Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Matemática

2do Semestre 2020

Tarea 1

Series Tiempo II MAT268

Nombre:	Ike Mercado
Rol:	201610025-3
Profesor:	Ronny Vallejos

Problema 1

Demuestre que

$$det(I_{Kp} - \mathbf{A}z) = det(I - A_1 z - \cdots - A_p z^p)$$

donde $\mathbf{A}$ viene dada por

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_K & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_K & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_K & 0 \end{pmatrix}$$

y donde

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_t y_{t-p} + u_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Desarrollo:
Definamos las siguientes matrices:

$$A = I_K - A_1 z \quad B = \begin{pmatrix} -A_2 z & \ldots & -A_p z \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -I_K z \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} I_K & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -I_K z & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & I_K & 0 \\ 0 & & & -I_K z & I_K \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} I_{Kp} - \mathbf{A}z &= \begin{pmatrix} I_K & 0 & \cdots & \\ 0 & I_K & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_K \end{pmatrix}_{(Kp \times Kp)} - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_K & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_K & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_K & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_K - A_1 & -A_2 z & \ldots & & & & -A_p z \\ -I_K z & I_k & 0 & \ldots & & & 0 \\ 0 & -I_K z & I_K & 0 & \ldots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & I_K & 0 \\ & & & & & -I_K z & I_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando el complemento de schur para calcular determinantes de matrices por bloques, se sigue que

$$det(I_{Kp} - \mathbf{A}) = det(D)det(A - BD^{-1}C)$$

Observe que es una matriz triangular cuyos elementos en la diagonal son 1, por lo que $det(D) = 1$, luego

$$det(I_{Kp} - \mathbf{A}) = det(I_K - A_1 z - BD^{-1}C)$$

Ahora solo basta calcular $BD^{-1}D$ para concluir el resultado.
En efecto, primero calculemos D^{-1}, para ello notemos que $D = I_{K(p-1)} + N$, donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \\ -I_k z & 0 & \dots & & \\ 0 & -I_K z & \ddots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -I_K z & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \\ 0 & \dots & & & \\ I_K z^2 & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_K z^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \\ 0 & \dots & & & \\ 0 & \dots & & & \\ -I_K z^3 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & -I_K z^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando esto sucesivamente, se puede ver que para $N^{p+1} = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula, por lo que N es nilpotente, por consiguiente, la inversa de D es dada por:

$$D^{-1} = I_{K(p-1)} + \sum_{r=1}^{p-2} (-1)^r N^r$$

Así

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} I_K & 0 & \dots & & & \\ I_k z & I_K & 0 & \dots & & \\ I_K z^2 & I_K z & I_K & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & & \\ I_K z^{p-2} & I_K z^{p-3} & \dots & & I_K z & I_K \end{pmatrix}$$

Notación: Si $X \in \mathcal{M}_{(Kp\times Kp)}(\mathbb{R})$ es una matriz por bloques denotemos por $[X^{-1}]_{ij} \in \mathcal{M}_{(K\times K)}(\mathbb{R})$ al bloque (i,j) de la matriz X, (por ejemplo para la matriz $\mathbf{A}$: $[\mathbf{A}]_{11} = A_1, [\mathbf{A}]_{12} = I_K, [\mathbf{A}]_{21} = A_2, [\mathbf{A}]_{22} = 0$).

Observación: Si X, Y son matrices por bloques tales, donde X tiene r bloques columnas Y tiene r bloques fila, entonces

$$[XY]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} [X]_{ik}[Y]_{kj}$$

Luego

$$\begin{aligned}
BD^{-1}C &= \begin{pmatrix} -A_2 z & \dots & -A_p z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_K & 0 & \dots & & & \\ I_k z & I_K & 0 & \dots & & \\ I_K z^2 & I_K z & I_K & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & & \\ I_K z^{p-2} & I_K z^{p-3} & \dots & & I_K z & I_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_K z \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -A_2 z & \dots & -A_p z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_K z \\ -I_K z^2 \\ \vdots \\ -I_K z^{p-1} \end{pmatrix} \\
&= A_2 z^2 + \dots + A_p z^p
\end{aligned}$$

Finalmente se concluye que

$$det(I_{Kp} - \mathbf{A}) = det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 - \dots - A_p z^p) \tag{1}$$

Problema 2

En los Estados Unidos de Wonderland, la tasa de crecimiento de los ingresos (GNP) y el stock de dinero (M2) así como la tasa de interés (IR) están relacionados por el siguiente modelo VAR(2):

$$\begin{bmatrix} GNP_t \\ M2_t \\ IR_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GNP_{t-1} \\ M2_{t-1} \\ IR_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GNP_{t-2} \\ M2_{t-2} \\ IR_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix} \tag{2}$$

(a) Pruebe que el proceso $y_t = (GNP_t, M2_t, IR_t)'$ es estable.

(b) Determine el vector de medias de y_t.

(c) Escriba el proceso y_t en forma de VAR(1).

(d) Calcule los coeficientes matriciales $\phi_1, \ldots, \phi_5$ de la representación MA dada por la siguiente ecuación

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i u_{t-i}, \quad \mu := J\boldsymbol{\mu} \quad \phi_i := J\mathbf{A}^i J^T$$

Desarrollo:

El cálculo numérico de estas matrices las puede ver en la siguiente página: `https://colab.research.google.com/drive/1eJ0F8FgKD1__Pvo0bgwtmGPerXawR1Er?usp=sharing`

(a) Probemos que las raíces del polinomio generado por $det(I_6 - z\mathbf{A})$ son mayores a 1 en modulo. En efecto, note que:

$$\begin{aligned} det(I_6 - z\mathbf{A}) &= \frac{z^6}{z^6} det(I_6 - z\mathbf{A}) \\ &= z^6 det(\frac{1}{z} I_6 - \mathbf{A}) \\ &= z^6 det(\mathbf{A} - \lambda I_6)(-1)^6 \quad \lambda = 1/z \\ &= z^6 polcar(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

De esta forma, el polinomio generado por $det(I_6 - z\mathbf{A})$ queda en función del polinomio característico denotado por $polcar(\mathbf{A})$, luego

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} det(I_6 - z\mathbf{A}) &= z^6(\lambda^6 - 1.9\lambda^5 + 1.26\lambda^4 - 0.323\lambda^3 - 0.021\lambda^2 + 0.016\lambda) \\ &= 0.016z^5 - 0.021z^4 - 0.323z^3 + 1.26z^2 - 1.9z + 1 \end{aligned}$$

Las raíces de dicho polinomio son dadas por

$$\begin{aligned} z_1 &= -5.58083612 \\ z_2 &= 2.89366753 \\ z_3 &= 1.45032672 + 1.19082258i \\ z_4 &= 1.45032672 - 1.19082258i \\ z_5 &= 1.09901515 \end{aligned}$$

Cada una de ellas es mayor en modulo a 1, por lo que se concluye que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$ se tiene que $det(I_6 - z\mathbf{A}) \neq 0$, concluyendo así que el proceso es estable.

(b) Definamos

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\mu = J\boldsymbol{\mu} = J(I_6 - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \begin{pmatrix} 6.875 \\ 14.375 \\ 30.9375 \end{pmatrix}$$

(c) Usando las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\nu}$ definidas anteriormente, se puede escribir el proceso VAR(2) escrito en la ecuación (2) como el siguiente proceso VAR(1):

$$\begin{pmatrix} GNP_t \\ M2_t \\ IR_t \\ GNP_{t-1} \\ M2_{t-1} \\ IR_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GNP_{t-1} \\ M2_{t-1} \\ IR_{t-1} \\ GNP_{t-2} \\ M2_{t-2} \\ IR_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Usando el hecho que $\phi_i = \boldsymbol{J} A^i \boldsymbol{J}^T$, se sigue que

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.29 & 0.11 & 0.01 \\ 0.09 & 0.26 & 0.22 \\ 1.35 & 0.09 & 0.64 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.072 & 0.083 & 0.029 \\ 0.261 & 0.153 & 0.242 \\ 1.341 & 0.171 & 0.521 \end{pmatrix}$$

$$\phi_4 = \begin{pmatrix} 0.0185 & 0.0514 & 0.0425 \\ 0.3825 & 0.1133 & 0.2349 \\ 1.1376 & 0.2115 & 0.4429 \end{pmatrix} \quad \phi_5 = \begin{pmatrix} 0.0368 & 0.03071 & 0.04744 \\ 0.42696 & 0.09887 & 0.21455 \\ 0.92673 & 0.21546 & 0.39257 \end{pmatrix}$$

Problema 3

Considere los procesos AR(1) estacionarios e invertibles

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_{1t}$$
$$Y_t = \phi_2 Y_{t-1} + \epsilon_{2t}$$

Suponga que el vector de errores

$$(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}) \sim f(x, y) = (1-\alpha)N(0,0,1,1,\rho) + \alpha N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho), \tag{3}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

(a) Escriba el proceso (X_t, Y_t) en la forma de un proceso VAR(p).

(b) Determine las distribuciones marginales de ϵ_{1t} y ϵ_{2t}.

(c) Demuestre o refute $Corr(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}) = \frac{\rho(\alpha-\alpha\sigma^2-1)}{(1-\alpha)^2+\alpha^2\sigma^2}$.

(d) Demuestre o refute $Corr(X_t, Y_t) = \frac{\rho(\alpha-\alpha\sigma^2-1)\sqrt{(1-\phi^2)(1-\psi^2)}}{[(1-\alpha)^2+\alpha^2\sigma^2](1-\phi\psi)}$

(e) Comente los resultados c) y d)

Desarrollo:

(a)

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

(b) Primero se interpretará $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$ como una normal bivariada de media $(0,0)$ y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

donde ρ se interpretará como la correlación entre las componentes del vector aleatorio que distribuye $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$.
Sea (x,y) un vector aleatorio cuya función de distribución de la ecuación (3). Calculemos la distribución marginal de x:
En efecto, primero denotemos por $g(x,y)$ a la función densidad de la distribución normal bivariada $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$ y calculemos su distribución marginal de x:

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \begin{vmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{vmatrix}^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

Esto es equivalente a

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}$$

De esta forma podemos escribir la distribución marginal como

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(-2\rho xy+y^2+\rho^2x^2-\rho^2x^2)\right\}dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2-\rho^2x^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(\rho x-y)^2\right\}dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2\cancel{(1-\rho^2)}}{2\sigma^2\cancel{(1-\rho^2)}}\right\}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(\rho x-y)^2\right\}dy}_{=1\text{ pues }\sim N(\rho x,\sigma^2(1-\rho^2))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\sim N(0,\sigma^2)
\end{aligned}$$

Luego la distribución marginal de x de la funcion $f(x,y)$ está dada por

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}(1-\alpha)N(0,0,1,1,\rho)+\alpha N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho)dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(1-\alpha)g(x,y,\sigma=1)+\alpha g(x,y)dy\\
&= (1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y,\sigma=1)dy+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dy\\
&= (1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}+\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&= (1-\alpha)N(0,1)+\alpha N(0,\sigma^2)
\end{aligned}$$

Finalmente

$$f(x)=N(0,(1-\alpha)^2)+N(0,\alpha^2\sigma^2) \tag{4}$$

Luego reemplazando $x=\epsilon_{1t}$ se tiene lo pedido. Para calcular la marginal de ϵ_{2t} el proceso es análogo.

(c) Primero notemos que la esperanza de $\epsilon_{12},\epsilon_{2t}$ es cero, pues aplicando esperanza a la ecuación (4) se consigue que:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xN(0,(1-\alpha)^2)+xN(0,\alpha^2\sigma^2)dx \tag{5}$$

$$E(X)=0+0=0 \tag{6}$$

Luego, notemos que, tomando el vector (x,y) con funcion distribución $f(x,y)$, su covarianza queda definida por

$$cov(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dydx \tag{7}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} cov(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy((1-\alpha)g(x,y,\sigma=1)+\alpha g(x,y))dydx \\ &= (1-\alpha)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x,y,\sigma=1)dydx}_{(**)} + \alpha\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x,y)dydx}_{(*)} \end{aligned}$$

Calculemos la integral (*)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x,y)dydx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}\right. \\ &\quad \left.\times\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(-2\rho xy+y^2)\right\}dy\right]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x\exp\left\{-\frac{x^2\cancel{(1-\rho^2)}}{2\sigma^2\cancel{(1-\rho^2)}}\right\}\right. \\ &\quad \left.\times\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(\rho x-y)^2\right\}dy}_{\text{esperanza de una normal}N(\rho x,\sigma^2(1-\rho^2))}\right]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\rho xdx \\ &= \rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \rho\sigma^2 \end{aligned}$$

Luego para $\sigma=1$ y $\alpha := 1-\alpha$ se calcula la integral (**), luego

$$cov(x,y) = (1-\alpha)\rho+\alpha\rho\sigma^2$$

y reemplazando $x=\epsilon_{1t}$,$y=\epsilon_{2t}$ se tiene la covarianza.
La varianza se saca reemplazando x^2 en lugar de x en la ecuación (5) y dado que la esperanza es 0, se concluye que

$$V(\epsilon_{it}) = (1-\alpha)^2+\alpha^2\sigma^2 \quad i=1,2.$$

Luego

$$corr(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}) = -\frac{\rho(\alpha - \alpha\sigma^2 - 1)}{(1-\alpha)^2 + \alpha^2\sigma^2}$$