UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Ayudantía 7
Matemática IV (MAT-024)
Jueves 4 de noviembre 2021

Problema 1. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$ donde:

$$\vec{F}(x,y) = \left(ye^{xy} + \cos x\,,\, xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1}\right)$$

y C es el tramo de la curva $y = \operatorname{sen}(x)$, desde $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

solución:

Observar que $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ con dominio $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo (también puede argumentar abierto convexo). Además se cumple

$$Q_x - P_y \,=\, e^{xy} + xye^{xy} - (e^{xy} + xye^{xy}) \,=\, 0$$

Por lo tanto $\vec{F}$ es un campo gradiente y la integral no depende del camino. Considerar los caminos:

$$\gamma_1 \,:\, \begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = 0 & dy = 0 \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_2 \,:\, \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} & dx = 0 \\ y = t & dy = dt \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

Luego

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,dt + \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\,e^{\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \operatorname{sen}(t)\Big|_0^{\pi/2} + \left(e^{\frac{\pi}{2}t} + \operatorname{arc\,tg}(t)\right)\Big|_0^1 = e^{\pi/2} - \frac{\pi}{4}$$

Otra forma es encontrando un potencial del campo $\vec{F}$.

Hacer

$$f(x,y) = \int (ye^{xy} + \cos(x))\, dx + h(y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x) + h(y)$$

Luego derivando, respecto de y e igualando se tiene:

$$xe^{xy} + \frac{dh}{dy} = xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad dh = \frac{dy}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad h(y) = \operatorname{arc\,tg}(y) + C$$

Tomar $f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{arc\,tg}(y)$. La integral queda:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) - f(0,0) = e^{\pi/2} + 1 + \frac{\pi}{4} - 1 = e^{\pi/2} + \frac{\pi}{4}$$

Problema 2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido por:

$$\vec{F} = \left(4\alpha e^{2x} y^2 , 2y(\alpha^2 e^{2x} - z), \frac{-\alpha y^2}{2}\right)$$

1. Determine el(los) valor(es) de α tal que el campo $\vec{F}$ sea conservativo. Justifique.
2. Usando el valor de α calculado en el inciso anterior, Calcule el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ para llevar una partícula desde el punto $(1,2,0)$ hasta el punto $(2,4,3)$.

solución:

1. Observar que independientemente de α, el dominio de $\vec{F}$ es $\mathbb{R}^3$, el cual es abierto, convexo, simplemente conexo, etc. Basta entonces comprobar que el campo es irrotacional.

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 4\alpha e^{2x} y^2 & 2y(\alpha^2 e^{2x} - z) & \frac{-\alpha y^2}{2} \end{pmatrix} = \left(-\alpha y + 2y , 0 , 4y\alpha^2 e^{2x} - 8\alpha y e^{2x}\right)$$

Tomando $\alpha = 2$ se cumple $\nabla \times \vec{F} = (0,0,0)$ y por tanto $\vec{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$. Con esto

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(8e^{2x} y^2 , 8ye^{2x} - 2yz , -y^2\right)$$

es un campo gradiente o equivalentemente la integral de $\vec{F}$ no depende del camino.

2. Como $\vec{F}$ es un campo gradiente, basta hallar un potencial de $\vec{F}$. Hacer

$$f(x,y,z) \;=\; \int 8e^{2x}y^2\,dx + h(y,z) \;=\; 4e^{2x}y^2 + h(y,z)$$

Tambien se debe cumplir $\dfrac{df}{dy}(x,y,z) \;=\; 8ye^{2x} - 2yz$. Derivando respecto de y e igualando se tiene

$$8e^{2x}y + \frac{dh}{dy} \;=\; 8ye^{2x} - 2yz \quad\to\quad \frac{dh}{dy} \;=\; -2yz \quad\to\quad h(y,z) \;=\; -y^2z + g(z)$$

Por lo tanto $f(x,y,z) \;=\; 4e^{2x}y^2 - y^2z + g(z)$. Derivando nuevamente, ahora respecto de z e igualando se obtiene

$$-y^2 + \frac{dg}{dz} \;=\; -y^2 \quad\to\quad \frac{dg}{dz} \;=\; 0 \quad\to\quad g(z) \;=\; \text{cte}$$

Por lo tanto, un potencial del campo $\vec{F}$ es $f(x,y,z) \;=\; 4e^{2x}y^2 - y^2z$. Asi el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ para llevar una partícula desde el punto $(1,2,0)$ hasta el punto $(2,4,3)$ es

$$w \;=\; \int_{(1,2,0)}^{(2,4,3)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; f(2,4,3) - f(1,2,0) \;=\; 64e^4 - 16e^2 - 48$$

Problema 3. La base de una cerca está dada por las ecuaciones paramétricas $x \;=\; t^2$ y $y \;=\; 2t$ con $0 \leq t \leq 1$ metros. La altura de la cerca en la posición (x,y) está dada por la función $h(x,y) \;=\; 100xy$ metros.

Suponga que 1 litro de pintura cubre 100m^2. Demuestre que la cantidad de litros de pintura que se necesita para pintar la cerca por ambos lados es

$$4\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}$$

solución:

Debemos calcular el área A de la cerca y luego multiplicarlo por dos (ambos lados). La cantidad de pintura requerida será entonces $\dfrac{2\cdot A}{100}$ litros.

Se tiene que

$$A \;=\; \int_C h(x,y)ds$$

Con C la curva $r(t) \;=\; (t^2\,,\,2t)\,,\; 0 \leq t \leq 1\,.$
Luego

$$A = \int_C h(x,y)ds = \int_0^1 h(r(t))||r^{'}(t)||\,dt = 200\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}\,dt$$

y por lo tanto se necesitan $4\displaystyle\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}$ litros de pintura.

Problema 4. Un alambre de longitud $L = \sqrt{3}\,\ln(\sqrt{5}+\sqrt{8})$ se dobla con la forma de la espiral cónica:

$$x(t) = t\ \cos(t) \quad y(t) = t\ \sin(t) \quad z(t) = t$$

desde el origen hasta el punto $P(2\cos(2)\,,\,2\sin(2)\,,\,2)$. Encuentre la altura de su centroide.

solución:

Buscamos

$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_\gamma z\,ds = \frac{1}{L}\int_0^2 z\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\,dt}\ ; \quad \gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$$

$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2 = (\cos(t)-t\sin(t))^2+(\sin(t)+t\cos(t))^2+1 = 2+t^2$. Luego

$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_0^2 t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{\frac{2}{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}\ln(\sqrt{5}+\sqrt{8})}$$

Problema 5. Calcule la integral de línea

$$\int_\gamma (6xy^2-y^3)\,dx + (6x^2y-3xy^2)\,dy$$

donde γ es la curva que une los puntos (0,1) con (2,4), parametrizada por: $\phi(t) = \left(2t\,,\,1+3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$ con $t\in[0,1]$.

solución:

Llamemos $P(x,y) = 6xy^2-y^3$ y $Q(x,y) = 6x^2y-3xy^2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy-3y^2$$

Además notemos que $\vec{F}$ es C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$ (basta que sea C^1) que corresponde a un dominio simplemente conexo. Luego la integral no depende del camino que una (0,1) con (2,4).

Elejir un camino o encontrar un potencial. Se tiene

$$\int_{(0,1)}^{(2,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy \;=\; 64$$