# Training Optimization FINANMOS

Rangkuman Short Course

Ikanx Fadhli @nutrifood

26 Maret 2021

# Contents

# 1 Koperasi Susu Berkah

## 1.1 Masalah

Manajemen **Koperasi Susu Berkah** (**KSB**) setiap harinya menerima `1000` liter susu dari para anggotanya untuk diproduksi menjadi *yogurt* atau keju *mozarella*.

- Keuntungan dari setiap liter susu yang terjual adalah `Rp1.000`.
- Keuntungan dari *yogurt* yang terjual dari bahan satu liter susu adalah `Rp1.200`
- Sedangkan keuntungan keju *mozarella* dari bahan satu liter susu adalah `Rp900`.

Setelah menganalisa data penjualan, manajemen koperasi mendapatkan informasi sebagai berikut:

- Paling banyak `500` liter susu.
- *Yogurt* paling banyak bisa dibuat dari bahan `300` liter susu.
- Keju *mozarella* paling banyak bisa dibuat dari bahan `400` liter susu.

Dari informasi di atas, manajemen **KSB** ingin menentukan berapa banyak susu yang harus dibuat *yogurt*, susu yang harus dibuat keju *mozarella*, dan susu yang dijual langsung, agar keuntungan yang didapat maksimal.

## 1.2 Model Matematika

Dari kasus di atas, kita akan membuat model matematikanya.

### 1.2.1 Variabel Penentuan

Misalkan saya notasikan `3` variabel berikut ini:

- $x_1$ sebagai seberapa banyak (dalam liter) susu yang bisa dijual langsung,
- $x_2$ sebagai seberapa banyak (dalam liter) susu yang bisa dibuat *yogurt*, dan
- $x_3$ sebagai seberapa banyak (dalam liter) susu yang bisa dibuat keju *mozarella*.

Di mana:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

### 1.2.2 *Constraints*

Berikut adalah *constraints* yang ada pada kasus di atas:

- $0 \leq x_1 \leq 500$
- $0 \leq x_2 \leq 300$
- $0 \leq x_3 \leq 400$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

### 1.2.3 *Objective Function*

Tujuan utama permodelan matematika ini adalah **memaksimalkan** *profit* yang ingin dicapai **KSB**, yakni:

$$max(1000x_1 + 1200x_2 + 900x_3)$$

## 1.3 *Solver R*

### 1.3.1 Penulisan Model Matematika di R

Untuk menyelesaikan masalah ini, saya akan menggunakan *solver* di **R**. Berikut adalah model yang saya buat:

```
# dimulai dengan hati yang bersih
rm(list=ls())

# memanggil libraries
library(dplyr)
library(ompr)
library(ompr.roi)
library(ROI.plugin.glpk)

#  set vector profit
profit = c(1000,1200,900)

# membuat model
model =
  MIPModel() %>%
  # add variables
  # non negative integers
  add_variable(x[i],i = 1:3,
               type = "integer",
               lb = 0) %>%
  # set obj function
  set_objective(sum_expr(x[i]*profit[i],i = 1:3),
                "max") %>%
  # add constraints
  add_constraint(x[1] <= 500) %>%
  add_constraint(x[2] <= 300) %>%
  add_constraint(x[3] <= 400) %>%
  add_constraint(sum_expr(x[i],i = 1:3) == 1000)
model
```

```
## Mixed integer linear optimization problem
## Variables:
##   Continuous: 0
##   Integer: 3
##   Binary: 0
## Model sense: maximize
## Constraints: 4
```

### 1.3.2 *Solving*

Kemudian saya *solve* dengan **R**:

```
result = solve_model(model, with_ROI(solver = "glpk", verbose = TRUE))
```

```
## <SOLVER MSG>  ----
## GLPK Simplex Optimizer, v4.65
## 4 rows, 3 columns, 6 non-zeros
##       0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   1.000e+03 (1)
##       3: obj =   1.040000000e+06 inf =   0.000e+00 (0)
## OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
## GLPK Integer Optimizer, v4.65
## 4 rows, 3 columns, 6 non-zeros
## 3 integer variables, none of which are binary
## Integer optimization begins...
## Long-step dual simplex will be used
## +     3: mip =     not found yet <=              +inf        (1; 0)
## +     3: >>>>>   1.040000000e+06 <=   1.040000000e+06   0.0% (1; 0)
## +     3: mip =   1.040000000e+06 <=     tree is empty   0.0% (0; 1)
## INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
## <!SOLVER MSG> ----
```

### 1.3.3 *Final Result*

Saya dapatkan konfigurasi terbaik seperti ini:

```
result %>% get_solution(x[i])
```

```
##   variable i value
## 1        x 1   500
## 2        x 2   300
## 3        x 3   200
```

Dengan *profit* maksimum sebesar Rp1.04 juta.

# 2 Tiga Mesin Filling

## 2.1 Masalah

Di sebuah perusahaan, departemen *filling* dan *packing* memiliki tiga jenis mesin yang selalu beroperasi setiap harinya. Setiap mesin memiliki kapasitas, biaya proses per unit produk, dan biaya *setup* masing-masing.

Berikut adalah datanya:

Table 1: Data Mesin Filling dan Packing

| mesin | biaya_setup | biaya_proses_unit | kapasitas |
|---|---|---|---|
| 1 | 300 | 2 | 600 |
| 2 | 100 | 10 | 800 |
| 3 | 200 | 5 | 1200 |

Mengingat di setiap mesin harus ada pekerja yang ditugaskan untuk menjalankannya, manajemen mengambil keputusan bahwa jika suatu mesin digunakan, maka mesin tersebut paling sedikit harus memproses `400` unit produk.

Di suatu hari, terdapat beban kerja sebanyak `2000` unit produk yang harus diproses *filling* dan *packing*-nya.

***Berapa konfigurasi produk per mesin yang paling optimal?***

## 2.2 Model Matematika

Dari kasus di atas, kita akan membuat model matematikanya.

### 2.2.1 Variabel Penentuan

Misalkan saya notasikan `3` variabel berikut ini:

- $x_1$ sebagai seberapa banyak (dalam unit) produk yang dijalankan di mesin I,
- $x_2$ sebagai seberapa banyak (dalam unit) produk yang dijalankan di mesin II, dan
- $x_3$ sebagai seberapa banyak (dalam unit) produk yang dijalankan di mesin III.

Di mana:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

### 2.2.2 *Constraints*

Berikut adalah *constraints* yang ada pada kasus di atas:

- $400 \leq x_1 \leq 600$
- $400 \leq x_2 \leq 800$
- $400 \leq x_3 \leq 1200$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 2000$

### 2.2.3 *Objective Function*

Tujuan utama permodelan matematika ini adalah **meminimalkan** *cost* yang terjadi di semua mesin, yakni:

$$min((300 + 2x_1) + (100 + 10x_2) + (200 + 5x_3))$$

## 2.3 *Solver R*

### 2.3.1 Penulisan Model Matematika di R

Untuk menyelesaikan masalah ini, saya akan menggunakan *solver* di **R**. Berikut adalah model yang saya buat:

```
# dimulai dengan hati yang bersih
rm(list=ls())

# memanggil libraries
library(dplyr)
library(ompr)
library(ompr.roi)
library(ROI.plugin.glpk)

#  set vector fixed cost
fixed_cost = c(300000,100000,200000)

# set vector cost per unit
cost_per_unit = c(2000,10000,5000)

# membuat model
model =
  MIPModel() %>%
  # add variables
  # non negative integers
  add_variable(x[i],i = 1:3,
               type = "integer",
               lb = 400) %>%
  # set obj function
  set_objective((fixed_cost[1]+cost_per_unit[1]*x[1]) + (fixed_cost[2]+cost_per_unit[2]*x[2]) + (fixed_
                "min") %>%
  # add constraints
  add_constraint(x[1] <= 600) %>%
  add_constraint(x[2] <= 800) %>%
  add_constraint(x[3] <= 1200) %>%
  add_constraint(sum_expr(x[i],i = 1:3) == 2000)
model
```

```
## Mixed integer linear optimization problem
## Variables:
##   Continuous: 0
##   Integer: 3
##   Binary: 0
## Model sense: minimize
## Constraints: 4
```

### 2.3.2 *Solving*

Kemudian saya *solve* dengan **R**:

```
result = solve_model(model, with_ROI(solver = "glpk", verbose = TRUE))
```

```
## <SOLVER MSG>  ----
## GLPK Simplex Optimizer, v4.65
## 4 rows, 3 columns, 6 non-zeros
##       0: obj =   6.800000000e+06 inf =   8.000e+02 (1)
##       3: obj =   1.220000000e+07 inf =   0.000e+00 (0)
## *     4: obj =   1.020000000e+07 inf =   0.000e+00 (0)
## OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
## GLPK Integer Optimizer, v4.65
## 4 rows, 3 columns, 6 non-zeros
## 3 integer variables, none of which are binary
## Integer optimization begins...
## Long-step dual simplex will be used
## +     4: mip =     not found yet >=              -inf        (1; 0)
## +     4: >>>>>   1.020000000e+07 >=   1.020000000e+07   0.0% (1; 0)
## +     4: mip =   1.020000000e+07 >=     tree is empty   0.0% (0; 1)
## INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
## <!SOLVER MSG> ----
```

### 2.3.3 *Final Result*

Saya dapatkan konfigurasi terbaik seperti ini:

```
result %>% get_solution(x[i])
```

```
##   variable i value
## 1        x 1   600
## 2        x 2   400
## 3        x 3  1000
```

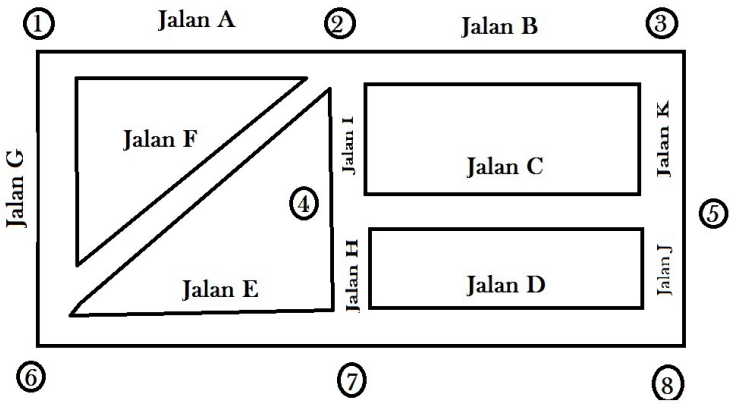
Dengan *cost* minimum sebesar Rp10.8 juta.

# 3 Lampu Penerangan Jalan

## 3.1 Masalah

Perhatikan gambar di bawah ini:

```
## [1] "Courtesy of: FINANMOS ITB 2021"
```




Suatu komplek perumahan dengan denah seperti di atas memiliki `11` jalan. Setiap pertemuan jalan, diberikan tanda nomor `1` hingga `8`. *Town management* hendak memasang lampu penerangan di **setiap pertemuan jalan tersebut**.

Tujuan utama mereka adalah memasang lampu sehingga **semua jalan** diterangi paling sedikit satu lampu.

***Di titik mana saja town management harus memasang lampu-lampu tersebut?***

## 3.2 Model Matematika

Dari kasus di atas, kita akan membuat model matematikanya.

### 3.2.1 Variabel Penentuan

Misalkan saya notasikan $Jl$ sebagai himpunan jalan, yakni:

$$Jl = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$$

Misalkan saya notasikan $J$ sebagai himpunan titik-titik pertemuan jalan, yakni:

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Kemudian saya akan tuliskan $x_j$ sebagai *binary number* yang menyatakan apakah lampu dipasang atau tidak di titik $j \in J$.

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{jika di titik } j \text{ dipasang lampu} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Misalkan:

- $x_1 = 0$, artinya lampu di titik `1` **tidak dipasang lampu**.
- $x_2 = 1$, artinya lampu di titik `2` **dipasang lampu**.

### 3.2.2 *Constraints*

Dengan variabel keputusan seperti di atas, maka sesuai keinginan kita menerangi **setiap jalan paling sedikit dengan satu lampu**, kita mempunyai kendala:

1. $x_1 + x_2 \geq 1$ untuk **Jalan A**.
2. $x_2 + x_3 \geq 1$ untuk **Jalan B**.
3. $x_1 + x_6 \geq 1$ untuk **Jalan G**.
4. $x_2 + x_6 \geq 1$ untuk **Jalan F**.
5. $x_2 + x_4 \geq 1$ untuk **Jalan I**.
6. $x_4 + x_7 \geq 1$ untuk **Jalan H**.
7. $x_4 + x_5 \geq 1$ untuk **Jalan C**.
8. $x_7 + x_8 \geq 1$ untuk **Jalan D**.
9. $x_3 + x_5 \geq 1$ untuk **Jalan K**.
10. $x_6 + x_7 \geq 1$ untuk **Jalan E**.
11. $x_5 + x_8 \geq 1$ untuk **Jalan J**.

### 3.2.3 *Objective Function*

Tujuan utama permodelan matematika ini adalah **meminimalkan** banyaknya titik yang dipasang lampu penerangan, yakni:

$$min(\sum x_j, j \in J)$$

## 3.3 *Solver R*

### 3.3.1 Penulisan Model Matematika di R

Untuk menyelesaikan masalah ini, saya akan menggunakan *solver* di **R**. Berikut adalah model yang saya buat:

```
# dimulai dengan hati yang bersih
rm(list=ls())

# memanggil libraries
library(dplyr)
library(ompr)
library(ompr.roi)
library(ROI.plugin.glpk)

# membuat model
model =
  MIPModel() %>%
  # add variables
  # binary
  add_variable(x[i],
               i = 1:8,
               type = "binary",
               lb = 0) %>%
  # set obj function
  set_objective(sum_expr(x[i],i = 1:8),
                "min") %>%
  # add constraints
  add_constraint(x[1] + x[2] >= 1) %>%
  add_constraint(x[2] + x[3] >= 1) %>%
  add_constraint(x[1] + x[6] >= 1) %>%
  add_constraint(x[2] + x[6] >= 1) %>%
  add_constraint(x[2] + x[4] >= 1) %>%
  add_constraint(x[4] + x[7] >= 1) %>%
  add_constraint(x[4] + x[5] >= 1) %>%
  add_constraint(x[7] + x[8] >= 1) %>%
  add_constraint(x[3] + x[5] >= 1) %>%
  add_constraint(x[6] + x[7] >= 1) %>%
  add_constraint(x[5] + x[8] >= 1)
model
```

```
## Mixed integer linear optimization problem
## Variables:
##   Continuous: 0
##   Integer: 0
##   Binary: 8
## Model sense: minimize
## Constraints: 11
```

### 3.3.2 *Solving*

Kemudian saya *solve* dengan **R**:

```
result = solve_model(model, with_ROI(solver = "glpk", verbose = TRUE))
```

```
## <SOLVER MSG>  ----
## GLPK Simplex Optimizer, v4.65
## 11 rows, 8 columns, 22 non-zeros
##       0: obj =   0.000000000e+00 inf =   1.100e+01 (11)
##       4: obj =   4.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
## *     9: obj =   4.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
## OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
## GLPK Integer Optimizer, v4.65
## 11 rows, 8 columns, 22 non-zeros
## 8 integer variables, all of which are binary
## Integer optimization begins...
## Long-step dual simplex will be used
## +     9: mip =     not found yet >=              -inf        (1; 0)
## +     9: >>>>>   4.000000000e+00 >=   4.000000000e+00   0.0% (1; 0)
## +     9: mip =   4.000000000e+00 >=     tree is empty   0.0% (0; 1)
## INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
## <!SOLVER MSG> ----
```

### 3.3.3 *Final Result*

Saya dapatkan konfigurasi terbaik seperti ini:

```
result %>% get_solution(x[i]) %>% filter(value == 1)
```

```
##   variable i value
## 1        x 1     1
## 2        x 2     1
## 3        x 5     1
## 4        x 7     1
```

Dengan banyak lampu minimum terpasang sebanyak 4 buah.

# 4 Perusahaan Cat

## 4.1 Masalah

Suatu perusahaan memproduksi 4 warna cat yaitu:

- Putih,
- Kuning,
- Hitam, dan
- Merah.

Keempat cat tersebut diproduksi di mesin-mesin yang sama, sehingga ada keperluan untuk mencuci mesin-mesin tersebut di antara produksi 2 cat yang berbeda warna.

Kita mempunyai masalah untuk menentukan urutan produksi cat harian yang *optimal*, yakni urutan produksi cat yang menghasilkan total waktu pencucian paling kecil.

> ***Urutan harian ini akan dipakai tiap hari, karena perusahaan setiap hari harus memproduksi keempat cat tersebut.***

Tabel berikut menampilkan waktu pencucian antara produksi cat di suatu baris jika akan dilanjutkan dengan cat di suatu kolom.

Table 2: Matriks Cleaning Mesin Cat (dalam menit)

| | putih | kuning | hitam | merah |
|---|---|---|---|---|
| putih | ~ | 10 | 17 | 15 |
| kuning | 20 | ~ | 19 | 18 |
| hitam | 50 | 44 | ~ | 25 |
| merah | 45 | 40 | 20 | ~ |

> ***Urutan produksi cat seperti apa yang meminimalkan waktu cleaning?***

## 4.2 Metode Heuristik

Sebenarnya masalah di atas mirip sekali dengan **Travelling Salesperson Problem**, yakni suatu masalah *optimization* yang mencari rute terpendek dari beberapa tempat.

Jadi alih-alih menggunakan metode *Mixed Integer Linear Programming* (**MILP**) yang biasa saya pakai untuk menyelesaikan *optimization*, saya akan menggunakan cara **TSP** saja.

### 4.2.1 *How to*

Langkah pertama adalah menyiapkan matriks cleaning terlebih dahulu, yakni dengan mengubah `data` yang berupa *dataframe* ke bentuk *matrix* di **R**.

```
data[is.na(data)] = 0
level = rownames(data)
matriks = as.matrix(data)
matriks
```

```
##        putih kuning hitam merah
## putih      0     10    17    15
## kuning    20      0    19    18
## hitam     50     44     0    25
## merah     45     40    20     0
```

Jika kita perhatikan dengan baik. Matriks *cleaning* di atas berbentuk asimetris. Artinya waktu *cleaning* dari cat `1` ke `2` **tidak sama** dengan waktu *cleaning* dari cat `2` ke `1`.

Oleh karena itu, saya akan membuat *problem* **Assymetric TSP** (**ATSP**) untuk kemudian di-*solve*.

```
library(TSP)
problem = as.ATSP(matriks)
hasil = solve_TSP(problem)
hasil
```

```
## object of class 'TOUR'
## result of method 'arbitrary_insertion+two_opt' for 4 cities
## tour length: 98
```

Didapatkan waktu *cleaning* terkecil adalah sebesar `98` menit.

### 4.2.2 *Final Result*

Saya dapatkan urutan terbaik seperti ini:

```
paste(level[as.integer(hasil)],collapse = " - ")
```

```
## [1] "putih - kuning - merah - hitam"
```

# 5 *Nurse Schedulling*