

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

Naslov seminarskog rada

Ivan Katanić, Gustav Matula

Voditelj: *Mile Šikić*

Zagreb, siječanj 2017.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Opis algoritma	2
2.1. Traženje <i>točaka</i>	2
2.2. Traženje LCS_{k++} iz točaka	3
2.2.1. Huntov algoritam	4
2.2.2. Kuoov algoritam	4
2.2.3. Proširenje na LCS_{k++}	4
3. Rezultati	6
4. Zaključak	8
5. Literatura	9

1. Uvod

Mjere udaljenosti stringova od velike su važnosti u bioinformatici. Najpoznatiji primjeri uključuju, Levenshteinovu (odnosno edit) udaljenost i LCS (longest common subsequence), odnosno najdulji zajednički podniz.

Obje udaljenosti za dva stringa a i b u općenitom se slučaju računaju dinamičkim programiranjem u složenosti $O(|a||b|)$, što ih, usprkos sofisticiranim optimizacijama kako memorije, tako i vremena izvođenja, nepraktičnim za velike primjere.

Zbog toga su razvijene modifikacije problema koje daju rjeđe matrice dinamičkog programiranja i time omogućuju implementaciju koja je dovoljno efikasna na primjerima iz stvarnoga svijeta.

Primjer takve modifikacije je LCS_k [2], koja zahtijeva da se zajednički podniz sastoji od ne-preklapajućih podstringova zadane duljine k . Jasno je da povećanjem k dobivamo manji broj parova jednakih podstringova dvaju stringova. S druge strane za prevelik k udaljenost je nula i mjera postaje beskorisna.

Mjera kojom smo se bavili u okviru ovog projekta je LCS_{k++} [1], koja relaksira uvjet LCS_k tako što dozvoljava preklapanja. Drugim riječima, u LCS_{k++} razmatraju se zajednički podnizovi sastavljeni od podstringova duljine **barem** k .

Uzmimo za primjer stringove $a = \text{"ABBABDCDAD"}$ i $b = \text{"BCBABBDCCDBAD"}$.
 $LCS_{2++}(a, b) = 8$, podstring je **"ABBDCCDAD"** (**"ABBABDCDAD"**, **"BCBABBDCCDBAD"**).
 $LCS_{3++}(a, b) = 6$, podstring je **"ABBDCCD"** (**"ABBABDCDAD"**, **"BCBABBDCCDBAD"**).

2. Opis algoritma

2.1. Traženje *točaka*

Originalni LCS_{k++} algoritam iz [1], kao i neki drugi LCS algoritmi, kao početni korak traže sve parove indeksa (i, j) na kojima se ulazni par stringova (a, b) "poklapa". U kontekstu običnog LCS -a, radi se o točkama za koje $a[i] = b[j]$. U kontekstu LCS_k , ili LCS_{k++} promatramo točke za koje $a[i..i+k-1] = b[j..j+k-1]$, odnosno za koje su podstringovi duljine k koji počinju na pripadajućim pozicijama jednaki. LCS_k i LCS_{k++} se naravno svode na LCS u slučaju $k = 1$. U nastavku ćemo se fokusirati na ovu drugu definiciju, te ćemo parove koji je zadovoljavaju zvati jednostavno *točkama*, a njihove elemente *koordinatama*.

Općenito rješenje ovog koraka moguće je napraviti u složenosti $O(|a| + |b| + |r|)$ gdje je $|r|$ ukupan broj točaka [6]. Ideja je konstruirati sufiksno polje nad stringom $a\#b$, te ga podijeliti na segmente s $LCP \geq k$. Unutar takvog segmenta svaki par sufiksa gdje jedan dolazi iz a , a jedan iz b , definira jednu točku. Uz odgovarajuća preslagivanja sufiksa unutar segmenata moguće je točke generirati u redoslijedu rastuće prve, pa druge koordinate.

Ovaj pristup, iako teoretski zadovoljavajući (složenost je optimalna), u praksi se ne ponaša toliko dobro. Slijedeći [1], fokusirali smo se na manje vrijednosti k , za koje je moguće napraviti savršeno sažimanje (*perfect hashing*) u 64-bitne riječi. U cilju poboljšanja efikasnosti uveli smo neke *low-level* optimizacije. Tako primjerice za k do 20 i abecedu do 4 elementa, podstring od k znakova možemo zapisati u 40 bitova. U preostalih 24 bita možemo pohraniti indeks i oznaku stringa iz kojeg podstring dolazi. Sortiranje niza cijelih brojeva moguće je izvesti puno efikasnije od najbržih algoritama za sortiranje sufiksa. Za to smo koristili vlastitu eksperimentalno optimiranu varijantu *radix sorta*.

opis tog sorta? detalji? jel treba uopće??????????????

Nakon sortiranja algoritam je sličan prethodnom, niz (u ovom slučaju podstringova, a ne sufiksa), dijeli se na segmente prema jednakosti, te se iz odgovarajućih parova

unutar segmenta generiraju točke.

Na primjer, za stringove $a = \text{"ABC"}$ i $c = \text{"DAB"}$ i $k = 2$ sortiranjem bi dobili niz $[(AB, a, 1), (AB, b, 2), (BC, a, 2), (DA, b, 1)]$, gdje trojke označavaju (*podstring, izvorni string, indeks u izvornom stringu*). U tom primjeru imali bi samo jedan zanimljiv segment, onaj za "AB", i iz njega bismo generirali točku (1, 2).

Valja napomenuti da u slučaju malog broja točaka ovaj dio algoritma vremenski potpuno dominira nad ostatkom, te je dobar dio napora uložen kako bi se toliko ubrzao (više o samom ubrzanju u kasnijem poglavlju).

2.2. Traženje LCS_{k++} iz točaka

Preostaje iz već poznatih točaka pronaći sam LCS_{k++} . Ako s P označimo skup točaka konstruiran u prethodnom koraku, rekursivna relacija dinamičkog programiranja na tako prorijeđenoj matrici ima sljedeći oblik iz [1]:

$$dp(i, j) = \max\left\{ \begin{aligned} &k + \max_{i' \leq i-k, j' \leq j-k} \{dp(i', j')\}, \\ &1 + dp(i-1, j-1), \text{ ako } (i-1, j-1) \in P \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ako imamo niz V točaka koji sadrži točke iz P sortirane po prvoj, pa po drugoj koordinati, lako je za svaku točku (i, j) pronaći indeks točke $(i-1, j-1)$, u slučaju da je prisutna u nizu. To možemo napraviti u amortizirano linearnom vremenu jednim prolaskom kroz niz V , i time je dio (2) riješen. U [1] isto je izvedeno binarnim pretraživanjem, što je neznatno sporije. Ako točke (i, j) i $(i-1, j-1)$ postoje, kažemo da je druga *nastavak* prve.

Dio (2) je nešto složeniji. U [1] koristi se prolaz po retcima pa po stupcima (u smislu koordinata točaka), pri čemu se održava struktura podataka (Fenwickovo stablo) koja omogućuje računanje gornjeg maksimuma u logaritamskoj složenosti.

Naš pristup vođen je idejom algoritma za LCS iz [3], koju je uz neke manje trivijalne opservacije moguće prilagoditi za LCS_{k++} . Za početak ćemo objasniti ideju za LCS , a onda i proširenje na LCS_{k++} .

2.2.1. Huntov algoritam

U radu Hunta i Szymanskog ([3]) također se radi prolaz po retcima pa po stupcima. Glavna ideja iz je (po opisu iz [4]) održavati niz $MinYPos[l]$, koji uz pretpostavku da smo trenutno u retku i označava minimalni j takav da je $LCS(a[1..i], b[1..j]) = l$. Primijetimo da je $MinYPos$ nužno rastući niz.

Pretpostavimo da smo obradili točke (i', j') s $i' < i$, te sada promatramo točke (i, j) , za neki fiksni i . Pretpostavimo da $MinYPos[l] < j$. Tada postoji LCS duljine l koji završava točkom (i', j') gdje $i' < i$ i $j' < j$. Taj je LCS moguće proširiti točkom (i, j) , pa znamo da nakon obrade trenutnog retka mora vrijediti $MinYPos[l+1] \leq j$.

Vidimo da je dovoljno pronaći l takav da $MinYPos[l] < j \leq MinYPos[l+1]$, što možemo napraviti binarnim pretraživanjem, te postaviti $MinYPos[l+1]$ na j (jer niz duljine l koji završava na $MinYPos[l]$ proširujemo u niz duljine $l+1$ koji završava na j).

Ovdje treba napomenuti da je redoslijed obilaska točaka za fiksni i bitan. Točke treba obići padajuće po stupcima, kako bi se promjene niza $MinYPos$ dogodile efektivno paralelno. U protivnom se može dogoditi da izgradimo ilegalan LCS koji sadrži točke u istom retku.

2.2.2. Kuoov algoritam

Huntov algoritam pojednostavljen je u [7] tako da se umjesto binarnog pretraživanja radi amortizirano linearan prolaz po trenutnom retku i nizu $MinYPrefix$. Dakle dok prolazimo kroz točke u trenutng retka, ujedno održavamo odgovarajući indeks l u $MinYPrefix$, koji za trenutnu točku (i, j) povećavamo dok $MinYPrefix[l] < j$. Na prvi pogled to pogoršava složenost algoritma. Taj instinkt je točan u općenitom slučaju, no svejedno analizirajmo detaljnije složenosti tih dvaju pristupa.

Recimo da u trenutnom retku i imamo t točaka. Huntov algoritam primijenjen na jednom retku ima složenost $O(t \log r)$, gdje je r najdulji LCS koji smo do sad pronašli. S druge strane algoritam Kuoov algoritam ima složenost $O(t + r)$. Dakle jasno je da je za veći r bolji Huntov algoritam, a za manji Kuoov.

2.2.3. Proširenje na LCS_{k++}

Prvo ćemo malo modificirati značenje niza $MinYPrefix$. Za algoritam koji slijedi $MinYPrefix[l]$ označava najmanji j takav da $LCS_{k++}(a[1..i+k-1], b[1..j+k-1]) \geq l$. Razlika je u tome što smo znak jednakosti zamijenili u znak nejednakosti

(promijenili smo i intervale da uzmemo u obzir duljinu k). Ta promjena je ključna za očuvanje važnog svojstva *MinYPrefix*: niz mora biti ne-padajući kako bismo ga mogli binarno pretraživati.

Kako bismo se uvjerali u nužnost uvjeta, zamislimo instancu u kojoj nema nastavka (dakle ako postoji točka (i, j) , tada ne postoji $(i - 1, j - 1)$). U tom slučaju *MinYPrefix* $[l]$ može biti veći od nule samo za l djeljiv s k . Za $k > 1$ takav niz će rijetko biti ne-padajući.

Tijekom obrade točaka iz retka i , potreban nam je *MinYPrefix* u stanju u kojem je bio nakon obrade retka $i - k$, pa zasad jednostavno pretpostavimo da nam je dostupan. Označimo ga s *MinYPrefix* $_{i-k}$. Promatramo točku (i, j) . Ona se može nastaviti na *LCS* $_{k++}$ koji završava u točki (i', j') s $i' \leq i - k$ i $j' \leq j - k$. Po gornjoj pretpostavci točke uračunate u *MinYPrefix* zadovoljavaju prvu nejednakost. Za drugu, slično kao u Huntovom, odnosno Kuoovom algoritmu, pronađemo l takav da *MinYPrefix* $[l] < j - k + 1 \leq \text{MinYPrefix}[l + 1]$. Tada znamo da postoji *LCS* $_{k++}$ duljine l koji se točkom (i, j) može proširiti u *LCS* $_{k++}$ duljine $l + k$. Štoviše, u koliko (i, j) nema nastavak, znamo da je $dp(i, j) = l + k$. Ako ipak postoji, $dp(i, j) = \max\{l + k, 1 + dp(i - 1, j - 1)\}$. Time smo izračunali vrijednosti tablice dinamičkog programiranja u svim točkama i -tog retka. Konačan algoritam bira između Huntovog i Kuoovog pristupa jednostavnom procjene vremena izvršavanja temeljene na njihovim teorijskim složenostima i empirijski utvrđenoj konstanti.

Zatim moramo modificirati *MinYPrefix* uzevši u obzir rezultate i -tog retka. U slučaju da $dp(i, j) = dp(i - 1, j - 1) + 1$, jednostavno postavimo *MinYPrefix* $_i[dp(i, j)] = \min\{\text{MinYPrefix}_{i-1}[dp(i, j)], j\}$. Inače $dp(i, j) = l + k$, te postavljamo *MinYPrefix* $_i[l + s] = \min\{\text{MinYPrefix}_{i-1}[l + s], j\}$ za sve s iz $[1..k]$. Prvi instinkt je uzeti samo $s = k$, ali po gornjoj redefiniciji *MinYPrefix*, to nije dovoljno. Znamo da *MinYPrefix* $_{i-1}[l + s] \leq j$, za s iz $[-l..0]$, budući da *MinYPrefix* $_{i-k}[l + s] \leq j$ za s iz istog intervala (slijedi iz definicije l i činjenice da vrijednosti *MinYPrefix* za fiksni indeks ne mogu rasti). Ali moguće je na primjer da *MinYPrefix* $_{i-1}[l + k - 1] > j$ (naravno uz pretpostavku $k > 1$). Ali budući da točkom u stupcu j možemo dobiti *LCS* $_{k++}$ duljine $l + k$, i $l + k \geq l + k - 1$, mora vrijediti *MinYPrefix* $_i[l + k - 1] \leq j$. Analogan argument vrijedi za ostale s iz $[1..k - 1]$.

Za kraj preostaje objasniti kako dobiti *MinYPrefix* $_{i-k}$. Najjednostavnije je podijeliti obradu retka na računanje vrijednosti tablice dinamičkog programiranja i osvježavanje niza *MinYPrefix*. Tako nakon što osvježimo *MinYPrefix* za redak $i - k$, možemo odmah izračunati dp za redak i . A kad dođemo do retka i , prvo osvježimo *MinYPrefix*, a zatim računamo dp za redak $i + k$ (ako takav postoji), i tako dalje.

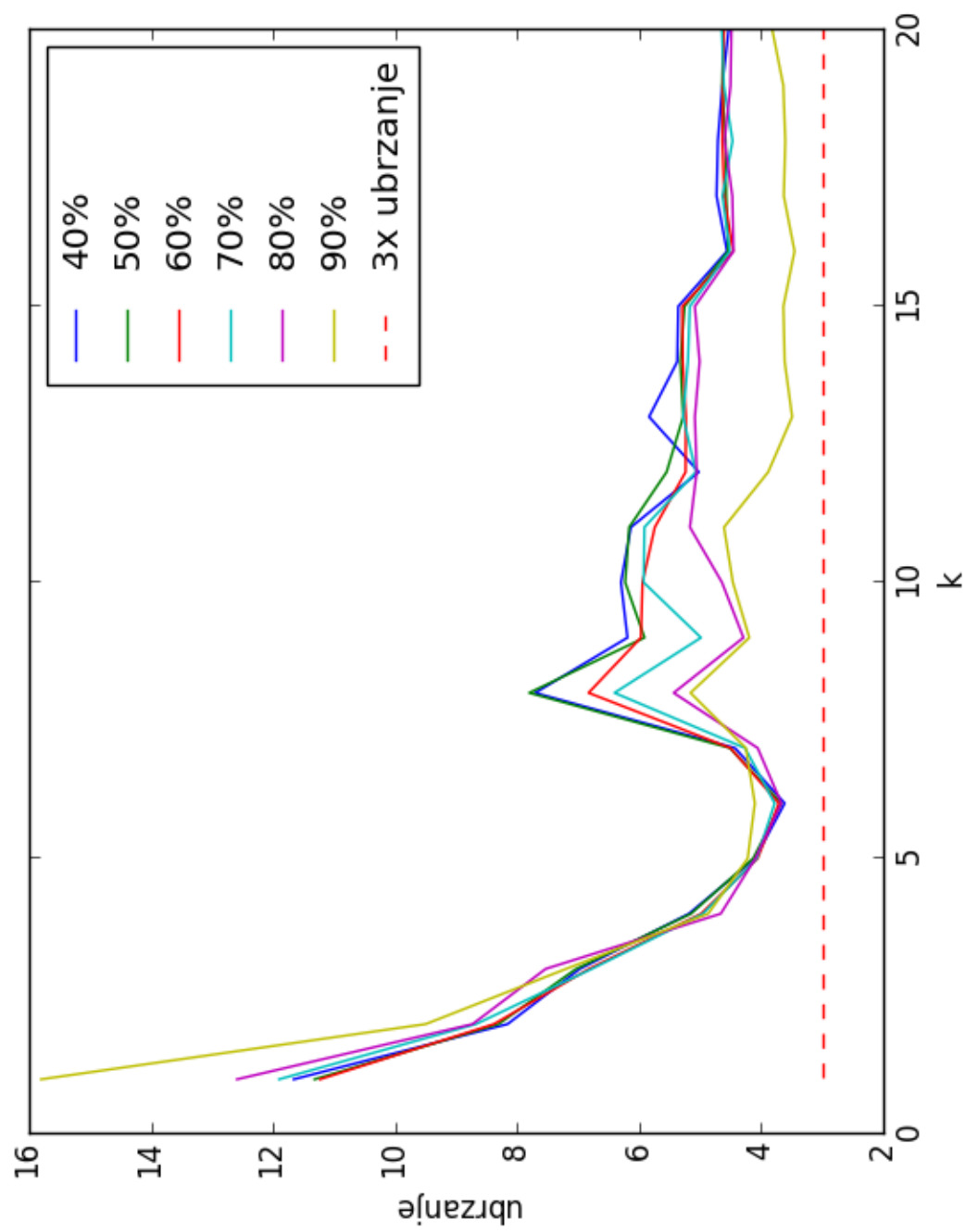
3. Rezultati

Zadatak je bio dobiti implementaciju barem tri puta bržu od originalnog LCS_{k++} [5]. Brzinu rješenja testirali smo na stringovima duljine $n = 10000$ (za veći n faktor ubrzanja našeg algoritma još je veći), s abecedom od četiri znaka, za k od 4 do 20. Probabilistički model ulaznih stringova za testiranje preuzeli smo iz [1]. Tako smo prvi string generirali iz uniformne distribucije svih stringova duljine n , a drugi iz prvog uz zadanu sličnost p (za svaki znak bi s vjerojatnošću p uzeli isti znak kao u prvom stringu, a s vjerojatnošću $1 - p$ uniformno jedan od preostalih znakova).

Sljedeći graf prikazuje faktore ubrzanja postignute za različite vrijednosti k i različite sličnosti stringova.

Kako bismo dobili što stabilnije rezultate, za svaki par stringova oba smo algoritma pokrenuli 30 puta, i zatim uzeli omjer ukupnih vremena izvršavanja. Testiranje je izvedeno na Intel®Core™i5-5200U CPU @ 2.20GHz \times 4 procesoru sa 7.5 GiB memorije na Ubuntu 16.04.

U zadatku nije bilo posebnih zahtjeva što se tiče memorije, svedeno na primjerima na koje smo ručno otprilike provjerili naš je algoritam koristio manje memorije od originala (konkretno mjerili smo virtualnu memoriju alatom ps).



Slika 1.1

4. Zaključak

Vidjeli smo da se poopćenjem poznatih *LCS* algoritama može računati LCS_{k++} na način dosta drukčiji od onog u originalu. Uz *low-level* optimizacije postigli više nego trostruko ubrzanje nad originalnom implementacijom.

Prostora za dodatna ubrzanja još svakako ima. Najbolji omjer ubrzanja i uloženog truda sigurno bi dalo iskorištavanje paralelizam modernih procesora, zatim istraživanje alternativnih algoritama, te konačno dodatne *low-level* optimizacije našeg algoritma.

5. Literatura

- [1] M. Šikić F. Pavetić, G. Žužić. LCSk++: Practical similarity metric for long strings. 2014.
- [2] B. R. Shalom G. Benson, A. Levy. Longest common subsequence in k-length substrings. *CoRR*, vol. *abs/1402.2097*, 2014.
- [3] T.G. Szymanski J.W. Hunt. A fast algorithm for computing longest common subsequences. *Comm. of the ACM*, 20(5):350–353, 1977.
- [4] T. Raita L. Bergroth, H. Hakonen. A survey of longest common subsequence algorithms. *SPIRE '00 Proceedings of the Seventh International Symposium on String Processing Information Retrieval (SPIRE'00)*, 2000.
- [5] F. Pavetić. Original lcsk++ implementation. <https://github.com/fpavetic/lcskpp>. [preuzeto 9. 1. 2017.].
- [6] S. Grabowski S. Deorowicz. Efficient algorithms for the longest common subsequence in k-length substrings. *arXiv:1311.4552*, 2013.
- [7] G.R. Cross S. Kuo. An improved algorithm to find the length of the longest common subsequence of two strings. *ACM SIGIR Forum*, 23(3-4):89–99, 1989.