問題 1

6^{110}を 19 で割った時の剰余を求めよ

解答

19 を法とする。

$6^{110} = (36)^{55} = (38-2)^{55} = 2^{55} = 17$

問題 2.1

集合 G と, G 上の演算 $\cdot$ の組 $(G, \cdot)$ が群であることの定義をかけ

解答

問題 2. ２

実数係数の正則な 2×2 行列全体を $\boldsymbol{GL}(2, \mathbb{R})$ とかく. これは行列の積に関して群になることを確認せよ

解答

1. $\forall A \in \boldsymbol{GL}(2, \mathbb{R})$ に対して、$A \cdot I = I \cdot A = A$. よって、$I \in \boldsymbol{GL}(2, \mathbb{R})$ は単位元.
2. $\forall A \in \boldsymbol{GL}(2, \mathbb{R})$ に対して、A は正則行列なので逆行列 A^{-1}が存在する。よって、$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. よって逆元が存在する.
3. 結合法則は行列の積から明らか.

以上から、$\boldsymbol{GL}(2, \mathbb{R})$ は行列の積に関して群.

問題 2.3

$(\mathbb{Z}, +)$ の部分集合として、偶数全体 $2\mathbb{Z}$ を考えると、これは部分群になることをし示せ. また、奇数全体を考えると、部分群にならないことを示せ

解答

1. $2 \mid 0$ より $0 \in 2\mathbb{Z}$.(単位元の存在)
2. $2m \in 2\mathbb{Z}$ に対して、$-2m \in 2\mathbb{Z}$. (逆元について閉じている)
3. $\forall 2m, 2n \in 2\mathbb{Z}$ に対して、$2m + 2n = 2(m+n) \ \in 2\mathbb{Z}$.(積について閉じている)

以上から、$2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群

奇数全体の集合は $1+1=2$ となり、積について閉じていないので部分群ではない

問題 3.1

X_nを集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 上の全単射全体とし、$\circ$ を写像の合成とすると、$(X_n, \circ)$ は群になる。これを n 次対称群と呼び $\mathfrak{S}_n$と書く.
$\mathfrak{S}_3$について、以下の問いに答えよ

1. $\mathfrak{S}_n$が群になることを確認せよ
2. 群の元を列挙せよ
3. $(1\ 2)$ によって生成される部分群を求めよ. また、その部分群の位数を求めよ
4. 部分群 $<(1\ 2\ 3)>$ を求めよ.また $(1\ 2\ 3)$ の位数を求めよ
5. $\mathfrak{S}_n$の生成元を求めよ

解答

1. $\mathfrak{S}_n$が群になることについて
   (a) $id \in \mathfrak{S}_n$は、$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$に対して、$id \circ \sigma = \sigma \circ id = \sigma$.よって、$id$ は単位元.
   (b) $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$に対して、$\sigma$は全単射写像なので逆写像$\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$が存在し、$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$.
   よって、$\mathfrak{S}_n$の任意の元に対して、逆元が存在する
   (c) $\forall \sigma, \tau, \psi \in \mathfrak{S}_n$に対して、$\forall m \in X_n$に対して、$((\sigma \circ \tau) \circ \psi)(m) = (\sigma \circ \tau)(\psi(m)) = (\sigma(\tau(\psi(m)))) = \sigma((\tau \circ \psi)(m)) = (\sigma \circ (\tau \circ \psi))(m)$.よって、結合法則が成り立つ

   以上から、$\mathfrak{S}_n$は群
2. $\mathfrak{S}_3$の元は $1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)$
3. 互換 $(1\ 2)$ によって生成される巡回群は $\{1, (1\ 2)\}$
4. $(1\ 2\ 3)$ から生成される巡回群は $\{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.また、$(1\ 2\ 3)$ の位数は 3.
5. 生成元は一例として、$\mathfrak{S}_n$に含まれる全ての互換など

問題 4

$G = (\mathbb{Z}, +), G$ の部分群 $H = (3\mathbb{Z}, +)$ とし、以下の問いに答えよ。ただし $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

1. 以下の左剰余類を求めよ
   - $\overline{0} = 0 + H$
   - $\overline{1} = 1 + H$
   - $\overline{2} = 2 + H$
   - $\overline{-1} = (-1) + H$
   - $\overline{-2} = (-2) + H$
2. 集合 G/H を求めよ。また、G における H の指数 $[G\ ;\ H]$ を求めよ
3. G が可換群であるため、その部分群 H は常に正規部分群であり、剰余類$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$で籍を定めることができる。
   $\overline{1} + \overline{2}$を求めよ.
4. 剰余群 G/H の群表をかけ

解答

1. - $\overline{0} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   - $\overline{1} = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   - $\overline{2} = \{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   - $\overline{-1} = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3(n-1)+2 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   - $\overline{-2} = \{3n-2 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3(n-1)+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2. (1) より、$G/H = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2}\}$
3. $\overline{1} + \overline{2} = \overline{1+2} = \overline{3} = \overline{0}$
4. 略