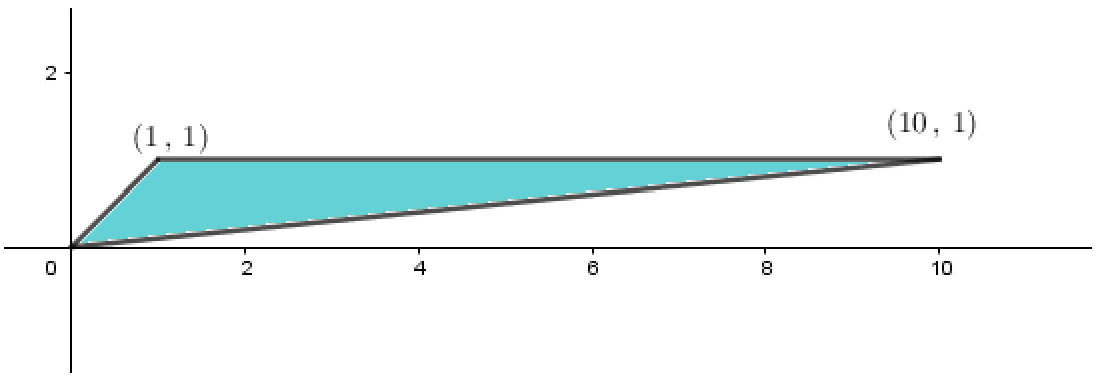
UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Ayudantía 1
Matemática IV (MAT-024)
Jueves 9 de Septiembre 2021

Problema 1. Sea Ω la región plana acotada por el triángulo de vértices $(0{,}0)$, $(10{,}1)$ y $(1{,}1)$. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy-y^2}\, dA$.

solución:



$$\iint_\Omega \sqrt{xy-y^2}\, dA = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy-y^2}\; dx\, dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(xy-y^2)^{3/2}\frac{1}{y}\Big|_y^{10y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3y}\,(3y)\, dy = 2$$

Nota: Mencionar que significa integrar en el orden $dy\, dx$.

Problema 2. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3\, \mathrm{e}^{y^3}\; dy\, dx$.

solución:

Así como esta planteado no es posible hacer el calculo usando funciones elementales, mejor cambiar el orden de integración.

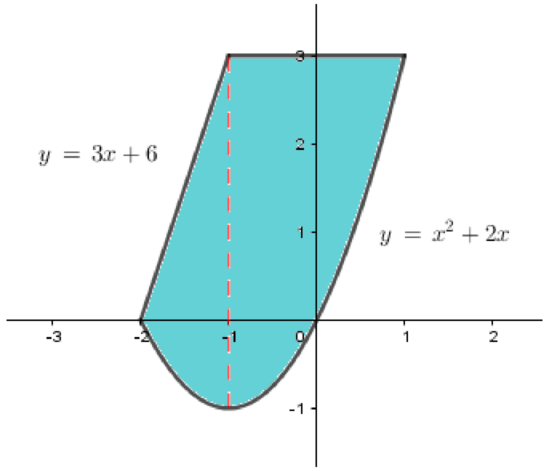
$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3\, \mathrm{e}^{y^3}\; dy\, dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^3\, \mathrm{e}^{y^3}\; dy\, dx = \frac{1}{4}\int_0^9 y^2\, \mathrm{e}^{y^3}\; dy = \frac{1}{12}\, \mathrm{e}^{y^3}\Big|_0^9 = \frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^{729} - 1\right)$$

Problema 3. Sea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \;/\; y \geq x^2 + 2x \;\wedge\; y \leq 3x + 6 \;\wedge\; y \leq 3\}$$

Evalúe la integral $\displaystyle\iint_D (x + y + 1)\, dA$ y dibuje la región D.

solución:



$$\iint_D (x + y + 1)\, dA = \int_{-2}^{-1} \int_{x^2+2x}^{3x+6} (x + y + 1)\, dy\, dx + \int_{-1}^{1} \int_{x^2+2x}^{3} (x + y + 1)\, dy\, dx = \frac{29}{60} + \frac{172}{15}$$

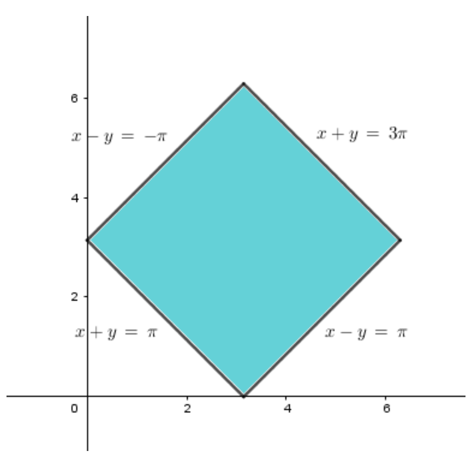
Problema 4. Calcular

$$\iint_D (x - y)^2 \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy$$

donde D es el paralelógramo de vértices $(\pi\,,\,0)\,,(2\pi\,,\,\pi)\,,\;(\pi\,,\,2\pi)$ y $(0\,,\,pi)\,.$

solución:

Se trata de un cuadrado determinado por las rectas $x+y = \pi$ $x+y = 3\pi\,,$ $x-y = -\pi$ y $x-y = \pi\,.$
Hacer el cambio



$$\begin{array}{rcl} u & = & x+y \\ v & = & x-y \end{array} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{c} \pi \leq u \leq 3\pi \\ -\pi \leq v \leq \pi \end{array}$$

con $J = -\dfrac{1}{2}$. La integral queda

$$\iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} v^2 \operatorname{sen}(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du\, dv = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 \operatorname{sen}(u)\, dv\, du = 0$$

Problema 5. Calcular, usando un cambio de variable adecuado.

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + 2xy + 4y^2)\, dA$$

donde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 4\}$.

solución:

Observar que $x^2 + 2xy + 4y^2 = (x+y)^2 + (\sqrt{3}y)^2$. Sea $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2 + v^2 \leq 4\}$
Hacer el cambio $u = x+y$, $v = \sqrt{3}y$. El Jacobiano de este cambio es $J = \sqrt{3}$. Con esto la integral queda

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + 2xy + 4y^2)\, dA = \iint_{\mathcal{D}^*} (u^2 + v^2)\, du\, dv = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3\, dr\, d\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$$