Прямая на плоскости

Содержание

§1. Аналитическая геометрия

Основной объект любой геометрической задачи - точка.

NtB. Каждой точке плоскости $\mathbb{R}^2$ (пространства $\mathbb{R}^3$) можно поставить в соответствие два (три) вещественных числа $P \leftrightarrow (x_P, y_P)$ $(P \leftrightarrow (x_P, y_P, z_P))$ в некоторой системе координат.

Наибольший интерес представляют множества точек, объединенные некоторым свойством. Такие множества будем называть **геометрическими местами точек**. Перечислим некоторые из них:

(а) Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **прямую** в $\mathbb{R}^2$.

(б) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **плоскость** в $\mathbb{R}^3$.

(в) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой, определяет **прямую** в $\mathbb{R}^3$.

Задачи аналитической геометрии

(а) Описание геометрического места точек аналитическим выражением или их совокупностью;

(б) Нахождение ГМТ, удовлетворяющих заданным условиям;

(в) Нахождение пересечения ГМТ;

(г) Отыскание и описание свойств ГМТ;

(д) Отыскание инвариантных (геометрических) свойств ГМТ;

(е) Преобразование систем координат и их аналитическое описание;

(ж) Преобразование уравнений ГМТ при преобразованиях координат.

§2. Прямая на плоскости: векторные уравнения

(а) Уравнение прямой по определению

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|,$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки прямой, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ - радиус-векторы точек, от которых равноудалены точки прямой. Равносильное этому уравнение:

$$\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right) = 0$$

(б) Векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - t\cdot\mathbf{s},$$

где $\mathbf{r}_0$ - радиус-вектор опорной точки, принадлежащей прямой, а $\mathbf{s}$ - направляющий вектор прямой.

(в) Векторное уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} - t(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)$$

(г) Нормальное векторное уравнение прямой

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -$$

где $\mathbf{n}$ - вектор нормали к прямой.

§3. Прямая на плоскости: уравнения в координатах

Зафиксируем некоторую декартову прямоугольную систему координат, в которой

$$\mathbf{r} = (x, y) \qquad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \qquad \mathbf{s} = (s_x, s_y) \qquad \mathbf{n} = (A, B)$$

В данных обозначениях можно получить следующие уравнения прямой на плоскости, выраженные как аналитические соотношения между координатами:

(а) Координатные параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot s_x \\ y = y_0 + t\cdot s_y \end{cases}$$

(б) Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x-x_0}{s_x} = \frac{y-y_0}{s_y}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

(г) Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0$$

(д) Нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(е) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = kx + b,$$

где $k = s_y/s_x$ - угловой коэффициент, а $b = y_0 - kx_0$.

(ж) Уравнение в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$ и $b = -C/B$.

(з) Уравнение с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = p,$$

где $\cos\alpha = \frac{A}{|\mathbf{n}|}$, $\cos\beta = \frac{B}{|\mathbf{n}|}$ - направляющие косинусы прямой, а $p = (\mathbf{r}_0, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}_0})$ - прицельный параметр прямой.

§4. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1 & \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t_1\mathbf{s}_2 & \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) &= (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) \end{aligned}$$

(а) Для параллельных прямых выполняются следующие условия

$$(1) \quad \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{n}_1 = \alpha\mathbf{n}_2$$

$$(2) \quad \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s}_1 = \alpha\mathbf{s}_2$$

$$(3) \quad \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_2) = 0$$

(б) При совпадении прямых (частный случай параллельности) дополнительно выполняется

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

(в) Пересечение прямых гарантирует выполнение следующего условия

$$(\mathbf{n_1}, \mathbf{s}_2) \neq 0, \qquad\qquad (\mathbf{n_2}, \mathbf{s}_1) \neq 0$$

(г) В случае ортогональных прямых (частный случай пересекающихся прямых) можно утверждать, что

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{s}_2, \qquad\qquad \mathbf{n}_2 \parallel \mathbf{s}_1$$