

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

## Naslov seminarskog rada

*Ivan Katanić, Gustav Matula*

Voditelj: *Mile Šikić*

Zagreb, siječanj 2017.

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Opis algoritma</b>	<b>2</b>
2.1. Traženje <i>točaka</i> . . . . .	2
2.2. Traženje $LCS_{k++}$ iz točaka . . . . .	3
2.2.1. Huntov algoritam . . . . .	3
2.2.2. Kuoov algoritam . . . . .	4
2.2.3. Proširenje na $LCS_{k++}$ . . . . .	4
<b>3. Rezultati</b>	<b>6</b>
<b>4. Zaključak</b>	<b>8</b>

# 1. Uvod

Mjere udaljenosti stringova od velike su važnosti u bioinformatici. Najpoznatiji primjeri uključuju, Levenshteinovu (odnosno edit) udaljenost i  $LCS$  (longest common subsequence), odnosno najdulji zajednički podniz.

Obje udaljenosti za dva stringa  $a$  i  $b$  u općenitom se slučaju računaju dinamičkim programiranjem u složenosti  $O(|a||b|)$ , što ih, usprkos sofisticiranim optimizacijama kako memorije, tako i vremena izvođenja, nepraktičnim za velike primjere.

Zbog toga su razvijene modifikacije problema koje daju rjeđe matrice dinamičkog programiranja i time omogućuju implementaciju koja je dovoljno efikasna na primjerima iz stvarnoga svijeta.

Primjer takve modifikacije je  $LCS_k$  [Benson], koja zahtijeva da se zajednički podniz sastoji od ne-preklapajućih podstringova zadane duljine  $k$ . Jasno je da povećanjem  $k$  dobivamo manji broj parova jednakih podstringova dvaju stringova. S druge strane za prevelik  $k$  udaljenost je nula i mjera postaje beskorisna.

Mjera kojom smo se bavili u okviru ovog projekta je  $LCS_{k++}$  [Pavetić, Žužić, Šikić], koja relaksira uvjet  $LCS_k$  tako što dozvoljava preklapanja. Drugim riječima, u  $LCS_{k++}$  razmatraju se zajednički podnizovi sastavljeni od podstringova duljine \*barem\*  $k$ .

Uzmimo za primjer stringove  $a = \text{"ABBABDCDAD"}$  i  $b = \text{"BCBABBDCCBAD"}$ .  $LCS_{2++}(a, b) = 8$ , podstring je "ABBD**CD**AD" (boldano na primjeru).  $LCS_{3++}(a, b) = 6$ , podstring je "ABBD**CD**" (boldano na primjeru).

## 2. Opis algoritma

### 2.1. Traženje *točaka*

Originalni  $LCS_{k++}$  algoritam [Pavetić, Žužić, Šikić], kao i neki drugi  $LCS$  algoritmi, kao početni korak traže sve parove indeksa  $(i, j)$  na kojima se ulazni par stringova  $(a, b)$  "poklapa". U kontekstu običnog  $LCS$ -a, radi se o točkama za koje  $a[i] = b[j]$ . U kontekstu  $LCS_k$ , ili  $LCS_{k++}$  promatramo točke za koje  $a[i..i+k-1] = b[j..j+k-1]$ , odnosno za koje su podstringovi duljine  $k$  koji počinju na pripadajućim pozicijama jednaki.  $LCS_k$  i  $LCS_{k++}$  se naravno svode na  $LCS$  u slučaju  $k = 1$ . U nastavku ćemo se fokusirati na ovu drugu definiciju, te ćemo parove koji je zadovoljavaju zvati jednostavno *točkama*, a njihove elemente *koordinatama*.

Općenito rješenje ovog koraka moguće je napraviti u složenosti  $O(|a| + |b| + |r|)$  gdje je  $|r|$  ukupan broj točaka [poljski rad]. Ideja je konstruirati sufiksno polje nad stringom  $a\#b$ , te ga podijeliti na segmente s  $LCP \geq k$ . Unutar takvog segmenta svaki par sufiksa gdje jedan dolazi iz  $a$ , a jedan iz  $b$ , definira jednu točku. Uz odgovarajuća preslagivanja sufiksa unutar segmenata moguće je točke generirati u redoslijedu rastuće prve, pa druge koordinate.

Ovaj pristup, iako teoretski zadovoljavajuć (složenost je optimalna), u praksi se ne ponaša toliko dobro. Slijedeći [Pavetić, Žužić, Šikić], fokusirali smo se na manje vrijednosti  $k$ , za koje je moguće napraviti savršeno sažimanje (*perfect hashing*) u 64-bitne riječi. U cilju poboljšanja efikasnosti uveli smo neke *low-level* optimizacije. Tako primjerice za  $k$  do 20 i abecedu do 4 elementa, podstring od  $k$  znakova možemo zapisati u 40 bitova. U preostalih 24 bita možemo pohraniti indeks i oznaku stringa iz kojeg podstring dolazi. Sortiranje niza cijelih brojeva moguće je izvesti puno efikasnije od najbržih algoritama za sortiranje sufiksa. Za to smo koristili vlastitu eksperimentalno optimiranu varijantu *radix sorta*.

opis tog sorta? detalji? jel treba uopće?

Nakon sortiranja algoritam je sličan prethodnom, niz (u ovom slučaju podstringova, a ne sufiksa), dijeli se na segmente prema jednakosti, te se iz odgovarajućih parova

unutar segmenta generiraju točke.

primjer sortiranja, sortirati parove (substring, string, indeks)

Valja napomenuti da u slučaju malog broja točaka ovaj dio algoritma vremenski potpuno dominira nad ostatkom, te je dobar dio napora uložen kako bi se toliko ubrzao (više o samom ubrzanju u kasnijem poglavlju).

## 2.2. Traženje $LCS_{k++}$ iz točaka

Preostaje iz već poznatih točaka pronaći sam  $LCS_{k++}$ . Ako s  $P$  označimo skup točaka konstruiran u prethodnom koraku, rekurzivna relacija dinamičkog programiranja na tako prorijeđenoj matrici ima sljedeći oblik:

Ako imamo niz  $V$  točaka koji sadrži točke iz  $P$  sortirane po prvoj, pa po drugoj koordinati, lako je za svaku točku  $(i, j)$  pronaći indeks točke  $(i - 1, j - 1)$ , u slučaju da je prisutna u nizu. To možemo napraviti u amortizirano linearnom vremenu jednim prolaskom kroz niz  $V$ , i time je dio (2) riješen. U [Pavetić] isto je izvedeno binarnim pretraživanjem, što je neznatno sporije. Ako točke  $(i, j)$  i  $(i - 1, j - 1)$  postoje, kažemo da je druga *nastavak* prve.

Dio (2) je nešto složeniji. U [Pavetić] koristi se prolaz po retcima pa po stupcima (u smislu koordinata točaka), pri čemu se održava struktura podataka (Fenwickovo stablo) koja omogućuje računanje gornjeg maksimuma u logaritamskoj složenosti.

Naš pristup vođen je idejom algoritma za  $LCS$  iz [Hunt], koju je uz neke manje trivijalne opservacije moguće prilagoditi za  $LCS_{k++}$ . Za početak ćemo objasniti ideju za  $LCS$ , a onda i proširenje na  $LCS_{k++}$ .

### 2.2.1. Huntov algoritam

U [Hunt] se također radi prolaz po retcima pa po stupcima. Glavna ideja iz [Hunt] je (po opisu iz [Survey]) održavati niz  $MinYPos[l]$ , koji uz pretpostavku da smo trenutno u retku  $i$  označava minimalni  $j$  takav da je  $LCS(a[1..i], b[1..j]) = l$ . Primijetimo da je  $MinYPos$  nužno rastući niz.

Pretpostavimo da smo obradili točke  $(i', j')$  s  $i' < i$ , te sada promatramo točke  $(i, j)$ , za neki fiksni  $i$ . Pretpostavimo da  $MinYPos[l] < j$ . Tada postoji  $LCS$  duljine  $l$  koji završava točkom  $(i', j')$  gdje  $i' < i$  i  $j' < j$ . Taj je  $LCS$  moguće proširiti točkom  $(i, j)$ , pa znamo da nakon obrade trenutnog retka mora vrijediti  $MinYPos[l+1] \leq j$ .

Vidimo da je dovoljno pronaći  $l$  takav da  $MinYPos[l] < j \leq MinYPos[l+1]$ , što možemo napraviti binarnim pretraživanjem, te postaviti  $MinYPos[l+1]$  na  $j$  (jer

niz duljine  $l$  koji završava na  $MinYPos[l]$  proširujemo u niz duljine  $l + 1$  koji završava na  $j$ ).

Ovdje treba napomenuti da je redosljed obilaska točaka za fiksni  $i$  bitan. Točke treba obići padajuće po stupcima, kako bi se promjene niza  $MinYPos$  dogodile efektivno paralelno. U protivnom se može dogoditi da izgradimo ilegalan  $LCS$  koji sadrži točke u istom retku.

### 2.2.2. Kuoov algoritam

Algoritam iz [Hunt] pojednostavljen je u [Kuo] tako da se umjesto binarnog pretraživanja radi amortizirano linearan prolaz po trenutnom retku i nizu  $MinYPrefix$ . Dakle dok prolazimo kroz točke u trenutng retka, ujedno održavamo odgovarajući indeks  $l$  u  $MinYPrefix$ , koji za trenutnu točku  $(i, j)$  povećavamo dok  $MinYPrefix[l] < j$ . Na prvi pogled to pogoršava složenost algoritma. Taj instinkt je točan u općenitom slučaju, no svejedno analizirajmo detaljnije složenosti tih dvaju pristupa.

Recimo da u trenutnom retku  $i$  imamo  $t$  točaka. Huntov algoritam primijenjen na jednom retku ima složenost  $O(t \log r)$ , gdje je  $r$  najdulji  $LCS$  koji smo do sad pronašli. S druge strane algoritam Kuoov algoritam ima složenost  $O(t + r)$ . Dakle jasno je da je za veći  $r$  bolji Huntov algoritam, a za manji Kuoov.

### 2.2.3. Proširenje na $LCS_{k++}$

Prvo ćemo malo modificirati značenje niza  $MinYPrefix$ . Za algoritam koji slijedi  $MinYPrefix[l]$  označava najmanji  $j$  takav da  $LCS_{k++}(a[1..i + k - 1], b[1..j + k - 1]) \geq l$ . Razlika je u tome što smo znak jednakosti zamijenili u znak nejednakosti (promijenili smo i intervale da uzmemo u obzir duljinu  $k$ ). Ta promjena je ključna za očuvanje važnog svojstva  $MinYPrefix$ : niz mora biti ne-padajući kako bismo ga mogli binarno pretraživati.

Kako bismo se uvjerali u nužnost uvjeta, zamislimo instancu u kojoj nema nastavka (dakle ako postoji točka  $(i, j)$ , tada ne postoji  $(i - 1, j - 1)$ ). U tom slučaju  $MinYPrefix[l]$  može biti veći od nule samo za  $l$  djeljiv s  $k$ . Za  $k > 1$  takav niz će rijetko biti ne-padajući.

Tijekom obrade točaka iz retka  $i$ , potreban nam je  $MinYPrefix$  u stanju u kojem je bio nakon obrade retka  $i - k$ , pa zasad jednostavno pretpostavimo da nam je dostupan. Označimo ga s  $MinYPrefix_{i-k}$ . Promatramo točku  $(i, j)$ . Ona se može nastaviti na  $LCS_{k++}$  koji završava u točki  $(i', j')$  s  $i' \leq i - k$  i  $j' \leq j - k$ . Po gornjoj pretpostavci točke uračunate u  $MinYPrefix$  zadovoljavaju prvu nejednakost.

Za drugu, slično kao u Huntovom, odnosno Kuoovom algoritmu, pronađemo  $l$  takav da  $MinYPrefix[l] < j - k + 1 \leq MinYPrefix[l + 1]$ . Tada znamo da postoji  $LCS_{k++}$  duljine  $l$  koji se točkom  $(i, j)$  može proširiti u  $LCS_{k++}$  duljine  $l + k$ . Štoviše, u koliko  $(i, j)$  nema nastavak, znamo da je  $dp(i, j) = l + k$ . Ako ipak postoji,  $dp(i, j) = \max\{l + k, 1 + dp(i - 1, j - 1)\}$ . Time smo izračunali vrijednosti tablice dinamičkog programiranja u svim točkama  $i$ -tog retka. Konačan algoritam bira između Huntovog i Kuoovog pristupa jednostavnom procjene vremena izvršavanja temeljene na njihovim teorijskim složenostima i empirijski utvrđenoj konstanti.

Zatim moramo modificirati  $MinYPrefix$  uzevši u obzir rezultate  $i$ -tog retka. U slučaju da  $dp(i, j) = dp(i - 1, j - 1) + 1$ , jednostavno postavimo  $MinYPrefix_i[dp(i, j)] = \min\{MinYPrefix_{i-1}[dp(i, j)], j\}$ . Inače  $dp(i, j) = l + k$ , te postavljamo  $MinYPrefix_i[l + s] = \min\{MinYPrefix_{i-1}[l + s], j\}$  za sve  $s$  iz  $[1..k]$ . Prvi instinkt je uzeti samo  $s = k$ , ali po gornjoj redefiniciji  $MinYPrefix$ , to nije dovoljno. Znamo da  $MinYPrefix_{i-1}[l + s] \leq j$ , za  $s$  iz  $[-l..0]$ , budući da  $MinYPrefix_{i-k}[l + s] \leq j$  za  $s$  iz istog intervala (slijedi iz definicije  $l$  i činjenice da vrijednosti  $MinYPrefix$  za fiksni indeks ne mogu rasti). Ali moguće je na primjer da  $MinYPrefix_{i-1}[l + k - 1] > j$  (naravno uz pretpostavku  $k > 1$ ). Ali budući da točkom u stupcu  $j$  možemo dobiti  $LCS_{k++}$  duljine  $l + k$ , i  $l + k \geq l + k - 1$ , mora vrijediti  $MinYPrefix_i[l + k - 1] \leq j$ . Analogan argument vrijedi za ostale  $s$  iz  $[1..k - 1]$ .

Za kraj preostaje objasniti kako dobiti  $MinYPrefix_{i-k}$ . Najjednostavnije je podijeliti obradu retka na računanje vrijednosti tablice dinamičkog programiranja i osvježavanje niza  $MinYPrefix$ . Tako nakon što osvježimo  $MinYPrefix$  za redak  $i - k$ , možemo odmah izračunati  $dp$  za redak  $i$ . A kad dođemo do retka  $i$ , prvo osvježimo  $MinYPrefix$ , a zatim računamo  $dp$  za redak  $i + k$  (ako takav postoji), i tako dalje.

### 3. Rezultati

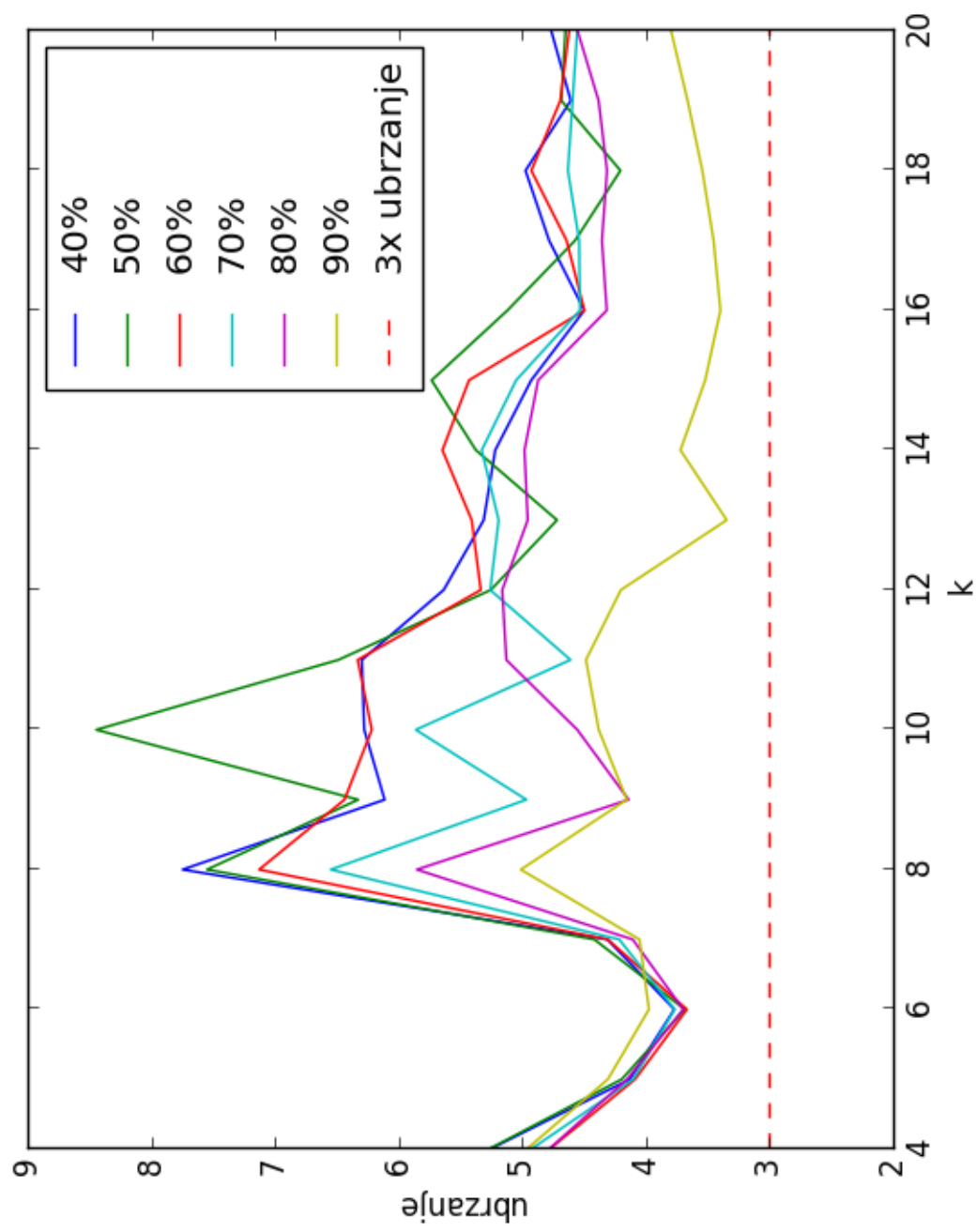
Zadatak je bio dobiti implementaciju barem tri puta bržu od originalnog  $LCS_{k++}$  [link na github]. Brzinu rješenja testirali smo na stringovima duljine  $n = 10000$  (za veći  $n$  faktor ubrzanja našeg algoritma još je veći), s abecedom od četiri znaka, za  $k$  od 4 do 20. Probabilistički model ulaznih stringova za testiranje preuzeli smo iz [Pavetić]. Tako smo prvi string generirali iz uniformne distribucije svih stringova duljine  $n$ , a drugi iz prvog uz zadanu sličnost  $p$  (za svaki znak bi s vjerojatnošću  $p$  uzeli isti znak kao u prvom stringu, a s vjerojatnošću  $1 - p$  uniformno jedan od preostalih znakova).

Sljedeći graf prikazuje faktore ubrzanja postignute za različite vrijednosti  $k$  i različite sličnosti stringova.

Kako bismo dobili što stabilnije rezultate, za svaki par stringova oba smo algoritma pokrenuli 30 puta, i zatim uzeli omjer ukupnih vremena izvršavanja. Testiranje je izvedeno na Kaletov procesor i što već.

U zadatku nije bilo posebnih zahtjeva što se tiče memorije, svedeno na primjerima na koje smo ručno otprilike provjerili naš je algoritam koristio manje memorije od originala (konkretno mjerili smo virtualnu memoriju alatom ps).





Slika 1.1

## 4. Zaključak

Vidjeli smo da se poopćenjem poznatih *LCS* algoritama može računati  $LCS_{k++}$  na način dosta drukčiji od onog u originalu. Uz *low-level* optimizacije postigli više nego trostruko ubrzanje nad originalnom implementacijom.

Prostora za dodatna ubrzanja još svakako ima. Najbolji omjer ubrzanja i uloženog truda sigurno bi dalo iskorištavanje paralelizam modernih procesora, zatim istraživanje alternativnih algoritama, te konačno dodatne *low-level* optimizacije našeg algoritma.