問題 1

多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ は単項イデアル整域であることが知られている。$\mathbb{Q}[x]$ 上のイデアル $(x^5+2x^4-4x^3-8x^2+3x+6, x^4+x^3-9x^2-3x^2+18)$ を生成する元を求めよ

解答

演習 $No.5$ より、$(x^5+2x^4-4x^3-8x^2+3x+6, x^4+x^3-9x^2-3x^2+18)$ は最大公約元によって生成される.最大公約元はユークリッドの互除法によって求められる

$gcd(x^5+2x^4-4x^3-8x^2+3x+6, x^4+x^3-9x^2-3x^2+18)$
$=gcd(x^4+x^3-9x^2-3x^2+18, 4x^3+4x^2-12x-12)$
$=gcd(x^4+x^3-9x^2-3x^2+18, x^3+x^2-3x-3)$
$=gcd(x^3+x^2-3x-3, -6x^2+18)$
$=gcd(x^3+x^2-3x-3, -6x^2+18)$
$=gcd(x^3+x^2-3x-3, x^2-3)$
$=gcd(1, x^2-3)$
よって、生成元は (x^2-3)

問題 2

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ と $\mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$ が環として同型であることを示したい
$\phi:\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ を $f(x)$ に対して、$f(\sqrt{3})$ を対応させるものとする。

1. ϕが環準同型であることを示せ
2. ϕが全射であることを示せ
3. $Ker\phi$が (x^2-3) であることを示せ
4. 環準同型定理を用いて、同型であることを示せ

解答

1. $\forall f,g\in\mathbb{Q}[x]$ に対して、$\phi(f(x)+g(x))=f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=\phi(f(x))+\phi(g(x))$
   $\forall f,g\in\mathbb{Q}[x]$ に対して、$\phi(f(x)g(x))=f(\sqrt{3})g(\sqrt{3})=\phi(f(x))\phi(g(x))$
   $\phi(1)=1$
   よって,ϕは環準同型
2. $\forall a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ にたして、$a+bx\in\mathbb{Q}[x]$ によって、$\phi(a+bx)=a+b\sqrt{3}$となるので、ϕ は全射
3. $Ker(\phi)=(x^2-3)$ を示す
   - $Ker(\phi)\subset(x^2-3)$
     $\forall f(x)\in Ker(\phi)$ に対して、$\exists g(x)\in\mathbb{Q}[x],\ \exists a,b\in\mathbb{Q}\ s.t.\ f(x)=(x^2-3)g(x)+ax+b$
     $f(\sqrt{3})=a\sqrt{3}+b=0$. したがって、$a=b=0$. ゆえに、$f(x)\in(x^2-3)$
   - $(x^2-3)\subset Ker(\phi)$
     $\forall f[x]\in(ker(\phi))$ に対して、$\exists g(x)\mathbb{Q}[x]\ s.t.\ f(x)=(x^2-3)g(x)$. したがって、$f(\sqrt{3})=(3-3)g(x)=0$. よって、$f(x)\in Ker(\phi)$

以上から、$Ker(\phi) = (x^2 - 3)$

4. 以上より、準同型定理から $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$

問題 3

$\mathbb{Z}_2[t]$ を $t^2 + t + 1$ の生成するイデアルで割った剰余環 $R = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$ を考えるとこれは有限になる

1. R の要素を列挙せよ
2. R の和に関する表と積に関する表を書き、R が体であることかどうかを判定せよ
3. R の位数を k とする。R と $\mathbb{Z}_k$は同型であるか判定せよ

解答

1. $\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{t},\ \overline{t+1}\}$
2. 表は略、R は体
3. R は $\mathbb{Z}_4$と同型ではない

   $\because$ R は体だが $\mathbb{Z}_4$は体ではないため

問題 4

体 K 上の多項式環 $K[x]$ はユークリッド整域であることを示せ.

解答

写像 deg を以下のように定義する

$$\begin{array}{cccc} d: & K[x] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \cup & & \cup \\ & f(x) & \longmapsto & deg(f) \end{array}$$

$f(x),\ g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$ とする

すると、多項式の割り算の定義から $\exists !\ q(x),\ r(x) \in K[x]\ s.t.\ f(x) = q(x)g(x) + r(x)\ (deg(r) < deg(g))$.したがって、$K[x]$ はユークリッド環

問題 5

一意分解整域について以下の問いに答えよ

1. $\mathbb{Z}$ は一意分解整域であることを説明せよ
2. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ は一意分解整域でないことを示したい
   (a) $N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}$ を $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$で定める。$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して、$N(\alpha) \geq 0$ および、$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ を示せ
   (b) $N(\alpha) \leq 6$ となる$\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を列挙せよ
   (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において、6 をふた通りの積に分解せよ
   (d) 全問の分解が既約元への分解になっていることを示せ

解答

1. $\mathbb{Z}$ の素数は素元であり、$\mathbb{Z}$ は素因数分解によって素元の積に分解され、また素因数分解の一意性から順番を無視して一意になる
2. $\alpha = a + b\sqrt{-5}, \beta = c + d\sqrt{-5}$とおく $N(\alpha) = a^2 + 5b^2 \geq 0$, また、$N(\alpha)N(\beta) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = (ac - 5bd)^2 + 5(ad + cb)^2 = N(\alpha\beta)$
3. $\alpha = a + \sqrt{-5}b$ とする。$N(\alpha) = a^2 + 5b^2$.
   $a^2 + 5b^2 \leq 6$ より $-1 \leq b \leq 1$.
   $b = 0$ のとき、$a^2 \leq 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$.したがって、$a = 0, \pm 1, \pm 2$ である。
   $b = \pm 1$ のとき、$a^2 + 5 \leq 6 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow a = 0,\ \pm 1$
   以上から、$\alpha = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 1 \pm \sqrt{-5}$ (複合任意)
4. $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$
5. 2 は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において既約元であることを示す
   $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ によって、$2 = xy$ と表されたとする。すると、$N(xy) = N(x)N(y) = N(2) = 4$ となる。$N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$ より、『$N(x) = 2$ かつ $N(y) = 2$』または『$N(x) = 1$ かつ $N(y) = 4$』となる。(対称性を考慮している)。$N(x) = a^2 + 5b^2 = 2$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ は存在しないので、「$N(x) = 1$ かつ $N(y) = 4$」$\Leftrightarrow$「$x = \pm 1$ かつ $y = \pm 2$」.したがって、2 は既約元.
   3 も既約元であることも同様に示せる.
   $1 + \sqrt{-5}$は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において既約元であることを示す
   $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ によって、$1 + \sqrt{-5} = xy$ と表されたとする。すると、$N(xy) = N(x)N(y) = N(1 + \sqrt{-5}) = 6$ となる。$N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$ より、『$N(x) = 2$ かつ $N(y) = 3$』または『$N(x) = 1$ かつ $N(y) = 6$』となる。(対称性を考慮している)。$N(x) = a^2 + 5b^2 = 2$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ は存在しないので、「$N(x) = 1$ かつ $N(y) = 6$」$\Leftrightarrow$「$x = \pm 1$ かつ $y = \pm 11 + \sqrt{-5}$」.したがって、$1 + \sqrt{-5}$は既約元.
   $1 - \sqrt{-5}$も既約元であることも同様に示せる.
   以上から、問題 4 と合わせて 6 が規約元の積にふた通りに表されることが示された。