DERIVADOS Y FINANZAS CUANTITATIVAS

Iker Caballero Bragagnini

Tabla de contenido

Los derivados financieros

- Un derivado financiero se puede definir como un instrumento financiero cuyo valor depende o deriva de los valores variables subyacentes más básicas. Es muy común que las variables subyacentes de los derivados sean los precios de activos comerciados, aunque pueden depender de casi cualquier variable
    - El valor se deriva a través de una transformación del valor del subyacente, el cual hace que haya una recompensa específica para el derivado (conocido como perfil de recompensa o *payoff profile*)
        - El perfil de recompensa define únicamente las diferentes clases de derivados, y la transformación a la que uno se refiere es una función matemática del precio del subyacente $h^{id}(S_T)$, en donde S_T es el precio del subyacente y id se refiere al identificador del derivado
    - En general, los derivados se pueden dividir en dos clases mayoritarias: los compromisos futuros y los reclamos contingentes
        - Los compromisos futuros son aquel tipo de derivados en los que, en un punto futuro en el tiempo, una transacción ocurrirá de manera segura. En estos contratos, la fecha, el precio y la cantidad nocional son fijas, y ambas partes están obligadas a llevar a cabo la transacción
        - Los reclamos contingentes, en cambio, son aquel tipo de derivados que proporcionan un derecho, pero no una obligación para el comprador del instrumento. Ejercer este instrumento depende del desarrollo del subyacente, y como el reclamo por parte del comprador de vender o comprar algo depende de un resultado aleatorio, se denominan reclamos contingentes
- Los derivados financieros normalmente se comercian en bolsas de derivados y en mercados al por mayor o *over-the-counter*
    - Una bolsa de derivados es un mercado en donde los individuos comercian contratos estandarizados que han sido definidos por la misma bolsa
        - Estos mercados existen desde hace mucho tiempo, y los más famosos eran el CBOT (*Chicago Board of Trade*) y el CME (*Chicago Mercantile Exchange*), los cuales se fusionaron para crear el grupo CME (que incluye el COMEX y el KCBT). A día de hoy, los derivados financieros se pueden comerciar en muchas bolsas alrededor del mundo

        - Una vez que dos comerciantes han acordado un intercambio, este se gestiona por la *clearing house* de la bolsa, la cual es un intermediario entre dos comerciantes y gestiona los riesgo, causando que los intercambios se hagan con esta institución y no directamente con los comerciantes

        - La ventaja de este intermediario es que los comerciantes no tienen que preocuparse de la solvencia del otro, ya que la *clearing house* se encarga del riesgo crediticio al requerir que cada uno de los dos comerciantes depositen fondos (conocidos como margen) en ella para asegurar que cumplirán con sus obligaciones

    - Tradicionalmente, las bolsas de derivados han utilizado un sistema llamado sistema de gritos abierto o *open outcry system*, en donde los comerciantes quedaban físicamente en el edificio de la bolsa, gritaban, y utilizaban un conjunto de señales manuales para indicar sus intercambios

        - Las bolsas han reemplazando ampliamente este sistema por el comercio electrónico, de modo que los comerciantes que entran en un intercambio pueden hacerlo a través de sus computadoras, y una computadora junta comerciantes automáticamente

        - Este tipo de comercio ha llevado a un crecimiento del comercio de derivados algorítmico y de alta frecuencia, en donde programas de computadora inician y salen de intercambios sin interacción humana

    - No obstante, no todos los derivados se comercian en bolsa, sino que muchos intercambios se dan en el mercado *over-the-counter* (OTC)

        - Los bancos y otras instituciones financieras, los gestores de fondos y las corporaciones son los principales participantes en los mercados de derivados OTC

        - Una vez un intercambio se ha acordado, las dos partes tienen que presentarse a una contraparte central (CCP), que actúa como una clearing *house*, o honorar el intercambio bilateralmente, de modo que tienen que firmar un acuerdo cubriendo todas las transacciones con la otra parte

        - Los temas cubiertos en el acuerdo incluyen las circunstancias bajo las cuales las transacciones restantes pueden ser terminados y como se calcula el colateral (si hay) que se tiene que poner

- Un derivado relativamente simple es el contrato *forward*, el cual es un acuerdo para comprar o vender un activo en un momento exacto en el futuro por un precio exacto

- Un contrato *forward* se comercia en un mercado OTC, normalmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes

  - Una de las partes del contrato asume la posición larga o *long position* y acuerda comprar el activo subyacente en un cierto momento futuro especificado y por un precio especificado

  - La otra parte toma la posición corta o *short position*, y acuerda vender el activo en la misma fecha y por el mismo precio

- Hay varias razones por las cuales se entraría en un contrato de este tipo, algunas de las cuales son las siguientes:

  - En un contrato de este tipo, se sabe exactamente cuanto se paga o se recibe en el futuro, de modo que no hay riesgo de precio

  - Debido a que las dos partes están comprometidas legalmente a honrar el contrato, el riesgo de transacción se reduce ampliamente

- Los *forwards* en tipos de cambio son muy populares, dado que muchos bancos grandes emplean a comerciantes de tipos de cambio actuales o *spot* y para *forwards*

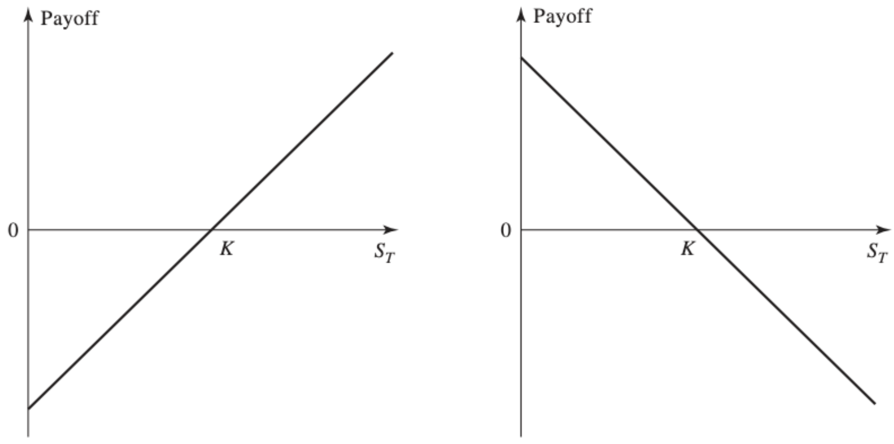
  - El precio de un tipo de cambio indica cuantas unidades de la primera moneda se tiene que pagar para obtener una unidad de la segunda moneda. El *bid price* es el precio al que se compra la segunda moneda, mientras que el *offer* o *ask price* es el precio al que se vende la segunda moneda

Table 1.1 Spot and forward quotes for the USD/GBP exchange rate, May 6, 2013 (GBP = British pound; USD = US dollar; quote is number of USD per GBP).

	Bid	*Offer*
Spot	1.5541	1.5545
1-month forward	1.5538	1.5543
3-month forward	1.5533	1.5538
6-month forward	1.5526	1.5532

- Los *forwards* se pueden usar para cubrir el riesgo de tipo de cambio

- En general, la recompensa de una posición larga y una posición corta son las siguientes:



(a) (b)

$$h^{for.}(S_T) = \begin{cases} S_T - K & for\ long \\ K - S_T & for\ short \end{cases}$$

- En este caso, K es el *delivery price* (el precio acordado por el activo) y S_T es el precio *spot* del activo en la fecha de vencimiento del contrato

- Debido a que no cuesta nada entrar en el contrato *forward*, la recompensa del contrato es equivalente a la ganancia o pérdida total del contrato

- Los contratos de futuros o *futures* son como los contratos *forward*, de modo que son un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en momento exacto en el tiempo y por un precio exacto, pero se diferencian en algunos aspectos

  - A diferencia de los *forwards*, los contratos de futuros normalmente se comercian en una bolsa

    - Para hacer posible los intercambios, las bolsas especifican ciertas características estandarizadas del contrato

    - Debido a que las dos partes del contrato no necesariamente se conocen, la bolsa también proporciona un mecanismo que garantiza a las dos partes de que el contrato se honrará

  - Las principales bolsas en las que los contratos de futuros se comercian son la CBOT y la CME (el grupo CME)

        - En estas y otras bolsas alrededor del mundo, un gran rango de productos y activos financieros forman los subyacentes de varios contratos

        - Los precios de futuros se informan regularmente a través de la prensa financiera y otros medios

- Las opciones son reclamos contingentes que proporcionan un derecho al comprador para ejercer este instrumento dependiendo del desarrollo del subyacente, habiendo varios subyacentes posibles y comerciándose tanto en bosas como en mercados OTC

    - Existen dos tipos de opciones: las *call options*, que son opciones que proporcionan el derecho a comprar el subyacente en una fecha y por un precio determinado, y las *put options*, que son opciones que proporcionan el derecho a vender el subyacente de la misma manera

        - El precio en el contrato se conoce como precio de ejercicio o *strike price*, mientras que la fecha se conoce como día de expiración o vencimiento (en inglés, *maturity*)

    - Además, existen principalmente dos tipos de opciones (tanto de *calls* como de *puts*) dependiendo de cuando se puede ejercer el instrumento: las opciones americanas y las europeas

        - Las opciones americanas son opciones que se pueden ejercer en cualquier momento hasta el vencimiento

        - Las opciones europeas se pueden ejercer solo en la fecha de vencimiento

        - La mayoría de opciones comerciadas en las bolsas son americanas, pero las opciones europeas son más fáciles de analizar (y algunas de las propiedades de las opciones americanas se deducen de su contraparte europea)

    - Debido a la naturaleza y el tipo de opciones, se puede ver como hay cuatro participantes en el mercado de opciones: los compradores de *calls*, los compradores de *puts*, los vendedores de *calls* y los vendedores de *puts*

        - Los compradores tienen la posición larga en la opción, mientras que los vendedores tienen la posición corta (independientemente del tipo de opción)

        - La venta de una opción también se conoce como la escritura de la opción o *writing the option*

Las mecánicas de los mercados de futuros

- Cuando se desarrolla un nuevo contrato, la bolsa debe especificar en detalle la naturaleza del contrato: el activo, el tamaño del contrato y dónde y cuándo ocurre la entrega

    - A veces se especifican alternativas para el grado del activo que será entregado o para la localización de entrega

        - Como norma general, es la parte con la posición corta la que escoge cuando pasará cuando la bolsa especifica alternativas

        - Cuando la parte en corto está lista para entregar, rellena una notificación de intención de entrega con la bolsa, la cual indica cualquier selección hecha con respecto al grado del activo

    - Cuando el activo es un producto básico o *commodity*, puede haber una cierta variación en la calidad de lo que está disponible en el mercado, por lo que cuando el activo se especifica, es importante estipular el grado o grados del producto que se pueden aceptar

        - Para algunos productos básicos, se pueden establecer varios grados para la entrega, pero el precio dependerá del grado

    - Los activos financieros en contratos de futuros se suelen definir bien y no hay ambigüedades

        - No obstante, hay características interesantes para futuros con subyacentes como las notas y los bonos del tesoro, que se comercian en el CBOE

        - El vencimiento de los bonos del tesoro suele ser de 15 a 25 años, mientras que el de las notas del tesoro suele ser de 6.5 a 10 años. En ambos casos, la bolsa tiene una fórmula para ajustar los precios recibidos acorde a los cupones y el vencimiento de los bonos a entregar

    - El tamaño del contrato especifica el tamaño del activo que se tiene que entregar bajo un solo contrato

        - Si es muy grande, muchos inversores que quieran cubrir exposiciones relativamente pequeñas o que quieren tomar posiciones especulativas relativamente pequeñas no podrían hacerlo a través de la bola. Si, en cambio, si la cantidad es muy pequeña, el comercio puede ser muy caro debido a que hay un coste asociado a cada contrato comerciado

- El tamaño correcto depende claramente del posible usuario: mientras que el valor del subyacente de un futuro puede tener un valor concreto, el valor puede ser mayor para otros tipos de activos

- En algunos casos, las bolsas han introducido mini contratos para atraer a inversores menores

- Otro aspecto importante de los contratos que se debe definir es la localización de entrega

  - La localización en donde la entrega se realizará se tiene que especificar por parte de la bolsa. Esto es particularmente importante para productos básicos que tienen costes de transporte significativos

  - Cuando localizaciones alternativas son especificadas, el precio de recibido por la parte en la posición corta normalmente se ajusta acorde a la localización escogida por esa parte. El precio tiende a ser mayor cuando la localización escogida es relativamente lejana de las fuentes del producto

- Un contrato de futuros se puede identificar dependiendo de su mes de entrega. La bolsa debe especificar el periodo preciso durante el mes en el que se realiza la entrega, aunque para muchos contratos de futuros, el periodo de entrega es todo el mes

  - El mes de entrega varía de contrato a contrato y se escoge por la bolsa para poder satisfacer las necesidades de los participantes en el mercado

  - En cualquier momento en el tiempo, se comercian contratos para el mes de entrega más próximo y para un número de meses subsiguientes

  - La bolsa especifica cuando el comercio en un mes particular comienza, y también especifica el día en el que el comercio acaba para un contrato. Generalmente, el comercio de estas opciones cesa unos días antes del último día en el que se puede hacer la entrega

- Finalmente, la bolsa también fija las cotizaciones de los precios y fija límites para los precios y las posiciones

        - La bolsa define como los precios serán cotizados. Por ejemplo, los contratos de futuros sobre el crudo se cotizan en dólares y céntimos, mientras los bonos se cotizan en dólares y en 32 céntimos de dólar

        - Para la mayoría de contratos, se especifican límites para el movimiento de precio. Si en un día el precio se mueve por debajo del precio al que cerró el día anterior , el contrato

- Cuando el periodo de entrega de un contrato de futuros se acerca, el precio del futuro converge al precio actual o *spot price* del activo subyacente, y cuando este periodo se alcanza, el precio del futuro equivale al precio *spot*

    - Para ver porqué ocurre esto, se pueden suponer dos situaciones que llevan a una oportunidad de arbitraje: una en la que el precio *spot* del activo está por debajo del precio del futuro K en vencimiento y otra en la que está por encima

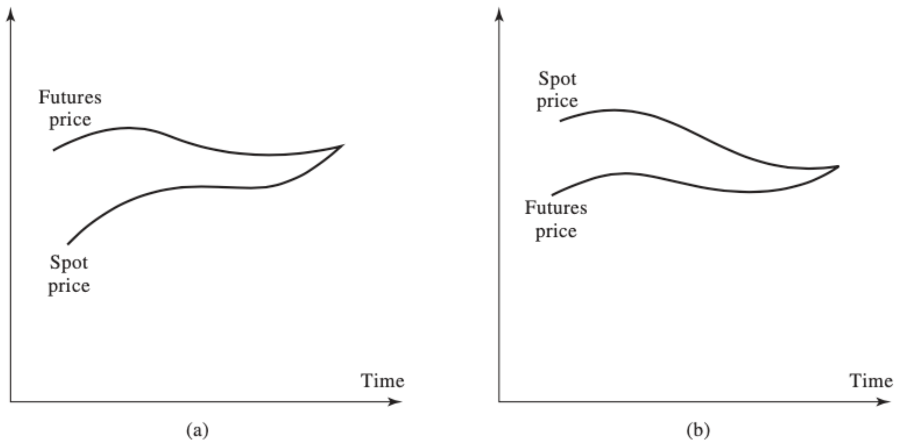
        - Si el precio del futuro K está por encima del *spot* en vencimiento, entonces se puede vender un contrato de futuros y comprar el activo, de modo que se obtiene un beneficio igual a la diferencia entre el precio del futuro (recibido) y el *spot* (lo pagado) y se entregaría el subyacente comprado para recibir la cantidad acordada

        - Cuando los comerciantes explotan esta oportunidad de arbitraje, el precio del futuro K bajará porque los comerciantes lo venderían siempre

        - Lo contrario ocurriría si está por debajo del *spot* en vencimiento: se compraría un contrato de futuros y se vendería en corto el subyacente, de modo que se obtiene un beneficio igual a la diferencia entre el *spot* (recibido) y el precio del futuro (lo pagado) y se recibiría el subyacente para poder devolver el activo al prestamista en corto

        - Cuando los comerciantes explotan esta oportunidad de arbitraje, el precio del futuro K subirá porque los comerciantes lo comprarían siempre

    - El resultado de esto es que el precio de los futuros estará muy cerca o será igual al precio *spot* en el vencimiento



- La convergencia continua ocurre debido a que el valor del contrato fluctúa en tiempo continuo (aunque no su precio) dependiendo de las fluctuaciones del activo subyacente

La determinación de los precios de *forwards* y futuros

- Cuando se consideran contratos de futuros y *forwards*, es importante distinguir entre activos de inversión y activos de consumo
    - Un activo de inversión es un activo que se mantiene para invertir por, al menos, algunos comerciantes
        - Por ejemplo, las acciones y el oro son claramente activos de inversión, aunque haya activos que se pueden utilizar también para otras cosas (como usos industriales, por ejemplo)
    - Un activo de consumo, en cambio, es un activo que se mantiene principalmente para el consumo, y no se mantiene para inversión normalmente
        - Ejemplos de este tipo de activos son el cobre, el petróleo o el maíz
- Muchas de las estrategias de arbitraje presentadas requerirán de la noción de venta en corto o *short-selling*, el cual involucra vender un activo que no se posee, lo cual es posible para algunos activos (no todos)
    - Suponiendo que un inversor quiere vender en corto un activo, el bróker usa el activo de otro inversor y lo vende en el mercado, dándole el dinero al vendedor en corto
        - Después, este mismo inversor tendrá que cerrar su posición comprando el mismo activo para dárselas al bróker y así reemplazar el activo que se tomó de otro

- El inversor que ha vendido en corto obtiene un beneficio si el precio del activo que ha pagado al final es más bajo que el precio del activo cuando lo vendió, pero obtiene una pérdida en caso contrario

- Si en cualquier momento que el contrato sigue vigente el bróker tiene que devolver el activo y no hay otro activo equivalente disponible, el inversor que vendió en corto tiene que cerrar la posición, aunque no esté preparado para ello

- Hay veces que el bróker cobra una comisión al inversor que vende en corto

o La venta en corto sobre todo sirve para poder realizar estrategias de arbitraje

- La norma general del arbitraje es vender aquello con el precio más alto y comprar aquello con el precio más bajo

- Cuando se vende en corto un activo en una estrategia de arbitraje, los ingresos del precio al que se vende se reinvierten al tipo de interés sin riesgo. Como se asume composición continua en la mayoría de casos, el precio S al que se vende tendría un valor futuro de Se^{rT} en el momento final $t = T$

- Si se pide un préstamo de S unidades hasta el vencimiento, entonces se tiene que pagar una cantidad igual a Se^{rT}, por lo que esta cantidad se resta de los beneficios totales de la estrategia

o Un inversor con una posición en corto tiene que pagar al bróker cualquier ingreso proveniente del activo, tal como dividendos o interés, que serían recibidos normalmente al mantener el activo

Table 5.1 Cash flows from short sale and purchase of shares.

	Purchase of shares	
April:	Purchase 500 shares for \$120	−\$60,000
May:	Receive dividend	+\$500
July:	Sell 500 shares for \$100 per share	+\$50,000
		Net profit = −\$9,500
	Short sale of shares	
April:	Borrow 500 shares and sell them for \$120	+\$60,000
May:	Pay dividend	−\$500
July:	Buy 500 shares for \$100 per share	−\$50,000
	Replace borrowed shares to close short position	
		Net profit = +\$9,500

- Por lo tanto, los flujos de efectivo de la venta en corto deben de ser el reflejo de los flujos de efectivo que se reciben si se compra el activo en el momento en el que se vende en corto y venderlo cuando se tendría que comprar el activo para devolverlo

- Se requiere que el inversor mantenga una cuenta de margen o *margin account* con el bróker, la cual consiste en efectivo o activos comerciables depositados por el inversor con el bróker para garantizar que el inversor honrará el acuerdo

    - Se requiere un margen inicial y si hay momentos adversos en el precio del activo que se está vendiendo en corto, se pedirá ingresar un margen adicional. Si este no se proporciona, se cierra la posición en corto del inversor

    - Esta cuenta de margen no representa un coste para el inversor, debido a que el interés normalmente se paga en el balance de las cuentas de margen y, si el interés ofrecido no es aceptable, activos como notas del tesoro se pueden usar para concordar con los requerimientos

    - Los ingresos de la venta del activo pertenecen al inversor y normalmente forman parte del margen inicial

- Para poder desarrollar la teoría sobre el precio del *forward* para un activo de inversión y para futuros, es necesario realizar suposiciones y utilizar una notación concreta

  - Se asume que las siguientes suposiciones se cumplen para todos los participantes del mercado:

    - Los participantes del mercado no están sujetos a costes de transacción cuando se comercia

    - Los participantes del mercado están sujetos a la misma tasa impositiva en todos los beneficios del comercio de activos

    - Los participantes del mercado pueden tomar prestado dinero al mismo tipo de interés sin riesgo al que pueden dar préstamos

    - Los participantes del mercado pueden sacar ventaja de oportunidades de arbitraje que ocurran

  - No se requiere que estas suposiciones sean ciertas para todos los participantes del mercado

    - Solo se requiere que sean verdad (o al menos aproximadamente verdad) para unos pocos participantes del mercado como los grandes comerciantes de derivados

- Son las actividades comerciales de estos principales participantes del mercado y su voluntad de sacar ventaja de las oportunidades de arbitraje que ocurren lo que determina la relación entre los precios de *forwards* y los *spot*

- La siguiente notación se utilizará para el desarrollo más formal:

  - El tiempo hasta la fecha de entrega en un contrato de *forward* o un futuro se denota por T

  - El precio de un activo subyacente en un contrato de *forward* o un futuro se denota por S_0

  - El precio de un contrato de *forward* o un futuro se denota por F_0

  - El tipo de interés anual sin riesgo de un bono sin cupones (expresado en tiempo continuo) en un contrato de *forward* o un futuro se denota por T

- El contrato de *forward* más fácil de valorar es uno escrito en un activo de inversión que no proporciona ningún ingreso, talles como acciones que no pagan dividendos o bono de cupón cero

  - Considerando un contrato *forward* en un activo de inversión con precio S_0 que no proporciona ingresos, la relación entre F_0 y S_0 se determina por la siguiente ecuación:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

    - Si $F_0 > S_0 e^{rT}$, los arbitrajistas pueden comprar el activo y vender en corto el contrato *forward*, mientras que si $F_0 < S_0 e^{rT}$, los arbitrajistas pueden vender en corto el activo y comprar el contrato *forward*

Table 5.2 Arbitrage opportunities when forward price is out of line with spot price for asset providing no income. (Asset price = \$40; interest rate = 5%; maturity of forward contract = 3 months.)

Forward Price = \$43	***Forward Price = \$39***
Action now:	*Action now*:
Borrow \$40 at 5% for 3 months	Short 1 unit of asset to realize \$40
Buy one unit of asset	Invest \$40 at 5% for 3 months
Enter into forward contract to sell asset in 3 months for \$43	Enter into a forward contract to buy asset in 3 months for \$39
Action in 3 months:	*Action in 3 months*:
Sell asset for \$43	Buy asset for \$39
Use \$40.50 to repay loan with interest	Close short position
	Receive \$40.50 from investment
Profit realized = \$2.50	Profit realized = \$1.50

        - Un contrato *forward* largo o la compra del activo en el momento $t = 0$ conlleva tener el activo en el momento $t = T$

        - El precio del *forward* es mayor al precio *spot* por el coste de financiar la compra *spot* del activo durante la vida del contrato *forward*

    - Aunque las compras en corto no son posibles para todos los activos de inversión y a veces una comisión se carga por tomar prestado los activos, esta no es necesaria siempre que el activo solo se use para inversión

        - Suponiendo que el subyacente no tiene costes de almacenaje ni ingresos, si $F_0 > S_0e^{rT}$, un inversor puede adoptar la siguiente estrategia: tomar prestado S_0 a un tipo de interés r por T años, comprar una unidad del activo por S_0 y estar en corto en un *forward* para el activo

        - En el momento T, el activo se vende a F_0 y se requiere pagar S_0e^{rT} al prestamista, por lo que se obtiene un beneficio equivalente al siguiente:

$$F_0 + S_0 - S_0 - S_0e^{rT} = F_0 - S_0e^{rT} > 0$$

        - Suponiendo que el subyacente no tiene costes de almacenaje ni ingresos, si $F_0 < S_0e^{rT}$, un inversor puede adoptar la siguiente estrategia: prestar S_0 a un tipo de interés r por T años, vender en corto una unidad del activo por S_0 y estar en largo en un *forward* para el activo

        - En el momento T, el activo se compra a F_0 y se obtiene S_0e^{rT} del préstamo, por lo que se obtiene un beneficio equivalente al siguiente:

$$S_0e^{rT} + S_0 - S_0 - F_0 = S_0e^{rT} - F_0 > 0$$

        - Se puede esperar que el precio del *forward* se ajuste si se aprovechan estas oportunidades de arbitraje, por lo que la ecuación anterior de F_0 se mantiene

- También es posible considerar el caso en el que un activo de inversión proporciona un ingreso en efectivo o un rendimiento totalmente predecible para el poseedor

    - Cuando un activo de inversión proporciona un ingreso con un valor presente de I durante la vida del contrato *forward*, entonces el precio del *forward* es el siguiente:

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}$$

- En el caso en el que haya múltiples ingresos predecibles, pero en diferentes momentos dentro de la vida del contrato, entonces se tiene que descontar cada ingreso por su factor (anualizado) correspondiente (no solo por e^{rT} al final de la vida útil)

$$F_0 = S_0 e^{rT} - \sum_{t=t_1}^{T} I_t e^{rt} \quad where \ \ t_1 < t_2 < \cdots < T$$

- Si $F_0 > (S_0 - I)e^{rT}$, un arbitrajista puede comprar el activo y tener la posición corta en el contrato *forward* en el activo, mientras que si $F_0 < (S_0 - I)e^{rT}$, el arbitrajista puede vender en corto el activo y entrar en la posición larga del *forward*

Table 5.3 Arbitrage opportunities when 9-month forward price is out of line with spot price for asset providing known cash income. (Asset price = \$900; income of \$40 occurs at 4 months; 4-month and 9-month rates are, respectively, 3% and 4% per annum.)

Forward price = \$910	*Forward price = \$870*
Action now:	*Action now*:
Borrow \$900: \$39.60 for 4 months and \$860.40 for 9 months	Short 1 unit of asset to realize \$900
Buy 1 unit of asset	Invest \$39.60 for 4 months and \$860.40 for 9 months
Enter into forward contract to sell asset in 9 months for \$910	Enter into a forward contract to buy asset in 9 months for \$870
Action in 4 months:	*Action in 4 months*:
Receive \$40 of income on asset	Receive \$40 from 4-month investment
Use \$40 to repay first loan with interest	Pay income of \$40 on asset
Action in 9 months:	*Action in 9 months*:
Sell asset for \$910	Receive \$886.60 from 9-month investment
Use \$886.60 to repay second loan with interest	Buy asset for \$870
	Close out short position
Profit realized = \$23.40	Profit realized = \$16.60

- Si las ventas en corto no son posibles, los inversores que poseen el activo pueden obtener beneficios si venden este activo y entran en un contrato en largo. Aquellos que no lo tienen podrían comprar el activo y entrar en la posición corta en el *forward*, lo cual causaría el mismo efecto de convergencia a la fórmula anterior

- Definiendo q como el rendimiento medio por año en un activo durante la vida del contrato *forward* con composición continua, se puede demostrar que la fórmula para el precio del contrato es la siguiente:

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

- La misma lógica de no arbitraje que se ha presentado en el caso de los ingresos aplicaría en este caso, solo que teniendo en cuenta que ahora se divide por e^{qT}, que es el rendimiento medio anual obtenido del subyacente

- A partir de entender el cómo se determina el precio de un contrato *forward*, es posible entender el valor de estos contratos

  - El precio del *forward* no es lo mismo que el valor del *forward*, aunque puedan sonar igual

    - El precio del *forward* se refiere al precio que se paga a cambio del activo subyacente en el momento $t = T$, mientras que el valor se refiere al valor del contrato en si

    - El valor del contrato puede cambiar durante la vida del contrato dependiendo de las fluctuaciones en el precio de subyacente, lo cual cambio el precio *spot* esperado en $t = T$

  - Con tal de tener una transacción justa, el valor del contrato en el momento en el que se entra en el contrato debe de ser nulo, y al final de la vida del contrato, el valor puede ser positivo o negativo

    - Se asume que el valor inicial es nulo debido a que, si no, el comprador o vendedor tendrían una ventaja sobre su contraparte al comenzar el contrato (no es justo)

    - Es importante valorar el contrato cada día para los bancos e instituciones financieras (hacer *marking-to-market* del contrato)

  - La variable F_0 es el precio *forward* que sería aplicable si se negociara el contrato en el momento actual t, mientras que f_t es el valor del contrato en t

    - En el comienzo de la vida del contrato (en $t = 0$), el precio de entrega K se iguala al precio del *forward* en ese momento, por lo que el valor del contrato, f, es nulo

    - Mientras el tiempo pasa, K se queda igual (porque es parte de la definición del contrato) pero el precio del *forward* cambia, y el valor del contrato se convierte en positivo o negativo

  - Como un resultado general, aplicable a todos los contratos *forward* largos (tanto para activos de inversión como para activos de consumo) es el siguiente:

$$f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

- Para ver por qué esta ecuación es correcta, se puede considerar una cartera compuesta por un contrato *forward* para comprar el subyacente por K en T y un contrato *forward* vendiendo el subyacente por F_0 en T. La recompensa total sería la siguiente, la cual, si se descuenta al momento actual $t = 0$, se obtiene la fórmula anterior:

$$S_T - K + F_0 - S_T = F_0 - K \quad \Rightarrow \quad f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

- Como esta cartera no tiene ningún riesgo, se descuenta con el tipo de interés sin riesgo

- El valor del contrato *forward* para vender el contrato por F_0 es nulo porque F_0 es el precio del *forward* que aplica al contrato de *forward* en el que se ha entrado hoy. Por lo tanto, los valores para una posición larga y corta sobre el mismo *forward* son los siguientes:

$$(long) \quad f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

$$(short) \quad f = (K - F_0)e^{-rT}$$

- Debido a que $F_0 = S_0 e^{rT}$, se pueden obtener unas fórmulas simplificadas para el valor de una posición larga en un *forward*

$$f = S_0 - Ke^{-rT}$$

  - Si el activo proporciona ingresos conocidos, entonces se puede usar la siguiente fórmula:

$$f = S_0 - I - Ke^{-rT}$$

  - Si el activo proporciona un rendimiento conocido, entonces se puede usar la siguiente fórmula:

$$f = S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

- Cuando el precio de un futuro cambia, la pérdida o ganancia en el contrato de futuros se calcula como el cambio en el precio del futuro multiplicado por la posición

  - Esta ganancia se realiza casi inmediatamente porque el contrato de futuros se liquida diariamente. No obstante, para un contrato *forward*, la ganancia o pérdida es el valor presente multiplicado por la posición

Las propiedades de las opciones sobre acciones

- Ahora se deriva una relación importante entre los precios de las opciones *puts* y las *calls* europeas que tienen el mismo precio de ejercicio y el mismo vencimiento
  - Se pueden considerar dos carteras: una A con una *call* y un bono de cupón cero que proporciona una recompensa K en el momento T, y otra B con una *put* y una acción
    - Se asume que las acciones no dan dividendos y que las opciones tienen el mismo precio de ejercicio y vencimiento. El bono valdrá K en el momento T
    - Si el precio S_T es mayor a K, entonces la primera cartera tendrá un valor $V_A = (S_T - K) + K = S_T$ en el momento T, mientras que la otra cartera valdrá $V_B = S_T$. Si, en cambio, el precio es menor a K, entonces $V_A = K$ y $V_B = (K - S_T) + S_T = K$

Table 11.2 Values of Portfolio A and Portfolio C at time T.

		$S_T > K$	$S_T < K$
Portfolio A	Call option	$S_T - K$	0
	Zero-coupon bond	K	K
	Total	S_T	K
Portfolio C	Put Option	0	$K - S_T$
	Share	S_T	S_T
	Total	S_T	K

    - Por lo tanto, ambas carteras valen $\max\{S_T, K\}$ en la fecha de vencimiento
  - Debido a que las opciones son europeas (no se pueden ejercer antes de T), ambas carteras tienen los mismos flujos de caja y, por tanto, tienen que valer lo mismo en el momento actual
    - De no ser así, habría una oportunidad de arbitraje, la cual se resume en la siguiente tabla:

Table 11.3 Arbitrage opportunities when put–call parity does not hold. Stock price = \$31; interest rate = 10%; call price = \$3. Both put and call have strike price of \$30 and three months to maturity.

Three-month put price = \$2.25	*Three-month put price = \$1*
Action now:	*Action now:*
Buy call for \$3	Borrow \$29 for 3 months
Short put to realize \$2.25	Short call to realize \$3
Short the stock to realize \$31	Buy put for \$1
Invest \$30.25 for 3 months	Buy the stock for \$31
Action in 3 months if $S_T > 30$:	*Action in 3 months if $S_T > 30$:*
Receive \$31.02 from investment	Call exercised: sell stock for \$30
Exercise call to buy stock for \$30	Use \$29.73 to repay loan
Net profit = \$1.02	Net profit = \$0.27
Action in 3 months if $S_T < 30$:	*Action in 3 months if $S_T < 30$:*
Receive \$31.02 from investment	Exercise put to sell stock for \$30
Put exercised: buy stock for \$30	Use \$29.73 to repay loan
Net profit = \$1.02	Net profit = \$0.27

- Por lo tanto, se puede establecer una relación entre los valores o precios de las opciones en el momento actual $t = 0$, la cual se llama paridad *put-call* o *put-call parity*

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

- Esta paridad permite ver que el valor de una *call* o de una *put* europea se puede deducir a partir del valor de la otra opción, con el mismo precio de ejercicio y el mismo vencimiento

- La paridad solo se mantiene para opciones europeas. No obstante, también es posible derivar algunos resultados para precios de opciones americanas

  - Es posible demostrar que, cuando no hay dividendos, la siguiente desigualdad doble se cumple:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

- A partir del desarrollo sobre las propiedades de las opciones sobre acciones, es posible analizar las *calls* y las *puts*

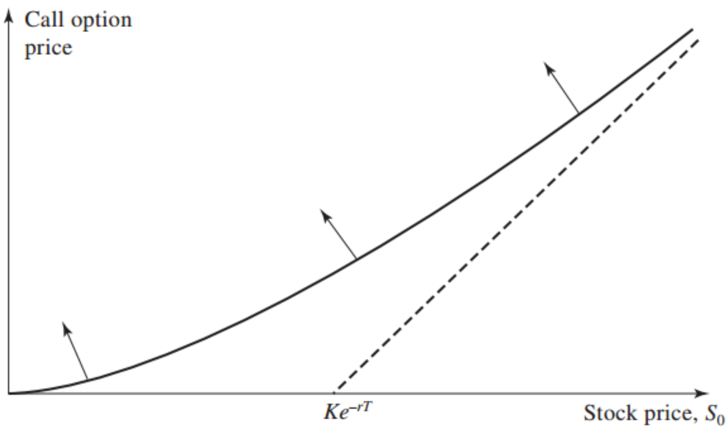
  - Es posible demostrar cómo no hay ventaja alguna en ejercer una opción americana antes del vencimiento si el inversor quiere mantener una acción subyacente que no paga dividendos para el resto de vida útil de la opción

    - De manera lógica, si se paga el precio de ejercicio K en expiración, entonces la cantidad K puede ganar interés, y como la acción no tiene dividendos, no se sacrifica ingresos. Otra ventaja es que puede haber una posibilidad de que la acción se devalúe en el futuro, de modo que no se hubiera querido ejercer

- Matemáticamente, se puede utilizar la expresión para la cota inferior del precio de una opción europea para ver cómo, debido a que $C_{EU} \leq C_{US}$ y a que $r > 0$, el valor de la opción siempre será mayor a su valor intrínseco antes del vencimiento (no es óptimo ejercer antes, dado que se igualarían en algún punto)

$$C_{EU} \geq S - Ke^{-rT} \;\; \Rightarrow \;\; C_{US} \geq S - Ke^{-rT}$$

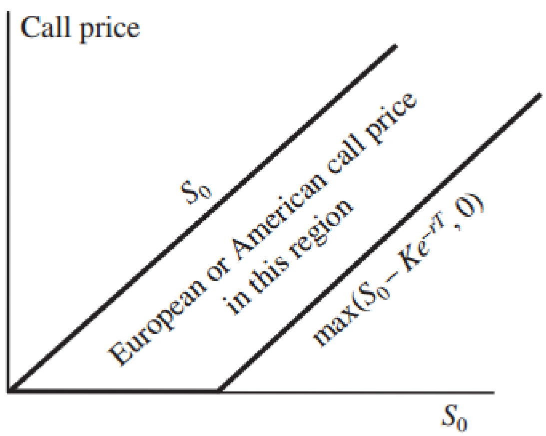
$$\Rightarrow \;\; C_{US} \geq S - Ke^{-rT} \geq S - K \;\; \Rightarrow \;\; C_{US} \geq S - K$$



- Debido a que una opción *call* americana no se debe ejercer antes si no hay dividendos, entonces $C_{US} = C_{EU}$ para acciones subyacentes sin dividendos. Por lo tanto, la cota inferior y la cota superior de estas, respectivamente, serán las siguientes:

$$(upper) \;\; \max(S - Ke^{-rT})$$

$$(low) \qquad\qquad S$$



- A diferencia de las *calls*, es óptimo ejercer *puts* sobre acciones subyacentes que no pagan dividendos antes del vencimiento si está lo suficientemente *in the money*

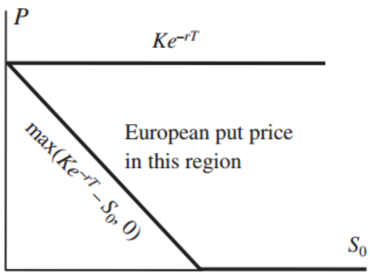
  - Cuando una *put* se mete en cartera junto a la acción, el inversor está protegido contra el precio de la acción baje a cierto nivel. Sin embargo, a diferencia de una *call*, puede ser óptimo dejar esa protección que proporciona una *put* para obtener la recompensa

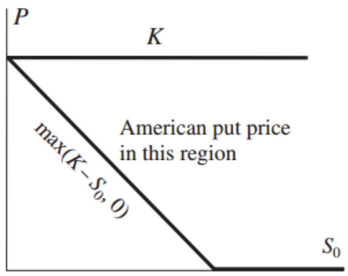
  - En general, el ejercicio temprano de la *put* se vuelve más atractivo cuando S decrece, r incrementa y/o σ decrece

  - Para una *put* americana para un subyacente sin dividendos, si se ejerce antes del vencimiento, entonces $P_{US} \geq \max(K - S, 0)$, la cual es más fuerte que la cota inferior para una *put* europea $P_{EU} \geq \max(Ke^{-rT} - S, 0)$. Y usando el hecho de que $P_{US} \leq K$, entonces se pueden establecer las siguientes cotas inferiores y superiores, respectivamente:

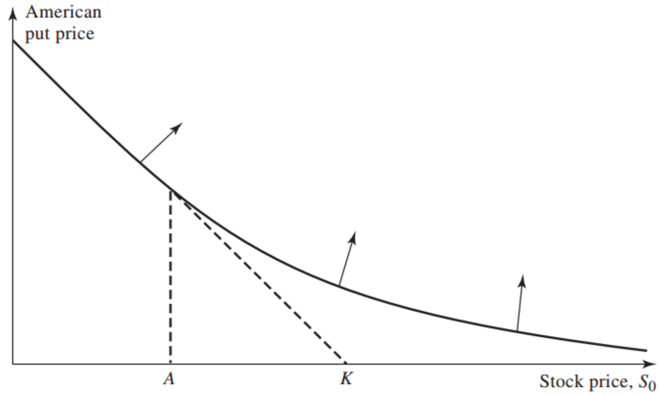
$$(upper) \qquad \max(K - S, 0)$$

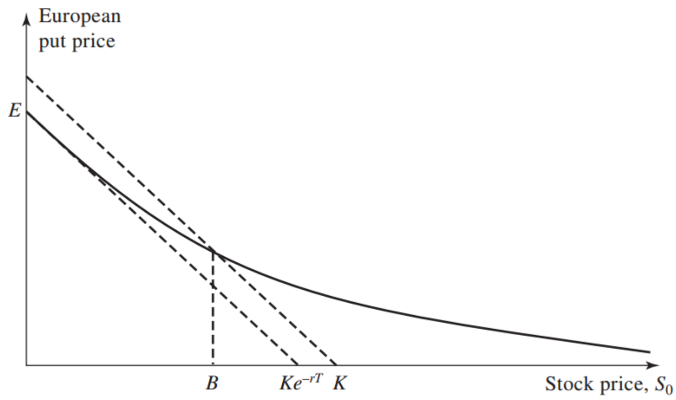
$$(low) \qquad K$$





  - Debido a que hay circunstancias en las que es más deseable ejercer un *put* americano, entonces $P_{US} > P_{EU}$. Además, como un *put* americano vale su valor intrínseco algunas veces, la opción europea debe valer menos que su valor intrínseco algunas veces (debido a la desigualdad propuesta), haciendo que, a la vez, la curva que representa la relación entre P_{EU} y S sea menor que la correspondiente a P_{US} y S





El comportamiento aleatorio de los activos

- Existen tres formas de análisis utilizadas normalmente en el mundo financiero: el análisis fundamental, el análisis técnico y el análisis cuantitativo
    - El análisis fundamental trata de determinar el valor correcto de una compañía a través del estudio profundo de sus balances, equipos de gestión, aplicaciones de las patentes, competidores, y otros tipos de información
        - Esta parece una manera razonable de modelar una compañía y, por tanto, el precio de sus acciones. No obstante, este enfoque tiene dos dificultades: la dificultad y la irracionalidad
        - Para poder realizar este tipo de análisis, es necesario conocimiento avanzado de la contabilidad y mucha paciencia. Además, aunque se tuviera el modelo perfecto, no siempre será rentable debido a la irracionalidad presente en el mercado
    - El análisis técnico, en cambio, se centra solo en la información contenida en el historial del precio de las acciones. Este suele consistir en dibujar líneas de tendencia, mirar patrones específicos en los precios y actuar acorde

        - La mayoría de la evidencia y la investigación académica apuntan a que este método no es efectivo

    - El análisis cuantitativo consiste en tratar cantidades financieras como acciones o tipos de interés como una cantidad aleatoria, y después escoger los mejores modelos para esa aleatoriedad

        - Esta forma de análisis ha sido la más exitosa en los últimos 50 años, formando una sólida base para la teoría de la cartera o *portfolio theory*, la valoración de derivados y la gestión del riesgo

- Para poder entender el papel de la aleatoriedad en la teoría de la valoración de opciones, lo mejor es ejemplificar a través de la desigualdad de Jensen

    - Teniendo una función convexa $f(S)$ de una variable aleatoria S, entonces se cumple la desigualdad de Jensen:

$$E[f(S)] \geq f[E(S)]$$

        - Uno se puede hacer a la idea de que tan grande es el término de la derecha si se usa una aproximación de Taylor alrededor de la media de S. Escribiendo $S = \bar{S} + \epsilon$, en donde $E[S] = \bar{S}$ y $E(\epsilon) = 0$, entonces se obtiene la siguiente igualdad:

$$E[f(S)] = E[f(\bar{S} + \epsilon)] = E\left[f(\bar{S}) + \epsilon f'(\bar{S}) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(\bar{S}) + \cdots\right]$$

$$\approx \; f(\bar{S}) + \frac{1}{2}E(\epsilon^2)f''(\bar{S}) = f[E(S)] + \frac{1}{2}f''[E(S)]E(\epsilon^2)$$

        - Por lo tanto, se puede ver como el término de la derecha será mayor al de la izquierda por $(1/2)f''[E(S)]E(\epsilon^2)$

    - Esta derivación permite entender la importancia de dos conceptos: la convexidad y la varianza

        - La convexidad de una opción se puede expresar como $f''[E(S)]$, y como una regla, esto añade valor a la opción. Además, esto quiere decir que cualquier intuición que se pueda obtener de contratos lineales (*forwards* y futuros) puede no ser útil con instrumentos no lineales como las opciones

        - La aleatoriedad del activo subyacente se puede expresar a través de su varianza, representada por $E(\epsilon^2)$

El modelo de Black-Scholes

- Anteriormente se han descrito algunas características de las opciones y los mercados de opciones, tales como de qué depende el valor de las opciones y como esto afecta a la mecánica de los mercados
    - El valor de la una opción será una función de varios parámetros del contrato, además de características propias del activo subyacente y del tipo de interés sin riesgo
        - Por lo tanto, el valor de la opción se puede escribir de la siguiente manera:

$$V(S,t;\sigma,\mu;K,T;r)$$

        - Los punto y coma separan los diferentes tipos de variables y parámetros que afectan al valor. La S y la t son variables; la σ y la μ son parámetros asociados con el precio del activo; K y T son parámetros asociados con el contrato en particular, y r es un parámetro asociado con la divisa en la que cotiza el activo
        - Normalmente, uno no pone todos los parámetros del valor, sino que solo pone las variables S y t para denotar el valor de una opción con respecto a sus variables

$$V(S,t)$$

    - Una simple observación es que el valor de una *call* incrementa si el valor del subyacente incrementa, y baja si el valor del subyacente decrece
        - Esto es un ejemplo de la correlación entre dos instrumentos financieros, y en el caso del *call* la correlación es positiva. En el caso de los *puts*, la correlación es negativa
        - Estas correlaciones se pueden explotar para construir un tipo de cartera especial, la cual permitirá el desarrollo del modelo de Black-Scholes
    - Usando Π para denotar el valor de la cartera de una posición larga en una opción y una posición corta en una cantidad Δ del subyacente, el valor se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

        - El primer término de la derecha es el valor de la opción y el segundo término es la posición corta en el activo. En este caso, Δ sigue siendo una cantidad constante cualquiera

- Se asume que el activo subyacente sigue un camino aleatorio log-normal

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dX$$

- Para saber cómo cambia la cartera de un momento t a un momento $t + \delta t$, se tiene que entender que el valor de la cartera cambia en parte por el cambio en el valor de la opción y en parte por el cambio del subyacente

- De este modo, el cambio se puede expresar de la siguiente manera, en donde Δ no cambia (no se ha anticipado el cambio en S):

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

- Aplicando la fórmula de Itô sobre el valor de la opción, se puede obtener la siguiente expresión:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

$$\Rightarrow\ d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

o La parte derecha de la ecuación contiene dos tipos de términos: un tipo determinístico, donde los términos tienen dt, y otro aleatorio, donde los términos tienen dS

- Pretendiendo que se supiera V y sus derivados, entonces se sabría todo sobre la parte derecha de la ecuación excepto por el valor de dS, la cual nunca se puede saber antes de que se realice

- Estos términos aleatorios, por tanto, son el riesgo de la cartera, y este se puede eliminar en teoría (y casi en la práctica) al escoger cuidadosamente Δ

- Escogiendo $\Delta = \partial V/\partial S$, la aleatoriedad de la cartera se reduce a cero, dado que los términos aleatorios se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS$$

o Cualquier reducción en la aleatoriedad se conoce como *hedging* o cobertura, independientemente de si la aleatoriedad proviene de una fuente u otra. La eliminación perfecta del riesgo explotando la correlación entre dos instrumentos (en este caso una opción y su subyacente) se conoce como *delta hedging*

  - El *delta hedging* es un ejemplo de estrategia de *hedging* dinámico. De un paso en el tiempo al otro, la cantidad $\partial V/\partial S$ cambia, dado que, como V, es una función de las variables S y t, que siempre cambian

  - Esto significa que la cobertura perfecta se debe rebalancear de manera continua (Δ no siempre es la misma cantidad), aunque también es posible no cambiar el valor nunca (llamado *static hedging*)

- Después de escoger la cantidad Δ, se tiene una cartera cuyo valor cambia, sin ningún riesgo (se ha eliminado) por la siguiente cantidad:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

  - Si se tiene un cambio completamente libre de riesgo $d\Pi$ en la cartera con valor Π, entonces este cambio debe ser el mismo que el crecimiento que se obtendría si se pusiera una cantidad equivalente de efectivo en una inversión con interés libre de riesgo, debido al principio de no arbitraje

$$d\Pi = r\Pi dt$$

  - Si $d\Pi > r\Pi dt$ de manera garantizada, entonces uno siempre puede pedir un préstamo de Π e invertirlo en la cartera, obteniendo así un beneficio sin riesgo $d\Pi - r\Pi dt > 0$. En el caso contrario, siempre se puede posicionarse en corto en la opción, hacer *delta hedging* e invertir en una inversión libre de riesgo, obteniendo un beneficio $r\Pi dt - d\Pi > 0$

  - En este punto, se dice que, manteniendo todas las otras cosas iguales, la acción de los inversores comprando y vendiendo para explotar la oportunidad de arbitraje haría que el precio de mercado de la opción se moviera en la dirección que elimina la misma oportunidad de arbitraje

- A partir de haber introducido la cartera para el *delta hedging*, es posible derivar la ecuación de Black-Scholes y construir el modelo de Black-Scholes

  - Sustituyendo las ecuaciones mostradas anteriormente de manera conveniente, se puede obtener la siguiente ecuación, la cual se puede simplificar para obtener la famosa ecuación de Black-Scholes:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt = r\left(V-\frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\sigma^2 S^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0$$

- La ecuación de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica, y la mayoría de ecuaciones diferenciales parciales en finanzas tienen una forma similar

- La mayoría son casi siempre lineales, de modo que, si se tienen dos soluciones a la ecuación, entonces la suma de estas también es una solución. En próximas secciones, no obstante, se estudian modelos resientes que derivan a ecuaciones no lineales

- Las ecuaciones en finanzas también suelen ser parabólicas, lo que significa que están relacionadas a las ecuaciones del calor o la ecuación de difusión de la mecánica. Lo bueno es que estas ecuaciones son relativamente sencillas de resolver

o La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables y parámetros obvios, como el subyacente, el tiempo, y la volatilidad, pero el *drift rate* μ no aparece en ningún momento

- Cualquier dependencia en μ también se eliminó al eliminar el componente dS de la cartera. El argumento económico para esto es que, como se puede cubrir perfectamente la opción con el subyacente, uno no debería ser recompensado por tomar riesgo innecesario: solo el tipo de interés sin riesgo está en la ecuación

- Esto quiere decir que, si dos partes acuerdan sobre la volatilidad del activo, también se acordará el valor de sus derivados, aunque se tengan diferentes estimaciones del *drift*

o Otra manera de mirar el argumento del *hedging* es a través de ver qué pasaría si se tuviera una cartera con una acción en una cantidad Δ y efectivo

- Si Δ es la derivada parcial del valor de una opción, entonces esta cartera daría una cantidad igual a la recompensa o *payoff* de la opción en el vencimiento. En otras palabras, se puede utilizar el argumento de Black-Scholes para replicar una opción al comprar y vender el subyacente (como en esta cartera)

- Esto lleva a la idea de mercado completo. En un mercado completo, una opción se puede replicar con el subyacente, haciendo que las opciones sean redundantes (no es necesario comprar una opción si se puede obtener la misma recompensa comerciando solo el subyacente)

    - No obstante, los mercados suelen ser incompletos por diversos factores como los costes de transacción y la volatilidad estocástica

  - La ecuación de Black-Scholes no sabe nada sobre el tipo de opción que se está valorando: no se sabe el tipo de opción, ni su precio de ejercicio ni su vencimiento. Estos puntos tienen que ver con la condición final de la ecuación

    - Uno tiene que especificar el valor de la opción V como una función del subyacente en la fecha de vencimiento T, por lo que se tiene que prescribir la recompensa o *payoff* $V(S,T)$

    - Si una función es una *call* o una *put*, entonces se tienen que usar las funciones habituales, pero también se puede utilizar cualquier otra función como la de opciones binarias (la función *heaviside*), por ejemplo

$$(call) \quad V(S,T) = \max(S-K,0)$$

$$(put) \quad V(S,T) = \max(K-S,0)$$

$$(bin.call) \quad V(S,T) = \mathcal{H}(S-K)$$

$$(bin.put) \quad V(S,T) = \mathcal{H}(K-S)$$

$$where \ \mathcal{H}(a) = \begin{cases} 1 \ if \ \ a > 0 \\ 0 \ if \ \ a \leq 0 \end{cases}$$

    - Como una observación, se puede ver como el precio del subyacente $V(S,T) = S$ y el dinero de una cuenta bancaria (o un efectivo que obtiene interés r) $V(S,T) = e^{rt}$ también satisfacen la ecuación de Black-Scholes

- En este punto, uno puede mostrar cuales son las suposiciones utilizadas para el desarrollo teórico del modelo

  - El subyacente sigue un camino aleatorio log-normal (esta suposición no es completamente necesaria)

    - Para encontrar soluciones explícitas, se necesita que el término aleatorio en la ecuación diferencial estocástica para S sea proporcional a S. El factor σ no necesita ser constante para encontrar soluciones, pero solo tiene que ser dependiente del tiempo

      - Refiriéndose a la validez de la ecuación, no importa si la volatilidad también depende del precio del activo, pero la solución explícita será difícil si tiene una, o tendrá que ser resuelta numéricamente

      - Independientemente de cuál sea la ecuación diferencial estocástica para el activo S, el dominio sobre el cual el activo puede moverse debe ser de cero a infinito, lo cual elimina el arbitraje. Es posible escoger el término de deriva de modo que el activo se restrinja a este rango (como μS), ya que de otro modo habría una oportunidad de arbitraje

  - El tipo de interés sin riesgo es una función del tiempo conocida (esta suposición permite encontrar una solución explícita)

      - Si r es constante, el trabajo se simplifica mucho, pero en la práctica, el tipo de interés normalmente se toma como una función dependiente del tiempo, pero determinista (se conoce con antelación), y existen fórmulas explícitas para los precios de contratos simples. En la realidad r no se sabe con antelación y es estocástico, o al menos eso parece en los datos

      - Además, se ha asumido que los tipos de interés de un préstamo y de prestar son los mismos, lo cual no suele pasar en la práctica

  - No hay dividendos en el subyacente (esta suposición simplifica la ecuación)

      - Esta suposición se puede obviar fácilmente al generalizar los resultados

  - El *delta hedging* se realiza de manera continua

      - Esta suposición es imposible, dado que la cobertura se tiene que hacer en tiempo discreto. Normalmente, el tiempo entre ajustes de la cobertura dependerá del nivel de costes de transacción del mercado para el subyacente, de modo que mientras menos costes, más frecuente será el ajuste

  - No hay costes de transacción en el subyacente

      - El comercio dinámico del *delta hedging* es en realidad costoso, dado que hay un *bid-ask spread* en la mayoría de subyacentes. En algunos mercados esto importa mucho, pero en otros no lo hace

- No hay oportunidades de arbitraje
    - Obviamente hay oportunidades de arbitraje, y muchos inversores obtienen grandes beneficios al encontrarlas
    - Es extremadamente importante ver que se está obviando el arbitraje basado en los modelos. Esto es muy dudoso, debido a que depende de que se tenga el modelo correcto en primer lugar
    - Es mucho mejor, por tanto, ignorar el arbitraje independiente del modelo, que nace de que dos flujos de caja idénticos tienen valores diferentes. No obstante, esto también puede ser criticado

- Con la ecuación de Black-Scholes y las suposiciones hechas en su desarrollo, es posible generalizar los resultados para poder adaptarlos a diferentes tipos de activos
    - La primera generalización es la valoración de opciones sobre acciones que pagan dividendos. Asumiendo que el activo recibe un rendimiento continuo y constante de dividendos D, entonces en el momento dt cada activo recibe una cantidad $DS\ dt$, lo cual se tiene que factorizar en la derivación de la ecuación de Black-Scholes

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - D\Delta S\ dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - D\frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

    - El último término de $d\Pi$ es la cantidad de dividendo por activo $DSdt$ multiplicado por el número de activos que se tiene $-\Delta$

    - Las opciones sobre divisas se manejan exactamente de la misma manera que al considerar acciones con dividendos. Al mantener la divisa extranjera, se recibe un tipo de interés extranjero r_f, que es lo mismo que recibir un rendimiento de dividendo

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - r_f\Delta S\ dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r_f\frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial V}{\partial t} + (r - r_f) S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

  - De este modo, la derivación es equivalente a la anteriormente vista

- Al considerar las opciones sobre bienes primarios o *commodities*, lo más importante es considerar que tienen un coste de mantenimiento o *costo of carry* asociado, lo cual se tiene que tener en cuenta en la ecuación de Black-Scholes

  - Esto significa que almacenar los bienes primarios es costoso, y se puede introducir una fracción q, que representa una fracción del valor del bien primario que se dedica a pagar el coste de mantenimiento

  - Por lo tanto, solo al tener el bien, esto reduce gradualmente la riqueza del inversor en una cantidad $qS\,dt$ por cada unidad del bien primario (y para cada momento corto en el tiempo)

  - Esto es como tener un rendimiento de dividendo negativo, de modo que, solo cambiando el signo, se puede utilizar la derivación anteriormente vista

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS + q\Delta S\, dt$$

$$\Rightarrow \; \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + q \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial V}{\partial t} + (r + q) S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

- La modificación final del modelo de Black-Scholes se basa en las opciones sobre futuros

  - El precio del futuro de una acción F que no paga dividendos está relacionado con el precio *spot* por la siguiente fórmula, en donde T_F es la fecha de vencimiento de los contratos de futuros:

$$F = e^{r(T_F - t)} S$$

  - Por lo tanto, cambiando las variables, se puede encontrar una solución para $V(S,t) = \mathcal{V}(F,t)$, la cual es más simple que la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \sigma^2 F^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2} - rF = 0$$

- La derivación de la ecuación de Black-Scholes es la clásica, y es similar a la derivación original. No obstante, hay otras maneras de obtener el mismo resultado, tales como el enfoque de martingalas, el modelo binomial o el CAPM

  - Se puede demostrar que el valor de la opción es una esperanza neutral al riesgo. Este resultado es útil, debido a que es la base de la valoración por simulación, y la ecuación diferencial parcial se puede derivar de la esperanza (sin dejar de lado los conceptos de *hedging* y de no arbitraje)

  - El modelo binomial es un modelo de valoración de activos discreto de tiempo discreto para subyacentes, y utiliza los conceptos de *hedging* y de no arbitraje para derivar el algoritmo de valoración para opciones. Tomando el límite cuando el paso temporal tiende a cero, se obtiene la ecuación de Black-Scholes en tiempo continuo

  - El CAPM es un modelo para el comportamiento de los activos de riesgo y un principio y algoritmo para definir y encontrar maneras óptimas de asignar la riqueza entre activos. Las carteras se describen en términos de su riesgo (desviación estándar de los rendimientos) y su crecimiento esperado, y si se incluyen las opciones en este marco, la complitud del mercado para las opciones hace que el riesgo y la recompensa de una opción y sus subyacentes se pueda relacionar con la ecuación de Black-Scholes

Las fórmulas de Black-Scholes y las letras griegas

- La ecuación de Black-Scholes tiene soluciones simples para *calls*, *puts* y otro tipo de contratos, dado que para este caso existen soluciones explícitas. Por lo tanto, es importante explicar y analizar la derivación de estas

  - Se ha visto como Δ, la primera derivada del valor de la opción con respecto a su subyacente, es una cantidad importante para la derivación de la ecuación de Black-Scholes. Las derivadas parciales con respecto a otras variables y parámetros de la ecuación tienen importancia en el precio de la opción

    - Estas derivadas son importantes en la cobertura de una posición de opciones, teniendo roles importantes en la gestión del riesgo, y se podría argumentar que gestionar hacer un *hedging* correcto es más importante que valorar precisamente un contrato

- La razón es que, si uno es preciso con el *hedging*, entonces uno reducirá o eliminará la incertidumbre futura. Esto hace que las pérdidas y ganancias se configuren cuando se compra o se vende el contrato

  - No obstante, si la cobertura no es adecuada, entonces no importa el precio al que se ha vendido el contrato (dentro de unos límites), la incertidumbre futura podría dominar los beneficios iniciales

  - En la vida real, uno está expuesto a más errores, pero esto ilustra la importancia del *hedging* y las derivadas o "letras griegas"

- La ecuación de Black-Scholes se tienen que resolver con condición final dependiendo de la recompensa: cada contrato tendrá una forma funcional diferente prescrita en vencimiento $t = T$, dependiendo del contrato. Esta es la condición final que se tiene que imponer para que la solución sea única

  - El primer paso en la manipulación es cambiar del valor presente al valor futuro. La recompensa se recibe en el momento T, pero se valora la opción en el momento t, por lo que $V(S,t)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}U(S,t)$$

    - Esto hace que la ecuación diferencial sea la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} = 0$$

  - El segundo paso es considerar $\tau = T - t$, debido a que la ecuación es una ecuación hacia atrás o *backward*. Esto hace que la ecuación tome la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S}$$

    - Si se considera la examinación de los rendimientos (más que del precio del subyacente), entonces usando $\xi = \log(S)$, se pueden obtener las siguientes equivalencias para poder reformular la ecuación en términos de ξ:

$$\frac{\partial}{\partial S} = e^{-\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \& \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 S} = e^{-2\xi}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

- Lo que hace esta transformación es llevar un problema definido por $0 \leq S < \infty$ a un problema definido por $-\infty < \xi < \infty$. Además, los coeficientes de la ecuación son constantes, ya que no dependen del precio del subyacente (todo gracias a las propiedades de la normalidad logarítmica del activo)

- El último paso es simple pero no obvio. Si se escribe $x = \xi + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau$ y $U = W(x, \tau)$, entonces esto es una translación del sistema de coordenadas (como usar el precio *forward* del activo en vez del *spot*) y el cambio de variables permite obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

  - En resumen, las igualdades obtenidas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}U(S,t) = e^{-r\tau}U(S, T-\tau) =$$

$$= e^{-r\tau}U\left(e^{\xi}, T-\tau\right) = e^{-r\tau}U\left(e^{x-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}, T-\tau\right) =$$

$$= e^{-r\tau}W(x,\tau)$$

  - La variable x propuesta tiene importancia porque aparece en las fórmulas de Black-Scholes:

$$x = \xi + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau = \log(S) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$$

- Se puede derivar una expresión para el valor de cualquier opción cuya recompensa sea una función sabida del precio del subyacente en vencimiento, la cual tendrá una forma de integral

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\left[\log\left(\frac{S}{S'}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{2\sigma^2(T-t)}} Payoff(S) \frac{dS'}{S'}$$

- A partir de los resultados anteriores, se pueden plantear fórmulas explícitas para casos especiales comunes

  - La función de recompensa de una opción *call* es $Payoff(S) = \max(S-K, 0)$, por lo que la expresión anteriormente vista se puede reescribir de la siguiente manera:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^\infty e^{-\frac{\left[\log\left(\frac{S}{S'}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(S'-K)\frac{dS'}{S'}$$

- Volviendo a utilizar la variable $x' = \log(S')$, la fórmula se puede reescribir de la siguiente manera:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log(K)}^\infty e^{-\frac{\left[\log(S)-x'+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}e^{x'}dx'$$

$$-K\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log(K)}^\infty e^{-\frac{\left[\log(S)-x'+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}dx'$$

- Las dos integrales se pueden escribir como una función de distribución normal estándar con variable x' para alguna d concreta. La segunda ya está en esta forma, pero la primera necesita completar el cuadrado

$$N(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_d^\infty e^{-\frac{1}{2}(x')^2}\,dx'$$

- Por lo tanto, la expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$Call\ option\ value = SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$where\ \ d_1=\frac{\log(S/K)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\quad and$$

$$d_2=\frac{\log(K/S)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

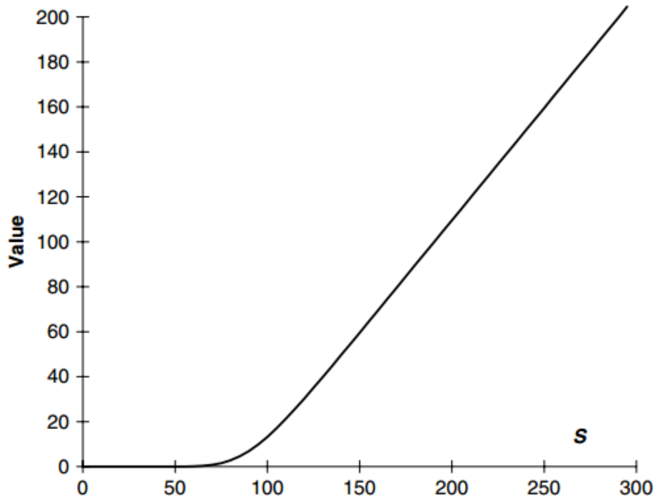
- Si se introduce un rendimiento de dividendo en el subyacente, o es una divisa, entonces se puede obtener la siguiente fórmula:

$$Call\ option\ value = Se^{-D(T-t)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

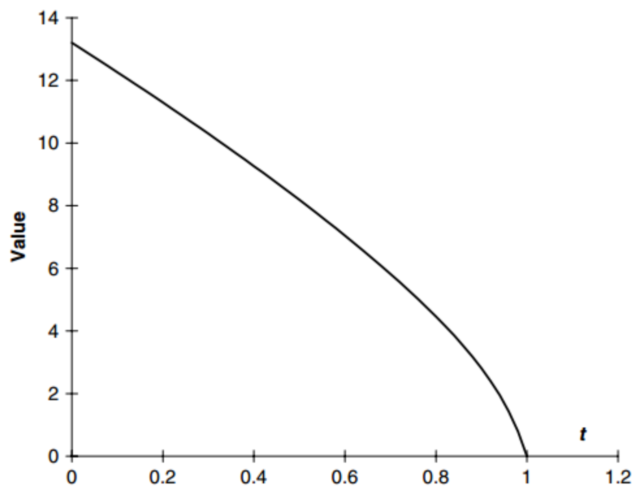
$$where\ \ d_1=\frac{\log(S/K)+\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\quad and$$

$$d_2 = \frac{\log(K/S) - \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

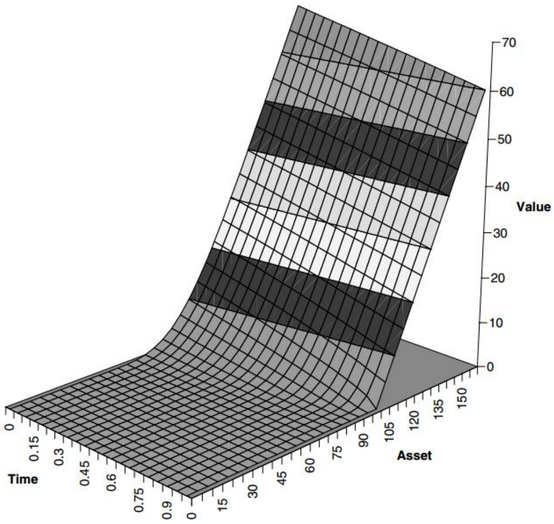
- El valor de la opción se puede representar como una función del subyacente en un tiempo hasta el vencimiento fijo, y se ve como el comportamiento es similar al de su recompensa



- El valor de una *call at-the-money* en función del tiempo tiene un comportamiento negativo, reduciéndose en el tiempo



- Finalmente, el valor del *call* en función del tiempo hasta vencimiento y del valor del subyacente con una superficie



- La función de recompensa de una opción *put* es $Payoff(S) = \max(K - S, 0)$, por lo que la expresión anteriormente vista se puede reescribir de la siguiente manera:
  - Haciendo un desarrollo similar a con los *calls*, el valor de un *put* se puede derivar de la misma manera y obtener la siguiente fórmula:

$$Put\ option\ value = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$$where\ \ d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\quad and$$

$$d_2 = \frac{\log(K/S) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

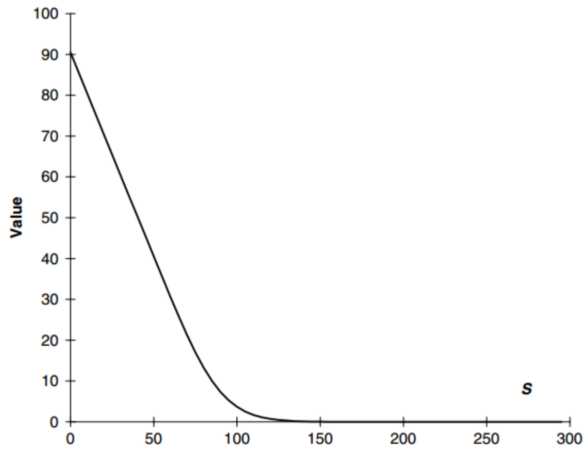
  - Si se introduce un rendimiento de dividendo en el subyacente, o es una divisa, entonces se puede obtener la siguiente fórmula:

$$Put\ option\ value = -Se^{-D(T-t)}N(-d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

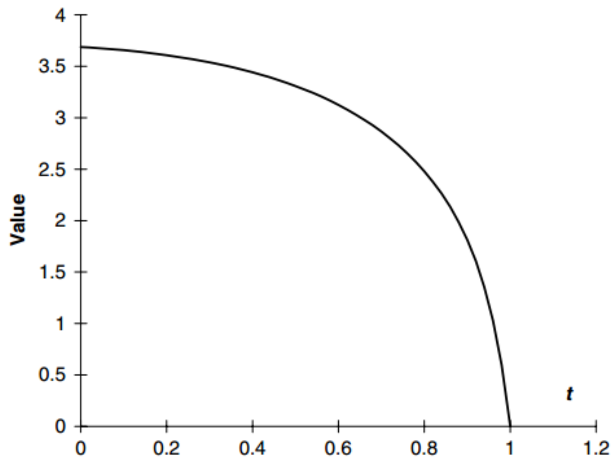
$$where\ \ d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\quad and$$

$$d_2 = \frac{\log(K/S) - \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

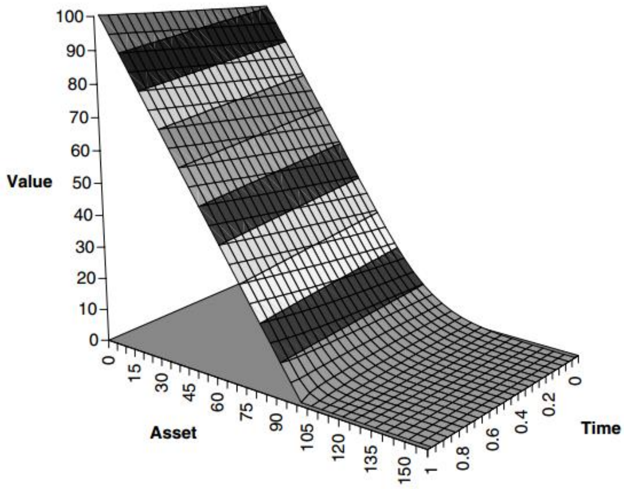
- El valor de la opción se puede representar como una función del subyacente en un tiempo hasta el vencimiento fijo, y se ve como el comportamiento es similar al de su recompensa



- El valor de una *call at-the-money* en función del tiempo tiene un comportamiento negativo, reduciéndose en el tiempo



- Finalmente, el valor del *call* en función del tiempo hasta vencimiento y del valor del subyacente con una superficie



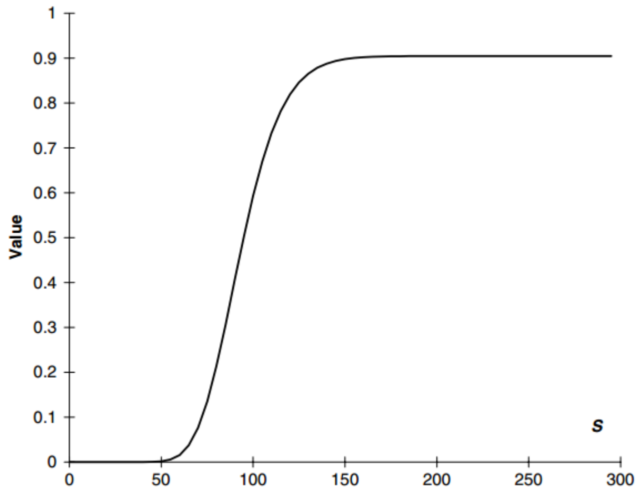
- La función de recompensa de una opción *put* es $Payoff(S) = \mathcal{H}(S-K)$, por lo que la expresión anteriormente vista se puede reescribir de la siguiente manera:
  - Si se introduce un rendimiento de dividendo en el subyacente, o es una divisa, entonces se puede obtener la siguiente fórmula:

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{\left[x'-\log(S)-\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\,dx'$$

$$Binary\ call\ option\ value = e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_2 = \frac{\log(K/S)-\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

  - El valor de la opción se puede representar como una función del subyacente en un tiempo hasta el vencimiento fijo, y se ve como el comportamiento es similar al de su recompensa

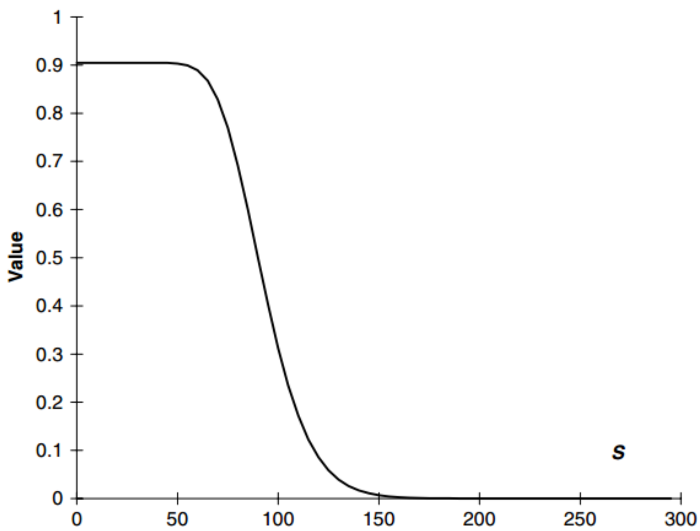


- La función de recompensa de una opción *put* binaria es $Payoff(S) = \mathcal{H}(K - S)$, por lo que la expresión anteriormente vista se puede reescribir de la siguiente manera:
    - De la misma manera que la *call* binaria y se introduce un rendimiento de dividendo en el subyacente, o es una divisa, entonces se puede obtener la siguiente fórmula:

$$Binary\ put\ option\ value = e^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)]$$

$$d_2 = \frac{\log(K/S) - \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

    - El valor de la opción se puede representar como una función del subyacente en un tiempo hasta el vencimiento fijo, y se ve como el comportamiento es similar al de su recompensa



- Una vez se han visto las fórmulas de Black-Scholes para diferentes tipos de opciones y la ecuación de Black-Scholes, se pueden estudiar las letras griegas

    - La delta Δ de una opción o una cartera de opciones es la sensibilidad de una opción o cartera del subyacente. Esta representa la tasa de cambio del valor con respecto al activo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

        - En este caso, V puede ser el valor del contrato o de la cartera entera. La delta de una cartera de opciones, en este caso, será la suma de las deltas de las posiciones individuales

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} V_i)}{\partial S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial S} \Rightarrow \Delta_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

        - Para saber la cantidad de opciones que se necesitan para conseguir la neutralidad a la delta (no la cantidad de acciones, como se suele ejemplificar), se utiliza la *hedge ratio*, definida de la siguiente manera:

$$hedge\ ratio = \frac{1}{\Delta}$$

    - El dispositivo teórico del *delta hedging* para eliminar el riesgo es mucho más que eso: es una técnica práctica muy importante. En el mercado de opciones, principalmente hay dos tipos de inversores: los especuladores y los *hedgers*, y son estos últimos los más interesados en el dispositivo

        - Los especuladores implementan una estrategia para tomar ventaja de su visión sobre una variable o cantidad, y estos no necesitan hacer *delta hedging*. No obstante, los *hedgers* sí que cubren riesgos

        - Hay dos tipos de *hedgers*: aquellos que ya han tomado una posición y quieren eliminar el riesgo específico (a través del uso de opciones) y aquellos que venden (o compran) opciones porque crean que tienen un mejor precio y pueden obtener beneficios cubriendo todo el riesgo. Este último tipo son los que hacen *delta hedging*, y solo pueden garantizar un beneficio al vender el contrato por un valor alto si pueden eliminar todo el riesgo proveniente de las fluctuaciones aleatorias del subyacente

    - El *delta hedging* significa tener una opción y vender una cantidad pequeña Δ del subyacente. Esta delta, por lo tanto, se puede expresar como una función de S y t (la delta varía cuando S y t varían)

    - Esto significa que el número de activos que se tienen debe de cambiarse continuamente para mantener una posición neutral a la delta o *delta-neutral*. Este procedimiento se denomina cobertura dinámica o *dynamic hedging*

    - Cambiando el número de activos que se tienen en cartera requiere la compra o venta continua del subyacente, lo cual se conoce como rebalancear o *rehedging* la cartera

    - El *delta hedging* puede ocurrir muy frecuentemente en mercados altamente líquidos, en donde es muy barato comprar y vender, por lo que la suposición en el modelo de Black-Scholes sobre *hedging* continuo es precisa

    - En mercados no tan liquidos, se pierde mucho en el *bid-ask spread* y se suele hacer *hedging* menos frecuentemente, y puede ser que no se pueda comprar o vender las cantidades que uno quiere. Por lo tanto, aunque no haya costes, uno no puede asegurar que el modelo para el subyacente sea preciso, y habrá un riesgo asociado con el modelo

    - Esto hace que el *delta hedging* no sea perfecto y que, en la práctica, el riesgo del subyacente no se pueda eliminar completamente

- Algunos de los contratos tienen una delta que se vuelve muy grande en momentos o valores del subyacente concretos. El tamaño de la delta, por tanto, puede hacer que el *delta hedging* sea imposible

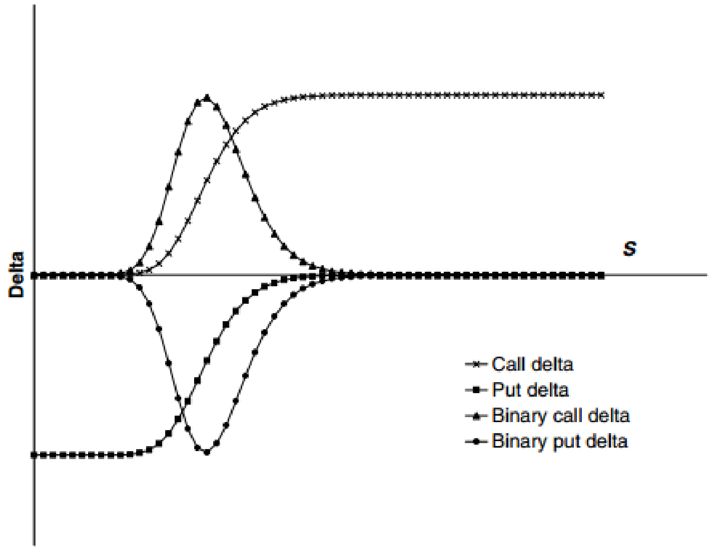
    - Esto ocurre en el vencimiento cuando el precio del subyacente está cerca del de ejercicio si se consideran opciones binarias

    - Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call) \quad e^{-D(T-t)}N(d_1) \qquad (Put) \quad e^{-D(T-t)}[N(d_1)-1]$$

$$(Bin.call) \quad \frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}} \qquad (Bin.put) \quad \frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$

$$where \quad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



- La gamma Γ de una opción o cartera de opciones es la segunda derivada de la posición con respecto al subyacente. Por lo tanto, gamma es la sensibilidad de la delta al subyacente y es una medida de por cuanto o que tan seguido se tiene que rebalancear una posición con tal de mantener una posición *delta-neutral*

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

  - Aunque la delta también varíe con el tiempo, este efecto está dominado por la naturaleza browniana del movimiento del subyacente

  - En una posición *delta-neutral*, la gamma es en parte responsable de hacer que el rendimiento de la cartera sea igual al rendimiento libre de riesgo (la condición de no arbitraje). El resto de esta tarea es responsabilidad de la derivada con respecto al tiempo

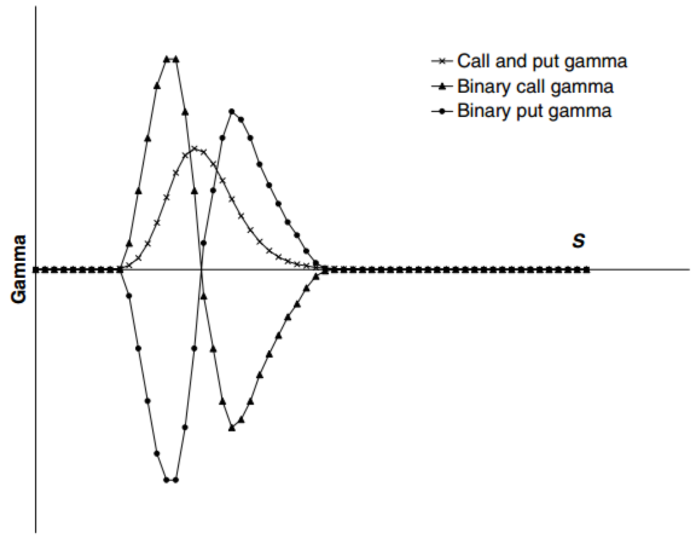
  - La situación en verdad es más complicada que esto debido a la necesidad de discretizar el *hedging*, y hay un tiempo finito entre rebalances

  - La gamma también tiene un papel importante cuando hay una discordancia entre la visión del mercado sobre la volatilidad y la volatilidad actual del subyacente

  - Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call)\ \frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}} \qquad (Put)\ \frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$

$$(Bin.call)\quad -\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}} \qquad (Bin.put)\quad \frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$



- En cualquier posición *delta-hedged*, uno gana dinero en algunas coberturas y lo pierde en otras. En una posición larga en gamma ($\Gamma > 0$), uno gana dinero de movimientos grandes del subyacente y pierde en pequeños movimientos

    - De manera más precisa, uno gana dinero un 32% de las veces y lo pierde un 68%, pero cuando se gana, se gana más de lo que se pierde, y el efecto neto final es la obtención del tipo de interés libre de riesgo

- Debido a que los costes pueden ser grandes y debido a que uno quiere reducir su exposición al error del modelo, es natural intentar minimizar la necesidad de rebalancear la cartera de manera frecuente

    - Debido a que gamma es una medida de sensibilidad de la *ratio* de cobertura Δ a movimientos en el subyacente, el requerimiento de cobertura puede reducirse con una estrategia *gamma-neutral*. Esto significa comprar o vender más opciones, no solo el subyacente, dado que la gamma de un subyacente es nula y no se puede añadir gamma a la posición solo con el subyacente

    - Uno puede tener tantas opciones como quiera, y se escogen las cantidades de cada tipo de activo de manera que delta y gamma sean nulas. El requerimiento mínimo es tener dos tipos de opciones diferentes y el subyacente

    - En la práctica, la posición de las opciones no se reajusta mucho porque, si el coste de transacción del subyacente es grande, entonces el coste de transacción de sus derivados es aún mayor

- La theta Θ es la tasa de cambio del precio de la opción con el tiempo, y es la primera derivada del valor de la opción o de la cartera con respecto al tiempo, y está relacionada al valor de la opción, la delta y la gamma a través de la ecuación de Black-Scholes

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

  - En una cartera *delta-hedged*, la theta contribuye a asegurar que la cartera obtiene el tipo de interés sin riesgo, pero contribuye de una manera muy específica, a diferencia de la gamma que contribuye de media

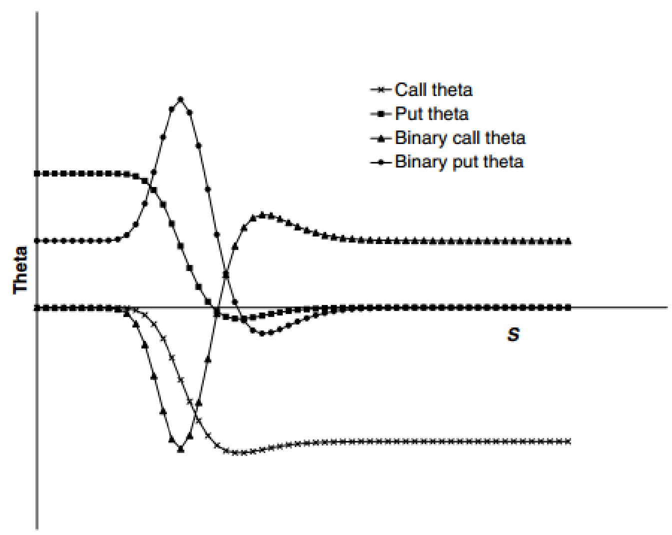
  - Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call)\ \ \frac{\sigma S e^{-D(T-t)} N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + DSN(d_1)e^{-D(T-t)} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$(Put)\ \ -\frac{\sigma S e^{-D(T-t)} N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}} - DSN(-d_1)e^{-D(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$$(Bin.call)\ \ re^{-r(T-t)}N(d_2) + e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$(Bin.put)\ \ re^{-r(T-t)}[1-N(d_2)] - e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$



  - El *time value decay* describe la convergencia del valor temporal a cero cuando el tiempo hasta el vencimiento decrece (el valor es cero en vencimiento), y este se puede cuantificar con theta

- La velocidad de una opción es la tasa de cambio de la gamma con respecto al precio del subyacente, y se define como la tercera derivada del valor de la opción o de la cartera de opciones con respecto al precio del subyacente

$$Speed = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$$

    - Los *traders* usan la gamma para estimar cuanto tienen que rebalancear si se mueve el precio del subyacente, pero esto solo es una aproximación (si se mueve por \$1, entonces Δ cambia Γ)

    - La delta puede cambiar más o menos que esta cantidad, especialmente si el subyacente se mueve por una cantidad grande o si la opción está cerca de K y de T. Por lo tanto, se usa la velocidad en una expansión de Taylor de mayor orden

    - Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call) \quad -\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2 (T-t)}\left(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$(Put) \quad -\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2 (T-t)}\left(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$(Bin.call) \quad -\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2 S^3 (T-t)}\left(-2d_1 + \frac{1-d_1 d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$(Bin.put) \quad \frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2 S^3 (T-t)}\left(-2d_1 + \frac{1-d_1 d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

- La vega, también llamada zeta o kappa, es una cantidad muy importante pero confusa. Esta se define como la sensibilidad del valor de la opción o de la cartera a la volatilidad, y por tanto es la primera derivada respecto a este parámetro

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

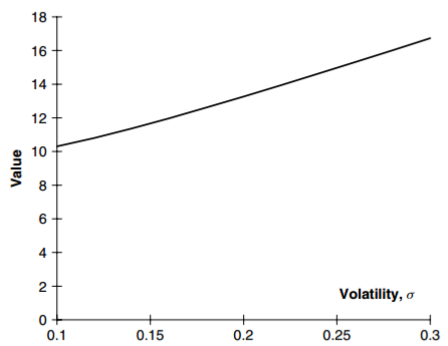
    - Esta es completamente diferente a las otras letras griegas, dado que la derivada es con respecto a un parámetro y no a una variable. Esto provoca algunas diferencias cuando se quieren encontrar soluciones numéricas para estas cantidades

- En la práctica, la volatilidad del subyacente no se sabe con certeza. Es una medida muy difícil de medir en cualquier momento, y es muy difícil de predecir en el futuro

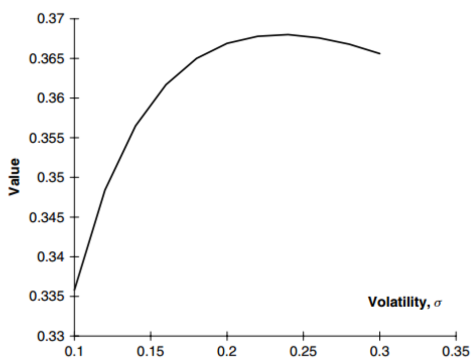
- Igual que con el *gamma-hedging*, uno puede hacer *vega-hedging* para reducir la sensibilidad a la volatilidad. Esto es un gran paso para eliminar parte del riesgo del modelo, dado que reduce la dependencia a esta cantidad de la cual no se sabe mucho

o Hay una desventaja al medir vega: solo es realmente útil para opciones que tienen una gamma con un solo signo en todas partes de la función derivada (positivo o negativo)

- Por ejemplo, tiene sentido medir vega para *calls* y *puts* pero no para opciones binarias, dado que opciones con gammas con un solo signo en todas partes de la función derivada tiene valores monótonos en la volatilidad (si se incrementa la volatilidad, incrementa su valor en todas partes)



- Contratos con una gamma que cambia de signo puede tener una vega medida en cero porque cuando se incrementa la volatilidad, el precio puede aumentar en alguna parte y bajar en otra. Este contrato está muy expuesto al riesgo de volatilidad, pero este no se puede medir a través de vega



- Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call)\ \ S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$$

$$(Put)\ \ S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$$

$$(Bin.call)\ \ -e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

$$(Bin.put)\ \ e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

- La rho ρ es la sensibilidad del valor de la opción o de la cartera al tipo de interés usado en las fórmulas de Black-Scholes, y se define como la primera derivada con respecto a r

$$\rho=\frac{\partial V}{\partial r}$$

  - En la práctica, uno normalmente utiliza la estructura temporal completa de los tipos de interés, de modo que r es una función del tiempo $r(t)$. Rho se interpretaría entonces como la sensibilidad al nivel de tipos asumiendo un desplazamiento paralelo de los tipos en todo momento

  - Asumiendo que todos los contratos tienen un subyacente que paga dividendos o las opciones son sobre divisas, se pueden obtener las siguientes fórmulas:

$$(Call)\ \ \ K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$(Put)\ \ -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$$(Bin.call)\ \ -(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)+\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

$$(Bin.put)\ \ -(T-t)e^{-r(T-t)}[1-N(d_2)]+\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

  - Las sensibilidades de contratos comunes a rendimientos de dividendos o tipos de interés extranjeros se dan por las siguientes fórmulas:

$$(Call)\qquad -(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$$

$$(Put) \qquad (T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$$

$$(Bin.call) \qquad -\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

$$(Bin.put) \qquad \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

El modelo binomial

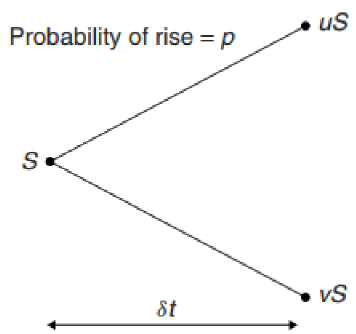
- Igual que se han visto modelos para los activos basados en la teoría matemática del cálculo estocástico y en la ecuación de Black-Scholes, otra posibilidad es utilizar el modelo binomial para acciones
    - Una de las razones por las cuales el modelo binomial es tan popular es porque se puede implementar sin muchas matemáticas y no hay necesidad de derivar una ecuación diferencial parcial antes de su implementación
        - El modelo binomial se puede interpretar como un modelo genuino del comportamiento de las acciones, o, alternativamente, como un método numérico para la solución de la ecuación de Black-Scholes
        - De manera más importante, se ve la idea del *delta hedging*, la eliminación del riesgo y de la valoración neutral al riesgo
    - El modelo binomial es muy importante debido a que permite ver como uno puede prescindir de confiar en soluciones cerradas. Es extremadamente importante tener maneras de valorar opciones con un modelo simple y métodos numéricos rápidos
        - En la vida real, un contrato puede contener características que hacen la solución analítica muy difícil o imposible, aunque solo sean una modificación menor de un contrato simple (dado que pueden tener grandes efectos en la valoración del producto)
        - Un ejemplo clásico son las opciones americanas, ya que la diferencia de valores entre una opción europea y americana puede ser grande y no hay una solución de forma cerrada simple, teniendo que encontrar el valor de manera numérica´
    - No obstante, el modelo binomial también lleva consigo algunas desventajas
        - Este es un modelo de comportamiento de precio de las acciones pobre, dado que solo considera que la acción puede incrementar o reducir su precio por una cantidad conocida (esto no es realista).

Esto es importante debido a que de este modelo nacen ciertos resultados que solo se sostienen por la suposición de esos dos posibles estados futuros

    - Este esquema numérico es prehistórico comprado con los métodos numéricos modernos. Por lo tanto, este modelo solo se debería estudiar para obtener la intuición, pero no confiar en sus cálculos numéricos

- La manera más accesible para valorar una opción es a través del modelo binomial, en el que se ven las ideas principales sobre cobertura y sobre arbitraje, y permite obtener un algoritmo para determinar el valor correcto de la opción

  - En el modelo binomial de una sola etapa, se asume que el activo, que inicialmente tiene un valor S, puede, durante el paso temporal δt, incrementar a un valor uS o decrecer a un valor vS en donde $0 < v < 1 < u$



    - Multiplicando el precio por constantes y no sumándolas, uno es capaz de construir un árbol entero de precios, lo cual permitirá obtener una versión de un camino aleatorio log-normal

    - La probabilidad de que el precio incremente es de p, mientras que la probabilidad de que el precio caiga es de $1 - p$

    - Las tres constantes u, v y p se escogen para que el camino binomial tenga el mismo *drift* y la misma desviación estándar que el activo que se intenta modelar

    - La elección de las tres constantes no es única: se tienen tres parámetros a escoger u, v y p, pero solo se tienen dos cantidades estadísticas para ajustar, μ y σ, y hay soluciones infinitas. Una elección común es escoger las siguientes fórmulas para los parámetros:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \qquad v = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$p = \frac{e^{\mu\delta t} - v}{u - v}$$

- La elección anterior es una elección continua, pero también se puede discretizar de la siguiente manera:

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\delta t} \qquad v = 1 - \sigma\sqrt{\delta t}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}$$

- A partir del modelo binomial y la parametrización escogida, es posible calcular la esperanza y la varianza del activo subyacente:

    - El cambio esperado en el precio del activo subyacente después de un paso temporal δt es el siguiente:

$$puS + (1-p)vS =$$

$$= \left(\frac{e^{\mu\delta t} - v}{u - v}\right) S e^{\sigma\sqrt{\delta t}} + \left(\frac{u - e^{\mu\delta t}}{u - v}\right) S e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} =$$

$$= S e^{\mu\delta t}$$

    - Por lo tanto, el cambio esperado del activo subyacente es $S\left(e^{\mu\delta t} - 1\right)$ y el rendimiento esperado del activo subyacente será $\mu\delta t$

    - La desviación estándar del proceso de cambios se puede obtener calculando la varianza y tomando la raíz cuadrada

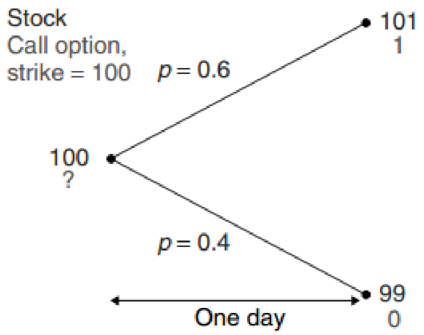
$$p\left(uS - Se^{\mu\delta t}\right)^2 + (1-p)\left(vS - Se^{\mu\delta t}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{e^{\mu\delta t} - v}{u - v}\right)\left(e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{\mu\delta t}\right)^2 + \left(\frac{u - e^{\mu\delta t}}{u - v}\right)\left(e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{\mu\delta t}\right)^2\right] S^2 =$$

$$= S^2 e^{\sigma^2\delta t - \mu^2(\delta t)^2}$$

    - Por lo tanto, la desviación estándar del cambio en el activo subyacente es $S\left(e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - 1\right)$ y la de los rendimientos será $\sigma\sqrt{\delta t}$

- Suponiendo que se conoce el valor de la opción en el valor $t + \delta t$, se puede construir una cartera en el momento t consistiendo de una opción y una posición corta con una cantidad Δ del subyacente



- En el momento t, la cartera tiene valor $\Pi = V - \Delta S$, en donde V es el valor de la opción desconocido

- En el momento $t + \delta t$, la opción toma valores V^+ o V^-, dependiendo de si el activo sube o baja. Al mismo tiempo, la cartera puede tener valor $V^+ - \varDelta uS$ o $V^- - \varDelta vS$, por lo que, al saber los valores V^+, V^-, u, v y S, estas son funciones lineales de $\varDelta$

- Los valores V^+ y V^- se pueden obtener utilizando la función de recompensa o *payoff* de la opción (con su K y forma funcional concreta) y el valor de la acción cuando sube o baja. Por lo tanto, no hace falta especificar el tipo de opción antes, solo es necesario utilizar la función de recompensa adecuada

$$(Call) \quad V^+ = \max(uS - K, 0) \ \ \& \ \ V^- = \max(vS - K, 0)$$

$$(Put) \quad V^+ = \max(K - uS, 0) \ \ \& \ \ V^- = \max(K - vS, 0)$$

- Si se quiere hacer *delta hedging*, entonces se tiene que escoger una Δ tal que ambos posibles valores sean iguales, lo cual permite obtener las siguientes expresiones para Δ y, consecuentemente, para el valor de los activos:

$$V^+ - \varDelta uS = V^- - \varDelta v \quad \Rightarrow \quad \varDelta = \frac{V^+ - V^-}{(u - v)S}$$

$$\Rightarrow \ V^+ - \varDelta uS = V^+ - \frac{u(V^+ - V^-)}{u - v}$$

$$\Rightarrow \ V^- - \varDelta uS = V^- - \frac{u(V^+ - V^-)}{u - v}$$

$$\Rightarrow \ \Pi + \delta\Pi = V^+ - \frac{u(V^+ - V^-)}{u - v} = V^- - \frac{u(V^+ - V^-)}{u - v}$$

- De manera general, al hacer *delta-hedging*, el valor de la cartera no dependerá de los movimientos del precio del subyacente, y en el modelo binomial, delta no será más que la *ratio* entre el rango de recompensas posibles de las opciones y el de precios del subyacente. Por lo tanto, se puede interpretar como la sensibilidad de la opción cuando el subyacente cambia

$$\Delta = \frac{Range\ of\ option\ payoffs}{Range\ of\ stock\ prices}$$

- Debido a que el valor de la cartera se ha garantizado, por la ley de no arbitraje, es necesario que el valor obtenido en el paso de tiempo sea igual al tipo de interés sin riesgo que se obtendría para ese mismo momento. A partir de esto, se pueden derivar las siguientes ecuaciones:

$$\Pi + \delta\Pi = \Pi e^{r\delta t}$$

$$\Rightarrow\ \Pi + \delta\Pi = \Pi e^{r\delta t} = V^{+} - \frac{u(V^{+} - V^{-})}{u - v}$$

$$with\ \ \Pi = V - \Delta S = V - \frac{V^{+} - V^{-}}{u - v}$$

$$\Rightarrow\ e^{r\delta t}\left(V - \frac{V^{+} - V^{-}}{u - v}\right) = V^{-} - \frac{v(V^{+} - V^{-})}{u - v}$$

$$\Rightarrow\ Ve^{r\delta t} = \frac{V^{+} - V^{-}}{u - v}e^{r\delta t} + \frac{uV^{+} - vV^{-}}{u - v}$$

- Si $\Pi + \delta\Pi > \Pi e^{r\delta t}$, entonces se puede pedir prestado Π a un tipo de interés r y comprar la opción y vender una cantidad Δ del subyacente, obteniendo un beneficio sin riesgo de $(\Pi + \delta\Pi) - \Pi e^{r\delta t} > 0$. Si, en cambio, $\Pi + \delta\Pi < \Pi e^{r\delta t}$, entonces se puede dar un préstamo a un tipo de interés r y vender la opción y comprar una cantidad Δ del subyacente, obteniendo un beneficio sin riesgo de $\Pi e^{r\delta t} - (\Pi + \delta\Pi) > 0$

- En este punto, interviene un principio importante en la valoración de activos, llamado valoración neutral del riesgo. Este principio expresa que, al valorar un derivado, se puede hacer la suposición de que los inversores son neutrales al riesgo (no necesitan una prima de riesgo)

  - La idea principal por la cual este principio funciona es que, aunque uno tenga en cuenta sus preferencias sobre el riesgo al invertir, al valorar opciones en términos del subyacente, las preferencias sobre el riesgo no importan, dado que la función que determina el valor no cambia (solo cambiaría el precio del subyacente)

- El mundo neutral al riesgo tiene dos características principales: la recompensa esperada de cualquier activo es r y, por tanto, el tipo que se usa para descontar es r también. Además, se puede asumir que no se necesita estadística para estimar las probabilidades de que ocurran los eventos y se piensa que todo se puede valorar utilizando esperanzas

- En este mundo, se calculan las probabilidades neutrales al riesgo p' a partir de la ecuación que plantea el valor esperado de la acción con el precio en el momento actual S. Estas probabilidades, no obstante, no son reales en ningún sentido

$$uS\,p' + vS\,(1-p') = S$$

- La ecuación final obtenida anteriormente es una ecuación para V dado los valores V^+ y V^- (los valores de las opciones en el siguiente paso de tiempo) y los parámetros u y v, que describen el camino aleatorio del activo. No obstante, esta se puede hacer más intuitiva a través de la introducción de las probabilidades neutrales al riesgo

$$Ve^{r\delta t} = p'V^+ + (1-p')V^- \quad where \quad p' = \frac{e^{r\delta t}-v}{u-v}$$

- La parte izquierda de la ecuación es el valor futuro del valor actual de la opción, mientras que la parte derecha es como un valor esperado, pero que tiene en cuenta solo las probabilidades neutrales al riesgo (la esperanza neutral al riesgo). Por lo tanto, el valor de la opción en cualquier momento es el valor presente del valor esperado neutral al riesgo en cualquier momento posterior

- En este caso, se puede ver como la probabilidad p de subir y la probabilidad $1-p$ de bajar son irrelevantes para obtener el valor de la opción. Las expresiones para p y p' solo difieren en que una tiene el tipo de interés sin riesgo y la otra tiene la tasa de deriva μ

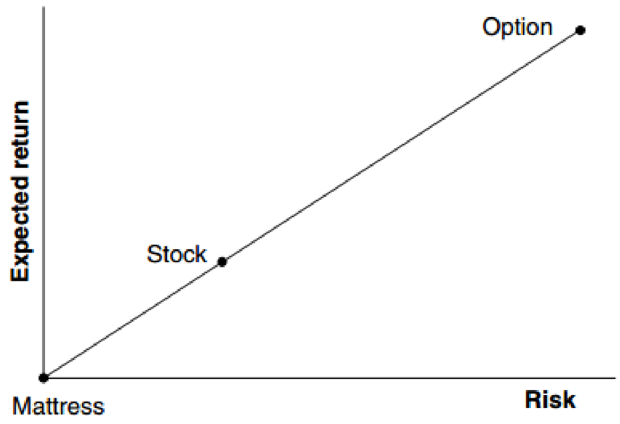
$$(cont.) \qquad p = \frac{e^{\mu\delta t}-v}{u-v} \qquad p' = \frac{e^{r\delta t}-v}{u-v}$$

$$(disc.) \qquad p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma} \qquad p' = \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{\delta t}}{2\sigma}$$

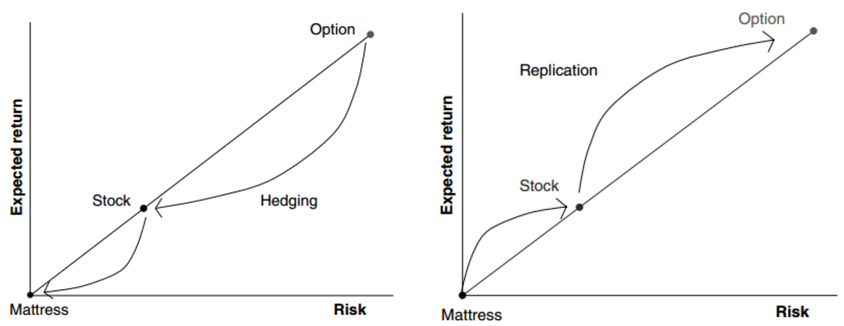
- En este caso, r tiene dos roles: descuenta el valor de la opción para obtener el valor presente y se usa como tasa de deriva en el camino aleatorio del precio del activo subyacente

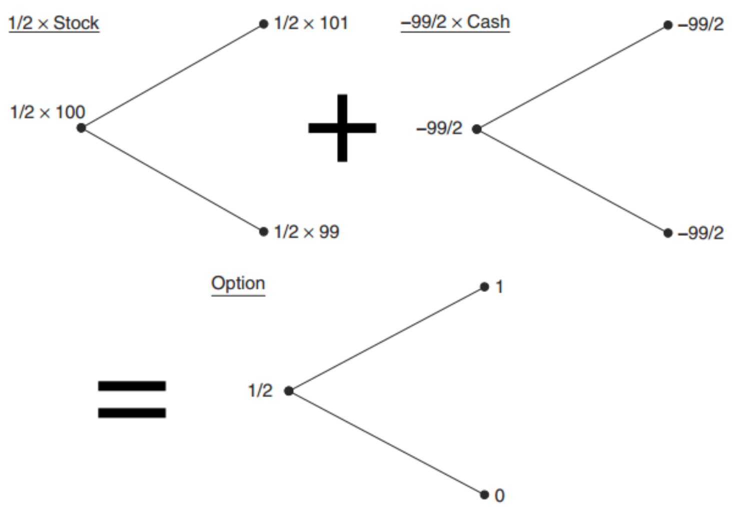
- En este modelo, las opciones son activos redundantes debido a que los mercados son completos: los activos se pueden replicar entre sí a través de diferentes combinaciones adecuadas

    - Aunque p no entra en la valoración de la opción, si que determina el valor futuro de p. No obstante, la esperanza no coincide con el precio presente de S debido a que este activo tiene un riesgo, por lo que se necesita obtener una prima de riesgo por asumirlo (un rendimiento mayor al del tipo de interés sin riesgo r)



    - La opción también tiene un riesgo y un rendimiento esperado, pero esta es replicable a través del subyacente y de inversiones libres de riesgo (se pueden usar los dos puntos en la misma línea y obtener una combinación lineal)





- El modelo binomial para un solo periodo también se puede estudiar de manera más general utilizando notación matricial y generalizando algunos aspectos como la composición del tipo de interés
  - Se considera un modelo igual que antes, en donde solo hay un paso de tiempo δ y dos estados con precios futuros uS y vS en donde $u > 1 > v$
    - En este árbol binomial, una opción tiene dos posibles valores: $h_K(S_T(u)) = h_K(uS)$ o $h_K(S_T(v)) = h_K(vS)$, en donde h_K es la función de recompensa de la opción con un precio de ejercicio K y $S_T(\cdot)$ es el precio del subyacente dependiendo de los dos estados
    - Debido a que, como se ha visto antes, el modelo asume que se tienen mercados completos, la valoración de la opción se puede llevar a cabo por replicación de dos flujos de caja. En este caso, se usará el subyacente (acción) y una inversión o préstamo libre de riesgo
  - Este árbol se puede denotar como $BT_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D})$, en donde el vector de precios en el momento actual $t = 0$ se puede denotar como el vector columna $\boldsymbol{b}$ y los perfiles de recompensas se denotan por la matriz cuadrada $\boldsymbol{D}$
    - En este caso, $\boldsymbol{b}$ será un vector 2×1 debido a que solo se considera un momento (una sola columna) pero se tiene en cuenta el precio de la inversión sin riesgo (que se fija igual a 1) y el del subyacente S en dos filas separadas (una por activo)

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ S \end{pmatrix}$$

- La matriz cuadrada $\boldsymbol{D}$ será una matriz 2×2 en donde las filas seguirán indicando el activo, pero las columnas ahora denotan los dos posibles estados (el precio sube o baja) para cada activo: para la inversión libre de riesgo, no hay variación en el valor futuro, pero el valor del subyacente cambia a uS o a vS

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} e^{rT} & e^{rT} \\ uS & vS \end{bmatrix}$$

- A diferencia de antes, es posible generalizar los resultados para utilizar una composición continua del tipo de interés libre de riesgo

o Para poder valorar opciones con BT_1 , es necesario que no haya oportunidades de arbitraje en BT_1 y el perfil de recompensas sea replicable. Es decir, se tiene que cumplir la ley de un solo precio

- Como ejemplo, uno se puede enfocar en el precio de las opciones *call* y valorar las *put* a partir de la paridad *put-call*. El vector $\boldsymbol{c}$ denota el perfil de recompensas de la opción, por lo que hay dos filas (indicando cada posible estado)

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \max(uS - K, 0) \\ \max(vS - K, 0) \end{pmatrix}$$

- Un perfil de recompensas $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ es replicable si $\boldsymbol{c} \in cod\ \boldsymbol{D}^T$ (si $\boldsymbol{c}$ es un elemento del codominio de $\boldsymbol{D}^T$). Esto quiere decir que el perfil puede conseguir a través de una inversión en el subyacente y un préstamo libre de riesgo, por lo que hay un vector $\boldsymbol{h}$ tal que se cumple la siguiente condición:

$$\boldsymbol{D}^T \boldsymbol{h} = \boldsymbol{c}$$

- Una estrategia de comercio o de cartera $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ se denomina arbitraje si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} (Type\ I) & \boldsymbol{hb} \leq 0 \ \ \& \ \ \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{h} > \boldsymbol{0} \\ (Type\ II) & \boldsymbol{hb} < 0 \ \ \& \ \ \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

- En el arbitraje de tipo I, el coste de la inversión es nula o es negativo (beneficio inmediato) y la recompensa $\boldsymbol{c}$ es positiva, mientras que en el de tipo II, el coste de la inversión es nulo y la recompensa es positiva y cero. Un BT_1 está libre de arbitraje si ninguna de las dos condiciones se cumple

- Un $BT_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D})$ con parámetros v, u, r y S no tiene arbitraje si, y solo si, $u > e^{rT} > v$

- Siendo $BT_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D})$ libre de arbitraje, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ un perfil de recompensas replicable, y $\boldsymbol{h}, \widetilde{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^2$ carteras de réplica de la recompensa $\boldsymbol{c}$, con $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}^T\widetilde{\boldsymbol{h}}$, entonces se mantiene $\boldsymbol{hb} = \widetilde{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{b}$ (carteras con la misma recompensa en vencimiento deben tener el mismo valor en $t = 0$). Esta es la ley de precio único para los árboles binomiales de un solo periodo

o A partir de la definición del árbol binomial y de la ley de precio único, es posible definir el vector de estados, el cual permitirá obtener las probabilidades neutrales al riesgo

- En un $BT_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D})$ existe un vector $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{D\psi} = \boldsymbol{b}$, de modo que $\boldsymbol{b} \in cod\ \boldsymbol{D}$

- Un $BT_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D})$ no tiene arbitraje si, y solo si, existe una solución $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^2$ con $\psi_i > 0$ para $i = 1,2$ del sistema lineal $\boldsymbol{D\psi} = \boldsymbol{b}$. Debido a que $u > e^{rT} > v$, entonces $\det \boldsymbol{D} \neq 0$ y existe una solución única a $\boldsymbol{D\psi} = \boldsymbol{b}$

$$\det \boldsymbol{D} = vSe^{rT} - uSe^{rT} = (v-u)Se^{rT} < 0$$

- La solución $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^2$ se calcula con la regla de Cramer, la cual divide un vector 2×1 de los determinantes de las matrices formadas por el vector $\boldsymbol{b}$ y las columnas de $\boldsymbol{D}$ (en la primera, la columna para vS será la segunda columna, mientras que, en la segunda, la columna para uS será la primera) por el determinante de $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\det \boldsymbol{D}} \begin{bmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & e^{rT} \\ S & vS \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} e^{rT} & 1 \\ uS & S \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{(v-u)e^{rT}} \begin{pmatrix} v - e^{rT} \\ e^{rT} - u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+$$

- Este vector de estados $\boldsymbol{\psi}$ indica la ponderación de los componentes (acciones y efectivo) para obtener las recompnesas en ambos estados dado un vector de precios $\boldsymbol{b}$

o El vector de estados $\boldsymbol{\psi}$ permite obtener la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$. Para poder calcular el valor esperado de los flujos de caja, se necesita utilizar la medida neutral a riesgo en el momento $t = T$

$$V(C) = e^{-rT}E^{\mathbb{Q}}(C)$$

- El rendimiento esperado del subyacente y de la inversión libre de riesgo es igual a r bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$. Como esta medida no se da, se tiene que construir de manera acorde

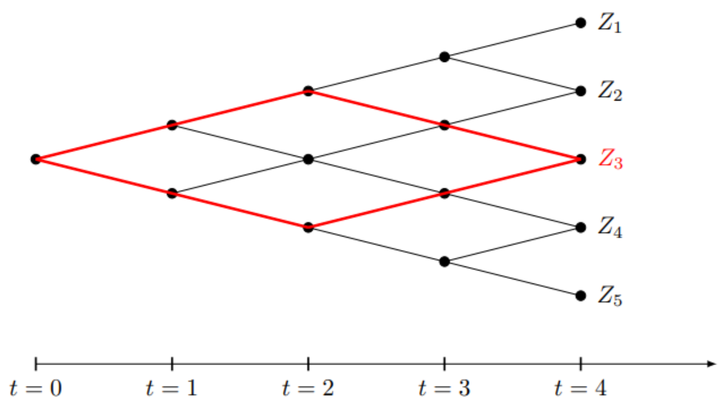
- Para construir esta medida, se utilizan los componentes del vector de estados $\boldsymbol{\psi}$, por lo que se puede obtener el valor del *call* $V(C)$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2} = q_1 \quad \& \quad \mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} = 1 - q_1 = q_2$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{e^{rT}(v - e^{rT})}{(v-u)e^{rT}} = \frac{v - e^{rT}}{v - u} \quad \& \quad q_2 = \frac{e^{rT} - u}{v - u}$$

$$\Rightarrow \; V(C) = e^{-rT}E^{\mathbb{Q}}(C) = e^{-rT}[q_1 C(u) + q_2 C(v)]$$

- Este mismo análisis matricial se puede extender a modelos multiperiodo, y se puede utilizar un procedimiento muy similar al planteado
  - Un árbol multiperiodo BT_n es un árbol binomial de n periodos, en donde hay un número finito de pasos de tiempo o periodos con longitud constante
    - El número de periodos n es $t = 0, t = 1, \ldots, t = n$, por lo que hay $n + 1$ instantes en los que se comercia la acción
    - Los parámetros de BT_1 se aumentan con el número de periodos n, y se tiene el tipo sin riesgo anual r para T años. Por lo tanto, el tiempo por subperiodos se define como $\delta t = T/n$, lo cual permite obtener una composición continua $e^{r\delta t}$
    - El árbol binomial BT_n únicamente definido por el conjunto de parámetros (S, r, u, v, n). Estos son fijos para todos los momentos, de modo que el estado final de los precios se puede calcular de manera directa
  - Debido a que los caminos de BT_n se juntan, un árbol BT_n de n periodos tiene $n + 1$ estados finales después de n periodos



I: $\{(d, d, u, u)\}$ II: $\{(u, u, d, d)\}$ III: $\{(u, d, u, d)\}$ IV: $\{(u, d, d, u)\}$ V: $\{(d, u, u, d)\}$ VI: $\{(d, u, d, u)\}$

- Aunque los caminos se junten, solo hay dos caminos que no se juntan con ningún otro camino: el camino en donde siempre sube el precio y el camino en el que siempre baja

$$S_T = Su^n \qquad S_T = Sv^n$$

- El orden de los movimientos de arriba o de abajo es irrelevante, solo el número de veces de cada movimiento es lo que cuenta. En el momento $t = m$, el número de movimientos hacia arriba cumplirá la siguiente desigualdad:

$$0 \leq |\{i \in \{1, \dots, m\}: \omega_i = u\}| = n_u \leq m$$

- El precio S_m está explícitamente definido por el número de movimientos hacia arriba desde el periodo $t = 0$ hasta $t = m$, dado que $n - n_u = n_v$. Se llega a cada estado final por $\binom{n}{n_u}$ caminos y el precio en cada estado final se da por la siguiente fórmula:

$$S_m = S \prod_{i=1}^{n} \omega_i = Su^{n_u} v^{n-n_u}$$

- El árbol binomial BT_n consiste en árboles binomiales de un periodo BT_1, por lo que la construcción de $\mathbb{Q}$ es la misma que en BT_1, solo que esta construcción y los cálculos se hacen por periodo

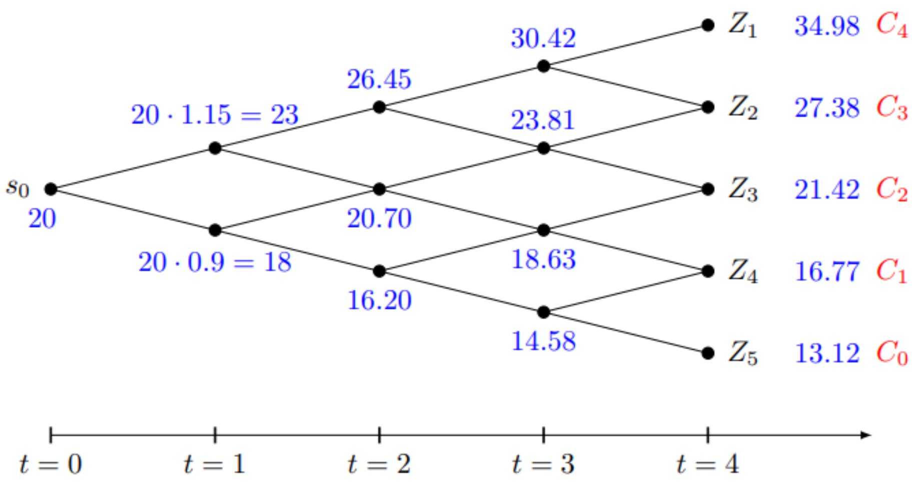
  - Un árbol binomial BT_n con conjunto de parámetros (S, r, u, v, n) está libre de arbitraje si, y solo si, $d < e^{r\delta t} < u$, con $\delta t = T/n$. En este caso, la medida de la martingala neutral del riesgo equivalente y la probabilidad de un movimiento hacia arriba se calculan de la siguiente manera:

$$q = \frac{v - e^{r\delta t}}{v - u} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}) = q^{n_u}(1-q)^{n-n_u}$$

  - En este caso, $\mathbb{Q}(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\})$ es la probabilidad neutral al riesgo de un camino dado por una tupla n-dimensional $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, calculada como el producto de las probabilidades para cada paso de tiempo. Cada camino está determinado por el número de movimientos hacia arriba y hacia abajo, pero debido a que $n_v = n - n_u$, entonces se determina solo por el número de movimientos hacia arriba

- En cada estado, la recompensa de una *call* se denota por C_k, donde $k = n_u$, por lo que el valor de la opción será el valor esperado neutral al riesgo de los estados descontado

$$V(C) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}(C)$$



  - Para determinar el valor esperado $E^{\mathbb{Q}}(C)$, se utiliza la siguiente fórmula, la cual tiene en cuenta el número de caminos con el mismo valor C

$$E^{\mathbb{Q}}(C) = \sum_{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \Omega} C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mathbb{Q}(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \binom{n}{k} q^{n_u} (1-q)^{n-n_u}$$

  - Finalmente, el valor de la opción estará determinado por la siguiente fórmula:

$$V(C) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}(C) = \sum_{k=0}^{n} C_k \binom{n}{k} q^{n_u} (1-q)^{n-n_u}$$

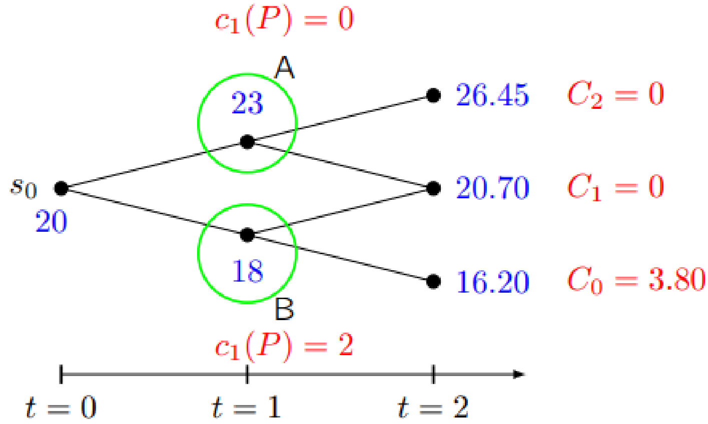
  - En este caso, no se necesita tener en cuenta los nodos intermedios, solo los nodos finales son necesarios para poder alcanzar el valor de la opción (debido a que es europea)

- El modelo binomial, como se ha dicho, es muy flexible y permite entender las dinámicas de los diferentes tipos de opciones. Aunque hasta ahora se han visto opciones europeas, se puede extender el modelo multiperiodo para tener en cuenta opciones americanas de manera sencilla

- Cuando se tiene una opción americana, la opción se puede ejercer durante todo el intervalo de tiempo hasta la fecha de vencimiento

    - En el modelo BT_n para opciones americanas, por tanto, no solo importa la recompensa del periodo final, sino que también la de subperiodos $1,2,\dots,n-1$

    - Para cada nodo en la reja, uno tiene que ver cuál sería el valor de la opción si se hace un ejercicio inmediato y cuál es el valor esperado de las recompensas futuras descontadas en los siguientes dos estados (si el precio del subyacente baja o sube después de llegar a ese estado)

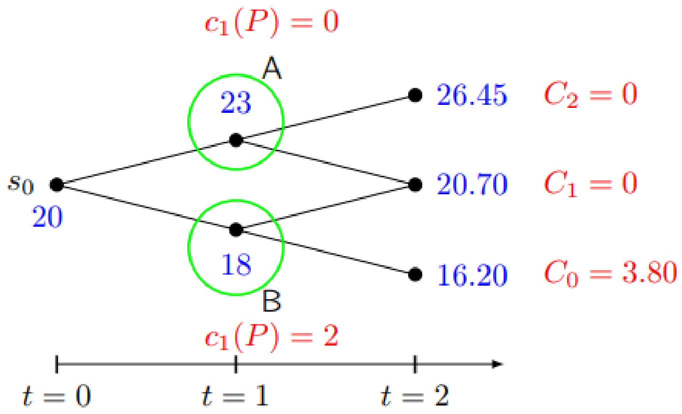


    - Matemáticamente, esto es equivalente a seleccionar cuál de las siguientes dos cantidades es mayor:

$$V(C_m) = h_K(S_m)$$

$$V(C_{m+1}) = e^{-r\delta t}[qh_K(uS_m) + (1-q)h_K(vS_m)]$$

- Una vez se hace la comparación y se escoge cuál de los dos valores es mayor, entonces pueden ocurrir dos cosas: si el valor de ejercer en ese instante es mayor, entonces el valor para los caminos que lleven a ese nodo será $V(C_m)$, mientras que, si no, entonces no se ejerce la opción y se hace la comparación para los siguientes nodos



:

$$c_0^{\text{US}}(P) = e^{-0.05 \cdot 0.5}\,(0.5013 \cdot 0 + (1 - 0.5013) \cdot 2) = 0.97$$

$$c_0(P) = e^{-0.05} \cdot (1 - 0.5013)^2 \cdot 3.80 = 0.90$$

- Este proceso comienza desde los estados finales hasta el estado inicial, de modo que se van fijando los valores posibles de la opción en cada nodo y se hace el análisis de manera repetida hasta llegar al nodo inicial (se usan las mismas ecuaciones y el mismo método todo el rato)

- Como las opciones americanas tienen el derecho adicional de poder ejercerse en muchas más ocasiones que las opciones europeas, el precio de estas tiene que ser mayor o igual al de las opciones europeas

$$C_{US} \geq C_{EU} \qquad P_{US} \geq P_{EU}$$

El *Value-at-Risk*

- Definición VaR
    - Considerando una cartera que consiste de múltiples activos y opciones, la estructura de recompensa no es lineal (debido a los derivados), lo cual complica los cálculos de medidas de riesgo simples como el VaR
        - Una manera factible es generar la distribución de pérdidas y ganancias, basada en la distribución del factor de riesgo presente en la cartera
        - Siendo $\boldsymbol{S}$ un vector m-dimensional de activos, Δt el horizonte de medición del riesgo, $\delta\boldsymbol{S}$ el cambio de $\boldsymbol{S}$ en δt, $V(\boldsymbol{S}, t)$ el valor de la cartera, la pérdida de la cartera sobre δt y la distribución de pérdidas se definen de la siguiente manera:

$$L = -\delta V = V(\boldsymbol{S}, t) - V(\boldsymbol{S} + \delta\boldsymbol{S}, t + \delta t)$$

$$\Rightarrow \; F_L(x) = P(L < x)$$

- En la práctica, m es muy grande, y se asume que la asignación de la cartera se mantiene constante desde $t + \delta t$. Además, no se considera directamente cualquier dinámica del precio $\boldsymbol{S}$, sino que uno se fija en el vector de cambios $\delta\boldsymbol{S}$

- En este caso, el VaR se define como un percentil arbitrario de la distribución de pérdidas para una δt predefinida, y se expresa de la siguiente manera:

$$1 - F_L(x_p) = P(L > x_p) = p$$

- Otra medida derivada del VaR es el *expected shortfall* (ES), definida de la siguiente manera:

$$ES = E(L|L > x)$$

  - Cuantificar el riesgo de mercado es uno de los mayores retos de tener carteras grandes y complejas, y usualmente hay un *tradeoff* entre la complejidad y la tratabilidad del marco empleado

    - Se tiene que ver cualquier distribución conjunta de los factores de riesgo y como los factores de riesgo se traducen en el valor de la cartera

- Los puntos más importantes para estimar el VaR para la cartera que contiene derivados es que, aunque el cambio en el subyacente es normal, la no linearidad esencial en los derivados significa que el cambio en el derivado puede estar muy alejado de la normalidad

  - No obstante, si uno esta preocupado por pequeños movimientos del subyacente, entonces uno puede aproximar la sensibilidad de la cartera a cambios en el subyacente con la delta de la opción

    - Para cambios más grandes, se puede necesitar el uso de aproximaciones de mayor orden

  - Si se considera una cartera de derivados con un solo subyacente S, la sensibilidad de la opción o de la cartera de opciones es la delta Δ. Si la desviación estándar de la distribución del subyacente es $\sigma S\sqrt{\delta t}$, entonces la desviación estándar de la posición de opciones es $\sigma S\sqrt{\delta t}\Delta$

- Por lo tanto, Δ debe ser la delta de toda la posición, interpretada como la sensibilidad de todas las opciones relevantes del subyacente (la suma de deltas individuales)

- Por lo tanto, el VaR de la cartera se puede estimar de la siguiente manera:

$$-\alpha(1-c)\sqrt{\delta t}\sqrt{\sum_{j=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\Delta_i\Delta_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j}$$

- Para un solo subyacente, la aproximación delta para el VaR depende de la desviación estándar $\sigma S\sqrt{\delta t}\Delta$, no obstante, hay diferentes tipos de volatilidad, por lo que es un problema escoger cual usar

  - Suponiendo que se tiene una estimación para σ que difiere con la volatilidad implícita $\tilde{\sigma}$, ambas tendrían que utilizarse en la fórmula. La delta representa como la opción varía con el precio del subyacente, y esto es gobernado por la valoración del mercado de opciones

  - Entonces la delta debería ser $\tilde{\sigma}$, pero la σ en frente representa el movimiento de la acción (su movimiento real), por lo que debería ser la que se usa. Esto crea un dilema

- La aproximación delta es satisfactoria para pequeños movimientos, pero una aproximación mejor se puede conseguir introduciendo la convexidad, a través de la gamma

  - Suponiendo que la cartera consiste de una opción en una acción, la relación entre el cambio en el subyacente, δS, y el cambio en el valor de la opción δV es la siguiente:

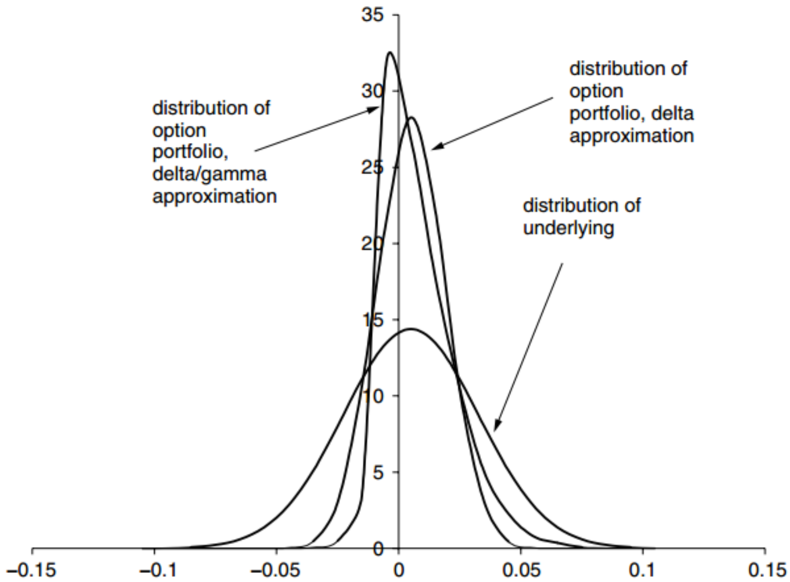
$$\delta V = \frac{\partial V}{\delta S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\partial S)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \cdots$$

  - Como se asume que $\delta S = \mu S\delta t + \sigma S(\delta t)^{1/2}\phi$, donde $(\delta t)^{1/2}\phi$ representa una variable normal, entonces se puede obtener la siguiente ecuación, que se puede reescribir en términos de delta y gamma:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\delta S}\sigma S(\delta t)^{1/2}\phi + \delta t\left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\phi^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) + \cdots$$

$$\Rightarrow\quad \delta V = \Delta\sigma S(\delta t)^{1/2}\phi + \delta t\left(\Delta\mu S + \frac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S^2\phi^2 + \Theta\right) + \cdots$$

- En el primer orden, la aleatoriedad del valor de la opción es simplemente proporcional a la del subyacente. En el siguiente orden hay un desplazamiento determinístico en δV debido al *drift* determinístico de S y la Θ, y el efecto de la gamma es introducir un término no lineal en el componente aleatorio de δS



- En el caso con múltiples opciones y sin suponer ninguna distribución para $\boldsymbol{S}$, esta aproximación se convierte en la siguiente:

$$\delta V \approx \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \boldsymbol{\Delta}^T \delta \boldsymbol{S} + \frac{1}{2}(\delta \boldsymbol{S})^T \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{S}$$

$$where \;\; \Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i} \quad \& \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}$$

- En este caso, δV sirve como una aproximación cuadrática a $L = -\delta V$, y, en el caso en donde se asume normalidad de δS (en el marco anteriormente visto, sería $\delta \boldsymbol{S}$ y la normalidad sería multivariante), se puede obtener la siguiente discretización:

$$\delta V \approx \sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\partial v_i}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial S^2}(\delta S)^2$$

$$where \;\; \Delta_P = \sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\partial v_i}{\partial S} \quad \& \quad \Gamma_p = \sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial S^2}$$

La simulación de Monte Carlo

- Los fundamentos de la teoría de la valoración de derivados es el camino aleatorio de los precios de los activos, de los tipos de interés y otros. Debido a que existe una relación entre los precios de las opciones y la densidad de probabilidad de transición, esto se puede explotar a través de simulaciones de precios
  - En el modelo de Black-Scholes, el valor presente de la recompensa esperada bajo la medida neutral al riesgo era el valor de la opción. Como el camino aleatorio neutral al riesgo es $dS = rS\,dt + \sigma S\,dX$, uno puede obtener la siguiente expresión:

$$option\ value = e^{-r(T-t)}E[Payoff(S)]$$

    - La esperanza puede ser la común siempre que sea con respecto al camino aleatorio neutral al riesgo, no al real
    - Esto se hace con el estimador de Monte Carlo, que no es más que una media. Este estimador es consistente debido a la ley de grandes números, de modo que no es un estimador sesgado de la esperanza de $h_K(S_{T,i})$

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h_K(S_{T,i})$$

$$E(\hat{\zeta}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E\left(h_K(S_{T,i})\right) = \frac{M}{M}E\left(h_K(S_{T,i})\right) = \zeta$$

$$where\quad \zeta = E\left(h_K(S_{T,i})\right)$$

    - Para usar el estimador de Monte Carlo, la función h_K tiene que ser una función $h_K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_K(S_{T,i})$ es una variable aleatoria en L_2 (su norma euclidiana se puede integrar respecto a su medida)

$$\|h_K\|^2 = \int_{S_{T,i}} \|h_K\|^2\, d\mathbb{Q}$$

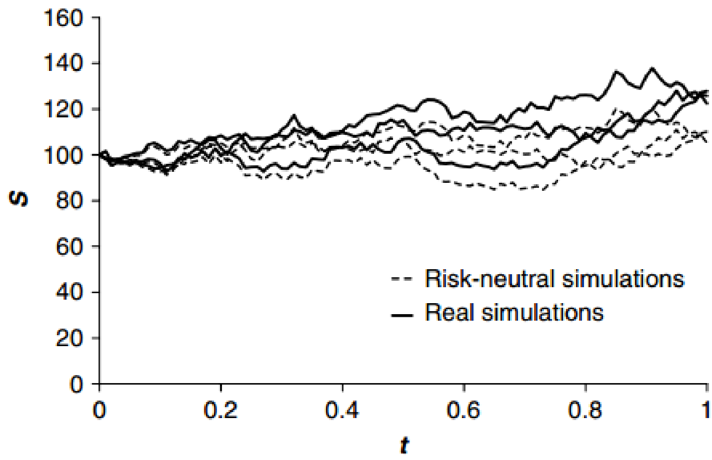
    - Debido a que el estimador es consistente y no está sesgado, es posible obtener intervalos de confianza para $\hat{\zeta}$. Para poder plantearlos, se puede utilizar el estimador de la desviación estándar y plantear el intervalo de confianza asintótico normal

$$s_{\hat{\zeta}} = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\zeta}^i - \hat{\zeta}\right)^2} \quad where \quad \hat{\zeta}^i = e^{-rT}h_K\left(S_{T,i}\right)$$

$$\Rightarrow \; IC_{1-\alpha} = \hat{\zeta} + z_{\alpha/2}\frac{s_{\hat{\zeta}}}{\sqrt{M}}$$

- Este resultado permite obtener un método para estimar el valor de la opción siguiendo estos pasos:

  - Se simula el camino aleatorio neutral al riesgo empezando en el momento actual hasta la fecha de vencimiento, dado así una realización del camino subyacente del precio del activo



  - Para esta realización, se calcula la recompensa de la opción

$$h_K\left(S_{T,1}\right)$$

  - Se simulan muchas más realizaciones sobre el horizonte temporal deseado y, una vez obtenidas todas las recompensas, se obtiene la recompensa media de todas las realizaciones

  - Finalmente, se toma el valor presente de esta media, y ese será el valor de la opción

$$option\ value = e^{-rT}\hat{\zeta}$$

- La parte inicial del algoritmo requiere la generación de números aleatorios de una distribución normal estándar (o una aproximación adecuada). La manera discreta de poder hacer esto es a través del método de Euler-Maruyama

  - Aunque el proceso se definió de manera continua como $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, pero se puede discretizar en una tabla de momentos equidistantes para el intervalo $[0,T]$ como $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ con incrementos $h = T/n$

- Cuanto mayor es n, mayor es la precisión de la simulación (más continua) porque hay más puntos de muestreo

- El objetivo de este método es desarrollar un esquema en donde se pueda modelar el proceso del precio sobre estos puntos de muestreo

- El movimiento entre los puntos muestrales todavía es aleatorio, pero el proceso de Wiener se puede discretizar como $\Delta X = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ para $k = 1, \dots, n$

  - Como X es un proceso de Wiener, entonces se puede ver que ΔX tiene la siguiente distribución:

$$\Delta X \sim N(0,1)\sqrt{t_k - t_{k-1}} = N(0,1)\sqrt{h}$$

  - El término ΔX se puede calcular fácilmente generando muestras independientes e idénticamente distribuidas de una variable $Z_k \sim N(0,1)$ para toda $k = 1,2, \dots, n$

- El método de Euler-Maruyama recursivo permite discretizar una ecuación diferencial estocástica en la tabla escogida fijando $\hat{Y}_0 = y_0$

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)\, dW_t$$

$$\hat{Y}_{t_j+1} = \hat{Y}_{t_j} + a\left(\hat{Y}_{t_j}\right)h + b\left(\hat{Y}_{t_j}\right)Z_{t_j}\sqrt{h} \quad for\ j = 0,1, \dots, n-1$$

  - Empezando por $\hat{Y}_0 = y_0$, se puede obtener todo el camino muestral para cada realización, de modo que se obtiene una trayectoria $\left(\hat{Y}_0, \hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_T\right)$

  - Como la ecuación de los precios es $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, esta se puede discretizar

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

$$\hat{S}_{t_j+1} = \hat{S}_{t_j} + \mu \hat{S}_{t_j} h + \sigma \hat{S}_{t_j} Z_{t_j}\sqrt{h} \quad for\ j = 0,1, \dots, n-1$$

  - Los resultados se aproximan más a la continuidad si se reduce el parámetro h, y si $h \to 0$, se pueden estudiar diversos criterios de convergencia

- Una vez hechas las diferentes simulaciones de los precios varias veces, se puede utilizar el estimador de Monte Carlo y descontarlo para poder obtener el precio simulado de la opción

  - Un pseudo-algoritmo para una *call*, por tanto, sería el siguiente:

Pseudocode

for $i = 1$ to M **do**
  generate $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ with $j = 1, \dots, n$
  set $\hat{S}_0 \leftarrow s_0$
  for $j = 1$ to n **do**
    set $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_{j-1} + \mu \hat{S}_{j-1} h + \sigma \hat{S}_{j-1} \sqrt{h} Z_j$
  end for
  set $\hat{S}^i \leftarrow \hat{S}_n$
  set $C_i \leftarrow \left(\hat{S}^i - K\right)^+$
end for
set $c_0^{MC}(C) \leftarrow e^{-rT}\left((C_1 + C_2 + \ldots + C_M)/M\right)$

  - No obstante, este algoritmo es genérico y solo hace falta adaptar la función de recompensa dependiendo de la opción

- Este algoritmo se utiliza mucho porque permite obtener el precio de opciones exóticas que dependen del camino que toman los precios (no solo del precio final)

  - A partir de los valores $\hat{S}_{t_j}$, es posible utilizar diferentes funciones (ya sean a trozos o de otro tipo, mientras sean medibles) para poder obtener la recompensa de las opciones y valorarlas

  - Por ejemplo, un pseudo-algoritmo para una opción asiática sería el siguiente:

Pseudocode Asian Option

for $i = 1$ to M **do**
  generate $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ with $j = 1, \dots, n$
  set $\hat{S}_0 \leftarrow s_0$
  for $j = 1$ to n **do**
    set $\hat{S}_j \leftarrow \hat{S}_{j-1} + \mu \hat{S}_{j-1} h + \sigma \hat{S}_{j-1} \sqrt{h} Z_j$
  end for
  set $\hat{S}^i \leftarrow 1/k \sum_{i=1}^{k} \hat{S}_{t_k}$
  set $C_i \leftarrow \left(\hat{S}^i - K\right)^+$
end for
set $c_0^{MC}(C) \leftarrow e^{-rT}\left((C_1 + C_2 + \ldots + C_M)/M\right)$