

## Assignment

1. Rancanglah algoritma sederhana untuk mencari solusi integral dengan metoda Monte Carlo! Kemudian, tentukanlah nilai integral di bawah ini! (Bandingkan hasil dengan solusi analitik)

$$a) f(x) = \int_1^5 x^2 dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_3^5 x^2 dx$$

$$b) f(x) = \int_2^3 (x^2 + 4x \sin x) dx$$

# SK5002 ALGORITMA DAN RANCANGAN PERANGKAT LUNAK

Tugas Individu  
Minggu IV

Mohammad Rizka Fadhli  
20921004@mahasiswa.itb.ac.id

23 September 2021

# TASK 1

## Soal

Buatlah algoritma sederhana dengan metode Monte Carlo untuk mencari solusi dari integral berikut:

$$f(x) = \int_1^5 x^2 dx$$

Bandingkan nilainya jika integralnya dipecah menjadi dua sebagai berikut:

$$f(x) = \int_1^3 x^2 dx + \int_3^5 x^2 dx$$

Bandingkan dengan solusi analitiknya!

## Jawab

Berikut adalah langkah kerja yang dilakukan untuk menjawab soal ini:

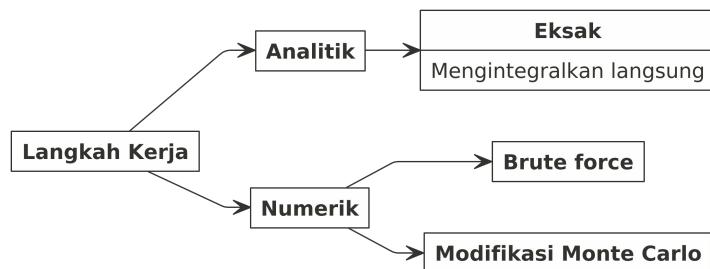


Figure 1: Alur Kerja

Kelak akan kita bandingkan metode numerik dengan hasil eksaknya.

### Analitik

Perhatikan bahwa pada integral tentu berlaku:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Oleh karena itu, jika kita memiliki  $f(x) = x^2$ , maka  $F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^3}{3}$  dari soal:

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} \approx 41.33333$$

## Numerik

**Brute Force** Analogi dari metode numerik ini adalah seperti melempar *darts*. Luas area di bawah kurva bisa didefinisikan sebagai:

$$L = \frac{Ndarts_{\text{on target}}}{Ndarts_{\text{All}}}$$

Berikut adalah *flowchart*-nya:

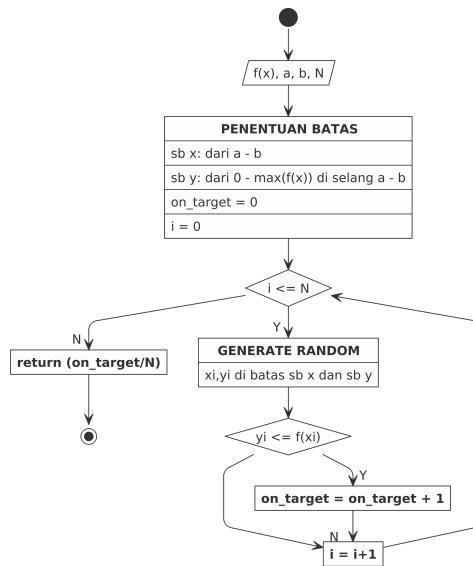


Figure 2: Flowchart Brute Force

Hal terpenting dalam metode ini adalah **mendefinisikan batas titik  $x, y$  untuk di-random**. Kenapa?

Kita tidak ingin *darts* yang kita lempar jatuh ke area sembarang! Kita harus definisikan di mana **area bermain** *darts*.

Perhatikan grafik  $f(x)$  berikut:



Figure 3: Grafik  $f(x)$

Untuk sumbu  $x$ , batas titik yang akan di-random sudah jelas, yakni:  $[1, 5]$ .

Lantas bagaimana dengan sumbu  $y$ ?

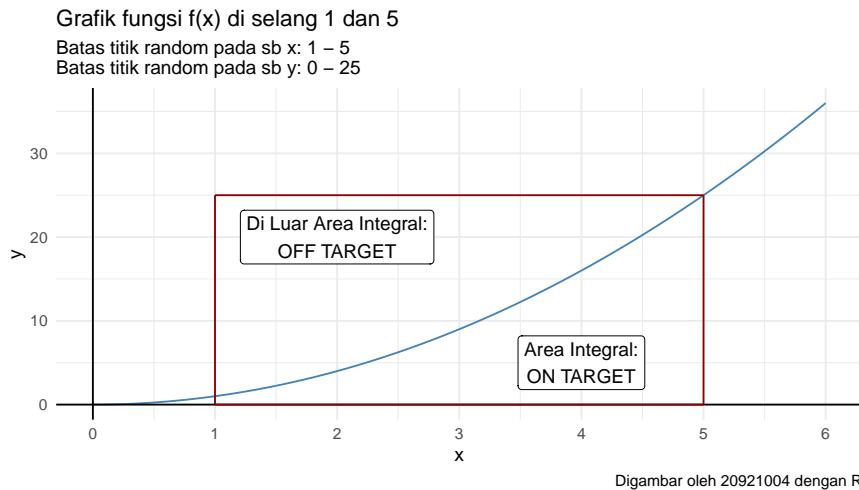


Figure 4: Penentuan Batas Titik Random

Kita akan membuat sejumlah *random* di dalam area kotak merah dari grafik di atas. Kelak luas akan dihitung dari rasio titik di dalam area **on target** dengan **total semua titik yang ada** dikalikan dengan luas dari kotak merah.

$$L = 4 \times 25 \times \frac{Ndarts_{\text{on target}}}{Ndarts_{\text{All}}}$$

Berikut adalah algoritmanya dalam **R**:

```

set.seed(2021)

brute_force = function(f,x1,x2,y1,y2,N){
  # generating random number
  x = runif(N,x1,x2)
  y = runif(N,y1,y2)

  # pengecekan y <= f(x)
  rekap =
    data.frame(x,y) %>%
    mutate(f_x = f(x),
          on_target = ifelse(y <= f_x, 1, 0))

  # hitung rasio on target vs all dots
  rasio = sum(rekap$on_target) / N
  # hitung luas
  luas = (x2-x1)*(y2-y1)*rasio

  # perbandingan dengan eksak
  eksak = ((5^3)/3) - 1/3
  delta = abs(eksak - luas)

  # output plot
  plot_sim =
    plot +
    geom_point(data = rekap,aes(x,y,color = on_target)) +
    theme(legend.position = "none") +
    labs(title = paste0("Hasil Simulasi dengan ",N," titik"),
         subtitle = paste0("Didapat nilai rasio sebesar ",rasio))

  # output
  output = list(
    "Plot Brute Force" = plot_sim,
    "Luas area di bawah kurva" = luas,
    "Absolute selisih dg solusi eksak" = delta
  )

  return(output)
}

```

Saya menghitung *error* atau *selisih solusi numerik dengan solusi eksak* dengan cara:

$$\Delta = |eksak - numerik|$$

Dari *function* di atas, kita akan coba hitung dengan berbagai nilai  $N$  sebagai berikut:

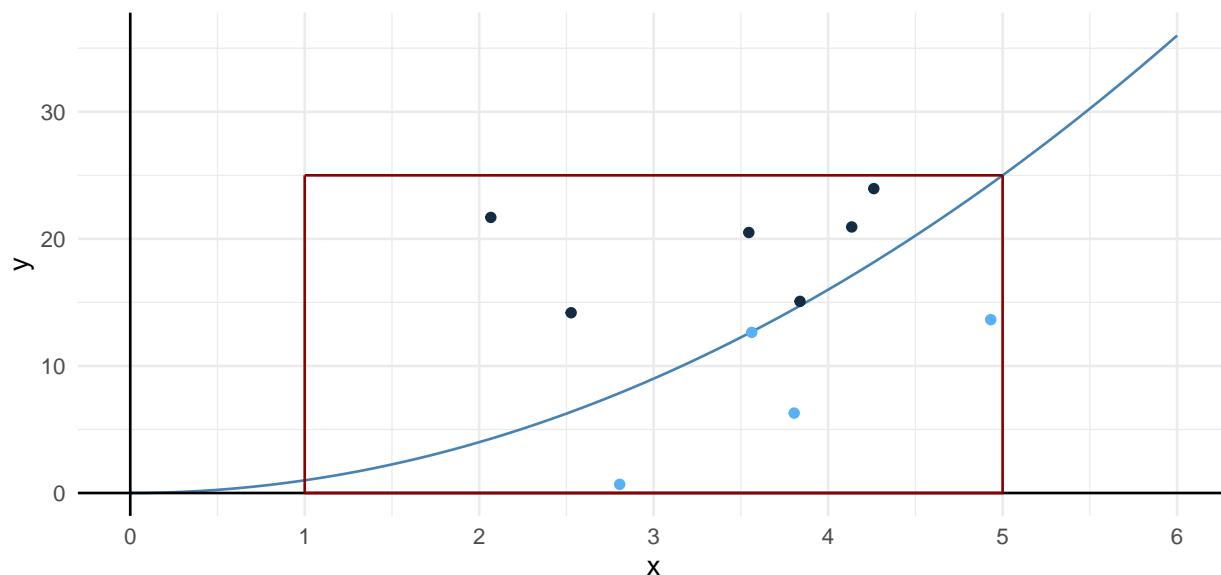
$N = 10$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 10)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

Hasil Simulasi dengan 10 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.4



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##
## $`Luas area di bawah kurva`
## [1] 40
##
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`
## [1] 1.333333
```

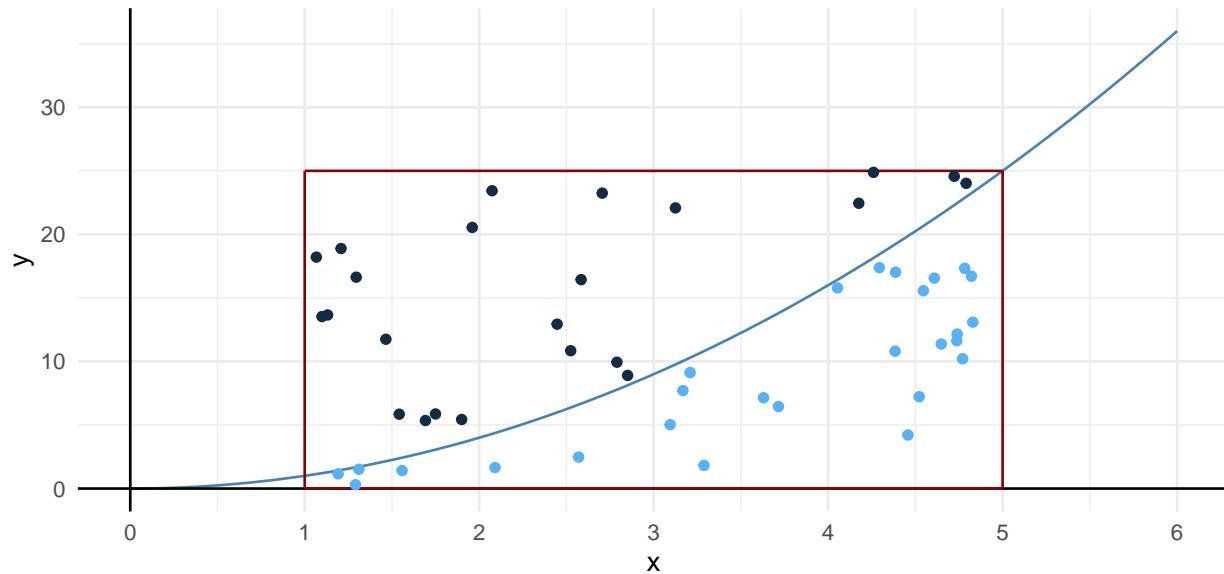
$N = 50$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 50)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

### Hasil Simulasi dengan 50 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.54



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##
## $`Luas area di bawah kurva`
## [1] 54
##
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`
## [1] 12.66667
```

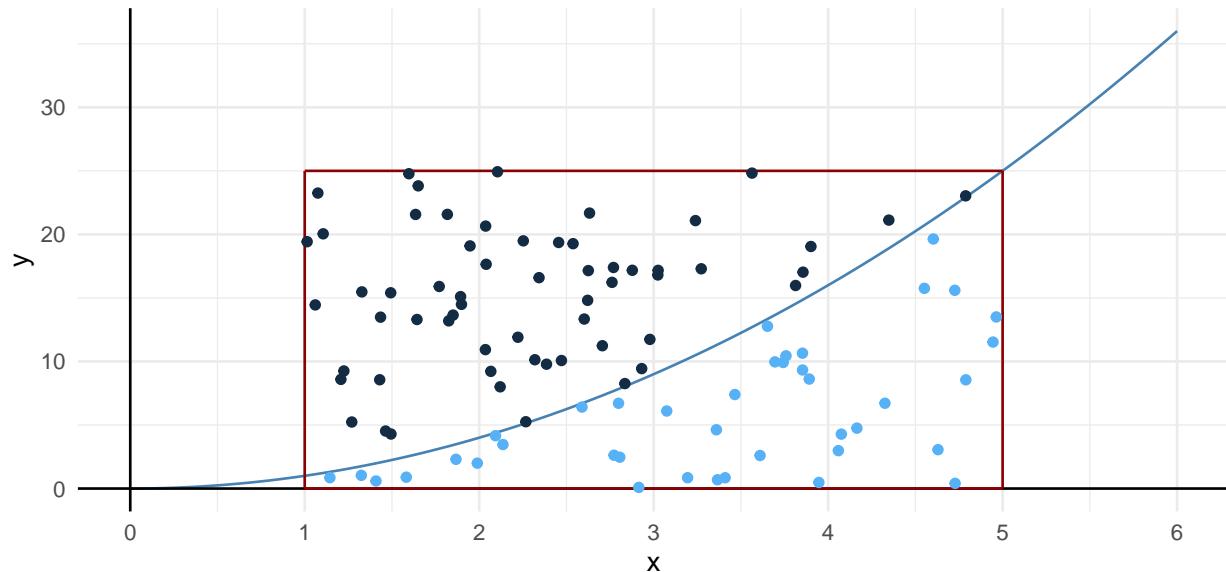
$N = 100$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 100)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

Hasil Simulasi dengan 100 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.4



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##
## $`Luas area di bawah kurva`
## [1] 40
##
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`
## [1] 1.333333
```

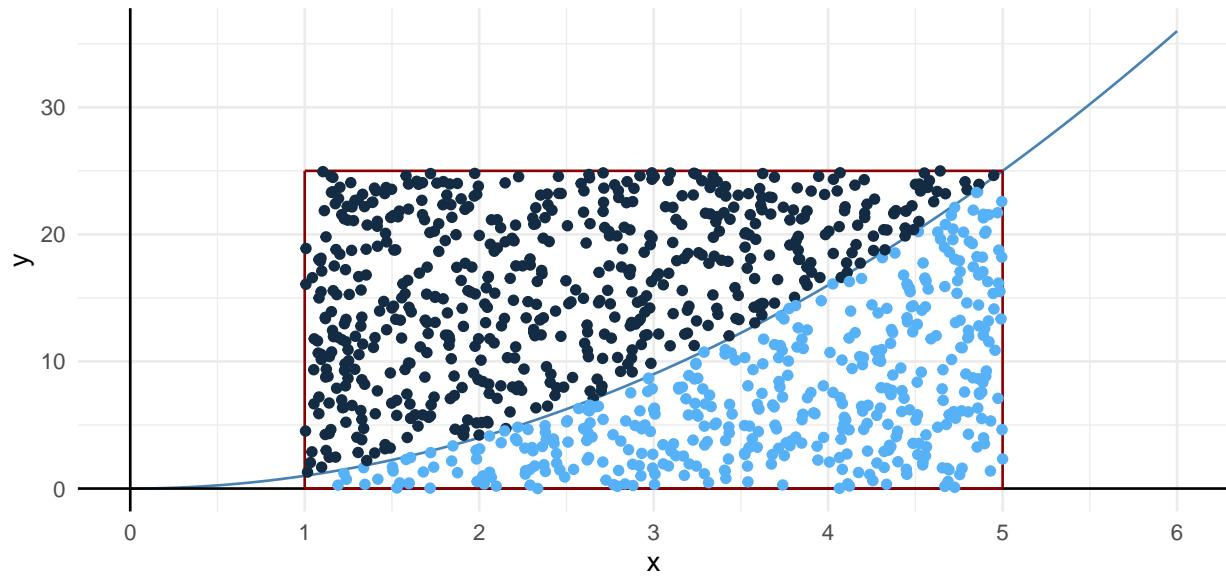
$N = 1000$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 1000)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

Hasil Simulasi dengan 1000 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.422



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##
## $`Luas area di bawah kurva`
## [1] 42.2
##
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`
## [1] 0.8666667
```

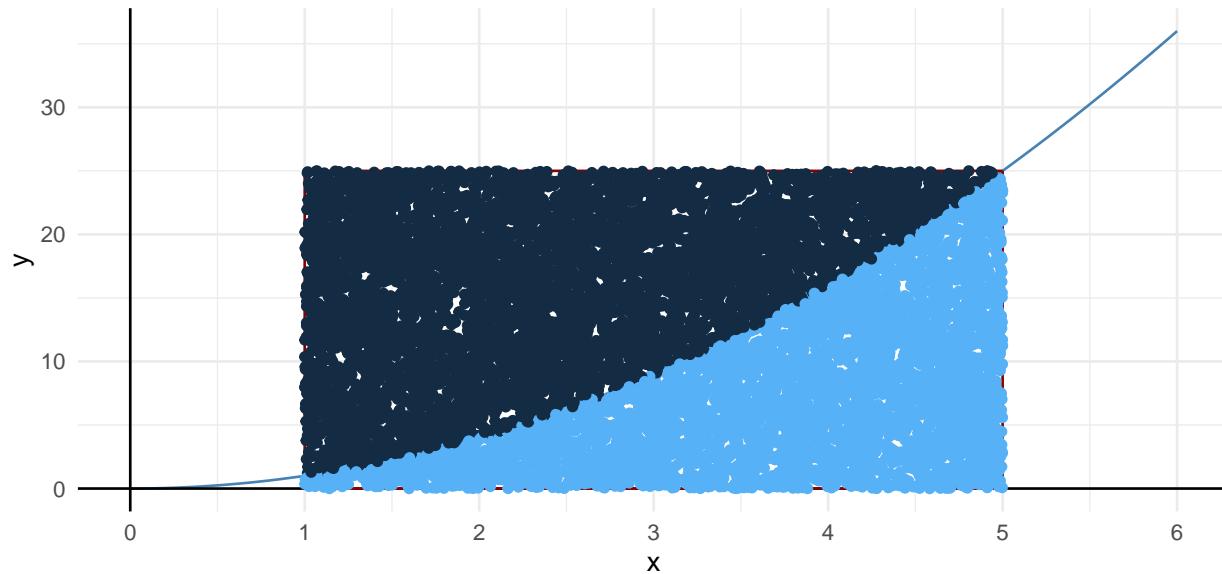
$N = 10000$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 10000)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

Hasil Simulasi dengan 10000 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.4204



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##  
## $`Luas area di bawah kurva`  
## [1] 42.04  
##  
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`  
## [1] 0.7066667
```

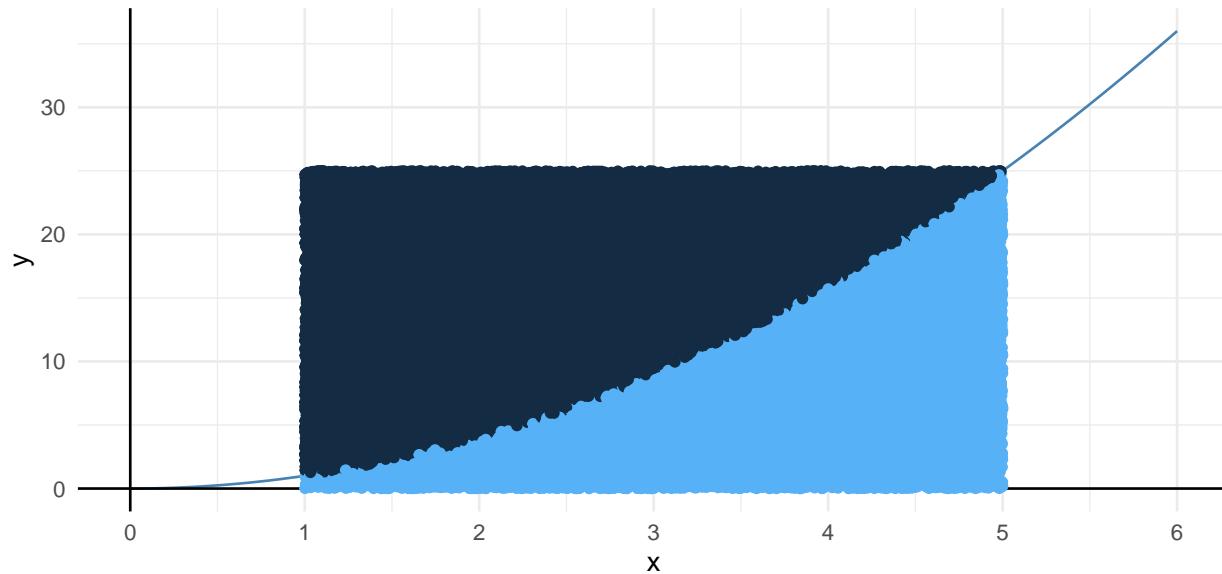
$N = 50000$

```
brute_force(f,x1 = 1,x2 = 5,y1 = 0,y2 = 25,N = 50000)
```

```
## $`Plot Brute Force`
```

Hasil Simulasi dengan 50000 titik

Didapat nilai rasio sebesar 0.41162



Digambar oleh 20921004 dengan R

```
##  
## $`Luas area di bawah kurva`  
## [1] 41.162  
##  
## $`Absolute selisih dg solusi eksak`  
## [1] 0.1713333
```

Bagaimana jika selang integralnya dipisah menjadi: \_

$$f(x) = \int_1^3 x^2 dx + \int_3^5 x^2 dx$$

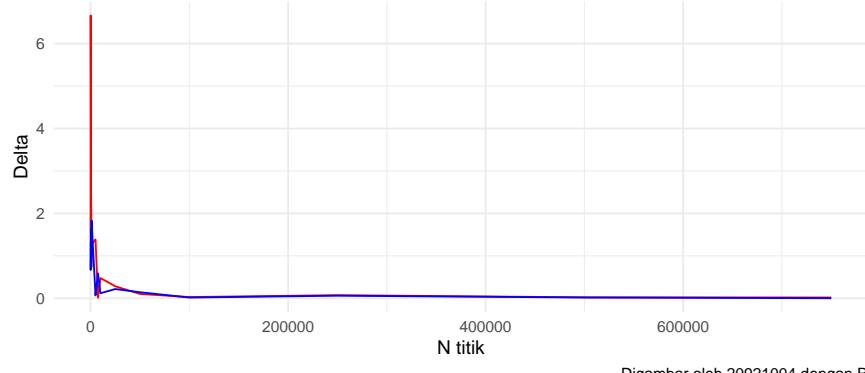
Menggunakan prinsip yang sama seperti bagian sebelumnya, saya akan buat tabel perbandingan sebagai berikut:

Table 1: Hasil Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

N	Selang 1-5	Selang 1-3 + 3-5	Delta 1-5	Delta 1-3 + 3-5
10	40.00000	40.00000	1.3333333	1.3333333
100	48.00000	42.00000	6.6666667	0.6666667
500	43.80000	39.70000	2.4666667	1.6333333
750	39.33333	40.60000	2.0000000	0.7333333
1000	42.60000	39.50000	1.2666667	1.8333333
5000	42.72000	41.40000	1.3866667	0.0666667
7500	41.32000	40.74667	0.0133333	0.5866667
10000	41.81000	41.21500	0.4766667	0.1183333
25000	41.61600	41.11600	0.2826667	0.2173333
50000	41.23200	41.19100	0.1013333	0.1423333
100000	41.36200	41.31650	0.0286667	0.0168333
250000	41.40600	41.27260	0.0726667	0.0607333
500000	41.35520	41.31560	0.0218667	0.0177333
750000	41.31547	41.33453	0.0178667	0.0012000

#### Visualisasi Tabel Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

Kedua garis melambangkan nilai absolut selisih solusi numerik dengan solusi eksak  
 Garis merah merupakan solusi numerik selang 1–5  
 Garis biru merupakan solusi numerik selang 1–3 + 3–5



Digambar oleh 20921004 dengan R

Figure 5: Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

**Konklusi Sementara** Secara intuitif, kita bisa melihat bahwa saat selang dibagi menjadi dua, sejatinya kita telah membuat  $2 \times$  titik lebih banyak dibanding menggunakan selang awal.

**Modifikasi Monte Carlo** Ide dari algoritma ini adalah men-generate titik *random* di selang integral, kemudian dihitung luas *square* yang ada.

$$I = \int_z^b f(x)dx$$

dihitung sebagai:

$$\langle F^N \rangle = \frac{b-a}{N+1} \sum_{i=0}^N f(a + (b-a)\xi_i)$$

dengan

$\xi_i$  adalah random number antara 0 dan 1

Berikut adalah *flowchart*-nya:

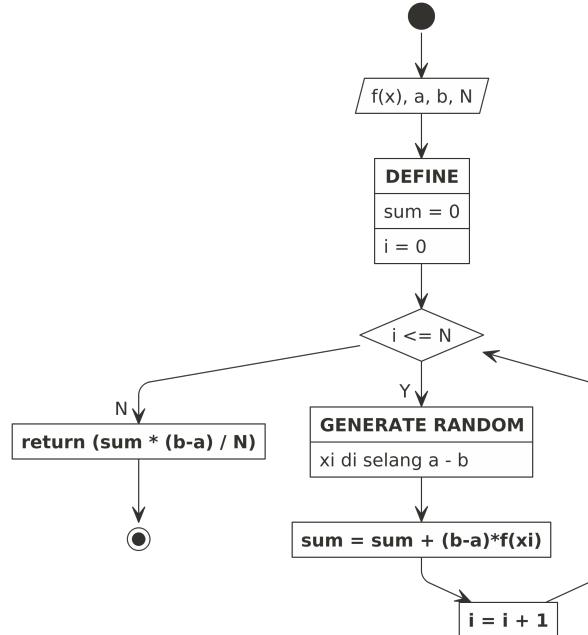


Figure 6: Flowchart Modifikasi Monte Carlo

Berdasarkan *flowchart* di atas, berikut adalah *function* di **R**-nya:

```
modif_monte = function(f,x1,x2,N){
  # generating random number
  x = runif(N,x1,x2)
  # hitung f(x)
  f_x = f(x)
  # hitung luas
  luas = (x2-x1) * f_x
  # mean luas
  mean_luas = mean(luas)
  # output
  return(mean_luas)
}
```

Saya menghitung *error* atau **selisih solusi numerik dengan solusi eksak** dengan cara:

$$\Delta = |eksak - numerik|$$

Dari *function* di atas, kita akan coba hitung dengan berbagai nilai  $N$  sebagai berikut:

Table 2: Hasil Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

N	Selang 1-5	Selang 1-3 + 3-5	Delta 1-5	Delta 1-3 + 3-5
3000	42.22309	41.46253	0.8897547	0.1291994
12000	41.40165	41.28160	0.0683191	0.0517376
21600	41.73932	41.24182	0.4059873	0.0915152
24500	41.23775	41.18672	0.0955806	0.1466114
24700	41.60213	41.37510	0.2687955	0.0417641
49200	41.11692	41.40470	0.2164123	0.0713709
51400	41.35195	41.31782	0.0186156	0.0155091
59600	41.44331	41.30592	0.1099737	0.0274152
64200	41.35690	41.37455	0.0235641	0.0412176
77400	41.31751	41.36612	0.0158210	0.0327909
84900	41.31039	41.34461	0.0229474	0.0112788
87200	41.31225	41.30852	0.0210865	0.0248118
90000	41.35734	41.33195	0.0240049	0.0013796
95300	41.40347	41.32844	0.0701346	0.0048931
101800	41.42818	41.38532	0.0948488	0.0519877
129000	41.27355	41.37909	0.0597799	0.0457542
130600	41.30303	41.36286	0.0302990	0.0295283
133000	41.35329	41.34103	0.0199549	0.0076954
154900	41.32095	41.34725	0.0123821	0.0139190
162600	41.30869	41.38177	0.0246384	0.0484413

N	Selang 1-5	Selang 1-3 + 3-5	Delta 1-5	Delta 1-3 + 3-5
168000	41.20464	41.37869	0.1286937	0.0453573
171500	41.14437	41.35605	0.1889662	0.0227166
175800	41.28788	41.30454	0.0454505	0.0287976
178700	41.40918	41.38978	0.0758460	0.0564496
190200	41.29724	41.33470	0.0360934	0.0013671
196600	41.28669	41.33502	0.0466427	0.0016901
220000	41.28196	41.28790	0.0513769	0.0454289
227900	41.34660	41.32072	0.0132679	0.0126132
234200	41.40019	41.34287	0.0668576	0.0095385
242200	41.39845	41.32358	0.0651198	0.0097576
251700	41.27497	41.28312	0.0583583	0.0502112
266400	41.32302	41.35201	0.0103101	0.0186729
269000	41.45644	41.34884	0.1231059	0.0155051
269600	41.29965	41.36156	0.0336825	0.0282231
270900	41.29207	41.32711	0.0412587	0.0062188
291800	41.26812	41.33205	0.0652161	0.0012872
305100	41.30785	41.31434	0.0254851	0.0189975
305800	41.30482	41.35716	0.0285182	0.0238275
308000	41.29354	41.35727	0.0397977	0.0239334
314000	41.28807	41.31077	0.0452640	0.0225665
342700	41.30375	41.32091	0.0295821	0.0124227
349800	41.41080	41.32000	0.0774663	0.0133298
353400	41.35378	41.32532	0.0204497	0.0080149
360100	41.30552	41.31221	0.0278151	0.0211201
380800	41.22983	41.33853	0.1034989	0.0051950
383000	41.28527	41.35891	0.0480632	0.0255777
409400	41.38674	41.33889	0.0534115	0.0055611
411700	41.39155	41.32304	0.0582207	0.0102960
416700	41.26996	41.31252	0.0633753	0.0208150
419400	41.35739	41.30801	0.0240525	0.0253238
432000	41.41241	41.33528	0.0790727	0.0019467
446100	41.26769	41.33420	0.0656418	0.0008629
452500	41.30891	41.33504	0.0244276	0.0017050
454600	41.39761	41.33784	0.0642733	0.0045107
454700	41.33335	41.32890	0.0000173	0.0044335
456400	41.31354	41.33260	0.0197961	0.0007336
461500	41.40540	41.36836	0.0720683	0.0350307
467400	41.34094	41.34563	0.0076041	0.0122930
472700	41.32831	41.31916	0.0050248	0.0141713
477300	41.25834	41.37500	0.0749951	0.0416684
482300	41.34669	41.32895	0.0133557	0.0043791
485700	41.41281	41.36892	0.0794788	0.0355888
492000	41.35964	41.33248	0.0263106	0.0008492

N	Selang 1-5	Selang 1-3 + 3-5	Delta 1-5	Delta 1-3 + 3-5
501000	41.25228	41.34820	0.0810490	0.0148647
501700	41.41828	41.35275	0.0849440	0.0194168
502900	41.31589	41.31500	0.0174479	0.0183299
510100	41.30127	41.33818	0.0320588	0.0048420
517600	41.31805	41.35085	0.0152838	0.0175154
529400	41.32100	41.32749	0.0123320	0.0058453
537000	41.32671	41.33404	0.0066257	0.0007093
557600	41.37198	41.33928	0.0386481	0.0059514
564700	41.27800	41.32725	0.0553302	0.0060794
564800	41.42796	41.33177	0.0946302	0.0015635
567000	41.36857	41.33554	0.0352359	0.0022080
570400	41.33525	41.31410	0.0019140	0.0192334
584700	41.31761	41.32786	0.0157231	0.0054728
590000	41.36641	41.33309	0.0330803	0.0002390
592800	41.36908	41.33339	0.0357459	0.0000528
599700	41.36300	41.31327	0.0296710	0.0200585
640900	41.39135	41.35485	0.0580150	0.0215212
643900	41.37183	41.31952	0.0384979	0.0138084
648400	41.35311	41.34193	0.0197785	0.0085955
649700	41.27533	41.32926	0.0580063	0.0040721
652500	41.28962	41.31169	0.0437175	0.0216421
658100	41.32567	41.33544	0.0076624	0.0021072
660200	41.35743	41.34451	0.0240993	0.0111782
661300	41.31959	41.33654	0.0137399	0.0032024
680800	41.27306	41.35094	0.0602746	0.0176063
691900	41.34924	41.32158	0.0159072	0.0117568
694200	41.30844	41.31936	0.0248912	0.0139725
698500	41.38028	41.32888	0.0469495	0.0044513
701100	41.30428	41.35840	0.0290527	0.0250703
703900	41.40866	41.31865	0.0753273	0.0146790
713900	41.32218	41.33601	0.0111563	0.0026751
717100	41.25048	41.32458	0.0828500	0.0087517
717300	41.34005	41.35299	0.0067140	0.0196603
721200	41.32773	41.32374	0.0056066	0.0095934
723300	41.36041	41.34728	0.0270758	0.0139430
728100	41.35877	41.33274	0.0254357	0.0005926
737600	41.31014	41.32308	0.0231917	0.0102538
740400	41.34014	41.33946	0.0068117	0.0061264
743800	41.31548	41.36247	0.0178578	0.0291380
749200	41.37818	41.34015	0.0448473	0.0068201
754300	41.34447	41.34185	0.0111399	0.0085192
765400	41.35494	41.35714	0.0216076	0.0238038
767500	41.35863	41.34468	0.0252979	0.0113463

N	Selang 1-5	Selang 1-3 + 3-5	Delta 1-5	Delta 1-3 + 3-5
778000	41.31514	41.33874	0.0181901	0.0054100
794100	41.31226	41.32180	0.0210727	0.0115327
794300	41.30135	41.34814	0.0319810	0.0148031
814400	41.33549	41.32920	0.0021533	0.0041306
821000	41.34491	41.36198	0.0115798	0.0286490
821200	41.32696	41.33449	0.0063719	0.0011615
824100	41.35438	41.32167	0.0210425	0.0116634
849400	41.38398	41.32028	0.0506495	0.0130542
854900	41.36465	41.34658	0.0313169	0.0132421
870200	41.34915	41.32766	0.0158121	0.0056728
887600	41.31429	41.33830	0.0190434	0.0049664
890700	41.34418	41.33145	0.0108502	0.0018866
894200	41.35450	41.33183	0.0211666	0.0015069
897900	41.37436	41.34130	0.0410265	0.0079669
908600	41.28060	41.34232	0.0527311	0.0089912
911200	41.35472	41.34279	0.0213845	0.0094593
921500	41.30842	41.34345	0.0249138	0.0101201
922300	41.30134	41.32793	0.0319965	0.0054024
930000	41.35566	41.33032	0.0223245	0.0030101
933200	41.34626	41.33746	0.0129285	0.0041302
942900	41.34259	41.33856	0.0092523	0.0052243
943100	41.30503	41.33417	0.0283020	0.0008399
947300	41.30746	41.32553	0.0258731	0.0078028
959900	41.28961	41.34609	0.0437233	0.0127530
966700	41.34460	41.33232	0.0112622	0.0010085
971600	41.31829	41.32024	0.0150426	0.0130883
974700	41.30869	41.34079	0.0246433	0.0074608
985800	41.34952	41.33723	0.0161849	0.0038976
986800	41.28106	41.31942	0.0522690	0.0139099

**Visualisasi Tabel Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak**

Kedua garis melambangkan nilai absolut selisih solusi numerik dengan solusi eksak

Garis merah merupakan solusi numerik selang 1–5

Garis biru merupakan solusi numerik selang 1–3 + 3–5

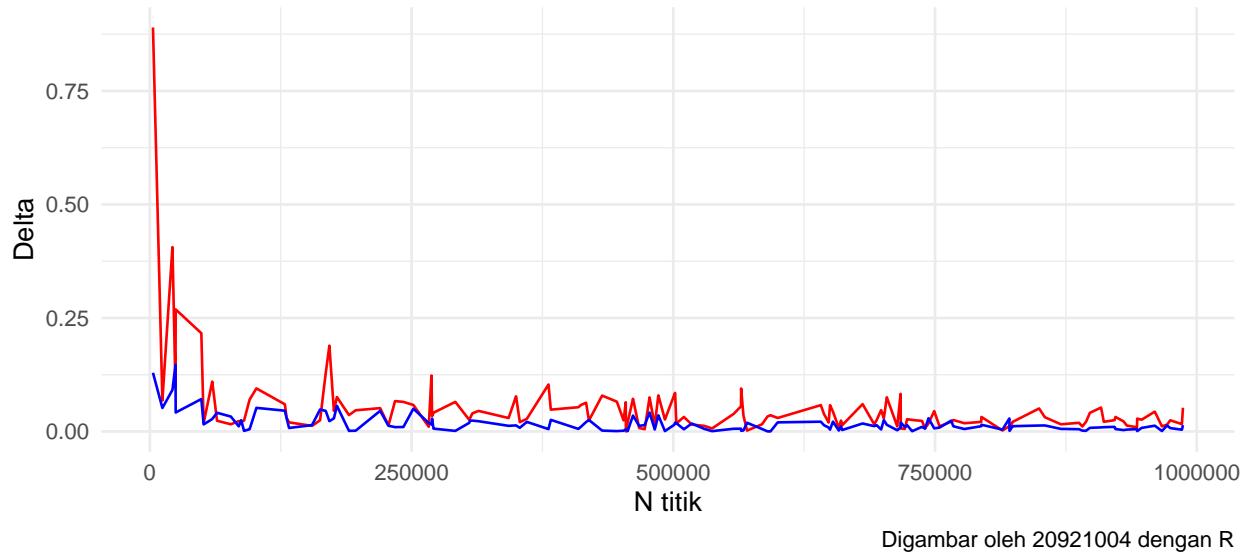


Figure 7: Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

## TASK 2

### Soal

Buatlah algoritma sederhana dengan metode Monte Carlo untuk mencari solusi dari integral berikut:

$$f(x) = \int_2^3 (x^2 + 4x \sin x) dx$$

Bandingkan dengan solusi analitiknya!

### Jawab

#### Analitik

Solusi analitik dari  $f(x) = \int (x^2 + 4x \sin x) dx$  adalah:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x \cos x + 4 \sin x$$

Sehingga:

$$\int_2^3 (x^2 + 4x \sin x) dx \approx 11.811358925$$

**Brute Force** Hal yang paling penting bagi metode ini adalah menentukan batas di sumbu  $y$ . Oleh karena itu, perhatikan grafik sebagai berikut:

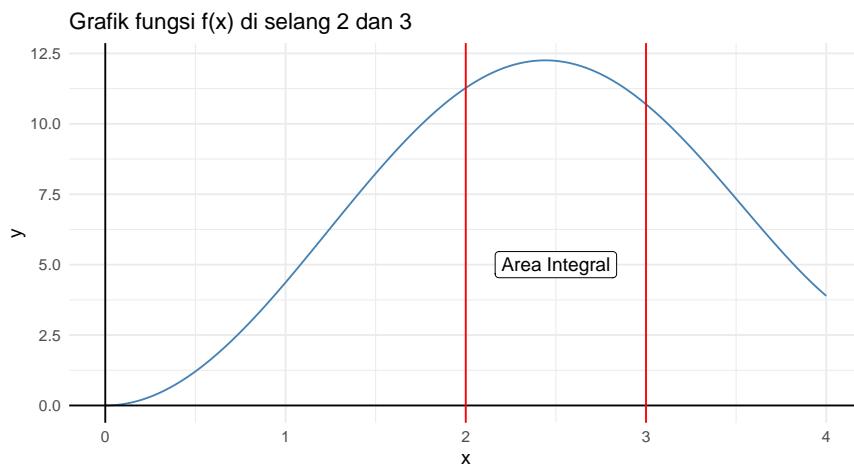


Figure 8: Grafik  $f(x)$

Untuk sumbu  $x$ , batas titik yang akan di-random sudah jelas, yakni:  $[2, 3]$ .  
 Lantas bagaimana dengan sumbu  $y$ ?

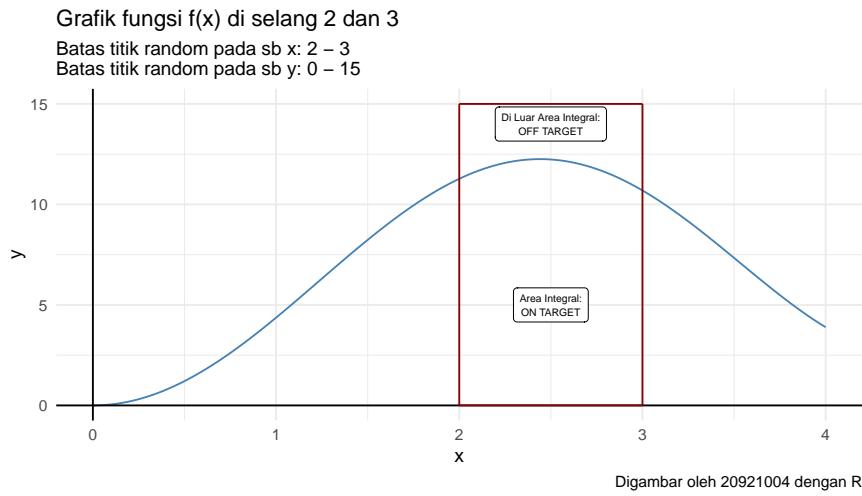


Figure 9: Penentuan Batas Titik Random

Kita bisa pilih batas atas  $y = 15$  sehingga nanti luas dihitung dari  $L = (3 - 2) \times 15 \times rasio_{darts}$ . Menggunakan algoritma pada bagian sebelumnya, didapatkan:

Table 3: Hasil Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

N	Selang 2-3	Delta 2-3
10	10.50000	1.3113589
100	12.30000	0.4886411
500	11.94000	0.1286411
750	11.54000	0.2713589
1000	11.85000	0.0386411
5000	11.80500	0.0063589
7500	11.80600	0.0053589
10000	11.89200	0.0806411
25000	11.73600	0.0753589
50000	11.81460	0.0032411
100000	11.81145	0.0000911
250000	11.81724	0.0058811
500000	11.81712	0.0057611
750000	11.80910	0.0022589

**Modifikasi Monte Carlo** Sedangkan berikut adalah hasil perhitungan menggunakan algoritma lainnya:

Table 4: Hasil Perbandingan Solusi Numerik dan Eksak

N	Selang 2-3	Delta 2-3
10	11.74438	0.0669802
100	11.90760	0.0962401
500	11.83855	0.0271922
750	11.80131	0.0100487
1000	11.79580	0.0155607
5000	11.81216	0.0007960
7500	11.80960	0.0017622
10000	11.81393	0.0025742
25000	11.80912	0.0022342
50000	11.81703	0.0056670
100000	11.80863	0.0027331
250000	11.81162	0.0002596
500000	11.81174	0.0003788
750000	11.81159	0.0002341

== END ==