問題 1

G を群、H をその部分群とし、G の元の同値関係 $a \sim b$ を $a^{-1}b \in H$ で定義する

1. $a \sim b$ が同値関係であることを示せ
2. G の元 a の H による左剰余類$\overline{a}$は $aH = \{ah \mid h \in H\}$ に一致することを示せ

解答

1. (a) (対称律)
   $\forall a \in H$ に対して、$a^{-1}a = 1 \in H$.よって、$a \sim a$.
   (b) (反射律)
   $a \sim b$ に対して、$a^{-1}b \in H$ であり $a^{-1}b$ の逆元 $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$.($H$ は群であるから、逆元について閉じている). よって $b \sim a$.
   (c) (推移律)
   $a \sim b, b \sim c$ に対して、$a^{-1}c = a^{-1}bb^{-1}c \in H$.($\because a^{-1}b, b^{-1}c \in H$).
   よって,$a \sim c$
   以上より,$\sim$ は同値関係
2. $\overline{a} = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\}$ と定める
   以下,$\overline{a} = aH$, を示す
   - $\overline{a} \subset aH$ について
     $\forall x \in \overline{a}$に対して、$x = 1 \cdot x = a \cdot (a^{-1}x) \in aH$. ($\because a^{-1}x \in H$)
   - $aH \subset \overline{a}$について
     $\forall ah \in aH$ に対して、$a^{-1}(ah) = h \in H$. よって、$ah \in \overline{a}$
   以上から、$\overline{a} = aH$

問題 2

群 G の部分群 H に関して、以下の問いに答えよ

1. H が G の正規部分群であることの定義をかけ。また、アーベル群の部分群は常に正規部分群出ることを示せ。
2. H が G の正規部分群のとき、左剰余集合 G/H は積$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$で群になることを示せ
3. H が G の正規部分群でなく、上の積が $well-defined$ にならない例を構成せよ

1. H が G の正規部分群 $\Leftrightarrow \forall h \in H,\ \forall g \in G,\ g^{-1}hg \in H$.
   A をアーベル群とし、$B \subset A$ を A の部分群とする.B もアーベル群となることに注意
   $\forall a \in A, \forall b \in B$ に対して、$a^{-1}ba = ba^{-1}a = b \in B$.($\because A$ はアーベル群) よって B は正規部分群.
2.
   (a) まず演算が $well-defined$ であることを示す
   $\alpha \in \overline{a}$に対して、$\exists h_1 \in H\ s.t.\ \alpha = ah_1$. $\beta \in \overline{b}$に対して、$\exists h_2 \in H\ s.t.\ \beta = bh_2$.
   $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha\beta} = \overline{ah_1bh_2} = \overline{ab \cdot (b^{-1}h_1bh_2)} = \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.
   ($\because$ H が正規部分群であるから、$b^{-1}h_1b \in H$.よって、$b^{-1}h_1bh_2 \in H$.したがって、

$\overline{ab \cdot (b^{-1}h_1bh_2)} = \overline{ab})$

（b）G/H が群であることを示す

i. $\forall\ \overline{g} \in G/H$ に対して $\overline{1}$ は、$\overline{g} \cdot \overline{1} = \overline{g \cdot 1} = \overline{g}$. よって、$\overline{1}$は単位元

ii. $\forall\ \overline{g}\ \in G/H$ に対して、$\overline{g^{-1}}$は、$\overline{g} \cdot \overline{g^{-1}} = \overline{g^{-1}} \cdot \overline{g} = \overline{1}$. よって、$\overline{g^{-1}}$ は $\overline{g}$ の逆元。

iii. 結合法則は G が群であり、結合法則が成り立つことから明らか

以上から G/H は群

（c）略

問題 3

G, H を群とし、$\phi:\ G \to H$ を群の準同型写像とする。また、e_G, e_Hを G, H の単位元とする。以下を示せ

1. $\phi(e_G) = e_H$、および $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
2. $Im(\phi)$ は H の部分群であり、$Ker(\phi)$ は G の正規部分群である
3. ϕが単射 $\Leftrightarrow Ker(\phi) = e_H$
4. 群の同型は同値関係である

解答

1. $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \cdot \phi(e_G)$. 両辺に$\phi(e_G)^{-1}$をかけると $\phi(e_G) = e_H$
   $\phi(a)^{-1} = \phi(a)^{-1} \cdot 1 = \phi(a)^{-1} \cdot \phi(a \cdot a^{-1}) = \phi(a)^{-1} \cdot \phi(a) \cdot \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1})$
2. （a）
   - $e_H = \phi(e_G)$. よって、$e_H \in Im(\phi)$. (単位元の存在)
   - $\forall h \in Im(\phi)$ に対して、$\exists g \in G\ s.t.\ \phi(g) = h.\ \ h^{-1} = \phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \in Im(\phi)$.(逆元について閉じている)
   - $\forall h_1, h_2 \in Im(\phi)$ に対して、$\exists g_1, g_2 \in G\ s.t.\ \phi(g_1) = h_2, \phi(g_2) = h_2$.
     $h_1h_2 = \phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1g_2) \in Im(\phi)$

   以上から、$Im(\phi)$ は H の部分群

   （b）
   - $\phi(e_G) = e_H$より、$e_G \in Ker(\phi)$. (単位元の存在)
   - $\forall g \in Ker(\phi)$ に対して、$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$. よって、$g^{-1} \in Ker(\phi)$. (逆元について閉じている)
   - $\forall g_1, g_2 \in Ker(\phi)$ に対して、$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = e_H \cdot e_H = e_H$. よって、$g_1g_2 \in Ker(\phi)$. (積について閉じている)

   以上から、$Ker(\phi)$ は G の部分群
3. （a）$\Rightarrow$ は明らか

   （b）$\Leftarrow$

   $\phi(a) = \phi(b) \ \Leftrightarrow\ \phi(a)\phi(b)^{-1} = e_H \Leftrightarrow\ \phi(ab^{-1}) = e_H$. $Ker(\phi) = e_H$より、$ab^{-1} = e_H$, よって $a = b$. したがって、ϕは単射
4. 略

問題 4

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型であることを、準同型定理を使って示したい

1. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への写像ϕを以下で定める。ϕ が準同型になることを示せ
   $\phi(n) = ([n$ を 3 で割ったあまり$], [n$ を 2 で割った余り$]) = ([n], [n])$
2. ϕ の全射性を示せ
3. ϕの核 $Ker(\phi)$ を求め、準同型定理によって同型を示せ

解答

1. $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\phi(m)+\phi(n) = ([m],[m])+([n],[n]) = ([m]+[n],[m]+[n]) = ([m+n],[m+n]) = \phi(m+n)$.よって準同型
2. $\forall([m],[n]) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して、$\phi(6k+4m+3n) = ([4m],[3n]) = ([m],[n])$. よって、$\phi$は全射.
3. - $Ker(\phi) = 6\mathbb{Z}$ を示す
     (a) $Ker(\phi) \subset 6\mathbb{Z}$ について
     $\forall m \in Ker(\phi)$ に対して、$\phi(m) = ([m],[n]) = ([0],[0])$ より、m は 3 の倍数かつ 2 の倍数. よって、m は 6 の倍数. したがって、$m \in 6\mathbb{Z}$
     (b) $6\mathbb{Z} \subset Ker(\phi)$ について
     $\forall 6m \in \mathbb{Z}$ に対して、$\phi(6m) = ([6m],[6m]) = ([0],[0])$.よって、$6m \in Ker(\phi)$.
   - 準同型定理より、$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

問題 5

位数がそれぞれ 3,4,5,6 であるようなアーベル群を (同型なものは同じものとして) 全て列挙せよ

解答

略