UPDATE PROGRESS

Penelitian Mandiri dalam Sains Komputasi
Metode Branch and Bound pada MILP

Mohammad Rizka Fadhli
20921004@mahasiswa.itb.ac.id

12 November 2021

PENDAHULUAN

Pada minggu lalu, saya telah menjelaskan bagaimana metode *simplex* bisa dilakukan secara:

1. Geometris,
2. Transisi geometris ke aljabar,
3. Operasi matriks (*tableau*).

Sebagai pengingat, metode *simplex* digunakan untuk menyelesaikan masalah *linear programming*. Sedangkan masalah yang saya hadapi (***supplier selection problem***) merupakan masalah *mixed integer linear programming*.

Lantas bagaimana saya bisa menyelesaikannya?

SOLUSI

Metode *Branch and Bound* untuk *MILP*

Metode *simplex* adalah metode eksak yang digunakan untuk menyelesaikan *linear programming*. Solusi yang dihasilkan merupakan bilangan *real* atau kontinu. Pada *MILP*, variabel yang terlibat sangat beragam (*integer*, *binary*, dan kontinu). Membulatkan bilangan solusi *linear programming* untuk mendapatkan solusi *integer* atau *binary* dari suatu masalah *MILP* tidak menjamin keoptimalan tercapai.

Oleh karena itu, kita akan melakukan pendekatan tertentu dari *linear programming* agar hasilnya bisa digunakan di *MILP*.

Relaxation of Discrete Optimization Models

Salah satu pendekatan yang bisa dilakukan adalah melakukan *constraint relaxation* [@benoit].

Definisi Model R disebut dengan *constraint relaxation* dari model P jika:

- Setiap *feasible solution* dari P juga *feasible* di R.
- P dan R memiliki fungsi objektif yang sama.

Contoh Berikut adalah *original MILP*:

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Relaxation I : *relax constraints RHS*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 50$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Relaxation II : *Drop constraint*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Relaxation III : *remove integrality*

$$\min_{x,y} 7x_1 + x_2 + 3y_1 + 6y_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 10x_2 + 2y_1 + y_2 \geq 100$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, 0 \leq y_1, y_2 \leq 1$$

Linear Programming Relaxation

Definisi *LP relaxation* dari *MILP* dibentuk dengan memperlakukan variabel diskrit sebagai variabel kontinu sambil mempertahankan semua *constraints* yang ada [@benoit].

$$y \in \{0, 1\} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

Oleh karena itu bisa terjadi hal sebagai berikut:

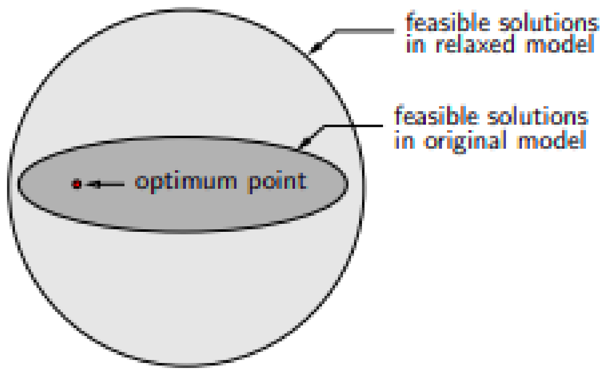

Figure 1: Solusi LP Relaxation

Apakah *LP relaxation* menjamin mendapatkan hasil yang *valid*?

Berikut adalah sifat dari *LP relaxation*:

1. Jika *LP relaxation infeasible*, maka model *MILP* asalnya juga.
2. Hasil optimal *LP relaxation* dari *MILP* yang bertujuan untuk maksimisasi berada pada *upper bound*.
3. Hasil optimal *LP relaxation* dari *MILP* yang bertujuan untuk minimisasi berada pada *lower bound*.
4. Jika suatu solusi optimal *LP relaxation* ternyata *feasible*, maka solusi tersebut optimal di model *MILP* asalnya.

Algoritma *Branch and Bound*

Algoritma *branch and bounds* mengkombinasikan beberapa strategi *relaxation* secara iteratif untuk memilih kemungkinan solusi paling optimal.

Ilustrasi Perhatikan contoh berikut:

$$\max z = 4x_1 - x_2$$

$$\text{s.t. } 7x_1 - 2x_2 \leq 14$$

$$x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Misalkan S adalah himpunan solusi *feasible* dari *LP relaxation* (dibuat suatu *LP relaxation* dengan x berupa variabel kontinu). Menggunakan metode simplex kita bisa dapatkan $x_1 = 2.857143, x_2 = 3, z = 8.428571$.

Kita misalkan $z* = -\infty$, karena x_1 bukan integer, maka kita akan uat *branch out* dari variabel ini.

$$S_1 = S \cap \{x : x_1 \leq 2\}$$

$$S_2 = S \cap \{x : x_1 \geq 3\}$$

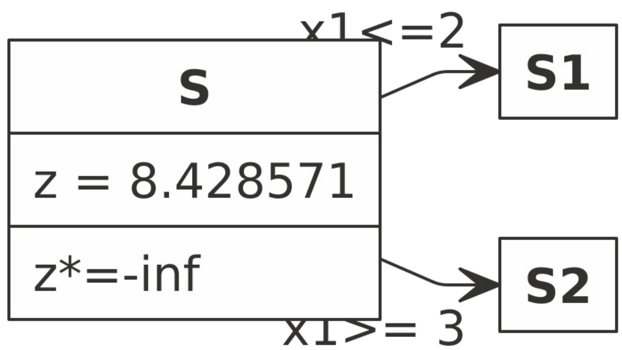

Figure 2: Branch Out Tahap I

Kita akan evaluasi kembali dengan *LP relaxation* yang baru.

- Pada S_1 kita dapatkan dengan metode *simplex* solusinya adalah $x_1 = 2, x_2 = 0.5, z = 0.75$. Oleh karena itu, kita akan *branch out* kembali dengan pemecahan sebagai berikut:

$$S_{11} = S \cap \{x : x_2 = 0\}$$

$$S_{12} = S \cap \{x : x_2 \geq 1\}$$

- Pada S_2 kita dapatkan bahwa kondisi $x_1 \geq 3$ membuat model menjadi *infeasible*. Kita akan hentikan *branch out* dari S_2.

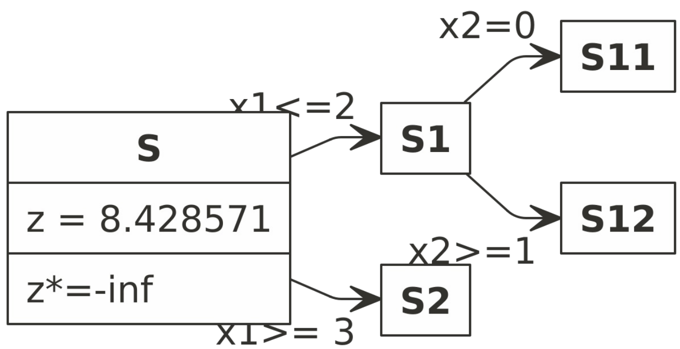

Figure 3: Branch Out Tahap II

Kita lakukan kembali *LP relaxation* pada S_{11} dan S_{12} sebagai berikut:

- Pada S_{12}, metode simplex menghasilkan solusi $x_1 = 2, x_2 = 1, z = 7$. Kita akan *update* nilai $z* = 7$.
- Pada S_{11}, metode simplex menghasilkan solusi $x_1 = 1.5, x_2 = 0, z = 6$. Karena $z < z*$, maka tidak ada lagi *branch out*.

Kesimpulan Solusi optimal didapatkan pada S_{12}.