

# MODELAJE DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Iker Caballero Bragagnini

## Tabla de contenido

EL MODELO DE BLACK-SCHOLES Y LA VALORACIÓN DE OPCIONES.....	2
EL MODELAJE DE VOLATILIDAD.....	8
LAS VOLATILIDADES LOCALES .....	13
LOS MODELOS DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA .....	28
EL ESTUDIO DE LA SUPERFICIE DE VOLATILIDAD IMPLÍCITA .....	33

## El modelo de Black-Scholes y la valoración de opciones

- Aunque es natural pensar que el precio de un producto financiero es su valor esperado, la verdad es que el precio depende de muchos otros factores. Es imposible encontrar una fórmula para valorar activos y opciones en el mercado, pero sí es posible buscar un modelo que haga que los precios de mercado sean consistentes

- Que los precios de mercado sean consistentes quiere decir que se cumple la ley ausencia de oportunidades de arbitraje, de modo que dos carteras con el mismo valor final en el vencimiento tienen que tener el mismo valor en el presente

$$A_T = B_T \Rightarrow A_0 = B_0$$

- De no ser así, se pueden construir estrategias que permitirían obtener un rendimiento libre de riesgo
- En la práctica para las opciones, los precios de las opciones europeas más simples (*vanilla options*) no se calculan, sino que se observan. De este modo, el objetivo es encontrar un modelo que haga que se valore consistentemente activos y *vanillas* y usarlo para poder valorar opciones exóticas
- El modelo de Black-Scholes es el modelo más usado por bancos e instituciones financieras para la gestión de derivados
  - Sin embargo, se ha demostrado que el modelo no es consistente con las dinámicas de los valores financieros y tiene suposiciones no realistas como las dinámicas log-normales
- Pese a que se piense que un modelo deriva su legitimidad y utilidad de la precisión con la que se capturan las dinámicas históricas de los valores subyacentes, esto no es así
  - Muchos modelos se usan a partir de un proceso de pensamiento normativo, de modo que el precio de un derivado se debe establecer por como se comporta el subyacente. Esto solo sería adecuado si las dinámicas realizadas de los valores han cumplido con la especificación del modelo y si solo se usara para *delta-hedging*
  - No obstante, las dinámicas de los valores reales no son lo suficientemente regulares ni se pueden caracterizar con suficiente precisión como para que una visión normativa sea adecuada. Además, una visión normativa ignora el problema del

comercio dinámico de opciones (a precios de mercado) y del *marking to market*

- De este modo, más que calibrar un modelo consistente con las dinámicas históricas de los subyacentes, se necesita un modelo que haga que los precios de las opciones sean consistentes entre ellos y que haga pocas suposiciones sobre las condiciones futuras del mercado
  - Muchos modelos pueden modelar las dinámicas de los precios de manera parecida, pero obtener precios diferentes para una misma opción, lo cual crea inconsistencias
  - Aunque no se use el poder predictivo del modelo y haya poca confianza en las suposiciones subyacentes del modelo, los practicantes necesitan y usan las ecuaciones de valoración de estos modelos. Esto se puede entender viendo cómo no se usa el modelo Black-Scholes en las mesas de *trading*, pero sí se usan las ecuaciones de valoración del modelo Black-Scholes
  - Las ecuaciones de valoración son un artificio analítico que proporciona una descomposición de las ganancias y pérdidas de mantener la posición en cartera o *carry profits & loss* (P&L) de una posición con derivados a medida que transcurre el tiempo y los precios de los valores se mueven
  - Modelos más sofisticados permiten caracterizar de manera más precisa el *carry* P&L y las condiciones bajo las cuales se desvanece, separando las contribuciones de los diferentes efectos que pueden agruparse en modelos más simples (de parámetros no observables relacionados con la microestructura del mercado)
  - El objetivo, entonces, no es predecir si no diferenciar los riesgos generados por diferentes contribuciones en el *carry* P&L y asegurarse de que el modelo valore de manera consistente (sin que haya oportunidades de arbitraje) los riesgos de manera que se puedan controlar individualmente
- El modelo de Black-Scholes se puede relacionar con el P&L de una cartera de opciones en  $t$  con una posición en corto en una opción de compra o venta europea de un activo subyacente con precio  $S_t$ , vencimiento  $T$  y recompensa  $f(S_T)$  en  $t = T$  (su valor intrínseco)
  - Dada una función de valoración o de fijación de precio  $P(t, S)$ , se tiene que cumplir que el precio de la opción en su vencimiento sea igual a su valor intrínseco

$$P(t = T, S) = f(S) \text{ for } \forall S$$

- De no ser así, el modelo no puede valorar consistentemente las opciones porque crearía oportunidades de arbitraje en  $T$
- Dado que se cumpla esta igualdad, se puede considerar un *carry* P&L de una posición en corto cubierta por delta o *delta-hedged*, de modo que se considera que la acción subyacente es el único instrumento de cobertura

$$P\&L = -[P(t + \delta t, S + \delta S) - P(t, S)] + rP(t, S)\delta t + \Delta(\delta S - rS\delta t)$$

- Los primeros dos términos del *carry* P&L provienen de vender en corto la opción, en donde se incorpora el cambio en el precio de la opción (el cuál se tendrá que devolver) y el tipo de interés que se gana al reinvertir el dinero que procede de la venta  $rP(t, S)$
- El último término del *carry* P&L es la cobertura delta que se hace, en donde se incorpora el tipo de interés que se paga por haber pedido prestado el dinero para comprar  $\Delta$  acciones en  $t$   $rS$  y el cambio en el precio
- Debido a que el *carry* P&L es dinámico y cambia con el tiempo y los precios del subyacente, esto se tiene en cuenta a través de los diferenciales del precio y el tiempo
- A través de expansiones de Taylor y aproximaciones, se puede obtener la ecuación diferencial del modelo de Black-Scholes que permitirá obtener una expresión para el *carry* P&L que sea interpretable y útil
- Haciendo una expansión de Taylor para el primer término de la ecuación del *carry* P&L, se puede obtener una expresión en función de las derivadas para el tiempo y el precio (la sensibilidad a cada variable)

$$\begin{aligned} P(t + \delta t, S + \delta S) - P(t, S) &= \\ &= \frac{\partial P}{\partial t} \delta t + \frac{\partial P}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \delta S^2 + \dots \end{aligned}$$

- Debido a que los términos de un orden superior a  $\delta t$  y aquellos cruzados de orden superior a  $\delta t \delta S$  son muy pequeños cuando  $\delta t \rightarrow 0$ , estos se pueden ignorar y solo se expande hasta el orden  $\delta t$ . A la vez, se puede demostrar que  $\delta S$  es del orden  $\sqrt{\delta t}$ , de modo que para tener una expansión del orden  $\delta t$ , es necesario considerar los términos de segundo orden en  $\delta S$ . Por lo tanto, el *carry* P&L queda de la siguiente manera:

$$P\&L \approx -\left[\frac{\partial P}{\partial t}\delta t + \frac{\partial P}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\delta S^2\right] + rP(t,S)\delta t + \Delta(\delta S - rS\delta t)$$

- Como un *delta-hedge* consiste en cubrir los movimientos del precio, el parámetro  $\Delta$  tiene que ser la sensibilidad del precio de la opción a movimientos en  $S$ , por lo que el *carry* P&L se simplifica

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$

$$\Rightarrow P\&L \approx -\left[\frac{\partial P}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\delta S^2\right] + rP(t,S)\delta t + \frac{\partial P}{\partial S}(-rS\delta t)$$

$$\Rightarrow P\&L \approx -\left[\frac{\partial P}{\partial t} - rP(t,S) + \frac{\partial P}{\partial S}rS\right]\delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\delta S^2$$

- Ahora, el primer término del *carry* P&L, llamado porción theta, depende de  $\delta t$  y es determinístico. Normalmente theta se usa para referirse a  $\frac{\partial P}{\partial t}$ , pero esta es una theta corregida por el coste de financiación durante  $\delta t$  por la cobertura y la prima. El segundo término, llamado porción gamma, depende de  $\delta S^2$  y es aleatorio
- La gamma se puede reescribir con tal obtener una expresión equivalente llamada *dollar gamma* (porque tiene la misma dirección que el precio). Se asume que la esperanza de  $(\delta S/S)^2$  es aproximadamente  $\hat{\sigma}^2\delta t$ , donde  $\hat{\sigma}$  es una constante que se interpreta como la volatilidad histórica log-normal

$$P\&L \approx -\left[\frac{\partial P}{\partial t} - rP(t,S) + \frac{\partial P}{\partial S}rS\right]\delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\delta S^2$$

$$\Rightarrow P\&L = -\left[\frac{\partial P}{\partial t} - rP(t,S) + \frac{\partial P}{\partial S}rS\right]\delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}S^2\left(\frac{\delta S}{S}\right)^2$$

$$E_t\left[\left(\frac{\delta S}{S}\right)^2\right] = \hat{\sigma}^2\delta t$$

- Como el criterio más natural de gestión del riesgo expresa que de media no se tendría que ganar ni perder dinero al cubrir la posición, se requiere que el valor esperado del *carry* P&L sea nulo, y eso hace que se tenga que escoger una función del precio que dependa de  $t$ ,  $S$  y  $\hat{\sigma}$  de tal manera que se cumpla una equivalencia que derive en la obtención de la ecuación diferencial de Black-Scholes

$$E_t[P\&L] = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial t} - rP_{\hat{\sigma}}(t, S) + \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial S} rS \right] \delta t = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2 \delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial t} - rP_{\hat{\sigma}}(t, S) + \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial S} rS = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial t} - rP_{\hat{\sigma}}(t, S) + \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2 = 0$$

- A partir del *carry* P&L para la cobertura y de la equivalencia que se tiene que cumplir por el criterio de gestión de riesgo, se puede encontrar una expresión que determina el signo del *carry* P&L dependiendo de la varianza al contado o *spot variance* de  $S$

$$\frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial t} - rP_{\hat{\sigma}}(t, S) + \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial S} rS = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2$$

$$\Rightarrow P\&L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2 \delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S^2 \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2$$

$$\Rightarrow P\&L = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S^2 \left[ \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2 - \hat{\sigma}^2 \delta t \right]$$

- El *carry* P&L será negativo si  $\left( \frac{\delta S}{S} \right)^2$  es mayor a  $\hat{\sigma}^2 \delta t$ , mientras que será positivo si es menor a  $\hat{\sigma}^2 \delta t$
- Si no se asume que la esperanza de  $(\delta S/S)^2$  es  $\hat{\sigma}^2 \delta t$ , la ecuación para el *carry* P&L aún se mantiene para *vanillas*. Para este tipo de opciones,  $P$  se considera la solución de la misma ecuación diferencial parcial escogiendo  $\hat{\sigma}$  como la volatilidad implícita correspondiente (la  $\hat{\sigma}$  tal que  $P_{\hat{\sigma}}$  sea equivalente al precio correspondiente de la opción observado en el mercado)
- Aunque no se ha hecho un planteamiento formal de los elementos que componen el modelo de Black-Scholes (movimientos brownianos, distribución log-normal, etc.), se ha llegado a la misma ecuación diferencial
  - Bajo el modelo de Black-Scholes,  $\hat{\sigma}$  sería la volatilidad constante del modelo  $\sigma_{BS}$
  - Además, esto demuestra que existe un nivel equilibrio bien definido para  $(\delta S/S)^2$  el cual hace que el *carry* P&L para el

segundo orden sea nulo (dado que la expansión de Taylor solo incluye hasta el término de segundo orden de  $S$ ) y que este nivel concreto no depende de la opción cuando se asume  $E[(\delta S/S)^2] = \hat{\sigma}^2 \delta t$

- Este último hecho es importante, dado que expresa que, si se cubre la porción gamma de una cartera de opciones, la porción theta también queda cubierta (dadas las equivalencias anteriormente expuestas), de modo que los niveles de equilibrio no dependen de las recompensas de las opciones (incluidas en la porción theta)
- Si un modelo no cumple estas condiciones, no es útil para propósitos comerciales. Los modelos que cumplen estas condiciones se denominan modelos de mercado o *market models*
- El *delta-hedging* tiene como objetivo reducir la incertidumbre del *carry* P&L final de una posición cubierta en opciones, dado que elimina el término lineal  $\delta S$ 
  - No obstante, puede ser que la porción gamma y/o la theta del *carry* P&L sea grande y no se cubra lo suficiente solo con *delta-hedging*
    - Precisamente, es de interés saber qué tan grande es la media y la desviación estándar del *carry* P&L a lo largo del tiempo
  - Se puede demostrar que el principal resultado del análisis Black-Scholes-Merton es el siguiente:
    - Si el subyacente sigue un proceso log-normal con la misma volatilidad  $\sigma$  usada para la valoración y la cobertura delta de la opción (si  $S$  sigue el modelo Black-Scholes con volatilidad  $\sigma$ ) y si  $\delta t \rightarrow 0$ , entonces la suma de los *carry* P&L incurridos a lo largo de la vida de la opción será nula
    - En el mundo real, este tipo de cobertura ocurre de manera discreta y los activos no siguen procesos log-normales, de modo que la suma de los *carry* P&L incurridos a lo largo de la vida de la opción no será nula (no se sigue el modelo de Black-Scholes)
  - Para poder eliminar la incertidumbre de que proviene de la porción gamma del *carry* P&L de una opción exótica, se tiene que utilizar otras opciones para realizar la cobertura
    - El *carry* P&L de la posición cubierta por delta en la *vanilla*  $O$  y con volatilidad implícita  $\hat{\sigma}_O$  es el siguiente:



$$\left[ \frac{\partial O}{\partial t} - rO(t, S) + \frac{\partial O}{\partial S} rS \right] \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}_O^2 \delta t = 0$$

$$\Rightarrow P\&L_O = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \left[ \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2 - \hat{\sigma}_O^2 \delta t \right]$$

- Como se quiere cubrir el efecto de movimientos en el precio de la cartera de opciones  $O$  en la cartera de opciones exóticas, se tiene que utilizar la sensibilidad de  $P$  a movimientos en los precios del subyacente en relación a la sensibilidad de  $O$  a movimientos en los precios de los subyacentes, la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$P\&L = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \left[ \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2 - \hat{\sigma}^2 \delta t \right] + \lambda \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \left[ \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2 - \hat{\sigma}_O^2 \delta t \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{d^2 O}{dS^2}} \frac{d^2 P}{dS^2}$$

- Como es poco plausible que los perfiles de  $P$  y  $O$  sean homotéticos, la cobertura gamma solo será eficiente de manera local. Mientras el tiempo pase y  $S$  se mueva, será necesario reajustar la *ratio* de cobertura  $\lambda$  (esta cambia día a día)
- Si  $\hat{\sigma}_O^2 \neq \hat{\sigma}^2$ , la porción de theta no se anula, aunque lo haga la porción gamma, por lo que es necesario que  $\hat{\sigma}_O^2 = \hat{\sigma}^2$  y que la función del precio dependa de las variables dinámicas  $S$  y  $\hat{\sigma}_O$

$$P(t, S, \hat{\sigma}_O)$$

## El modelaje de volatilidad

- La estructura temporal de la superficie de volatilidad implícita no es fácil de explicar con modelos, debido a la naturaleza del modelo y los fallos que tienen al reproducir esta superficie
  - Los precios de mercado las opciones se cotizan en términos de la volatilidad implícita del modelo de Black-Scholes, de modo que esto se puede expresar de la siguiente manera:

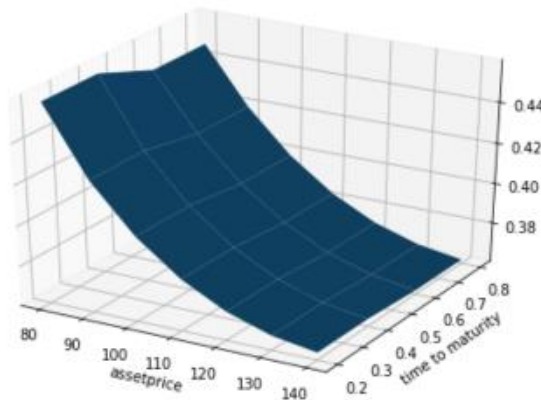
$$C(K, T, S_0) = C_{BS}(K, T, S_0, \hat{\sigma}(K, T, S_0))$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}(K, T) = C_{BS}^{-1}(K, T, S_0, C(K, T, S_0))$$

- Se entiende que la volatilidad implícita es el parámetro de volatilidad que permite obtener el precio de la opción del mercado a través del modelo de Black-Scholes
- La función inversa del precio de Black-Scholes  $C_{BS}^{-1}$  no tiene una expresión analítica, de modo que se necesitan métodos numéricos para obtener el valor de la volatilidad implícita. Estos, particularmente, intentan encontrar los ceros de una función definida como la diferencia entre el precio de Black-Scholes y el de mercado

$$f(\sigma) = C_{BS}(K, T, S_0, \sigma) - C(K, T, S_0) \Rightarrow f(\sigma^*) = 0$$

- Los métodos numéricos más usados para ello son el método de Newton-Raphson, el método de la bisección y el método de Brent (que combina los dos métodos anteriores)
- Un análisis empírico muestra que, para cada momento  $t$ , la volatilidad implícita de *vanilla options* basada en el modelo Black-Scholes no es constante, sino que es una función del precio de ejercicio  $K$  y del tiempo hasta el vencimiento  $T - t$

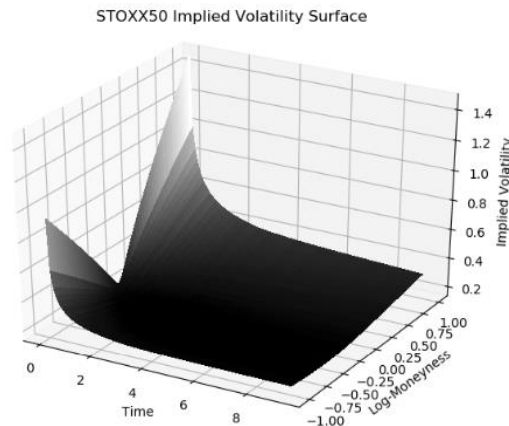


- Como depende del precio de ejercicio y del tiempo hasta el vencimiento, también se puede decir que es una función de la *log-moneyness*, que será una función del precio de ejercicio y del precio *forward*

$$\log - moneyness = \ln\left(\frac{K}{F_t}\right) \text{ or } \ln\left(\frac{F_t}{K}\right)$$

- Se puede obtener la superficie de volatilidad implícita para cualquier *moneyness*, de modo que la relación entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio no es relevante para la obtención de la superficie, pero sí que se necesita tener en cuenta el precio de ejercicio y del subyacente a la hora de construirla

- También es posible simular las volatilidades implícitas de un modelo dado con tal de ver si el comportamiento de la superficie es el mismo que el de la superficie de mercado. Los modelos más usados a día de hoy exhiben un comportamiento muy alejado del de las volatilidades implícitas de mercado
- Dado un vencimiento  $T$ , la volatilidad implícita exhibe un patrón en forma de “U” a lo largo de varios precios de ejercicio



- Si este patrón es simétrico, este fenómeno se llama efecto sonrisa o *smile effect*, mientras que, si es asimétrico, se habla del efecto oblicuidad o *skew effect*
- Las sonrisas y oblicuidades empíricas cambian con el tiempo hasta el vencimiento  $T - t$ , siendo muy pronunciadas para vencimientos cortos y más plana cuanto más largo es el vencimiento
- Las oblicuidades se vuelven cada vez más simétricas cuanto más decrece el tiempo hasta el vencimiento (cuanto más pequeño es  $T - t$ )
- El problema con el que lidia la valoración de opciones es el desarrollo de un modelo para la volatilidad al contado o *spot volatility* (la volatilidad en el momento  $t$ ) de modo que reproduzca las propiedades principales observadas en la superficie de volatilidad implícita
  - Este problema es complejo y se han construido varios modelos con tal de poder valorar las opciones de la manera más adecuada posible
- La relación entre la volatilidad al contado y la volatilidad implícita se puede expresar a través de una fórmula que se obtiene a partir del modelo de Black-Scholes

- Asumiendo el modelo de Black-Scholes con  $t = 0$  y representando el precio de una opción de compra con  $C(K, T)$  y el de la opción en el modelo Black-Scholes con  $C_{BS}(K, T - t, S_t, I_0)$ , se puede definir una función  $A_t$  de la siguiente manera:

$$A_t \equiv e^{r(T-t)} C_{BS}(K, T - t, S_t, I_0)$$

$$\Rightarrow A_T = C_{BS}(K, 0, S_T, I_0) = (S_T - K)_+$$

- Una aplicación directa de la fórmula de Itô para  $A_T$  permite obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -e^{r(T-\theta)} r C_{BS} + e^{r(T-\theta)} \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \\ (S_T - K)_+ &= e^{rT} C_{BS} + \int_0^T e^{r(T-\theta)} \left( -r C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta + \\ &+ \int_0^T e^{r(T-\theta)} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (r S_\theta d\theta + \sigma_t^2 S_\theta dW_\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T e^{r(T-\theta)} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \end{aligned}$$

- Tomando el valor esperado de esta expresión con la densidad generada por el modelo de Black-Scholes y multiplicando por  $e^{-rT}$ , se puede encontrar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C(K, T) &= C(K, T) + E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \left( -r C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) + \\ &+ E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (r S_\theta d\theta + \sigma_t^2 S_\theta dW_\theta) \right) + \\ &+ E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \right) \end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta la ecuación de Black-Scholes y sumando y restando  $E_{I_0} \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right)$ , se obtiene otra expresión equivalente a través eliminar términos:

$$C(K, T) = C(K, T) + E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \left( -r C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) +$$

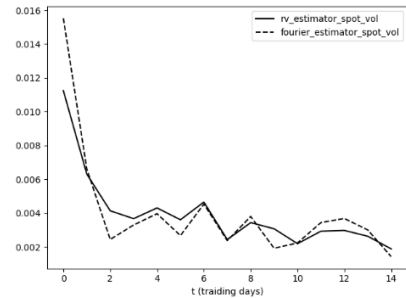
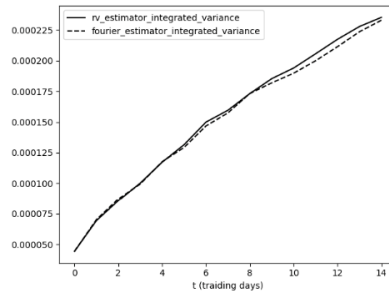
$$\begin{aligned}
& +E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (rS_\theta d\theta + \sigma_t^2 S_\theta dW_\theta) \right) + \\
& +E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \right) + E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right) \\
& -E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right) \\
& \Rightarrow E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \right) = E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right) \\
& \Rightarrow I_0^2 = \frac{E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \right)}{E^*_{I_0} \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_\theta^2 d\theta \right)}
\end{aligned}$$

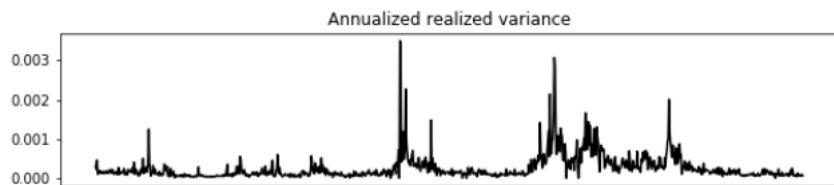
- Tomando el límite cuando  $T \rightarrow 0$ , se puede ver que  $I_0^2$  tiende a  $\sigma_t^2$

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow 0} \frac{E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_\theta^2 d\theta \right)}{E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_\theta^2 d\theta \right)} &= \frac{\sigma_0^2 E^* \left( \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \right)}{E^* \left( \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \right)} = \sigma_0^2 \\
\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} I_0^2 &= \sigma_0^2
\end{aligned}$$

- Las volatilidades al contado tienen unas propiedades particulares que se han encontrado empíricamente al analizarlas, las cuales son las siguientes:

- Estas volatilidades exhiben saltos (incrementos muy pronunciados) y el camino que siguen suele ser tosco o *rough*, diferente al que se espera de volatilidades que sigan una difusión





- Hay agrupamiento o *clustering*, de modo que cambios de una cierta magnitud tienden a estar seguidos de cambios de la misma magnitud y de signo equivalente. Esto quiere decir que la volatilidad es persistente
- La persistencia de la volatilidad está vinculada a las propiedades de memoria larga o *long-memory properties*, en el sentido que la autocorrelación de los incrementos decae lentamente

## Las volatilidades locales

- Los modelos de mercado tienen como objetivo tratar a las *vanilla options* como el propio subyacente, usando los precios de estas opciones observados en  $t = 0$  como valores iniciales para los instrumentos usados para la cobertura (insumos) en el modelo
  - Debido a que a partir de los precios de *vanilla options* se puede obtener la volatilidad implícita (aquella volatilidad que hace que el precio de la opción en el modelo coincida con el precio del mercado), es equivalente utilizar la superficie de precios que la de volatilidad implícita
    - En la práctica, se suele utilizar la superficie de volatilidad implícita, extraída de los precios
  - Un modelo de volatilidad estocástica debería permitir cualquier configuración de estos valores como condición inicial mientras tenga sentido
    - Una de las maneras de encontrar un proceso estocástico que permita hacer esto es a través de la búsqueda de un proceso que replique las distribuciones marginales de  $S_t$
    - Se pueden replicar los precios de las opciones con las distribuciones marginales del precio debido a los resultados de la valoración neutral al riesgo para opciones
    - Uno de los lemas más importantes que permiten encontrar un modelo de replicación es el lema de Gyöngy
  - El lema de Gyöngy expresa que dada una martingala y unas condiciones de regularidad para  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ , se puede encontrar otro proceso con las

mismas distribuciones marginales que el anterior y que satisface una ecuación diferencial estocástica similar pero más simple

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t \text{ and } X_0 = x$$

$$\Rightarrow dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \text{ and } Y_0 = x$$

$$\text{where } b^2(t, x) = E^*(\beta_t^2 | X_t = x)$$

$$\Rightarrow P(X_t \in [x, x + dx]) = P(Y_t \in [x, x + dx])$$

$E^* = \text{expect. under risk neutral prob.}$

- Las condiciones de regularidad que la martingala debe satisfacer son que los procesos estocásticos  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  sean procesos reales adaptados y acotados, de modo que  $\beta_t \beta_t^T > 0$
- Lo que esto significa es que, dado un modelo complejo y desconocido que utiliza el mercado para valorar opciones europeas, se puede encontrar otro modelo que haga que los precios de la opciones europeas sean los mismos

$$E^*[f(S_T)] = E^*[f(S'_T)] \text{ for } \forall T, \forall f$$

- Para opciones cuya recompensa dependa del camino que siga el precio del subyacente, los precios no serán los mismos debido a que no se pueden reproducir las correlaciones entre precios de diferentes momentos (no se pueden reproducir las distribuciones conjuntas, solo las marginales). En consecuencia, el modelo solo funciona para opciones europeas y no para opciones exóticas que dependan del camino de los precios del subyacente

$$E^*[f(S_{T_1}, S_{T_2})] \neq E^*[f(S'_{T_1}, S'_{T_2})] \text{ for } \forall T, \forall f$$

- El modelo de volatilidad local o *local volatility model* es un modelo de volatilidad estocástica y un modelo de mercado que permite tomar como insumo cualquier superficie de volatilidad mientras que no haya oportunidades de arbitraje
  - Históricamente, el modelo de volatilidad local se ha presentado como una variante del modelo de Black-Scholes en el que la volatilidad instantánea no es constante, sino una función determinística de  $t$  y  $S_t$

$$\sigma = \sigma(t, S_t)$$

- Esta función no tiene significado o interpretación, por lo que solo sirve un propósito de utilidad matemática
  - Matemáticamente, el modelo posee una representación de Markov en términos de  $t$  y  $S_t$ , y su utilidad y precisión se basa en el lema de Gyöngy
  - Como cualquier opción europea se puede sintetizar usando opciones de compra y venta europeas para un mismo vencimiento, el modelo de volatilidad local modela los precios de las opciones europeas a la perfección
- Este modelo solo se utiliza para obtener el precio de opciones cuya recompensa no es una simple combinación de *vanillas* en el mercado
  - Si fuera una combinación de este tipo, entonces no se necesita un modelo, dado que se podría calcular el precio a partir del precio de opciones europeas de compra y venta (por la *put-call parity condition*)
- La calibración de la sonrisa de la volatilidad determina totalmente el modelo
  - La función de volatilidad local se calibra en  $t = 0$  en la sonrisa del mercado y se mantiene fija posteriormente (no se calibra la función de manera recurrente)
  - Por lo tanto, las dinámicas que genera para la superficie de la volatilidad están completamente fijadas por la sonrisa de las *vanillas* usada para la calibración
- El modelo se basa en una ecuación diferencial estocástica, de modo que todos los activos tienen una representación unidimensional en términos de  $t$  y  $S$ . Este primer planteamiento permite pasar de los precios de las opciones a las volatilidades locales
  - La ecuación diferencial estocástica en la que se basa el modelo de volatilidad es muy parecida a la ecuación diferencial del modelo de Black-Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dW_t$$

- En este caso, la ecuación de valoración es idéntica a la del modelo Black-Scholes pero sustituyendo la volatilidad instantánea fija por  $\sigma(t, S_t)$



$$(LV) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - rP(t, S) + \frac{\partial P}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S^2 \sigma^2(t, S_t) = 0$$

$$(BS) \quad \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial t} - rP_{\hat{\sigma}}(t, S) + \frac{\partial P_{\hat{\sigma}}}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{\hat{\sigma}}}{\partial S^2} S^2 \hat{\sigma}^2 = 0$$

- Dada una función particular de volatilidad local  $\sigma(t, S_t)$  se puede obtener los precios de las *vanilla* haciendo que  $P(t = T, S)$  sea igual a la recompensa de la opción y resolviendo la ecuación hacia atrás (de  $T$  a  $t$ ) para obtener el precio  $P(t, S)$ . Es por ello que esta ecuación diferencial es una *backward differential equation*
- Es posible encontrar una función  $\sigma(t, S_t)$  dada una configuración de precios de *vanilla options* a través de la fórmula de Dupire, la cual se deriva a partir de una ecuación diferencial estocástica bajo las probabilidades del mundo neutral al riesgo

- Suponiendo un modelo en el que  $\sigma_t$  es un proceso arbitrario y que se caracteriza para opciones de compra, se sabe que el precio de este tipo de opciones será la esperanza descontada de la recompensa, de modo que aplicando una descomposición de Itô a una expresión parecida,  $e^{-rT}(S_T - K)_+$ , se puede obtener un proceso para el precio de la opción

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \Rightarrow C(T, K) = e^{-rT} E[(S_T - K)_+]$$

Apply Itô's formula to  $e^{-rT}(S_T - K)_+$ :

$$\begin{aligned} d[e^{-rT}(S_T - K)_+] &= \\ &= e^{-rT} \left[ -r(S_T - K)_+ dT + \frac{\partial(S_T - K)_+}{\partial S_T} (rS_T dT + \sigma_T S_T dW_T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(S_T - K)_+}{\partial S_T^2} \sigma_T^2 S_T^2 dT \right] \end{aligned}$$

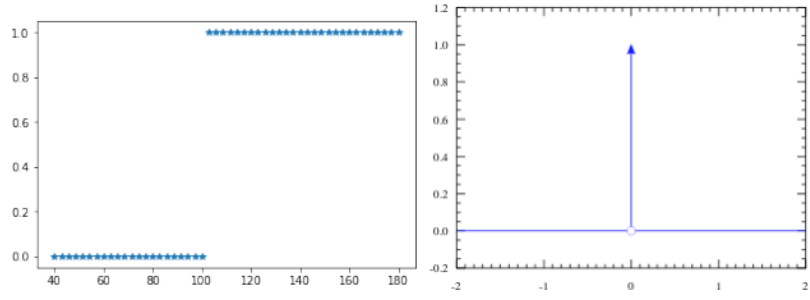
$$\text{as } d\langle S, S \rangle_T = \sigma_T^2 S_T^2 dT \text{ and } \frac{\partial(S_T - K)_+}{\partial T} = 0$$

- Las derivadas de la función de maximización de la recompensa se pueden expresar a través de *heaviside function* y de la función delta de Dirac, de modo que se puede obtener una expresión más completa

$$\frac{\partial(S_T - K)_+}{\partial S_T} = \theta[(S_T - K)_+] \quad \frac{\partial^2(S_T - K)_+}{\partial S_T^2} = \delta[(S_T - K)_+]$$

$\theta = \text{heaviside function}$

$\delta = \text{Dirac's delta function}$



$$\Rightarrow d[e^{-rT}(S_T - K)_+] =$$

$$= e^{-rT} \left[ -r(S_T - K)_+ dT + \theta[(S_T - K)_+](rS_T dT + \sigma_T S_T dW_T) + \frac{1}{2} \delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2 S_T^2 dT \right]$$

- Tomando el valor esperado en el mundo neutral al riesgo de  $dC(K, T)$ , se puede crear una expresión que permita obtener la fórmula de Dupire posteriormente

$$E[d(e^{-rT}(S_T - K)_+)] = d(e^{-rT} E(S_T - K)_+) = dC(T, K) =$$

$$= -rC(T, K)dT + e^{-rT} E_0[\theta[(S_T - K)_+](rS_T dT + \sigma_T S_T dW_T)] + e^{-rT} \frac{1}{2} E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2 S_T^2 dT] =$$

$$= -rC(T, K)dT + e^{-rT} E_0[\theta[(S_T - K)_+] rS_T] dT + e^{-rT} \frac{1}{2} E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2 S_T^2] dT$$

$$E_0[\theta[(S_T - K)_+] rS_T dt] = rE_0^*[\theta[(S_T - K)_+](S_T - K)] + rKE_0[\theta[(S_T - K)_+]] =$$

$$= rE_0[(S_T - K)_+] + rK \frac{\partial E_0[(S_T - K)_+]}{\partial S_T} = r \left[ E_0[(S_T - K)_+] - K \frac{\partial E_0[(S_T - K)_+]}{\partial K} \right]$$

$$E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2 S_T^2] = K^2 E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2]$$

$$\Rightarrow dC(T, K) = -rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K} dT + e^{-rT} \frac{1}{2} K^2 E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2] dT$$

- Aislando  $E^*[\delta[(S_T - K)_+] \sigma^2(T, S_T)]$ , se puede obtener una expresión para la varianza esperada condicionada a  $S_T = K$  (opción *at-the-money*) la cuál depende de las derivadas del precio de ejercicio y al vencimiento de *vanilla options*: la fórmula de Dupire

$$e^{-rT} E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2] = 2 \frac{\frac{\partial C(T, K)}{\partial T} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{K^2}$$

$$\begin{aligned}
E_0[\sigma_T^2 | S_T = K] &= \frac{E_0[\delta[(S_T - K)_+] \sigma_T^2]}{E_0[\delta[(S_T - K)_+]]} \\
E_0[\delta[(S_T - K)_+]] &= \frac{\partial^2 (S_T - K)_+}{\partial K^2} \\
\Rightarrow E_0[\sigma_T^2 | S_T = K] \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} &= 2 \frac{\frac{\partial C(T, K)}{\partial T} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{K^2} \\
\Rightarrow E_0[\sigma_T^2 | S_T = K] &= 2 \frac{\frac{dC(T, K)}{dT} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}}
\end{aligned}$$

- La derivación de la fórmula para las opciones de venta se hace de manera análoga, pero utilizando  $(K - S_T)_+$  (la recompensa para este tipo de opciones)
- Para procesos difusivos de  $S_t$  esta igualdad se mantiene, por lo que, aunque el conocimiento de los precios de las *vanilla options* no es suficiente para obtener el proceso  $\sigma_t$ , este conocimiento caracteriza la clase de procesos difusivos que resultan en los mismos precios
  - Dos procesos  $\sigma_t$  y  $\sigma'_t$  generan una misma sonrisa para las *vanilla options* si  $E_0[\sigma_T^2 | S_T = K] = E_0[\sigma_T'^2 | S_T = K]$  para toda  $K$  y  $T$
  - Con esta equivalencia, solo es necesario encontrar una  $\sigma$  tal que la cumpla, pero no existe una única solución porque diferentes procesos de  $\sigma$  pueden tener el mismo valor esperado condicional
  - La manera más sencilla de cumplir con esta condición es definiendo  $\sigma_t$  como una función determinística  $\sigma(t, S_t)$ , la cuál permite obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\sigma_t &\equiv \sigma(t, S_t) \\
\Rightarrow E_0[\sigma_T^2 | S_T = K] &= E_0[\sigma^2(T, S_T) | S_T = K] \\
\Rightarrow \sigma^2(t, S_t) &= 2 \frac{\frac{dC(T, K)}{dT} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}} \bigg|_{\substack{S_T=K \\ t=T}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma(t, S_t) = \sqrt{2 \frac{\frac{dC(T, K)}{dT} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}} \bigg|_{\substack{S_T=K \\ t=T}}}$$

- La fórmula de Dupire también se puede utilizar para calcular los precios de *vanilla options* para una función de volatilidad local conocida  $\sigma(t, S_t)$ . Se puede utilizar la ecuación diferencial estocástica en términos de la función de volatilidad local y de  $K$  y  $T$ :

$$\frac{\partial C(T, K)}{\partial t} - rC(T, K) + \frac{\partial C(T, K)}{\partial K} rK + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} K^2 \sigma^2(t, S_t) = 0$$

- A diferencia de la ecuación de valoración anteriormente definida, que es una *backward differential equation* y permite obtener los precios de opciones dado un vencimiento  $T$  y un precio de ejercicio  $K$ , esta proporciona los precios de las opciones para un solo valor  $S_0$  pero para toda  $K$  y  $T$
- La condición inicial para resolver la ecuación es  $C(0, K) = (S_0 - K)_+$ , de modo que a partir de esta condición se resuelve hacia adelante para cada  $K$  y  $T$ . Esto hace que la ecuación se clasifique como una *forward differential equation*
- Estos precios se tienen que encontrar a través de métodos de diferencia finita, tales como el método explícito de diferencia finita. Los resultados se pueden representar en una tabla para cada vencimiento y precio de ejercicio

Time to maturity									
1	100								0
	100								0
...	100								0
	100								0
	100								0
0.02	100								0
0.01	100								0
0	100	99.5	99	98.5	96	...	0	0	0
Strike	0	0.5	1	1.50	2	...	199	199.5	200

- La fórmula se ha derivado a partir de la suposición de una difusión de  $S_t$ , pero dada una sonrisa de mercado, esta fórmula también se mantiene debido a argumentos de no arbitraje que hacen que el numerador y el denominador sean positivos
- Este tipo de estrategias de arbitraje no son realistas debido a que no tienen en cuenta el *mark-to-market P&L* y sus consecuencias para una institución o intermediario financiero (se procura limitar pérdidas y cerrar la posición, aunque sea provechosa en el futuro)

- El problema con la fórmula de Dupire es que no es numéricamente estable, dado que para opciones *out-of-the-money*, la segunda derivada respecto al precio de ejercicio puede ser muy pequeña. Para poder solucionar el problema, es posible obtener las volatilidades locales a partir de las volatilidades implícitas correspondientes a los precios de mercado de las opciones
  - Para proceder, se suele utilizar el *log-strike* y la varianza total implícita en el modelo Black-Scholes, de modo que se obtiene una fórmula en términos de la volatilidad implícita y el *log-strike*

$$y = \ln\left(\frac{K}{F_T}\right) \text{ where } F_T = S_0 e^{rT}$$

$$\omega(y, T) = I^2(y, T)T$$

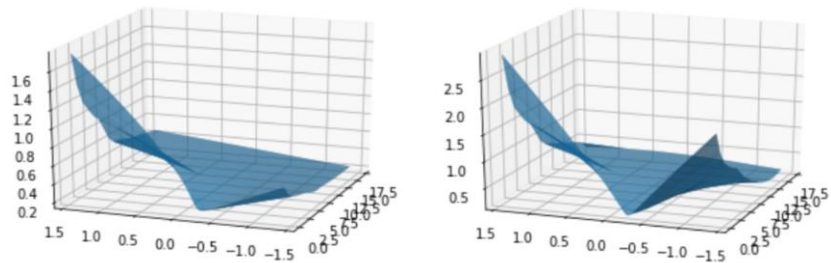
- En términos de estas variables, la fórmula de Dupire y el precio de una opción de compra se pueden expresar de manera alternativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(T, K)}{\partial K} &= \frac{\partial C(T, K)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{\partial C(T, K)}{\partial y} \frac{1}{K} \\ \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} &= \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial K} \frac{1}{K} + \frac{\partial C(T, K)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial K} \frac{1}{K} = \\ &= \left[ \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial y^2} - \frac{\partial C(T, K)}{\partial y} \right] \frac{1}{K^2} \\ \Rightarrow \sigma^2(T, S_T) &= 2 \frac{\frac{\partial C(T, K)}{\partial T} + r \frac{\partial C(T, K)}{\partial y}}{\frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial y^2} - \frac{\partial C(T, K)}{\partial y}} \bigg|_{\substack{S_T=K \\ t=T}} \\ C_{BS}(y, \omega) &= S_0 [N(d_1) - e^y N(d_2)] = \\ &= S_0 \left[ N\left(-\frac{y}{\sqrt{\omega}} + \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) - e^y N\left(-\frac{y}{\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

- Con la fórmula de Dupire alternativa anterior, se puede obtener una expresión equivalente a través de la regla de la cadena. Esta expresión está en términos de la volatilidad implícita, del *log-strike* y del vencimiento

$$\sigma^2(t, S_t) = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{\left( \frac{y}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2} \Bigg|_{\substack{y=\ln\left(\frac{K}{F_T}\right) \\ T=t}}$$

- Como se ha mencionado, los mercados de opciones no suelen violar la condición de no arbitraje. No obstante, como los precios de mercado solo están disponibles para precios de ejercicio y vencimientos discretos
  - Por lo tanto, es necesario utilizar una interpolación entre los precios de ejercicio y los vencimientos de las volatilidades implícitas de mercado que cumplan con la condición de no arbitraje



- La condición de orden de convexidad implica que  $\frac{\partial \omega}{\partial t} \geq 0$ , y como los perfiles de  $\omega$  no se pueden cruzar (no puede haber dos volatilidades implícitas iguales para dos precios diferentes y todo lo otro igual), entonces  $\omega(y, T_i) > \omega(y, T_{i-1})$ . Siendo  $T_i$  el vencimiento en forma discreta para las volatilidades implícitas disponibles, se puede generar  $\omega(y, T_i)$  para  $y \in [T_i, T_{i+1}]$  con la interpolación afín siguiente:

$$\omega(y, T_i) = I^2(y, T_i) T_i$$

$$\Rightarrow \omega(y, t) = \frac{T_{i+1} - t}{T_{i+1} - T_i} \omega(y, T_i) + \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} \omega(y, T_{i+1})$$

- Esta interpolación permite que la condición de orden de convexidad se cumpla para  $[T_i, T_{i+1}]$  y que las volatilidades locales para  $t \in [T_i, T_{i+1}]$  solo dependen de las volatilidades implícitas para  $T_i$  y  $T_{i+1}$ . De otro modo, las opciones europeas que expiraran en  $T \in [T_i, T_{i+1}]$  serían sensibles a las volatilidades implícitas para vencimientos más grandes que  $T_{i+1}$  (lo cual es incongruente)
- Además, también se necesita hacer una extrapolación para el rango fuera de precios de ejercicio que no se comercian en el mercado. Para ello, normalmente se suele usar una

extrapolación afín lineal, en donde  $|a_i| \leq 2$  para valores grandes de  $y$

$$\omega(y, T_i) = a_i y + b_i$$

- Cuando los activos subyacentes son ilíquidos, hay situaciones en las que se tiene que construir una superficie de volatilidad implícita desde cero. Un ejemplo muy popular es la fórmula SVI, la cuál permite obtener una superficie paramétrica de volatilidad que, bajo ciertas condiciones, está libre de oportunidades de arbitraje

- Gatheral, en su investigación de 2004, presenta una parametrización de la sonrisa de volatilidad inspirada en la volatilidad estocástica o *stochastic volatility inspired* (SVI). Para cada vencimiento, se puede escribir la siguiente fórmula:

$$\hat{\sigma}^2(k) = a + b \left[ \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 \sigma^2} \right]$$

- Todos los parámetros dependerán de la fecha de vencimiento concreta (para una  $t$  fija)
- La interpretación de los parámetros de la fórmula es la siguiente:
  - Cuando el parámetro  $a$  varía, la volatilidad implícita también varía en la misma dirección
  - Cuando el parámetro  $b$  varía, la pendiente de las alas de la sonrisa varía en la misma dirección
  - Cuando el parámetro  $\rho$  varía, el efecto de la oblicuidad varía en la misma dirección
  - Cuando el parámetro  $m$  varía, la sonrisa de volatilidad se desplaza lateralmente a la derecha si incrementa y a la izquierda si decrece
  - Cuando el parámetro  $\sigma$  varía, la curvatura *at-the-money* varía en la dirección contraria
- Esta fórmula es interesante debido a la posibilidad de utilizar condiciones explícitas en los parámetros de modo que el modelo no genere precios dónde oportunidades de arbitraje estático puedan ocurrir
  - Por lo tanto, en un ajuste SVI, la expresión definida anteriormente se ajusta para todos los vencimientos de manera

simultánea, sujeto a que no haya oportunidades de arbitraje entre vencimientos

- Se tiene que interpolar la varianza implícita total entre los vencimientos para obtener una superficie suave
- Con tal de analizar la superficie de volatilidad implícita con respecto a la generada por el modelo de volatilidad local, se utilizan expresiones que permiten aproximar la volatilidad implícita en términos de la volatilidad local
  - En vez de resolver la *forward differential equation* para los precios de las opciones de compra, se puede utilizar una fórmula aproximada que expresa la volatilidad implícita como una función de la volatilidad local
  - Asumiendo el modelo de volatilidad local con  $t = 0$  y representando el precio de una opción de compra con  $C(K, T)$  y el de la opción en el modelo Black-Scholes con  $C_{BS}(K, T - t, S_t, I_0)$ , se puede definir una función  $A_t$  de la siguiente manera:

$$A_t \equiv e^{rT} C_{BS}(K, T - t, S_t, I_0)$$

$$\Rightarrow A_T = C_{BS}(K, 0, S_T, I_0) = (S_T - K)_+$$

- Una aplicación directa de la fórmula de Itô para  $A_T$  permite obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -e^{r(T-\theta)} r C_{BS} + e^{r(T-\theta)} \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \\ (S_T - K)_+ &= e^{rT} C_{BS} + \int_0^T e^{r(T-\theta)} \left( -r C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta + \\ &+ \int_0^T e^{r(T-\theta)} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (r S_\theta d\theta + \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta dW_\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T e^{r(T-\theta)} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2 d\theta \end{aligned}$$

- Tomando el valor esperado de esta expresión con la densidad generada por el modelo de Black-Scholes y multiplicando por  $e^{-rT}$ , se puede encontrar la siguiente expresión:

$$C(K, T) = C(K, T) + E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \left( -r C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) +$$



$$+E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (rS_\theta d\theta + \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta dW_\theta) \right) +$$

$$+E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2 d\theta \right)$$

- Teniendo en cuenta la ecuación de Black-Scholes y sumando y restando  $E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right)$  se obtiene otra expresión equivalente a través eliminar términos:

$$C(K, T) = C(K, T) + E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \left( -rC_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) +$$

$$+E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} (rS_\theta d\theta + \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta dW_\theta) \right) +$$

$$+E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2 d\theta \right)$$

$$+ E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right)$$

$$- E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right)$$

$$\Rightarrow E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2 d\theta \right) = E^* \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} I_0^2 S_\theta^2 d\theta \right)$$

$$\Rightarrow I_0^2 = \frac{E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2 d\theta \right)}{E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_\theta^2 d\theta \right)}$$

- El denominador se puede expresar de manera alternativa debido a una equivalencia con un valor esperanza

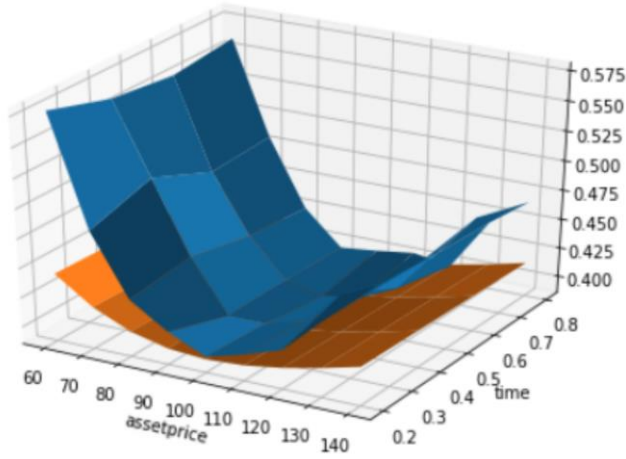
$$E^* \left( \int_0^T e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_\theta^2 d\theta \right) = \int_0^T E^* \left( e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_\theta^2 \right) d\theta$$

$$= \int_0^T \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \Big|_{\substack{t=0 \\ S=S_0}} d\theta = T \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \Big|_{\substack{t=0 \\ S=S_0}}$$

$$\Rightarrow I_0^2 = E^* \left( \int_0^T \frac{e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2(\theta, S_\theta) S_\theta^2}{T \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \Big|_{t=0, S=S_0}} d\theta \right)$$

- Es posible demostrar que los términos  $e^{-r\theta} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2}$  y  $T \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} S_0^2 \Big|_{t=0, S=S_0}$  están relacionados a través de una distribución de densidad de probabilidad que es simétrica y tiene su máximo cuando  $S_\theta^2 = S_0 \exp \left[ r\theta + \frac{\theta}{T} \ln \left( \frac{K}{S_0 e^{rT}} \right) \right]$

$$I_0^2 \approx \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 \left( \theta, S_0 e^{r\theta + \frac{\theta}{T} \ln \left( \frac{K}{S_0 e^{rT}} \right)} \right) d\theta$$



- De este modo, se puede expresar aproximadamente la varianza implícita como un tipo de media de las varianzas locales, de modo que la superficie de las volatilidad implícita es más suave que la superficie de volatilidad local

- En el caso en el que la opción esté *at-the-money* (donde  $K = F_0$ ), la expresión se simplifica:

$$I_0^2 \approx \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(\theta, S_0 e^{r\theta}) d\theta$$

- Alternativamente, es posible expresar la volatilidad implícita como una media armónica de las volatilidades locales
- Tratando la volatilidad local como una función de la *moneyness*  $y$ , se pueden calcular las derivadas de  $\omega$  en términos de la volatilidad implícita  $I$ , dado que  $\omega(y, T) = I^2(y, T)T$

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} = \frac{\partial I^2(y, T) T}{\partial T} = 2I(y, T) \frac{\partial I(y, T)}{\partial T} T + I(y, T)^2$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial I^2(y, T) T}{\partial y} = 2I(y, T) \frac{\partial I(y, T)}{\partial y} T$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 I^2(y, T) T}{\partial y^2} = 2T \frac{\partial I(y, T) \frac{\partial I(y, T)}{\partial y}}{\partial y}$$

$$= 2T \left( \frac{\partial I(y, T)}{\partial y} \right)^2 + 2I(y, T) T \frac{\partial^2 I(y, T)}{\partial y^2}$$

- A partir de las derivadas anteriores, se puede expresar la volatilidad local de la siguiente manera:

$$\sigma^2(t, y) =$$

$$\frac{2I \frac{\partial I}{\partial T} T + I^2}{1 - 2 \frac{\partial I}{\partial y} \frac{y}{I} + 2I^2 \frac{\partial I}{\partial y} T^2 \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{2I^2 T} + \frac{y^2}{2I^4 T^2} \right) + \left( \frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 T + I \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} T} \Bigg|_{T=t}$$

- Tomando el límite cuando el vencimiento tiende a cero, se puede encontrar que el la volatilidad implícita se puede interpretar como una media armónica

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \sigma^2(0, y) &= \frac{I^2}{1 - 2 \frac{\partial I}{\partial y} \frac{y}{I} + \left( \frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{y}{I} \right)^2} \Bigg|_{T=0} = \frac{I^2}{\left( 1 - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{y}{I} \right)^2} \Bigg|_{T=0} \\ &= \frac{1}{\left( \frac{1}{I} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{y}{I^2} \right)^2} \Bigg|_{T=0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(0, y)} = \pm \left( \frac{1}{I} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{y}{I^2} \right) \Bigg|_{T=0} = \mp \left( -\frac{1}{I} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{I} \right) \Bigg|_{T=0}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{I} \Bigg|_{T=0} = y \int_0^y \frac{1}{\sigma(0, u)} du$$

$$\Rightarrow I(0, y) = y \int_0^1 \left( \frac{1}{\sigma(0, ys)} ds \right)^{-1} = \left( \frac{1}{y} \int_0^1 \frac{1}{\sigma(0, ys)} ds \right)^{-1} \text{ as } y = F_T e^y$$

- Asumiendo que se usa el modelo de volatilidad local, una importante cuestión a la hora de comerciar es cuál debería ser la delta de la posición y cuál es el *carry* P&L de mantener la posición en cartera. A través de resolver ambas cuestiones, se demuestra que el modelo es un modelo de mercado legítimo

- Siendo  $P^{LV}(t, S_t, \sigma_t)$  el precio de un derivado asumiendo el modelo de volatilidad local, la delta para el modelo sería la sensibilidad del precio a  $S$  para una función de volatilidad local  $\sigma(t, S_t)$  fija

$$\Delta^{LV} = \left. \frac{\partial P^{LV}}{\partial S} \right|_{\sigma_t = \sigma(t, S_t)}$$

- Igual que cuando se obtuvo la expresión para el *carry* P&L para una posición corta en una opción corta, se puede hacer una derivación idéntica, pero sustituyendo la volatilidad  $\hat{\sigma}$  por la volatilidad local  $\sigma(t, S_t)$

$$P\&L = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S^2 \left[ \left( \frac{\delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2(t, S_t) \delta t \right]$$

- En el modelo de volatilidad local, las volatilidades implícitas de las *vanilla options* son también funciones de  $t$  y  $S$ , de modo que para cada precio de ejercicio  $K$  y vencimiento  $T$ , la volatilidad implícita será una función  $\Sigma^{LV}$  de la siguiente forma:

$$I(S_t, K, T, t) \equiv \Sigma^{LV}(S_t, K, T, t, \sigma(t, S_t))$$

- El *carry* P&L se puede expresar de esta manera solo si las volatilidades implícitas del mercado  $I$  se mueven como prescribe la función  $\Sigma^{LV}$  para una  $K$  y  $T$  determinada
- No obstante, en la realidad las volatilidades implícitas son aleatorias y tienen un comportamiento diferente, haciendo que el modelo calibrado para la sonrisa de mercado en  $t + \delta t$  difiera del calibrado para la sonrisa de  $t$  y que el *carry* P&L no incluya elementos que deberían aparecer
- Este último hecho significa que se estaría recalibrando el modelo para la sonrisa de volatilidad de manera diaria, lo cuál quiere decir que se estaría usando el modelo de una manera en la que no está pensada (se querría que la calibración sirviera para cada  $t$  posible)
- A través del concepto de *sticky-strike delta*, es posible encontrar una expresión para el *carry* P&L la cual tenga en cuenta que la volatilidad

implícita puede cambiar su comportamiento a lo largo del tiempo (equivalente a un cambio de función  $\Sigma^{LV}$ )

- Denotando  $P(t, S_t, I)$  como el precio de una opción bajo el modelo de volatilidad local en el momento  $t$ , para un precio  $S_t$  y una volatilidad implícita  $I(S_t, K, T, t)$ , entonces el precio se puede expresar de modo que dependa de una función de volatilidad local  $\sigma$  dependiente de la volatilidad implícita

$$P(t, S_t, I) = P^{LV}(t, S_t, \sigma(t, S_t, I))$$

- A través de  $P^{LV}(t, S_t, \sigma(t, S_t, I))$ , se puede expresar el *carry* P&L durante el intervalo  $[t, t + \delta t]$  de la posición corta en la opción de la siguiente manera:

$$P\&L = -[P(t + \delta t, S_t + \delta S, I + \delta I) - (1 + r\delta t)P(t, S_t, I)]$$

## Los modelos de volatilidad estocástica

- Las volatilidades locales son una forma muy restringida de volatilidades estocásticas que tienen una correlación del 100% entre sí y entre el precio del subyacente  $S$  (al ser una función determinista de  $t$  y de  $S$ ) y las volatilidades locales se determinan por la sonrisa de mercado utilizada para calibrar el modelo. Por ello, es natural intentar crear un modelo no tan restringido
  - Siendo  $C(K, T)$  el precio de una opción de compra para un precio de ejercicio  $K$  y un vencimiento  $T$ , las dinámicas de  $C(K, T)$  se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} dS_t = \bar{\sigma}_t S_t dW_t^S \\ dC_t(K, T) = v_{KT,t} S_t dW_t^{KT} \end{cases} \quad \text{when } r = 0$$

$$\text{with initial conditions} \quad \begin{cases} S_0 = S_0^{\text{market}} \\ C_0(K, T) = C^{\text{market}}(K, T) \end{cases}$$

$$\text{and terminal condition} \quad C_T(K, T) = (S_T - K)_+$$

- En este caso,  $W_t^S$  y  $W_t^{KT}$  son mociones brownianas y  $v_{KT,t}$  es la volatilidad de  $C_t(K, T)$  y  $\bar{\sigma}_t$  es la volatilidad instantánea de  $S_t$  en  $t$
- Este modelo refleja las dinámicas de las *vanilla options* que se quieren conseguir a través de la creación directa de modelos
  - Las volatilidades implícitas  $I_0$  se pueden modelar de la siguiente manera: sabiendo que en la ecuación de valoración de Black-Scholes  $I_0$

tiene una tasa de deriva que representa el coste de financiar una posición delta en  $I_0$ , se puede encontrar una expresión para la tasa de deriva de esta  $I_0$  cuando  $r = 0$

$$\begin{cases} dS_t = \bar{\sigma}_t S_t dW_t^S \\ dI_t = \mu_{KT,t} dt + \lambda_{KT,t} dW_t^{KT} \end{cases}$$

when  $r = 0$  and  $C_t(K, T) = C_{BS}(K, T - t, S_t, I_t)$

with init. cond.  $I_0 = I_0^{market}$  and term. cond.  $\lim_{t \rightarrow T} (T - t) I_t^2 = 0$

- La ecuación diferencial estocástica para  $C_t(K, T)$  sería la siguiente:

$$\begin{aligned} dC_t(K, T) = & \left( \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \lambda_{KT,t}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial I_t^2} \right. \\ & \left. + \rho \lambda_{KT,t} \bar{\sigma}_t S_t \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial S_t \partial I_t} + \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial I_t} \mu_{KT,t} \right) dt + \\ & + \bar{\sigma}_t S_t \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial S_t} dW_t^S + \lambda_{KT,t} \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial I_t} dW_t^{KT} \end{aligned}$$

- La tasa de deriva de  $C_t(K, T)$  sería el tipo de interés, por lo tanto, si se asume que es nulo, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \lambda_{KT,t}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial I_t^2} \\ & + \rho \lambda_{KT,t} \bar{\sigma}_t S_t \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial S_t \partial I_t} + \frac{\partial C_t(K, T)}{\partial I_t} \mu_{KT,t} = 0 \\ \Rightarrow \mu_{KT,t} = & \frac{1}{I_t} \left( \frac{I_t - \bar{\sigma}_t^2}{2(T - t)} - \frac{1}{2} d_1 d_2 \lambda_{KT,t}^2 + \frac{d_2}{\sqrt{T - t}} \rho \bar{\sigma}_t \lambda_{KT,t} \right) \end{aligned}$$

where  $d_1$  and  $d_2$  are defined as in Black – Scholes model

- Las dinámicas de  $S_t$  e  $I_t$  estarían completamente especificadas si el proceso  $\bar{\sigma}_t$  se conociera, pero los procesos  $\bar{\sigma}_t$  e  $I_t$  no se pueden escoger arbitrariamente para que las ecuaciones diferenciales estocásticas definidas existan
  - Si unas condiciones técnicas para  $\bar{\sigma}_t$  e  $I_t$  se cumplen, entonces se puede construir explícitamente una solución que cumpla con la  $\mu_{KT,t}$  encontrada

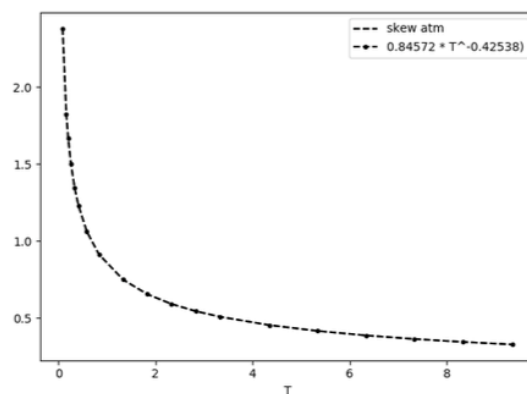
- El problema es que, con la solución, las dinámicas consideradas de  $S_t$  determinan los precios de las opciones europeas para vencimientos hasta  $T$ , y eso hace que se determinen las volatilidades implícitas  $I_t$  de todas las opciones *vanilla* para cualquier  $t < T$  (dado que se incorpora el parámetro  $\bar{\sigma}$  en la tasa de deriva)
- Eso es problemático porque el objetivo de hacer esto era justamente poder coger libremente valores iniciales de  $I_t$ . Si se quiere eso, la información sobre la sonrisa de volatilidad inicial debería estar incluida en el proceso para  $\bar{\sigma}_t$  (porque este parámetro también determina  $I_t$ ) y este proceso debe estar libre de oportunidades de arbitraje
- Por lo tanto, el modelaje directo de las volatilidades implícitas para *vanilla options* no es práctico
- Es posible diseñar modelos que permitan especificar las dinámicas de las volatilidades de manera libre, llamados modelos de volatilidad estocástica
  - Generalmente, los modelos consideran volatilidades de la forma  $\sigma_t = f(Y_t)$ , donde la función  $f$  es una función positiva e  $Y_t$  es un proceso de difusión que satisface una ecuación diferencial estocástica en donde  $a$  y  $b$  son funciones determinísticas:

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t$$

- Aunque el modelo de volatilidad local se puede considerar un modelo de volatilidad estocástica, los modelos de volatilidad estocástica se entienden como modelos en donde la volatilidad sigue un proceso de difusión, impulsado por otra moción browniana
- Cuando las mociones brownianas del precio y de la volatilidad están correlacionadas, aparece el efecto oblicuidad en estos modelos, mientras que, si no hay correlación, aparece el efecto sonrisa. Además, se puede observar empíricamente como los precios de los subyacentes y las sonrisas se mueven en la misma dirección, lo que hace que estos modelos sean consistentes en sus dinámicas
- No obstante, estos modelos no pueden reproducir la dependencia entre la volatilidad implícita y el tiempo hasta el vencimiento, por lo que no pueden ajustarse a absolutamente toda la superficie de volatilidad implícita (de modo que no se

puede obtener cualquier precio del mercado como con volatilidades locales) y su calibración se suele hacer para cada vencimiento fijo

- Ha habido muchos intentos de construir un modelo de volatilidad estocástica que describa este fenómeno, enfocándose en otros factores de la volatilidad
  - Estos modelos permiten que haya dos escalas de reversión a la media y hacen que haya un comportamiento en forma de potencia sobre un gran rango de vencimientos
  - Para un conjunto de parámetros concretos, se puede calcular cuál es la pendiente de la oblicuidad para cada vencimiento  $T$ . Se puede observar como la curva de pendientes se ajusta a una función de la forma  $aT^b$ , fenómeno que se conoce como *power law*



- Los modelos de volatilidad estocástica más utilizados son el modelo de Heston y el modelo SABR
  - El modelo estocástico alpha-beta-rho o *stochastic alpha-beta-rho* (SABR) *model* es un modelo para el precio *forward*  $F_t$ , el cual viene dado por el siguiente modelo:

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t \\ d\sigma_t = \alpha \sigma_t dB_t \end{cases} \quad \text{and} \quad \rho = \frac{d\langle W, B \rangle_t}{dt}$$

$$\text{for } t \in [0, T], \alpha > 0, \beta \in [0, 1]$$

- El parámetro  $\alpha$  se puede entender como la volatilidad de la volatilidad (conocido como *vol-of-vol*), mientras que  $\beta$  determina como la volatilidad *at-the-money* cambia cuando el precio *forward* cambia

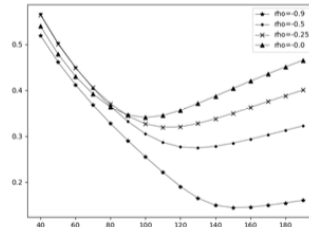


- Como el efecto entre la correlación  $\rho$  y el parámetro  $\beta$  es difícil de distinguir, normalmente se suele dar el valor de  $\beta = 1$ , de modo que la volatilidad *at-the-money* se mantiene constante para movimientos en  $F_t$
- La popularidad del modelo SABR proviene de la existencia de una simple fórmula de aproximación para la volatilidad implícita correspondiente, comúnmente conocida como la fórmula de Hagan
- Para  $\beta = 1$ , la volatilidad implícita en  $t = 0$  se puede aproximar de la siguiente manera:

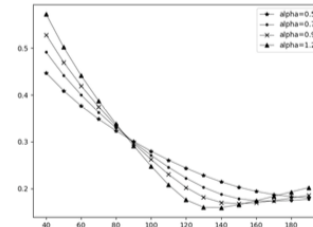
$$I(T, K) \approx \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha \rho \sigma_0}{4} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \alpha^2 \right) T \right] \frac{z}{x(z)}$$

$$\text{where } z = \frac{\alpha}{\sigma_0} \ln \left( \frac{F_0}{K} \right) \text{ and } x(z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right)$$

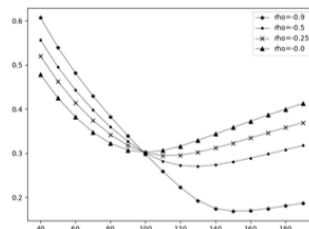
- Se puede ver como es el efecto de  $\rho$  y  $\alpha$  en la volatilidad dado un vencimiento  $T$  para un rango de precios de ejercicio. Como se puede ver, un incremento en  $\alpha$  hace que la curvatura incremente, mientras que valores altos de  $|\rho|$  hacen que la oblicuidad sea más pronunciada (su pendiente sea mayor)



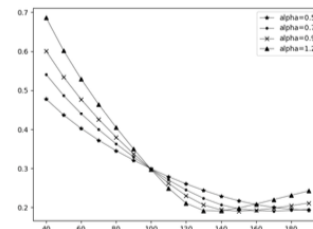
(a)  $\rho$  effect ( $T = 0.1$ )



(b)  $\alpha$  effect ( $T = 0.1$ )



(c)  $\rho$  effect ( $T = 2$ )



(d)  $\alpha$  effect ( $T = 2$ )

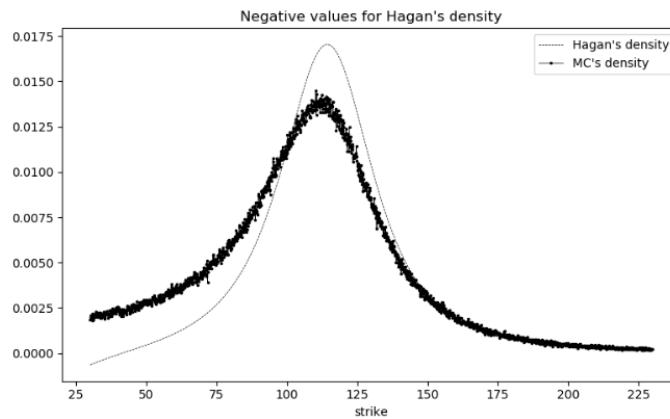
- Cuando  $K$  está cerca al precio *forward*  $F_0$ , la expresión anterior se puede aproximar de una manera alternativa. En esta, se puede ver como la oblicuidad depende de  $\alpha\rho$ , mientras que la curvatura depende de  $\alpha^2$  y  $\rho^2$ , siendo proporcional a  $\alpha^2$

$$I(T, K) \approx \sigma_0 + \frac{\alpha \rho}{2} \ln \left( \frac{K}{F_0} \right) + \frac{(2 - 3\rho^2) \alpha^2}{12 \sigma_0} \ln^2 \left( \frac{K}{F_0} \right)$$

- En el caso en el que la opción esté *at-the-money*, la aproximación sería la siguiente:

$$I(T, K) \approx \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha \rho \sigma_0}{4} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \alpha^2 \right) T \right]$$

- Los practicantes utilizan normalmente la fórmula de Hagan porque permite explicar el nivel, la oblicuidad y la curvatura de la volatilidad implícita con solo tres parámetros y porque esta aproximación simple y precisa es fácil de calibrar
- No obstante, la aproximación mostrada no está libre de oportunidades de arbitraje, dado que hace que se obtenga una densidad de probabilidad que toma valores negativos para ciertos conjuntos de parámetros



## El estudio de la superficie de volatilidad implícita

- Para estudiar el comportamiento de la superficie de volatilidad implícita, se utiliza la fórmula de Hull y White, la cual tiene uso práctico en la simulación de precios de opciones
  - Esta se puede demostrar a partir de un modelo para el logaritmo del precio del subyacente y de esperanzas condicionales tanto para casos con correlación como casos sin ella

$$dX_t = \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t \left( \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right) \text{ for } t \in [0, T]$$

$$\text{where } X_t = \ln S_t$$

- Este modelo se deriva del modelo para el comportamiento de los precios del subyacente con correlación:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t \left( \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right)$$

- En el caso en el que no haya correlación, se puede obtener la fórmula de la siguiente manera:

- A partir de la equivalencia entre el precio de mercado  $C_t^{market}$  y la esperanza de la recompensa  $(e^{X_T} - K)_+$  descontada, se puede expresar la equivalencia con esperanzas condicionales:

$$\begin{aligned} C_t^{market} &= e^{-r(T-t)} E^*[(e^{X_T} - K)_+] = \\ &= e^{-r(T-t)} E^*[E^*[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}^B] | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

$$\text{where } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W \cup \mathcal{F}^B$$

and  $\mathcal{F}^{W,B}$  are filtrations generated by  $W$  and  $B$

- Como  $\rho = 0$ , el logaritmo del precio  $X_t$  sigue, condicionado a  $\mathcal{F}^W \cup \mathcal{F}^B$ , una distribución normal con media y varianza equivalentes a las que asume el modelo de Black-Scholes, por lo que  $C_t^{market}$  se puede expresar a partir del precio de Black-Scholes y eso hace que se obtenga la fórmula de Hull y White

$$X_t \sim N \left[ \left( r - \frac{v_t^2}{2} \right) (T - t), v_t^2 (T - t) \right] \quad \text{where } v_t^2 = \frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma_u^2 du$$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} E^*[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}^W \cup \mathcal{F}^B] = C_{BS}(T - t, X_t, v_t)$$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} E^*[E^*[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}^B] | \mathcal{F}_t] = E_t[C_{BS}(T - t, X_t, v_t)]$$

$$\Rightarrow C_t^{market} = E_t[C_{BS}(T - t, X_t, v_t)]$$

- En el caso en el que haya correlación, se puede obtener la fórmula de la siguiente manera:

- A partir de la equivalencia entre el precio de mercado  $C_t^{market}$  y la esperanza de la recompensa  $(e^{X_T} - K)_+$  descontada, se puede expresar la equivalencia con esperanzas condicionales:

$$\begin{aligned} C_t^{market} &= e^{-r(T-t)} E^*[(e^{X_T} - K)_+] = \\ &= e^{-r(T-t)} E^*[E^*[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}^B] | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

$$\text{where } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W \cup \mathcal{F}^B$$

and  $\mathcal{F}^{W,B}$  are filtrations generated by  $W$  and  $B$

- Es posible demostrar que  $X_t$  no seguirá una distribución normal, debido a que aparecen términos adicionales. De este modo,  $S'_t$  si que seguiría una distribución igual a la del modelo de Black-Scholes, de modo que se puede calcular el precio de mercado a través de este precio ficticio y así obtener una extensión de la fórmula de White y Hull:

$$X_t \sim N \left[ \left( r - \frac{v_t^2}{2} \right) (T - t), v_t^2 (T - t) \right] \quad \text{where} \quad v_t^2 = \frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma_u^2 du$$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} E^*[(S'_t - K)_+ | \mathcal{F}^W \cup \mathcal{F}^B] = C_{BS}(T - t, S'_t, \sqrt{1 - \rho^2} v_t)$$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} E^*[E^*[(e^{X_T} - K)_+ | \mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}^B] | \mathcal{F}_t] = E_t[C_{BS}(T - t, S'_t, \sqrt{1 - \rho^2} v_t)]$$

$$\Rightarrow C_t^{market} = E^*[C_{BS}(T - t, S'_t, \sqrt{1 - \rho^2} v_t)]$$

$$\Rightarrow C_t^{market} = E^*[C_{BS}(T - t, X_t \xi_t, \sqrt{1 - \rho^2} v_t)]$$

$$\Rightarrow C_t^{market} = E^*[C_{BS}(T - t, S'_t, \sqrt{1 - \rho^2} v_t)]$$

$$\text{where } S'_t = e^{X_t \xi_t} \quad \xi_t = \rho \int_t^T \sigma_u dW_u - \frac{\rho^2}{2} v_t^2 (T - t)$$

- Las fórmulas encontradas son muy útiles para hacer simulaciones de Monte Carlo llamadas simulaciones de Monte Carlo condicionales
  - El método de Monte Carlo condicional solo necesita la simulación de una browniana, dado que solo una interviene para determinar el precio de la opción del modelo Black-Scholes
- Para estudiar el comportamiento a corto plazo de la pendiente de la oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita *at-the-money*, primero es necesario encontrar una expresión explícita para esta, la cuál se puede encontrar a través de una descomposición
  - La derivada del precio de una opción sobre  $k$  puede descomponer de la siguiente manera:

$$\frac{\partial C(K, T - t)}{\partial k} = \frac{\partial C_{BS}(K, T - t, S_t, I_t)}{\partial k} + \frac{\partial C_{BS}(K, T - t, S_t, I_t)}{\partial \sigma} \frac{\partial I_t}{\partial k}(k)$$

- En este caso,  $k$  es el logaritmo del precio de ejercicio y  $k^*$  denota el precio de ejercicio *at-the-money*, el cual se define como el logaritmo  $K^* = F_t$

$$k = \ln K \quad k^* = \ln K^* = \ln F_t = \ln S_t + r(T - t)$$

- Esta descomposición de la semielasticidad del precio con respecto a  $K$  de una opción permite desarrollar expresiones adecuadas para la pendiente de la oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita, las cuales permitirán estimar la oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita *at-the-money*
- A partir de los datos reales del mercado, se puede observar como hay veces en ñas que la pendiente de la oblicuidad para la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* tiende a infinito
- Asumiendo un modelo para el precio logarítmico de una acción bajo la probabilidad neutral al riesgo  $P^*$ , se puede demostrar que la pendiente de oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* es nula en el caso en que  $\rho = 0$

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t\right) \text{ for } t \in [0, T]$$

$$\text{where } X_t = \ln S_t \text{ and } \rho = 0$$

- Utilizando la fórmula de Hull y White, se pueden establecer las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} C_{BS}(T - t, X_t, k, I(k)) &= E_t[C_{BS}(T - t, X_t, k, v_t)] \\ &\Rightarrow E_t \left[ \frac{\partial C_{BS}(T - t, X_t, k, v_t)}{\partial k} \right] = \\ &= \frac{\partial C_{BS}(T - t, X_t, k, I_t(k))}{\partial k} + \frac{\partial C_{BS}(T - t, X_t, k, I_t(k))}{\partial \sigma} \frac{\partial I(k)}{\partial k} \end{aligned}$$

- Si se asume que  $v_t$  es una constante, entonces se puede encontrar una expresión equivalente para la derivada del precio  $C_{BS}$  *at-the-money* respecto a  $k$  y su esperanza

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}(T - t, X_t, k_t^*, v_t)}{\partial k} &= -\frac{1}{2}(e^{X_t} - C_{BS}(T - t, X_t, k_t^*, v_t)) \\ &\Rightarrow E_t \left( \frac{\partial C_{BS}(T - t, X_t, k_t^*, v_t)}{\partial k} \right) = \\ &= -\frac{1}{2}[e^{X_t} - E_t[C_{BS}(T - t, X_t, k_t^*, v_t)]] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}E_t\left(e^{X_t} - C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))\right) = \frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))}{\partial k}$$

- Juntando los resultados anteriores y sabiendo que la vega de una opción nunca es nula, esto implica que la pendiente debe ser nula cuando  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} E_t \left[ \frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, v_t)}{\partial k} \right] &= \\ &= \frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))}{\partial k} + \frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))}{\partial \sigma} \frac{\partial I_t(k_t^*)}{\partial k} \\ &\Rightarrow \frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))}{\partial \sigma} \frac{\partial I_t(k_t^*)}{\partial k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial I_t(k_t^*)}{\partial k} = 0 \end{aligned}$$

- Asumiendo un modelo para el precio logarítmico de una acción bajo la probabilidad neutral al riesgo  $P^*$ , se puede demostrar que la pendiente de oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* es equivalente a la siguiente expresión en el caso en que  $\rho \in (-1,1)$

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right) \text{ for } t \in [0, T]$$

where  $X_t = \ln S_t$  and  $\rho \in (-1,1)$

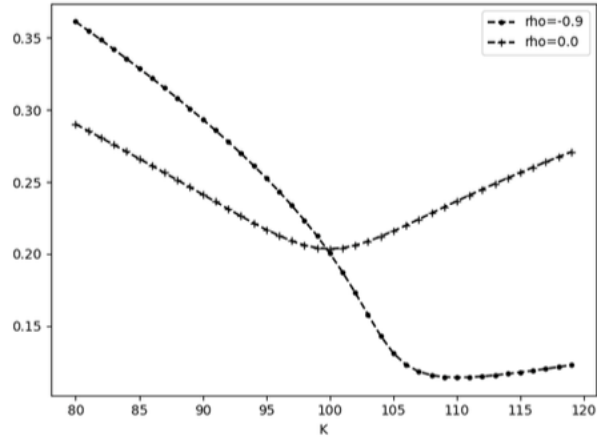
$$\Rightarrow \frac{\partial I_t(k_t^*)}{\partial k} = \frac{E_t \left[ \int_t^T \left( \frac{\partial F(s, X_s, k_s^*, v_s)}{\partial k} - \frac{1}{2}F(s, X_s, k_s^*, v_s) \right) ds \right]}{\frac{\partial C_{BS}(T-t, X_t, k_t^*, I_t(k_t^*))}{\partial \sigma}}$$

$$\text{for } t \in [0, T] \text{ and } E_t \left( \int_s^T D_s \sigma_u^2 du \right)^{-1} < \infty$$

$$\text{where } F(s, X_s, k_s^*, v_s) = \frac{\rho}{2} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} \right) \sigma_s \int_s^T D_s \sigma_u^2 du$$

and  $D_s$  is the Malliavin derivative

- El resultado se puede extender a  $\rho \in [-1,1]$  siempre que el proceso de volatilidad cumpla condiciones de integrabilidad adecuadas
- Los resultados permiten ver que el total de la contribución a la oblicuidad de la superficie proviene de la correlación



- Como se puede ver, la sonrisa de volatilidad se vuelve una oblicuidad con una pendiente más pronunciada en el caso en el que hay correlación
- Es posible estudiar el comportamiento a corto plazo de la pendiente de la oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* para los modelos de volatilidad utilizando los resultados anteriores y estudiando el límite cuando  $T \rightarrow t$ 
  - Para modelos de volatilidad estocástica, se puede demostrar matemáticamente que el la pendiente de la oblicuidad para la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* es la siguiente:

$$\sigma_t = f(Y_t) \text{ and } dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow t} \frac{\partial I_t}{\partial k}(k_t^*) = \frac{\rho}{2\sigma_t} f'(Y_t) b(t, Y_t)$$

- El límite es finito para todos los modelos clásicos de volatilidad estocástica, incluyendo el modelo de Heston, el modelo SABR, el modelo de dos factores de Bergomi y el proceso OU
- Para modelos de volatilidad local, se puede demostrar matemáticamente que el la pendiente de la oblicuidad para la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* es la siguiente:

$$\sigma_t = \sigma(t, S_t) \text{ and } dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow t} \frac{\partial I_t}{\partial k}(k_t^*) = \frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma(t, S_t)}{\partial S_t} \sigma(t, S_t) S_t = \frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma(t, S_t)}{\partial S_t} S_t$$

- Para vencimientos cortos, la oblicuidad de la superficie de volatilidad local *at-the-money* es el doble de la oblicuidad de la superficie de volatilidad implícita

- El límite es infinito si, y solo si,  $\frac{\partial \sigma(t, S_t)}{\partial S_t}$  es infinito, lo cual no se puede satisfacer para todos los momentos  $t$  y precios del subyacente  $S_t$
- Esto significa que, aunque las volatilidades locales pueden reproducir la superficie de volatilidad implícita para un momento fijo  $t$ , el modelo no puede reproducir la superficie para toda  $t$ , por lo que estos modelos son dinámicamente inconsistentes y tienen que ser recalibrados día a día
- Para modelos de volatilidad local estocástica, se puede demostrar matemáticamente que la pendiente de la oblicuidad para la superficie de volatilidad implícita *at-the-money* es la siguiente:

$$\sigma_t = \sigma(t, S_t)f(Y_t) \quad \text{and} \quad \begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow t} \frac{\partial I_t}{\partial k}(k_t^*) = \frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma(t, S_t)}{\partial S_t} S_t + \frac{\rho}{2\sigma_t} f'(Y_t) b(t, Y_t)$$

- Como se puede ver, para modelos de volatilidad local estocástica, la pendiente de oblicuidad es la suma de las pendientes para el modelo de volatilidad local y de volatilidad estocástica
- De este modo, estos modelos pueden reproducir la pendiente de la oblicuidad para vencimientos muy cortos si  $\sigma$  tiene una singularidad en  $(t, S_t)$  o si  $b$  tiene una singularidad en  $(t, Y_t)$
- No bastante, estas propiedades no se mantienen para cualquier triple  $(t, S_t, Y_t)$ , los modelos de volatilidad local estocástica sufren de los mismos problemas dinámicos que los de volatilidad local, por lo que se tienen que recalibrar diariamente