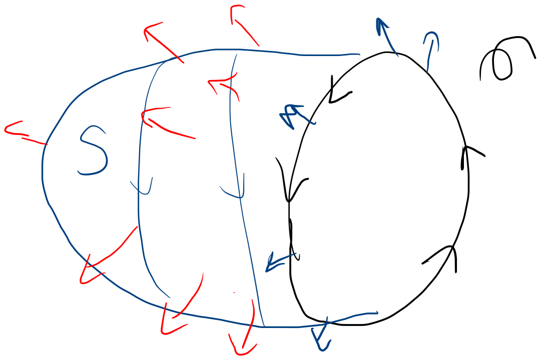
Stokes

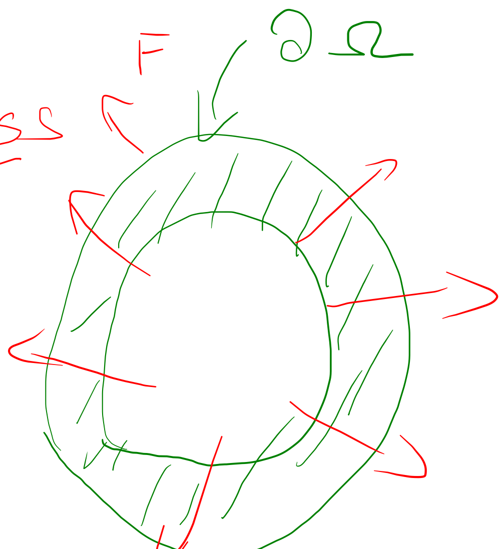


$$\int_{\gamma} F\,dr = \iint_S \nabla \times F\,dS$$

r parametriza γ

1) Campo / Rotor
2) Superficié
3) Parametrizar + normal
4) Stokes

Gauss



$$\iint_{\partial\Omega} F\,\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F\,dV$$

Problema 1. Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0,)\} \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Determinar el flujo saliente a traves de la superficie S definida como

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2 + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Notemos que F NO es continuo en $(0,0,0)$ por lo que al definer el volumen para usar Gauss se debe tener cuidado.

Divergencia

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

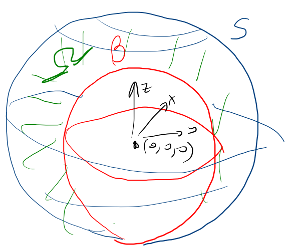
$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Volumen

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2 + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

$$1 = 2 + \frac{z}{1} \to z = -1$$



Definimos $\partial\Omega = S \cup B$

Notemos que (*)

$$S \cap B = \{(0,0,-1)\}$$

Luego Definimos Ω como el volumen encerrado por $\partial\Omega$ es decir

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 2 + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

(*) Usamos coordenadas esféricas

$x = r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$

$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$

$z = r \cos\varphi$

Luego

$$S^* = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 2 + \frac{r\cos\varphi}{r}\right\}$$

$$B^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 1\}$$

$$S^* \cap B^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 = 2 + \cos\varphi\}$$

$\Rightarrow \cos\varphi = -1 \to \varphi = \pi$

$\Rightarrow x = 1 \cdot \cos\theta \, \cancel{\operatorname{sen}}(-\pi)$ 0

$y = 1 \cdot \operatorname{sen}\theta \, \cancel{\operatorname{sen}}(-\pi)$ 0

$z = \cos(-\pi) = -1$ -1

$\Rightarrow S \cap B = \{(0,0,-1)\}$

Problema 1. Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0,)\}\to\mathbb{R}^3$, tal que

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

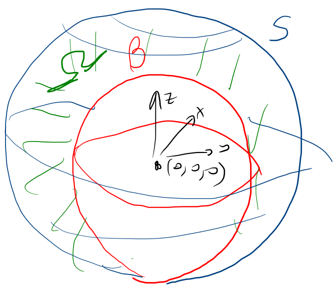
Determinar el flujo saliente a traves de la superficie S definida como

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Volumen

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2}=2+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$



Definamos $\partial\Omega=S\cup B$

Notemos que (✩)

$$S\cap B=\{(0,0,-1)\}$$

Luego Definimos Ω como el volumen encerrado por $\partial\Omega$ es decir

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le 2+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

versión esférica

$$\Omega^*=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le r\le 2+\cos\varphi\}$$

(✩) Usamos coordenadas esféricas

$x=r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi$

$y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$

$z=r\cos\varphi$

luego

$$S^*=\left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid r=2+\frac{r\cos\varphi}{r}\right\}$$

$$B^*=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid r=1\}$$

$$S^*\cap B^*=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid 1=2+\cos\varphi\}$$

$\Rightarrow \cos\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=\pi$

$\Rightarrow x=1\cdot\cos\theta\,\cancel{\operatorname{sen}(-\pi)}$ 0

$y=1\cdot\operatorname{sen}\theta\,\cancel{\operatorname{sen}(-\pi)}$ 0

$z=\cos(-\pi)=-1$

$\Rightarrow S\cap B=\{(0,0,-1)\}$

Gauss El teorema de Gauss dice que

$$\iint_{\partial\Omega} F\hat{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot F\,dV$$

$$\Longrightarrow \iint_{S\cup B} F\hat{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot F\,dV$$

$$\iint_{S} F\hat{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot F\,dV - \iint_{B} F\hat{n}\,dS$$

Calculemos cada integral

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot F\,dV = \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

$$= \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{\cancel{r^2}} \cdot \cancel{r^2}\operatorname{sen}\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

Fubini

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{2+\cos\varphi} \operatorname{sen}\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

+ simetría

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\,(1+\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= 4\pi \cdot \frac{3}{2} = 6\pi$$

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

$\iint_B F\hat{n}\,dS \to$ usamos $\phi(\theta,\varphi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$

$$\hat{n} = \phi_\theta \times \phi_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix}$$

$$\hat{n} = (-\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$\hat{n} = (-\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$F(\phi(\theta,\varphi)) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$$

$$\iint_B F\cdot\hat{n}\,dS = \iint_B F(\phi(\theta,\varphi))\cdot\hat{n}\,dS$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\varphi - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^3\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \,d\theta\,d\varphi$$

$$= -\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\,(\underbrace{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}_{1})\,d\theta\,d\varphi$$

$$= -2\pi$$

Finalmente

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot F\,dV - \iint_B F\hat{n}\,dS$$

$$= 6\pi - (-2\pi) = 8\pi$$

Problema 2. Sea S la superficie del cubo con centro en el origen, de aristas paralelas a los ejes y de longitud 2, orientado exteriormente. Considerar las funciones $u(x,y,z) = \cos(\pi x) + 9z^2$ y $v(x,y,z) = 3x + y^2$. Calcular

$$\iint_S u \cdot \frac{dv}{d\vec{n}}\, dS$$

Donde $\vec{n}$ es vector normal unitario que apunta hacia afuera.

Campo

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = u(\nabla v \cdot \vec{n}) = (u \cdot \nabla v)\, \vec{n}$$

Divergencia

Usamos la propiedad iii) del sgte teorema

Luego

TEOREMA 4.7.1 (Propiedades de la divergencia de un campo escalar) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$, sean $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\vec{G} : \Omega \to \mathbb{R}$ dos campos vectoriales que admiten divergencia en Ω, sean α y β dos números reales y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo escalar que admite gradiente en Ω. Entonces se verifica que,

i) $\operatorname{div}(\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}) = \alpha \operatorname{div}\vec{F} + \beta \operatorname{div}\vec{G}$

ii) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = (\nabla f)\cdot\vec{F} + f \operatorname{div}\vec{G}$

iii) Si $\vec{F}$ admite rotacional en Ω, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$.

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u(\nabla \cdot \nabla v)$$

$$= \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v$$

$$\nabla u = (-\operatorname{sen}(\pi x), 0, 18)$$

$$\nabla v = (3, 2y, 0) \qquad v = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_x + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0 + 2 + 0 = 2$$

Luego

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = -3\operatorname{sen}(\pi x) + 2\cos(\pi x) + 18z^2$$

Volumen

Del enunciado, S es la superficie de un cubo centrado en $(0,0,0)$ y de largo 2

Luego Ω está dado por

$$\Omega = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$S = \partial S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} |x| = 1 \\ |y| = 1 \\ |z| = 1 \end{array} \right\}$$

$1-(-1)$

Gauss

$$\iint_S (u \cdot \nabla v) \vec{n} \, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(u \cdot \nabla v) \, dV$$

$$6 \, \frac{z^3}{\cancel{3}} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} -3 \operatorname{sen}(\pi x) + 2 \cos(\pi x) + 18 z^2 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} -3 \operatorname{sen}(\pi x) \cdot 2 + 2 \cos(\pi x) \cdot 2 + 18 \cdot \frac{2}{3} \, dy \, dx$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^{1} -6 \operatorname{sen}(\pi x) + 4 \cos(\pi x) + 12 \, dx$$

$$= 2 \, (0 + 0 + 12 \cdot 2) = 48$$

Problema 3. Sea $0 < r < a$.

1. Sea Ω_1 la superficie de revolución que se obtiene al girar el semicírculo

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2 \ ; \quad z \geq 0$$

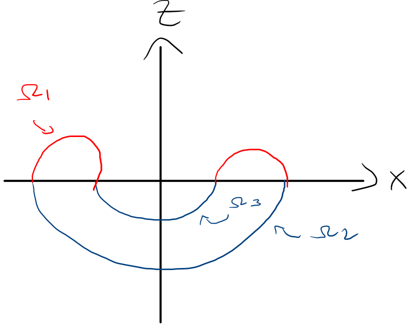
en torno del eje z.

2. Sea $\Omega_2 = \{(x,y,z) \ / \ x^2+y^2+z^2 = (a+r)^2 \ ; \quad z \leq 0\}$
3. Sea $\Omega_3 = \{(x,y,z) \ / \ x^2+y^2+z^2 = (a-r)^2 \ ; \quad z \leq 0\}$

Sea $\Omega = \bigcup_{n=1}^{3} \Omega_i$ y considerar el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x, z, -y)$.

Calcule

(i) El flujo de $\vec{F}$ a traves de Ω_2.
(ii) El flujo de $\vec{F}$ a traves de Ω.



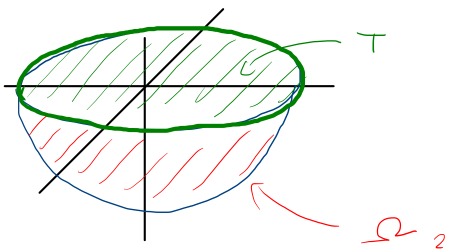
i) Campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x, z, -y)$$

Divergencia

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = 1 + 0 + 0 = 1$$

Volumen



La idea es usar Gauss, el problema es que Ω_2 no encierra un volumen

¿Solución? $\rightarrow$ Taparlo con un conjunto T

Luego definiendo $\partial R = \Omega_2 \cup T$

donde $T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2+y^2 = (r+a)^2 \\ z = 0 \end{array} \right\}$

Se tiene que

$$R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq (r+a)^2 \\ z \leq 0 \end{array} \right\}$$

Gauss

$$\iint_{\partial R} F\hat{n}\,dS = \iiint_R \operatorname{div}(F)\,dV$$

$$\iint_{S_2} F\hat{n}\,dS = \iiint_R \operatorname{div}(F)\,dV - \iint_T F\hat{n}\,dS$$

Sabemos que R es la mitad de una esfera radio a+r

luego $\iiint_R \operatorname{div}(F)\,dV = \iiint_R dV = \frac{2\pi}{3}(a+r)^3$

Por otro lado, calculamos la integral de superficie

$\iint_T \vec{F}\,\vec{n}\,dS$ $\qquad T = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq (r+a)^2 \\ z=0 \end{array} \right\}$

$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, 0)$ $\qquad 0\leq\rho\leq r+a$, $\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\phi_\rho \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, \rho)$$

$F(\phi(\rho,\theta)) = (0, \rho, 0)$

$F(\phi(\rho,\theta))\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \iint_T \vec{F}\,\vec{n}\,dS = 0$

Luego

$$\iint_{S_2} F\hat{n}\,dS = \frac{2\pi}{3}(r+a)^3$$

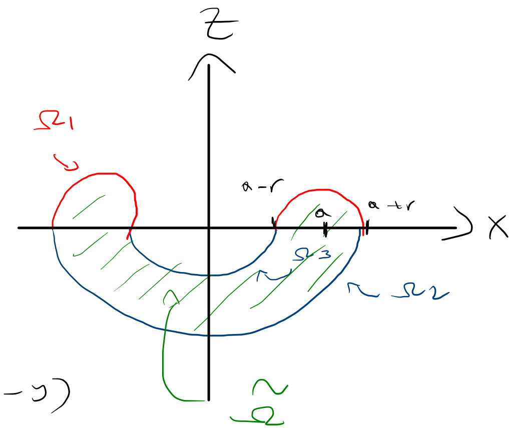
Problema 3. Sea $0 < r < a$.

1. Sea Ω_1 la superficie de revolución que se obtiene al girar el semicírculo
$$(x-a)^2 + z^2 = r^2 \;\; ; \quad z \geq 0$$
en torno del eje z.
2. Sea $\Omega_2 = \{ (x,y,z) \; / \; x^2+y^2+z^2 = (a+r)^2 \; ; \; z \leq 0 \}$
3. Sea $\Omega_3 = \{ (x,y,z) \; / \; x^2+y^2+z^2 = (a-r)^2 \; ; \; z \leq 0 \}$

Sea $\Omega = \bigcup_{n=1}^{3} \Omega_i$ y considerar el campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x, z, -y)$.

Calcule

(i) El flujo de $\overrightarrow{F}$ a traves de Ω_2.
(ii) El flujo de $\overrightarrow{F}$ a traves de Ω.



ii) Campo $\quad F(x,y,z) = (x, z, -y)$

Divergencia $\quad \operatorname{div}(F) = 1$

Volumen

Sea $\tilde{\Omega}$ el sólido encerrado por Ω

donde
$$\tilde{\Omega} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} (a-r)^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq (a+r)^2 & z \leq 0 \\ (x-a)^2 + z^2 = r^2 & z \geq 0 \end{array} \right\}$$

Además note que
$$\operatorname{Vol}(\tilde{\Omega}) = \operatorname{Vol}(\Omega_2) - \operatorname{Vol}(\Omega_3) + \operatorname{Vol}(\Omega_1)$$

Gauss
$$\iint_{\Omega} F \hat{n} \, dS = \iiint_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div}(F) \, dV = \iiint_{\tilde{\Omega}} dV = \operatorname{vol}(\tilde{\Omega})$$
$$= \operatorname{Vol}(\Omega_2) - \operatorname{Vol}(\Omega_3) + \operatorname{Vol}(\Omega_1)$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left((r+a)^3 - (r-a)^3 \right) + \underbrace{\cancel{2}\pi a \cdot \left(\frac{\pi r^2}{\cancel{2}} \right)}_{a\pi^2 r^2}$$

Problema 4. Sea M la superficie $x^2+y^2+z^2=4$ con $-1 \le z \le 2+x$. Considerar el campo $\vec{f}(x,y,z) = (z\,,\,xz\,,\,yz)$.

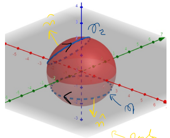
Calcular

$$\iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

1. Usando el Teorema de Stokes.
2. Usando el Teorema de Gauss.

donde $\vec{n}$ es vector normal unitario que apunta hacia afuera.

1) Usemos los pasos de Stokes



Regla mano derecha

Campos

$$\vec{F}(x,y,z) = (z, xz, yz)$$

Superficie

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ -1 \le z \le 2+x \end{array} \right\}$$

Parametrizar

Como la superficie M está limitada por $-1 \le z \le 2+x$, entonces, para usar Stokes debemos parametrizar las curvas intersección σ_1, σ_2 que se ven en la figura,

Buscando σ_2 $(z = 2+x)$

$$x^2+y^2+(2+x)^2 = 4 \longrightarrow (x+1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$-\sigma_2 : \; r_2(t) = (-1+\cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t, \underbrace{1+\cos t}_{2+x}) \quad -\pi \le t \le \pi$$

orientación antihoraria

σ_2 debe ser horaria

Buscando σ_1 $(z=-1)$

$$x^2+y^2 = 3$$

$$\sigma_1 : \; r_1(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\,\text{sen}\, t, -1) \quad -\pi \le t \le \pi$$

$$r_2'(t) = (-\text{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t, -\text{sen}\, t)$$

$$r_1'(t) = (-\sqrt{3}\,\text{sen}\, t, \sqrt{3}\cos t, 0)$$

Stokes

$$F(r_2(t)) = (1+\cos t, \cos^2 t - 1, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t\,(1+\cos t))$$

$$F(r_1(t)) = (-1, -\sqrt{3}\cos t, -\sqrt{3}\,\text{sen}\, t)$$

$\vec{f}(x,y,z) = (z\,,\,xz\,,\,yz)$.

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{3}\,\text{sen}(\theta) - 3\cos^2(\theta)\right) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \Big[(1+\cos(\theta))(-\text{sen}(\theta)) + (\cos^2(\theta)-1)\sqrt{2}\cos(\theta)$$
$$+\sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)(1+\cos(\theta))(-\text{sen}(\theta))\Big]\, d\theta = -3\pi + \sqrt{2}\pi$$

$$F(r_2(t))\, r_2'(t) = -\text{sen}\, t\,(1+\cos t) + \sqrt{2}\,\underbrace{(\cos^2 t - 1)}_{(-\text{sen}^2 t)}\cos t - \sqrt{2}\,\text{sen}^2 t\,(1+\cos t)$$

$$= -\text{sen}\, t - \text{sen}\, t\cos t - 2\sqrt{2}\,\text{sen}^2 t\cos t - \sqrt{2}\,\text{sen}^2 t$$

$$F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) = \sqrt{3}\,\text{sen}\, t - 3\cos^2 t + 0$$

$$\iint_M \nabla \times F\, dS = \int_{\sigma_1} F\,dr + \int_{\sigma_2} F\,dr$$

σ_1 y σ_2 son frontera

$\int_{\sigma_2} f = -\int_{-\sigma_2} f$

σ_2 cerrada

$$= \int_{\sigma_1} F\,dr - \int_{-\sigma_2} F\,dr$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} F(r_2(t)) \cdot r_2'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{3}\,\text{sen}\, t - 3\cos^2 t + \text{sen}\, t + \text{sen}\, t\cos t + 2\sqrt{2}\,\text{sen}^2 t\cos t + \sqrt{2}\,\text{sen}^2 t\, dt$$

$$= \left[\sqrt{3}(-\cos t) - \frac{3}{2}\left(t + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\right) - \cos t + \frac{\text{sen}^2 t}{2} + 2\sqrt{2}\,\frac{\text{sen}^3 t}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{\text{sen}(2t)}{2}\right)\right]\Bigg|_{t=-\pi}^{t=\pi}$$

$$= \Big[\cancel{\sqrt{3}(-(-1))} - \frac{3}{2}(\pi+0) - (-1) + \cancel{\frac{0}{2} + 2\sqrt{2}\frac{0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pi - \frac{0}{2}\right)$$
$$- \left(\cancel{\sqrt{3}(-(-1))} - \frac{3}{2}(-\pi+0) - (1) + \cancel{\frac{0}{2} + 2\sqrt{2}\frac{0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\pi - \frac{0}{2}\right)\right)$$

$$= -3\pi + \sqrt{2}\,\pi$$