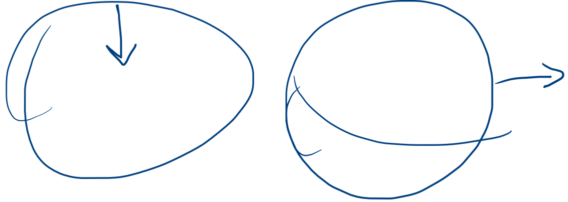
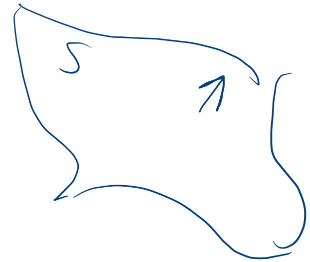




Problema 1. Calcular el flujo del campo de vectores $\nabla \times \vec{F}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (h(x), -2cos(xy) + 2x + yz^2, cos(xy) + y^2z)$, con h una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y a través de la superficie S que se obtiene de intersectar el cono sólido $z \geq 4x^2 + 9y^2$ con el plano $z = 2y + 3$, donde la orientación es la inducida por el vector $(0, -2, 1)$.

Campo $\iint_S \vec{G}\,\hat{n}\,dS = \iint_S \vec{G}\cdot\vec{n}\,dA$

$$\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ h(x) & -2\cos xy + 2x + yz^2 & \cos(xy) + y^2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(\cos xy + y^2 z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2\cos xy + 2x + yz^2)\right)\hat{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\cancel{h(x)}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x}(\cos xy + y^2 z)\right)\hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(-2\cos xy + 2x + yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\cancel{h(x)}}_{=0}\right)\hat{k}$$

$$= (-x\,\text{sen}\,xy + \cancel{2yz} - \cancel{2yz})\,\hat{i} + (y\,\text{sen}\,xy)\,\hat{j} + (2y\,\text{sen}\,xy + 2)\,\hat{k}$$

$$= (-x\,\text{sen}\,xy,\ y\,\text{sen}\,xy,\ 2y\,\text{sen}\,xy + 2)$$

Problema 1. Calcular el flujo del campo de vectores $\nabla \times \vec{F}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (h(x), -2cos(xy) + 2x + yz^2, cos(xy) + y^2 z)$, con h una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y a través de la superficie S que se obtiene de intersectar el cono sólido $z \geq 4x^2 + 9y^2$ con el plano $z = 2y + 3$, donde la orientación es la inducida por el vector $(0, -2, 1)$.

$$S = \begin{cases} 4x^2 + 9\left(y - \frac{1}{9}\right)^2 \leq \frac{28}{9} \\ z = 2y + 3 \end{cases}$$

Parametrizar superficie

Intersectamos

$$4x^2 + 9y^2 \leq 2y + 3$$

$$4x^2 + 9y^2 - 2y \leq 3$$

$$4x^2 + 9\left(y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{1}{81}\right) \leq 3 + \frac{1}{9}$$

$$4x^2 + 9\left(y - \frac{1}{9}\right)^2 \leq \frac{28}{9}$$

Luego

$$\varphi(x,y) = (x, y, 2y + 3)$$

y definimos

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9\left(y^2 - \frac{1}{9}\right) \leq \frac{28}{9}\right\}$$

Calculamos el vector normal

$$\varphi_x = (1, 0, 0) \qquad \varphi_x \times \varphi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 1) = \vec{n}$$

$$\varphi_y = (0, 1, 2)$$

Tenemos todos los ingredientes para calcular

$$\iint_S G \cdot \vec{n} \, dS$$

Problema 1. Calcular el flujo del campo de vectores $\nabla \times \vec{F}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (h(x), -2cos(xy) + 2x + yz^2, cos(xy) + y^2z)$, con h una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y a través de la superficie S que se obtiene de intersectar el cono sólido $z \geq 4x^2 + 9y^2$ con el plano $z = 2y + 3$, donde la orientación es la inducida por el vector $(0, -2, 1)$.

Solución:

Se tiene que $\nabla \times \vec{F} = (2yz - x\sin(xy), y\sin(xy), 2y\sin(xy) + 2)$ y la superficie S viene dada por el conjuntos de puntos $\{(x,y,z) \in \mathbb{R} : z = 2y+3, \ (x,y) \in D\}$, $D = 4x^2 + 9(y - \frac{1}{9})^2 \leq \frac{28}{9}$. Así

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \iint_D \nabla \times \vec{F} \cdot (0,-2,1)\, dxdy \\ &= \iint_D 2\, dxdy \\ &= 2\text{Área}(D) \\ &= \frac{14}{27}\pi. \end{aligned}$$

$$\vec{G} = \nabla \times \vec{F} = (-x \operatorname{sen} xy, \ y \operatorname{sen} xy, \ 2y \operatorname{sen} xy + 2)$$

$$\vec{n} = (0, -2, 1)$$

$$\vec{G} \cdot \vec{n} = \cancel{-2y \operatorname{sen} xy} + \cancel{2y \operatorname{sen} xy} + 2$$

Luego

$$\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \underbrace{\vec{G}(\varphi(u,v)) \cdot \vec{n}}_{=2}\, dv\, du$$

$(u,v) \in D$

$$= 2 \underbrace{\iint_D dv\, du}_{\text{Area}(D)}$$

Donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9(y - \tfrac{1}{9})^2 \leq \tfrac{28}{9}\}$$

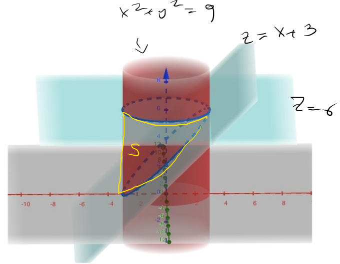
Luego

$$\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{14}{27}\pi$$

Problema 2. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, z^2)$ y S el manto de cilindro $x^2+y^2=9$ que está entre los planos $z = x+3$ y $z=6$. Calcule

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS,$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal que apunta hacia afuera.



Campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, z^2)$$

Superficie

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=9,\ x+3 \le z \le 6\}$$

Parametrizar:

Es útil ver que en el cilindro no está z por lo que se propone una "forma cilíndrica"

$x = 3\cos u$
$y = 3\,\text{sen}\, u$
$z = v$

$$\varphi(u,v) = (3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, v)$$

$$0 \le u \le 2\pi$$

$$3\cos u + 3 \le v \le 6$$

$$\iint_S F\, dS$$

F

$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Parametri. – Forma S
– Como se comporta F
– Parametrización natural

$(x, y, z(x,y))$

Vector normal:

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3\,\text{sen}\,u & 3\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, 0)$$

Cálculo

$$\iint_S \vec{F}\,\hat{n}\, dS = \iint_D F(\varphi(u,v))\cdot\vec{n}\, dv\, du \qquad xy \quad yz \quad z^2$$

$$\iint_S F\, dr = \iint_D F(\varphi(\ ))\cdot\vec{n}$$

$$D = \{(u,v)$$

Donde $D = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 3\cos u + 3 \le v \le 6 \end{matrix}\right\}$, luego

$$\iint_S \vec{F}\hat{n}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_{3\cos u+3}^{6} (9\cos u\,\text{sen}\,u, 3v\,\text{sen}\,u, v^2)\cdot(3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, 0)\, dv\, du$$

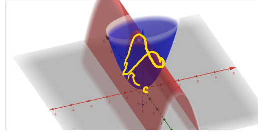
$$= \int_0^{2\pi}\int_{3\cos u+3}^{6} 27\cos^2 u\,\text{sen}\,u + 9v\,\text{sen}^2 u\ dv\, du$$

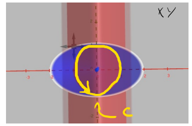
$$= \int_0^{2\pi} 27\cos^2 u\,\text{sen}\,u\ v + 9\frac{v^2}{2}\,\text{sen}^2 u \Big|_{v=3\cos u+3}^{v=6} du$$

$$= \int_0^{2\pi} 27\cos^2 u\,\text{sen}\,u\,(3 - 3\cos u) + 9\frac{\text{sen}^2 u}{2}\left(36 - (3\cos u+3)^2\right) du$$

$$\approx \frac{891}{8}\pi$$

Problema 3. Sea S la parte del ciindro parabólico $z = 3 - 2x^2$ que queda en el interior del paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, sea $\vec{F}(x,y,z) = (x, 2xz, 2xy)$. Calcule $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$, donde la orientación de S es tal que la curva intersección vista desde el eje Z^+ con $z > 3$ tiene sentido antihorario.





Campo:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x & 2xz & 2xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2xz)\right)\hat{\imath} + \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial z}x}^{\,0} - \frac{\partial}{\partial x}(2xy)\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}2xz - \cancel{\frac{\partial}{\partial y}x}_{\,0}\right)\hat{k}$$

$$= (\cancel{2x - 2x}^{\,0}, -2y, 2z)$$

Superficie

Intersectamos $z = z$

$$3 - 2x^2 = x^2 + 3y^2 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Luego

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

La superficie son los puntos internos de C, entonces

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \quad z = 3 - 2x^2 \}$$

Parametrizar

De la condición $x^2 + y^2 \leq 1$ se obtiene

$x = u \cos v$ $\qquad 0 \leq v \leq 2\pi$

$y = u \operatorname{sen} v$ $\qquad 0 \leq u \leq 1$

$z = 3 - 2x^2 = 3 - 2u^2\cos^2 v$

Luego $\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, 3 - 2u^2\cos^2 v)$

Vector normal

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & -4u\cos^2 v \\ -u \operatorname{sen} v & u\cos v & 4u^2 \cos v \operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$4u^2 \cos v \operatorname{sen}^2 v + 4u^2 \cos^3 v$

$$\vec{n} = (\underline{4u^2\cos v(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)}, 0, u)$$

Cálculo

$$D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, \ 0 \leq v \leq 2\pi \}$$

$$F(\varphi(u,v)) = (0, -2u\operatorname{sen} v, 6 - 4u^2\cos^2 v)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot \vec{n}\, dv\, du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0 + 0 + 6u - 4u^3\cos^2 v)\, dv\, du = 5\pi$$

$$= \int_0^1 12\pi u - 4u^3\pi\, du$$

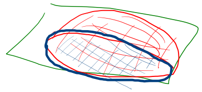
$$= \left(\frac{12}{2} - \frac{4}{4}\right)\pi = 5\pi$$

Problema 4. Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

donde S es la parte de la elipsoide $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ que se encuentra por encima del plano $z = 1$, $\hat{n}$ es el vector normal unitario que apunta hacia arriba, y $\vec{F}(x, y, z) = (yz^2, 4xz, x^2z)$.

Campos :



$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 4xz & x^2z \end{vmatrix} =$$

$$= (0 - 4x, 2yz - 2xz, 4z - z^2)$$

$$= (-4x, 2yz - 2xz, 4z - z^2)$$

Superficie :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28 \quad z \geq 1\}$$

Intersectamos en $z = 1$

$$3x^2 + 3y^2 = 27 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \text{ ¡¡}$$

Luego $$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z = \sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array}\right\}$$

Parametrizar

Utilizamos la parametrización natural

Hint : Si las funciones son $z = f(x, y)$ usar parametrización natural, sino, o una u otra según sea la superficie

$$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2})$$

Vector normal

$$\varphi_x = \left(1, 0, \frac{-3x}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}\right)$$

$$\varphi_y = \left(0, 1, \frac{-3y}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}\right)$$

$$\hat{n} = \varphi_x \times \varphi_y = \left(\frac{3x}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}, \frac{3y}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}, 1\right)$$

Stokes

$$\int_{\partial S} F\,dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$(\nabla \times F)(\varphi(x, y)) = \left(-4x, (2y - 2x)\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}, 4\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2} - 28 + 3x^2 + 3y^2\right)$$

$$= \frac{-12\ x^2}{\sqrt{28\ \ 3x^2\ \ 3y^2}} + 3y(2y - 2x) + 4\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2} - 28 + 3x^2 + 3y^2$$

Luego

$$\int_{\partial S} F\,dr = \iint_S (\nabla \times F)\, \hat{n}\, dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{-12\ x^2}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}} + 3y(2y - 2x) + 4\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2} - 28 + 3x^2 + 3y^2\right) dy\, dx$$

$$= 27\pi$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y, z) &= (x, y, \sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}),\ (x, y) \in D \\ rot(\vec{F}) &= (4x, 2yz - 2xz, 4z - z^2) \\ \vec{N} &= \left(\frac{-3x}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}, \frac{-3y}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}}, 1\right) \end{aligned}$$

y así

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D (\nabla \times \vec{F})(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y)\, dxdy = 27\pi.$$

$$\left(4x, 2\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}(y - x), 4\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2} - 28 - 3x^2 - 3y^2\right)$$

$$\frac{-12x^2}{\sqrt{28 - 3x^2 - 3y^2}} + 6(x - y)$$