



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Ayudantía 3
Matemática IV (MAT-024)
Jueves 30 de Septiembre 2021

Problema 1.

Calcular

$$\iiint_{\Omega} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) dV$$

donde Ω es el sólido acotado por la semiesfera unitaria, con $z \geq 0$ y las superficies $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Resp: } \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \right)$$

Problema 2: Calcular usando un cambio de variable apropiado

$$I = \int_{1/2}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} z \, dz \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} z \, dz \, dy \, dx$$

1. Exprese I en coordenadas cilíndricas.
2. Exprese I en coordenadas esféricas.
3. Calcular I .

$$\text{Resp: } \frac{5\pi}{9} + \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

Problema 3. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie

$$\left(\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \right)^2 = \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2$$

$$\text{Resp: } \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

Problema 4. Calcule la coordenada \bar{z} del centro de masa del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 2a ; x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 ; z^2 \geq x^2 + y^2\}$$

$$\text{con densidad de masa } \delta(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$