Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Matemática

2do Semestre 2020

Tarea 2

Series Tiempo II MAT268

Nombre:	Ike Mercado
Rol:	201610025-3
Profesor:	Ronny Vallejos

Tarea 2

Problema 1

Condidere el problema

$$\begin{bmatrix} GNP_t \\ M2_t \\ IR_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GNP_{t-1} \\ M2_{t-1} \\ IR_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GNP_{t-2} \\ M2_{t-2} \\ IR_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.03 & 0 \\ 0.03 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix} = PP^T \quad P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Determine las autocovarianzas $\Gamma_y(0)$,$\Gamma_y(1)$,$\Gamma_y(2)$,$\Gamma_y(3)$. Calcule y grafique $R(0), R(1), R(2), R(3)$

Desarrollo:

Realizemos el cambio

$$Y_t = \boldsymbol{A} Y_{t-1} + U + \boldsymbol{\nu}$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$vec(\Gamma_Y(0)) = (I_{(kp)^2} - \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A})^{-1} \Sigma_U$$

donde

$$\Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego realizando los cálculos se obtiene que

$$\Gamma_Y(0) = \begin{pmatrix} 0.44718166 & 0.19139482 & 0.55695933 & 0.27680553 & 0.18059136 & 0.38479294 \\ 0.19139482 & 0.84373443 & 1.64527596 & 0.18879229 & 0.76271303 & 1.84420362 \\ 0.55695933 & 1.64527596 & 5.48399604 & 0.84803095 & 1.48847611 & 4.88846023 \\ 0.27680553 & 0.18879229 & 0.84803095 & 0.44718166 & 0.19139482 & 0.55695933 \\ 0.18059136 & 0.76271303 & 1.48847611 & 0.19139482 & 0.84373443 & 1.64527596 \\ 0.38479294 & 1.84420362 & 4.88846023 & 0.55695933 & 1.64527596 & 5.48399604 \end{pmatrix}$$

De aquí se concluye que

$$\Gamma_y(0) = \begin{pmatrix} 0.44718 & 0.19139 & 0.55696 \\ 0.19139 & 0.84373 & 1.64528 \\ 0.55696 & 1.64528 & 5.48300 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_y(1) = \begin{pmatrix} 0.27680 & 0.18059 & 0.38479 \\ 0.18879 & 0.76271 & 1.84420 \\ 0.84803 & 1.48848 & 4.88846 \end{pmatrix}$$

Luego ocupando

$$\Gamma_y(h) = A_1\Gamma_y(h-1) + A_2\Gamma_y(h-2)$$

se obtiene que

$$\Gamma_y(2) = \begin{pmatrix} 0.12321 & 0.16441 & 0.34238 \\ 0.23516 & 0.70283 & 1.93945 \\ 0.92755 & 1.35331 & 4.25708 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_y(3) = \begin{pmatrix} 0.05440 & 0.14925 & 0.35666 \\ 0.29050 & 0.64158 & 1.87476 \\ 0.85293 & 1.23062 & 3.71381 \end{pmatrix}$$

Definamos la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0.66872 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91855 & 0 \\ 0 & 0 & 2.34179 \end{pmatrix}$$

Notemos que la matriz de autocorrelación $R(h)$ está definida por

$$R(h) = D^{-1}\Gamma_y(h)D^{-1}$$

así

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.31159 & 0.35566 \\ 0.31159 & 1 & 0.76487 \\ 0.35566 & 0.76487 & 1 \end{pmatrix} \quad R(1) = \begin{pmatrix} 0.61900 & 0.29400 & 0.24572 \\ 0.30735 & 0.90397 & 0.85735 \\ 0.54152 & 0.69197 & 0.89140 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0.27552 & 0.26765 & 0.21864 \\ 0.38283 & 0.83300 & 0.90163 \\ 0.59231 & 0.62914 & 0.77627 \end{pmatrix} \quad R(3) = \begin{pmatrix} 0.12165 & 0.24298 & 0.22775 \\ 0.47293 & 0.76041 & 0.87155 \\ 0.54465 & 0.57210 & 0.67721 \end{pmatrix}$$

Los gráficos de la componente $R_{ij}(h)$ en función de h lo puede hallar en el siguiente link:

Problema 2

Considere el proceso (1).

(a) Sean

$$y_{2000} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} y_{1999} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule las predicciones $y_{2001}, y_{2002}, y_{2003}$.

(b) Determine las matrices MSE de las predicciones horizonte $h = 1, 2, 3$. (Se interpretara predicciones horizonte como lag's futuros).

(c) Asuma que y_t es un proceso Gaussiano y construya intervalos de confianza de 90% y 95% para $t = 2001, 2002, 2003$.

(d) Use el método de Bonferroni para determinar la región conjunta de pronóstico para GNP_{2001},GNP_{2002},GNP_{2003} cuya probabilidad de contención sea al menos de 97%.

Desarrollo:

(a) Realizemos el cambio de variable $z_t = y_t - \mu$ donde μ es dado por

$$\mu = \begin{pmatrix} 6.875 \\ 14.375 \\ 30.9375 \end{pmatrix}$$

de esta forma z_t es un proceso VAR(p) con media $\mathbf{0}$ por lo que sus pronosticos pueden ser cálculados por

$$z_t(h) = A_1 y_t(h-1) + A_2 y_t(h-2)$$

Luego se tiene que $y_t(h) = z_t(h) + \mu$ y realizando las cuentas se tiene que

$$y_{2001} = \begin{pmatrix} 2.39 \\ 2.00 \\ 1.83 \end{pmatrix} y_{2002} = \begin{pmatrix} 3.733 \\ 2.233 \\ 3.615 \end{pmatrix} y_{2003} = \begin{pmatrix} 4.3584 \\ 2.6377 \\ 6.2517 \end{pmatrix}$$

(b) Los $MSE(h)$ son dados por $\Sigma_y(h)$ los cuales pueden ser calculados por

$$\Sigma_y(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \phi_i \boldsymbol{A} \phi_i^T$$

donde los phi_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ son dados por

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.29 & 0.11 & 0.01 \\ 0.09 & 0.26 & 0.22 \\ 1.35 & 0.09 & 0.64 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.072 & 0.083 & 0.029 \\ 0.261 & 0.153 & 0.242 \\ 1.341 & 0.171 & 0.521 \end{pmatrix}$$

$$\phi_4 = \begin{pmatrix} 0.0185 & 0.0514 & 0.0425 \\ 0.3825 & 0.1133 & 0.2349 \\ 1.1376 & 0.2115 & 0.4429 \end{pmatrix} \quad \phi_5 = \begin{pmatrix} 0.0368 & 0.03071 & 0.04744 \\ 0.42696 & 0.09887 & 0.21455 \\ 0.92673 & 0.21546 & 0.39257 \end{pmatrix}$$

De esta forma se tiene que

$$\Sigma_y(1) = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.03 & 0.00 \\ 0.03 & 0.09 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.81 \end{pmatrix} \quad \Sigma_y(2) = \begin{pmatrix} 0.3925 & 0.0420 & 0.1665 \\ 0.0420 & 0.1125 & 0.0756 \\ 0.1665 & 0.0756 & 1.5390 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_y(3) = \begin{pmatrix} 0.4175 & 0.0557 & 0.2796 \\ 0.0557 & 0.1612 & 0.2341 \\ 0.2796 & 0.2341 & 2.3526 \end{pmatrix}$$

(c) Notemos que cada intervalo de confianza de $\alpha \times 100\%$ de confianza está dado por

$$IC_\alpha(y_{t+h,k}) = [y_{t,k}(h) \pm z_{\alpha/2}\sigma_k(h)]$$

donde $\sigma_k(h)$ son los elementos de la diagonal de la matriz $\Sigma_y(h)$, en efecto, calculando todo se tiene que y denotando $(y_{t,1}, y_{t,2}, y_{t,3}) = (GNP_t, M2_t, IR_t)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
y_{2001,1}90.0\% &: (2.3259, 2.4541)\\
y_{2001,1}95.0\%' &: (2.358, 2.422)\\
y_{2001,2}90.0\%' &: (1.9623, 2.0377)\\
y_{2001,2}95.0\%' &: (1.9812, 2.0188)\\
y_{2001,3}90.0\%' &: (1.7169, 1.9431)\\
y_{2001,3}95.0\%' &: (1.7736, 1.8864)\\
y_{2002,1}90.0\%' &: (3.6543, 3.8117)\\
y_{2002,1}95.0\%' &: (3.6937, 3.7723)\\
y_{2002,2}90.0\%' &: (2.1909, 2.2751)\\
y_{2002,2}95.0\%' &: (2.212, 2.254)\\
y_{2002,3}90.0\%' &: (3.4591, 3.7709)\\
y_{2002,3}95.0\%' &: (3.5372, 3.6928)\\
y_{2003,1}90.0\%' &: (4.2772, 4.4396)\\
y_{2003,1}95.0\%' &: (4.3179, 4.3989)\\
y_{2003_2}90.0\%' &: (2.5872, 2.6882)\\
y_{2003_2}95.0\%' &: (2.6125, 2.6629)\\
y_{2003_3}90.0\%' &: (6.059, 6.4444)\\
y_{2003_3}95.0\%' &: (6.1555, 6.3479)
\end{aligned}
$$

(d) Calculemos los intervalos de confianza de $GNP_{2001}, GNP_{2002}, GNP_{2003}$ para el 99% pues si hacemos eso obtendremos una region conjunta (por Bonferroni) de al menos 97%. Pues

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1 - \alpha/3 = 0.99$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
GNP_{2001}99.0\% &: (2.3836, 2.3964)\\
GNP_{2002}99.0\% &: (3.7251, 3.7409)\\
GNP_{2003}99.0\% &: (4.3503, 4.3665)
\end{aligned}
$$

Luego la región conjunta es

$$R = GNP_{2001}99.0\% \times GNP_{2002}99.0\% \times GNP_{2003}99.0\%$$

donde $\times$ representa el producto cartesiano entre conjuntos.

Pregunta 3

Responda las siguientes preguntas basadas en el modelo (1)

(a) ¿Es $M2$ Granger-causal para (GNP, IR)?

(b) ¿Es IR Granger-causal para $(GNP, M2)$?

(c) ¿Hay causalidad instantánea entre $M2$ y (GNP, IR)?

(d) ¿Hay causalidad instantánea entre IR y $(GNP, M2)$?

Desarrollo:

(a) Note que el proceso (1) es equivalente al siguiente proceso:

$$\begin{pmatrix} GNP_t \\ IR_t \\ M2_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & {\color{blue}0.1} \\ 0.9 & 0.8 & {\color{blue}0} \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GNP_{t-1} \\ IR_{t-1} \\ M2_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & {\color{red}0} \\ 0 & 0 & {\color{red}0} \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GNP_{t-2} \\ IR_{t-2} \\ M2_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{3t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

Notemos que para que $M2$ no sea Granger Causal de (GNP, IR) es necesario y suficiente que las matrices $A_{12,i} = \mathbf{0}$ para todo $i = 1, 2$ donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula. Denotando por $A_{12,1}$ a la matriz formada por los numeros azules y $A_{12,2}$ a la matriz formada por los números rojos, se puede ver que $A_{12,2}$ es la matriz nula por lo tanto se concluye que $M2$ es Granger causal para (GNP, IR).

(b) Para ver si IR no es Granger-causar de $(GNP, M2)$ solo basta ver que las matrices $A_{12,1}, A_{12,2}$ son nulas. En efecto para el proceso (1), es fácil ver que

$$A_{12,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Como son no nulas, se concluye que IR es Granger-causal para $(GNP, M2)$.

(c) Notemos que (1) cambiando el vector aleatorio por $(GNP_t, IR_t, M2_t)^T$, se obtiene una matriz de covarianzas equivalente dada por:

$$\Sigma'_u = \begin{pmatrix} 0.26 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0.81 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0.09 \end{pmatrix}$$

Definamos $a_t = (GNP_t, IR_t)^T, b_t = M2_t,\ v_{1t} = (u_{1t}, u_{3t})^T, v_{2t} = u_{2t}$ es posible definir el proceso

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.9 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-2} \\ b_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

Notemos que, por Σ_u' se puede ver que

$$E(v_{1t}v_{2t}^T) = \begin{pmatrix} E(u_{1t}u_{2t}) \\ E(u_{3t}u_{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente esta no es una matriz nula, por lo que se concluye que existe causalidad instantánea entre $M2_t$ y (GNP_t, IR_t).

(d) Definiendo $a_t = (GNP, M2)^T$,$b_t = IR_t$,$v_{1t} = (u_{1t}, u_{2t})^T$, $v_{2t} = u_{3t}$ y viendo la matriz Σ_u de la ecuación (2), se puede ver que es una matriz diagonal por bloques,es decir, $E(v_{1t}v_{2t}^T) = \mathbf{0}$ por lo que se deduce que IR_t no es causal instantánea con $(GNP, M2)$.

Pregunta 4

En el contexto de predicción de modelos $VAR(p)$, demuestre que

$$MSE(\bar{y}_t(h)) \geq MSE(E_t(y_{t+h})) \tag{3}$$

para cualquier predictor h pasos adelante, $\bar{y}_t(h)$.

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
MSE(\bar{y}_t(h)) &= E[(y_{t+h} - \bar{y}_t(h))(y_{t+h} - \bar{y}_t(h))^T] \\
&= E[(y_{t+h} - E(y_{t+h}) + E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(y_{t+h} - E(y_{t+h}) + E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T] \\
&= E[(y_{t+h} - E(y_{t+h}))(y_{t+h} - E(y_{t+h}))^T] + E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T] \\
&+ E[(y_{t+h} - E(y_{t+h}))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T] + E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(y_{t+h} - E(y_{t+h}))^T]
\end{aligned}$$

Problemos que $E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T]$ es definida positiva

$$\begin{aligned}
v^T E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T]v &= E[v^T(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T v] \\
&= E[((E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T v)^T((E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T v)] \\
&= E[\|(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T v\|^2] \qquad = \|(E(y_{t+h}
\end{aligned}$$

Lo anterior se cumple para cualquier $v \in \mathbb{R}^k$ por lo que se prueba que $E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T]$ es definida positiva, y como

$$MSE(\bar{y}_t(h)) - MSE(E(y_{t+h})) = MSE(\bar{y}_t(h)) + +E[(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))(E(y_{t+h}) - \bar{y}_t(h))^T] \tag{4}$$

$$+ E[(y_{t+h} - E(y_{t} \tag{5}$$

(INCOMPLETO)

CODIGOS: https://colab.research.google.com/drive/1eJ0F8FgKD1__Pvo0bgwtmGPerXawR1Er?usp=sharing