問題 1

$n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathbb{Z}_n$を考える. $\mathbb{Z}_n$が話に関して群になることはよく知られている。

1. $\mathbb{Z}_3$, および $\mathbb{Z}_4$の積に関する表を作り、どちらも環となることを確認せよ.
2. 一般の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ が環になることを確認せよ.
3. $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$はそれぞれ整域であるかどうかを判定せよ.
4. $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$はそれぞれ体であるかどうか判定せよ.
5. 体は整域であることを示せ.
6. 素数 p に対して、$(\mathbb{Z}_p, +, \times)$ は体になることを示せ.

解答

1. 略
2. 略
3.
   - $\mathbb{Z}_3$について
     3 は素数であり、問題 6 から体.したがって、整域
   - $\mathbb{Z}_4$について
     $[2] \in \mathbb{Z}_4$は $[2] \cdot [2] = [4] = [0]$. よって、[2] は [2] の零因子なので、$\mathbb{Z}_4$は整域でない.
4.
   - $\mathbb{Z}_3$について
   - $\mathbb{Z}_4$について
     $\mathbb{Z}_4$は整域でないので、体でもない.
5. 1

問題 2

R を環、そのイデアルを J とする

1. J がイデアルであることの定義をかけ
2. イデアル J に単位元が含まれれば、$J = R$ となることを示せ
3. 体には自明なイデアルしかないことを示せ
4. 剰余環 R/J における加法と乗法の定義を書け.また、乗法が矛盾なく定義できることを示せ

解答

1. R の部分集合 J がイデアルとは以下の二つを満たしてることである
   (a) J が R の加法に関する部分群
   (b) $\forall a \in J,\ \forall r \in R,\ r \cdot a \in J.$
2. $J \subset R$ は明らか
   $R \subset J$ を示す。
   $1 \in J$ であることから、$\forall r \in R$ に対して、$r = r \cdot 1 \in J$.よって、$R \subset J.$
3. K を体とし, $I \subset K$ をイデアルであり、$I \neq \emptyset$ とする
   $a \in I$ という元が存在してそれを固定する。$1 = a^{-1} \cdot a \in I.$　よって問題 3 より $I = K$

以上から K には自明なイデアルしかない

4. $x+J, y+J \in R/J$ に対して
   - 加法
     $(x+J)+(y+J)=(x+y)+J$ つまり、$[x]+[y]=[x+y]$
   - 積
     $(x+J)(y+J)=(xy)+J$ つまり、$[x]\cdot[y]=[xy]$
   - well-defined 性について
     - イデアルはアーベル群であるから正規部分群であるので、加法にたいしては well-defined
     - 積について
       $a\in[x], b\in[y]$ とする。したがって、$\exists j_1, j_2 \in J\ s.t.\ a=x+j_1, b=y+j_2.$
       $[a]\cdot[b]=[ab]=[(x+j_1)(y+j_2)]=[xy+xj_2+yj_1+j_1j_2]=[xy]$. ($J$ はイデアルであることから、$xj_2+yj_1+j_1j_2 \in J$)
       よって、$well-defined$

問題 3

環 $\mathbb{Z}$ の部分集合 $\{3059, 4807\}$ に対して、それによって生成されるイデアル J を以下で定める
$J=(3059,4807)=\{3059r_1+4807r_2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Z}\}$
J は単項イデアルであることを示したい

1. 3059 と 4807 の最大公約数を求めよ
2. (1) で求めた最大公約数を g とし、g の生成する $\mathbb{Z}$ 上のイデアル K を以下で定めると、$K\subset J$ となることを示せ
   $K=(g)=\{gr \mid r\in\mathbb{Z}\}$
3. $J\subset K$ となることを示せ

問題 4

R, S を環として、$\phi : R \to S$ を環の準同型とする

1. $\phi(0)=0, \phi(-a)=-\phi(a)$ を確かめよ
2. $Im(\phi)$ は S の部分環となることを示せ
3. R が体の時、ϕは零写像でなければ単射であることを示せ

解答

1. ϕは群の準同型でもあるので明らか
2. $Im(\phi)$ はϕの群準同型の性質から明らかに S の和に関する部分群
   $\forall a, b \in Im(\phi)$ に対して、$\exists x, y \in R\ s.t.\ a=\phi(x), b=\phi(y).$
   $a\cdot b=\phi(x)\cdot\phi(y)=\phi(xy)\in Im(\phi).$
   $1_S=\phi(1_R)\in Im(\phi).$ 以上から、$Im(\phi)$ は S の部分環
3. $Ker(\phi)=0$ を示す.

$Ker(\phi)$ は R のイデアルであり、R は体なので R のイデアルは自明なものしかない。
したがって、$Ker(\phi) = (0_R)$ or R.しかし、$\phi(1_R) = 1_S \neq 0_S$ より $Ker(\phi) \neq R$.したがって、$Ker(\phi) = (0_R)$.