Прямые и плоскости в пространстве

Содержание

§1. Плоскость в пространстве

В зависимости от способа задания плоскости в пространстве необходимы следующие объекты:

(а) $\mathbf{n} = (A, B, C)$: вектор нормали к плоскости

(б) $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$: пара неколлинеарных векторов, принадлежащих плоскости

(в) $\mathbf{r}_{0,1,2} = (x_{0,1,2}, y_{0,1,2}, z_{0,1,2})$: радиус-векторы опорных точек плоскости

Использование этих объектов в различных комбинациях позволяет описать несколько способов задания плоскости в пространстве:

(а) Параметрические уравнения плоскости в пространстве:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{cases} \tag{1}$$

(б) Уравнение, полученное из условия компланарности:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(в) Нормальные уравнения плоскости в пространстве:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

(г) Общие уравнения плоскости в пространстве:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D \qquad \Leftrightarrow \qquad Ax + By + Cy + D = 0 \tag{4}$$

(д) Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{5}$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$ и $c = -D/C$

(е) Уравнение плоскости с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = p \tag{6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ - направляющие косинусы, имеющие тот же смысл, что и в уравнении прямой на плоскости, а p - прицельный параметр.

§2. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть плоскости заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{matrix} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \beta_1 \mathbf{b}_1 & \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) = -D_1 \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \beta_2 \mathbf{b}_2 & \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) = -D_2 \end{matrix} \tag{7}$$

(а) Параллельность плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \tag{8}$$

(б) Совпадение плоскостей

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \\ D_1 = \lambda D_2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0 \tag{9}$$

(в) Пересечение плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \neq \lambda \mathbf{n}_2 \qquad \text{или} \qquad [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = \mathbf{s} \neq 0 \tag{10}$$

(г) Ортогональность плоскостей

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0 \tag{11}$$

§3. Прямая в пространстве

(а) Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}, \tag{12}$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - опорная точка прямой, а $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ - ее направляющий вектор.

(б) Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z} \tag{13}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{14}$$

(г) Векторное уравнение прямой

$$[\mathbf{r} \times \mathbf{s}] = [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{s}] = \mathbf{b} \qquad (\mathbf{s}, \mathbf{b}) = 0 \tag{15}$$

(д) Прямая как пересечение плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

§4. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые в пространстве заданы векторными параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямые параллельны

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s}_1 = \lambda\mathbf{s}_2 \tag{18}$$

(б) Прямые совпадают

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{19}$$

(в) Прямые пересекаются (в таком случае они гарантированно лежат в одной плоскости)

$$\left\{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0\mathbf{s}_1 \neq \lambda \mathbf{s}_2\right. \tag{20}$$

(г) Прямые скрещиваются и тогда невозможно провести через них плоскость

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \neq 0 \tag{21}$$

§5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость задана векторным нормальным уравнением, а прямая в пространстве - векторным параметрическим уравнением:

$$\begin{gathered} (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t \cdot \mathbf{s} \end{gathered} \tag{22}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямая и плоскость параллельны

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = 0 \tag{23}$$

(б) Прямая принадлежит плоскости (частный случай параллельности)

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = 0 \tag{24}$$

(в) Прямая пересекает плоскость

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \neq 0 \tag{25}$$

Причем точка пересечения может быть определена через параметр t

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{s}, \mathbf{n})} \tag{26}$$

(г) Прямая ортогональна плоскости (частный случай пересечения)

$$\mathbf{s} \parallel \mathbf{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s} = \lambda \mathbf{n} \tag{27}$$