

SPIRAL OPTIMIZATION ALGORITHM

Tugas Kuliah
SK5001 Analisis Numerik Lanjut

Mohammad Rizka Fadhli
NIM: 20921004

16 October 2021

PENDAHULUAN

Bahasa yang Digunakan

Saya membuat program *spiral optimization algorithm* menggunakan bahasa **R** yang bisa dieksekusi pada versi minimal 3.5.3.

Spiral Optimization Algorithm

Spiral Optimization Algorithm adalah salah satu metode *meta heuristic* yang digunakan untuk mencari minimum global dari suatu sistem persamaan.

Algoritmanya mudah dipahami dan intuitif tanpa harus memiliki latar keilmuan tertentu. Proses kerjanya adalah dengan melakukan *random number generating* pada suatu selang dan melakukan rotasi sekaligus kontraksi dengan titik paling minimum pada setiap iterasi sebagai pusatnya.

Berikut adalah algoritmanya:

INPUT

```
m >= 2 # jumlah titik
theta # sudut rotasi (0 <= theta <= 2pi)
r      # kontraksi
k_max  # iterasi maksimum
```

PROCESS

```
1 generate m buah titik secara acak
  x_i

2 initial condition
  k = 0 # untuk keperluan iterasi

3 cari x_* yang memenuhi
  min(f(x_*))

4 lakukan rotasi dan kontraksi semua x_i
  x_* sebagai pusat rotasi
  k = k + 1

5 ulangi proses 3 dan 4
```

```
6 hentikan proses saat k = k_max
  output x_*
```

Berdasarkan algoritma di atas, salah satu proses yang penting adalah melakukan **rotasi** dan **konstraksi** terhadap semua titik yang telah di-*generate*.

Agar memudahkan, saya akan memberikan ilustrasi geometri beserta operasi matriks aljabar terkait kedua hal tersebut.

Penjelasan Geometri

Operasi Matriks Rotasi

Misalkan saya memiliki titik $x \in \mathbb{R}^2$. Untuk melakukan rotasi sebesar θ , saya bisa menggunakan suatu matriks $A_{2 \times 2}$ berisi fungsi-fungsi trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan operasi matriks di atas, saya membuat **program** di **R** dengan beberapa modifikasi. Sebagai contoh, saya akan membuat program yang bertujuan untuk melakukan rotasi suatu titik $x \in \mathbb{R}$ sebanyak n kali:

```
# mendefinisikan program
rotasi_kan = function(x0,rot){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
            ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
```

```

plot =
  ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
               data = final,
               color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

# enrich dengan garis panah
panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)

# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
    geom_segment(aes(x = x_start,
                     xend = x_end,
                     y = y_start,
                     yend = y_end),
                 data = panah,
                 arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

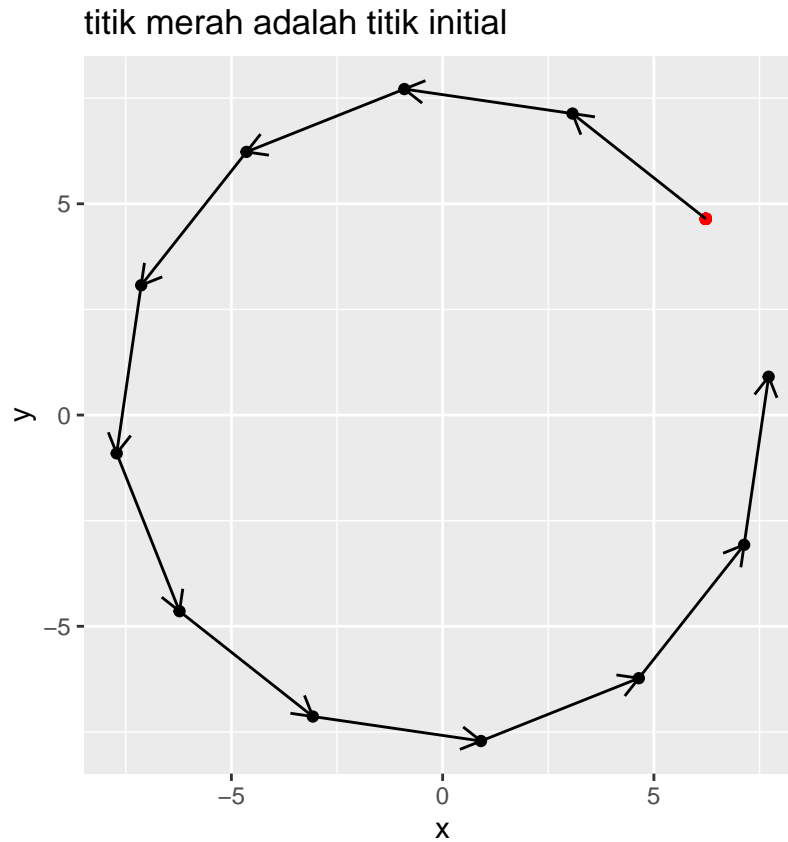
```

Berikut adalah uji coba dengan titik sembarang berikut ini:

```
# uji coba
rot = 12 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



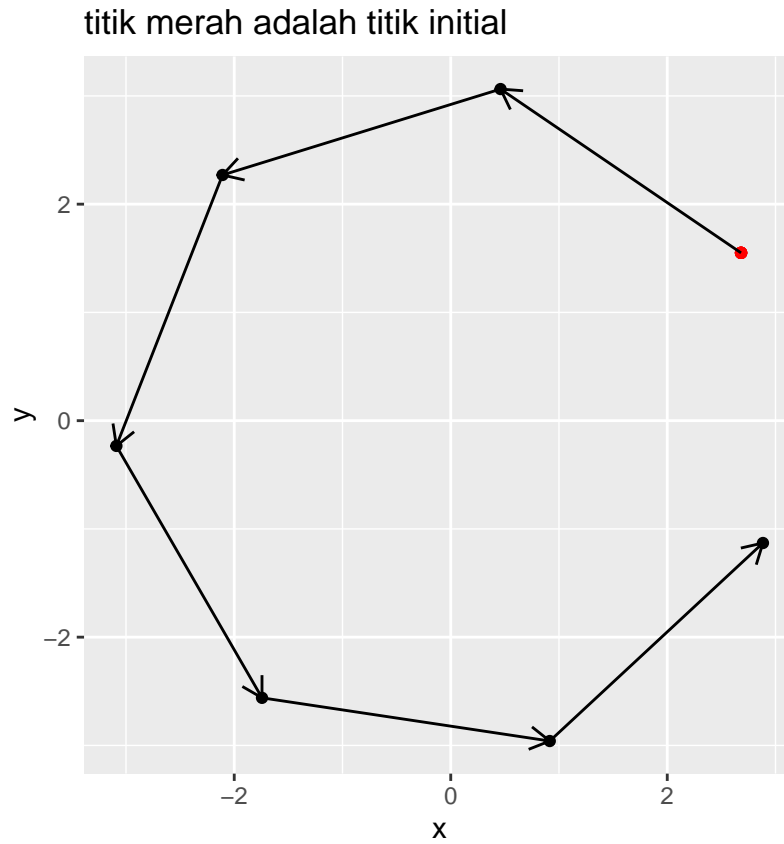
```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  6.228  4.643
## 2  3.072  7.135
## 3 -0.907  7.715
## 4 -4.643  6.228
## 5 -7.135  3.072
## 6 -7.715 -0.907
## 7 -6.228 -4.643
## 8 -3.072 -7.135
## 9  0.907 -7.715
## 10 4.643 -6.228
## 11 7.135 -3.072
## 12 7.715  0.907
```

Uji coba kembali dengan titik sembarang lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 7 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,10) # generate random titik

rotasi_kan(x0,rot)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  2.6818  1.5503
## 2  0.4600  3.0633
## 3 -2.1082  2.2696
## 4 -3.0889 -0.2332
## 5 -1.7436 -2.5604
## 6  0.9147 -2.9595
## 7  2.8842 -1.1301
```

Operasi Matriks Rotasi dan Konstraksi

Jika pada sebelumnya saya **hanya melakukan rotasi**, kali ini saya akan memodifikasi operasi matriks agar melakukan rotasi dan konstraksi secara bersamaan. Untuk melakukan hal tersebut, saya akan definisikan $r, 0 < r < 1$ dan melakukan operasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu saya akan modifikasi program **R** sebelumnya menjadi sebagai berikut:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_kan = function(x0,rot,r){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan konstraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% x0
    xk = r * xk
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

  # enrich dengan garis panah
```

```

panah = data.frame(
  x_start = final$x[1:(rot-1)],
  x_end = final$x[2:rot],
  y_start = final$y[1:(rot-1)],
  y_end = final$y[2:rot]
)
# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
  geom_segment(aes(x = x_start,
                    xend = x_end,
                    y = y_start,
                    yend = y_end),
               data = panah,
               arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

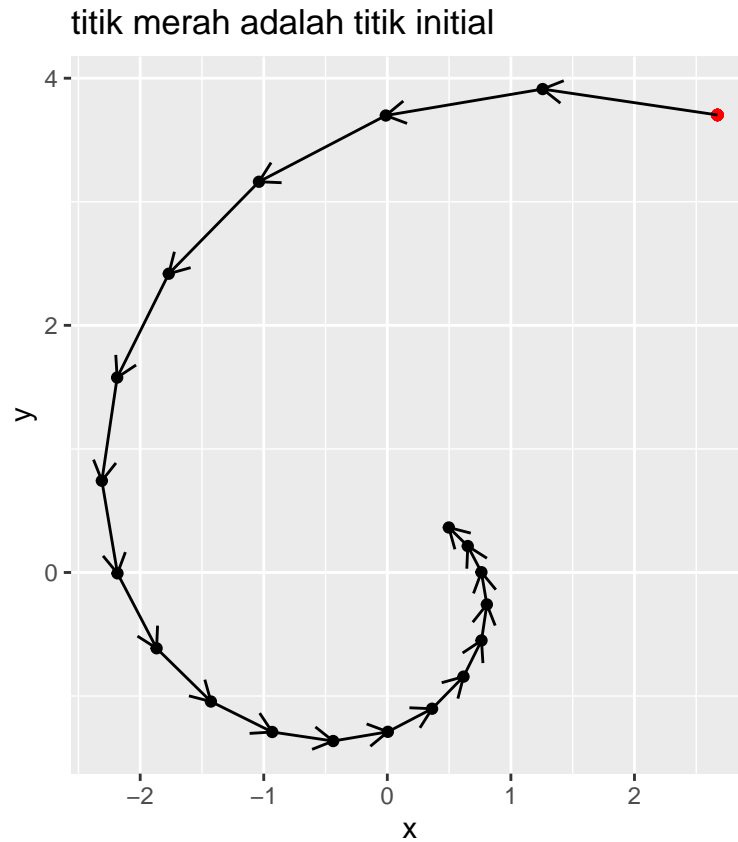
# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

```

Saya akan uji coba untuk sembarang titik berikut ini:

```
# uji coba
rot = 20 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .9
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



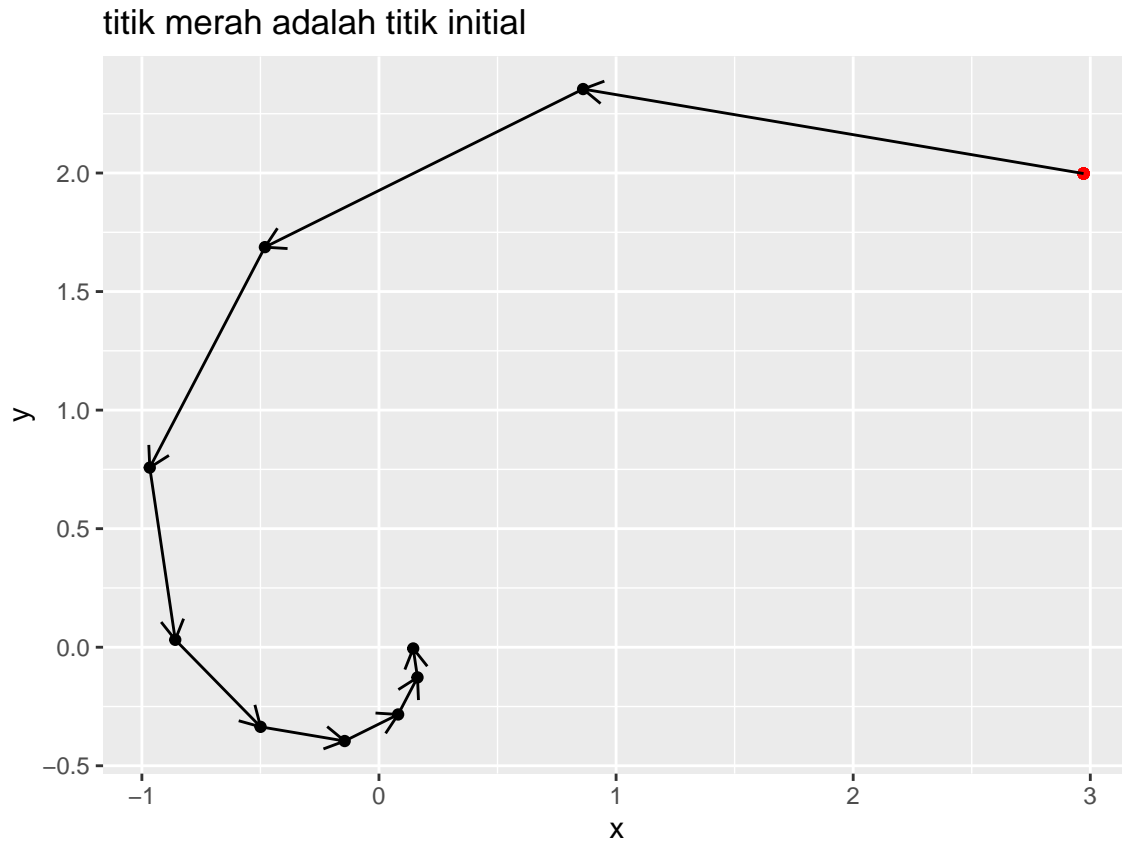
```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  2.671564  3.702472
## 2  1.257013  3.912136
## 3 -0.012083  3.698191
## 4 -1.038866  3.162109
## 5 -1.768649  2.417686
## 6 -2.186272  1.577532
## 7 -2.310077  0.742254
## 8 -2.183745 -0.007135
## 9 -1.867194 -0.613440
## 10 -1.427619 -1.044370
## 11 -0.931517 -1.290972
## 12 -0.438293 -1.364078
## 13  0.004213 -1.289480
## 14  0.362230 -1.102559
```


##	15	0.616690	-0.842995
##	16	0.762306	-0.550051
##	17	0.805474	-0.258808
##	18	0.761425	0.002488
##	19	0.651050	0.213893
##	20	0.497780	0.364149

Saya akan uji coba kembali untuk sembarang titik lainnya berikut ini:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
r = .7
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  2.97166  1.997749
## 2  0.86091  2.354038
## 3 -0.48102  1.687343
## 4 -0.96667  0.757646
## 5 -0.85917  0.031330
## 6 -0.49945 -0.335762
## 7 -0.14469 -0.395643
## 8  0.08085 -0.283592
## 9  0.16247 -0.127338
## 10 0.14440 -0.005266
```

Operasi Matriks Rotasi dan Kontraksi dengan Titik y Sebagai Pusatnya

Salah satu prinsip utama dari *spiral optimization algorithm* adalah menjadikan titik x^* sebagai pusat rotasi di setiap iterasinya. Oleh karena itu kita akan modifikasi program bagian sebelumnya menjadi sebagai berikut:

```
# mendefinisikan program
rotasi_konstraksi_pusat_kan = function(x0,rot,r,x_bintang){
  # menghitung theta
  theta = 2*pi/rot

  # definisi matriks rotasi
  A = matrix(c(cos(theta),-sin(theta),
               sin(theta),cos(theta)),
             ncol = 2,byrow = T)

  # membuat template
  temp = vector("list")
  temp[[1]] = x0

  # proses rotasi dan kontraksi
  for(i in 2:rot){
    xk = A %*% (x0-x_bin)
    xk = x_bin + (r * xk)
    temp[[i]] = xk
    x0 = xk
  }

  # membuat template data frame
  final = data.frame(x = rep(NA,rot),
                    y = rep(NA,rot))

  # gabung data dari list
  for(i in 1:rot){
    tempura = temp[[i]]
    final$x[i] = tempura[1]
    final$y[i] = tempura[2]
  }

  # membuat plot
  plot =
    ggplot() +
    geom_point(aes(x,y),data = final) +
    geom_point(aes(x[1],y[1]),
              data = final,
              color = "red") +
    coord_equal() +
    labs(title = "titik merah adalah titik initial")

  # enrich dengan garis panah
  panah = data.frame(
    x_start = final$x[1:(rot-1)],
    x_end = final$x[2:rot],
    y_start = final$y[1:(rot-1)],
    y_end = final$y[2:rot]
  )
}
```

```

# menambahkan garis panah ke plot
plot =
  plot +
    geom_segment(aes(x = x_start,
                     xend = x_end,
                     y = y_start,
                     yend = y_end),
                 data = panah,
                 arrow = arrow(length = unit(.3,"cm")))
)

# menyiapkan output
list("Grafik rotasi" = plot,
     "Titik-titik rotasi" = final)
}

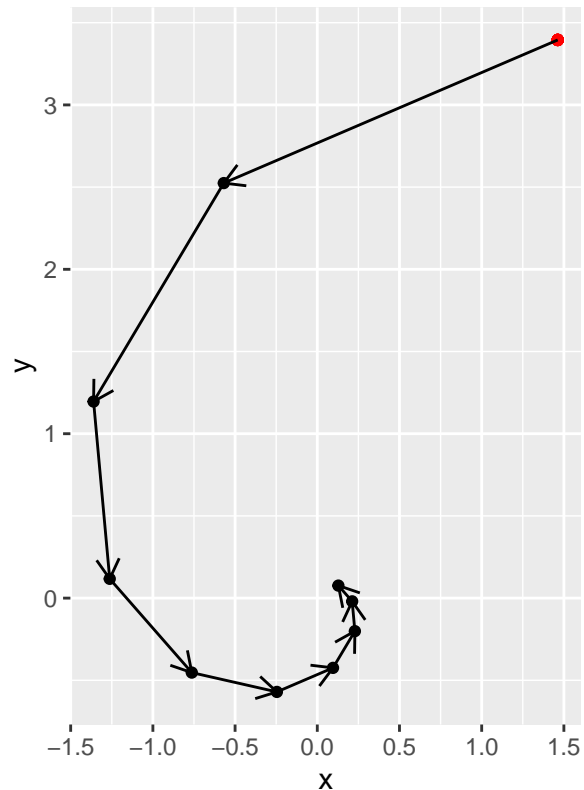
```

Saya akan coba dengan sembarang titik berikut:

```
# uji coba
rot = 10 # berapa banyak rotasi
x0 = rand_titik(0,4) # generate random titik
x_bintang = c(1,1) # contoh pusat rotasi
r = .7
rotasi_konstraksi_kan(x0,rot,r)
```

```
## $`Grafik rotasi`
```

titik merah adalah titik initial



```
##
## $`Titik-titik rotasi`
##      x      y
## 1  1.46256  3.39516
## 2 -0.56867  2.52449
## 3 -1.36075  1.19567
## 4 -1.26257  0.11724
## 5 -0.76324 -0.45309
## 6 -0.24581 -0.57063
## 7  0.09558 -0.42429
## 8  0.22870 -0.20096
## 9  0.21220 -0.01970
## 10 0.12828  0.07615
```

Program *Spiral Optimization Algorithm*

Berbekal program yang telah dituliskan di bagian sebelumnya, kita akan sempurnakan program untuk melakukan *spiral optimization* sebagai berikut:

SOAL 1

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \cos(2x_1) - \cos(2x_2) - 0.4 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2(x_2 - x_1) + \sin(x_2) - \sin(x_1) - 1.2 = 0$$

dengan $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$

JAWAB

Contour Plot

SOAL 2

Tentukanlah akar-akar sistem persamaan berikut dengan **SOA**. Buatlah terlebih dahulu *contour plot*-nya:

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) + 2 \cos(x_1) \sin(x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1) \sin(x_2) + 2 \sin(x_1) \cos(x_2) = 0$$

dengan $0 \leq x_1, x_2 \leq 2\pi$