Problema 1. Sea h una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ definido como

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(h(x)h'(x) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}, y\cos(y^2) + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4} \right)$$

Calcule el trabajo efectuado por el campo $\vec{F}$ sobre la curva Γ descrita por:

$$x(t) = \sin(t), \qquad y(t) = \sqrt{\pi}\cos^2(2t), \qquad z(t) = t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

TEOREMA 3.8.7 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto, conexo y no vacío en $\mathbb{R}^N$, y sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Entonces, las siguientes tres propiedades son equivalentes:

i) Existe una función potencial $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de $\vec{F}$. Es decir, $\vec{F}$ es conservativo.

ii) Para cada curva γ cerrada seccionalmente simple, regular y suave en Ω se verifica que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

iii) Para cualquier par de curvas γ_1 y γ_2 seccionalmente simples, regulares y suaves en Ω tales que poseen extremos comunes, se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2,$$

donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de γ_1 y γ_2 respectivamente.

PROPOSICIÓN 3.8.3 Bajo las condiciones del Teorema 3.8.7, y asumiendo adicionalmente que Ω es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^N$, y que $\vec{F}$ es de clase C^1 en Ω, entonces las afirmaciones *i)*, *ii)* y *iii)* del Teorema 3.8.7 también equivalen a la siguiente afirmación:

iv) Para cada $i, j = 1, \ldots, N$ se tiene que $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$. $\longrightarrow$ es lo mismo que $rot(F) = \vec{0}$

Verifiquemos que F es conservativo, de esta forma podremos hallar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{F} = \nabla f$$

y así

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot dr = f(b) - f(a)$$

En efecto (Conservativo)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ h(x)h'(x) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4} & y\cos(y^2) + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y\cos(y^2) + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right)\right]\hat{\imath} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(h(x)h'(x) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right)\right]\hat{\jmath} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(y^2) + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(h(x)h'(x) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right)\right]\hat{k}$$

$$= \left[\frac{-8zy}{(x^2+y^2+z^2)^5} - \frac{-8zy}{(x^2+y^2+z^2)^5}\right]\hat{\imath} + \left[\frac{-8zx}{(x^2+y^2+z^2)^5} - \frac{-8zx}{(x^2+y^2+z^2)^5}\right]\hat{\jmath}$$

$$+ \left[\frac{-8xy}{(x^2+y^2+z^2)^5} - \frac{-8xy}{(x^2+y^2+z^2)^5}\right]\hat{k}$$

$$= (0,0,0)$$

Luego F es irrotacional

Problema 1. Sea h una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ definido como

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(h(x)h'(x)+\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4},\, y\cos(y^2)+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4},\, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right)$$

Calcule el trabajo efectuado por el campo $\vec{F}$ sobre la curva Γ descrita por:

$$x(t)=\sin(t),\qquad y(t)=\sqrt{\pi}\cos^2(2t),\qquad z(t)=t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

(Calcular el potencial)

$$\nabla f=\vec{F}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=h(x)h'(x)+\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=\int h(x)h'(x)+\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dx$$

$$=\frac{h^2(x)}{2}-\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3}+\varphi(y,z)$$

Derivamos con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}}+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=y\cos(y^2)+\cancel{\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}}$$

$$\varphi(y,z)=\int y\cos(y^2)\,dy=\frac{\operatorname{sen}(y^2)}{2}+\psi(z)$$

Luego

$$f(x,y,z)=\frac{h^2(x)}{2}-\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3}+\frac{\operatorname{sen}(y^2)}{2}+\psi(z)$$

Derivamos con respecto a z

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\cancel{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}}+\psi'(z)=\cancel{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}}\Rightarrow\psi(z)=K$$

Luego

$$f(x,y,z)=\frac{h^2(x)}{2}-\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3}+\frac{\operatorname{sen}(y^2)}{2}+K$$

Problema 1. Sea h una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ definido como

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(h(x)h'(x) + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}, y\cos(y^2) + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4} \right)$$

Calcule el trabajo efectuado por el campo $\vec{F}$ sobre la curva Γ descrita por:

$$x(t) = \sin(t), \qquad y(t) = \sqrt{\pi}\cos^2(2t), \qquad z(t) = t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

(Calculo del trabajo)

$$\Gamma : \{ 0 \le t \le 2\pi \mid \overbrace{(\text{sen}(t), \sqrt{\pi}\cos^2(2t), t)}^{r(t)} \}$$

Luego

$$W = \int_\Gamma F\,dr = \int_0^{2\pi} F(r(t))\,r'(t)\,dt$$

$$= f(r(2\pi)) - f(r(0))$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\pi^3} - \frac{1}{(\pi+4\pi^2)^3} \right)$$

Problema 2. Se el campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^1 definido en en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) & \text{si } y \geq 0, \\ \left(-\frac{y}{x^2+\frac{y^2}{4}}, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{4}}\right) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

a) Demuestre o refute si $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

b) Sea la curva $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ orientada en sentido positivo. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

a)

Un campo en R^3 es irrotacional si rot(F) es cero.
Un campo en R^2 es irrotacional si:

$$F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Luego, para y >= 0

$$F(x,y) = \begin{cases} G(x,y) & y \geq 0 \\ H(x,y) & y < 0 \end{cases}$$

En $y \geq 0$ F es irrotacional si se cumple

$$\frac{\partial G_y}{\partial x} = \frac{\partial G_x}{\partial y} \iff \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\iff \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}$$

En $y < 0$

$$= \frac{4(y^2-4x^2)}{(4x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2/4}\right) = \frac{4(y^2-4x^2)}{(4x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2/4}\right) = \frac{4(y^2-4x^2)}{(4x^2+y^2)^2}$$

Luego F es irrotacional

Problema 2. Se el campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^1 definido en en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) & \text{si } y \geq 0, \\ \left(-\frac{y}{x^2+\frac{y^2}{4}}, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{4}}\right) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

a) Demuestre o refute si $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

b) Sea la curva $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ orientada en sentido positivo. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

b) Definamos

$$\Gamma: \begin{cases} \gamma_1: \ x^2+y^2 = 1 \quad \text{si } y \geq 0 \to r_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma_2: \ x^2 + y^2/4 = 1 \quad \text{si } y < 0 \to r_2(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t) \quad \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$r_1'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$r_2'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2\cos t)$

Por la parte (a) hemos probado que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$$

esto es equivalente a que la integral de línea no depende del camino elegido:

Además notemos que tanto Γ como C encierran $(0,0)$ el punto de singularidad, luego:

$$\int_C F\cdot dr = \int_\Gamma F\cdot dr = \int_{\Gamma_1} F\,dr + \int_{\Gamma_2} F\,dr$$

$$= \int_0^\pi F(r_1(t))\, r_1'(t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} F(r_2(t))\, r_2'(t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi (-\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, 2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi dt + \int_\pi^{2\pi} 2\,dt = 3\pi$$

Problema 3. Determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el campo de vectores dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 9abxyz^2)$$

sea un campo gradiente. En tales casos encuentre su función potencial asociada.

(Rotor = 0)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 6abz^3y - 20bx^3y^2 & 6abxz^3 - 10bx^4y & 9abxyz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(9abxyz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(6abxz^3 - 10bx^4y)\right]\hat{\imath}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(6abxz^3 - 20bx^3y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(9abxyz^3)\right]\hat{\jmath}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(6abxz^3 - 10bx^4y) - \frac{\partial}{\partial y}(6abxz^3 - 20bx^3y^2)\right]\hat{k}$$

$$= [9abxz^3 - 18abxz^2]\hat{\imath} + [18abxz^2 - 9abxyz^3]\hat{\jmath}$$

$$+ [6abz^3 - \cancel{40bx^3y} + \cancel{40bx^3y}]\hat{k}$$

$$= (9abxz^3 - 18abxz^2, 18abxz^2 - 9abxyz^3, 6abz^3)$$

$$= (0, 0, 0)$$

Problema 3. Determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el campo de vectores dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 9abxyz^2)$$

sea un campo gradiente. En tales casos encuentre su función potencial asociada.

Para que lo anterior sea cierto, note que

$$\left.\begin{aligned} 9abxz^3 - 18abxz^2 &= 0 \\ 18abxz^2 - 9abxyz^3 &= 0 \\ 6abz^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Notar que

$$6abz^3 = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \iff ab = 0$$

y si $ab = 0$, entonces

$$9 \cdot 0 \cdot xz^3 - 18 \cdot 0\, x^2z^2 = 0 - 0 = 0$$
$$18 \cdot 0 \cdot xz^2 - 9 \cdot 0 \cdot xyz^3 = 0 - 0 = 0$$

La única condición que necesitamos es que $ab = 0$

Si $b = 0$, entonces

$$F(x,y,z) = (0,0,0) \Longrightarrow f(x,y,z) = K_1 \in \mathbb{R}$$

Si $a = 0$, entonces

$$F(x,y,z) = (-20bx^3y^2, -10bx^4y, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -20bx^3y^2 \to f(x,y,z) = -5bx^4y^2 + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -10bx^4y + \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial y} = -10bx^4y$$

$$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 0 \to \varphi(y,z) = K_2$$

Luego

$$f(x,y,z) = -5bx^4y^2 + K_2$$

Problema 4. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x-y-2}{(x-1)^2+(y+1)^2}\hat{i} + \frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}\hat{j} + h(z)\hat{k};$$

donde $h(z), z \in \mathbb{R}$ es una función continua definida sobre todo $\mathbb{R}$.
Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre C, la curva especificada por

$$C : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1, z = 1\}.$$

Notar que F está definido en $\Omega = \mathbb{R}^3 / R$

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y = -1, z = h(z)\}$$

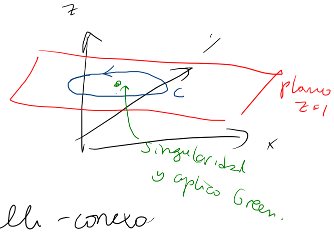
Note que para un punto $(x,y,z) \in R$, se tiene que

$$\frac{1}{4} + \frac{(-1)^2}{36} = \frac{5}{18} < 1$$

es decir, C encierra el punto de la singularidad y además

$$\nabla \times F = (0,0,0)$$

Luego



Se puede hacer porque

Por teo de Green para dominios multi-conexo

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{=0} dA + \int_\gamma F\, dr$$

donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} \le 1, z = 1\}$$

$$\gamma : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 = \rho^2 \quad z = 1\}$$

$$\gamma : (r(t) = (1 + \rho \cos t, -1 + \rho\, \text{sen}\, t, 1) \quad t \in [0, 2\pi]\}$$

$$r'(t) = (-\rho\, \text{sen}\, t, \rho \cos t, 0)$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_\gamma F \cdot dr$$

$$= \int_0^{2\pi} F(r(t))\, r'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cancel{\frac{1}{\rho}} (\cos t - \text{sen}\, t), \cancel{\frac{1}{\rho}} (\cos t + \text{sen}\, t), h(1) \right) \cdot \cancel{\rho} (-\text{sen}\, t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{-\cos t\, \text{sen}\, t} + \text{sen}^2 t + \cos^2 t + \cancel{\text{sen}\, t \cos t} + 0\, dt$$

$$= 2\pi$$

Teorema 3.9.2 (Teorema de Green para dominios múltiplemente conexos) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cuya frontera $\text{Fr}(D)$ está constituida por $n+1$ curvas simples, cerradas y seccionalmente regulares, a saber: $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tales que:

i) la región encerrada por γ incluye en su interior a cada γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

ii) $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$ si $i \neq j$,

iii) ninguna de las γ_i está contenida en la región encerrada por otra γ_j.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto tal que $D \cup \text{Fr}(D) \subset \Omega$, y $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 tal que

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath} = (P(x,y), Q(x,y))$$

y $\text{Fr}(D)$ es recorrida en sentido antihorario, entonces

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

o bien

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} P\,dx + Q\,dy.$$