LÓGICA Y DEMOSTRACIONES

Iker Caballero Bragagnini

Tabla de contenido

LA ESCRITURA MATEMÁTICA **2**

LA TEORÍA DE CONJUNTOS .... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

LA LÓGICA **4**

LA DEMOSTRACIÓN DIRECTA O CONTRAPOSITIVA **19**

LA DEMOSTRACIÓN DE EXISTENCIA Y LA CONTRADICCIÓN .... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

La escritura matemática

- Como las matemáticas es un campo en el que se utilizan símbolos, la escritura matemática utiliza una mezcla de palabras y símbolos. Sin embargo, hay guías para saber como poder escribir matemáticas de manera clara
    - Nunca se tiene que comenzar una frase con un símbolo, debido a que puede parecer que la frase esté incompleta y es confuso

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad has\ two\ distinct\ roots$$

        - En cambio, se debería comenzar por una palabra con la primera letra en mayúscula

$$The\ equation\ \ x^2 - 6x + 5 = 0 \quad has\ two\ distinct\ roots$$

    - Se tienen que separar los símbolos con palabras, no con enumeraciones, dado que hace que la lectura de la frase sea más sencilla

$$With\ the\ equation\ of\ \ a, b\ is\ the\ only\ root\ of\ \ (x-a)(x-b) = 0$$

$$With\ the\ exception\ of\ \ a, the\ nº\ b\ is\ the\ only\ root\ of\ \ (x-a)(x-b) = 0$$

    - Excepto cuando se discute de lógica, se tienen que evitar utilizar los símbolos de implicación, cuantificadores, y otros

$$\Rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ \ni,\ etc.$$

        - En una demostración profesional se suelen utilizar frases y palabras más que símbolos para una mayor claridad
    - Hay que ser cuidadoso al utilizar *i.e.* y/o *e.g.*, dado que se puede confundir con símbolos usados
        - En inglés, *i.e.* se refiere a *that is* (eso es) y *e.g.* se refiere a *for example* (por ejemplo)
    - Se tienen que escribir números enteros como palabras cuando se usan como adjetivos y cuando son relativamente pequeños o fáciles de describir en palabras

There are exactly two groups of order 4.
Fifty million Frenchmen can't be wrong.

        - No obstante, se tiene que escribir el número numéricamente cuando se especifica el valor de algo

There are one million positive integers less than 1,000,001.

- No se tienen que mezclar símbolos y palabras de manera inapropiada

Every integer ≥ 2 is a prime or is composite.

Every integer exceeding 1 is prime or composite.

- Se tiene que evitar usar un símbolo al declarar un teorema cuando no se necesita o es superfluo

Theorem *Every bijective function f has an inverse.*

    - Normalmente, el teorema no depende de como se llama un objeto matemático, de modo que solo se usa si se hace referencia a este objeto después

- Se tiene que explicar el significado de cada símbolo que se introduce (si no ha sido utilizado antes)

- Se tienen que utilizar los símbolos helados o *frozen symbols* (símbolos que indican un objeto matemático de manera común)

    - Si m y n se utilizan para números, entonces no se tienen que usar los mismos símbolos para números reales

- Se tienen que utilizar símbolos consistentes, de modo que los símbolos encajen juntos

    - Por ejemplo, si se usan letras para denotar números, lo mejor sería que estas fueran consecutivas y no muy separadas en el abecedario

- En matemáticas existen cuatro tipos de proposiciones matemáticas relevantes y necesarias para escribir

    - Un axioma es una proposición matemática cuya verdad es aceptada y no necesita ser demostrada

    - Un teorema es una proposición matemática cuya verdad se puede demostrar o verificar, aunque a veces se restringe el término a resultados especialmente significativos o importantes

        - Generalmente, estos resultados no tan significativos se les llama "resultados"

- Un corolario es un resultado matemático que se puede deducir como consecuencia de un resultado previo

- Un lema es un resultado matemático que es útil para establecer la veracidad de otro resultado

  - De este modo, un lema no tiene una importancia primaria como un teorema

La lógica: proposiciones

- Las demostraciones y la lógica formal se basan en las proposiciones y en las operaciones básicas sobre ellas, tales como la negación, la disyunción y la conjunción

  - Una proposición se refiere a una oración declarativa o afirmación que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez

    The integer 3 is odd.
    The integer 57 is prime.

    - Toda proposición tiene un valor de verdad, que puede ser verdad (denotado por T) o falso (denotado por F)

    - Normalmente se utilizan letras como P, Q y R para denotar proposiciones, o $P_1, P_2, P_3, \ldots$ si hay bastantes proposiciones involucradas

    - No es necesario que se sepa el valor de verdad de una oración declarativa para saber si es una proposición o no

  - Las proposiciones pueden ser abiertas, de modo que dependen de un objeto, llamado variable, al cual se hace referencia

    - Una variable es un símbolo que se puede utilizar para predicados, fórmulas, algoritmos y proposiciones matemáticas. Este se utiliza cuando hay algo que tiene uno o más valores, pero no se sabe cual o cuales son o cuando se quiere que algo sea verdad para todos los elementos de un conjunto (no solo para un elemento concreto)

    - Una proposición abierta es una oración declarativa que contiene una o más variables, en donde cada variable representa un valor en un conjunto predeterminado, llamado dominio de la variable, y que se transforma en una proposición cuando los valores de los respectivos dominios se sustituyen por esas variables

$$P(x): \ (x-3)^2 \leq 1$$

- Una proposición abierta que contiene una variable x es típicamente representada por $P(x)$, $Q(x)$ o $R(x)$

- Si $P(x)$ es una oración abierta, donde el dominio de x es S, entonces se dice que $P(x)$ es una proposición abierta sobre el dominio S

- Los valores de verdad posibles se pueden resumir en una tabla, llamada tabla de verdades

P
T
F

Q
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

- Generalmente, la tabla de verdades de n proposiciones $P_1, P_2, \dots, P_n$ contiene 2^n posibles combinaciones de valores de verdad (filas)

- Las operaciones básicas que se pueden realizar con las proposiciones son la negación, la disyunción y la conjunción

- La negación de una proposición P es la proposición $not\ P$, la cual se denota por $\sim P$

P_1 : The integer 3 is odd.

$\sim P_1$: The integer 3 is not odd.

- La disyunción de dos proposiciones P y Q es la proposición $P\ or\ Q$, la cual se denota por $P \vee Q$. La disyunción es verdadera si al menos P o Q es verdadera (o ambas a la vez), y de otro modo la disyunción es falsa

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- La conjunción de las proposiciones P y Q es la proposición $P\ and\ Q$, la cual se denota por $P \wedge Q$. La conjunción es verdadera si ambas P y Q son verdaderas, y de otro modo la disyunción es falsa

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- En expresiones que incluyen estos símbolos de manera combinada, la orden de las operaciones especifica que $\sim$ tiene prioridad, mientras que si se combinan solo lo símbolos $\wedge$ y $\vee$ la expresión es ambigua

$$\sim P \wedge Q \equiv (\sim P) \wedge Q \qquad P \wedge \sim Q \equiv P \wedge (\sim Q)$$

  - Para que expresiones que combinen $\wedge$ y $\vee$, se necesita el uso de paréntesis para que la estructura tenga significado

$$(P \wedge Q) \vee R \not\equiv P \wedge (Q \vee R)$$

  - No es lo mismo la negación de una conjunción o una disyunción no es lo mismo que la conjunción o disyunción de la negación de ambas proposiciones

$$\sim(P \wedge Q) \not\equiv (\sim P) \wedge (\sim Q) \qquad \sim(P \vee Q) \not\equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$$

- Una proposición formada de dos proposiciones dadas suele ser una implicación (o condicional) o un bicondicional

  - Para las proposiciones P y Q, la implicación o condicional es una proposición "$If\ P, then\ Q$", la cual se denota como $P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- La proposición $P \Rightarrow Q$ es falsa solo cuando P es verdad y Q es falsa

- Es posible obtener una expresión equivalente de $P \Rightarrow Q$ en términos de una disyunción

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

- Generalmente se le llama premisa o hipótesis de $P \Rightarrow Q$ a la proposición o proposición abierta P en la implicación $P \Rightarrow Q$, mientras que Q se conoce como la conclusión

- A partir del concepto de una proposición condicional, se puede definir el concepto de contrapositivo, converso e inverso

  - El contrapositivo de una proposición condicional con la forma $P \Rightarrow Q$ es $\sim Q \Rightarrow \sim P$. El contrapositivo de una proposición condicional siempre es lógicamente equivalente a esta

$$\sim Q \Rightarrow \sim P$$

  - El converso de una proposición condicional con la forma $p \rightarrow q$ es $Q \Rightarrow P$. El converso de una proposición condicional no es lógicamente equivalente a esta, pero es lógicamente equivalente al inverso

$$Q \Rightarrow P$$

  - El inverso de una proposición condicional con la forma $P \rightarrow Q$ es $\sim P \rightarrow \sim Q$. El inverso de una proposición condicional no es lógicamente equivalente a esta, pero es lógicamente equivalente al converso

$$\sim P \Rightarrow \sim Q$$

  - De este modo, "P solo si Q" quiere decir $\sim Q \Rightarrow \sim P$ o $P \Rightarrow Q$ (por la equivalencia lógica entre la proposición condicional y su contrapositivo)

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$$

- Para las proposiciones o proposiciones abiertas P y Q, la conjunción $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ de la implicación $P \Rightarrow Q$ y de su converso $Q \Rightarrow P$ se denomina bicondicional de P y Q y se denota como $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	**T**
T	F	F	T	**F**
F	T	T	F	**F**
F	F	T	T	**T**

  - El bicondicional $P \Leftrightarrow Q$ es verdad cuando tanto P como Q tienen los mismos valores de verdad (son las dos verdaderas o falsas a la vez)

  - El bicondicional normalmente se escribe como "P *is equivalent to* Q" o "P *if and only if* Q"

- Una vez se tienen las nociones de las operaciones lógicas que se pueden hacer con las proposiciones, se puede introducir la noción de proposiciones compuestas, de tautologías y de contradicciones

  - A partir de proposiciones dadas, se pueden utilizar conectores lógicos para formar proposiciones compuestas

    - Una proposición compuesta es una proposición compuesta de una o más proposiciones (llamadas proposiciones de composición) y con al menos un conector lógico

    - Para poder definir los valores de verdad de una expresión compleja cual sea, primero se tienen que poner todas las combinaciones de valores de verdad posibles para las variables proposicionales. Una vez hecho esto, se tiene que definir el valor de verdad para expresiones más simples y así definir el de la expresión completa

P	Q	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim Q) \vee (P \Rightarrow Q)$
T	T	F	T	**T**
T	F	T	F	**T**
F	T	F	T	**T**
F	F	T	T	**T**

- Lo más importante de asignar valores es que, a través de la lógica, se puede juzgar la veracidad de un de una proposición compuesta en base al conocimiento que se tiene sobre la veracidad de sus componentes

- Existen dos tipos de proposiciones compuestas especiales: las tautologías y las contradicciones

  - Una proposición compuesta $\boldsymbol{t}$ se denomina tautología si es verdadera para cualquier posible combinación de valores de verdad de las proposiciones de composición que conforman $\boldsymbol{t}$

P	$\sim P$	$P \vee (\sim P)$
T	F	**T**
F	T	**T**

  - Una proposición compuesta $\boldsymbol{c}$ se denomina contradicción si es falsa para cualquier posible combinación de valores de verdad de las proposiciones de composición que conforman $\boldsymbol{c}$

P	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
T	F	**F**
F	T	**F**

  - Por la definición dada de ambos tipos de proposiciones, los valores de verdad se determinan por la estructura lógica de la proposición y no por el significado que pueda tener

- Uno de los conceptos más importantes en lógica es el de equivalencia lógica de proposiciones

  - Siendo R y S proposiciones compuestas que involucran las mismas proposiciones de composición, R y S son lógicamente equivalentes si ambas tienen los mismos valores de verdad para cualquier combinación de valores de verdad de sus componentes

P	Q	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim P) \vee Q$
T	T	F	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

- Si R y S son lógicamente equivalentes, entonces esta equivalencia se denota por $R \equiv S$

- Suponiendo que R y S son proposiciones compuestas que son lógicamente equivalentes, entonces $R \Leftrightarrow S$ es una tautología, y lo converso también aplica

$$(R \equiv S) \Leftrightarrow \big((R \Leftrightarrow S) \equiv \boldsymbol{t}\big)$$

  - Esto permite ver que, si se quiere demostrar la veracidad de una proposición R y $R \equiv S$, entonces solo hace falta demostrar la veracidad de S

- Es posible derivar equivalencias lógicas de proposiciones compuestas comunes, de modo que se construyen leyes conmutativas, asociativas, distributivas y de De Morgan

  - Siendo P, Q y R proposiciones, se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

1. *Commutative laws:*	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. *Associative laws:*	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. *Distributive laws:*	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. *Identity laws:*	$p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	$p \vee \mathbf{c} \equiv p$
5. *Negation laws:*	$p \vee {\sim}p \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge {\sim}p \equiv \mathbf{c}$
6. *Double negative law:*	${\sim}({\sim}p) \equiv p$	
7. *Idempotent laws:*	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
8. *Universal bound laws:*	$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
9. *De Morgan's laws:*	${\sim}(p \wedge q) \equiv {\sim}p \vee {\sim}q$	${\sim}(p \vee q) \equiv {\sim}p \wedge {\sim}q$
10. *Absorption laws:*	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
11. *Negations of* **t** *and* **c**:	${\sim}\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$	${\sim}\mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$

  - Siendo P y Q proposiciones, se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

$$(a) \quad \sim (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\sim Q).$$
$$(b) \quad \sim (P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge (\sim Q)) \vee (Q \wedge (\sim P)).$$

  - Estas equivalencias permiten simplificar formas proposicionales más complejas, de modo que solo se tiene que ir sustituyendo hasta encontrar una expresión más simple

- Sabiendo que si $P(x)$ es una proposición abierta sobre el dominio S, $P(x)$ es una proposición para toda $x \in S$, se pueden utilizar cuantificaciones y caracterizaciones

- Una manera de convertir una proposición abierta en una proposición es a través del uso de cuantificadores, de modo que se crea proposiciones cuantificadas

  - Las frases "$for\ every$" o "$for\ all$" se denominan cuantificadores universales y se denotan por el símbolo ∀. Este cuantificador es verdad si $P(x)$ es verdad para cada $x \in S$, mientras que es falso si hay al menos una $x \in S$ tal que $P(x)$ es falsa

$$\forall x \in S, P(x) \ \equiv \ For\ every/all\ \ x \in S, P(x)$$

  - Las frases "$there\ exists$", "$there\ is$", "$for\ some$" o "$for\ at\ least\ one$" se denominan cuantificadores existenciales y se denotan por el símbolo ∃. Este cuantificador es verdad si $P(x)$ es verdad para al menos un elemento $x \in S$, mientras que es falso si $P(x)$ es falsa para toda $x \in S$

$$\exists x \in S, P(x) \ \equiv \ There\ exists/is\ \ x \in S\ such\ that\ P(x)$$

- Es posible establecer equivalencias lógicas entre las proposiciones cuantificadas que utilizan el cuantificador universal y existencial

  - Siendo $P(x)$ es una proposición abierta sobre un dominio S, se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\sim\big(\forall x \in S, P(x)\big) \equiv \exists x \in S, \sim P(x)$$

$$\sim\big(\exists x \in S, \sim P(x)\big) \equiv \forall x \in S, \sim P(x)$$

  - Siendo $P(x, y)$ es una proposición abierta donde el dominio de la variable x es S y el dominio de la variable y es T, se cumplen la siguiente equivalencias

$$\sim\big(\forall x \in S, \forall y \in T, P(x, y)\big) \equiv \exists x \in S, \exists y \in T, \sim P(x, y)$$

$$\sim\big(\exists x \in S, \exists y \in T, P(x, y)\big) \equiv \forall x \in S, \forall y \in T, \sim P(x, y)$$

$$\sim\big(\forall x \in S, \exists y \in T, P(x, y)\big) \equiv \exists x \in S, \forall y \in T, \sim P(x, y)$$

$$\sim\big(\exists x \in S, \forall y \in T, P(x, y)\big) \equiv \forall x \in S, \exists y \in T, \sim P(x, y)$$

- Suponiendo que un concepto u objeto se expresa en una proposición abierta $P(x)$ sobre un dominio S y que la proposición abierta $Q(x)$ sobre un dominio S concierne este concepto, se dice que ese concepto se caracteriza por $Q(x)$ si $\forall x \in S, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ es una proposición verdadera

A real number r is irrational if and only if r has a nonrepeating decimal expansion.

- La proposición $\forall x \in S, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ se denomina la caracterización de este concepto

- La caracterización de un objeto o concepto permite dar una manera alternativa, pero equivalente, de entender la idea

- A partir de los cuantificadores, se puede dar definiciones de condición suficiente y condición necesaria

  - Si para cualquier $x \in S$, $P(x)$ es una condición suficiente para $Q(x)$, entonces:

$$\forall x \in S, P(x) \; is\ a\ sufficient\ condition\ for\ Q(x) \equiv$$

$$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$$

  - Si para cualquier $x \in S$, $P(x)$ es una condición necesaria para $Q(x)$, entonces:

$$\forall x \in S, r(x) \; is\ a\ necessary\ condition\ for\ s(x) \equiv$$

$$\forall x, Q(x) \rightarrow P(x) \equiv \forall x, \sim P(x) \rightarrow \sim Q(x)$$

La lógica: argumentos

- El concepto central de la lógica deductiva que se usa en las demostraciones matemáticas es el concepto de forma argumental, la cual se define como una secuencia de formas proposicionales

  - Una argumentación es una secuencia de declaraciones que tienen como objetivo demostrar la verdad de una afirmación

    - La afirmación al final de la secuencia es una conclusión, mientras que las declaraciones anteriores a esta secuencia se denominan premisas

    - Para confiar en las conclusiones que se obtienen a partir de un argumento se necesita que las premisas sean confiables por su propio mérito o que se deriven de otras proposiciones que sean verdad

  - En lógica formal, la forma de un argumento es esencialmente diferente de su contenido

- El análisis lógico no puede determinar el mérito intrínseco de un argumento, pero puede ayudar a analizar la forma del argumento para determinar si la conclusión se deriva necesariamente de las premisas

- Para ilustrar la forma lógica de un argumento, se utilizan letras del alfabeto para representar componentes de oraciones

If p or q, then r.
Therefore, if not r, then not p and not q.

- Para saber si un argumento es válido o no es válido, se tiene que ver si las conclusiones se derivan necesariamente de las proposiciones

  - Una forma argumental es válida cuando, independientemente de las proposiciones que se sustituyan por las variables proposicionales en las premisas, si estas premisas son verdad, la conclusión también lo es

    - Por lo tanto, un argumento es válido si su forma argumental es válida

    - La cuestión más crucial está en que la verdad de una conclusión depende necesariamente de la verdad de sus premisas, de modo que la verdad de la conclusión se infiere o se deduce de la verdad de estas

    - El símbolo ∴ quiere decir "entonces", y se usa justo antes de la conclusión

$$\begin{array}{l} \quad P \Rightarrow Q \\ \quad P \\ \therefore Q \end{array}$$

  - Para poder probar que una forma argumental es válida, es necesario seguir los siguientes pasos identificar las premisas o hipótesis y la conclusión, construir una tabla de verdad y ver los valores de verdad de las filas críticas

						premises		conclusion
p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \wedge r$	$p \to q \vee \sim r$	$q \to p \wedge r$	$p \to r$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	
T	F	T	F	F	T	F	T	
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	T	F	T	F	
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

- Las filas críticas son aquellas filas en las cuales las premisas o hipótesis son verdaderas

- Si hay al menos una fila crítica con una conclusión falsa, la forma argumental es inválida, dado que las premisas pueden ser ciertas y la conclusión falsa. De otro modo, la forma será válida

- Algunas de las formas argumentales válidas (reglas de inferencia) más usadas son las siguientes:

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	**Elimination**	a. $p \vee q$ $\sim q$ $\therefore p$ b. $p \vee q$ $\sim p$ $\therefore q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	**Transitivity**	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
Generalization	a. p $\therefore p \vee q$ b. q $\therefore p \vee q$	**Proof by Division into Cases**	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Specialization	a. $p \wedge q$ $\therefore p$ b. $p \wedge q$ $\therefore q$		
Conjunction	p q $\therefore p \wedge q$	**Contradiction Rule**	$\sim p \to c$ $\therefore p$

  - La forma argumental *modus ponens* es una forma argumental que se compone de una hipótesis condicional, otra afirmativa y una conclusión afirmativa

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \therefore Q \end{array}$$

    - La tabla de verdad de esta forma argumental muestra como esta siempre es válida:

		premises		conclusion	
p	q	$p \to q$	p	q	
T	T	T	T	T	← critical row
T	F	F	T		
F	T	T	F		
F	F	T	F		

  - La forma argumental *modus tollens* es una forma argumental que se compone de una hipótesis condicional, otra negativa y una conclusión negativa

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \therefore \sim P \end{array}$$

- La forma argumental siempre es válida, dado que se deriva de la forma *modus ponens* y utiliza la equivalencia lógica de la proposición contrapositiva

- La forma argumental de generalización es una forma argumental que se compone de una hipótesis afirmativa y de una conclusión disyuntiva

$$\begin{array}{ll} \quad P & \quad Q \\ \therefore P \vee Q & \therefore P \vee Q \end{array}$$

  - Esta forma argumental sirve para generalizar dado que, si P o Q son ciertas, entonces su disyunción siempre será cierta

- La forma argumental de especialización es una forma argumental que se compone de una hipótesis conjuntiva y una conclusión afirmativa

$$\begin{array}{ll} \quad P \wedge Q & \quad P \wedge Q \\ \therefore P & \therefore Q \end{array}$$

  - Como la hipótesis es una conjunción entre p y q, entonces tanto p como q tienen que ser verdaderas para que la hipótesis sea verdadera

- La forma argumental de eliminación es una forma argumental que se compone de una hipótesis disyuntiva, otra negativa y una conclusión afirmativa

$$\begin{array}{ll} \quad P \vee Q & \quad P \vee Q \\ \quad \sim Q & \quad \sim P \\ \therefore P & \therefore Q \end{array}$$

  - Como la hipótesis es una disyunción entre P y Q, y la segunda hipótesis indica que P (o Q) es falsa, entonces solo queda que q (o P) sea verdadera para que la disyunción sea cierta

- La forma argumental de transitividad es una forma argumental que se compone de dos hipótesis condicionales y una conclusión condicional

$$\begin{array}{l} \quad P \Rightarrow Q \\ \quad Q \Rightarrow R \\ \therefore P \Rightarrow R \end{array}$$

  - Muchos argumentos en matemáticas contienen cadenas de proposiciones condicionales, de modo que a partir de una proposición condicional se pueden derivar muchas otras

- La forma argumental de división por casos es una forma argumental que se compone de una hipótesis disyuntiva, dos condicionales, y una conclusión afirmativa

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ P \Rightarrow R \\ Q \Rightarrow R \\ \therefore R \end{array}$$

  - Muchas veces solo se sabe que una cosa u otra es cierta. Si se puede demostrar que en cualquiera de los casos se deriva R, entonces quiere decir que R es cierta

- La norma de la contradicción es una forma argumental que se compone de una hipótesis condicional y una conclusión afirmativa

$$\begin{array}{l} \sim P \Rightarrow \boldsymbol{c} \\ \therefore P \end{array}$$

  - Si se puede probar que la suposición de que una proposición P es falsa implica lógicamente una contradicción, entonces P debe ser verdadera

  - La tabla lógica de esta forma argumental muestra como siempre es válida

			premises	conclusion
p	$\sim p$	c	$\sim p \rightarrow$ c	p
T	F	F	T	T
F	T	F	F	

There is only one critical row in which the premise is true, and in this row the conclusion is also true. Hence this form of argument is valid.

- Una falacia es un error en el razonamiento que resulta de un argumento inválido, y hay varios tipos

  - Los tipos más comunes son usar premisas ambiguas, el razonamiento circular y el sacar conclusiones precipitadas

    - El razonamiento circular hace que se asuma que lo que se quiere probar es verdad sin haberlo derivado antes de las premisas

  - Otros dos tipos importantes de falacias son el error converso y el error inverso

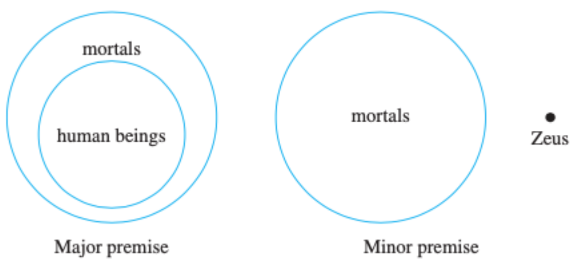
    - El error converso es una forma inválida porque la conclusión puede ser falsa o verdadera aún siendo todas las premisas verdaderas. Esto ocurre porque la conversa de una proposición condicional no tiene los mismos valores de verdad

$$
\begin{array}{l}
P \Rightarrow Q \\
Q \\
\therefore P
\end{array}
$$

        - El error inverso es una forma inválida porque la conclusión puede ser falsa o verdadera aún siendo todas las premisas verdaderas. Esto ocurre porque la inversa de una proposición condicional no tiene los mismos valores de verdad

$$
\begin{array}{l}
P \Rightarrow Q \\
\sim P \\
\therefore \sim Q
\end{array}
$$

- A partir de la norma de instanciación universal y de las formas argumentales, es posible obtener formas argumentales con proposiciones cuantificadas
    - La norma de instanciación universal (*rule of universal instantiation*) expresa que, si una propiedad es verdad para todos los elementos de un conjunto, también es verdad para cualquier elemento particular del conjunto
        - Esto implica que la verdad de una propiedad para un caso particular es una instancia especial de una verdad más general o universal
        - Esta norma es fundamental para el razonamiento deductivo, y ha permitido la creación de fórmulas, definiciones y teoremas matemáticos
    - La validez de un argumento proviene de su forma argumental, y esta es válida si, cuando todas las hipótesis son verdad, la conclusión también lo es
        - A través de diagramas en donde se muestran lo conjuntos para los cuales una proposición es verdadera, y un elemento particular como un punto (dentro o fuera de discos), se puede mostrar visualmente la validez de un argumento



- Combinando la norma con diferentes formas argumentales vistas anteriormente, se pueden crear formas argumentales con proposiciones cuantificadas que sean válidas

  - Combinando la norma con la forma argumental *modus ponens*, se puede obtener una forma argumental llamada *modus ponens* universal. Esta forma argumental normalmente se suele usar este tipo de forma en las demostraciones directas

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x) \\ &P(a)\ for\ a\ particular\ a \\ \therefore\ &Q(a) \end{aligned}$$

  - Combinando la norma con la forma argumental *modus tollens*, se puede obtener una forma argumental llamada *modus tollens* universal

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x) \\ &\sim Q(a)\ for\ a\ particular\ a \\ \therefore\ &\sim P(a) \end{aligned}$$

  - Combinando la norma con la forma argumental de transitividad, se puede obtener una forma argumental llamada transitividad universal

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x) \\ &\forall x \in S, Q(x) \Rightarrow R(x) \\ \therefore\ &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow R(x) \end{aligned}$$

- También se pueden establecer falacias análogas a las anteriormente vistas

  - Combinando la norma con el error converso, se puede obtener un error converso para la forma cuantificada

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x) \\ &Q(a)\ for\ a\ particular\ a \\ \therefore\ &P(a) \end{aligned}$$

  - Combinando la norma con el error inverso, se puede obtener un error inverso para la forma cuantificada

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x) \\ &\sim P(a)\ for\ a\ particular\ a \\ \therefore\ &\sim Q(a) \end{aligned}$$

La teoría de conjuntos

- Un conjunto, en matemáticas, se refiere a una colección de elementos. Los conjuntos matemáticos se pueden expresar de diversas maneras

    - Si S es un conjunto, la notación $x \in S$ significa que x es un elemento del conjunto S. De manera contraria, la notación $x \notin S$ quiere decir que x no es un elemento del conjunto S

$$x \in S \;\equiv\; x \text{ is contained in } S$$

$$x \notin S \equiv\; x \text{ is not contained in } S$$

    - Un conjunto también se puede expresar con notación de lista o *set-roster notation*, escribiendo todos los elementos entre llaves

$$S = \{1,2,3, \dots ,100\}$$

        - El elemento de un conjunto puede ser otro conjunto

$$S = \big\{1, \{1\}\big\} \equiv\; S \text{ has } 2 \text{ elements}$$

        - Para poder describir un conjunto infinito, se utilizan las elipsis al final del conjunto

$$S = \{1,2,3, \dots\}$$

        - Un conjunto con un solo número no es igual al mismo número, dado que, aunque tenga el mismo número como elemento, este sigue siendo un conjunto y no es igual a su elemento

$$S = \{1\} \neq 1$$

    - Un conjunto también se puede expresar con notación de constructor de conjuntos o *set-builder notation*. Esta consiste en definir un conjunto tal que todos sus elementos cumplan una propiedad

        - Siendo S un conjunto y $P(x)$ una propiedad, se puede definir un conjunto de todos elementos x en S tal que $P(x)$ sea verdad. En este caso, la primera parte se lee como “el conjunto de todas las x” y | se lee como “tal que”

$$\{x \in S | P(x)\}$$

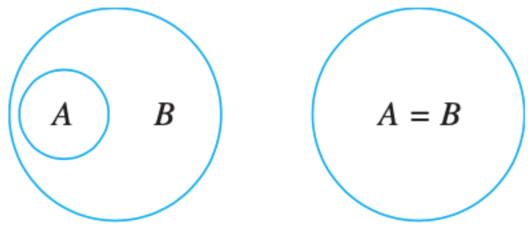
        - También se puede expresar lo mismo con otra notación alternativa:

$$\{x\colon P(x)\}$$

  - Una manera gráfica de representar los conjuntos es mediante diagramas de Venn, los cuales son círculos que representan un conjunto en un espacio

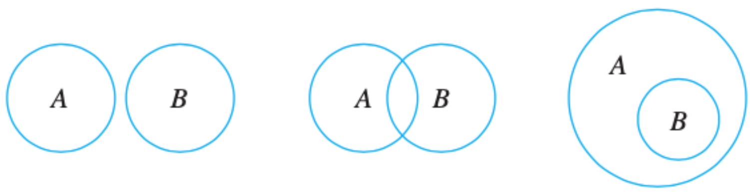
- Una relación básica entre los conjuntos es la de ser un subconjunto o *subset*. Siendo A y B conjuntos, entonces A es un subconjunto de B solo si cada elemento de A es también un elemento de B

$$A \subseteq B \iff \forall x, if\ x \in A\ then\ x \in B$$



  - Cabe diferenciar que la notación $\subseteq$ solo se usa para conjuntos, mientras que la notación $\in$ solo se utiliza para indicar la pertenencia de un elemento en un conjunto. De manera contraria, se puede utilizar la notación $\nsubseteq$ para indicar que un conjunto no es un subconjunto de otro, de modo que al menos un elemento de A no está incluido en B

$$A \nsubseteq B \iff \exists x\ such\ that\ x \in A\ and\ x \notin B$$



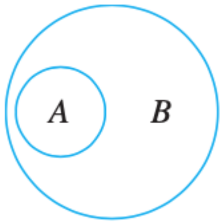
    - Cuando un conjunto B es elemento de otro conjunto A, este no es subconjunto de A, dado que, al ser un elemento, tendría que ser el conjunto del conjunto B

$$B \nsubseteq A \quad as \quad x \in B\ \Rightarrow\ x \notin A$$

  - Se considera que A es un subconjunto propio o *proper subset* si cada elemento de A está en B, pero hay al menos un elemento de B que no está en A

$$A \subset B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \nsubseteq A) \iff$$

$$\forall x, if\ x \in A\ then\ x \in B\ and\ \exists x\ such\ that\ x \notin A\ and\ x \in B$$



- Para demostrar que un conjunto es un subconjunto de otro, es necesario utilizar el método de demostración directa

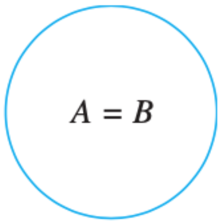
  - Siendo X e Y dos conjuntos, para probar que $X \subseteq Y$, entonces se supone que $x \in X$ es un elemento arbitrariamente escogido y se demuestra que $x \in Y$

- Hay veces que se usa $\subset$ en vez de $\subseteq$ para denotar un subconjunto impropio, dado que depende del autor (denota todos los subconjuntos, propios o impropios)

* Otras relaciones importantes entre conjuntos son la de igualdad, unión, intersección, diferencia y complemento

  - Siendo A y B dos conjuntos en el conjunto universal U, $A = B$ si, y solo si, cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$



  - Por lo tanto, que $A \neq B$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$A \neq B \Leftrightarrow \sim[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \equiv (A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$$

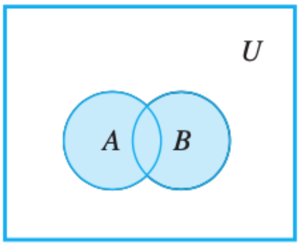
  - Esta proposición se conoce como axioma de extensionalidad, y expresa que un conjunto se determina completamente por lo que son sus elementos, no por el orden en el que se ponen ni por el número de veces que aparezca un mismo elemento

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{2,1,3\} \quad C = \{1,2,1,2,3,3\}$$

$$A = B = C$$

- Siendo A y B dos conjuntos en el conjunto universal U, la unión de A y B ($A \cup B$) es el conjunto de todos los elementos que están en al menos el conjunto A o B

$$A \cup B = \{x \in U | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



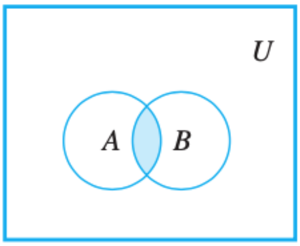
  - Cuando hay más de dos subconjuntos en el conjunto universal U, para un entero positivo n, se puede representar la unión como:

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cup \ldots \cup A_n = \{x \in U | \ x \in A_i \ for \ at \ least \ one \ i = 0,1, \ldots, n\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \cup \ldots = \{x \in U | \ x \in A_i \ for \ at \ least \ one \ positive \ integer \ i\}$$

- Siendo A y B dos conjuntos en el conjunto universal U, la intersección de A y B ($A \cap B$) es el conjunto de todos los elementos que son comunes tanto en A como en B

$$A \cap B = \{x \in U | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



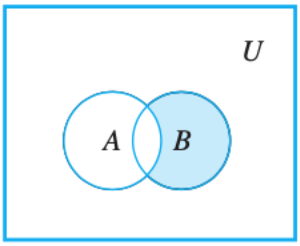
  - Cuando hay más de dos subconjuntos en el conjunto universal U, para un entero positivo n, se puede representar la intersección como:

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cap \ldots \cap A_n = \{x \in U | \ x \in A_i \ for \ all \ i = 0,1, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \cap \ldots = \{x \in U | \ x \in A_i \ for \ all \ positive \ integers \ i\}$$

- Siendo A y B dos conjuntos en el conjunto universal U, la diferencia de B menos A ($B - A$ o $B \setminus A$) es el conjunto de todos los elementos que están en B y no en A

$$B - A = \{x \in U | (x \notin A) \wedge (x \in B)\}$$



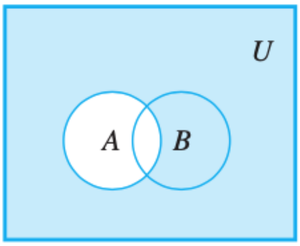
  - Como se verá más adelante, $B - A$ es equivalente a $A^c \cap B$

$$B - A = \{x \in U | (x \notin A) \wedge (x \in B)\} =$$

$$= \{x \in U | (x \in A^c) \wedge (x \in B)\} = A^c \cap B$$

- Siendo A un conjunto en el conjunto universal U, el complemento de A es el conjunto de todos los elementos en U que no son están en A

$$A^c = \{x \in U |\ x \notin A\} = U - A$$



- Una notación conveniente para los subconjuntos de números reales son los intervalos
  - Dados dos números reales a y b, siendo $a \leq b$, entonces:
    - Un intervalo cerrado o *closed interval* es el subconjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

    - Un intervalo abierto u *open interval* es el subconjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

- Un intervalo semiabierto o *semi open interval* es el subconjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x < b$ o que $a < x \leq b$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

- Los símbolos ∞ y $-\infty$ se utilizan para indicar que un intervalo no está limitado por la izquierda o por la derecha

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

- Un conjunto no puede ser cerrado si se usan los símbolos ∞ o $-\infty$, dado que el número infinito no se puede incluir en el intervalo

- Existe un conjunto que no contiene ningún elemento: el conjunto vacío $\emptyset$. A partir de este conjunto, es posible derivar la noción de conjuntos disjuntos, de partición y de conjunto potencia (*power set*)

$$\emptyset = \{\}$$

- Las propiedades más importantes de $\emptyset$ es que este es subconjunto de cualquier conjunto y, a partir de eso, solo existe un conjunto vacío

- Se utiliza el método de elemento para poder demostrar que $\emptyset$ es igual a un conjunto. Este consiste en demostrar que un conjunto no tiene elementos por contradicción (suponiendo que si tiene)

- Para poder demostrar que $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto, se demuestra la proposición por contradicción

Theorem 6.2.4 A Set with No Elements Is a Subset of Every Set

If E is a set with no elements and A is any set, then $E \subseteq A$.

Proof (by contradiction):

Suppose not. *[We take the negation of the theorem and suppose it to be true.]* Suppose there exists a set E with no elements and a set A such that $E \not\subseteq A$. *[We must deduce a contradiction.]* Then there would be an element of E that is not an element of A *[by definition of subset]*. But there can be no such element since E has no elements. This is a contradiction. *[Hence the supposition that there are sets E and A, where E has no elements and $E \not\subseteq A$, is false, and so the theorem is true.]*

- Utilizando el teorema anterior, se puede demostrar directamente la unicidad del conjunto vacío (a través de la definición de igualdad entre conjuntos)

Corollary 6.2.5 Uniqueness of the Empty Set

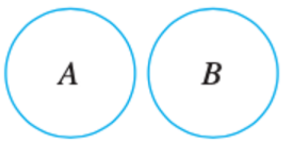
There is only one set with no elements.

Proof:

Suppose E_1 and E_2 are both sets with no elements. By Theorem 6.2.4, $E_1 \subseteq E_2$ since E_1 has no elements. Also $E_2 \subseteq E_1$ since E_2 has no elements. Thus $E_1 = E_2$ by definition of set equality.

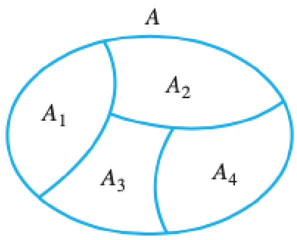
- Los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes si, y solo si, no hay dos conjuntos A_i y A_j con diferentes índices que tengan elementos en común

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad whenever\ i \neq j\ \ and\ i, j = 1,2,3, \ldots$$



- Una colección o conjunto finito o infinito de conjuntos no vacíos $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ es una partición de un conjunto A si, y solo si, A es la unión de todos los conjuntos A_i y los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son mutuamente excluyentes

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = A \quad and \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \emptyset$$



- Dado un conjunto A, el conjunto potencia (*power set*) de A, denotado por $\wp(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A

$$\wp(\{x, y\}) = \{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$$

  - El conjunto vacío siempre será un subconjunto de cualquier conjunto, de modo que siempre se incluye en $\wp(A)$

- El concepto de conjunto permite definir un par ordenado a través de este. La notación que se suele utilizar para los pares ordenados es la de (a, b), en donde a es el primer elemento del par y b el segundo elemento (hay un orden). Se puede establecer la siguiente equivalencia:

$$ordered\ pair\colon\ (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- Cuando $a \neq b$, los dos elementos del conjunto son diferentes (porque no son el mismo conjunto) y a está en ambos conjuntos, mientras que b está en uno solo

  - La definición con conjuntos dada para los pares ordenados permite ver como los dos elementos dentro del conjunto son diferentes entre sí, lo cual hace que el orden de los valores a y b dentro del par ordenado defina el conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \qquad (b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\}$$

$$(a, b) \neq (b, a)$$

  - Por lo tanto, dos pares ordenados (a, b) y (c, d) solo pueden ser iguales si $a = c$ y si $b = d$

$$(a, b) = (c, d) \;\; only\, if \;\; a = c \;\; and \;\; b = d$$

  - Cuando $a = b$, los dos elementos del conjunto son los mismos (porque son el mismo conjunto) y no hay diferencia entre ambos elementos dentro del conjunto

$$(a, a) \; = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

- La generalización del par ordenado se conoce como n-tupla ordenada (*ordered n-tuple*)

  - Siendo n un entero positivo y $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos (no necesariamente diferentes), una n-tupla ordenada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ consiste en $x_1, x_2, \dots, x_n$ juntos con el orden (x_1 es el primer elemento, x_2 es el segundo, y así hasta x_n)

$$ordered\; n - tuple \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

  - Dos n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ son equivalentes si, y solo si, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

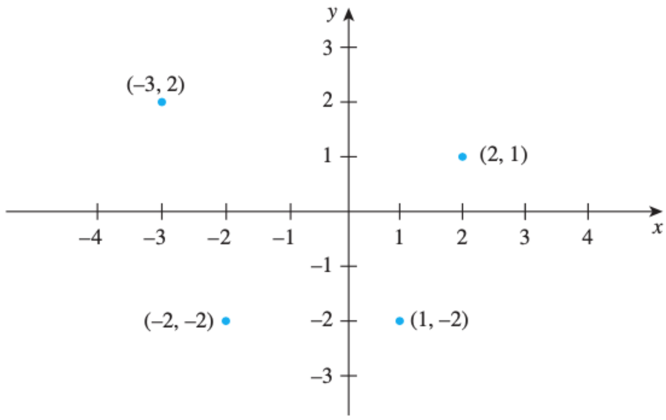
- Juntando los conceptos de conjunto y de par ordenado, se puede definir el producto cartesiano. Dados los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, el producto cartesiano de estos ($A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$) es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) |\; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

- El número de elementos que tendrá el producto cartesiano será el producto del número de elementos que contienen los conjuntos

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots| = |A_1||A_2| \ldots$$

- El producto cartesiano del conjunto $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) contendrá todos los posibles puntos de un plano cartesiano



- Existen muchas relaciones que involucran subconjuntos, uniones, intersecciones, complementos y diferencias
  - Las definiciones mostradas anteriormente permiten obtener una versión procedimental de estas:

Procedural Versions of Set Definitions

Let X and Y be subsets of a universal set U and suppose x and y are elements of U.

1. $x \in X \cup Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ or $x \in Y$
2. $x \in X \cap Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ and $x \in Y$
3. $x \in X - Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ and $x \notin Y$
4. $x \in X^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X$
5. $(x, y) \in X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$ and $y \in Y$

    - Estas versiones se utilizarán sobre todo para demostrar las relaciones e identidades entre conjuntos

  - Las relaciones más importantes que involucran subconjuntos son la inclusión de la intersección, la inclusión de la unión, y la transitividad de los subconjuntos

Theorem 6.2.1 Some Subset Relations

1. *Inclusion of Intersection:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \cap B \subseteq A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap B \subseteq B.$$

2. *Inclusion in Union:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \subseteq A \cup B \quad \text{and} \quad \text{(b) } B \subseteq A \cup B.$$

3. *Transitive Property of Subsets:* For all sets A, B, and C,

$$\text{if } A \subseteq B \text{ and } B \subseteq C, \text{ then } A \subseteq C.$$

- Para demostrar estas relaciones se utilizan argumentos de elementos, que consiste en demostrar que cada elemento de un conjunto es también elemento de otro. Para realizar este tipo de demostraciones, primero se supone y, bajo la suposición hecha, se demuestra la proposición (normalmente a través de las versiones procedimentales de las definiciones)

Proof:

Suppose A and B are any sets and suppose x is any element of $A \cap B$. Then $x \in A$ and $x \in B$ by definition of intersection. In particular, $x \in A$. Thus $A \cap B \subseteq A$.

The underlying structure of this proof is not difficult, but it is more complicated than the brevity of the proof suggests. The first important thing to realize is that the statement to be proved is universal (it says that for *all* sets A and B, $A \cap B \subseteq A$). The proof, therefore, has the following outline:

Starting Point: Suppose A and B are any (particular but arbitrarily chosen) sets.

To Show: $A \cap B \subseteq A$

Now to prove that $A \cap B \subseteq A$, you must show that

$$\forall x, \text{ if } x \in A \cap B \text{ then } x \in A.$$

But this statement also is universal. So to prove it, you

suppose x is an element in $A \cap B$

and then you

show that x is in A.

Filling in the gap between the "suppose" and the "show" is easy if you use the procedural version of the definition of intersection: To say that x is in $A \cap B$ means that

x is in A and x is in B.

This allows you to complete the proof by deducing that, in particular,

x is in A,

- Las identidades son ecuaciones que son verdad para todos los elementos de un conjunto. Las identidades siguientes, por tanto, son ecuaciones que se mantienen para cualquier conjunto de un conjunto universal

Theorem 6.2.2 Set Identities

Let all sets referred to below be subsets of a universal set U.

1. *Commutative Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \cup B = B \cup A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap B = B \cap A.$$

2. *Associative Laws:* For all sets A, B, and C,

$$\text{(a) } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{and}$$
$$\text{(b) } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Distributive Laws:* For all sets, A, B, and C,

$$\text{(a) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{and}$$
$$\text{(b) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Identity Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup \emptyset = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap U = A.$$

5. *Complement Laws:*

$$\text{(a) } A \cup A^c = U \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap A^c = \emptyset.$$

6. *Double Complement Law:* For all sets A,

$$(A^c)^c = A.$$

7. *Idempotent Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup A = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap A = A.$$

8. *Universal Bound Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup U = U \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap \emptyset = \emptyset.$$

9. *De Morgan's Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{and} \quad \text{(b) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. *Absorption Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \cup (A \cap B) = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap (A \cup B) = A.$$

11. *Complements of U and $\emptyset$:*

$$\text{(a) } U^c = \emptyset \quad \text{and} \quad \text{(b) } \emptyset^c = U.$$

12. *Set Difference Law:* For all sets A and B,

$$A - B = A \cap B^c.$$

- Todas estas identidades se pueden demostrar a partir del método básico para demostrar que dos conjuntos son iguales, que consiste en demostrar que uno es subconjunto de otro y al revés

Basic Method for Proving That Sets Are Equal

Let sets X and Y be given. To prove that $X = Y$:

1. Prove that $X \subseteq Y$.
2. Prove that $Y \subseteq X$.

- Para demostrar que un conjunto es subconjunto de otro, se tiene que aplicar la definición de subconjunto y demostrar que todos los elementos de un conjunto también pertenecen al otro. Por lo tanto, se supone que x pertenece a un conjunto y se demuestra a partir de esa suposición

$$Suppose\ x \in X, then \ldots\ so\ x \in Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$$

$$Suppose\ y \in Y, then \ldots\ so\ y \in X \Leftrightarrow Y \subseteq X$$

- Para poder demostrar y refutar otras proposiciones, se pueden utilizar las identidades y definiciones anteriores para utilizarlas en una demostración directa o buscar un contraejemeplo

    - Para demostrar otras identidades, se pueden utilizar identidades anteriormente demostradas para usarlas de manera "algebraica"

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap C^c && \text{by the set difference law} \\
&= C^c \cap (A \cup B) && \text{by the commutative law for } \cap \\
&= (C^c \cap A) \cup (C^c \cap B) && \text{by the distributive law} \\
&= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) && \text{by the commutative law for } \cap \\
&= (A - C) \cup (B - C) && \text{by the set difference law.}
\end{aligned}$$

    - Para buscar un contrajemplo, solo hace falta encontrar un ejemplo particular (dado que se intenta negar una proposición universal)

Counterexample 1: Let $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, and $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Then

$$A - B = \{1, 4\}, \quad B - C = \{2, 3\}, \quad \text{and} \quad A - C = \{1, 2\}.$$

Hence

$$(A - B) \cup (B - C) = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \text{whereas} \quad A - C = \{1, 2\}.$$

Since $\{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2\}$, we have that $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$.

- Para poder encontrar un conjunto que cumpla unas ciertas condiciones, generalmente se siguen los siguientes pasos:

    - Lo primero consiste en acotar los posibles elementos de este conjunto. Si el conjunto es numérico, normalmente será un conjunto acotado (no infinito), por lo que se puede hacer una estimación inicial de cuantos elementos debería haber

    - Lo segundo consiste en aplicar las condiciones que se imponen en el conjunto sobre el conjunto de la primera estimación. De este modo, se analizan cuáles son aquellos elementos que sí pertenecerían al conjunto y cuáles no

    - El tercer paso consiste en quitar o eliminar aquellos elementos del conjunto de la primera estimación que no cumplan con las condiciones. De este modo, el número de elementos se reduce y uno se queda con un conjunto más acotado

    - Se comprueba que todas las condiciones se respetan a partir de considerar algunos cuantos elementos. Si hay dudas, lo mejor es volver a comenzar y revisar los pasos

La demostración directa o contrapositiva

- La gran mayoría de teoremas y resultados se expresan como implicaciones, de modo que primero se puede comenzar a entender los métodos de demostración a través de las demostraciones triviales y vacuas
    - La mayoría de implicaciones $P \Rightarrow Q$ que se encuentran involucran proposiciones abiertas $P(x)$ y $Q(x)$, y que $P(x)$ o $Q(x)$ sean verdad depende de que elemento $x \in S$ se considere

      For $x \in S$, if $P(x)$ then $Q(x)$.

      Let $x \in S$. If $P(x)$, then $Q(x)$.

        - Raramente una proposición $P(x)$ es verdadera o falsa para todos los elementos $x \in S$
    - A partir de las condiciones para que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ tenga un valor de verdad particular, se puede definir el concepto de demostración trivial

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \Rightarrow Q(x)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T