

ECUACIONES DIFERENCIALES

Iker Caballero Bragagnini

Tabla de contenido

LA DEFINICIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL	2
LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	13
EL MODELAJE CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE MAYOR ORDEN	77
EL MODELAJE CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE MAYOR ORDEN	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LAS SOLUCIONES SERIALES PARA ECUACIONES LINEALES	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS PLANARES.....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LAS SERIES DE FOURIER	84
LOS PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA EN COORDENADAS RECTANGULARES	86
LOS PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA EN OTRAS COORDENADAS	121
LAS TRANSFORMACIONES INTEGRALES	121

La definición de una ecuación diferencial

- Una ecuación diferencial o *differential equation* (DE) es una ecuación que contiene las derivadas de una o más funciones desconocidas (o de variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes
 - La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ es en sí otra función $\phi'(x)$ encontrada por la ley apropiada de diferenciación. Por lo tanto, se está lidiando con funciones todo el rato
 - En este caso, y es la función desconocida o la variable dependiente y aquello respecto a lo que se deriva es una variable independiente de la cual y depende
 - Para las ecuaciones diferenciales normalmente se utiliza la notación de Leibniz para las derivadas, la notación prima o la notación de Newton

$$\text{Leibniz notation: } \frac{dy}{dx}, \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{Prime notation: } y', y''', y^{(n)}$$

$$\text{Newton notation: } \dot{y}, \ddot{y}$$

- También se puede utilizar la notación de subscritos para las ecuaciones diferenciales parciales

$$\text{Subscript notation: } u_x, y_{tt}$$

- Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar según su tipo, de modo que se dividen en ordinarias y en parciales
 - Las ecuaciones diferenciales ordinarias o *ordinary differential equations* (ODE) son ecuaciones diferenciales que contienen derivadas ordinarias de una o más funciones desconocidas respecto a una sola variable independiente

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \qquad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

- Las ecuaciones diferenciales parciales o *partial differential equations* (PDE) son ecuaciones diferenciales que contienen derivadas parciales de una o más funciones desconocidas de dos o más variables independientes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

- También se pueden clasificar las ecuaciones diferenciales según su orden, que es el orden de la derivada más alta en la ecuación

$$n^{th} \text{ order derivative: } \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

- Aunque en la ecuación diferencial haya dos o más variables independientes o funciones, lo que importa es el orden de la derivada más alta
- Una ODE de enésimo orden con una sola variable dependiente se puede representar generalmente con una función F que dependerá de $n + 2$ términos: la variable dependiente (o la función), la variable independiente, y las derivadas de la variable dependiente (o de la función)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

- Por razones prácticas y teóricas, normalmente se asume que es posible resolver una ODE únicamente con su derivada de orden más alta en términos de los otros $n + 1$ términos (aunque existen excepciones). A esta forma se la llama forma normal, y f es una función de variable real

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \text{ for } \forall x \in I$$

- Finalmente, las ecuaciones diferenciales también se pueden clasificar según su linealidad

$$\text{Linear ODE: } a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{Non-linear ODE: } F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x)$$

- Una ecuación diferencial es lineal si no contiene productos, cocientes o potencias entre las derivadas o entre las funciones desconocidas (es aditiva). Una ecuación diferencial no lineal es una ecuación diferencial que no es lineal
- En esta combinación aditiva se pueden ver dos propiedades características de las ODEs lineales: la variable dependiente y todas sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son de primer grado (la potencia de cada término que involucra y es únicamente 1) y los

coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n de $y, y', \dots, y^{(n)}$ depende de cómo máximo de la variable independiente x (no puede depender y)

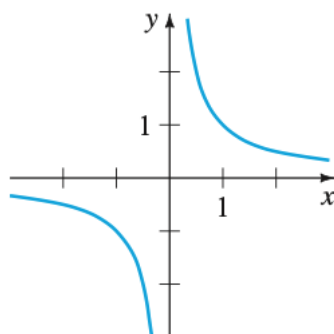
- Uno de los objetivos primordiales es resolver o encontrar soluciones para ecuaciones diferenciales
 - Una solución de una ODE en un intervalo I es cualquier función ϕ definida en el intervalo I que posee al menos n derivadas continuas en el mismo intervalo y que, cuando se sustituye en la ODE de enésimo orden, reduce la ecuación a una identidad

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \text{ for } \forall x \in I$$

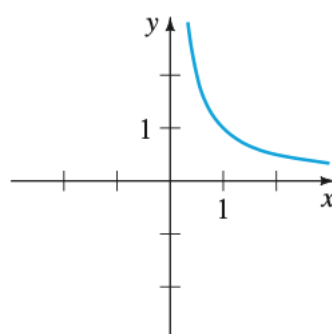
- Es decir, la solución tiene que ser una función definida y con n derivadas en I que, al sustituirse en la ecuación, esta resulta igual a cero. De ser así, se dice que ϕ satisface la ecuación diferencial en I
- La función solución ϕ es una función de variable real y, ocasionalmente, es conveniente denotar la solución como una función $y(x)$
- Una ecuación diferencial no necesariamente tiene una solución, por lo que se tienen que estudiar las condiciones de existencia de esta solución
- No se puede pensar en la solución de una ODE sin pensar en el intervalo I a la vez, el cual es llamado intervalo de definición o dominio de la solución
 - Este puede ser un intervalo abierto, semiabierto, cerrado, infinito, o de otros muchos tipos
 - Para poder verificar si una función es una solución o satisface una ODE, se puede sustituir la variable dependiente o función desconocida por la solución y comprobar si ambos lados de la ecuación son iguales
 - Cuando una solución de una ecuación diferencial cualquiera es cero en el intervalo I , se dice que esta es una solución trivial

$$y = 0 \text{ for } \forall x \in (-\infty, \infty)$$

- El gráfico de la solución ϕ de una ODE se llama curva de solución o *solution curve*



(a) function $y = 1/x, x \neq 0$



(b) solution $y = 1/x, (0, \infty)$

- Dado que ϕ es una función diferenciable, es continua en el intervalo de definición I . Por lo tanto, hay una diferencia entre el gráfico de la función ϕ y el gráfico de la solución ϕ , dado que el dominio de la función tiene por qué ser el mismo que el intervalo de definición I de la solución
 - Esto significa que solo se puede representar gráficamente los valores de $x \in I$ y sus respectivas imágenes al hacer el gráfico de la solución ϕ
- Las soluciones de una ecuación diferencial se pueden clasificar en soluciones explícitas y soluciones implícitas
- Una solución en la cual la variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente y constantes se denomina solución explícita

$$y = \phi(x) \text{ for } \forall x \in I$$

- Una solución ϕ es implícita si $G(x, y) = 0$ se satisface por al menos una función ϕ y la ecuación diferencial (la relación G define una función diferenciable ϕ)

$$G(x, y) = 0 \text{ for } \forall x \in I$$

$$\exists \phi(x) \text{ s.t. } G(x, \phi(x)) = 0 \text{ \& } \phi(x)^{(n)} = f(\dots) \text{ for } \forall x \in I$$

- No siempre se puede resolver la solución implícita $G(x, y) = 0$ para y explícitamente en términos de x , dado que a veces no se puede obtener de manera analítica o algebraica (la solución podría ser solo una parte de la relación para un intervalo I). No obstante, la solución puede seguir siendo una función perfectamente diferenciable (ya sea un segmento o una función por piezas)

- Se puede verificar una solución explícita sustituyendo la función en la ecuación diferencial y ver si los lados coinciden. Para verificar una implícita, en cambio, se deriva la relación en base a la variable independiente y se intenta obtener la ecuación diferencial original
- Debido a que las ecuaciones diferenciales implican el uso de derivadas, su estudio es similar al del cálculo integral, y se suelen utilizar constantes para representar la solución más general de la ecuación diferencial (la familia de soluciones)
 - Cuando se resuelve una ODE de primer orden, normalmente se obtiene una solución que contiene una constante arbitraria c , la cual representa un conjunto de soluciones llamado familia de soluciones de un único parámetro o *one-parameter family of solutions*

$$F(x, y, y') = 0 \quad G(x, y, c) = 0$$

- Cuando se resuelve una ODE de enésimo orden, normalmente se obtiene una solución que contiene n constantes arbitrarias c_i para $i = 1, 2, \dots, n$, la cual representa un conjunto de soluciones llamado familia de soluciones de n parámetros o *n-parameter family of solutions*. Una sola ecuación diferencial puede poseer infinitas soluciones

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$$

- La solución de una ODE con unos parámetros particulares (dentro de todos los posibles que conforman la familia de soluciones) se denomina solución particular o *particular solution*. La solución de una ODE que no pertenece a una de las familias de soluciones de la ecuación se llama solución única o *single solution* (un ejemplo puede ser $y = 0$)
- Si toda solución de una ODE de enésimo orden $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener de una familia de n parámetros $G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ para selecciones adecuadas de c_1, \dots, c_n , entonces se dice que la familia es una solución general de la ODE
 - Al resolver ODEs lineales, se deberían imponer restricciones relativamente simples sobre los coeficientes de la ecuación, de modo que uno puede estar seguro que una solución existe en un intervalo y que la familia de soluciones da todas las posibles soluciones

- Las ODEs no lineales, con la excepción de algunas ecuaciones de primer orden, son normalmente difíciles o imposibles de resolver a través de una solución de forma cerrada. Además, si se llega a obtener una familia de soluciones para una ecuación no lineal, no es obvio que la familia contenga todas las soluciones
- A nivel práctico, entonces, la designación de “solución general” solo se aplica a ODEs lineales
- Normalmente se suele lidiar con sistemas de ODE, donde hay dos o más ecuaciones que involucran las derivadas de dos o más funciones desconocidas (o variables dependientes) en relación a una única variable independiente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, w, \dots) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, w, \dots) \\ \frac{dw}{dt} = h(t, x, y, w, \dots) \\ \dots \end{cases}$$

- La solución de un sistema de ODE es un número n (donde n es el número de variables dependientes o funciones desconocidas) de funciones diferenciables definidas en un mismo intervalo I que satisfacen cada ecuación del sistema
- Normalmente se quiere buscar la solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga unas restricciones o condiciones (no solo en la función, sino también en sus derivadas) en un punto o valor inicial x_0 dentro de un intervalo I
 - Los problemas que intentan resolver una ecuación diferencial de n -ésimo orden que está restringida a unas condiciones en un punto $x_0 \in I$ se denominan problemas de valor inicial de n -ésimo orden o *n-order initial-value problems* (*n-order IVP*)

$$\text{Solve } \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \text{ such that}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\text{where } y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ (constants)}$$

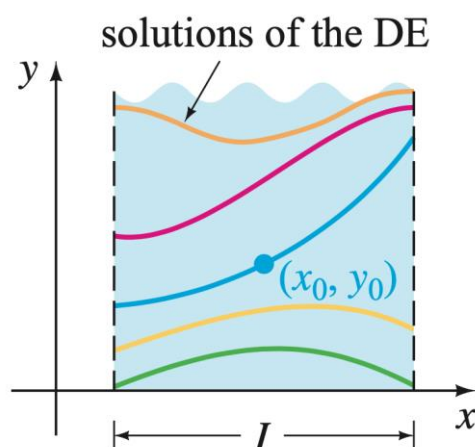
- Los valores de $y(x)$ y sus primeras $n - 1$ derivadas en x_0 se denominan condiciones iniciales o *initial conditions* (IC)

- El objetivo es encontrar una solución particular de la ecuación que esté definida en el intervalo I y que contenga el punto inicial dado por x_0
 - Para resolver un IVP de enésimo orden normalmente requiere encontrar la familia de soluciones de n parámetros de la ODE y entonces utilizar las condiciones iniciales en x_0 para determinar las n constantes en la familia de soluciones (y así encontrar la solución particular)
- Los casos más importantes son los casos en donde $n = 1$ y $n = 2$ (IVP de primer y segundo orden), los cuales tienen una interpretación geométrica sencilla

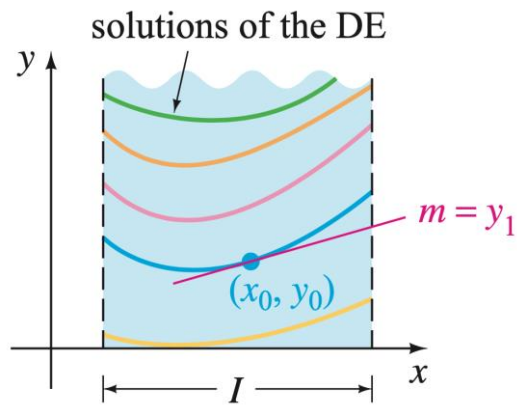
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{s.t.} \quad y(x_0) = y_0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad \text{s.t.} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{and} \quad y'(x_0) = y_1$$

- Para un IVP de primer orden, se intenta encontrar una solución particular $y(x)$ en un intervalo I que contenga x_0 , lo cual quiere decir que hay que encontrar una curva $y(x)$ que pase por el punto (x_0, y_0)

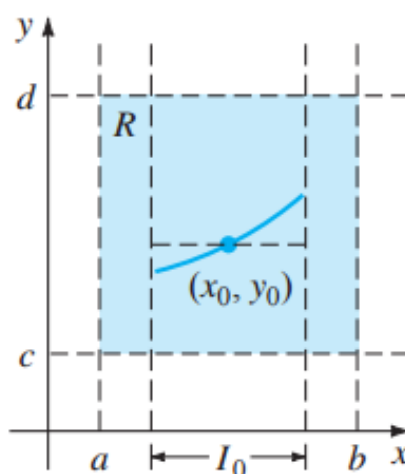


- Para un IVP de segundo orden, se intenta encontrar una solución particular $y(x)$ en un intervalo I que contenga x_0 , lo cual quiere decir que hay que encontrar una curva $y(x)$ que pase por el punto (x_0, y_0) y que, además, la pendiente de la curva tangente en este punto sea igual a y_1



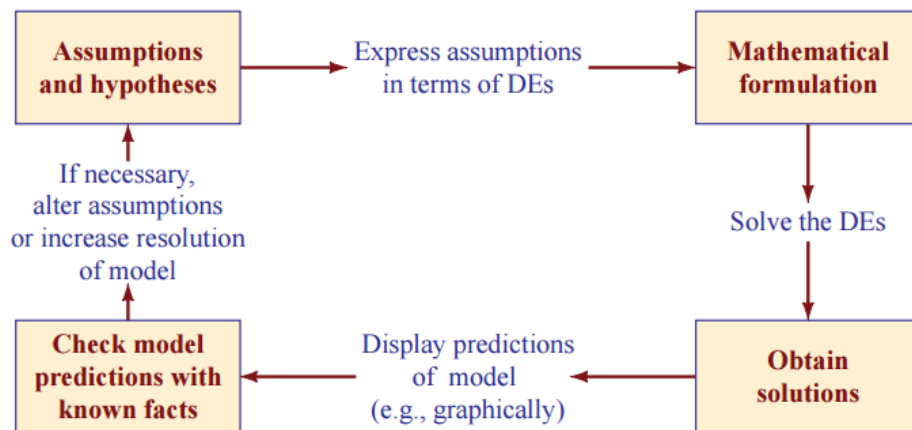
- Cuando se encuentra una función $y(x)$ que es solución del IVP, se pueden diferenciar tres tipos de intervalos en el eje x que pueden ser distintos:
 - Considerando y como una función, el intervalo (o unión de intervalos) o conjunto D de números reales para el cual la función está definida (el dominio de la función)
 - Considerando y como una solución de una ecuación diferencial, el intervalo de definición I es cualquier intervalo (o unión de intervalos) en el cual la función esté definida y sea diferenciable. Es el intervalo en el que se quiere encontrar una solución al IVP
 - Considerando y como una solución de un IVP, el intervalo de definición I_0 es cualquier intervalo en el cual la función esté definida, sea diferenciable y contenga el punto inicial x_0 (más restringido que el intervalo anterior). Es el intervalo en el que se garantiza que una solución existe
- Las preguntas más importantes para este tipo de problemas son si existe alguna solución al IVP y si esta es única o no
 - En el caso de las ecuaciones de primer orden, uno se pregunta si la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ posee soluciones y si alguna de estas curvas pasa a través del punto (x_0, y_0)
 - Además, uno también se pregunta si existe precisamente una curva de solución para $dy/dx = f(x, y)$ que pasa a través del punto (x_0, y_0)
 - Siempre se habla de una solución en vez de “la solución” debido a que se sugiere la posibilidad de que otras soluciones pueden existir. Puede haber soluciones a problemas de valores iniciales con dos soluciones

- Aunque en el desarrollo teórico y práctico de las ecuaciones diferenciales la mayoría de ecuaciones diferenciales tendrán solución y las soluciones a problemas de valores iniciales probablemente serán únicas, la vida real no es tan idílica
 - Por lo tanto, es deseable conocer por avanzado si una solución existe y si esta es la única solución al problema de valor inicial cuando se resuelve el problema
 - Existe un teorema para ecuaciones diferenciales de primer orden que da las condiciones suficientes para garantizar la existencia y la unicidad de una solución. Para problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales de segundo orden, se presentará un teorema más adelante
- Siendo R una región rectangular en el plano cartesiano definido por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior, si $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son continuas en R , entonces existe algún intervalo $I_0 \equiv (x_0 - h, x_0 + h)$ contenido en $[a, b]$, donde $h > 0$, y una única función $y(x)$ definida en I_0 que es solución de un IVP de primer orden



- Las condiciones en este teorema son condiciones suficientes, pero no son necesarias, por lo que, aunque no se cumplan las condiciones del teorema, podría existir una solución única o no
- El teorema no da indicaciones sobre el tamaño del intervalo, de modo que I (depende de dónde se busque la solución) puede no ser tan ancho como la región R (donde las condiciones del teorema se cumplen) y el intervalo I_0 puede no ser tan ancho como I (limitado por el comportamiento de R y $f(x, y)$). El número $h > 0$ que define el intervalo $I_0: (x_0 - h, x_0 + h)$ puede ser muy pequeño, de modo que lo mejor es pensar que la solución $y(x)$ es única en el sentido local

- El intervalo de definición I se suele tomar como el intervalo más grande que contiene x_0 sobre el cual la función $y(x)$ está definida y es diferenciable. Este intervalo depende de $f(x, y)$ y de la condición inicial $y(x_0) = y_0$, por lo que depende del problema
- La región R depende de $f(x, y)$ y de sus propiedades, mientras que I_0 se deriva de R y de las condiciones iniciales del problema
- A partir de este teorema, se puede ver como dos funciones de la familia de soluciones de una ODE no pueden ser tangentes o intersectar en el punto (x_0, y_0) , dado que, de ser así, no habría una única función $y(x)$ que satisficiera la ecuación diferencial, sino que habría dos como mínimo y la solución no sería única
- Ahora es posible introducir la noción de las ecuaciones diferenciales como un modelo matemático
 - Normalmente suele ser deseable describir el comportamiento de un sistema o fenómeno real en términos matemáticos, de modo que se obtiene una descripción matemática llamada modelo matemático y que se construye con ciertos objetivos en la cabeza
 - La construcción de un sistema matemático comienza con la identificación de variables que son responsables de cambiar el sistema. Estas variables pueden no estar incorporadas en el modelo la primera vez, o si, por lo que en este paso se especifica el nivel de resolución del modelo
 - Después, se toman suposiciones razonables o hipótesis sobre el sistema que se intenta describir. Estas suposiciones también incluyen cualquier ley empírica que pueda ser aplicable al sistema
 - Dado que las suposiciones hechas sobre el sistema normalmente requieren tasas de cambio de una o más variables, la descripción matemática de estas suposiciones puede ser uno o más ecuaciones involucrando derivadas. Es decir, se usan ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales
 - Una vez que se han formulado el modelo matemático que es una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, uno se encara con el problema de resolverlo



- Si se puede resolver, entonces se dice que el modelo es razonable si la solución es consistente con los datos experimentales o con los hechos conocidos sobre el comportamiento del sistema
 - Si las predicciones producidas por la solución son pobres, uno puede incrementar el nivel de resolución del modelo o hacer suposiciones alternativas sobre los mecanismos para cambios en el sistema
 - Si se incrementa la resolución del modelo, se añade complejidad al modelo matemático y se incrementa la probabilidad de que no se puede obtener una solución explícita
- Un modelo matemático de un sistema físico u otros normalmente requiere de la variable de tiempo t , de modo que a este se le conoce como sistema dinámico y este cambia o evoluciona con el paso del tiempo
- Un sistema dinámico consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, llamadas variables de estado, junto con una regla que permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (puede ser un estado pasado, futuro o presente) en términos de un estado en algún momento t_0
 - Los sistemas dinámicos se pueden clasificar en sistemas dinámicos en tiempo discreto o en sistemas dinámicos en tiempo continuo. En el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales, uno está interesado en sistemas de tiempo continuo, en donde todas las variables se definen en un rango continuo de tiempo, de modo que se pueden usar ecuaciones diferenciales o un sistema de estas
 - El estado del sistema en el momento t es el valor de las variables de estado en ese momento, y el estado especificado de un sistema en el momento t_0 es simplemente las condiciones

iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución del problema de valor inicial se refiere a la respuesta del sistema (en este caso, las variables de estado se denotarán en las condiciones iniciales)

- No todos los sistemas estudiados son sistemas dinámicos, sino que existen sistemas estáticos que también se pueden expresar en forma de una o varias ecuaciones diferenciales
- A lo largo del desarrollo de la teoría para ecuaciones diferenciales se verá tres tipos diferentes de enfoques para las ecuaciones diferenciales: el enfoque analítico, el enfoque cualitativo y el enfoque numérico
 - El enfoque analítico se centra en obtener soluciones a ecuaciones diferenciales y estudiar las propiedades de estas soluciones para entenderlas
 - Como algunas ecuaciones diferenciales son muy difíciles o pueden no tener solución, hay veces que se pueden estudiar propiedades directamente a partir de la ecuación diferencial (a través de estudiar existencia, propiedades, geometría, etc.), lo cual se conoce como enfoque cualitativo
 - Finalmente, si una ecuación no se puede resolver por métodos analíticos, se puede obtener una solución aproximada a través de métodos numéricos, de modo que se usa un enfoque numérico para obtener soluciones y estudiar sus propiedades

Las ecuaciones diferenciales de primer orden

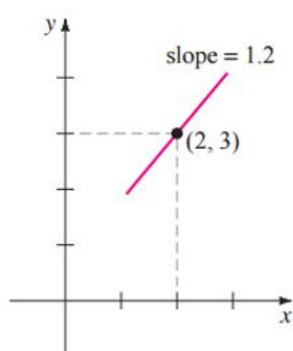
- Es posible que no haya soluciones para una ecuación diferencial o que esta tenga soluciones, pero no se puedan encontrar analíticamente. Aun así, se puede extraer información directamente de las soluciones de las ecuaciones diferenciales
 - Cuando $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ satisficieran unas ciertas condiciones de continuidad, preguntas cualitativas sobre la existencia y unicidad de las soluciones se podían responder. Ahora uno quiere saber cómo se comporta una función en cierto punto o cuando tiende a otro
 - La mayoría de veces se puede contestar a esta pregunta cuando la función f únicamente depende de la variable y
 - Cuando las ecuaciones diferenciales de primer orden no se pueden solucionar de manera analítica, se pueden utilizar dos métodos de análisis cualitativo para poder aproximar como debería ser la curva de la solución: mediante gráficos

direccionales o mediante gráficos de ecuaciones diferenciales autónomas

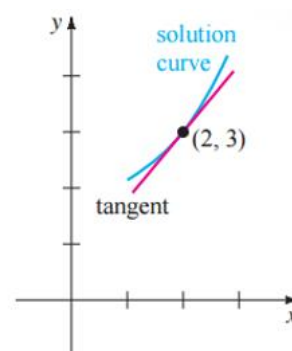
- Como la solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden es necesariamente una función diferenciable en su intervalo de definición I , también tiene que ser continua en I . Esto hace que la curva de solución en I posea una línea tangente en cada punto $(x, y(x))$
 - La función f en su forma normal se denomina función de pendiente o *slope/rate function*. La pendiente de la línea tangente a $(x, y(x))$ en la curva de solución es el valor de la primera derivada en este punto, de modo que es $f(x, y(x))$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Suponiendo que (x, y) representa cualquier punto en la región del plano xy donde la función f está definida, el valor $f(x, y)$ que la función f asigna al punto representa la pendiente de la línea, que se visualiza como un segmento llamado elemento lineal. Por lo tanto, para calcular el signo de la pendiente se necesita suponer un punto (x, y) y calcular $f(x, y)$ (la derivada)

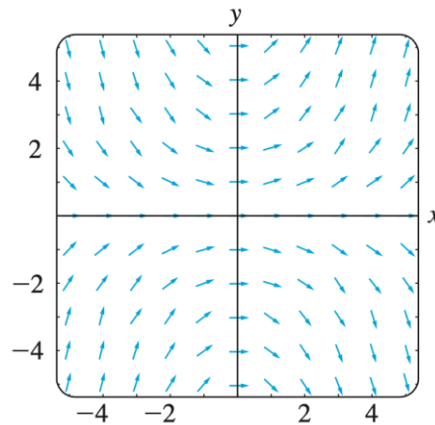


(a) lineal element at a point

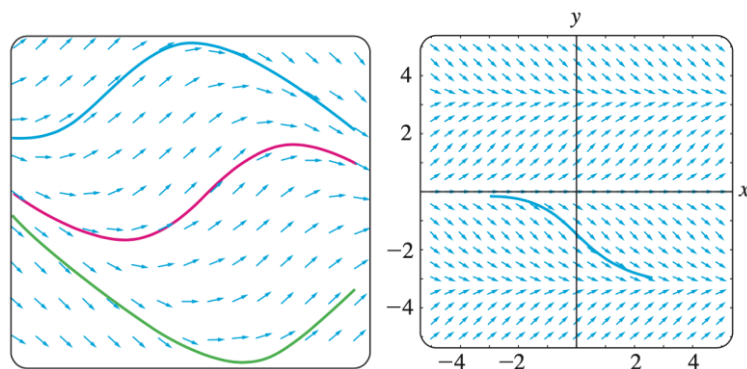


(b) lineal element is tangent to solution curve that passes through the point

- En el primer gráfico muestra el elemento lineal en un punto, mientras que el segundo gráfico muestra que, si la curva de solución también pasara por ese punto (x, y) , entonces lo hace de modo que es tangente al elemento lineal (es una miniatura de la línea tangente en ese punto)
- Si sistemáticamente se evalúa la pendiente o elemento lineal en una zona rectangular de un plano cartesiano y se dibuja una línea en cada punto (x, y) de la zona, se obtiene un campo direccional o de pendientes



- El campo direccional o *directional field* es la colección de todos los elementos lineales o las pendientes de la familia de curvas de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden. Las flechas representan estas pendientes (las miniaturas, los elementos lineales)
- Visualmente, el campo direccional representa gráficamente la apariencia o forma de la familia de las curvas de soluciones de la ecuación diferencial y es posible identificar ciertos aspectos cualitativos de las soluciones



- Una curva de solución que pasa por un campo direccional debe seguir el patrón de flujos de este. Es decir, esta curva debe ser tangente a un elemento lineal cuando intersecta a un punto en la reja o *grid*
- Si la función de la pendiente es positiva para toda x en I , entonces la función $y(x)$ será creciente, mientras que si es negativa para toda x en I , la función será decreciente
- Para poder dibujar el campo direccional, se solía utilizar el método de las isoclinas, que consiste en dibujar los elementos lineales de puntos específicos de una isoclina c , los cuales tienen la misma pendiente c y por tanto permiten dibujar flechas iguales a lo largo de la curva (no todas las flechas siguen la misma

dirección que la curva isoclina, pero todas tienen una misma dirección)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = c$$

- Una ecuación diferencial en la que no aparece explícitamente la variable independiente se denomina ecuación diferencial autónoma, la cual se puede representar en su forma normal como una función que solo depende de y

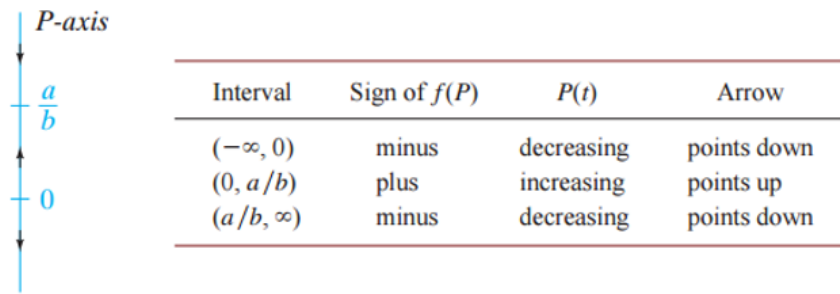
$$\text{Autonomous:} \quad \frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\text{Non - autonomous:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

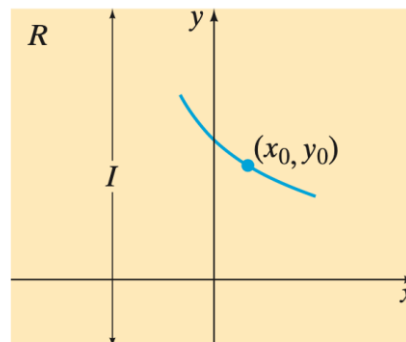
- Las raíces de la función f en la ecuación anterior son de especial importancia. Se dice que c es un punto crítico de una ecuación diferencial autónoma si es una raíz de f (por lo que $f(c) = 0$), y este también se conoce como punto de equilibrio o punto estacionario
- Si se sustituye la función constante $y(x) = c$ en la ecuación diferencial autónoma, entonces se puede ver que si c es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma, entonces $y(x) = c$ es una solución constante de la ecuación. Una solución como esta se conoce como solución de equilibrio, y este tipo de soluciones son las únicas soluciones constantes de las ecuaciones diferenciales autónomas

$$\frac{dy}{dx} = f(c) = 0 \Rightarrow y(x) = c \quad \text{as} \quad \frac{d}{dx} y(x) = \frac{d}{dx} c = 0$$

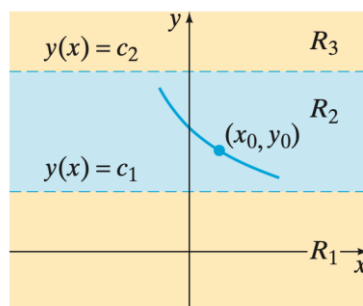
- Para estudiar el comportamiento de la ecuación diferencial autónoma, por lo tanto, solo hace falta determinar los puntos críticos y calcular las derivadas en los diferentes intervalos que crean estos puntos. Esto se suele hacer a través de un retrato de fases y una tabla que permita identificar los signos, usando valores de y en cada región o intervalo para obtener un valor de $f(y)$ y, a la vez, un signo



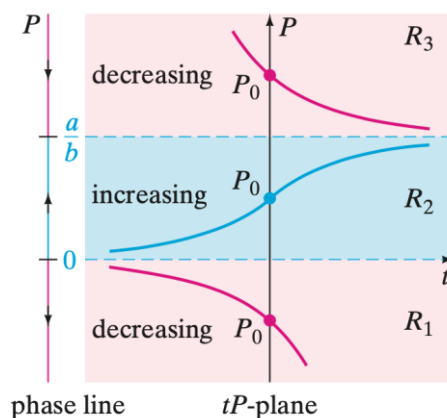
- Sin resolver la ecuación diferencial autónoma, uno normalmente puede saber mucho sobre sus curvas de solución
 - Como la primera derivada es independiente de x , entonces se puede considerar que la función f está definida para cualquier intervalo de x
 - Como f y f' son funciones continuas en algún intervalo I del eje de ordenadas (valores de y), los resultados fundamentales del teorema sobre la existencia de una solución única se mantienen para una zona horizontal R en el plano cartesiano correspondiente a I , lo cual quiere decir que solo una curva de solución para la ecuación diferencial pasa por el punto (x_0, y_0) en la región R



- Si una función $y(x)$ tiene n puntos estacionarios, entonces hay n soluciones constantes que permiten partir la región R en $n + 1$ subregiones
- Si (x_0, y_0) es un punto en una subregión R_i para $i = 1, \dots, n + 1$ y $y(x)$ es una solución no constante que pasa por este punto, entonces $y(x)$ se mantendrá en la subregión R_i para toda x en la subregión. Esto ocurre porque la solución $y(x)$ no puede intersectar o ser tangente a ningún punto estacionario que divide la región R , dado que, de otra manera, la solución no sería única en la región R_i



- Por la continuidad de la derivada, esta debe de ser positiva (creciente) o negativa (decreciente) para toda x en la subregión R_i , por lo que la función derivada no puede cambiar el signo en la subregión (sino habría un punto crítico en medio)
- Además, esto hace que la función $y(x)$ sea una función estrictamente monótona (creciente o decreciente) en la subregión R_i , de modo que no hay extremos locales. Esto ocurre porque, si hubiera un cambio de signo, entonces habría un punto estacionario, lo cual no puede ser porque solo hay n puntos estacionarios para f
- Debido a que la función $y(x)$ está acotada por dos puntos estacionarios, o está acotada por arriba o por abajo por un punto estacionario, la función tiende a estos puntos cuando $x \rightarrow \infty$ y/o cuando $x \rightarrow -\infty$ (son asíntotas horizontales)



- Los puntos estacionarios que dividen la región R se pueden clasificar según el comportamiento de la solución cuando $x \rightarrow \pm\infty$, y estos se entienden como aquellos puntos a los que la solución de una ecuación diferencial tiende (equilibrio o estado estable)
 - Los atractores o puntos asintóticamente estables son puntos estacionarios a los que tienden las soluciones $y(x)$ de manera asintótica cuando el punto inicial (x_0, y_0) está lo suficientemente cerca de los puntos estacionarios

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = c$$

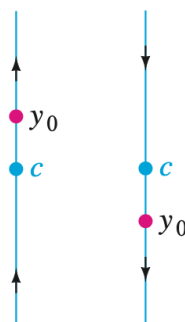


- Los repulsores o puntos asintóticamente inestables son puntos estacionarios de los que divergen las soluciones $y(x)$ de manera asintótica cuando el punto inicial (x_0, y_0) está lo suficientemente cerca de los puntos estacionarios

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \pm\infty$$

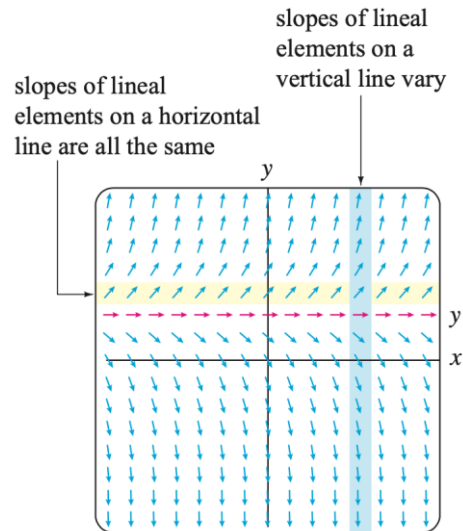


- Los puntos semiestables, que son puntos estacionarios que no son ni atractores ni repulsores totalmente, sino que son atractores en un lado y repulsores en otro

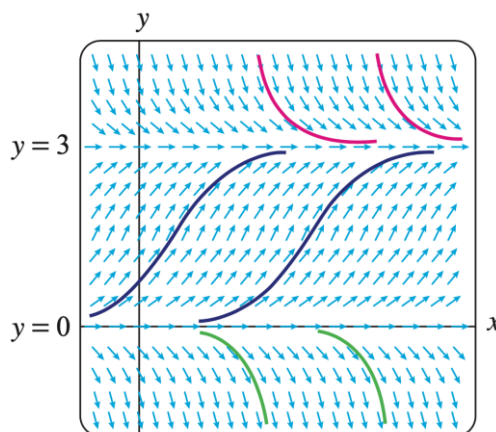


- Debido a las características de las ecuaciones diferenciales autónomas, también se pueden estudiar las soluciones con el campo direccional de una ecuación diferencial autónoma y con la propiedad de translación

- Como una ecuación diferencial autónoma de primer grado es una pendiente que depende solo de y , los elementos lineales para un mismo valor de y deben ser iguales para cualquier x (las pendientes son paralelas para cada valor de x), pero para un mismo valor de x , estos pueden ser diferentes para cada valor de y . Las soluciones constantes, al hacer que $f(y) = 0$, serán pendientes totalmente planas



- Debido a que las pendientes son paralelas para cada valor de x , las soluciones de una ecuación deben de ser paralelas entre ellas también, lo cual permite relacionarlas a través del concepto de translación de una función



- Si $y(x)$ es la solución de una ecuación diferencial autónoma de primer grado, entonces $y_1(x) = y(x - k)$ (cuando k es una constante) también es una solución. En consecuencia, si $y(x)$ es la solución de un IVP, entonces $y_1(x) = y(x - x_0)$ también lo es

- El tipo de ecuación de primer grado más simple es una ecuación diferencial de primer grado con variables separables, cuyas soluciones se pueden encontrar de manera analítica mediante técnicas de integración
 - Considerando una ecuación diferencial de primer orden, cuando f no depende de y , de modo que $f(x, y) = g(x)$, entonces se puede resolver la ecuación diferencial mediante integración

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

- Si $g(x)$ es una función continua, se integran los dos lados para obtener una solución, donde $G(x)$ es la antiderivada de $g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx \Rightarrow y(x) = G(x) + c$$

- Este caso y el método de solución planteado es solo un caso especial de la situación en donde f en su forma normal se puede factorizar en dos funciones que dependen de x y de y por separado (aunque y depende de x)
- Es importante ver que siempre se utiliza una integral indefinida para calcular las soluciones porque esto permite obtener una expresión con una constante genérica c que es crucial para encontrar la familia de soluciones de la ecuación diferencial. Si se utilizara una integral definida, se tendría que usar un intervalo de (y_0, y) y (x_0, x) para las diferentes integrales (para asegurar la unicidad y que se inicia en la condición inicial), pero esto puede complicar los cálculos
- Una ecuación diferencial de primer orden tiene variables separables o es separable si la forma normal de esta se puede expresar como el producto de una función que depende de x y otra que depende de y

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$$

- Reorganizando la ecuación diferencial, se puede obtener una ecuación diferencial más conveniente que permite integrar la solución de manera más sencilla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\Rightarrow p(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{where} \quad p(y) = \frac{1}{h(y)}$$

- De esta forma, se puede integrar ambos lados de la ecuación porque en el lado izquierdo hay una función del tipo $p(y(x))y'(x)$ (dado que y es una función de x). Utilizando el método de sustitución, entonces:

$$\int p(y(x))y'(x) dx = \int g(x) dx$$

$$\text{substituting } u = y(x) \text{ and } du = y'(x) dx$$

$$\int p(y) dy = G(x) + c_2 \Rightarrow H(y) + c_1 = G(x) + c_2$$

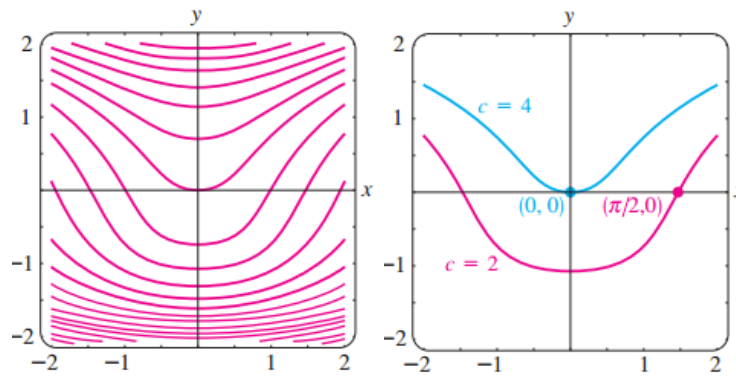
- Este método permite obtener una familia de soluciones de un solo parámetro, la cual normalmente se dará implícitamente

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2 \Rightarrow H(y) = G(x) + c$$

- Como se puede ver, se ha recogido en la constante c las constantes c_1 y c_2 , al utilizar siempre constantes genéricas. Estas constantes se pueden manipular de diversas maneras sin perder generalidad, lo cual puede ser útil para la manipulación algebraica o para reconocer que dos o más familias de solución pueden ser equivalentes (obtenidas la una de la otra a través de modificar la constante)

$$\arctan(x) + \arctan(y) = c \quad \frac{x+y}{1-xy} = c$$

- Hay que tener precaución al usar el método, dado que $h(y)$ puede ser 0 en algún punto r . Si el punto r hace que $h(y) = 0$, entonces sustituir $y = r$ hace que ambos lados de $dy/dx = g(x)h(y)$ sean cero y que $y = r$ sea una solución constante, pero como $1/h(y)$ está indefinida para r , puede ser que esta solución no pertenezca a la familia de soluciones obtenidas por el método y hace que sea una solución singular
- A veces es difícil usar una solución implícita $G(x, y) = 0$ para encontrar una solución explícita $y = \phi(x)$, lo cual puede ser frustrante porque el gráfico de la función o el intervalo que respeta la condición inicial no es aparente. Para poder visualizar la solución implícita se pueden utilizar sistemas algebraicos computacionales (CAS)
- En cálculo multivariante, para una función de dos variables $z = G(x, y)$, las curvas bidimensionales definidas por $G(x, y) = c$ (donde c es una constante) se denominan curvas de nivel de la función. Con la ayuda de un CAS es posible reproducir algunas de las curvas de nivel de la solución implícita



- Aunque haya una condición inicial que lleva a una solución particular con un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones para una ODE de primer grado, una solución a un problema de valor inicial puede no ser única
- Si g es una función continua en un intervalo abierto I que contiene a , entonces para toda $x \in I$ se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x)$$

- Esta igualdad es uno de los dos resultados del teorema fundamental del cálculo. En este caso, la integral es una antiderivada de la función g
- Esta forma es muy conveniente para poder resolver ecuaciones diferenciales en donde la integral no es elemental: si g es una función continua en un intervalo I conteniendo x_0 y x , entonces la solución del problema de valor inicial $dy/dx = g(x)$ para $y(x_0) = y_0$ que está definida en I se da por la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \int dy = \int g(x) dx \Rightarrow y(x) = \int g(x) dx$$

$$\text{Incorporating init. cond.} \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

- Otro tipo de ecuaciones diferenciales de primer grado que normalmente permiten obtener una solución de manera sencilla son las ecuaciones lineales
 - Una ecuación diferencial de primer orden es lineal en la variable y si se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

- La forma estándar de este tipo de ecuaciones se consigue dividiendo ambos lados de la ecuación por el coeficiente

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$\text{when } P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \text{ and } f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

- Si $g(x) = 0$, entonces se dice que la ecuación diferencial lineal de primer orden es homogénea, en donde una solución trivial siempre será $y = 0$. Si $g(x) \neq 0$, entonces la ecuación es no homogénea

$$(\text{Homogeneous}) \quad a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

$$(\text{Non} - \text{homogeneous}) \quad a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

- Normalmente se asumirá que $P(x)$ y $f(x)$ son continuas, pero también se puede dar el caso que sean funciones con un número concreto de discontinuidades. Los valores para los cuales $a_1(x) = 0$ se conocen como puntos singulares de la ecuación, y como las discontinuidades se pueden trasladar a las soluciones, se tienen que considerar solo aquellos intervalos para los cuales $P(x)$ y $f(x)$ son continuas
- A partir de la forma estándar de una ecuación diferencial lineal, se puede obtener una solución a través del método del factor de integración o *integrating factor method*. En vez de aprender esta fórmula de memoria, lo mejor es realizar el método desde cero cada vez
 - Multiplicando ambos lados de la ecuación por una función $\mu(x)$, se puede obtener la forma de la derivada de un producto en el lado izquierdo, siempre que la derivada de $\mu(x)$ en x sea $P(x)\mu(x)$

$$\frac{dy}{dx} \mu(x) + yP(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\frac{d}{dx} [y\mu(x)] = \frac{dy}{dx} \mu(x) + yP(x)\mu(x) \text{ if } \frac{d\mu}{dx} = P(x)\mu(x)$$

- Como la condición necesaria es que la derivada de μ tiene que ser $P(x)\mu(x)$, se tiene que encontrar una función μ que dé este resultado, llamada factor de integración. Este se puede encontrar

a través del método de separación de variables, y se pueden modificar las constantes con tal de no usarlas

$$\frac{d\mu}{dx} = P(x)\mu(x) \Rightarrow \int \frac{1}{\mu(x)} d\mu = \int P(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int P(x) dx + c_1 \Rightarrow \mu(x) = c_2 e^{\int P(x) dx}$$

where we fix $c_2 = e^{c_1} = 1$ conveniently ($c_1 = 0$)

- Una vez se ha obtenido el factor de integración, se sustituye en la ecuación diferencial y se intenta obtener una función y que dependa del factor de integración y de x

$$\frac{dy}{dx} e^{\int P(x) dx} + yP(x)e^{\int P(x) dx} = f(x)e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [ye^{\int P(x) dx}] = f(x)e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow ye^{\int P(x) dx} = \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + c$$

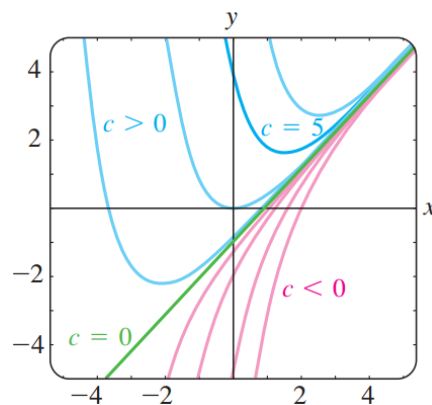
$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x) dx} \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + ce^{-\int P(x) dx}$$

- A partir de la solución encontrada con este método, es importante remarcar algunas observaciones útiles para la resolución de problemas
- Ocasionalmente, una ecuación diferencial de primer orden puede ser no lineal en una variable, pero si en otra. En este caso, la solución que se encuentra con el método será para aquella ecuación lineal, y esta será una solución implícita para la ecuación no lineal

$$(Non - linear on y) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

$$(Linear on x) \quad \frac{dx}{dy} = x + y^2$$

- Hay algunas soluciones generales que tienen un comportamiento asintótico (tienden hacia una función en concreto en alguna región), y esto se suele deber a que hay un término transitorio. Un término transitorio es aquel término de la solución que se vuelve insignificante cuando se tiende a un valor



- Suponiendo que las funciones P y f son continuas en un intervalo común I , anteriormente se ha demostrado que, si el problema anterior tiene una solución, debe ser de la forma encontrada. Conversamente, se puede verificar que cualquier función de esa forma concreta es una solución para la ecuación diferencial en I

- En otras palabras, la forma de y encontrada es una familia de soluciones de la ecuación con un parámetro y todas las soluciones del problema pertenecen a esta familia. Por lo tanto, a esta solución se la conoce como la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo I
- Escribiendo la ecuación diferencial en su forma normal $dy/dx = F(x, y)$, se puede identificar $F(x, y) = -P(x)y + f(x)$ y $\partial F(x, y)/\partial y = -P(x)$. A partir de la continuidad de P y f , F y $\partial F(x, y)/\partial y$ también deben ser continuas en I
- Con el teorema anteriormente visto para la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial, se puede concluir que debe existir una y solo una solución del problema de valor inicial siguiente, definido en algún intervalo I_0 que contiene x_0

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad \text{with } y(x_0) = y_0$$

- No obstante, cuando x_0 está en I , encontrar una solución solo es cuestión de encontrar el valor apropiado de c en la expresión de y encontrada con el método del factor de integración (debido a que y es la solución general en el intervalo). En otras palabras, el intervalo I_0 de existencia y unicidad del teorema para el problema de valor inicial planteado sería $I_0 = I$
- Aunque hay algunas ecuaciones separables que se pueden resolver a través del método de factor de integración explicado, una manera alternativa de resolverlas es reconociendo si estas ecuaciones diferenciales son ecuaciones exactas

- Si $z = f(x, y)$ es una función bivalente con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy , entonces su diferencial es el siguiente:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- En el caso especial cuando $f(x, y) = c$, donde c es constante, entonces el diferencial implica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

- En otras palabras, dado una familia de funciones de un solo parámetro $f(x, y) = c$, se pueden generar ecuaciones diferenciales de primer orden calculando el diferencial a ambos lados de la igualdad
- Una expresión diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es un diferencial exacto en una región R del plano xy si corresponde al diferencial de una función $f(x, y)$ definida en R . Una ecuación diferencial de la siguiente forma se conoce como una ecuación exacta si la expresión de la izquierda es un diferencial exacto:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

- No todas las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden escribir de la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ correspondiente a $f(x, y) = c$. Por lo tanto, se necesita una manera de poder identificar que una expresión diferencial es el diferencial de otra
- Siendo $M(x, y)$ y $N(x, y)$ dos funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, entonces una condición necesaria y suficiente de que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea un diferencial exacto es la siguiente:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

- La demostración de la necesidad de la igualdad de este último teorema proviene de la definición de diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f / \partial x}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f / \partial y}{\partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

- La demostración de la suficiencia de esta condición consiste en demostrar que existe una función f por la cual $\partial f / \partial x = M(x, y)$ y $\partial f / \partial y = N(x, y)$ cuando se cumple la igualdad del teorema. El método de construcción de esta función $f(x, y)$ refleja un procedimiento básico para resolver ecuaciones exactas
- Dada una ecuación en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, se determina si la igualdad del teorema anterior se mantiene. Si lo hace, entonces debe existir una función f para la cual $\partial f / \partial x = M(x, y)$ (con una de las igualdades basta)
 - Se puede encontrar f a través de integrar $M(x, y)$ con respecto a x mientras se mantiene y constante, donde la función $g(y)$ será una función arbitraria que será la constante de integración (ya que se integra con respecto a x):

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y)$$

- Ahora se puede diferenciar esta expresión con respecto a y y se asume que $\partial f / \partial y = N(x, y)$, de modo que se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y) = N(x, y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

- Finalmente, se puede integrar la expresión resultante con respecto a y y sustituir el resultado en la expresión para $f(x, y)$, viendo así que la solución implícita es $f(x, y) = c$

$$g(y) = \int N(x, y) dy - \int M(x, y) dx$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \int N(x, y) dy = \int M(x, y) dx + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\Rightarrow \text{Must be } f(x, y) = c \text{ to satisfy } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

- De este procedimiento se pueden hacer dos observaciones importantes:

- Primero, es importante darse cuenta de que la expresión $N(x, y) - \partial/\partial y \int M(x, y) dx$ es independiente de x , lo cual se puede demostrar calculando la derivada parcial para x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

- Segundo, uno puede realizar el mismo procedimiento que se ha mostrado, pero bajo la suposición de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$ (la otra), teniendo resultados análogos

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x)$$

$$h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y) dy$$

- Tercer, aunque se obtenga una forma funcional de $f(x, y)$, la solución no es $f(x, y)$, sino que es $f(x, y) = c$ (la solución es implícita). De otro modo, no cumpliría la condición del diferencial
- Como se ha visto antes, la parte izquierda de la ecuación lineal $y' + P(x)y = f(x)$ se puede transformar en una derivada cuando se multiplica la ecuación por un factor de integración. Esta misma idea se puede aplicar para ecuaciones diferenciales no exactas

- Esto significa que hay veces que es posible encontrar un factor de integración $\mu(x, y)$ tal que, después de multiplicar, el lado izquierdo de la siguiente ecuación sea un diferencial exacto:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

- La ecuación anterior solo es exacta si el resultado del teorema anteriormente visto aplica para los nuevos factores. Por la regla

del producto, el resultado se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y)M(x, y)] &= \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y)N(x, y)] \\ \Rightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} M &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} N \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M &= \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu\end{aligned}$$

- Aunque $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$ son funciones conocidas de x y y , la dificultad al determinar $\mu(x, y)$ a partir de esta igualdad anterior está en que se tiene que resolver una ecuación diferencial parcial. Si se supone que μ es una función de una sola variable para simplificar, entonces la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} N = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu(x) \Rightarrow \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu(x)$$

$$\frac{\partial \mu(y)}{\partial y} M = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \frac{N_x - M_y}{M} \mu(y)$$

- Si el cociente depende de x y y , el problema sigue presente, pero si después de todas las simplificaciones se puede ver que solo depende de la variable de la cual depende μ , esta ecuación sería una ecuación diferencial ordinaria de primer grado. Entonces, es posible determinar μ debido a que sería una ecuación separable y lineal, obteniendo el factor de integración para el caso en que μ dependa de x o de y :

$$\frac{M_y - N_x}{N} \text{ is function of } x \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} \text{ is function of } y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

- Durante la resolución para una ecuación diferencial no exacta, se tiene que probar con los dos cocientes posibles para poder aplicar el método
- Si se reescribe la ecuación diferencial $y' + P(x)y = f(x)$ como $(P(x) - f(x))dx + dy = 0$, entonces se puede obtener la siguiente igualdad, la cual permite obtener el factor de integración encontrado con las ecuaciones separables:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

- Uno normalmente resuelve ecuaciones diferenciales al reconocer que son de un tipo concreto y aplicando unos pasos matemáticos concretos. No obstante, es común encontrar ecuaciones que no se pueden clasificar en ninguna de las clases que se conocen, por lo que se pueden aplicar sustituciones para su resolución

- Un primer paso común al resolver ecuaciones diferenciales consiste en transformarlas en otras ecuaciones diferenciales a través de sustituciones

- Por ejemplo, suponiendo que se quiere transformar una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ con la sustitución $y = g(x, u)$, donde $u = u(x)$. Si g posee primeras derivadas parciales, entonces se puede aplicar la regla de la cadena para obtener el siguiente resultado:

$$y = g(x, u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx}$$

- Si se reemplaza dy/dx por la derivada obtenida y se reemplaza y en $f(x, y)$ por $g(x, u)$, entonces la ecuación diferencial obtenida pasa a ser la siguiente, la cual se puede resolver para du/dx :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx} = f(x, g) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(x, g) - \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = F(x, g(x, u))$$

- Si se encuentra una solución $u = \phi(x)$ para esta nueva ecuación diferencial, entonces la solución para la ecuación diferencial original será $y = g(x, \phi(x))$, que es una función de x
- Una función diferencial de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea (entendida diferente a cómo se entendía la homogeneidad en otras secciones) si ambas funciones de los coeficientes M y N son homogéneas del mismo grado (misma α)

$$M(tx, ty) = t^\alpha M(x, y) \quad \& \quad N(tx, ty) = t^\alpha N(x, y)$$

- Una función f es homogénea de grado α si posee la siguiente propiedad para un número real α :

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

- Adicionalmente, si las funciones M y N son homogéneas de grado α , uno puede escribir los siguientes resultados:

$$M(x, y) = x^\alpha M(1, u) \text{ \& } N(x, y) = x^\alpha N(1, u) \text{ for } u = \frac{y}{x}$$

$$M(x, y) = y^\alpha M(v, 1) \text{ \& } N(x, y) = y^\alpha N(v, 1) \text{ for } v = \frac{x}{y}$$

- Estas últimas propiedades sugieren que se pueden aplicar sustituciones para resolver una ecuación diferencial con coeficientes homogéneos. Específicamente, cualquiera de las sustituciones siguientes reducirá la ecuación homogénea a una ecuación diferencial de primer orden:

$$y = ux \text{ where } u = \frac{y}{x} \text{ (} u \text{ is new dep. var.)}$$

$$x = vy \text{ where } v = \frac{x}{y} \text{ (} v \text{ is new dep. var.)}$$

- Aplicando las sustituciones a la ecuación homogénea planteada, es posible obtener los siguientes resultados, en donde se puede ver como la función se vuelve separable y se podría resolver integrando ambos lados de la ecuación resultante:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\Rightarrow x^\alpha M(1, u) dx + x^\alpha N(1, u) dy = 0$$

$$\Rightarrow M(1, u) dx + N(1, u) dy = 0$$

$$\Rightarrow M(1, u) dx + N(1, u) [u dx + x du] = 0 \text{ by chain rule}$$

$$\Rightarrow [M(1, u) dx + uN(1, u)]dx + xN(1, u) du = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = - \left[\frac{M(1, u) dx + uN(1, u)}{N(1, u)} \right] \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)}{M(1, u) dx + uN(1, u)} du = 0$$

- Aunque se puede escoger el otro tipo de sustitución para obtener unos resultados análogos, lo normal es utilizar $x = vy$ cuando $M(x, y)$ es más simple que $N(x, y)$ y $y = ux$ cuando $N(x, y)$ es más simple que $M(x, y)$. Cuando uno encuentra expresiones muy

difíciles de integrar, lo mejor es probar con la otra sustitución para poder simplificar la resolución

- La siguiente ecuación diferencial, donde n es cualquier número real, se conoce como ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

- En el caso en el que $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación diferencial se vuelve una ecuación diferencial lineal. Si $n \notin \{0,1\}$, la sustitución $u(x) = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de este tipo a una lineal
- La demostración de por qué esta sustitución permite obtener una ecuación diferencial lineal se basa en la regla de la cadena y en un arreglo algebraico que permite manipular más fácilmente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \Rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u^{-\frac{n}{n-1}} \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + P(x)u = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} + P(x)u = f(x) \Rightarrow a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u = g(x)$$

$$\text{where } a_1(x) = \frac{1}{1-n}, a_0(x) = P(x) \text{ and } g(x) = f(x)$$

- Una ecuación diferencial de la siguiente forma siempre se puede reducir a una ecuación separable a través de la sustitución $u = Ax + By + C$ para $B \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

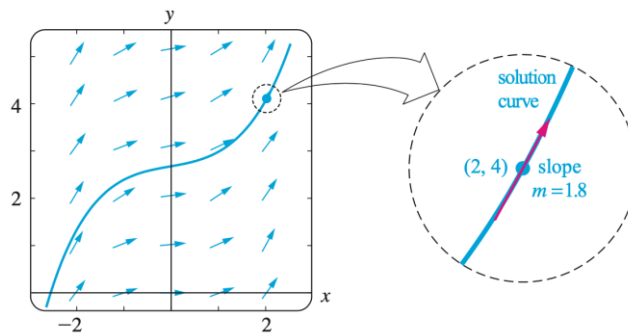
- La demostración de cómo esta sustitución lleva a una ecuación diferencial separable se basa en una manipulación algebraica para expresar y en términos de u y x para derivar y obtener una ecuación diferencial de primer orden para u

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{B} (u - Ax - C) \right] = \frac{1}{B} \left(\frac{du}{dx} - A \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B} \left(\frac{du}{dx} - A \right) = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = A + Bf(u)$$

- Un método numérico ampliamente usado para poder encontrar la solución de una ecuación diferencial de primer orden es el método de Euler, el cual consiste en aproximar la solución desconocida a través de la tangente
 - Debido a que un IVP con una ecuación diferencial ordinaria de primer grado tiene una solución única, es posible aproximar los valores de $y(x)$ en la vecindad de un valor x
 - El campo direccional de la ecuación diferencial permite ver que esta solución tendrá una forma concreta que estará determinada por los flujos del campo. Debido a que esta solución pasará por el punto $(x_0, y(x_0))$, el elemento lineal en este punto será una tangente con una pendiente equivalente a $f(x_0, y(x_0))$



- Por lo tanto, se puede formular una ecuación de la tangente con el punto $(x_0, y(x_0))$ y la pendiente $f(x_0, y(x_0))$, la cual se denominará linealización de $y(x)$ en $x = x_0$, y permite aproximar el valor de $y(x)$ en la vecindad de x_0

$$L(x) = mx + b$$

$$\text{when } m = f(x_0, y(x_0)) \text{ and } b = y_0 - mx_0$$

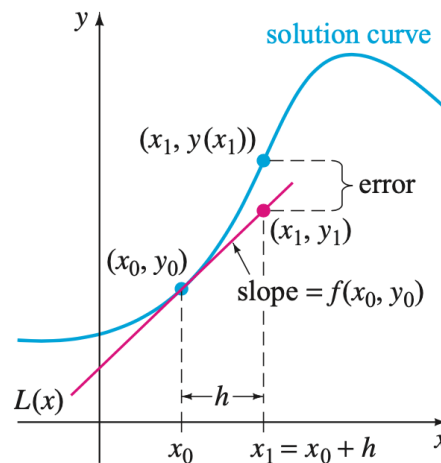
- La generalización de esta idea para aproximar la solución $y(x)$ se denomina método de Euler, el cual es el uso sucesivo de tangentes para aproximar los valores de $y(x)$
 - A partir de la fórmula de la linealización, se puede sustituir x por $x_1 = x_0 + h$ para $h > 0$, de modo que se obtiene una linealización que depende del incremento h

$$L(x_1) = y_0 + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y(x_0))$$

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + hf(x_0, y(x_0))$$

- Utilizando este método recursivamente, se pueden obtener aproximaciones para y_{n+1} utilizando la aproximación para y_n . de este modo, se define la siguiente ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

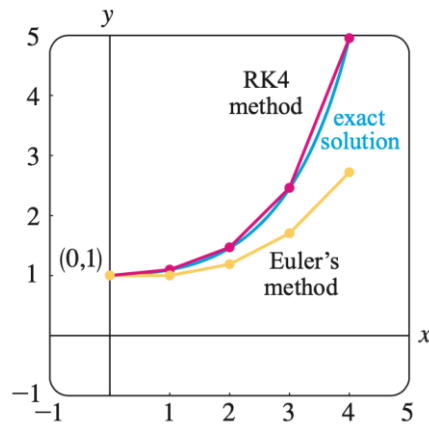


- La precisión de la aproximación depende del tamaño de h , de modo que para un incremento h pequeño, la precisión es mejor. Esta precisión se puede medir por el error absoluto y relativo
- El error absoluto se define como la diferencia entre el valor de $y(x_{n+1})$ y el valor aproximado y_{n+1} , mientras que el error relativo es la *ratio* entre el error absoluto y el valor absoluto de $y(x_{n+1})$

$$\text{Absolute error} = |y(x_{n+1}) - y_{n+1}|$$

$$\text{Relative error} = \frac{|y(x_{n+1}) - y_{n+1}|}{|y(x_{n+1})|}$$

- Aunque este método permite aproximar los valores, existen métodos numéricos más precisos como el método de Runge-Kutta de cuarto orden, de modo que los errores son menores que con el método de Euler



Las ecuaciones diferenciales de mayor orden

- Las soluciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden vistas anteriormente, a excepción de las ecuaciones diferenciales lineales, no permiten obtener soluciones generales
 - Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden sí que permitían la obtención de una solución general a través de la imposición de ciertas condiciones de continuidad sobre sus coeficientes
 - Por ello, uno de los objetivos principales es estudiar la obtención de soluciones generales para ecuaciones diferenciales lineales de mayor orden
 - A partir del estudio de las ecuaciones lineales, se pueden encontrar métodos para solucionar otro tipo de ecuaciones de un mayor orden
 - Los métodos más importantes son la reducción de órdenes, el método de los coeficientes indeterminados, la variación de parámetros y las funciones de Green
 - No obstante, existen varios otros aspectos relacionados que se pueden estudiar para entender mejor tipos concretos de ecuaciones diferenciales
- Para poder resolver ecuaciones diferenciales de mayor orden, primero se tienen que estudiar los problemas de valor inicial, los problemas de condición de frontera, el concepto de homogeneidad y otros conceptos sobre las ecuaciones diferenciales lineales
 - Un problema de valor inicial de n -ésimo orden para una ecuación diferencial lineal de n -ésimo orden se puede representar de la siguiente manera:

$$\text{Solve } a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{such that } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\text{where } y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ (constants)}$$

- Para un problema como este, se busca una función definida en algún intervalo I que contiene x_0 que satisface la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales especificadas en x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
 - Anteriormente se discutió la existencia de un teorema de existencia y unicidad de una solución para un IVP de primer orden. Análogamente, existe un teorema que da las condiciones suficientes por las que se garantiza la existencia y unicidad de una solución en un IVP de una ecuación diferencial lineal de enésimo grado
 - Siendo $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ y g funciones continuas de x en el intervalo I y siendo $a_0(x) \neq 0$ para cada x del intervalo, si $x = x_0$ es cualquier punto en el intervalo I , entonces una solución $y(x)$ de un IVP lineal de enésimo orden existe en el intervalo I y es único
- Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial lineal de enésimo orden en donde la variable dependiente y o sus derivadas se especifican en diferentes puntos del intervalo I en el que se mueve la ODE (condiciones de frontera). Este tipo de problemas se llaman problemas de condición de frontera o *boundary-value problems* (BVP)

$$\text{Solve } a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{such that } y(a_0) = y_0 \text{ \& } y(a_1) = y_1 \text{ where } y_0, y_1 \in \mathbb{R}$$

- Las condiciones no tienen por qué corresponder a la función o a una derivada de un orden concreto, sino que hay diferentes combinaciones posibles. Los tipos principales de problemas de condición de frontera (combinación de condiciones) son las siguientes:

$$(\text{Dirichlet}) \quad y(a_0) = y_0 \text{ \& } y(a_1) = y_1$$

$$(\text{Cauchy}) \quad y(a_0) = y_0 \text{ \& } y'(a_0) = y_1$$

$$(Neumann) \quad y'(a_0) = y_0 \quad \& \quad y'(a_1) = y_1$$

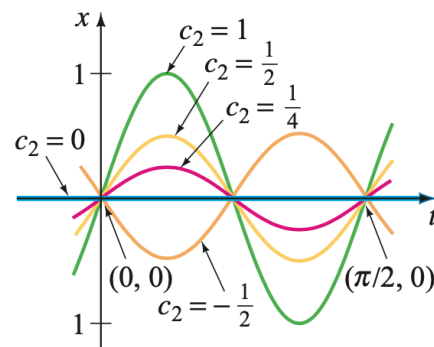
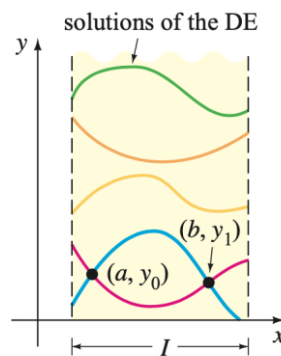
$$(Robin) \quad \alpha_0 y(a_0) + \alpha_1 y'(a_0) = y_0 \quad \& \quad \beta_0 y(a_1) + \beta_1 y'(a_1) = y_1$$

$$(Periodic) \quad y(a_0) = y(a_1) \quad \& \quad y'(a_0) = y'(a_1)$$

- Una solución para este tipo de problema es una función que satisface la ecuación diferencial en un intervalo I , conteniendo a_0 y a_1 , que pasa por los puntos (a_0, y_0) y (a_1, y_1)
- Para ecuaciones diferenciales de segundo orden, el BVP de segundo orden intentará buscar una solución cuyo gráfico pase por (a_0, y_0) y (a_1, y_1) . Como estas son las únicas condiciones, puede haber varias soluciones, una única solución o ninguna

$$\text{Solve} \quad a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{such that } y(a_0) = y_0 \quad \& \quad y(a_1) = y_1 \quad \text{where } y_0, y_1 \in \mathbb{R}$$



- Una ecuación diferencial lineal de enésimo orden es homogénea cuando $g(x) = 0$ para cualquier valor de $x \in I$, mientras que una ecuación no homogénea es una ecuación lineal en donde existe alguna $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

(homogeneous)

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

(non – homogeneous)

- Para resolver una ecuación no homogénea, es necesario encontrar la solución a su ecuación homogénea asociado

- Unas suposiciones comunes para el desarrollo de definiciones y teoremas sobre ecuaciones diferenciales lineales son que los coeficientes $a_i(x)$ para $i = 0, 1, \dots, n$ y $g(x)$ son funciones continuas, y que $a_n(x) \neq 0$ para cualquier $x \in I$
- A partir del operador diferencial y el operador lineal, se puede obtener el principio de superposición, el cual permite ver como la suma de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución de esta
- En cálculo diferencial, la diferenciación se suele denotar con el operador diferencial $D = d/dx$, dado que transforma una ecuación diferenciable en otra función. A partir de este, se puede crear un operador polinómico L

$$Dy = \frac{dy}{dx} \Rightarrow L = a_n(x)D^n + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

$$L(y) = a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \dots + a_1(x)Dy + a_0(x)y$$

- El operador polinómico L cumple con la propiedad de linealidad gracias a dos propiedades de las derivadas, por lo que se le suele llamar operador lineal

$$D[cf(x)] = cD[f(x)] \quad \text{and} \quad D[f(x) \pm h(x)] = D[f(x)] \pm D[h(x)]$$

$$\Rightarrow L[\alpha f(x) \pm \beta h(x)] = \alpha L[f(x)] \pm \beta L[h(x)]$$

- El principio de superposición para las ecuaciones homogéneas expresa que, siendo y_1, y_2, \dots, y_k soluciones de una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I , la combinación lineal de estas soluciones, cuyos coeficientes serán constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación diferencial homogénea en el intervalo I

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x), \forall x \in I \Rightarrow L(y) = 0$$

where c_1, c_2, \dots, c_k are arbitrary constants

- Siendo L el operador diferencial definido anteriormente y $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, si se define $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$, entonces por la linealidad de L se obtiene el siguiente resultado:

$$L(y) = L\left[\sum_{i=1}^n c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^n c_i L[y_i(x)] = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = 0$$

- Un múltiplo constante $y = c_1 y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea, por lo tanto, también es una solución. Además, una ecuación diferencial lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y = 0$

$$(1) \quad L(y_1) = 0 \quad \& \quad y = c_1 y_1(x) \Rightarrow L(y) = c_1 L(y_1) = 0$$

$$(2) \quad y = 0 \Rightarrow L(y) = L(0) = 0$$

- Un conjunto de funciones f_1, f_2, \dots, f_n es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n , que no sean todas nulas, entonces $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ para toda x en I

- Si las únicas constantes que hacen que la proposición se cumpla son $c_1 = c_2 = \dots = 0$ (porque no existen constantes que no sean todas nulas que hagan cierta la proposición), se dice que el conjunto de funciones es linealmente independiente
- Si un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I , entonces, el cociente de una función entre una combinación lineal de las otras no puede ser constante en ese intervalo. Este hecho será relevante más adelante

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \neq -\frac{c_2}{c_1}$$

- El interés principal reside en soluciones lineales independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea. Utilizando matrices y determinantes, se puede evaluar si un conjunto de n soluciones es linealmente dependiente o no de manera mecánica

- El wronskiano de un conjunto de n funciones es el determinante de una matriz formada por cada función y sus derivadas en las subsecuentes filas (hasta la $n - 1$)

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} \\ f_1' & f_2' & \dots & f_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- Siendo y_1, y_2, \dots, y_n soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de n ésimo orden en un intervalo I , el conjunto de n soluciones es linealmente independiente en I si, y solo si, $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ para toda x en I . Por lo tanto, el wronskiano puede ser nulo o diferente de cero en el intervalo I

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \text{ for } \forall x \in I \Rightarrow \text{linear indep.}$

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \text{ for } \forall x \in I \Rightarrow \text{linear dep.}$

- Cualquier conjunto y_1, y_2, \dots, y_n de n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I se llama conjunto fundamental de soluciones. Este concepto sirve para definir la solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas
 - El teorema de existencia del conjunto fundamental expresa que existe un conjunto fundamental de soluciones para una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I
 - Análogo al hecho de que un vector tridimensional se puede expresar como combinación lineal de vectores independientes i, j, k , cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo I se puede expresar como combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en I . En otras palabras, n soluciones linealmente independientes y_1, y_2, \dots, y_n son los bloques fundamentales básicos para la solución general de una ecuación
- Siendo y_1, y_2, \dots, y_n el conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I , la solución general de la ecuación en el intervalo I se define como:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \text{ for } \forall x \in I$$

where c_i for $i = 1, 2, \dots, n$ are arbitrary constants

- Lo que este teorema expresa es que si $Y(x)$ es cualquier solución para una ecuación diferencial lineal de orden n en el intervalo I , entonces las constantes c_1, c_2, \dots, c_n siempre se pueden encontrar tal que satisfagan la siguiente ecuación:

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

- Siendo $Y(x)$ una solución y y_1, y_2, \dots, y_n soluciones linealmente independientes de $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ en un intervalo I y suponiendo que $x = t$ es un punto en I para el cual $W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \neq 0$ y que $Y(t) = k_1, Y'(t) = k_2, \dots, Y^{(n)}(t) = k_n$, se examina el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = k_1 \\ c_1 y_1'(t) + \dots + c_n y_n'(t) = k_2 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n)}(t) = k_n \end{cases}$$

- En este sistema de ecuaciones es posible determinar los valores de c_1, c_2, \dots, c_n de manera única, dado que el determinante del sistema (de los coeficientes) es diferente de cero. No obstante, este determinante es simplemente el wronskiano evaluado en $x = t$ y $W \neq 0$ por suposición

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si se define $G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$, se observa que $G(x)$ satisface la ecuación diferencial porque es una suma o superposición de soluciones conocidas. De este modo, $G(x)$ satisface las condiciones iniciales siguientes e $y(x)$ satisface la misma ecuación diferencial lineal y las mismas condiciones iniciales:

$$\begin{cases} G(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = k_1 \\ G'(t) = c_1 y_1'(t) + \dots + c_n y_n'(t) = k_2 \\ \dots \\ G^{(n)}(t) = c_1 y_1^{(n)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n)}(t) = k_n \end{cases}$$

- Como la solución de este problema de valor inicial es única (por el teorema visto anteriormente de la existencia de una única solución), se tiene que $Y(x) = G(x)$ o que $Y(x) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$
- Para las ecuaciones no homogéneas se pueden formular teoremas análogos a los de solución general y superposición, que permiten ver cómo es necesario encontrar una función complementaria y_c y una solución particular y_p para solucionarlas
- Siendo y_p cualquier solución particular (libre de parámetros arbitrarios) de una ecuación diferencial lineal no homogénea de n -ésimo orden en el intervalo I y y_1, y_2, \dots, y_n el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, la solución general de la ecuación en el intervalo I se define como:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p \text{ for } \forall x \in I$$

where c_i for $i = 1, 2, \dots, n$ are arbitrary constants

- Siendo L el operador diferencial y $Y(x)$ y $y_p(x)$ las soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces la linealidad de L se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} L(u) &= L[Y(x) - y_p(x)] = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

- Esto muestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Entonces, por el teorema anterior sobre la solución general, $u(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$, por lo que se puede obtener el siguiente resultado:

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

$$\Rightarrow Y(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

- El teorema se basa en que el operador lineal L transforma la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ en cero, mientras que transforma y_p en $g(x)$ (debido a que la ecuación diferencial no homogénea se puede expresar como $L(y) = g(x)$)

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p = y_c + y_p$$

$$L(y) = L(y_c) + L(y_p) = L(y_p) = g(x)$$

- Si uno piensa sobre este resultado, tiene sentido porque la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ se transforma en 0 por el operador L , mientras que y_p se transforma en $g(x)$. Si se usan $k = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de orden n , entonces la expresión $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p$ se vuelve una solución general de la ecuación no homogénea
- En este teorema se puede ver que la solución general de una ecuación diferencial no homogénea de grado n consiste de la suma de dos funciones

$$y(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

- La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$, que es la solución general de la ecuación homogénea asociada, se conoce como la función complementaria para la ecuación diferencial no homogénea

- En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial homogénea (la solución general), primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y después se encuentra la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea
- Siendo $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_k}$ un número k de soluciones particulares de una ecuación diferencial lineal no homogénea de n -ésimo orden en el intervalo I correspondiendo a k funciones distintas g_1, g_2, \dots, g_k (y_{p_i} denota la solución particular a una ecuación diferencial no homogénea con $g_i(x)$ para $i = 1, 2, \dots, k$). Entonces, la siguiente combinación lineal es una solución particular del siguiente problema:

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_k}(x)$$

$$\text{for } a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + \dots + g_k(x)$$

- El teorema de superposición para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas se demuestra de manera análoga al de la ecuación homogénea, utilizando la propiedad lineal del operador lineal. Suponiendo que $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_k}$ son soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas $L(y) = g_i(x)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, se quiere demostrar que $L(\sum_{i=1}^k y_{p_i}) = \sum_{i=1}^k g_i(x)$, por lo que se aplica el operador:

$$\begin{aligned} L(y_p) &= L(y_{p_1} + \dots + y_{p_k}) = L(y_{p_1}) + \dots + L(y_{p_k}) = \\ &= g_1(x) + \dots + g_k(x) \end{aligned}$$

- Si y_{p_i} son soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea $L(y) = g_i(x)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces la siguiente combinación lineal, donde c_i son constantes, también es una solución particular de $L(y)$ cuando el lado derecho de la ecuación tiene la forma $\sum_{i=1}^k c_i g_i(x)$:

$$y_p = \sum_{i=1}^k c_i y_{p_i}(x) = c_1 y_{p_1} + c_2 y_{p_2} + \dots + c_k y_{p_k}$$

- Se ha visto como la solución general para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes en un intervalo I . Una idea básica para resolver ecuaciones diferenciales es que una ecuación se puede reducir a una ecuación lineal de primer orden a través de una sustitución, y se desarrolla la teoría con una ecuación diferencial de segundo orden
- Suponiendo que y_1 denota una solución no trivial definida en I de una ecuación diferencial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, se busca otra

solución y_2 de modo que el conjunto de y_1 y y_2 es linealmente independientes en I . Si son linealmente independientes, entonces y_2/y_1 no es constante en el intervalo I y se puede obtener una función no constante $u(x)$ a partir de esta *ratio*

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = u(x) \text{ on } I \Rightarrow y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

- La función $u(x)$ se puede encontrar al sustituir $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada. Este método se conoce como reducción de orden porque se debe resolver primero una ecuación diferencial de primer orden para encontrar $u(x)$
 - Este mecanismo se puede generalizar para cualquier ecuación diferencial de segundo grado para obtener una formula y un mecanismo de sustitución que reduzca la ecuación a una de primer orden
 - Además, la reducción de orden se puede usar para encontrar la solución general de una ecuación no homogénea cuando una solución y_1 de la ecuación homogénea asociada se conoce, dado que teniendo las soluciones de la homogénea, se puede obtener una particular y encontrar la solución general
- Suponiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ se obtienen dividiendo la ecuación por $a_2(x)$ y continuas en I , y que $y_1(x)$ es una solución conocida de esta ecuación en I y $y_1(x) \neq 0$ para $\forall x \in I$, si se define $y(x) = u(x)y_1(x)$, entonces se obtienen los siguientes resultados:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \Rightarrow y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$y(x) = u(x)y_1(x) \Rightarrow \begin{cases} y' = u'y_1 + uy_1' \\ y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + P(u'y_1 + uy_1') + Qy = 0$$

$$\Rightarrow u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + Pu'y_1 + Puy_1' + Qy = 0$$

$$\Rightarrow u''y_1 + 2u'y_1' + Pu'y_1 + u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) = 0$$

$$\Rightarrow y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

- Haciendo una sustitución de $w(x) = u'(x)$, se puede obtener una ecuación diferencial de primer orden que sea lineal y separable. Por lo tanto, se puede resolver para obtener un resultado útil:

$$y_1 \frac{dw}{dx} + (2y_1' + Py_1)w = 0 \Rightarrow \frac{1}{w} dw = \frac{-2y_1' - Py_1}{y_1} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{w} dw = - \int \frac{2y_1'}{y_1} dx - \int P dx$$

$$\Rightarrow \ln|w| = -\ln|y_1^2| - \int P dx + c$$

$$\Rightarrow \ln|wy_1^2| = - \int P dx + c \Rightarrow w = c_1 \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}$$

$$u(x) = \int w(x) dx \Rightarrow u = c_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2$$

- Escogiendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ convenientemente, se puede volver utilizar la igualdad $y(x) = u(x)y_1(x)$ para poder obtener una expresión para la segunda solución:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$

- Una vez llegado a la solución, se puede comprobar que la solución satisface la ecuación diferencial original y que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

- Para resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, se utiliza una solución exponencial de la forma $y = e^{mx}$ y se utiliza el concepto de ecuación auxiliar

- Suponiendo una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de primer orden, se puede deducir que $y = e^{mx}$ permitirá solucionar la ecuación para un valor de m concreto

- Tomando como ejemplo una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden, se puede ver que la derivada de la solución será un múltiplo de la misma solución

$$ay' + by = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b}{a}y \Rightarrow y' = ky \text{ for } k = -\frac{b}{a}$$

- De este modo, se puede ver que la única función elemental que cumple esa propiedad será e^{mx} , y que esta es una solución para

unos valores de m concretos si se resuelve una ecuación auxiliar (dado que $e^{mx} \neq 0$ para cualquier valor de x)

$$y = e^{mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = me^{mx}$$

$$\Rightarrow ame^{mx} + be^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx}(am + b) = 0$$

$$\Rightarrow am + b = 0 \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

- Tomando como ejemplo una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo grado, la solución general en un intervalo I se encuentra a partir de encontrar los valores de m que satisfacen la ecuación auxiliar, por lo que se plantean diferentes casos

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \Rightarrow a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$$

$$\Rightarrow e^{mx}(a_2 m^2 + a_1 m + a_0) = 0 \Rightarrow a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

- En el primer caso, existen dos raíces reales distintas para la ecuación auxiliar (m_1 y m_2), de modo que hay dos soluciones $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$ pueden formar un conjunto fundamental (soluciones linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$) y la solución general será la siguiente:

$$a_1^2 - 4a_2 a_0 > 0 \Rightarrow y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

- En el segundo caso, las raíces de la ecuación auxiliar son repetidas ($m_1 = m_2$), de modo que solo hay una solución $y_1 = e^{m_1 x}$. Utilizando una reducción de orden, una segunda solución de la ecuación es $y_2 = x e^{m_1 x}$, y la solución general será la siguiente:

$$a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0 \Rightarrow y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}}{y_1^2(x)} dx = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = x e^{m_1 x}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

- En el tercer caso, las raíces son complejas, de modo que las soluciones son $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ y $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$. No obstante, como se prefiere trabajar con soluciones reales, se utiliza la fórmula de Euler y un corolario del principio de superposición:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 \Rightarrow m_1, m_2 \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_1 - C_2)i \sin \beta x]$$

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

- Las ecuaciones diferenciales $y'' + k^2 y = 0$ y $y'' - k^2 y = 0$ donde $k \in \mathbb{R}$ son importantes en matemática aplicada

- Para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$ la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tiene raíces imaginarias $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. Con $\alpha = 0$ y $\beta = k$ en la ecuación general del caso de raíces complejas, la solución general de esta ecuación es la siguiente:

$$m^2 + k^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm \sqrt{-4k^2}}{2} = \pm ki$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

- Para la ecuación $y'' - k^2 y = 0$ la ecuación auxiliar $m^2 - k^2 = 0$ tiene raíces reales $m_1 = k$ y $m_2 = -k$. Por lo tanto, la solución general de esta ecuación es la siguiente:

$$m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm \sqrt{4k^2}}{2} = \pm k \Rightarrow y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

- Si se escoge $c_1 = c_2 = 1/2$ y $c_1 = 1/2, c_2 = -1/2$ en esta última solución general, entonces se pueden obtener una forma alternativa de la solución general que usa $\sinh(kx)$ y $\cosh(kx)$ (que son linealmente independientes para cualquier intervalo):

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} (e^{kx} + e^{-kx}) = \cosh(kx)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} (e^{kx} - e^{-kx}) = \sinh(kx)$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)$$

- Se puede generalizar la solución general para ecuaciones de mayor grado estableciendo analogías

- Si las n raíces son reales y distintas, entonces la solución general será la siguiente:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

- Si m_1 es una raíz con multiplicidad k (hay k raíces iguales) de una ecuación auxiliar de grado n , entonces la solución general contendrá la combinación lineal siguiente:

$$e^{m_1 x}, x e^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{m_1 x} \quad (\text{indep. solutions})$$

$$\Rightarrow c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}$$

- Hacer un análogo para el tercer caso es difícil, de modo que solo se tiene que tener en cuenta que, como las constantes son reales, las raíces concretas de la ecuación auxiliar siempre aparecerán en pares conjugados, por lo que no puede haber un número impar de soluciones complejas (las otras tienen que ser necesariamente reales)
- En general, si $m_1 = \alpha + \beta i$ para $\beta > 0$ es una raíz compleja de multiplicidad k de una ecuación auxiliar con coeficientes reales, entonces su conjugado $m_2 = \alpha - \beta i$ también es una raíz de multiplicidad k . A partir de las $2k$ soluciones complejas que se plantearía, se puede concluir que la solución general debe tener una combinación lineal de las $2k$ soluciones reales linealmente independientes que se obtienen aplicando la fórmula de Euler:

$$\begin{cases} e^{(\alpha+\beta i)x}, x e^{(\alpha+\beta i)x}, x^2 e^{(\alpha+\beta i)x}, \dots, x^{k-1} e^{(\alpha+\beta i)x} \\ e^{(\alpha-\beta i)x}, x e^{(\alpha-\beta i)x}, x^2 e^{(\alpha-\beta i)x}, \dots, x^{k-1} e^{(\alpha-\beta i)x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}$$

- Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea de enésimo orden, es necesario encontrar la función complementaria y_c y encontrar cualquier solución particular y_p de la ecuación no homogénea. Para poder encontrar soluciones particulares de una ecuación homogénea, se suele utilizar el método de coeficientes indeterminados
 - El método de coeficientes indeterminados consiste en hacer una conjetura, motivada por el tipo de funciones que conforman la función $g(x)$ sobre la forma de la solución particular y_p
 - Este método está limitado a ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de enésimo orden cuyos coeficientes son

constantes y cuya función $g(x)$ es una función de un tipo concreto

- La función $g(x)$ tiene que ser combinación lineal de funciones constantes, polinómicas, exponenciales $e^{\alpha x}$, seno o coseno $\sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$, o una combinación lineal finita de estas funciones

$$k, P(x), P(x)e^{\alpha x}, P(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ or } P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\text{where } P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ and } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Estos tipos de función tiene una propiedad compartida: las derivadas de cada función de estos tipos son sumas y productos de funciones de estos mismos tipos. Como la ecuación no homogénea indica que $g(x)$ es igual a la combinación lineal de derivadas $a_n y_p^{(n)} + \dots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ (y_p sustituye y porque es una forma particular que también satisface la ecuación), es razonable pensar que y_p tiene una forma idéntica a $g(x)$

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

$$\Rightarrow a_n y_p^{(n)} + \dots + a_1 y_p' + a_0 y_p = g(x)$$

- Otras formas de $g(x)$ no son apropiadas porque la diferenciación continuada de estas funciones resulta en un número infinito de funciones, mientras que la de los tipos de funciones mencionadas anteriormente resultan en un número finito
- Para poder solucionar ecuaciones no homogéneas por este método, se plantean dos casos dependiendo en si la solución particular duplica alguno de sus términos en la función complementaria (si y_p es una selección concreta de constantes para y_c)
- En el primer caso, ninguna de las funciones en la solución particular asumida es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada (de la solución complementaria). Por lo tanto, se iguala $g(x)$ a la forma de la solución particular y_p asumida y, a través de un sistema de ecuaciones, se obtienen los coeficientes de la solución particular

$g(x)$	Form of y_p
1. 1 (any constant)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\sin 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. $x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \sin 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$
11. $5x^2 \sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \sin 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \sin 4x$

- Si $g(x)$ consiste en una suma o multiplicación de m términos de los mostrados en la tabla anterior, entonces la forma asumida para y_p será la suma de las formas genéricas de cada uno de estos términos. Por lo tanto, la forma de y_p es una combinación lineal de todas las funciones linealmente independientes que se generen por diferenciaciones repetidas de $g(x)$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$$

- En el segundo caso, una función en la solución particular asumida también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. En este caso, no se puede utilizar un enfoque igual al del primer caso debido a que, si la forma funcional también aparece en la solución complementaria, entonces se llegaría a una contradicción debido a que esta hace que la ecuación diferencial sea nula (hay funciones que no pueden ser nulas para ningún punto de su dominio)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 e^{b_1 x} \Rightarrow b_0 e^{b_1 x} \neq 0 \text{ for } b_0 > 0$$

- Asumiendo que $g(x)$ consiste de m términos como los mostrados en la tabla anterior y que la solución particular tiene la forma $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$ usual, cualquier y_{p_i} que contenga términos que duplica términos en y_c , entonces esa y_{p_i} debe multiplicarse por x^n , donde n es el menor número entero positivo que elimina la duplicación
- Anteriormente se ha visto cómo se pueden expresar las ecuaciones diferenciales en términos del operador diferencial y cómo se podía construir el operador diferencial lineal de enésimo orden L . A partir de esto, se puede desarrollar una forma de encontrar la forma de y_p automáticamente a través de aniquilar $g(x)$ con un operador lineal adecuado
 - Cuando los coeficientes a_i para $i = 0, 1, \dots, n$ son constantes reales, un operador diferencial lineal se puede factorizar cuando el polinomio característico $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0$ factorice

- Por lo tanto, si r_1 es una raíz o cero de la ecuación auxiliar $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0$, entonces $L = (D - r_1)P(D)$, donde la expresión polinómica $P(D)$ es un operador diferencial lineal de orden n

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

$$\Rightarrow a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow L(y) = a_n D^n y + \dots + a_1 D y + a_0 y = (D - r_1)P(D)y = 0$$

- Esto ilustra una propiedad general: los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes conmutan
- Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f lo suficientemente diferenciable tal que $L(f(x)) = 0$, entonces se dice que L es un aniquilador de esta función

- El operador diferencial D^n aniquila las funciones polinómicas del tipo x^{n-1} para $n = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, una consecuencia inmediata de este es que se puede aniquilar cualquier combinación lineal al encontrar un operador que aniquile la potencia más alta de x (que será n para un polinomio de orden $n - 1$)

$$D^n \text{ anihilates } 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

- Las funciones que se aniquilan por un operador lineal diferencial de enésimo orden L son simplemente aquellas funciones que se pueden obtener de la solución general de las ecuaciones homogéneas $L(y) = 0$. Por lo tanto, el operador diferencial $(D - \alpha)^n$ aniquila cada una de las funciones del tipo $x^{n-1}e^{\alpha x}$ para $n = 1, 2, \dots$ y eso hace que cualquier combinación lineal de estas funciones se pueda aniquilar

$$(D - \alpha)^n \text{ anihilates } e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}$$

- Para ver esto, se tiene que ver que la ecuación auxiliar de la ecuación diferencial $(D - \alpha)^n y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Debido a que α es una raíz de multiplicidad n , la solución general sería la siguiente:

$$y = c_0 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x} + \dots + c_{n-1} x^{n-1} e^{\alpha x}$$

- Cuando α y $\beta > 0$ son números reales, la fórmula cuadrática revela que $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene raíces

complejas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, ambas con multiplicidad n . Por lo tanto, el operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ aniquila cada una de las funciones del tipo $x^{n-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $x^{n-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ para $n = 1, 2, \dots$ y eso hace que cualquier combinación lineal de estas funciones se pueda aniquilar

$$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n \text{ anihilates:}$$

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

- Los operadores diferenciales lineales que aniquilan una función no son únicos, sino que cualquier operador diferencial que tenga como factor otro operador que aniquile la función deseada también lo hará. Por lo tanto, se busca el aniquilador diferencial para una función $y = f(x)$ con el menor orden posible
- Uno normalmente está interesado en aniquilar la suma de dos o más funciones del tipo visto hasta ahora
 - Si L es un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces L aniquilará la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, consecuencia del teorema sobre la linealidad del operador lineal diferencial
 - Suponiendo que L_1 y L_2 son dos operadores lineales diferenciales con coeficientes constantes tales que $L_1(y_1) = 0$ y $L_2(y_2) = 0$ pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$, entonces el producto de los operadores lineales diferenciales aniquila la suma $c_1 y_1 + c_2 y_2$ debido a la linealidad de los operadores y a que $L_1 L_2 = L_2 L_1$

$$L_1 L_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L_1 L_2 (y_1) + c_2 L_1 L_2 (y_2) =$$

$$= c_1 L_2 L_1 (y_1) + c_2 L_1 L_2 (y_2) = 0 + 0 = 0$$

- Toda esta discusión lleva a poder usar el método de coeficientes indeterminados con tal de solucionar ecuaciones diferenciales lineales con el enfoque del aniquilador
 - Se supone que $L(y) = g(x)$ es una ecuación lineal diferencial con coeficientes constantes y que el insumo $g(x)$ consiste de sumas y productos finitos del tipo de funciones vistas anteriormente (para las funciones $k, x^m, x^m e^{\alpha x}, x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, donde $m \in \mathbb{N}^+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Ahora se sabe que $g(x)$ se puede aniquilar a través de un operador lineal diferencial

L_1 de mínimo orden, consistiendo en un producto de operadores D^n , $(D - \alpha)^n$ y $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$

- Aplicando L_1 a los dos lados de la ecuación, se obtiene que $L_1 L(y) = L_1(g(x)) = 0$. De este modo, resolviendo una ecuación diferencial homogénea de mayor orden $L_1 L(y) = 0$ puede hacer que se descubra la forma de una solución particular y_p para la ecuación diferencial no homogénea original $L(y) = g(x)$
- Una vez hecho esto, se sustituye esta forma asumida en $L(y) = g(x)$ para encontrar una solución particular explícita. Este procedimiento para determinar y_p se conoce como método de coeficientes indeterminados
- Hay que recordar que la solución a una ecuación diferencial lineal no homogénea $L(y) = g(x)$ es $y = y_c + y_p$, y la solución general de esta ecuación se define en el intervalo $(-\infty, \infty)$
- Para poder resolver una ecuación diferencial a partir del enfoque del aniquilador para el método de coeficientes indeterminados
 - Primero se tiene que encontrar una solución complementaria y_c para la ecuación $L(y) = 0$
 - Segundo, se opera en ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ con el operador diferencial L_1 que aniquila la función $g(x)$
 - Tercero, se encuentra la solución general de la ecuación diferencial de mayor orden no homogénea $L_1 L(y) = 0$
 - Cuarto, se elimina de la solución en el tercer paso todos aquellos términos duplicados en la solución complementaria y_c , se forma una combinación lineal de y_p de los términos que queda. Esto forma una solución particular $L(y) = g(x)$
 - Quinto, se sustituye y_p que se encuentra en el paso cuatro en $L(y) = g(x)$ y se mapea el coeficiente de las varias funciones en cada lado de la igualdad, resolviendo el sistema de ecuaciones para los coeficientes desconocidos en y_p
 - Con la solución particular encontrada en el paso cinco, se forma la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial
- El método de coeficientes tiene dos debilidades inherentes que limitan su aplicación a un rango más grande de ecuaciones lineales: la ecuación diferencial

debe tener coeficientes constantes y la función de insumo debe ser de un tipo determinado. El método de variación de parámetros es un método desarrollado para determinar una solución particular y_p de una ecuación no homogénea sin estas restricciones

- La solución general de una ecuación diferencial de primer orden se puede encontrar a través de transformar la ecuación a su forma estándar y asumir que $P(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo I común

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \Rightarrow y' + P(x)y = g(x)$$

- Usando el método factor integrador, la solución general en el intervalo I es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$y = c_1 e^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx$$

- Esta solución tiene la misma forma que la dada en un teorema visto anteriormente, $y = y_c + y_p$. En este caso, $y_c = c_1 e^{-\int P(x) dx}$ es una solución asociada con la ecuación homogénea $y' + P(x)y = 0$ y el resto de la solución será la solución particular y_p de la ecuación no homogénea original
- Esta solución general se puede derivar de manera alternativa a través de un método conocido como variación de parámetros

- Suponiendo que y_1 es una solución conocida de la ecuación homogénea vista anteriormente, la cual se puede demostrar $y_1 = e^{-\int P(x) dx}$ es una solución $y_1' + P(x)y_1 = 0$ y debido a que la ecuación es lineal, $c_1 y_1(x)$ es una solución general

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-\int P(x) dx} \Rightarrow y_c = c_1 y_1$$

- La variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la ecuación anterior de la forma $y_p = u_1(x)y_1(x)$ (reemplazando la constante c_1 por $u_1(x)$). Sustituyendo $y_p = u_1 y_1$ en la ecuación y usando la regla del producto da el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dx}(u_1 y_1) + P(x)u_1 y_1 = f(x)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow u_1 \frac{dy_1}{dx} + \frac{du_1}{dx} y_1 + P(x)u_1 y_1 = f(x) \\ &\Rightarrow u_1 \left(\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 \right) + \frac{du_1}{dx} y_1 = f(x) \\ &\Rightarrow \frac{du_1}{dx} y_1 = f(x) \quad \text{as} \quad \frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0 \end{aligned}$$

- Ahora se tiene una ecuación diferencial de primer orden separable, de modo que se puede obtener la siguiente solución que es idéntica a la obtenida anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(x)}{dx} y_1(x) &= f(x) \Rightarrow du_1(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)} dx \\ \Rightarrow \int du_1 &= \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx \\ \Rightarrow y_p(x) &= y_1(x) \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx \end{aligned}$$

- La variación de parámetros tiene una ventaja sobre el método de coeficientes indeterminados, y es que siempre va a dar una solución particular y_p dada una ecuación homogénea asociada porque no se limita a una función $f(x)$ de un tipo
- Considerando ahora una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden y pasándola a forma estándar (con las suposiciones de continuidad en un intervalo común I), se puede extender el método anterior

$$\begin{aligned} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= g(x) \\ \Rightarrow y'' + P(x)y' + Q(x)y &= g(x) \end{aligned}$$

- En este caso, la solución complementaria es $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, dado que esta es la solución general asociada a la ecuación homogénea cuando los coeficientes son constantes. Análoga a la discusión anterior, se puede plantear una pregunta sobre si una solución particular puede ser de la forma previa $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde se sustituyen las constantes por funciones
- Para responder a esta pregunta, se aplica la regla de la cadena y se sustituye la solución en la ecuación:

$$\begin{cases} y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\ y_p'' = u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' + u_2 y_2'' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_p'' + P y_p' + Q y_p &= \\ &= u_1(y_1'' + P y_1' + Q y_1) + u_1(y_2'' + P y_2' + Q y_2) + \\ &\quad + y_1 u_1'' + 2u_1' y_1' + 2u_2' y_2' + y_2 u_2'' + P(y_1 u_1' + y_2 u_2') = \\ &= \frac{d}{dx}(y_1 u_1') + \frac{d}{dx}(y_2 u_2') + P(y_1 u_1' + y_2 u_2') + y_1' u_1' + y_2' u_2' = \\ &= \frac{d}{dx}(y_1 u_1' + y_2 u_2') + P(y_1 u_1' + y_2 u_2') + y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{aligned}$$

- Debido a que se necesita determinar dos funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, es razonable que se necesitan dos ecuaciones. Estas se pueden obtener realizando la suposición de que $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$, dado que de esta manera se tendría esta ecuación y $y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$ porque se cancelarían los primeros dos términos
- Utilizando la regla de Cramer, la solución del sistema que se plantea se puede expresar en términos de los siguientes determinantes:

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \\ u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W} \end{cases} \text{ where}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

- El determinante W se puede identificar como el wronskiano de y_1 y y_2 y por la independencia lineal entre y_1 y y_2 en I , se sabe que $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ para toda $x \in I$. Finalmente, se integran $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ para obtener las funciones primitivas y así obtener la solución particular $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, permitiendo obtener la solución general $y = y_c + y_p$
- Cuando se calculan las integrales indefinidas de u_1' y u_2' , no se necesita incluir la constante de integración debido al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + (u_1 + a_1) y_1 + (u_2 + b_1) y_2 = \\ &= (c_1 + a_1) y_1 + (c_2 + b_1) y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 = \end{aligned}$$

$$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$$

- El método que se ha mostrado se puede generalizar para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de enésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$$\Rightarrow y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x)$$

- Si $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ es la función complementaria para la ecuación en forma estándar, entonces una solución particular tiene la siguiente forma donde u'_k para $k = 1, 2, \dots, n$ se determina por las n ecuaciones:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$$

$$\begin{cases} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_n u'_n = 0 \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \dots + y'_n u'_n = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} u'_1 + y_2^{(n-1)} u'_2 + \dots + y_n^{(n-1)} u'_n = f(x) \end{cases}$$

- Las primeras $n - 1$ ecuaciones en este sistema, como antes para $y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0$, son suposiciones que se hacen para simplificar la ecuación resultante $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$ se sustituye en la ecuación de forma estándar. En este caso, la regla de Cramer da el siguiente resultado, donde W es el wronskiano de y_1, y_2, \dots, y_n y W_k es el determinante obtenido de reemplazar la k columna del wronskiano por la columna consistiendo del lado derecho de la ecuación (con $f(x)$)

$$u'_k = \frac{W_k}{W} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, n$$

- Las primeras $n - 1$ ecuaciones en este sistema, como antes para $y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0$, son suposiciones que se hacen para simplificar la ecuación resultante $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$ se sustituye en la ecuación de forma estándar. En este caso, la regla de Cramer da el siguiente resultado, donde W es el wronskiano de y_1, y_2, \dots, y_n y W_k es el determinante obtenido de reemplazar la k columna del wronskiano por la columna consistiendo del lado derecho de la ecuación (con $f(x)$)
- La facilidad con la que se han encontrado soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales de mayor orden con coeficientes constantes no se generaliza a

ecuaciones con coeficientes variables. No obstante, una excepción a esta regla es un tipo de ecuación diferencial llamada de Cauchy-Euler

- Una ecuación diferencial lineal de la siguiente forma, donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 son constantes, se conoce como ecuación de Cauchy-Euler

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

- La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n-1, \dots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de diferenciación $d^k y/dx^k$
- Lo mejor es comenzar discutiendo las formas de las soluciones generales para ecuaciones homogéneas de segundo orden, donde la solución para ecuaciones de órdenes mayores es análoga
- Como los coeficientes en $x = 0$ son nulos, entonces se necesita asumir que las soluciones se definen en el intervalo $(0, \infty)$ para que se garanticen los resultados fundamentales del teorema de existencia de una solución única
- Si se intenta una solución de la forma $y = x^m$ (donde m se quiere determinar), igual que cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuando se sustituye x^m , cada término se vuelve un polinomio de m veces x^m

$$\begin{aligned} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= a_k x^k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^{m-k} = \\ &= a_k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^m \end{aligned}$$

- Entonces $y = x^m$ es una solución a la ecuación diferencial cuando m es la solución a la ecuación auxiliar de arriba. Para el caso de una ecuación de segundo orden, se obtiene la siguiente ecuación:

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

- Cuando se quiere resolver una ecuación no homogénea con coeficientes variables, no es posible generalizar el método de coeficientes indeterminados comúnmente. Por lo tanto, se debe usar el método de variación de parámetros para solucionar estas ecuaciones una vez se ha encontrado la solución complementaria para la ecuación homogénea asociada

- Existen tres casos a considerar dependiendo de las raíces: el caso para raíces reales distintas, para raíces reales repetidas o para raíces complejas

- Siendo m_1 y m_2 las raíces reales de $am^2 + (b-a)m + c = 0$ tal que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, haciendo que la solución general sea la siguiente:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

- Siendo $m_1 = m_2$, entonces $y = x^{m_1}$ donde $m_1 = -(b-a)/2a$. A partir de ello, se puede construir una segunda solución y_2 con la fórmula obtenida para la reducción de orden y obtener una solución general:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \text{ s.t. } P(x) = \frac{b}{ax} \text{ \& } Q(x) = \frac{c}{ax^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = x^{m_1} \int \frac{e^{-(\frac{b}{a}) \ln x}}{x^{2m_1}} dx = x^{m_1} \int \frac{x^{-(\frac{b}{a})}}{x^{2m_1}} dx =$$

$$= x^{m_1} \int x^{-(\frac{b}{a})-2m_1} dx = x^{m_1} \int x^{-\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}} dx =$$

$$= x^{m_1} \int \frac{1}{x} dx = x^{m_1} \ln(x)$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln(x)$$

- Para ecuaciones diferenciales de grados mayores, si m_1 tiene multiplicidad k , entonces se puede demostrar que $x^{m_1}, x^{m_1} \ln(x), \dots, x^{m_1} [\ln(x)]^{k-1}$ son k soluciones linealmente independientes. Correspondientemente, la solución general será una combinación lineal de estas k soluciones

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln(x) + \dots + c_k x^{m_1} [\ln(x)]^{k-1}$$

- Si las raíces de la ecuación de segundo orden son el par conjugado $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces la solución es $y = C_1 x^{\alpha+\beta i} + C_2 x^{\alpha-\beta i}$. No obstante, como se quiere expresar esto en términos reales, se puede utilizar la ecuación de Euler y unas sustituciones para poder encontrar soluciones linealmente independientes que permitan obtener una expresión para la solución general:

$$x^{i\beta} = e^{i\beta \ln(x)} \Rightarrow \begin{cases} x^{i\beta} = \cos[\beta \ln(x)] + i \sin[\beta \ln(x)] \\ x^{-i\beta} = \cos[\beta \ln(x)] - i \sin[\beta \ln(x)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = C_1 x^\alpha (\cos[\beta \ln(x)] + i \sin[\beta \ln(x)])$$

$$+ C_2 x^\alpha (\cos[\beta \ln(x)] - i \sin[\beta \ln(x)])$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^\alpha \cos[\beta \ln(x)] + c_2 \sin[\beta \ln(x)] \text{ to avoid duplic.}$$

- Las similitudes entre las formas de las soluciones de ecuaciones de Cauchy-Euler con las de ecuaciones con coeficientes constantes no son coincidencia, sino que se deben a la identidad $e^{\ln(x)} = x$ para $x > 0$
 - Cualquier ecuación de Cauchy-Euler se puede reescribir como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes a través de la sustitución $x = e^t$. La idea es resolver esta nueva ecuación diferencial en términos de t , usando métodos aprendidos anteriormente, y una vez se sabe la solución general, sustituir $t = \ln(x)$
 - Este método requiere del uso de la regla de la cadena de la diferenciación con tal de poder aplicar la sustitución de manera correcta (ya que ahora y depende de t y t depende de x)
- Hasta ahora se ha asumido que las soluciones estaban definidas para $x > 0$, pero una manera de resolver una ecuación diferencial para $x < 0$ es a través de aplicar la sustitución $t = -x$
 - Para poder aplicar la sustitución, se tiene que usar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dx} \quad \& \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

- Una ecuación diferencial de la siguiente forma también se considera una ecuación de Cauchy-Euler, dado que si $x_0 = 0$ se reduce a la forma anteriormente vista:

$$a(x - x_0)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b(x - x_0) \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

- Uno puede resolver esta ecuación igual que con la ecuación vista, buscando soluciones para $y = (x - x_0)^m$ y usando las siguientes identidades:

$$\frac{dy}{dx} = m(x - x_0)^{m-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(x - x_0)^{m-2}$$

- Alternativamente, se puede reducir esta ecuación a la forma familiar a través de aplicar una sustitución $t = x - x_0$, resolviendo la ecuación reducida y sustituyendo otra vez
- Ahondando más en los problemas de valor inicial y en los problemas de valores de frontera, una función matemática muy usada en la resolución de ecuaciones lineales no homogéneas es la función de Green
 - Se verá que mientras la discusión se desarrolla, la solución $y(x)$ del problema de valor inicial de segundo orden siguiente se puede expresar como la superposición de dos soluciones

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \text{ with } y(x_0) = y_0 \text{ \& } y'(x_0) = y_1$$

- La superposición es $y = y_h + y_p$, donde y_h es la solución de una ecuación diferencial asociada homogénea con dos condiciones iniciales no homogéneas e y_p es la solución de una ecuación no homogénea con condiciones iniciales homogéneas

y_h for IVP:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \text{ with } y(x_0) = y_0 \text{ \& } y'(x_0) = y_1$$

y_p for IVP:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \text{ with } y(x_0) = 0 \text{ \& } y'(x_0) = 0$$

- En el caso en donde los coeficientes P y Q fueran constantes para el primer IVP, la solución del IVP no es problemática porque se usarían los métodos vistos para encontrar una solución general. Debido a las condiciones iniciales nulas del segundo IVP, este problema puede describir un sistema físico que está inicialmente en reposo y por eso se suele llamar solución de reposo o *rest solution*
- Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo I de la ecuación homogénea asociada a $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$, entonces una solución particular de la ecuación no homogénea en el intervalo I se puede encontrar por variación de parámetros
 - La forma de esta solución será $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, con coeficientes variables definidos de la siguiente manera:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W} \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W}$$

- La independencia lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en el intervalo I garantiza que el wronskiano $W = W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en I . Si x y x_0 son números en I , entonces integrando las derivadas en el intervalo $[x, x_0]$ y sustituyendo los resultados se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt + \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{where } W(t) = W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

- De las propiedades de las integrales definidas, las dos integrales se pueden escribir de la siguiente manera para obtener una solución particular, en donde la función $G(x, t)$ se conoce como la función de Green:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t)f(t) dt$$

$$\text{where } G(x, t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_c(x) + y_p(x) = y_c(x) + \int_{x_0}^x G(x, t)f(t) dt$$

- Como se puede observar, la función de Green depende solo de las soluciones fundamentales $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial asociada y no de su función $f(x)$. Por lo tanto, todas las ecuaciones lineales de segundo grado de este tipo tienen la misma función de Green (aunque tengan diferente $f(x)$), y un título alternativo para esta función es la función de Green del operador lineal de segundo orden $L = D^2 + P(x)D + Q(x)$
- Considerando el IVP especial en donde $y(x_0) = 0$ y $y'(x_0) = 0$ (condiciones iniciales homogéneas), una manera de solucionar el problema es aplicar una de las técnicas vistas anteriormente y aplicar las condiciones iniciales. No obstante, no hay necesidad de hacer eso porque la función y_p siguiente es la solución de este problema de valor inicial

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt$$

- Por construcción, se sabe que $y_p(x)$ satisface la ecuación diferencial no homogénea, y como $\int_a^a dt = 0$, entonces se obtiene el siguiente resultado:

$$y_p(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} G(x, t) f(t) dt = 0$$

- Finalmente, para demostrar que $y_p'(x_0) = 0$, se utiliza la fórmula integral de Leibniz para calcular la derivada de una integral:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, t) dt &= \\ &= F(x, v(x))v'(x) - F(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{d}{dx} F(x, t) dt \\ \Rightarrow y_p'(x) &= G(x, x)f(x) + \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)}{W(t)} dt = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)}{W(t)} dt \\ \Rightarrow y_p'(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0} \frac{y_1(t)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

- Si $y_h(x)$ es la solución al IVP especial con condiciones iniciales no homogéneas y $y_p(x)$ es la solución al IVP especial con condiciones inicial homogéneas en el intervalo I , entonces la siguiente fórmula es la solución al IVP original:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- Debido a que $y_h(x)$ es una combinación lineal de soluciones fundamentales, entonces por el teorema de la solución general de ecuaciones no homogéneas, $y = y_h + y_p$ debe ser una solución de la ecuación diferencial no homogénea
- Además, debido a que y_h satisface las condiciones iniciales en su respectivo IVP especial y y_p las suyas, entonces se obtiene el siguiente resultado:

$$y(x_0) = y_h(x_0) + y_p(x_0) = y_0 + 0 = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_h(x_0) + y'_p(x_0) = y_1 + 0 = y_1$$

- Teniendo en cuenta la ausencia de $f(x)$ en el IVP especial con condiciones no homogéneas y su presencia en el IVP especial con condiciones homogéneas, se puede ver como el sistema físico que describe el IVP original se puede separar en dos respuestas diferentes
 - En este caso, y_h es la respuesta del sistema debido a sus condiciones iniciales y y_p es la respuesta del sistema debido a la función f
 - La importancia de este último teorema es que se puede entender de manera más sencilla como cambia el problema a través de descomponer la solución en la solución de dos IVP diferentes en donde uno depende de las condiciones iniciales y el otro de $f(x)$
 - Esto, a su vez, permite lidiar con funciones $f(x)$ que están definidas a trozos
- A diferencia de con un IVP de segundo orden, un BVP de segundo orden involucra condiciones en $y(x)$ y $y'(x)$ que están especificadas en dos puntos diferentes $x = a$ y $x = b$

- Las posibles combinaciones de condiciones de frontera homogéneas posibles son solo casos especiales de condiciones de frontera homogéneas más generales, donde A_1, A_2, B_1, B_2 son constantes:

$$\begin{cases} A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

- El objetivo es encontrar una solución integral $y_p(x)$ análoga a la encontrada anteriormente para problemas de valor de frontera no homogéneos de la siguiente:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Además de las suposiciones usuales sobre la continuidad de $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se asume un problema homogéneo que solo pose la solución trivial $y = 0$. Esta suposición es suficiente para garantizar la solución única del problema original y que se da por la integral con la función de Green vista anteriormente

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$\begin{cases} A_1y(a) + B_1y'(a) = 0 \\ A_2y(b) + B_2y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Suponiendo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada en el BVP linealmente independientes en $[a, b]$ y que $x \in [a, b]$, ahora se puede obtener la función de Green de la siguiente manera:

- Esta vez, las funciones u_1 y u_2 se integran en el intervalo $[b, x]$ y $[a, x]$ respectivamente, con tal de poder definir una función de Green sobre el intervalo $[a, b]$

$$u_1(x) = - \int_b^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt \quad u_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt$$

- A partir de esto, se puede hacer el mismo procedimiento que se hizo anteriormente para poder obtener una función de Green que esté definida por partes dependiendo de t :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt = \\ &= \int_x^b \frac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt + \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)} f(t) dt \\ &\Rightarrow y_p(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{where } G(x, t) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)} & \text{for } a \leq t \leq x \\ \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)} & \text{for } x \leq t \leq b \end{cases}$$

- Esta función de Green se conoce como función de Green para el BVP planteado anteriormente, y se puede demostrar $G(x, t)$ es una función continua de x en el intervalo $[a, b]$
- Siendo $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ en $[a, b]$, y suponiendo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ satisface las condiciones $A_1y(a) + B_1y'(a) = 0$ y $A_2y(b) + B_2y'(b) = 0$, respectivamente, entonces y_p es la solución del BVP planteado

- A partir de la derivada de la solución $y_p(x)$, es posible obtener los siguientes resultados para la derivada:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' =$$

$$= (u_1'y_1 + u_2'y_2) + u_1y_1' + u_2y_2' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

- Como $u_1(b) = 0$ y $u_2(a) = 0$, y se supone que se cumplen las condiciones de valor de frontera, se pueden obtener los siguientes resultados:

$$A_1y(a) + B_1y'(a) =$$

$$= A_1[u_1(a)y_1(a) + u_2(a)y_2(a)] + B_1[u_1(a)y_1'(a) + u_2(a)y_2'(a)]$$

$$= u_1(a)[A_1y_1(a) + B_1y_1'(a)] = 0$$

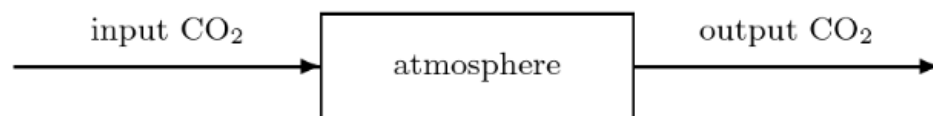
$$A_2y(b) + B_2y'(b) =$$

$$= A_2[u_1(b)y_1(b) + u_2(b)y_2(b)] + B_2[u_1(b)y_1'(b) + u_2(b)y_2'(b)]$$

$$= u_2(b)[A_2y_2(b) + B_2y_2'(b)] = 0$$

Los modelos compartimentales

- El marco de modelos compartimentales es una manera natural y valiosa por la cual formular modelos para procesos que tienen insumos y resultados a lo largo del tiempo
 - Muchos procesos se pueden considerar modelos compartimentales, de modo que el proceso tiene insumos de un compartimento a lo largo del tiempo, el cual da unos resultados concretos



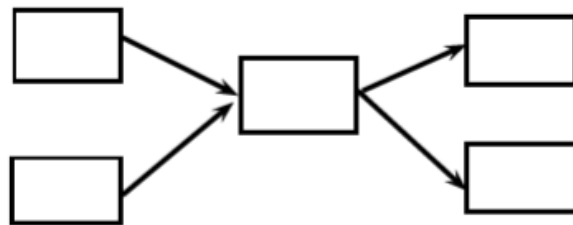
- Una de las herramientas más útiles para el modelaje es el diagrama compartimental
 - Suponiendo que se está modelando una sustancia o algún elemento que cambia con el tiempo, se puede pensar que este elemento ocupa el compartimento, de modo que el cambio del elemento no es más que la diferencia entre la tasa del elemento “que entra” y la “que sale”

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{net rate} \\ \text{of change} \\ \text{of a substance} \end{array} \right\} = \{rate\}_{in} - \{rate\}_{out}$$

- A esta relación se la conoce como la ley del balance, y permite describir varios procesos como el proceso de desintegración o *decay* de elementos radioactivos, la población, la polución en la atmósfera o la asimilación de medicinas en la sangre
- Este marco también permite crear modelos un poco más complejos, en donde hay varios compartimentos interconectados, de modo que se pueden plantear ecuaciones diferenciales que dependan las unas de las otras (o no)
- Los modelos de cascadas lineales son modelos con una serie de compartimentos, donde cada compartimento alimenta al siguiente sin haber ningún bucle



- En otros casos, más de una fuente puede alimentar a un compartimento, el cual a su vez podría también pasar sus resultados a más de un compartimento. A este tipo de arreglo se le conoce como ramificación de cascada lineal



- Usualmente se pueden resolver las ecuaciones usando un enfoque de arriba abajo, de modo que se resuelve la primera ecuación y se utiliza la solución para resolver la segunda, y así. No obstante, hay situaciones en donde se tienen que resolver ecuaciones simultáneamente

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = k_n x_n - k_{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

- Aunque algunos elementos (o sus isotopos) son estables, otros no lo son, y emiten partículas α , β o fotones mientras que se desintegran en isotopos de otros elementos. Estos elementos son los elementos radioactivos, y se puede modelar el proceso de desintegración con ecuaciones diferenciales
 - La desintegración de un núcleo es un evento aleatorio, de modo que para un numero pequeño de núcleos se podrían aplicar funciones de probabilidad. No obstante, cuando se lidia con grandes números de núcleos, se puede ser razonablemente certero de que una proporción de los núcleos se desintegrarán a lo largo del tiempo, de modo que se puede modelar



- Se asume que la cantidad de un elemento presente es lo suficientemente grande como para que se justifique ignorar fluctuaciones aleatorias
- Se asume que el proceso es continuo en el tiempo, una tasa fija de desintegración para un elemento, y que no hay un incremento en masa del cuerpo del material
- El primer momento es determinar una ecuación describiendo el proceso de desintegración, por lo que se comienza con una ecuación en palabras y después poder pasarla a términos matemáticos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rate of change of} \\ \text{radioactive material} \\ \text{at time } t \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \text{rate amount of} \\ \text{radioactive} \\ \text{material} \\ \text{decayed} \end{array} \right\}$$

- Para convertir la ecuación en términos matemáticos, se considera que $N(t)$ es el número de núcleos en el momento t , y si se sabe que el número de núcleos es proporcional al número de núcleos al inicio del periodo de tiempo estudiado, entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

- En este caso, el número de núcleos debería ser un número entero, pero como se usa una ecuación diferencial, entonces $N(t)$ se expresa en gramos (de los cuales se puede después determinar el número de núcleos) para hacer que sea diferenciable

- De manera alternativa, se puede obtener esta ecuación diferencial como un proceso límite que considera el cambio en el número de partículas en un pequeño intervalo t

$$N(t + \Delta t) = N(t) - kN(t)\Delta t \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -kN(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -kN(t)$$

- Dada una muestra de n_0 de un elemento radioactivo en un momento inicial t_0 , uno puede querer predecir la masa de los núcleos en un momento $t > t_0$. Por lo tanto, con una k conocida y una condición inicial $N(t_0) = n_0$, se obtiene el siguiente problema de valor inicial (IVP):

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad N(t_0) = n_0$$

- Es posible solucionar este problema a través del método de separación de variables

$$\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \int \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} dt = -k \int dt \Rightarrow \int \frac{1}{N} dN = -kt$$

$$\Rightarrow \ln(N) = -kt + C \Rightarrow N(t) = e^{-kt+C}$$

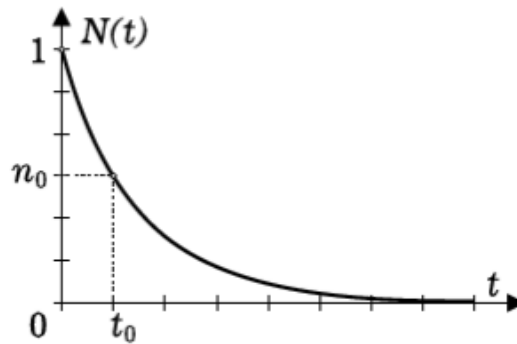
- Usando la condición inicial $N(t_0) = n_0$ se puede obtener el siguiente resultado:

$$n_0 = Ae^{-kt_0} \Rightarrow n_0 = e^{-kt_0+C}$$

$$\Rightarrow C = \ln(n_0) + kt_0 \Rightarrow N(t) = n_0 e^{-k(t-t_0)}$$

- El gráfico de la solución demuestra que el número de núcleos en el límite es nulo, de modo que se desintegran todos en el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_0 e^{-k(t-t_0)} = 0$$



- La media vida o *half-life* τ de los núcleos radioactivos se puede usar para determinar k , donde τ es el momento requerido para que la mitad de los núcleos se desintegren. Este valor se conoce más que la constante k

- Si τ es la media vida, entonces $N(t + \tau) = N(t)/2$ porque solo quedaría la mitad de los núcleos. De este modo, se pueden obtener los siguientes resultados:

$$N(t + \tau) = \frac{N(t)}{2} \Rightarrow \frac{N(t + \tau)}{N(t)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n_0 e^{-k(t+\tau-t_0)}}{n_0 e^{-k(t-t_0)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-k\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{\tau}$$

- En este caso, tanto τ como k son independientes de n_0 y de t_0
- De manera similar a la idea de la vida media, también se puede plantear el tiempo de residencia o *residence time*, que se define como el tiempo medio de que una partícula individual esté en el compartimento
 - Una buena interpretación es que el tiempo de residencia es k^{-1} , donde k es la tasa constante de desintegración. Para poder deducir este resultado, se asume que las partículas dejan el compartimento aleatoriamente y se intenta encontrar la función de probabilidad de densidad para la variable aleatoria T , que representa el momento que cada partícula pasa dentro del compartimento
 - Si se comienza con n_0 partículas, entonces se puede calcular la fracción de partículas restantes en el compartimento en el momento t : como $N(t) = n_0 e^{-kt}$, entonces la fracción es e^{-kt} . Como e^{-kt} es la fracción de partículas que quedan en el compartimento en el momento t , la cantidad $1 - e^{-kt}$ representa la probabilidad de que una partícula haya dejado el compartimento en t

- Esto es la función de probabilidad acumulada para el tiempo de cada partícula en el compartimiento. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

$$F(T) = P(T \leq t) = 1 - e^{-kt} \Rightarrow f(t) = ke^{-kt}$$

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = - \int_0^{\infty} t k e^{-kt} dt = k^{-1}$$

- Modelos de polución
- Modelos de asimilación medicinal en la sangre

Los modelos poblacionales

Los modelos de calor y transporte de masa

- Un tipo de problemas lineales especiales son aquellos que modelan procesos de conducción de calor y transporte de masa. Para formular el problema, se tiene que entender conceptos físicos básicos del transporte del calor, igual que la distinción y la relación entre calor y temperatura
 - El resultado de aplicar calor o energía calorífica a un objeto es elevar su temperatura. Similarmente, cuando un objeto se enfría, su temperatura pierde baja y pierde calor
 - La temperatura representa que tan caliente está un objeto o un cuerpo que se mide en grados Celcius o Kelvin, mientras que el calor es una forma de energía que se mide en Joules
 - Cuanto mayor es la masa del objeto, mayor es el calor que se requiere para hacer subir la temperatura
 - Cuando se formula un modelo matemático que involucra calentar o enfriar, se tiene que tener en cuenta la cantidad de calor fluyendo dentro y fuera del sistema. El flujo de temperatura es un cambio que se observa en la temperatura, y esto se puede hacer usando el calor específico de una sustancia
 - Se asume que el cambio en el calor Q_t es directamente proporcional al cambio en la temperatura u_t y la masa del objeto m . Por lo tanto, la condición se escribe de la siguiente manera, donde γ es una constante de proporcionalidad, conocida como el calor específico del material

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma m \frac{du}{dt} \Leftrightarrow Q_t = \gamma m u_t$$

- Esto, a su vez, quiere decir que la cantidad de calor Q es proporcional a la masa m y a la temperatura u por una constante γ (solo se tiene que integrar con respecto a t). Ambas expresiones se refieren a la misma ley

$$\int \frac{dQ}{dt} dt = \gamma m \int \frac{du}{dt} dt \Leftrightarrow Q = \gamma mu + C$$

- Se ha asumido implícitamente que γ es independiente de la masa del objeto y la temperatura, pero se sabe que los metales absorben más fácilmente el calor que el agua. Por lo tanto, los metales deben tener una constante de proporcionalidad más baja que el agua (para elevar la temperatura un grado, es necesario más calor en el agua que en un metal)

Substance	c	Substance	c
Aluminium	896	Asbestos	841
Copper	383	Brick	840
Stainless steel	461	Glass	800
Wood	2,385	Butter	2,300
Concrete	878	Lamb	3,430
Water (at 20°C)	4,187	Potatoes	3,520

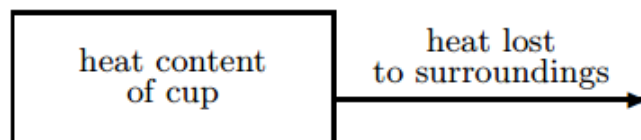
- El calor específico γ realmente no es constante sobre un gran rango de temperaturas. No obstante, si el rango de temperatura no es grande, se pueden obtener predicciones razonables
- Un mecanismo para perder calor de un objeto es intercambiando la energía calorífica con su entorno. Esto ocurre en la superficie A del objeto, y por tanto se espera que la tasa de pérdida de calor Q_t incremente con el área de superficie expuesta del objeto, siendo proporcional a esta área
 - Si la diferencia en temperatura entre la superficie del objeto u y su entorno u_m incrementa, entonces uno esperaría que el calor se perdiera más rápidamente. Por lo tanto, se hace la suposición de que la tasa de flujo de calor es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre la superficie y su entorno inmediato
 - Además, se asume la existencia de un aire que se mueve lentamente en el objeto que se está enfriando (una suave brisa)
 - Bajo estas condiciones, la ley de enfriamiento de Newton se expresa de la siguiente manera, donde K es la constante de proporcionalidad, llamada coeficiente de enfriamiento de Newton o coeficiente de transferencia de calor convectiva:

$$\frac{dQ}{dt} = \pm KA(u - u_m) \Leftrightarrow Q_t = \pm KA(u - u_m)$$

- El signo correcto de la diferencia de temperatura se determina para cada problema en específico dependiendo de la dirección en la que se transfiere el calor y según si la superficie gana o pierde calor. Si A es el área de superficie de un objeto y $u > u_m$, entonces el entorno gana calor y por tanto $Q_t > 0$ y el signo debe ser negativo, mientras que, en caso contrario, $Q_t < 0$ y el signo debe ser positivo
- Como la energía se conserva, entonces la tasa de cambio del calor debe ser equivalente a la tasa de pérdida del calor debido al entorno del objeto, por lo que se puede plantear la siguiente ecuación diferencial lineal de primer grado para la evolución de la temperatura:

$$\left(\begin{array}{c} \text{rate of} \\ \text{change of} \\ \text{heat content} \end{array} \right) \gamma m \frac{du}{dt} = \pm KA(u - u_m) \left(\begin{array}{c} \text{rate of heat} \\ \text{lost to} \\ \text{surroundings} \end{array} \right)$$

- La ecuación diferencial que se plantea permite estudiar la temperatura como una función del tiempo, de modo que es perfecta para problemas de enfriamiento de un cuerpo que está en un entorno (con una temperatura propia)



- Si $u > u_m$, entonces si el objeto se enfría ($u_t < 0$), se tiene que poner el signo negativo para comparar cantidades del mismo signo, mientras que si $u_t > 0$, entonces el signo es positivo. Si $u < u_m$, entonces si el objeto se enfría ($u_t < 0$), se tiene que poner el signo positivo para comparar cantidades del mismo signo, mientras que si $u_t > 0$, entonces el signo es negativo
- Se asume que K es una constante, pero la tasa de calor perdida de la superficie estará afectada por el flujo de aire cercano. A esto a veces se le conoce como *wind-chill effect*

	h
Plate in still air	4.5
Air-flow at 2 m/s over plate	12
Air-flow at 35 m/s over plate	75

- A partir de esta ecuación se puede obtener una solución analítica general, y si se aplican condiciones iniciales, una particular:

$$\frac{du}{dt} = \pm \frac{KA}{\gamma m} (u - u_m) \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \pm h(u - u_m) \text{ where } h = \frac{KA}{\gamma m}$$

$$\frac{du}{dt} = \pm h(u - u_m) \Rightarrow \int \frac{1}{u - u_m} du = \pm \int h dt$$

$$\Rightarrow \ln|u - u_m| = \pm ht + c \Rightarrow u(t) = u_m + e^{\pm ht + c}$$

$$\text{if } u(0) = u_0 \Rightarrow u_0 - u_m = e^c$$

$$\Rightarrow u(t) = (u_0 - u_m)e^{\pm ht} + u_m$$

- Una ley de enfriamiento alternativa es la ley de enfriamiento natural, la cual expresa que la diferencia entre la temperatura del objeto y el entorno elevada a 5/4 es proporcional a la tasa de cambio de temperatura. De este modo, se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{du}{dt} = \pm h(u - u_m)^{5/4} \text{ where } h = \frac{KA}{\gamma m}$$

$$\frac{du}{dt} = \pm h(u - u_m)^{5/4} \Rightarrow \int \frac{1}{(u - u_m)^{5/4}} du = \pm \int h dt$$

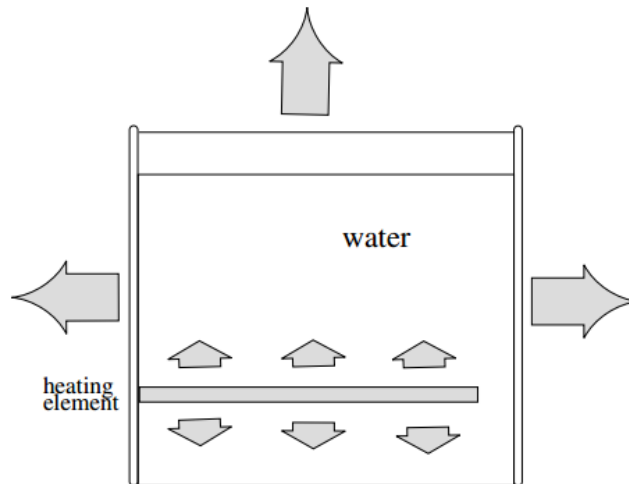
$$\Rightarrow \int x^{-5/4} dx = \pm \int h dt \Rightarrow 4x^{-1/4} = \pm ht + c$$

$$\Rightarrow 4(u - u_m)^{-1/4} = ht + c \Rightarrow u(t) = u_m + \left(\frac{4}{\pm ht + c} \right)^4$$

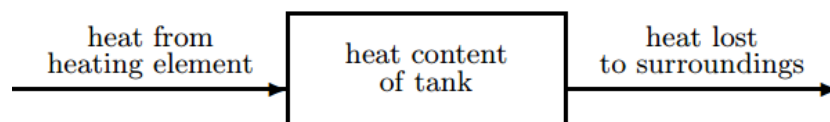
$$\text{if } u(0) = u_0 \Rightarrow c = \frac{4}{(u_0 - u_m)^{-1/4}}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_m + \left(\frac{4(u_0 - u_m)^{-1/4}}{\pm ht(u_0 - u_m)^{-1/4} + 4} \right)^4$$

- Ahora se puede plantear un problema un poco más complejo, en donde el calor se introduce a través de un elemento que transfiere calor al objeto de interés, pero que está rodeado de un entorno que demandará calor (o puede darlo, dependiendo del problema). A este problema se le conoce como el problema del calentador de agua



- Con tal de estudiar el problema específicamente, $u(t)$ será la temperatura del agua en t , u_0 será la temperatura inicial del agua y u_f será la temperatura final, m es la masa del agua en el calentador, q es la tasa de energía proporcionada, A es el área de la superficie por donde el calor puede escapar (la superficie del tanque)
 - Se asume que el tanque hace que la temperatura del agua se mantenga homogénea a través de todo el tanque (si no, la temperatura sería función de la posición también)
 - Se asume que el calor se pierde por la superficie del tanque acorde a la ley del enfriamiento de Newton
 - Finalmente, se asume que las constantes térmicas, tales como el calor específico o el coeficiente de enfriamiento de Newton, son constantes
- El modelo se puede obtener a través de la conservación de energía, de modo que la tasa de cambio del calor del agua en el tanque debe ser igual a la diferencia entre la tasa de calor producida por el elemento de generación de calor y la tasa de calor perdido en la superficie



- En este caso, se vuelven a usar las ecuaciones anteriores, pero se añade una que sería para el elemento generador de calor:

$$\left(\begin{array}{l} \text{rate of heat} \\ \text{produced by} \\ \text{heating elem.} \end{array} \right) = q$$

- Como la tasa de cambio debe ser la diferencia entre tasa de generación de calor y tasa de enfriamiento, la ecuación resultante es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{c} \text{rate of} \\ \text{change of} \\ \text{heat content} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{rate of heat} \\ \text{produced by} \\ \text{heating elem.} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rate of heat} \\ \text{lost to} \\ \text{surroundings} \end{array} \right)$$

$$\gamma m \frac{du}{dt} = q - KA(u - u_m)$$

- La solución analítica a esta ecuación sería la siguiente, tanto en el caso general como para el particular (se dan ambas soluciones):

$$\frac{du}{dt} = \alpha - \beta u \quad \text{where} \quad \alpha = \frac{q + KA u_m}{\gamma m} \quad \& \quad \beta = \frac{KA}{\gamma m}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \beta u = \alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{dt} + \beta u \right) e^{\int_0^t \beta dt} = \alpha e^{\int_0^t \beta dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{dt} + \beta u \right) e^{\beta t} = \alpha e^{\beta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[ue^{\beta t}] = \alpha e^{\beta t} \Rightarrow \int \frac{d}{dt}[ue^{\beta t}] dt = \int \alpha e^{\beta t} dt$$

$$\Rightarrow ue^{-\beta t} = \frac{\alpha}{\beta} \int \beta e^{\beta t} dt \Rightarrow ue^{-\beta t} = \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta t} + c$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{\alpha}{\beta} + ce^{-\beta t}$$

$$\text{if } u(0) = u_0 \Rightarrow \left(u_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = c$$

$$\Rightarrow u(t) = u_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$

- La ecuación diferencial planteada representa el balance entre el calor producido por el elemento generador y el calor perdido por la superficie, lo cual sugiere la existencia de una temperatura de equilibrio. En esta temperatura, $du/dt = 0$, de modo que se puede resolver para u más fácilmente:

$$\frac{du}{dt} = q - KA(u - u_m) \Rightarrow 0 = q - KA(u - u_m)$$

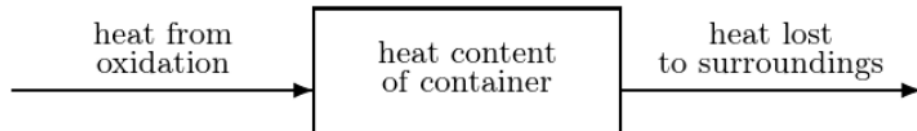
$$\Rightarrow u(t) = u_m + \frac{q}{KA}$$

- Esta última solución resulta ser el límite cuando se aplica la solución vista para cuando se pierde calor (con un signo negativo en $KA(u - u_m)$), de modo que se puede entender este resultado como la temperatura de equilibrio o del estado estable:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{\alpha}{\beta} = u_m + \frac{q}{KA}$$

- Para poder resolver problemas más específicos, primero se necesita tener un conocimiento físico básico de la conducción del calor, por lo que se tiene que repasar el concepto de flujo de calor y la ley de Fourier
- HEAT CONDUCTION THROUGH WALL
- RADIAL HEAT CONDUCTION
- HEAT FINS
- Un problema relacionado con el calor y la energía es el problema de la combustión espontánea, de modo que es necesario repasar su teoría matemática
 - La combustión espontánea puede ocurrir en varias situaciones en donde el calor producido por una reacción química no puede escapar del sistema lo suficientemente rápido. Por lo tanto, el calor puede acumularse y resultar en ignición
 - Aunque esta teoría es compleja, pero se asume el caso más simple, el de un reactor químico agitado donde no hay conducción del calor
 - La combustión espontánea ocurre cuando la temperatura dentro de un cuerpo incrementa a una tasa mayor a la que el calor puede escapar de la superficie. Cuanto más alta sea la temperatura, más calor produce la reacción química (normalmente oxidación), de modo que es importante
 - Los mecanismos importantes son la tasa de calor producido y la tasa de conducción de calor fuera de la fuente de calor. Este proceso se caracteriza por la exotermicidad, que es la cantidad de calor producida por la reacción, y por la tasa de la reacción, que determina la tasa a la que el calor se produce

- El proceso por el cual el calor escapa es típicamente la conducción, y por eso los materiales que rodean el objeto y su habilidad de conducir el calor tienen un efecto sustancial en el sistema
- En este caso, se puede aplicar la ley de equilibrio o de balance con tal de obtener el modelo de la ecuación diferencial



$$\left(\begin{array}{c} \text{rate of} \\ \text{change of} \\ \text{heat content} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{rate heat} \\ \text{generated} \\ \text{by reaction} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rate heat} \\ \text{lost to} \\ \text{surroundings} \end{array} \right)$$

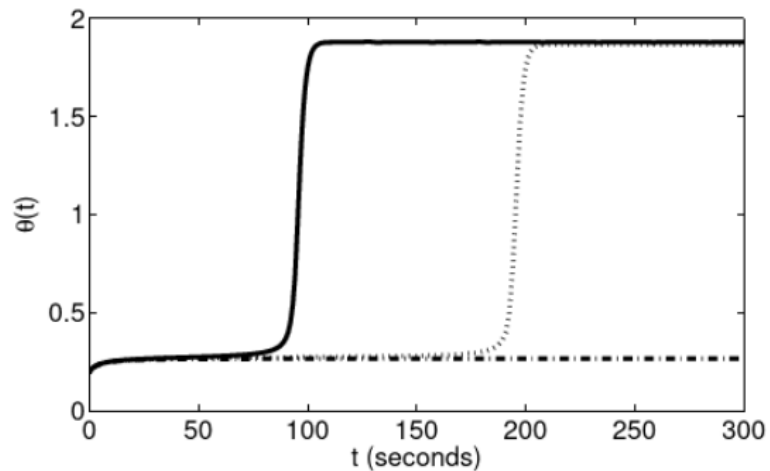
- Se ignora la conducción del calor al asumir una distribución uniforme por todo el material reactivo
- Se asume que la tasa de calor creada sigue la ley de Arrhenius
- El calor se pierde de la superficie del material reactivo acorde a la ley de enfriamiento de Newton
- La tasa de la reacción (asociada con la tasa de la ganancia de calor) se puede expresar a través de una función exponencial $Ae^{-E/Ru}$, donde E es la energía de activación, R es la constante de gas universal, T es la temperatura absoluta (medida en grados Kelvin) y C es el factor pre-exponencial
 - En este caso, T denota la temperatura en grados Kelvin, a diferencia de u que denota grados Celsius. Por lo tanto, ambas variables están relacionadas a través de $T = u + 273.15$
 - La tasa de ganancia de calor (por unidad de volumen) se da por la siguiente fórmula, donde ρ es la densidad y Q es el calor de la reacción:

$$\left(\begin{array}{c} \text{rate} \\ \text{heat generated} \\ \text{by reaction} \\ \text{per unit volume} \end{array} \right) \frac{dQ}{dt} = \rho Q C e^{-E/Ru}$$

- Claramente, la función exponencial crece monótonamente cuando la temperatura incrementa

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C e^{-E/Ru} = C$$

- Existe un intervalo o dominio para el cual un pequeño incremento en el valor de T causa un gran incremento en la tasa de la reacción. Esto se asocia a un incremento sustancial en la producción de calor



- Para poder modelar la ecuación diferencial, también se necesita la tasa de cambio del calor y la tasa de pérdida de calor, tal y como se ha hecho antes en los modelos anteriores
- Se asume que el cambio en el calor Q_t es directamente proporcional al cambio en la temperatura absoluta T_t y la masa del objeto $m = \rho V$, donde ρ es la densidad del elemento y V su volumen. Por lo tanto, la condición se escribe de la siguiente manera, donde γ es una constante de proporcionalidad, conocida como el calor específico del material

$$\left(\begin{array}{c} \text{rate of} \\ \text{heat} \\ \text{loss} \end{array} \right) \frac{dQ}{dt} = \gamma \rho V \frac{dT}{dt}$$

- La tasa de pérdida de calor es proporcional al área de la superficie A del cuerpo del material, del coeficiente de transferencia de calor y a la diferencia entre la diferencia de temperatura. En este caso se asume que $T_m > T$ y, por tanto, no se tiene por qué ajustar el signo a negativo para la pérdida de calor

$$\left(\begin{array}{c} \text{rate of} \\ \text{heat} \\ \text{loss} \end{array} \right) \frac{dQ}{dt} = KA(T - T_m)$$

- Combinando las expresiones para la tasa de generación de calor con la de la tasa de pérdida de calor para obtener la ecuación diferencial siguiente:

$$\gamma \rho V \frac{dT}{dt} = \rho Q C e^{-E/Ru} - KA(T - T_m)$$

- Para poder obtener una mejor notación, se puede escalar la temperatura absoluta T y obtener una temperatura sin dimensiones θ (dado que E/R tiene las mismas dimensiones que la temperatura) y reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\sigma \frac{d\theta}{dt} = \lambda e^{-1/\theta} - (\theta - \theta_m)$$

$$\text{where } \sigma = \frac{\rho V \gamma}{KA}, \lambda = \frac{\rho}{KA(E/R)} \text{ \& } \theta_m = \frac{T_m}{E/R}$$

- El parámetro λ se conoce como el parámetro de eficiencia de la reacción, dado que valores altos de este parámetro corresponden a niveles altos de generación de calor por la reacción química comparada con la pérdida de calor provocada por el enfriamiento de Newton. El parámetro σ es una medida de la velocidad de la reacción
 - Incrementar λ puede considerarse como incrementar la *ratio* entre el volumen y el área de la superficie: el sistema encuentra más difícil liberar calor en los alrededores, por lo que la reacción incrementa en intensidad
- Idealmente, se quería determinar exactamente cuáles son los valores de λ que corresponden a un salto en la temperatura de equilibrio. Para encontrar estos valores, se tiene que fijar $d\theta/dt = 0$ para encontrar el equilibrio y resolver la ecuación gráficamente

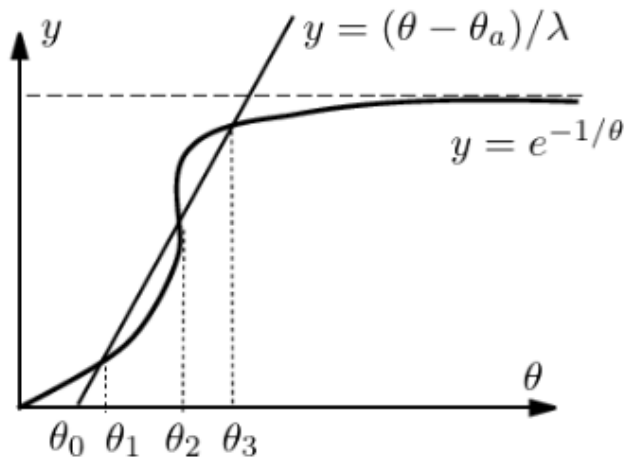
$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow e^{-1/\theta} = \frac{(\theta - \theta_m)}{\lambda}$$

- Esta ecuación permite reconocer que la función que representa la pérdida de calor y aquella que representa la ganancia tienen que ser equivalentes. Cuando la pérdida de calor es igual a la ganancia por la reacción, entonces $d\theta/dt = 0$; si la pérdida de calor es mayor a la ganancia por la reacción, entonces $d\theta/dt < 0$; y si la pérdida de calor es menor a la ganancia por la reacción, entonces $d\theta/dt > 0$

$$(\text{heat loss}) \quad y = (\theta - \theta_m)/\lambda$$

$$(\text{heat gain}) \quad y = e^{-1/\theta}$$

- En este caso, se pueden plantear ambas funciones por separado y representarlas en un gráfico. Debido a la función lineal y la exponencial, es posible ver cómo hay un máximo de tres puntos en los que ambas curvas interseccionan, pero el número de intersecciones dependerá del intercepto y la pendiente de la pérdida de calor (puede haber uno, dos o tres)



- Si la temperatura es tan baja que $\theta < \theta_1$, entonces la ganancia de calor es mayor a la pérdida y la temperatura incrementa a $\theta \rightarrow \theta_1$; si la temperatura es tal que $\theta_1 < \theta < \theta_2$, entonces la pérdida de calor es mayor a la ganancia y la temperatura disminuye a $\theta \rightarrow \theta_1$; si $\theta_2 < \theta < \theta_3$, entonces la ganancia es mayor a la pérdida de calor y la temperatura aumenta a $\theta \rightarrow \theta_3$; y si $\theta > \theta_3$, entonces la pérdida es mayor a la ganancia y la temperatura disminuye a $\theta \rightarrow \theta_3$
- Por este motivo, θ_1 y θ_3 se consideran equilibrios estables para el sistema mientras que θ_2 se considera inestable, dado que solo se consigue si $\theta = \theta_2$ exactamente, pero tiende a los otros dos si hay una desviación de esta igualdad. Aunque puedan haber 1, 2 y 3 intersecciones, solo puede haber 1 o 3 equilibrios, debido a que solo pueden existir 2 cuando hay un punto tangente y en esa región se tendería al equilibrio más alto o al más bajo, habiendo solo 1
- Si las condiciones iniciales son cercanas a $\theta_2 < \theta < \theta_3$ entonces se tienen las condiciones para la ignición espontánea, dado que la ganancia de calor es exponencial y la pendiente es muy alta. No obstante, para otras posiciones iniciales, se puede evitar la ignición, por lo que lo importante es saber si $\theta > \theta_2$ o $\theta < \theta_2$, de modo que θ_2 es el equilibrio crítico (para $\theta = \theta_2$, el equilibrio se mantendría)

- Si λ es lo suficientemente grande como para que exista solo el equilibrio θ_3 , entonces la ignición ocurrirá, mientras que, para valores bajos, puede haber más equilibrios y todo dependerá de la posición inicial. Los valores de λ para los cuales hay cambios en el número de equilibrio se conocen como puntos de bifurcación
- Alternativamente, se puede tener λ fija y cambiar los valores de θ_m , que haría que el punto de intersección con el eje de θ cambie y se mueva a la derecha cuando θ_m incrementa. Cuando uno se mueve a la derecha, vuelven a ser posibles 1 o 3 equilibrios (por la misma lógica que antes), y la segunda bifurcación es en la que ocurre la ignición térmica, debido a que si $\theta > \theta_2$, entonces ocurre la ignición, pero si $\theta < \theta_2$, entonces no
- El valor en el que ocurre la ignición se conoce como la temperatura ambiente crítica θ_{mc} . Claramente, esta temperatura es clave para evitar cualquier combustión espontánea
 - El análisis anterior indica que las condiciones de almacenamiento y la temperatura del material tienen que ser monitorizadas cuidadosamente en los procesos para evitar la combustión espontánea
 - Esta se puede evitar completamente para una temperatura ambiente lo suficientemente baja, de modo que solo hay un punto de equilibrio en la parte baja de la curva de ganancia de calor. Esto ocurre para temperaturas bajas, por debajo de la temperatura θ_{mc} , pero estas temperaturas no siempre son prácticas para el mundo real y se puede requerir la monitorización regular
- Existen factores importantes que el modelo no ha tenido en cuenta y que en un experimento real si se deben tener
 - En el modelo se ha ignorado el consumo de combustible (que se usa cuando procede la reacción) y se ha asumido que los reactivos están mezclados perfectamente (que no suele ocurrir debido a que la temperatura es diferente en diferentes puntos del material reactivo). Estas suposiciones se pueden relajar, pero lleva a modelos diferenciales más complicados
 - Si se relaja la primera suposición, el modelo tendría dos ODEs: una para la temperatura y otra para la concentración, y se podría obtener los valores de equilibrio resolviendo ambas ecuaciones simultáneamente. Si se relaja la segunda suposición, el modelo resulta en una PDE para la temperatura

Las series de Fourier

- Para poder desarrollar la teoría de series de Fourier se necesita desarrollar un nuevo producto interior diferente al usual estudiado, con el que se puede definir funciones ortogonales y cómo hacer expansiones de series con estas

- Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores en \mathbb{R}^3 , entonces el producto interior (\mathbf{u}, \mathbf{v}) posee las siguientes propiedades:

(i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

(ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), k$ a scalar

(iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ and $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ if $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

(iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

- Se espera que una generalización del producto interior cumpla con estas propiedades
- Suponiendo que f_1 y f_2 son funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. Debido a que la integral definida en $[a, b]$ del producto $f_1(x)f_2(x)$ posee las propiedades (i) – (iv) del producto interior cuando existe la integral. Por lo tanto, se define el producto interior de dos funciones f_1 y f_2 en el intervalo $[a, b]$ es el siguiente número:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx$$

- Motivándose en el hecho de que dos vectores genéricos \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales cuando el producto interior es nulo, se definen las funciones ortogonales. Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si se cumple la siguiente igualdad:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx = 0$$

- A diferencia de en análisis vectorial, en donde la palabra ortogonal es sinónima de perpendicular, en este caso no se tiene una interpretación geométrica. Además, la función nula es ortogonal a todas las funciones
- Uno está principalmente interesado en conjuntos infinitos de funciones ortogonales que están definidas en el mismo intervalo $[a, b]$. Un conjunto infinito de funciones de valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a, b]$ si se da la siguiente igualdad:

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \text{ for } m \neq n$$

- La norma o longitud $\|\mathbf{u}\|$ de un vector \mathbf{u} se puede expresar en términos del producto interior: la expresión $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ se conoce como norma cuadrada, de modo que $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. Similarmente, la norma cuadrada de una función $\phi_n(x)$ es $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$, de modo que la norma es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$

- En otras palabras, la norma cuadrada y la norma de una función $\phi_n(x)$ en un conjunto ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ son, respectivamente, las siguientes:

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) dx \quad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}$$

- Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad adicional de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ por $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces $\{\phi_n(x)\}$ se conoce como un conjunto ortonormal en el intervalo
 - Cualquier conjunto de funciones diferentes a cero $\{\phi_n(x)\}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ pueden convertirse en un conjunto ortonormal al normalizar cada función en el conjunto a través de dividir cada función por su norma
 - Estas definiciones y resultados se pueden utilizar para demostrar que un conjunto de funciones es ortogonal u ortonormal y para calcular la norma. Para esto, se suele encontrar una función en términos generales para el conjunto
- Como se ha dicho, se estudian las funciones ortogonales para expandir una función en términos del conjunto infinito $\{\phi_n(x)\}$ de funciones ortogonales. Para motivar este concepto, se establece una analogía más entre vectores y funciones
- Suponiendo que \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 son vectores mutuamente ortogonales diferentes a cero en \mathbb{R}^3 . Tal conjunto ortogonal se puede usar como una base en \mathbb{R}^3 , lo cual significa que cualquier vector tridimensional \mathbf{u} se puede escribir como una combinación lineal donde c_i para $i = 1, 2, 3$ son los componentes del vector \mathbf{u} y son escalares:

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 \text{ where } (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \text{ for } i \neq j$$

- Cada componente se puede expresar en términos de \mathbf{u} y el vector correspondiente \mathbf{v}_i . Para ver esto, se pueden derivar los siguientes resultados:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) = c_2\|\mathbf{v}_2\|^2 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}_3) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3) = c_3\|\mathbf{v}_3\|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) = c_n\|\mathbf{v}_n\|^2 \Rightarrow c_n = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2} \mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n$$

- Suponiendo que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal infinito de funciones en un intervalo $[a, b]$, uno se pregunta si es posible determinar un conjunto de coeficientes c_n para $n = 1, 2, \dots$ para una función $y = f(x)$ definida en $[a, b]$ tal que se cumpla la siguiente ecuación:

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots$$

- Es posible encontrar estos coeficientes utilizando un desarrollo similar al que se ha usado para encontrar los componentes de los vectores: a través del producto interior. Multiplicando $\phi_m(x)$ en la ecuación de arriba e integrando en el intervalo $[a, b]$, es posible obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)\phi_m(x) dx = \\ &= c_0 \int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x) dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx + \dots = \\ &= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \dots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \dots \end{aligned}$$

- Por la ortogonalidad de cada término, los productos interiores son nulos excepto cuando $m = n$. De este modo, se puede obtener una ecuación para los coeficientes y expresar $f(x)$ en función de c_n y $\phi_n(x)$:

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x) dx$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx} = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \phi_n(x)$$

- Un conjunto de funciones de variable real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ se conoce como ortogonal con respecto a una función de ponderación $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x) dx = 0 \text{ for } m \neq n$$

- La suposición común es que $w(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$
- Si $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a una función de ponderación $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces si se hace un mismo desarrollo como el anterior para obtener una modificación de los coeficientes:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x) dx}{\|\phi_n(x)\|^2} \quad \|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x) dx$$

- Las series resultantes con los coeficientes dados por esta última expresión o la anterior se conoce como una expansión ortogonal de f o serie de Fourier generalizada
- El procedimiento visto para determinar los coeficientes es formal, de modo que no se ha estudiado la convergencia de la serie de expansión ortogonal de la función f . No obstante, para algunos conjuntos ortogonales, estas expansiones convergen para la función, y se necesita hacer una analogía más con tal de poder entender el tipo de conjunto que $\{\phi_n(x)\}$ tiene que ser
 - Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto de vectores mutuamente ortogonales en \mathbb{R}^3 , se dice que este es completo en \mathbb{R}^3 porque se puede escribir cualquier vector u en este espacio. En este caso, el único vector ortogonal a los tres vectores es el vector 0
 - Si u fuera ortogonal a v_1, v_2, v_3 , entonces $(u, v_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y la serie en términos del producto interior demuestran que $u = 0$

- Similarmente, en la discusión de expansiones de series ortogonales, la función f así como todas las funciones en $\{\phi_n(x)\}$ son parte de una clase o espacio S más grande de funciones. La clase S puede ser el conjunto de funciones continuas en $[a, b]$ (denotado por $C^n([a, b])$) o de funciones continuas a trozos en $[a, b]$
- Uno también quiere que el conjunto $\{\phi_n(x)\}$ sea completo en S , en el sentido de que $\{\phi_n(x)\}$ tiene que contener las funciones suficientes tal que cualquier función $f \in S$ debe poder escribirse en la forma de series. Igual que en la analogía vectorial, esto significa que la única función que es ortogonal a cada miembro es la función nula
- En el desarrollo teórico se asume implícitamente de que cualquier conjunto ortogonal usado en la expansión de series de una función es completo en alguna clase o espacio de funciones S
- A partir de considerar el conjunto ortogonal de funciones trigonométricas, se podrá obtener la serie de Fourier, la cual será útil para las ecuaciones diferenciales parciales
 - Se supone que f es una función definida en el intervalo $(-p, p)$ y que se puede expandir en una serie ortogonal consistiendo en las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal trigonométrico T en el intervalo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \right)$$

$$\text{where } T = \left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \dots \right\}$$

- Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ se pueden determinar de la manera formal vista anteriormente. Antes de nada, se tiene que ver que se ha escrito $a_0/2$ por conveniencia, debido a que hace más cómodos los cálculos una vez se aplica la integral definida
- Para poder obtener los coeficientes, se integra la igualdad a los dos lados. Debido a que $\cos(n\pi x/p)$ y $\sin(n\pi x/p)$ para $n > 1$ son ortogonales a 1 en el intervalo, se puede obtener una expresión para a_0 como la siguiente:

$$\int_{-p}^p f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \right) \\
&\Rightarrow \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = p a_0 \\
&\Rightarrow a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx
\end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales parciales

- Las ecuaciones diferenciales parciales (PDEs), como las ODEs, se clasifican en lineales y en no lineales, y análogamente a las ODEs lineales, la variable dependiente y sus derivadas parciales en una PDE lineal están elevadas a 1. Las ecuaciones más interesantes son las ecuaciones lineales en derivadas parciales de segundo grado, pero también se revisan las de primer grado y métodos de resolución importantes
 - Una ecuación diferencial parcial o *partial differential equation* (PDE) para una función desconocida $u(x, y, \dots)$ es una relación de la siguiente forma, donde F es una relación entre variables independientes x, y, \dots de la función desconocida $u(x, y, \dots)$ y sus derivadas:

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0$$

- La función $u(x, y, \dots)$ es la solución de una PDE si, cuando se sustituye dentro F , la relación se satisface. Normalmente, esta solución es válida solo dentro de una región R del espacio de variables independientes x, y, \dots (de las dimensiones que sea), conocida como el dominio de la solución

$$F = 0$$

- Se asumen que estas variables son variables reales dentro de la región R , y una de estas suele ser el tiempo t , donde $0 \leq t \leq t_f$ para un tiempo final t_f
- También se suele asumir que la función $u(x, y, \dots)$ y todas sus derivadas necesarias son funciones continuas de las variables independientes en la región R
- Si $u(x, y)$ es la variable dependiente y x e y son las variables independientes, la forma general de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden se da por la siguiente expresión:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

- En este caso, los coeficientes A, B, \dots, G son funciones de x e y , aunque no se denota así por simplicidad (los coeficientes pueden ser constantes o variables)

$$A(x, y), B(x, y), \dots, F(x, y), G(x, y)$$

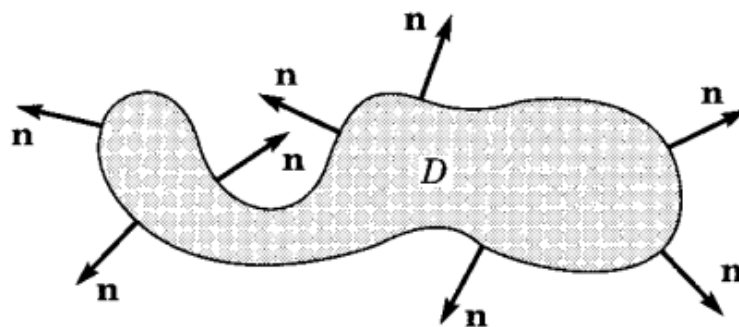
- Se dice que una PDE es cuasilineal o *quasilinear* si es lineal en todas sus derivadas parciales de orden menor a n (el mayor), por lo que puede ser no lineal en el término de mayor orden
- Si A, B, C son nulas, entonces la ecuación diferencial se vuelve una de primer grado:

$$D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

- Cuando $G(x, y) = 0$, entonces la ecuación anterior es homogénea, y si no, entonces esta no es homogénea
- La solución de una ecuación diferencial parcial lineal como la vista es una función $u(x, y)$ de dos variables independientes que posee todas las derivadas parciales que ocurren en la ecuación y que satisfacen la ecuación en alguna región del plano xy
- La intención en este desarrollo teórico no es examinar los procedimientos para encontrar soluciones generales de ecuaciones diferenciales parciales lineales
 - Normalmente es difícil encontrar una solución general para una PDE lineal de segundo orden porque es difícil determinar la existencia y unicidad de esta, y una solución general no es útil para aplicaciones. Por lo tanto, uno se puede enfocar en buscar soluciones particulares de algunas de las PDEs lineales más importantes
 - Las soluciones de las PDE dependerán de una función arbitraria (en vez de en constantes arbitrarias), por lo que se necesitarían condiciones auxiliares para determinar una solución única (a través de condiciones de valor inicial o de frontera). Estas no se pueden fijar de manera arbitraria si se quiere garantizar la existencia y unicidad de la solución
 - Se dice que un problema está bien condicionado si la PDE y las condiciones de frontera son tales que la solución existe, es única

y depende de manera continua en el valor de las constantes auxiliares

- Un aspecto muy importante relacionado con los problemas de PDEs son las condiciones iniciales, que especifican el estado de la solución en un momento particular t_0 , y las condiciones de frontera, que especifican el estado de la solución en las fronteras (de un conjunto) de las diversas variables
 - La condición inicial se especifica como $u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x})$, donde ϕ es una función dada y \mathbf{x} es el vector de todas las variables de las que depende la solución (no se incluye el tiempo por motivos ilustrativos, pero también se debería incluir). El valor inicial se fija para aquella variable deseada, no hace falta que sea el tiempo exactamente
 - Como para cada problema hay un dominio D (o intervalo I para una sola dimensión) para el cual la PDE es válida, es intuitivamente necesario tener que imponer unas condiciones en la frontera del dominio para que se determine la solución de la ecuación (condiciones sobre la curva paramétrica que acota el dominio D)



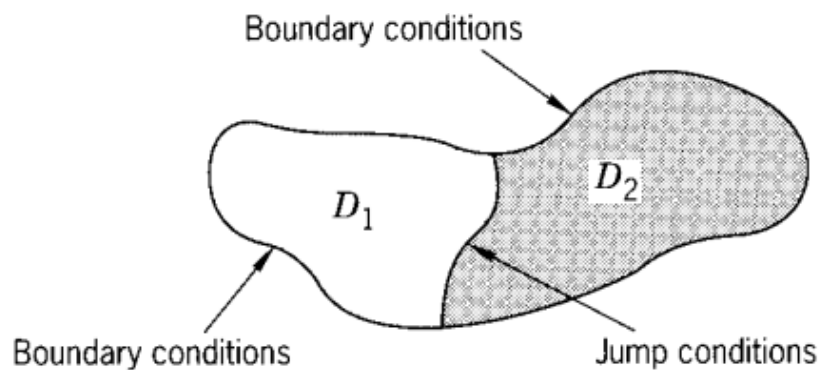
- En la frontera se puede especificar valores para uno de los siguientes elementos, donde $\partial u / \partial n$ denota la derivada normal de u (la derivada direccional de u en la dirección de la frontera):

$$(i) \quad u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = g(\mathbf{x})$$

$$(iii) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu = \nabla u \cdot \mathbf{n} + hu = g(\mathbf{x}), \quad h \in \mathbb{R}$$

- La condición del tipo (i) se conoce como condición de Dirichlet, la del tipo (ii) se conoce como condición de Von Neumann, y la del tipo (iii) se conoce como condición de Robin
- En el caso en el que el dominio D no esté acotado, se pueden proporcionar condiciones en el límite
- También existen las condiciones de salto, las cuales se imponen cuando el dominio tiene dos partes con diferentes propiedades, de modo que $D = D_1 \cap D_2$



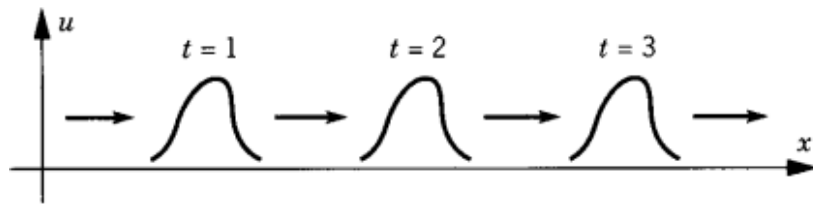
- Dos métodos de resolución muy útiles para resolver y entender ecuaciones diferenciales parciales de primer y segundo grado son el método de características y el método de separación de variables
 - Si se considera una ecuación simple de primer grado como $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)$, entonces se pueden plantear dos métodos de solución: el método geométrico o de características y el de coordenadas

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y)$$

- Las ecuaciones más famosas de este tipo es la ecuación del transporte simple, que considera que una sustancia está suspendida en un fluido que se mueve a una tasa constante b a lo largo de un tubo horizontal de diámetro constante en la dirección positiva de x . En este caso $u(x, t)$ es la concentración en gramos/centímetros en el momento t , y M la cantidad de la sustancia en el intervalo $[0, x_1]$ en el momento t

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{x_1} u(x, t) \, dx = \int_{bh}^{x_1+bh} u(x, t+h) \, dx \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} u(x, t) \, dx &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{bh}^{x_1+bh} u(x, t+h) \, dx \\
 \Rightarrow u(x_1, t) &= u(x_1 + bh, t + h)
 \end{aligned}$$

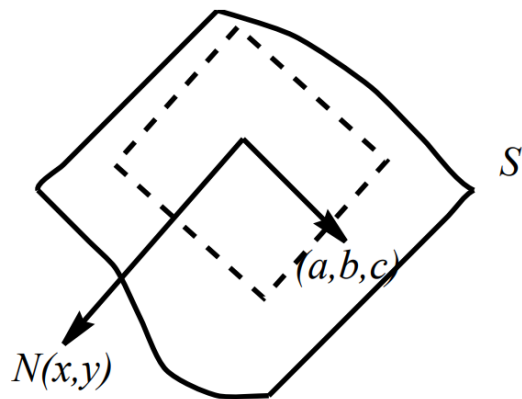
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial h} u(x_1, t) = \frac{\partial}{\partial h} u(x_1 + bh, t + h) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



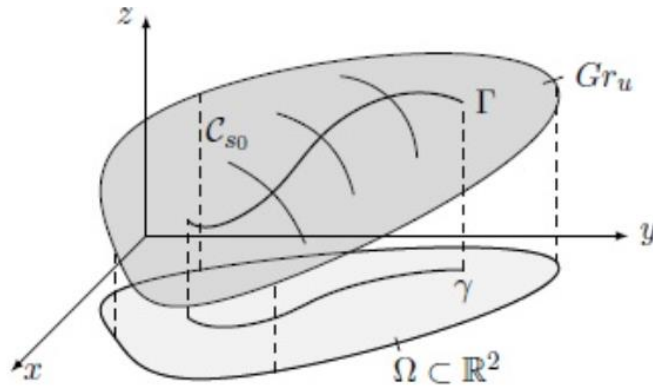
- En el caso de que se tenga una solución, las variables x , y y $u(x, y)$ forman una superficie S . Si $u(x, y)$ es una solución, entonces se sabe que en cada punto $(x, y, u(x, y))$ el vector (a, b, c) y el vector $(u_x, u_y, -1)$ son ortogonales o perpendiculares:

$$(a(x, y), b(x, y), c(x, y)) \cdot (u_x(x, y), u_y(x, y), -1) = 0$$

- Pero este vector $(u_x, u_y, -1)$ es el vector normal de la superficie S debido a que el producto puntual es nulo, por lo que se sabe deduce que el vector (a, b, c) debe ser tangente al plano S para cada punto $(x, y, u(x, y))$ si es perpendicular al vector normal de la superficie (de otro modo, no habría perpendicularidad; es condición necesaria)



- Por lo tanto, para encontrar una solución de la ecuación anterior, es necesario encontrar una superficie S tal que en cada punto $(x, y, u(x, y))$ de S , el vector $(a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ esté en el plano tangente a la superficie



- Para ello, se busca una curva paramétrica \mathcal{C} que esté en S , de modo que se tiene que construir una curva parametrizada por s que en cada punto de \mathcal{C} , el vector (a, b, c) sea tangente a la curva. Esa condición permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad \& \quad a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x(s), y(s)) \\ \frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s)) \\ \frac{du}{ds} = c(x(s), y(s)) \end{cases}$$

- A esta curva \mathcal{C} se la conoce como una curva integral para el campo vectorial $V = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ asociado con la PDE. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (se resuelven las ODEs), se obtiene una superficie $S = \{(x, y, u(x, y))\}$ para la cual V está en el plano tangente a S que se conoce como la superficie integral para V
- Efectivamente, lo que este método permite es reducir un problema de PDEs de primer orden a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias
- Si los coeficientes a , b y c fueran constantes, entonces el problema se podría resolver mucho más fácilmente:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

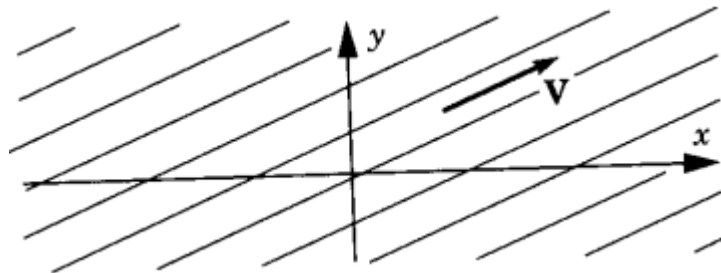
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = a \\ \frac{dy}{ds} = b \\ \frac{du}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{dx}{ds} ds = \int a ds \\ \int \frac{dy}{ds} ds = \int b ds \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - c_1)/a = s \\ (y - c_2)/b = s \end{cases} \Rightarrow \frac{x - c_1}{a} = \frac{y - c_2}{b}$$

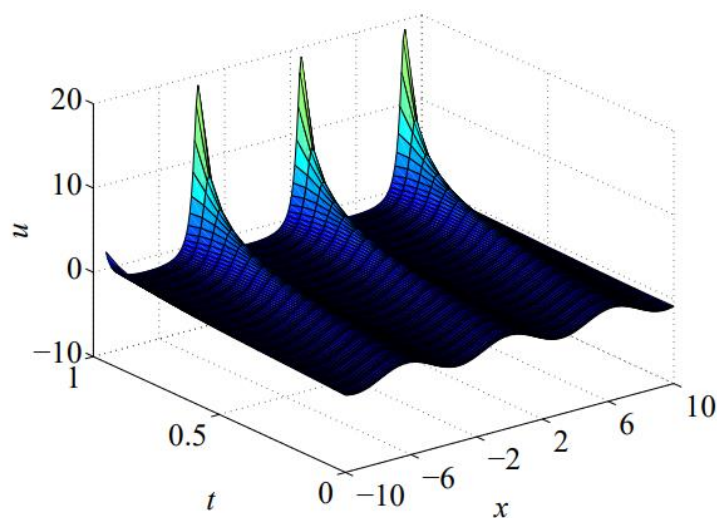
$$\Rightarrow bx - ay = bc_1 - ac_2 \Rightarrow bx - ay = \text{const}$$

- Por lo tanto, $u(x, y)$ dependería únicamente de $bx - ay$, haciendo que la solución sea una función f arbitraria de una variable:

$$u(x, y) = f(bx - ay)$$



- En la línea $bx - ay = c$, la solución es una constante, de modo que el valor será $u(x, y) = f(bx - ay) = f(\text{const})$. Como const es arbitraria, la fórmula anterior es válida para todos los valores de x e y , y en el espacio xyu , la solución sería una superficie que se construye de líneas rectas horizontales como una hoja de metal ondulada



- Cambiando las variables x e y por $x' = ax + by$ y $y' = bx - ay$ (como si se hiciera un cambio de coordenadas), se puede aplicar la regla de la cadena para poder obtener los siguientes resultados (equivalentes a los anteriores)

- Este método se conoce como el método de cambio de coordenadas, y es equivalente al de características para las ecuaciones de primer grado:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} = bu_{x'} - au_{y'}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a(au_{x'} + bu_{y'}) + b(bu_{x'} - au_{y'}) = \\ &= a^2u_{x'} + b^2u_{x'} + ab(u_{y'} - u_{y'}) = (a^2 + b^2)u_{x'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)u_{x'} = 0 \Rightarrow u_{x'} = 0 \text{ since } a \neq 0 \text{ or } b \neq 0$$

$$\Rightarrow u(x', y') \text{ must depend on } y' = bx - ay$$

$$\Rightarrow u(0, y') = f(y') = f(bx - ay)$$

- También es posible derivar la ecuación característica para ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden como la siguiente, la cual es lineal en las derivadas parciales de segundo orden, pero no necesariamente en los otros términos (ecuación cuasilineal):

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

- Generalmente, no es posible reducir el problema a una ODE por un cambio de variables (a través de plantear una curva paramétrica como antes o el método de coordenadas) como $\alpha = \alpha(x, y)$ y $\beta = \beta(x, y)$
- No obstante, es posible transformar la combinación lineal de las segundas derivadas parciales a una de las formas estándar. Por ejemplo, si A , B y C son constantes, entonces existe un cambio de variables tal que la resolución de una PDE se puede reducir a resolver la ecuación de ondas, una ODE o la ecuación de Laplace

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0 & \text{or} \\ u_{\beta\beta} = 0 & \\ u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0 & \end{cases}$$

- En el caso de coeficientes constantes, se puede considerar una transformación lineal como la anteriormente vista, en donde las funciones $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$ son lineales y sus derivadas parciales son constantes, de modo que se pueden expresar las transformaciones escritas de la siguiente forma:

$$\alpha = \alpha_x x + \alpha_y y \quad \beta = \beta_x x + \beta_y y$$

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \neq 0$$

- Usando las reglas de la cadena, se obtienen los siguientes resultados:

$$u_x = \alpha_x u_\alpha + \beta_x u_\beta \quad u_y = \alpha_y u_\alpha + \beta_y u_\beta$$

$$u_{xx} = \alpha_x^2 u_{\alpha\alpha} + \alpha_x \beta_x u_{\alpha\beta} + \beta_x^2 u_{\beta\beta}$$

$$u_{yy} = \alpha_y^2 u_{\alpha\alpha} + \alpha_y \beta_y u_{\alpha\beta} + \beta_y^2 u_{\beta\beta}$$

$$u_{xy} = \alpha_x \alpha_y u_{\alpha\alpha} + (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) u_{\alpha\beta} + \beta_x \beta_y u_{\beta\beta}$$

$$\Rightarrow Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = au_{\alpha\alpha} + bu_{\alpha\beta} + cu_{\beta\beta} = 0$$

$$\begin{cases} a = A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2 \\ c = A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2 \\ b = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y \end{cases}$$

- Si se restringe la ecuación a que $a = c = 0$, las ecuaciones son equivalentes a resolver una PDE de primer orden no lineal en las derivadas parciales, de modo que no se puede usar el método de características anteriormente visto. Las soluciones de esta ecuación se podrán usar para construir un cambio de variables

$$a = c = 0 \Rightarrow A\gamma_x^2 + B\gamma_x\gamma_y + C\gamma_y^2 = 0$$

$$\gamma(x, y) = \alpha(x, y) \perp \gamma(x, y) = \beta(x, y) \quad (\text{linear indep. sol.})$$

- A partir del resultado anterior, se puede plantear un teorema más general sobre las líneas características para este tipo de ecuaciones. Si una función lineal no constante $\gamma(x, y) = \gamma_x x +$

$\gamma_y \gamma$ es una solución a la ecuación anterior con coeficientes constantes a , b y c , entonces los conjuntos de nivel $\gamma(x, y) = \gamma_0$ (líneas de nivel) son soluciones a la siguiente ODE de primer orden, llamada ecuación característica:

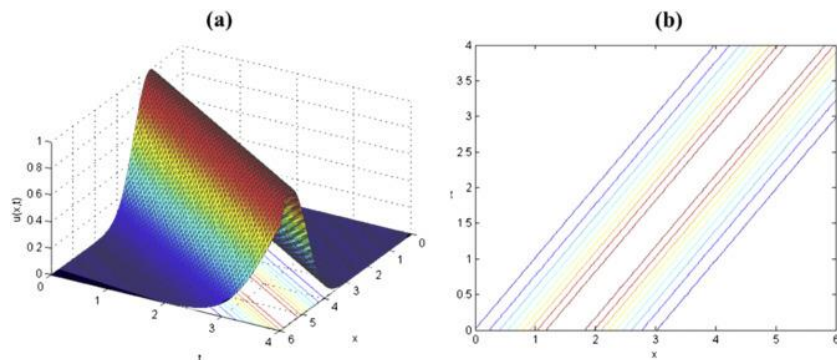
$$A(dy)^2 + Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \Rightarrow A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

- Si existen dos soluciones (curvas) de la ecuación características $\alpha(x, y) = \alpha_0$ y $\beta(x, y) = \beta_0$ tal que su jacobiano no sea nulo, entonces esto define una transformación de coordenadas $\alpha = \alpha(x, y)$ y $\beta = \beta(x, y)$ para las cuales $a = c = 0$ y se puede obtener una solución lineal

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, y) = \alpha_0 \\ \beta(x, y) = \beta_0 \end{cases}$$

- Las características se pueden entender como canales por los cuales la solución de la PDE puede “sentir” la influencia de cambios o perturbaciones en las condiciones iniciales o de frontera. Por lo tanto, se pueden entender como caminos de influencia
- De este modo, los cambios no llegan a todas partes instantáneamente, sino que toma tiempo en que se propaguen. Como las líneas características se proyectan en el espacio de las variables x e y , para una misma característica, sus diferentes valores forman curvas paralelas en el espacio de variables, entonces se puede ver como se llegarían a todos los puntos del espacio (se concatenarían características una al lado de la otra, con diferentes niveles)



- Fuera de estos canales característicos, la solución permanece inafectada hasta que la perturbación llega a esos puntos que estaban fuera, viajando por el sistema a través de los caminos

característicos (ODEs) y de la manera (las dinámicas descritas por las ODEs) en que se construyen. Estas se obtienen a través del método mostrado anteriormente

- Además, cuando hay cambios bruscos o discontinuidades en las condiciones iniciales o de frontera, esta información también se pasa por las líneas características, de modo que se propagan las discontinuidades. Esto causa que algunas derivadas de orden mayor sean indefinidas para la solución, dado que, a lo largo de las características, una PDE no impone restricciones suficientes para asegurar la diferenciación de cualquier orden en todos los puntos
- Un método alternativo a los métodos geométricos presentados es el de separación de variables, el cual sirve no solo para ecuaciones de primer grado sino también de segundo. En este método se busca una solución particular en la forma de un producto de una función de x y otra de y

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

- Con esta suposición, a veces es posible reducir una PDE lineal de dos variables a dos ODEs diferentes. Para poder entender por qué, se tiene que tener en cuenta las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

- El método de separación de variables no es un método general para encontrar soluciones particulares, dado que algunas ecuaciones diferenciales parciales simplemente no son separables
- Como no es un método general, para una ecuación diferencial parcial dada, se tiene que intentar este método y comprobar si se puede obtener una solución particular, por lo que no hay fórmula
- Algo muy útil a la hora de resolver ecuaciones es comprobar de qué variables dependen ambos lados. Si ambos lados de la ecuación dependieran de variables diferentes, entonces quiere decir que cada lado debe ser constante (si no, no podrían ser iguales), por lo que a veces es conveniente igualar esta ecuación a una constante de separación λ o $-\lambda$, permitiendo así obtener dos ODEs para cada variable y plantear diversos casos para λ
- Si u_1, u_2, \dots, u_k son soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la siguiente combinación lineal, donde c_i para $i = 1, 2, \dots, k$ son constantes, también es una solución:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k$$

- A lo largo del desarrollo teórico se asume que siempre que haya un conjunto finito de soluciones de la ecuación diferencial parcial lineal homogénea, se puede construir otra solución u formando una serie infinita:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

- Uno de los aspectos más importantes de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo grado es su clasificación, dado que esta es de vital importancia para su resolución, dado que permiten determinar cuáles son las posibles condiciones de frontera para obtener un problema bien condicionado, y se motiva del método de características
 - Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes se puede clasificar en una categoría de tres posibles. Para ello, se asume que al menos uno de los coeficientes A , B o C no es nulo

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

- Como la ecuación característica sería una ecuación de segundo grado para dy/dx , el discriminante de la solución permite definir el tipo de PDE de segundo orden

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con coeficientes constantes reales es hiperbólica si se da la siguiente desigualdad:

$$B^2 - 4AC > 0$$

- La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con coeficientes constantes reales es parabólica si se da la siguiente igualdad:

$$B^2 - 4AC = 0$$

- La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con coeficientes constantes reales es elíptica si se da la siguiente desigualdad:

$$B^2 - 4AC < 0$$

- En el caso de que los coeficientes A, B, C, \dots no fueran constantes, sino que fueran funciones no constantes de x e y , y hasta de $u(x, y)$, u_x y u_y , en caso de que la PDE fuera no lineal, la ecuación puede cambiar su tipo de región a región
- En particular, se consideran tres tipos de PDEs de segundo grado, que son las más importantes: las PDEs hiperbólicas, las PDEs elípticas y las PDEs parabólicas
- En el caso de las ecuaciones hiperbólicas, existen dos soluciones reales distintas (dos curvas características reales)

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A \frac{dy}{dx} + (-B + \sqrt{D}) = 0 \\ 2A \frac{dy}{dx} - (B + \sqrt{D}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, y) = 2Ay + (-B + \sqrt{D})x = \alpha_0 \\ \beta(x, y) = 2Ay - (B + \sqrt{D})x = \beta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = -B + \sqrt{D} \\ \beta_x = -B - \sqrt{D} \\ \alpha_y = \beta_y = 2A \end{cases} \Rightarrow J \neq 0$$

\Rightarrow use chain rule to apply transformations α & β

- En el caso de una PDE parabólica, existen dos soluciones reales idénticas (una curva característica reales)

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\Rightarrow B = \pm 2\sqrt{AC} \text{ \& } A, C > 0$$

$$\text{If } B > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, y) = \sqrt{2A}y - \sqrt{2C}x = \alpha_0 \\ \beta(x, y) = \sqrt{2A}y + \sqrt{2C}x = \beta_0 \end{cases}$$

$$\text{If } B < 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, y) = \sqrt{2A}y + \sqrt{2C}x = \alpha_0 \\ \beta(x, y) = \sqrt{2A}y - \sqrt{2C}x = \beta_0 \end{cases}$$

\Rightarrow use chain rule to apply transformations α & β

- En este caso, existen dos soluciones complejas distintas (dos curvas características complejas). No obstante, esto quiere decir que no existen curvas características reales

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B \frac{dy}{dx} + C = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A \frac{dy}{dx} + (B + i\sqrt{-D}) = 0 \\ 2A \frac{dy}{dx} - (B - i\sqrt{-D}) = 0 \end{cases}$$

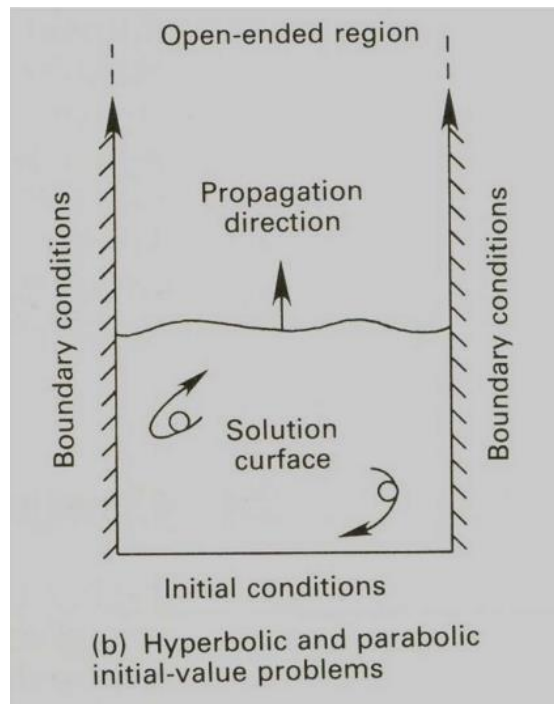
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x, y) = 2Ay - (B + i\sqrt{-D})x = \alpha_0 \\ \beta(x, y) = 2Ay - (B - i\sqrt{-D})x = \beta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = -B - i\sqrt{-D} \\ \beta_x = -B + i\sqrt{-D} \\ \alpha_y = \beta_y = 2A \end{cases} \Rightarrow J \neq 0$$

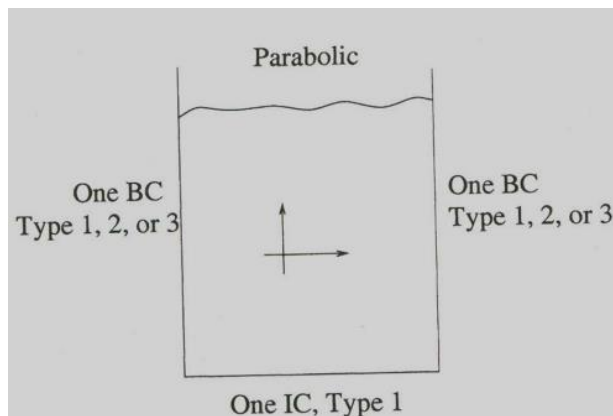
\Rightarrow use chain rule to apply transformations α & β

- También se ha discutido el rol de las características en las PDEs y cómo permiten propagar cambios en las condiciones iniciales y de frontera. Dependiendo del tipo de ecuación en la que se esté, esto se produce de una manera diferente
 - En el caso de una PDE hiperbólica, las condiciones iniciales se propagan dentro de la región a través de las ecuaciones características usando velocidad finita (tarda un tiempo en propagarse). Las condiciones iniciales son el valor de la función y los valores de la primera derivada parcial (la velocidad)
 - En el caso de una PDE parabólica, la información se propaga inicialmente desde las condiciones de frontera a la región interior usando velocidad infinita como la condición de entrar instantáneamente dentro de la frontera interior, propagándose más rápido. Los valores de frontera son los valores de las funciones o los valores de sus derivadas (o una combinación lineal de ambas)

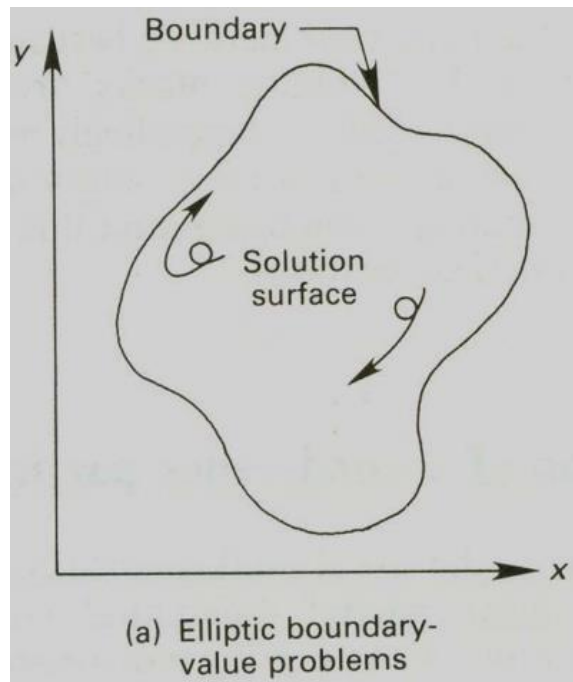
- En el caso de una PDE elíptica, las condiciones de frontera se especifican en una frontera cerrada (que puede estar cerrada en el infinito), y las condiciones de frontera se tomarán como el valor de una función del valor de sus derivadas (se pueden usar combinaciones lineales de ambas). Como no se tienen características reales (solo imaginarias), los cambios en estas condiciones se propagan instantáneamente en todo el dominio
- Los problemas bien condicionados o *well-posed problems* consisten de una PDE en un dominio junto con un conjunto de condiciones iniciales y/o de frontera (u otras condiciones auxiliares) que tienen las siguientes propiedades fundamentales:
 - Existe al menos una solución $u(x, y)$ que satisface todas las condiciones del problema (propiedad de existencia)
 - Existe como máximo una sola solución (propiedad de unicidad)
 - La solución única $u(x, y)$ depende de manera estable de los datos del problema, de modo que, si los datos se cambian un poco, la solución correspondiente solo cambia un poco
- Finalmente, las características, debido a que son caminos de influencia en la solución, también propagan las discontinuidades, pero se hace de manera diferente dependiendo del tipo de ecuación
 - Cualquier discontinuidad inicial o de frontera para PDEs hiperbólicas se propagará también dentro de la región R usando las líneas características y se preserva a lo largo de la dirección de estas



- Las discontinuidades iniciales en el caso de las PDEs parabólicas tienen alguna influencia en la solución, pero se amortiguan rápidamente cuanto más se propagan en la dirección de las características (no se preservan siempre)



- Las discontinuidades en el caso de las PDEs elípticas no se propagan, sino que el dominio entero se afecta simultáneamente. Normalmente se asocian las ecuaciones con un problema estático o de equilibrio



Los problemas de valores de frontera en coordenadas rectangulares

- A partir de una discusión inicial sobre ecuaciones diferenciales parciales, se pueden presentar aquellos problemas de valores de frontera con los que se trabajará
 - En este caso, un problema de valor de frontera o BVP se tiene que entender de una manera un poco diferente a la que se entendía anteriormente para EDOs

$$\text{Solve: } a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ where } 0 < x < L \text{ \& } t > 0$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \& \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \text{ where } 0 < x < L$$

$$(BC) \quad u(0, t) = 0 \quad \& \quad u(L, t) = 0 \text{ where } t > 0$$

- Si $u(x, t)$ es la solución de una PDE, donde x representa una dimensión espacial y t representa el tiempo, entonces uno es capaz de prescribir el valor de u o de $\partial u / \partial x$, o de una combinación lineal de u y $\partial u / \partial x$ en un valor x , o de u y $\partial u / \partial t$ en un valor t
- Las condiciones de frontera son los valores iniciales de las funciones arbitrarias que determinan una solución particular de

una PDE dentro de una región, y estas se extrapolan a la región interior a través de la solución

- En otras palabras, un BVP puede consistir de una PDE junto a condiciones de valor de frontera y condiciones iniciales (no solo de un tipo o de otro como con las EDOs)
- Uno está interesado principalmente en aplicar el método de separación de variables para encontrar soluciones en forma de producto de las siguientes ecuaciones típicas en física, o pequeñas variaciones de estas:

$$(1) \quad k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- La PDE (1) se conoce como la ecuación del calor unidimensional, la (2) se conoce como la ecuación de ondas unidimensional y la última (3) se conoce como la ecuación de Laplace bidimensional
- En este caso, unidimensional significa que x es la única variable espacial, mientras que bidimensional significa que x e y son dos variables espaciales
- Tal y como se puede ver, la ecuación (1) sería parabólica, (2) sería hiperbólica y (3) sería elíptica

$$(1) \quad A = k, E = -1, B = \dots = G = F = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0$$

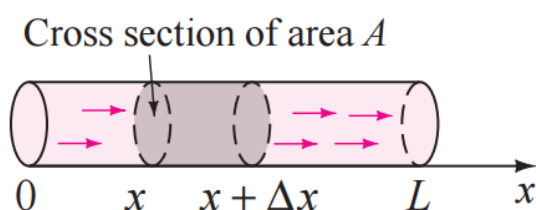
$$(2) \quad A = a^2, C = -1, B = \dots = F = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$$

$$(3) \quad A = 1, C = 1, B = \dots = F = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$$

- Es importante entender donde y cuando salen estas ecuaciones en física y qué representan las soluciones:
 - La ecuación del calor ocurre en la teoría del flujo del calor (como se transfiere por conducción en una vara de metal o en un cable). En este caso, la función $u(x, t)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la vara en un momento t
 - También se conoce como la ecuación de la difusión debido a que la difusión de ciertas sustancias disueltas en una solución es análoga al flujo del calor en un sólido. La función $u(x, t)$ que satisface esta PDE representará la concentración de la sustancia disuelta
 - La ecuación de la onda es un resultado al que normalmente se llega en problemas de vibraciones mecánicas. Con tal de discutir

el problema, la solución $u(x, t)$ de (2) representará el desplazamiento de una cuerda idealizada

- La solución $u(x, y)$ de una ecuación de Laplace como (3) se puede interpretar como el estado estable o *steady-state* (independiente del tiempo, por lo tanto) de la distribución de la temperatura a través de una placa fina bidimensional
- En el caso de (1), se supone que se tiene una vara circular de largo L y con área transversal A y que coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Además de esto, se realizan suposiciones adicionales como las siguientes:



- El flujo de calor de la vara solo toma lugar en la dirección de x y no se genera calor dentro de la vara
- La superficie lateral o curvada de la vara está aislado, de modo que el calor no escapa de esta superficie
- La vara es homogénea, de modo que su masa por unidad de volumen ρ es constante, y el calor específico k y la conductividad K del material de la vara son constantes también
- Para derivar la PDE (1) satisfecha por la temperatura $u(x, t)$, se necesitan dos leyes empíricas de la conducción del calor y se opera con ellas
 - La cantidad de calor Q en un elemento de masa m es $Q = \gamma mu$, donde u es la temperatura del elemento

$$Q = \gamma mu$$

- La tasa de flujo del calor Q_t a través de la sección transversal es proporcional al área A de la sección transversal y la derivada parcial con respecto a x de la temperatura. Debido a que el calor fluye en la dirección de la temperatura decreciente, el signo negativo hace que Q_t sea positiva para $u_x < 0$ (dado que se va perdiendo calor cuanto más se avanza) y negativa para $u_x > 0$ (dado que se va acumulando calor si se consideran distancias más cerca al principio de la vara)

$$Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t} = -KA \frac{\partial u}{\partial x} = -KAu_x$$

- Si el trozo circular de la vara entre x y $x + \Delta x$ es muy fina, entonces $u(x, t)$ puede aproximar la temperatura en cada punto del intervalo (dado que $\Delta x \approx 0$). La masa de este trozo sería $m = \rho A(x + \Delta x - x) = \rho A \Delta x$, por lo que se obtiene la siguiente igualdad:

$$Q = \gamma \rho A \Delta x u$$

- Cuando el calor fluye en la dirección positiva del eje x , se ve a partir de $Q_t = -KAu_x$ que el calor se acumula en la porción a una tasa neta igual a la siguiente:

$$-KAu_x(x, t) - [-KAu_x(x + \Delta x, t)] = KA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

- Diferenciando Q con respecto a t , se puede ver que la tasa neta también se da por la siguiente igualdad:

$$Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \rho A \Delta x u_t$$

- Igualando ambas expresiones y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se puede obtener la ecuación en la forma $(K/\gamma\rho)u_{xx} = u_t$, donde $k = K/\gamma\rho$ y se conoce a esta constante como difusividad térmica:

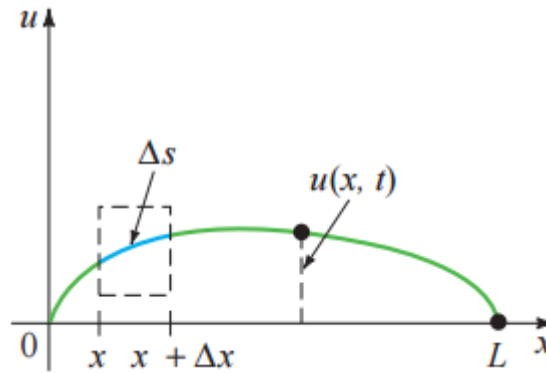
$$\gamma \rho A \Delta x u_t = KA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

$$\Rightarrow u_t = \frac{K}{\rho\gamma} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}$$

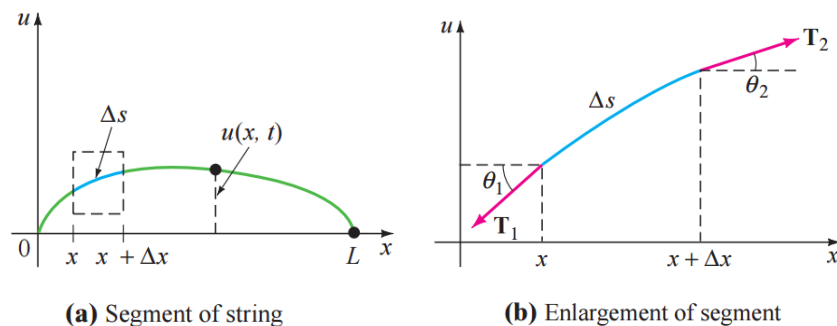
$$\Rightarrow u_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u_t = \frac{K}{\rho\gamma} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{K}{\rho\gamma} u_{xx}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{\rho\gamma} u_{xx} = u_t \Rightarrow k u_{xx} = u_t \Rightarrow k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- En el caso de (2), se considera una cuerda de longitud L estirada entre dos puntos del eje x como x_0 y x_L . Cuando la cuerda comienza a vibrar, se supone que el movimiento tiene lugar en el plano xu , de modo que cada punto de la cuerda se mueve en una dirección perpendicular al eje x (vibraciones transversales) y $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical de cualquier punto de la cuerda medida desde el eje x para $t > 0$



- Se asume que la cuerda es perfectamente flexible y que es homogénea, de modo que la masa por unidad de longitud es una constante ρ
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación a la longitud de la cuerda, y la pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos x
- La tensión \mathbf{T} actúa como un vector tangente a la cuerda, y su magnitud T es la misma en todos los puntos x (por lo que $|\mathbf{T}| = T$). Además, esta tensión es grande comparada con la fuerza de la gravedad
- No hay fuerzas externas que actúen sobre la cuerda
- Si se coge un segmento Δs de la cuerda y se revisa de más cerca, se asume que las tensiones \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 son tangentes a los extremos del segmento de la cuerda (la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$). Esto permitirá derivar la ecuación (2)



- Para ángulos θ_1 y θ_2 pequeños, la fuerza vertical neta actuando en el elemento correspondiente Δs de la cuerda es la siguiente. Esto se debe a que la tangente es una expresión equivalente

$$\begin{aligned}
 T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) &\approx T \tan(\theta_2) - T \tan(\theta_1) = \\
 &= T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]
 \end{aligned}$$

- Como $\rho \Delta s \approx \rho \Delta x$ (dado que se toman distancias pequeñas) es la masa de la cuerda en $[x, x + \Delta x]$, de modo que la segunda ley de Newton y el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ permite obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] &= \rho \Delta x u_{tt}(x, t) \\
 \Rightarrow u_{tt}(x, t) &= \frac{T}{\rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \\
 \Rightarrow \frac{\rho}{T} u_{tt} &= \frac{\rho}{T} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = u_{xx} \\
 \Rightarrow u_{tt} &= \frac{T}{\rho} u_{xx} \Rightarrow a^2 u_{xx} = u_{tt} \Rightarrow a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

- Aunque no se presenta la derivación de la ecuación Laplaciana, esta ecuación bidimensional o tridimensional ocurre en problemas involucrando potenciales como electrostática, gravitacional y velocidad en mecánica fluido

- Una solución $u(x, y)$ de (3) puede representar la temperatura que varía de punto a punto (pero no con el tiempo) en una placa rectangular
- La ecuación de Laplace en dos y en tres dimensiones se abrevia con el operador Laplaciano $\nabla^2 u = 0$:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

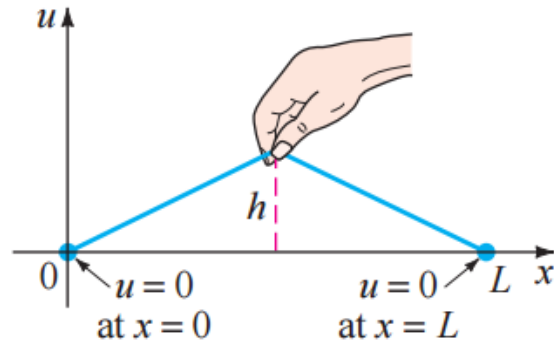
- Como las soluciones (1) y (2) dependen del tiempo t , se puede prescribir lo que ocurre en $t = 0$, se pueden dar condiciones iniciales (IC)
- Si $f(x)$ denota la distribución inicial de temperatura de la vara vista anteriormente para la ecuación del calor, entonces la solución $u(x, t)$ debe satisfacer la siguiente condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{for } 0 < x < L$$

- Por otra parte, se puede especificar el desplazamiento inicial $f(x)$ para la cuerda que vibra, además de su velocidad inicial $g(x)$. En términos matemáticos, se busca una función $u(x, t)$ que satisfaga (2) y las dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad \text{for } 0 < x < L$$

- Por ejemplo, la cuerda puede estirarse y soltarse para que ya no esté en reposo (que sería una velocidad de $g(x) = 0$)



- En esta figura anterior, se puede ver como la cuerda está asegurada en $x = 0$ y $x = L$. En este contexto, la función f es continua, por lo que se establecen dos condiciones de frontera $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$
- Por ejemplo, para $t > 0$, una condición típica en el extremo derecho de la vara de metal podría ser la siguiente:

$$(i)' \quad u(L, t) = u_0 \quad \text{where } u_0 \text{ constant}$$

$$(ii)' \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

$$(iii)' \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -h[u(L, t) - u_m] \quad \text{where } h, u_m \text{ constant}$$

- La condición $(i)'$ simplemente dice que la frontera $x = L$ se mantiene (de alguna manera) a una temperatura constante u_0 todo el tiempo
- La condición $(ii)'$ indica que la frontera $x = L$ está aislada: a partir de la ley empírica de la transferencia del calor, el flujo de calor cruzando la frontera (la cantidad de calor por unidad de área conducida cruzando la frontera) es proporcional al valor de la derivada normal de la temperatura. Por lo tanto, cuando la frontera $x = L$ está térmicamente aislada, no hay flujo de calor que entre o salga de la vara, llevando a esta condición
- La condición $(iii)'$ se puede interpretar como la pérdida de calor en el extremo derecho cuando se entra en contacto con un medio (aire o agua) que se mantiene a una temperatura constante. A

partir de la ley de enfriamiento de Newton, el flujo de calor saliente de la vara es proporcional a la diferencia entre la temperatura $u(L, t)$ en la frontera y la temperatura u_m del medio, haciendo que se obtenga la condición

- Si se considera $x = 0$, entonces el signo se cambia a positivo (y $u(0, t)$ cambia a $u(L, t)$) debido a que el calor pasa a donde haya una menor temperatura y a que se asume que la vara está a una temperatura más alta que el medio (de modo que $u(0, t) > u_m$ y $u(L, t) > u_m$). De este modo, en $x = 0$ y $x = L$, las pendientes $u_x(0, t)$ y $u_x(L, t)$ tienen que ser positivas (si se pierde calor del lado izquierdo de la vara, dado que sería la dirección contraria de x por tanto habría una relación positiva entre u y x) y negativa (dado que es el caso que se asumía al principio), respectivamente

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = h[u(0, t) - u_m]$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -h[u(L, t) - u_m]$$

- Claramente se pueden especificar condiciones diferentes al mismo tiempo para los dos extremos de la vara. Por ejemplo, se podrían tener estas condiciones:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \& \quad u(L, t) = u_0$$

- La condición (i)' sería homogénea si $u_0 = 0$ y la condición (iii)' sería homogénea si $u_m = 0$ (se obtendría una condición de Robin homogénea)
- Las ecuaciones diferenciales parciales mostradas deben modificarse para considerar influencias externas o internas actuando sobre el sistema físico
 - Una forma más general de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente, son las siguientes:

$$(1)' \quad k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t, u, u_x) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(2)' \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Por ejemplo, si hay transferencia de calor de la superficie lateral de una vara al medio que la envuelve que se mantiene a una

temperatura constante u_m , entonces la ecuación del calor debe ser la siguiente:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Por ejemplo, cuando hay fuerzas externas, de restauración elástica y de amortiguación actuando sobre la cuerda, la forma de la ecuación de la onda debe ser la siguiente, donde $f(x, t)$ es la fuerza externa, $c \cdot \partial u / \partial t$ es la amortiguación y ku es la fuerza de restauración:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku$$

- Ahora que se han estudiado las PDEs más importantes y los problemas de valor de frontera para PDEs, se pueden estudiar BVP de las diversas ecuaciones. Primero se comienza estudiando el BVP para la ecuación del calor
 - Considerando una vara fina de longitud L con una temperatura inicial $f(x)$ a lo largo de esta y cuyos extremos se mantienen a una temperatura de cero para todo el tiempo $t > 0$, la temperatura $u(x, t)$ en la vara está determinada por el BVP siguiente:

$$\text{Solve: } k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{where } 0 < x < L \quad \& \quad t > 0$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{where } 0 < x < L$$

$$(BC) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad \text{where } t > 0$$

- Se asume que esta vara satisface las condiciones vistas anteriormente
- Para poder solucionar este problema, se aplica el método de separación de variables, lo cual permite obtener dos ecuaciones diferenciales diferentes:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

$$kX''T = XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda kT = 0 \end{cases}$$

- Antes de resolver, se puede ver que las condiciones de frontera aplicadas a $u(x, t) = X(x)T(t)$ permiten obtener que, como no se espera que $T(t) \neq 0$ para toda t , entonces se obtenga un problema de Sturm-Liouville regular para $X(x)$:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{where } X(0) = 0 \text{ \& } X(L) = 0$$

- La solución a este BVP para $X'' + \lambda X = 0$ permite analizar tres posibles casos dependiendo del valor de λ , de modo que se obtendrían las siguientes soluciones para X :

$$\text{For } \lambda = 0: \quad X(x) = c_1 + c_2 x$$

$$\text{For } \lambda = -\alpha^2 < 0: \quad X(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

$$\text{For } \lambda = \alpha^2 > 0: \quad X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

- En los primeros dos casos, aplicar las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ hace que se obtenga $u = 0$. Pero cuando $X(0) = 0$ se aplica al último caso, entonces $c_1 = 0$ y $X(x) = c_2 \sin(\alpha L) = 0$, de modo que para obtener una solución no trivial para $X(x)$, $c_2 \neq 0$ y $\sin(\alpha L) = 0$
- La última ecuación $\sin(\alpha L) = 0$ se satisface cuando $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$, por lo que el problema para $X'' + \lambda X = 0$ posee soluciones no triviales cuando $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2 \pi^2 / L^2$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Para estos valores de λ son los valores propios del problema, y las funciones propias son las siguientes:

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Para el problema de $T(t) = c_3 e^{-k(n^2 \pi^2 / L^2)t}$, de modo que se obtendría la siguiente solución para $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2 \pi^2 / L^2)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{where } A_n = c_2 c_3$$

- Cada una de las funciones de producto $u_n(x, t)$ dada en esta expresión es una solución particular para la PDE, y cada $u_n(x, t)$ satisface ambas condiciones de frontera
- No obstante, para que esta solución respete la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, se tendría que escoger un coeficiente A_n tal que se cumpla la siguiente igualdad:

$$u_n(x, 0) = X(x)T(0) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

- En general, uno no se espera que esta condición se cumpla para una selección arbitraria pero razonable de f . Por lo tanto, $u_n(x, t)$ no puede ser una solución para el problema dado

- Por el principio de superposición la función $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ debe satisfacer el problema BVP

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Sustituyendo $t = 0$ en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

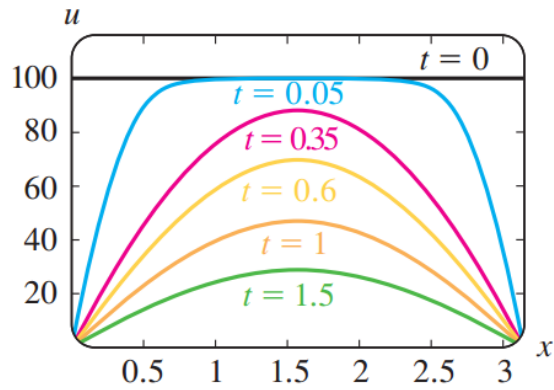
- Esta expresión es la expansión de f de mitad de rango en una serie senoidal, por lo que si se hace la identificación $A_n = b_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

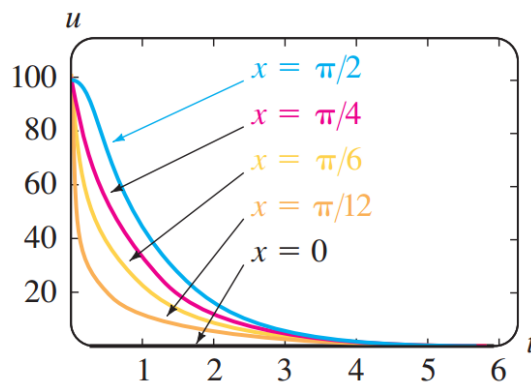
- A partir de esto, se concluye que la solución al BVP descrito se da por la siguiente serie infinita:

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Dado que u es una función de dos variables, el gráfico de la solución es una superficie tridimensional
 - Es posible utilizar un sistema algebraico para aproximar la superficie a través de graficar sumas parciales $S_n(x, t)$ sobre una región rectangular definida por $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq t \leq T$. Alternativamente, con la ayuda de una aplicación de un CAS para un gráfico bidimensional, se puede graficar la solución en el intervalo $[0, \pi]$ para valores incrementales de t



- También se puede graficar la solución $u(x, t)$ en un intervalo de t para valores incrementales de x



- Los gráficos permiten verificar como $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$
- El método utilizado para poder encontrar la solución del BVP de la ecuación del calor se puede usar de manera similar para resolver el BVP de la ecuación de ondas
 - Considerando una cuerda de longitud L que vibra con un desplazamiento inicial $f(x)$ y con una velocidad inicial $g(x)$, el desplazamiento vertical $u(x, t)$ de la cuerda al vibrar está determinado por el BVP siguiente:

$$\text{Solve: } a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{where } 0 < x < L \quad \& \quad t > 0$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad \text{where } 0 < x < L$$

$$(BC) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad \text{where } t > 0$$

- Se asume que esta vara satisface las condiciones vistas anteriormente

- Con la suposición usual de que $u(x, t) = X(x)T(t)$, separando las variables se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$a^2 X'' T = X T'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \& \quad T'' + a^2 \lambda T = 0$$

- Las condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$ se traducen en que $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ porque $T(t) \neq 0$ para $t > 0$. A partir de estas condiciones de frontera se obtiene un problema de Sturm-Liouville regular

$$X'' + \lambda X = 0 \quad X(0) = 0 \quad X(L) = 0$$

- Las tres posibilidades para el parámetro λ son las usuales, y solo $\lambda = \alpha^2 > 0$ lleva a una solución no trivial. Para este caso, la solución general de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$X = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

- Que $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ indican que $c_1 = 0$ y $c_2 \sin(\alpha L) = 0$, y esta última ecuación implica que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$. Los valores propios y las funciones propias correspondientes del problema son las siguientes:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \& \quad X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Finalmente, la solución general de la ecuación de segundo orden para $T(t)$ sería la siguiente:

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + c_4 \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right)$$

- A través de juntar ambas soluciones generales en $u(x, t)$, se pueden utilizar las expansiones ortogonales de la función para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$u_n = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

- Poniendo $t = 0$ y usando la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ permite obtener una serie que corresponde a la expansión de

medio rango para f en una serie senoidal. Escribiendo $A_n = b_n$, se obtiene el siguiente resultado:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

- Para determinar B_n , se diferencia con respecto a t y se fija $t = 0$ (como la condición inicial) para poder obtener una expansión de medio rango para g en una serie senoidal. En este caso, el coeficiente total $B_n n\pi a/L$ debe darse por la forma b_n , de modo que se obtiene el siguiente resultado:

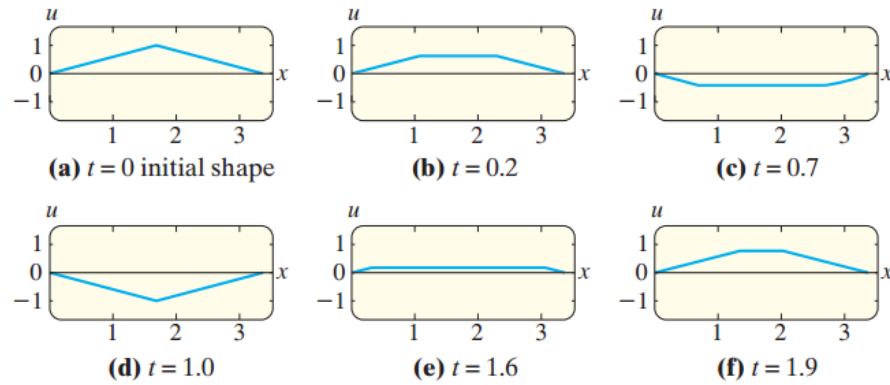
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi a}{L} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

- Finalmente, la solución para el BVP consiste en la serie $u(x, t)$ con las fórmulas para los coeficientes A_n y B_n definidas anteriormente. En este caso, se indica que la cuerda se libera del reposo, entonces $g(x) = 0$ para toda x en el intervalo $[0, L]$ y, consecuentemente, $B_n = 0$
- Un caso especial del BVP anterior es el modelo de la cuerda pulsada o estirada, en donde la cuerda tiene un desplazamiento vertical inicial. Uno puede estudiar la moción de la cuerda a través de graficar la solución $u(x, t)$ para valores incrementales de t y usando la animación del CAS

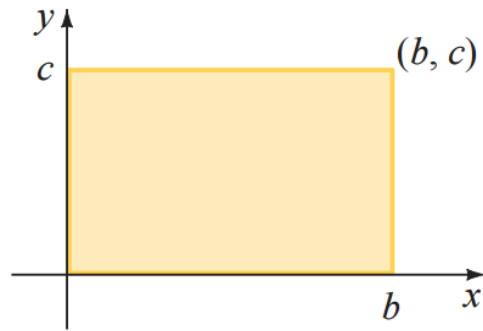


- De este modo, se generan marcos o *frames* que después se unen para poder producir una animación
- Recordando la derivación de la ecuación de ondas unidimensional, la constante $a = \sqrt{T/\rho}$, donde ρ es la masa por unidad de longitud y T es la magnitud de la tensión de la cuerda. Cuando T es lo suficientemente grande, la vibración de la cuerda produce un sonido musical debido a las ondas estacionarias o modos normales
- La solución del problema anterior es una superposición de soluciones de producto llamadas ondas estacionarias o modos normales

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

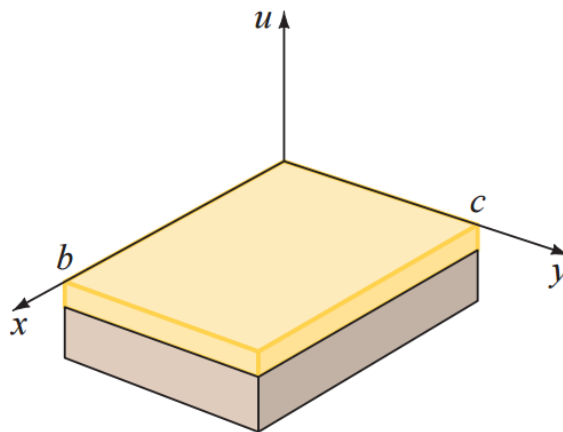
- Hasta ahora se han resuelto problemas de valores de frontera que involucraban ecuaciones unidimensionales para el calor y las ondas. Es posible extender el método de separación de variables a problemas que requieren las versiones bidimensionales para estas ecuaciones diferenciales parciales
- Suponiendo que la región rectangular del gráfico es una placa en la que la temperatura u es una función del tiempo y la posición (x, y) , entonces, bajo condiciones adecuadas $u(x, y, t)$ se puede demostrar que se satisface la siguiente ecuación:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$



- En el caso de lidiar con esta ecuación, los BVP tendrán que especificar condiciones de frontera para los dos valores de x y para y , además de modificar la función f y g para (x, y) en la condición inicial
- Por otra parte, suponiendo que en el gráfico se representa un marco rectangular sobre una membrana fina flexible que se ha estirado (como un tambor rectangular), si esta membrana está en movimiento, su desplazamiento u , medido desde el plano xy (vibraciones transversales), también es una función de t y de la posición xy . Por lo tanto, cuando las vibraciones son pequeñas, libres y no hay amortiguación, $u(x, y, t)$ satisface la siguiente ecuación bidimensional:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



- En el caso de lidiar con esta ecuación, los BVP tendrán que especificar condiciones de frontera para los dos valores de x y para y , además de modificar la función f y g para (x, y) en la condición inicial
- En este caso, para separar variables en ambos problemas, se asume una solución del producto en forma $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. En este caso se ven resultados

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''YT \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''T \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XYT'$$

- En este caso, se sustituyen los valores en la ecuación, lo cual permite obtener una ecuación que depende de 3 tipos de funciones diferentes, y eso permite fijar dos valores constantes λ y μ para obtener tres ecuaciones diferenciales diferentes
- Esto, en general, permite obtener dos problemas de Sturm-Liouville que permiten considerar varios casos, que llevan a obtener conjuntos de valores propios y funciones propias
- Después de esto, se obtienen las soluciones para los diferentes problemas y se multiplican entre ellas, para después usar el principio de superposición y obtener una solución basada en series

Los problemas de valores de frontera en otras coordenadas

Las transformaciones integrales

- El método de separación de variables es útil pero no es un método universalmente aplicable para resolver BVPs: si la ecuación diferencial parcial no es homogénea, si las condiciones de frontera dependen del tiempo, si el dominio de la variable espacial es un intervalo que incluye infinito, etc. Una manera de poder resolver problemas de manera más cómoda es a través de transformaciones integrales como la transformación de Laplace
 - La transformación de Laplace de una función $f(t)$ con $t \geq 0$ se define como $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ cuando la integral impropia converge, y esta transforma la función $f(t)$ en una función F del parámetro de transformación s

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

- Similar a lo que se ha visto anteriormente para las ODEs, ahora esta transformación se puede usar para resolver PDEs lineales
- No obstante, ahora se ve como la PDE lineal con coeficientes constantes se puede transformar en una ODE, en vez de una ODE transformada a una ecuación algebraica
- Los BVPs que se consideran normalmente involucran ecuaciones unidimensionales del calor o de ondas o una pequeña variación de estas.

Estas PDEs involucran una función desconocida de dos variables independientes $u(x, t)$

- La transformada de Laplace de la función $u(x, t)$ con respecto a t se define de la siguiente manera, donde x se trata como un parámetro:

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt$$

- Se sigue usando la convención de utilizar letras mayúsculas para denotar la transformada de una función:

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s)$$

- Las transformadas de las derivadas parciales se pueden obtener de manera análoga a las derivadas para una ODE:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u'(x, t) dt = e^{-st} u(x, t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} u(x, t) dt \\ &= -u(x, 0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = -u(x, 0) + s \mathcal{L}[u(x, t)] = \\ &= -u(x, 0) + sU(x, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u''(x, t) dt = e^{-st} u'(x, t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} u'(x, t) dt = \\ &= -u'(x, 0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} u'(x, t) dt = -u'(x, 0) + s \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \\ &= -u'(x, 0) - su(x, 0) + s^2 U(x, s) \end{aligned}$$

- Debido a que se está transformando con respecto a t , se supone que es legítimo intercambiar la integración y diferenciación en la transformación $\partial^2 u / \partial x^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [e^{-st} u(x, t)] dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} [e^{-st} u(x, t)] dt = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\end{aligned}$$

- A partir de estos últimos resultados, se puede ver como la transformada de Laplace es adecuada para resolver problemas con condiciones iniciales (ya que se tienen términos con $t = 0$ en los resultados)
- Para poder solucionar las ecuaciones, se transforman ambos lados de la ecuación y se obtiene una ecuación diferencial ordinaria que se puede resolver más fácilmente

$$\begin{aligned}k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} &\Rightarrow \mathcal{L}\left[k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \\ \Rightarrow k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - sU &= -u(x, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\Rightarrow \mathcal{L}\left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \\ \Rightarrow a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U &= -u_t(x, 0) - su(x, 0)\end{aligned}$$

- La transformada de Laplace con respecto a t tanto de la ecuación de ondas como de la ecuación del calor elimina esta variable t , por lo que las ecuaciones unidimensionales se convierten en EDOs de la variable espacial x (tratando s como un parámetro todo el rato)