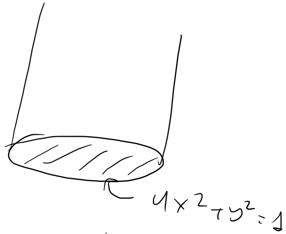
Problema 1. Determine una parametrización de las siguientes curvas C:

(a) C: La intersección del cilindro $4x^2+y^2=1$ con el plano $z=1-2x-y$.
(b) C: La intersección del paraboloide $z=x^2+y^2$ con el plano $x+y+z=3$ con $x<0$ e $y>0$.
(c) C: La curva intersección de las superfices $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$ y $z=x^2+y^2$.

a) $4x^2+y^2=1 \xrightarrow{\text{Gráficamente}}$



$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{array}\right] \to 4x(t)^2+y(t)^2=1 \ \checkmark$$

$$z=1-\cos t-\operatorname{sen} t$$

b)
$$z=3-x-y$$
$$z=x^2+y^2$$

$$x^2+y^2=3-x-y$$
$$x^2+x+y^2+y=3$$
$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{7}{2}$$

$$x(t)=\sqrt{\tfrac{7}{2}}\cos t-\tfrac{1}{2}$$
$$y(t)=\sqrt{\tfrac{7}{2}}\operatorname{sen} t-\tfrac{1}{2}$$
$$z(t)=3-\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\cos t-\tfrac{1}{2}\right)-\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\operatorname{sen} t-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=4-\sqrt{\tfrac{7}{2}}\left(\cos t+\operatorname{sen} t\right)$$

c) $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$; $z=x^2+y^2$

Usemos coordenadas polares para darnos una idea

$$x=r\cos t \qquad x^2+y^2=r^2$$
$$y=r\operatorname{sen} t$$

$$r^2=r+r\cos t$$
$$\boxed{r=1+\cos t} \quad (1)$$

Deshacemos el cambio r, teniendo así

$$\sqrt{x^2+y^2}=1+\cos t$$
$$z(t)=(1+\cos t)^2$$

Luego usando (1) en x, y se tiene

$$x(t)=(1+\cos t)\cos t$$
$$y(t)=(1+\cos t)\operatorname{sen} t$$

Problema 2. Considere un curva γ representada por la intersección de las superficies: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y $S_2 : x + z = 2$. Si la densidad en cada punto del alambre está dada por $\delta(x, y, z) = 1 + y^2$.

Calcule:

(a) La masa del alambre.

(b) Las coordenadas del centro de masa del alambre.

a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x + z = 2 \longrightarrow z - 1 = 1 - x \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{1} - 2x + x^2 = \cancel{1}$$

$$2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$2(x^2 - x) + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{4}$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \\ z(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\rho(r(t)) = 1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ z'(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{dr(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4}\,\text{sen}^2 t}_{x^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos^2 t}_{y^2} + \underbrace{\frac{1}{4}\,\text{sen}^2 t}_{z^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$m = \int_\gamma \rho\, ds = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t\right) \sqrt{\frac{1}{2}}\; dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t)\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\frac{5}{4} t - \frac{1}{8}\,\text{sen}(2t) \right] \Big|_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_{yz}}{m} \\ \bar{y} &= \frac{M_{xz}}{m} \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{m} \end{aligned}}$$

$$M_{yz} = \int_\gamma x \rho\, ds = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t\right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,\text{sen}^2 t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\,\text{sen}^2 t \cos t + \frac{1}{2}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t + \frac{\text{sen}^3 t}{12} + \frac{1}{2} t \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{8}\,4} + 0 + 0 + \pi \right] = \frac{5\pi}{4} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

■ **Masa:**

$$M = \int_\gamma \rho\, \mathrm{d}s = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t.$$

■ **Momentos estáticos (primeros momentos) con respecto a los planos coordenados:**

$$M_{yz} = \int_\gamma x \rho\, \mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_\gamma y \rho\, \mathrm{d}s \quad \text{y} \quad M_{xy} = \int_\gamma z \rho\, \mathrm{d}s.$$

$$M_{xy} = \int_\gamma z \rho\, ds = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t\right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\,\text{sen}^2 t \cos t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\,\text{sen}^2 t \cos t\; dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi + \frac{3}{\cancel{8}\,4} \cdot \cancel{2}\pi + 0 \right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, \frac{15\pi}{4}$$

$$M_{xz} = \int_\gamma y(1 + y^2)\, ds = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}}\,\text{sen}\, t \left(1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}\, t \left(1 + \frac{1}{2}(1 - \cos^2 t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t \cos^2 t\; dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2}\cos t + \frac{\cos^3 t}{6} \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

Problema 3. Una particula de masa 1 se desplaza a lo largo de la curva γ dada por la intersección de las superficies $x^2+y^2+z=4$ y $x^2+y^2+2x=0$, según esta situación determine:

(a) Una parametrización de la curva γ.

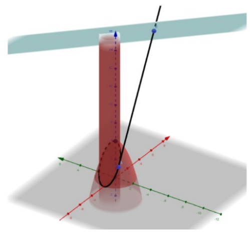
(b) El punto donde la partícula impacta al plano $x+y+2z=32$ luego de ser despedida de la curva γ en el punto $Q=(-1,-1,2)$ en dirección de el vector tangente en dicho punto.

a) $x^2+2x+1+y^2=1$

$(x+1)^2+y^2=1$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - 1 \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = 4-(\cos t-1)^2-\operatorname{sen}^2 t \\ \quad\;\; = 4-\cos^2 t-1+2\cos t-\operatorname{sen}^2 t \\ z(t) = 2+2\cos t \end{cases}$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \operatorname{sen} t \\ 2+2\cos t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



b) $$\begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \operatorname{sen} t \\ 2+2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 3\pi/2$$

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \Bigg| \; r'\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Debemos formar la ecuación de la recta cuando la partícula es disparada

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x+1 = \dfrac{z-2}{2} \\ y = -1 \end{array}$$

Intersectamos la recta con el plano

$$x+y+2z = 32$$

$$\frac{z-2}{2} - 1 - 1 + 2z = 32$$

$$\frac{5}{2}z - 3 = 32$$

$$z = 14$$

$$x = \frac{14-2}{2} - 1$$

$$x = 5$$

Punto de impacto $= (5, -1, 14)$

Problema 4. Una particula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

$$z(0) = 1 \quad , \qquad \frac{dz}{d\theta}(0) = 0$$

donde $(r\,,\,\theta\,,\,z)$ son las coordenadas cilíndricas.

1. Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula (use θ como parámetro).
2. Calcule la longitud de γ si $\theta \in [0\,,\,\pi]$.

1

$\ddot{z} = z$ Resolvemos la EDO

$\lambda^2 = 1 \to \lambda = \pm 1$

$z(\theta) = C_1 e^{-\theta} + C_2 e^{\theta}$

$z(0) = C_1 + C_2 = 1$

$z'(\theta) = -C_1 e^{-\theta} + C_2 e^{\theta}$

$z'(0) = -C_1 + C_2 = 0 \to C_2 = C_1$

$\to C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$z(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{-\theta} + e^{\theta}\right) = \cosh\theta$

$x(\theta) = \cos\theta$

$y(\theta) = \operatorname{sen}\theta$

2

$$r'(\theta) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ \frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ \operatorname{senh}\theta \end{pmatrix}$$

$$\|r'(\theta)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\theta}$$

$$= \sqrt{\cosh^2\theta} = \cosh\theta$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|r'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cosh\theta \, d\theta$$

$$= \operatorname{senh}\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \operatorname{senh}(2\pi)$$