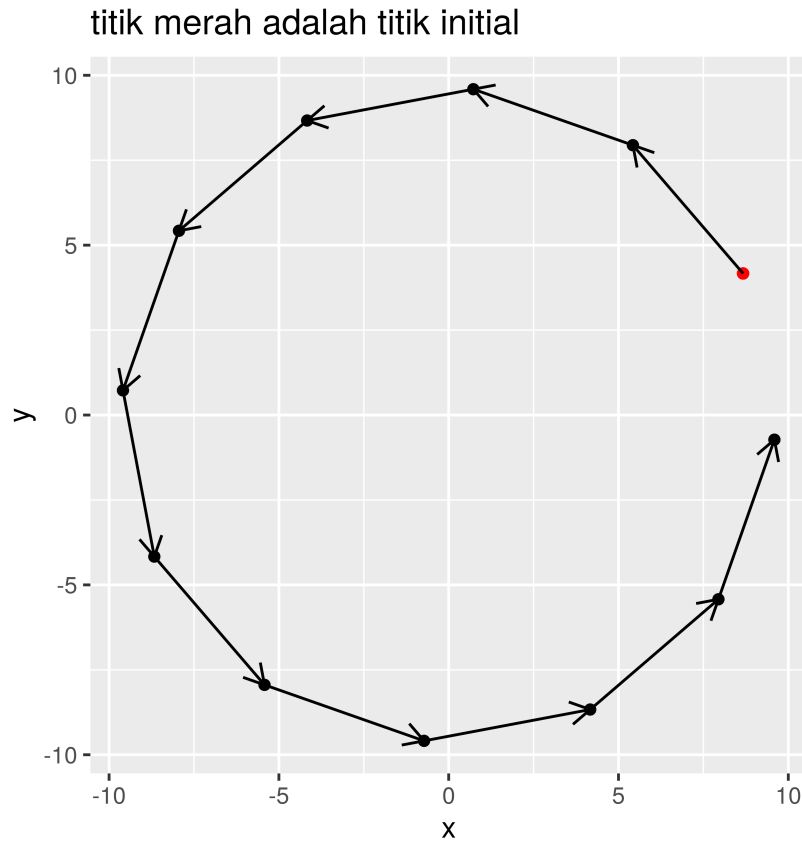
```

Berikut adalah uji coba dengan titik sembarang berikut ini:

```
# uji coba
rot = 12 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  8.668516  4.166780
## 2  5.423765  7.942796
## 3  0.725721  9.590546
## 4 -4.166780  8.668516
## 5 -7.942796  5.423765
## 6 -9.590546  0.725721
## 7 -8.668516 -4.166780
## 8 -5.423765 -7.942796
## 9 -0.725721 -9.590546
## 10  4.166780 -8.668516
## 11  7.942796 -5.423765
## 12  9.590546 -0.725721
```

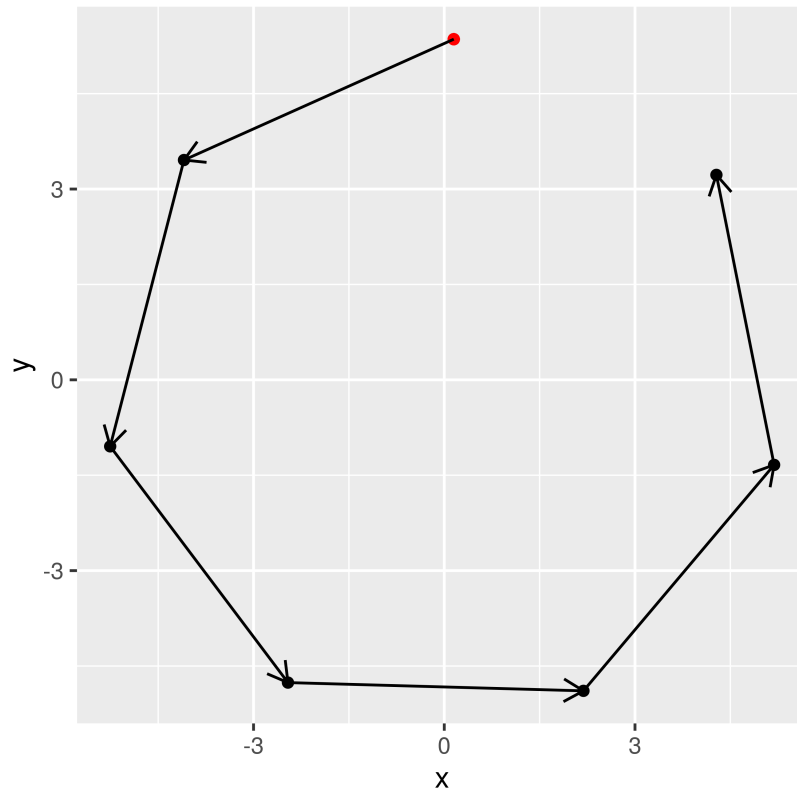
Uji coba kembali dengan titik sembarang lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 7 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  0.149408  5.35604
## 2 -4.094363  3.45625
## 3 -5.254995 -1.04617
## 4 -2.458509 -4.76080
## 5  2.189285 -4.89045
## 6  5.188503 -1.33749
## 7  4.280672  3.22262
```

## Operasi Matriks Rotasi dan Konstraksi

Jika pada sebelumnya saya **hanya melakukan rotasi**, kali ini saya akan memodifikasi operasi matriks agar melakukan rotasi dan konstraksi secara bersamaan. Untuk melakukan hal tersebut, saya akan definisikan  $r, 0 < r < 1$  dan melakukan operasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu saya akan modifikasi program **R** sebelumnya menjadi sebagai berikut:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_kan = function(x0,rot,r){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan konstraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    xk = r * xk
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

  # enrich dengan garis panah
```

```

panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)
# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
  geom_segment(aes(x = x_start,
                   xend = x_end,
                   y = y_start,
                   yend = y_end),
               data = panah,
               arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

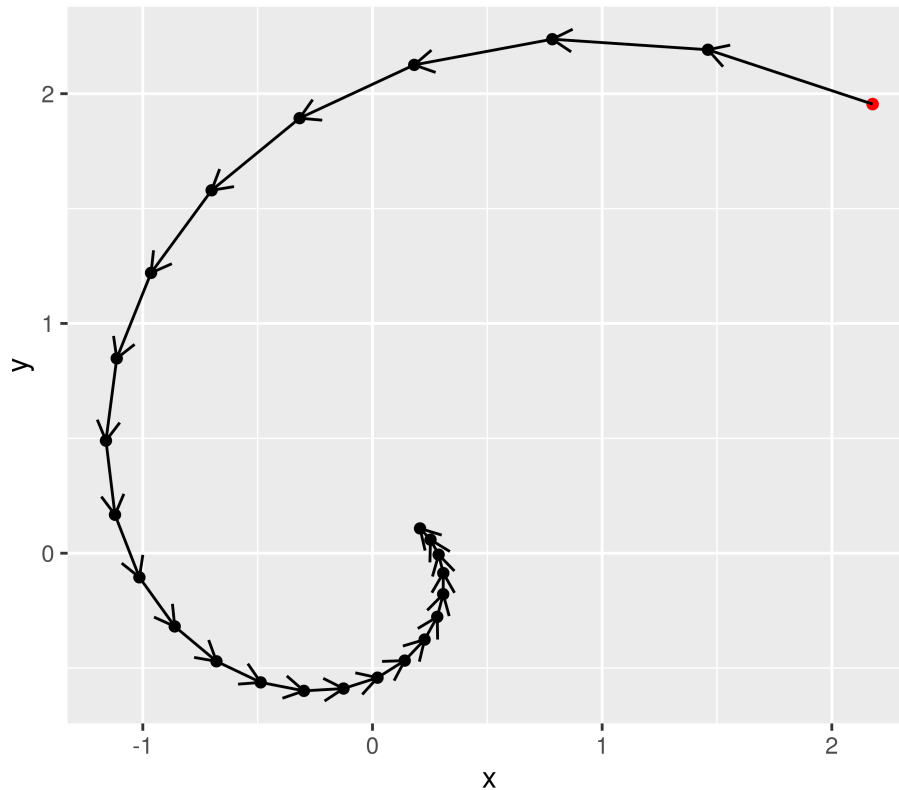
```

Saya akan uji coba untuk sembarang titik berikut ini:

```
# uji coba
rot = 25 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .9
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##           x           y
## 1  2.1775316  1.95467283
## 2  1.4607118  2.19131396
## 3  0.7828769  2.23716064
## 4  0.1817299  2.12541272
## 5 -0.3172933  1.89345003
## 6 -0.7003861  1.57955057
## 7 -0.9640804  1.22017242
## 8 -1.1135129  0.84787327
## 9 -1.1604487  0.48988473
## 10 -1.1212384  0.16731203
## 11 -1.0148593 -0.10510653
## 12 -0.8611530 -0.31877068
## 13 -0.6793409 -0.47062436
## 14 -0.4868628 -0.56230564
```

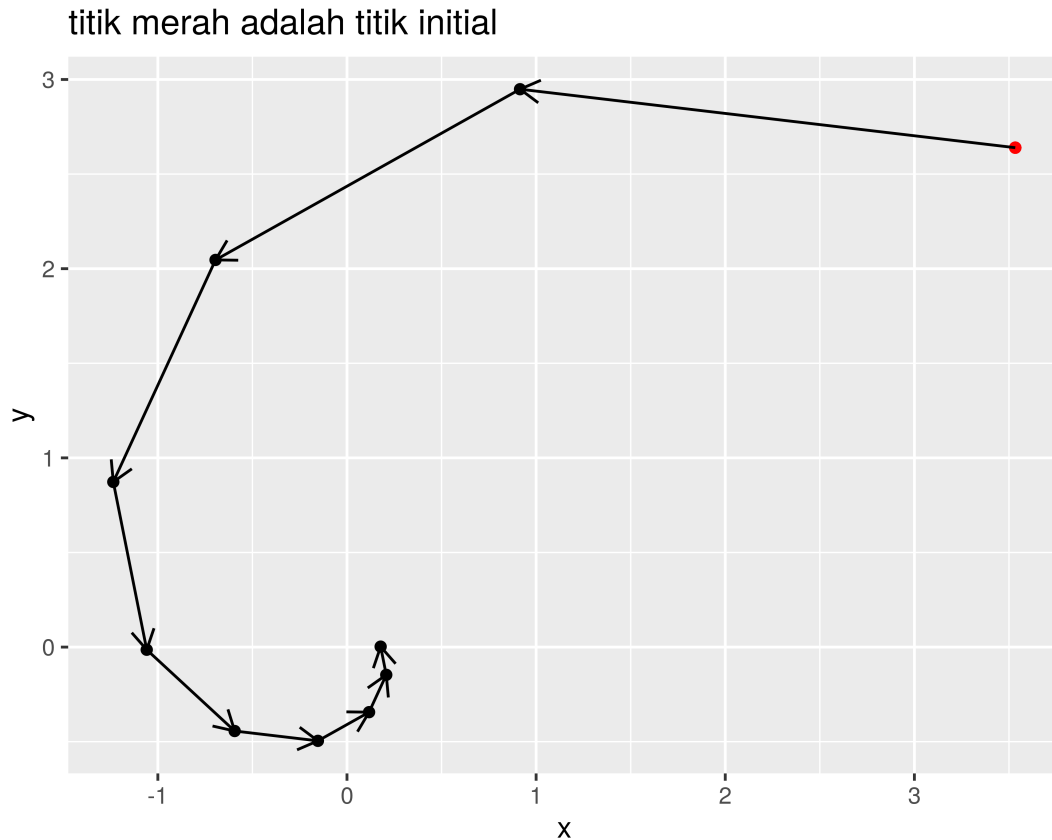


```
## 15 -0.2985546 -0.59914587
## 16 -0.1261561 -0.58911311
## 17  0.0218824 -0.54178091
## 18  0.1403373 -0.46738614
## 19  0.2269463 -0.37602169
## 20  0.2819963 -0.27699212
## 21  0.3078198 -0.17834426
## 22  0.3082513 -0.08657063
## 23  0.2880866 -0.00647268
## 24  0.2525810  0.05883741
## 25  0.2070121  0.10782294
```

Saya akan uji coba kembali untuk sembarang titik lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .7
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  3.533345  2.63947148
## 2  0.914966  2.94855795
## 3 -0.695027  2.04626586
## 4 -1.235538  0.87285600
## 5 -1.058836 -0.01405280
## 6 -0.593849 -0.44361597
## 7 -0.153778 -0.49556413
## 8  0.116813 -0.34391590
## 9  0.207657 -0.14670091
## 10 0.177959  0.00236185
```

**Catatan penting:**

Terlihat bahwa semakin banyak rotasi dan kontraksi yang dilakukan akan membuat titik *initial* menuju pusat (0,0).

## Operasi Matriks Rotasi dan Kontraksi dengan Titik $x^*$ Sebagai Pusatnya

Salah satu prinsip utama dari *spiral optimization algorithm* adalah menjadikan titik  $x^*$  sebagai pusat rotasi di setiap iterasinya. Operasi matriksnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \right)$$

Oleh karena itu kita akan modifikasi program bagian sebelumnya menjadi seperti ini:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_pusat_kan = function(x0,rot,r,x_bin){
  # pusat rotasi
  pusat = x_bin

  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan kontraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% (x0-pusat) # diputar dengan x_bin sebagai pusat
    xk = pusat + (r * xk)
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    geom_point(aes(x = pusat[1],
                  y = pusat[2]),
```

```

        color = "blue") +
  labs(title = "titik merah adalah titik initial\ntitik biru adalah pusat rotasi")

# enrich dengan garis panah
panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)
# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
  geom_segment(aes(x = x_start,
                   xend = x_end,
                   y = y_start,
                   yend = y_end),
               data = panah,
               arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

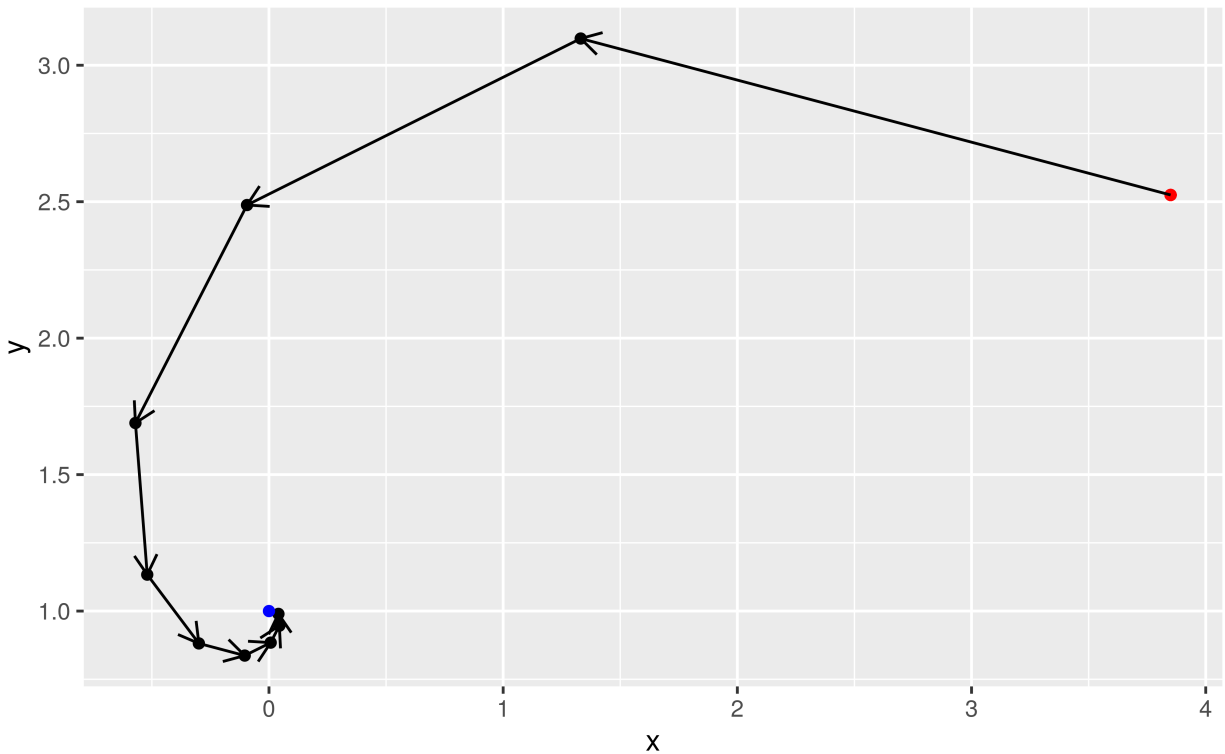
```

Saya akan coba dengan sembarang titik berikut:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
x_bintang = c(0,1) # contoh pusat rotasi
r = .6
rotasi_konstraksi_pusat_kan(x0,rot,r,x_bintang)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial  
titik biru adalah pusat rotasi



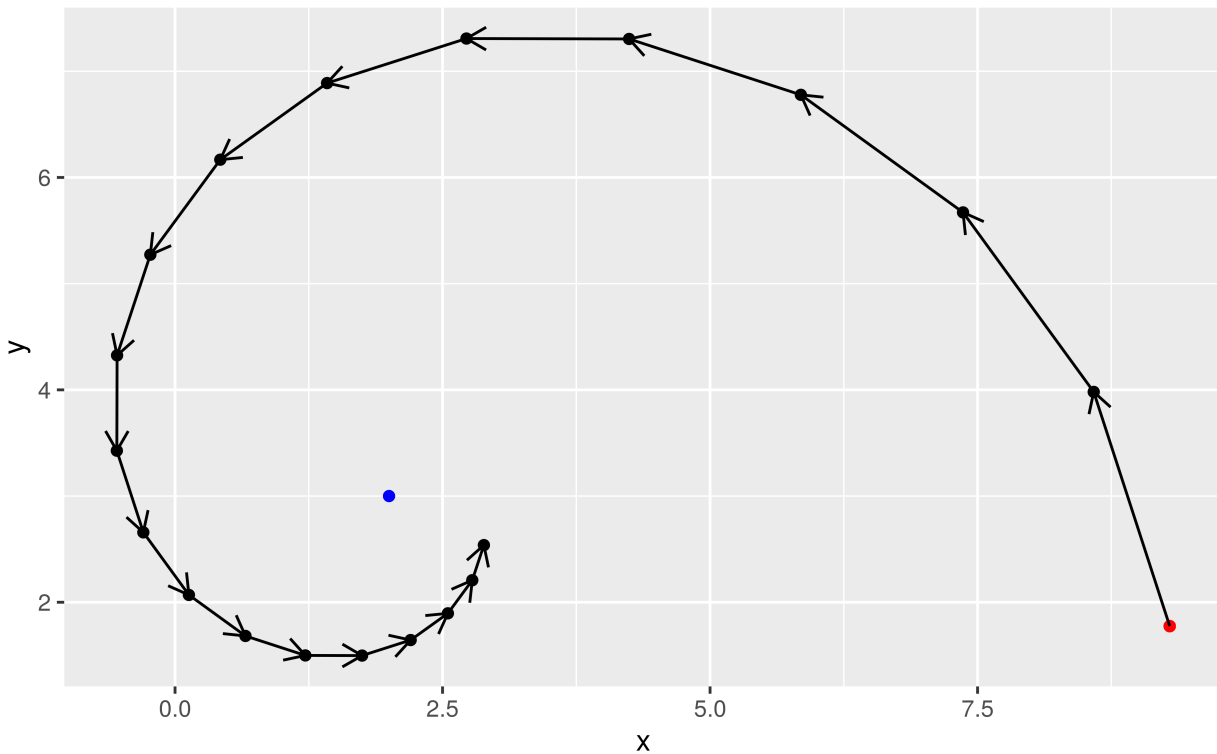
```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  3.8500198 2.524634
## 2  1.3311443 3.097864
## 3 -0.0937050 2.487781
## 4 -0.5701827 1.689137
## 5 -0.5198112 1.133427
## 6 -0.2993775 0.881444
## 7 -0.1035098 0.836870
## 8  0.0072865 0.884310
## 9  0.0443374 0.946413
## 10 0.0404205 0.989625
```

Saya akan coba kembali dengan sembarang titik lainnya:

```
# uji coba
rot = 20 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik
x_bintang = c(2,3) # contoh pusat rotasi
r = .9
rotasi_konstraksi_pusat_kan(x0,rot,r,x_bintang)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial  
titik biru adalah pusat rotasi



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  9.295750 1.77502
## 2  8.585490 3.98053
## 3  7.364155 5.67081
## 4  5.848659 6.77794
## 5  4.243560 7.30410
## 6  2.723341 7.30807
## 7  1.421005 6.88867
## 8  0.422911 6.16748
## 9 -0.230835 5.27259
## 10 -0.541529 4.32480
## 11 -0.543871 3.42713
## 12 -0.296219 2.65811
## 13  0.129635 2.06874
```

```
## 14 0.658056 1.68271
## 15 1.217719 1.49925
## 16 1.747787 1.49787
## 17 2.201883 1.64411
## 18 2.549897 1.89557
## 19 2.777844 2.20760
## 20 2.886176 2.53807
```

## Program *Spiral Optimization Algorithm*

Berbekal program yang telah dituliskan di bagian sebelumnya, kita akan sempurnakan program untuk melakukan *spiral optimization* sebagai berikut:

```
soa_mrf = function(N,      # banyak titik
                  a,      # batas bawah
                  b,      # batas atas
                  rot,     # berapa banyak rotasi
                  k_max,  # iterasi maks
                  r){     # berapa rate kontraksi

  # N pasang titik random di selang [a,b] di R2
  x1 = runif(N,a,b)
  x2 = runif(N,a,b)

  # hitung theta
  theta = 2*pi / rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # bikin data frame
  temp = data.frame(x1,x2) %>% mutate(f = f(x1,x2))

  # proses iterasi
  for(i in 1:k_max){
    # mencari titik x* dengan min(f)
    f_min = temp %>% filter(f == min(f))
    pusat = c(f_min$x1,f_min$x2)

    for(j in 1:N){
      # kita akan ambil titiknya satu persatu
      x0 = c(temp$x1[j],temp$x2[j])

      # proses rotasi dan kontraksi terhadap pusat x*
      xk = A %*% (x0-pusat) # diputar dengan x_bin sebagai pusat
      xk = pusat + (r * xk)

      # proses mengembalikan nilai ke temp
      temp$x1[j] = xk[1]
      temp$x2[j] = xk[2]
    }

    # hitung kembali nilai f(x1,x2)
    temp = temp %>% mutate(f = f(x1,x2))
  }

  # proses output hasil
  output = temp %>% filter(f == min(f))
  return(output)
}
```



Kita akan coba performa program tersebut untuk menyelesaikan fungsi berikut:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 - 16x_1^2 + 5x_1}{2} + \frac{x_2^4 - 16x_2^2 + 5x_2}{2}$$

$$-4 \leq x_1, x_2 \leq 4$$

Dengan  $r = 0.8$ ,  $N = 50$ ,  $rot = 20$ ,  $k_{max} = 60$ .

```
# definisi
N = 50
a = -4
b = 4
k_max = 60
r = .8
rot = 20
f = function(x1,x2){
  ((x1^4 - 16 * x1^2 + 5 * x1)/2) + ((x2^4 - 16 * x2^2 + 5 * x2)/2)
}

# solving
soa_mrf(N,a,b,rot,k_max,r)

##          x1          x2          f
## 1 -2.90354 -2.90354 -78.3323
```

## SOAL 1

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \cos(2x_1) - \cos(2x_2) - 0.4 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2(x_2 - x_1) + \sin(x_2) - \sin(x_1) - 1.2 = 0$$

dengan  $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$

## JAWAB

*Contour Plot*

## SOAL 2

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) + 2 \cos(x_1) \sin(x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1) \sin(x_2) + 2 \sin(x_1) \cos(x_2) = 0$$

dengan  $0 \leq x_1, x_2 \leq 2\pi$