



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Ayudantía 6
Matemática IV (MAT-024)
Jueves 28 de Octubre de 2021

Problema 1. Encuentre la divergencia y el rotacional de los siguientes campos vectoriales:

- a) $\vec{F}(x, y, z) = (\cos(yz) - x, \cos(xz) - y, \cos(xy) - z)$
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z, e^{xyz}, x^2z)$
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (xz - e^{2x} \cos(z), -yz, e^{2x}(\sin(y) + 2 \sin(z)))$

Solución:

Problema 2. Sea $\vec{F}(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$ un campo vectorial incompresible e irrotacional de clase C^2 .

- (a) Muestre que las funciones u, v satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- (b) Muestre que u, v son funciones armónicas, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Solución:

Problema 3. Muestre las siguientes identidades

- a) Si f, g son funciones de clase C^2 , entonces $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$.
- b) $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2g - g\nabla^2f$.
- c) $\nabla \cdot (f\nabla f) = \|\nabla f\|^2 + f\nabla^2f$.

donde $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

Solución:

Problema 4. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$ y supongamos que r denota $\|\vec{r}\|$. Verifique las siguientes identidades.

- a) $\nabla \cdot (r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$
- b) $\nabla \times (r^n \vec{r}) = \vec{0}$

Solución: