PEKERJAAN RUMAH I

Pengantar Sains Komputasi

20921004 Mohammad Rizka Fadhli

19 September 2022

SOAL I

a. Write the differential equations for modelling competition with constrained growth for both populations.
b. Find all equilibrium solutions to these equations.

Jawab

Untuk memudahkan penulisan jawaban, saya akan mengambil contoh yang sama dengan buku yakni dua populasi WTS dan BTS.

Modelling competition dengan *unconstrained growth* pada dua populasi bisa dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dW}{dt} = r_1 W - wWB$$

$$\frac{dB}{bt} = r_2 B - bBW$$

Dengan:

1. W adalah populasi WTS.
2. B adalah populasi BTS.
3. r_1 adalah *growth rate* untuk W.
4. r_2 adalah *growth rate* untuk B.
5. w adalah *death rate* untuk W saat berinteraksi dengan B.
6. b adalah *death rate* untuk B saat berinteraksi dengan W.

Untuk memodifikasi model tersebut agar menjadi ***constrained growth*** pada kedua populasi, kita memerlukan dua parameter baru, yakni *carrying capacity* untuk kedua populasi.

Misalkan:

1. M_1 adalah *carrying capacity* untuk WTS.
2. M_2 adalah *carrying capacity* untuk BTS.

Model *Constrained Growth*

Maka berikut adalah modelnya:

$$\frac{dW}{dt} = r_1(1 - \frac{W}{M_1})W - wWB$$

$$\frac{dB}{bt} = r_2(1 - \frac{B}{M_2})B - bBW$$

Solusi *Equilibrium*

Equilibrium pada sistem persamaan diferensial di atas terjadi pada:

$\frac{dW}{dt} = 0$, yakni saat *growth* WTS sama dengan *death* sehingga tidak ada perubahan pada laju W. Mari kita cari solusi *equlibrium* pada populasi WTS:

$$\begin{gathered}\frac{dW}{dt} = r_1(1 - \frac{W}{M_1})W - wWB = 0 \\ r_1(1 - \frac{W}{M_1})W = wWB \\ r_1(1 - \frac{W}{M_1}) = wB \\ r_1 = \frac{wB}{1 - \frac{W}{M_1}}\end{gathered}$$

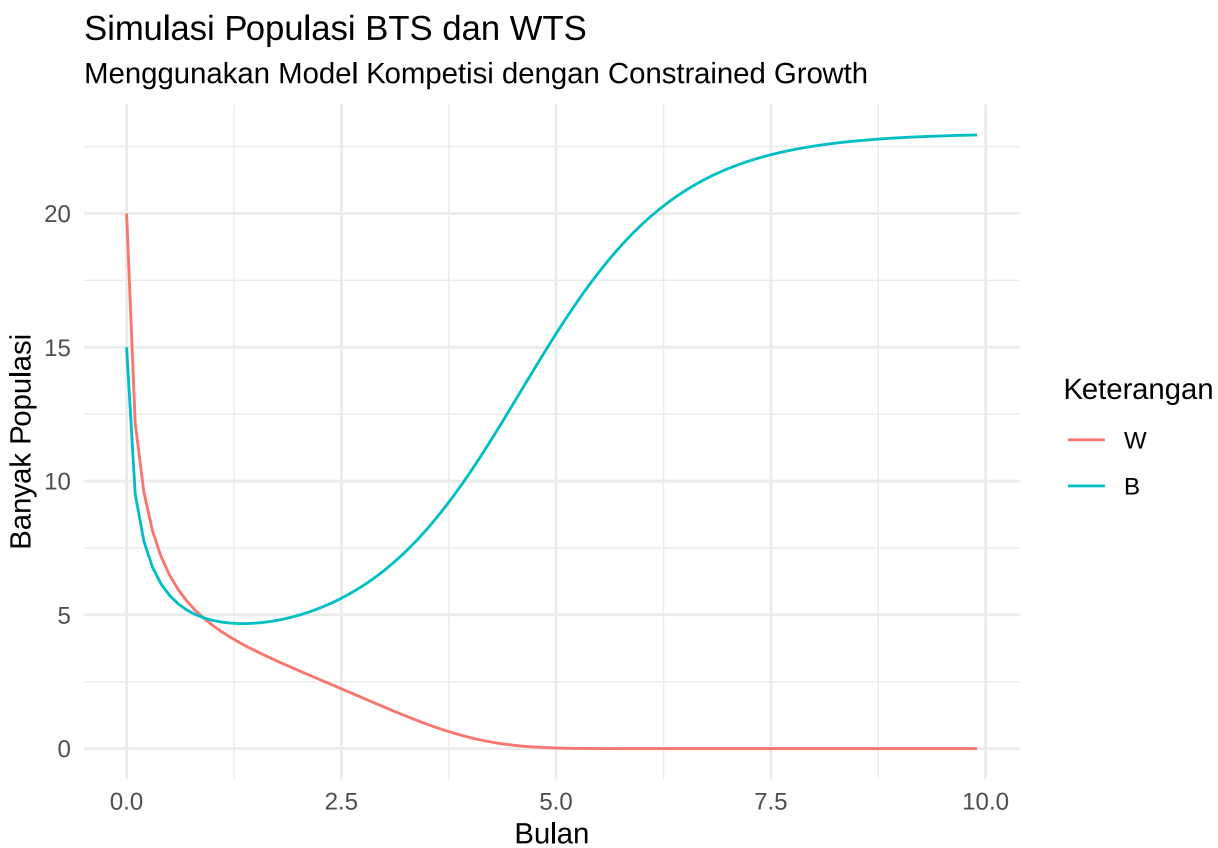
$\frac{dB}{dt} = 0$, yakni saat *growth* BTS sama dengan *death* sehingga tidak ada perubahan pada laju B. Mari kita cari solusi *equlibrium* pada populasi BTS:

$$\begin{gathered}\frac{dB}{bt} = r_2(1 - \frac{B}{M_2})B - bBW = 0 \\ r_2(1 - \frac{B}{M_2})B = bBW \\ r_2(1 - \frac{B}{M_2}) = bW \\ r_2 = \frac{bW}{1 - \frac{B}{M_2}}\end{gathered}$$

Simulasi

Untuk membuktikan bahwa model yang dituliskan di atas sudah sesuai dengan kondisi yang ada, kita akan lakukan simulasi dengan beberapa parameter sebagai berikut:

```r
W_0 = 20 # initial population WTS
B_0 = 15 # initial population BTS
w = .27 # death rate WTS
b = .2  # death rate BTS
M1 = 23 # carrying capacity untuk WTS
M2 = 23 # carrying capacity untuk BTS
r1 = 1 # growth WTS
r2 = 1 # growth BTS
```



Terlihat dengan jelas bahwa populasi WTS terus menurun sedangkan populasi BTS meningkat namun akan terbatas saat populasi $BTS = 23$.

SOAL 2

a. Write the differential or difference equations for predator-prey model where there is a carrying capacity M for the predator.
b. Write the algorithm that model this interaction.

Jawab

Untuk memudahkan penulisan jawaban, saya akan gunakan contoh yang telah ada pada buku, yakni populasi *squirrel* $s(t)$ dan *hawk* $h(t)$.

Bentuk umum dari *Model Lotka-Volterra* adalah sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = k_s s - k_{hs} hs$$

$$\frac{dh}{dt} = k_{sh} sh - k_h h$$

Kita akan memodifikasi pertumbuhan *predator*, yakni *hawk* dengan menambahkan *carrying capacity* M.

Modifikasi Model dengan *Carrying Capacity*

Maka bentuk modelnya adalah sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = k_s s - k_{hs} hs$$

$$\frac{dh}{dt} = k_{sh}(1 - \frac{h}{M}) sh - k_h h$$

Persamaan Beda

Sedangkan berikut adalah bentuk persamaan bedanya:

$$\Delta s = k_s \times s(t - \Delta t) - k_{hs} \times h(t - \Delta t) \times s(t - \Delta t)$$

$$\Delta h = k_{sh} \times (1 - \frac{h(t - \Delta t)}{M}) \times s(t - \Delta t) \times h(t - \Delta t) - k_h \times h(t - \Delta t)$$

Algoritma

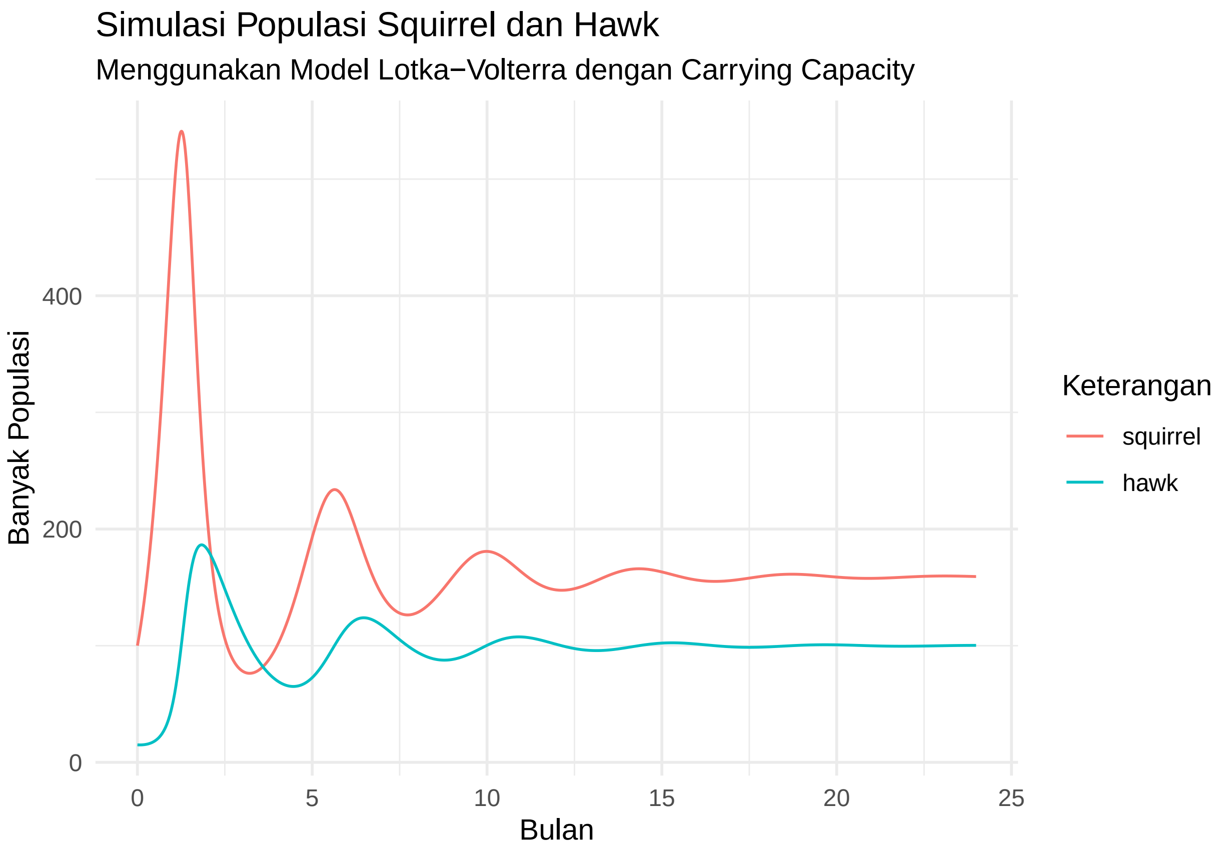
Berikut adalah algoritmanya:

```
# definisikan:
  h(0)    # initial populasi hawk
  s(0)    # initial populasi squirrel
  k_s     # growth rate squirrel
  k_hs    # death rate squirrel karena dimangsa hawk
  k_sh    # growth rate hawk karena memangsa squirrel
  k_h     # death rate hawk
  M       # carrying capacity untuk hawk

# untuk kebutuhan iterasi, definisikan:
  t           # banyak waktu
  max_iter    # banyak iterasi

# hitung
  delta_t = t / max_iter

# looping
  for i 1 to max_iter
      delta_s = k_s * s(i-1) * delta_t - k_hs * h(i-1) * s(i-1) * delta_t
      s(i) = s(i-1) + delta_s
      delta_h = k_sh * (1 - h(i-1) / M) * s(i-1) * h(i-1) * delta_t - k_h * h(i-1) * delta_t
      h(i) = h(i-1) + delta_h
```

Simulasi

Untuk menguji algoritma di atas, kita akan lakukan simulasi dengan menggunakan paramater seperti yang ada di buku dengan penambahan parameter M.

```r
h = c(15)     # initial populasi hawk
s = c(100)    # initial populasi squirrel
k_s = 2       # growth rate squirrel
k_hs = 0.02   # death rate squirrel karena dimangsa hawk
k_sh = 0.01   # growth rate hawk karena memangsa squirrel
k_h = 1.06    # death rate hawk
M = 300       # carrying capacity untuk hawk
```



Terlihat pada simulasi di atas, populasi *squirrel* dan *hawk* akan menjadi konstan di akhir periode waktu.