

# ANÁLISIS MATEMÁTICO

Iker Caballero Bragagnini

## Tabla de contenido

LOS NÚMEROS NATURALES .....	2
LOS NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES .....	10
LOS NÚMEROS REALES Y LAS SECUENCIAS .....	22
LOS LÍMITES DE SECUENCIAS .....	37
LAS SERIES .....	56
LOS CONJUNTOS INFINITOS* .....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LAS FUNCIONES CONTINUAS EN $\mathbb{R}$ .....	65
LA DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES .....	83
LA INTEGRAL DE RIEMANN .....	98
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN .....	116
LAS INTEGRALES MÚLTIPLES .....	135
LOS ESPACIOS MÉTRICOS* .....	120
LAS FUNCIONES CONTINUAS EN ESPACIOS MÉTRICOS* .....	121
LA CONVERGENCIA UNIFORME .....	121
LAS SERIES DE POTENCIAS .....	121
LAS SERIES DE FOURIER .....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN DIVERSAS VARIABLES** .....	131
LA MEDIDA DE LEBESGUE .....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
LA INTEGRACIÓN DE LEBESGUE .....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
EL CÁLCULO VECTORIAL .....	135
OTRA NOTACIÓN OPERATORIA .....	154

## Los números naturales

- Los números naturales es el conjunto de números más primitivo del sistema de números, los cuales se usan para construir los números enteros y los racionales
  - Un número natural es un elemento cualquiera del conjunto de los números reales  $\mathbb{N}$ , el cual es el conjunto de todos los números creados al empezar por cero y contando hacia adelante indefinidamente
    - En algunos textos, el conjunto de números naturales empieza por 1 en vez de por 0, aunque es algo relacionado con la convención notacional
    - No obstante, esta definición no responde que es  $\mathbb{N}$  y, aún siendo intuitiva, no es muy rigurosa
  - Para poder definir los números naturales, se utilizan dos conceptos fundamentales: el número cero y la operación de incremento
    - Se utiliza  $n++$  para denotar el incremento o sucesor de  $n$  (el siguiente número). De este modo,  $\mathbb{N}$  consiste de cero y todo lo que se puede obtener desde cero mediante incrementos

$$0, 0++, (0++)++, \dots$$

- Los primeros dos axiomas para los números naturales son los siguientes: el número cero es un número natural, y si  $n$  es un número natural, entonces  $n++$  también lo es
- Se define 1 como el número  $0++$ , 2 como el número  $(0++)++$ , 3 como el número  $((0++)++)++$ , etc.

$$1 \equiv 0++, 2 \equiv (0++)++, 3 \equiv ((0++)++)++, \dots$$

- Como puede ocurrir que haya un retroceso de un número  $n++$  al cero sin contradecir los primeros dos axiomas, se necesita un tercer axioma: el número cero no es el sucesor de ningún número natural

$$n++ \neq 0 \text{ for natural number}$$

- También puede ocurrir un retroceso de un número natural a otro número natural, de modo que un cuarto axioma permite prohibir ese tipo de comportamiento: los números naturales diferentes tienen diferentes sucesores, y, consecuentemente, dos sucesores iguales implican que los números son iguales

$$m \neq n \text{ where } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n++ \neq m++$$

$$n + + = m + + \Rightarrow m = n \text{ where } m, n \in \mathbb{N}$$

- Los cuatro axiomas anteriores permiten que los números naturales sean diferentes los unos de los otros, pero no soluciona el problema de tener números en  $\mathbb{N}$  que no sean naturales sin romper ningún axioma
  - En este caso, se quiere un axioma que permita que los números en  $\mathbb{N}$  sean solo números que se puedan obtener a partir del cero y la operación de incremento. Este axioma se denomina el principio de inducción matemática
  - Siendo  $P(n)$  cualquier propiedad perteneciente a un número natural  $n$  y suponiendo que  $P(0)$  es verdad y que cuando  $P(n)$  es verdad,  $P(n + +)$  también es verdad, entonces  $P(n)$  es verdad para cualquier número natural  $n$
  - La lógica de este axioma es que si  $P(0)$  es verdad, entonces  $P(0 + +)$  es verdad, y aplicando repetidamente esta lógica, se puede ver como la propiedad se cumple para todos los incrementos a partir de cero
  - Este axioma se puede utilizar como método de demostración, en el cuál primero se tiene que demostrar que se cumple el caso base ( $P(0)$ ) y que, si  $P(n)$  se cumple,  $P(n + +)$  también se cumple
- Los cinco axiomas descritos conforman los axiomas de Peano para los números naturales, y debido a que son muy plausibles, se asume que existe un sistema numérico  $\mathbb{N}$  tal que los cinco axiomas anteriores son verdad

$$\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Aunque cada número natural sea finito, el conjunto de números naturales es infinito (el todo es mayor que las partes) y se puede demostrar con el quinto axioma (dado que ningún número natural es  $\infty$ ). Por lo tanto, los números naturales pueden acercarse a infinito, pero nunca pueden llegar a ser infinito, ya que no pertenece al conjunto
- La definición de los números naturales proporcionada es axiomática y no constructiva, dado que no se discute como son estos números, pero sí qué se puede hacer con ellos y las propiedades que tienen
- Una de las consecuencias de los axiomas es que se pueden definir secuencias de manera recursiva
  - Suponiendo que se quiere construir una secuencia de números  $a_0, a_1, a_2, \dots$  definiendo primero  $a_0$  como un valor base ( $a_0 \equiv c$  para

algún número  $c$ ),  $a_1$  como una función de  $a_0$  ( $a_1 \equiv f_1(a_0)$ ) y así, se puede definir, en general,  $a_{n++} \equiv f_n(a_n)$  para una función  $f_n$  de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{N}$ . Usando todos los axiomas a la vez, se puede concluir que este procedimiento dará un solo valor para el elemento de la secuencia  $a_n$  para cada número natural  $n$

- Suponiendo que para cada número natural  $n$  se tiene una función  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  y siendo  $c$  un número natural, entonces se puede asignar un único número natural  $a_n$  para cada número natural  $n$ , de modo que  $a_0 = c$  y  $a_{n++} = f_n(a_n)$  para cada número natural  $n$
- Aunque el sistema de números naturales descrito anteriormente se conforme solo de la operación de incremento y de unos axiomas, es posible construir operaciones más complejas como la adición o suma
  - Siendo  $m$  un número natural, para añadir cero a  $m$ , se define  $0 + m \equiv m$ . Si se quiere añadir un número  $n$  a  $m$ , se supone que se ha definido como añadir  $n$  a  $m$ , y entonces  $(n + +) + m \equiv (n + m) + +$ 
    - De este modo, se ha definido de manera recursiva (a partir del principio de inducción)  $n + m$  para cualquier número natural  $n$
    - En esta definición, un aspecto importante es el orden de los números cuando se suman, de modo que en esta definición no es lo mismo  $0 + m$  que  $m + 0$  y eso tiene implicaciones a la hora de demostrar
  - Esta definición permite obtener lemas básicos y proposiciones de los números naturales que se pueden demostrar a través del principio de inducción matemática

- Para cualquier número natural  $n$ ,  $n + 0 = n$

$$P(0): 0 + 0 = 0 \quad P(n): n + 0 = n$$

$$\Rightarrow P(n + +): (n + +) + 0 = (n + 0) + + = n + +$$

- Para cualesquiera números naturales  $n$  y  $m$ ,  $n + (m + +) = (n + m) + +$

$$P(0): 0 + (m + +) = (0 + m) + + = m + +$$

$$P(n): n + (m + +) = (n + m) + +$$

$$P(n + +): (n + +) + (m + +) = (n + (m + +)) + +$$

$$= ((n + m) + +) + +$$

$$((n + +) + m) + + = ((n + m) + +) + +$$

$$\Rightarrow (n + +) + (m + +) = ((n + +) + m) + +$$

- Como consecuencia de los lemas anteriores, para cualquier número natural  $n$ ,  $n + 1 = n + +$

$$P(0): 0 + 1 = 0 + (0 + +) = (0 + 0) + + = 0 + +$$

$$P(n) : n + 1 = n + +$$

$$P(n + +): (n + +) + 1 = (n + 1) + + = (n + +) + +$$

$$(n + +) + + = ((n + 0) + +) + + = (n + (0 + +)) + +$$

$$= (n + 1) + + = (n + +) + +$$

$$\Rightarrow (n + +) + 1 = (n + +) + +$$

- Para cuales quiera números naturales  $n$  y  $m$ ,  $n + m = m + n$  (propiedad conmutativa de la suma)

$$P(0): 0 + m = m \text{ \& } m + 0 = m \Rightarrow 0 + m = m + 0$$

$$P(n) : n + m = m + n$$

$$P(n + +): (n + +) + m = (n + m) + + = (m + n) + +$$

$$m + (n + +) = (n + m) + + = (m + n) + +$$

$$\Rightarrow (n + +) + m = m + (n + +)$$

- Para cuales quiera números naturales  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se tiene que  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (propiedad asociativa de la adición)

$$P(0): (0 + b) + c = b + c \text{ \& } 0 + (b + c) = b + c$$

$$\Rightarrow (0 + b) + c = 0 + (b + c)$$

$$P(n) : (n + b) + c = n + (b + c)$$

$$P(n + +): ((n + +) + b) + c = ((n + b) + +) + c$$

$$(n + +) + (b + c) = (n + (b + c)) + + = n + (b + c) + + =$$

$$= n + (b + +) + c = ((n + b) + +) + c$$

$$\Rightarrow ((n++) + b) + c = (n++) + (b + c)$$

- Para cuales quiera números naturales  $a, b$  y  $c$  tales que  $a + b = a + c$ , entonces  $b = c$  (ley de cancelación)

$$P(0): 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$$

$$P(n) : n + b = n + c \Rightarrow b = c$$

$$P(n++): (n++) + b = (n + b)++ = (n + c)++$$

$$(n++) + c = (n + c)++$$

$$\Rightarrow (n++) + b = (n++) + c \Rightarrow n + b = n + c \Rightarrow b = c$$

- A partir de estos resultados, se puede discutir como la adición interactúa con la positividad. Un número natural  $n$  se define como un número positivo si, y solo si, no es igual a cero

- Si  $a$  es un número positivo y  $b$  es un número natural, entonces  $a + b$  y  $b + a$  son positivos

$$P(0): 0 + b = b \Rightarrow b \neq 0$$

$$P(n) : n + b \neq 0$$

$$P(n++): (n++) + b = (n + b)++ \neq 0$$

- Si  $a$  y  $b$  son números naturales tales que  $a + b = 0$ , entonces  $a = 0$  y  $b = 0$
- Siendo  $a$  un número positivo, existe solamente un número natural  $b$  tal que  $b++ = a$
- Una vez se tiene la noción de adición, es posible definir y estudiar las propiedades básicas del orden
  - Siendo  $n$  y  $m$  números naturales, se dice que  $n$  es mayor o igual a  $m$  ( $n \geq m$  o  $m \leq n$ ) si, y solo si,  $n = m + a$  para algún número natural  $a$ , y se dice que  $n$  es estrictamente mayor a  $m$  ( $n > m$  y  $m < n$ ) si, y solo si,  $n \geq m$  y  $n \neq m$ 
    - A partir de esta definición, se puede ver que, si  $n$  es un número natural cualquiera, entonces  $n++ > n$  y no existe un número natural mayor a otro
  - Siendo  $a, b$  y  $c$  números naturales, entonces se cumplen las siguientes propiedades básicas del orden de números naturales:

- (a) (*Order is reflexive*)  $a \geq a$ .
- (b) (*Order is transitive*) If  $a \geq b$  and  $b \geq c$ , then  $a \geq c$ .
- (c) (*Order is anti-symmetric*) If  $a \geq b$  and  $b \geq a$ , then  $a = b$ .
- (d) (*Addition preserves order*)  $a \geq b$  if and only if  $a + c \geq b + c$ .
- (e)  $a < b$  if and only if  $a++ \leq b$ .
- (f)  $a < b$  if and only if  $b = a + d$  for some positive number  $d$ .

- Siendo  $a$  y  $b$  números naturales, entonces solo una de las siguientes proposiciones es cierta:  $a < b$ ,  $a = b$  o  $a > b$
- Las propiedades del orden permiten obtener una versión más estricta o fuerte del principio de inducción: siendo  $m_0$  un número natural y  $P(m)$  una propiedad perteneciente a un número natural arbitrario  $m$ , y suponiendo que para cualquier  $m \geq m_0$ , se obtiene la siguiente implicación:
  - Si  $P(m')$  es verdad para todos los números naturales  $m_0 \leq m' \leq m$ , entonces  $P(m)$  también es verdad (esto significa que  $P(m_0)$  también es verdad), y por tanto se puede concluir que  $P(m)$  es verdad para todos los números naturales  $m \geq m_0$
  - Normalmente el principio de inducción fuerte se utiliza cuando  $m_0 = 0$  o  $m_0 = 1$
- La siguiente operación compleja que se puede definir a partir de los resultados anteriores es la multiplicación, la cual se considera una adición iterada
  - Siendo  $m$  un número natural, para multiplicar cero por  $m$ , se define  $0 \times m \equiv 0$ . Además, si se supone que se ha definido inductivamente como multiplicar  $n$  por  $m$ , entonces se puede multiplicar  $n++$  por  $m$  al definir  $(n++) \times m \equiv (n \times m) + m$ 
    - El producto de dos números naturales  $n$  y  $m$  siempre será un número natural, y se puede demostrar mediante inducción

$$P(0): 0 \times m = 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{N}$$

$$P(n) : n \times m \in \mathbb{N}$$

$$P(n++): (n++) \times m = (n \times m) + m \in \mathbb{N}$$

- Normalmente se utiliza la abreviación  $nm$  para  $n \times m$ , dado que la multiplicación precede a la adición



- A partir de la definición, se pueden presentar resultados similares a los obtenidos para la adición, pero en el contexto de la multiplicación

- Para cualquier número natural  $n$ ,  $n \times 0 = 0$

$$P(0): 0 \times 0 = 0 \quad P(n): n \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow P(n++): (n++) \times 0 = (n \times 0) + 0 = 0 + 0 = 0$$

- Para cualesquiera números naturales  $n$  y  $m$ ,  $m \times (n++) = (m \times n) + m$

$$P(0): m \times (0++) = (m \times 0) + m = m = (0++) \times m$$

$$P(n): m \times (n++) = (m \times n) + m$$

$$P(n++): m \times ((n++)++) = (m \times (n++)) + m$$

$$= (m \times n) + m + m$$

$$(m \times (n++)) + m = (m \times n) + m + m$$

$$\Rightarrow m \times ((n++)++) = (m \times (n++)) + m$$

- Como consecuencia de los lemas anteriores, para cualquier número natural  $n$ ,  $n \times 1 = n$

$$P(0): 0 \times 1 = 0 \quad P(n): n \times 1 = n$$

$$P(n++): (n++) \times 1 = (n \times 1) + 1 = n + 1 = n++$$

$$\Rightarrow (n++) \times 1 = n++$$

- Siendo  $n$  y  $m$  números naturales, entonces  $n \times m = m \times n$  (propiedad conmutativa de la multiplicación)

$$P(0): 0 \times m = 0 \text{ \& } m \times 0 = 0 \Rightarrow 0 \times m = m \times 0$$

$$P(n): n \times m = m \times n$$

$$P(n++): (n++) \times m = (n \times m) + m$$

$$m \times (n++) = (m \times n) + m = (n \times m) + m$$

$$\Rightarrow (n++) \times m = m \times (n++)$$

- Siendo  $n$  y  $m$  números naturales, entonces  $n \times m = 0$  si, y solo si, al menos uno de los dos números es 0. En particular, si  $n$  y  $m$  son ambos positivos, entonces  $nm$  es también positivo
- Para cualesquiera números naturales  $a$ ,  $b$  y  $c$  se tiene que  $a(b + c) = ab + ac$  y que  $(b + c) = ba + ca$  (propiedad distributiva)

$$P(0): a(b + 0) = ab \quad \& \quad ab + a0 = ab$$

$$\Rightarrow a(b + 0) = ab + a0$$

$$P(n) : a(b + n) = ab + an$$

$$P(n + +): a(b + (n + +)) = a((b + n) + +) = a(b + n) + a$$

$$ab + a(n + +) = ab + an + a =: a(b + n) + a$$

$$\Rightarrow a(b + (n + +)) = ab + a(n + +)$$

- Para cualesquiera números naturales  $a$ ,  $b$  y  $c$  se tiene que  $(ab)c = a(bc)$  (propiedad asociativa de la multiplicación)

$$P(0): (ab)0 = 0 \quad \& \quad a(b0) = a0 = 0 \Rightarrow (ab)0 = a(b0)$$

$$P(n) : (ab)n = a(bn)$$

$$P(n + +): (ab)(n + +) = (ab)n + ab$$

$$c(b(n + +)) = a(bn + b) = a(bn) + ab = (ab)n + ab$$

$$\Rightarrow (ab)(n + +) = a(b(n + +))$$

- A partir de los resultados anteriores, también se pueden derivar resultados para el orden

- Si  $a$  y  $b$  son números naturales tales que  $a < b$ , y  $c$  es un número positivo, entonces  $ac < bc$

$$a < b \Rightarrow b = a + d \quad \text{where } d > 0$$

$$\Rightarrow bc = ac + dc \quad \text{where } dc > 0 \Rightarrow ac < bc$$

- Siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  números naturales tales que  $ac = bc$  y  $c \neq 0$ , entonces  $a = b$

- A partir de la definición de multiplicación y de resultados anteriores, se puede derivar el algoritmo euclidiano y definir la exponenciación de números naturales
  - Siendo  $n$  un número natural y  $q$  un número positivo, entonces existen dos números naturales  $m$  y  $r$  tales que  $0 \leq r < q$  y  $n = mq + r$

$$P(0): 0 = mq + r \text{ where } q > 0$$

$$\Rightarrow mq = 0q = 0 \text{ \& } r = 0$$

$$P(n): n = mq + r \text{ where } 0 \leq r < q \text{ \& } m, r \in \mathbb{N}$$

$$P(n + +): (n + +) = m''q + r''$$

$$\text{if } 0 \leq r' < q: (n + +) = n + 1 = mq + r + 1 =$$

$$= m''q + r'' \text{ where } r'' = r + 1, m = m'' \text{ \& } r'', m'' \in \mathbb{N}$$

$$\text{if } r' > q > 0: (n + +) = m'q + r' = m'q + q + d$$

$$= (m + 1)q + d \text{ where } r'' = d, m'' = m + 1 \text{ \& } r'', m'' \in \mathbb{N}$$

- Siendo  $m$  un número natural, elevar  $m$  a la potencia de 0 se define como  $m^0 \equiv 1$  y, en particular, se define  $0^0 \equiv 1$ . Suponiendo que recursivamente que  $m^n$  se ha definido para un número natural  $n$ , entonces se define  $m^{n++} \equiv m^n m$

## Los números enteros y racionales

- Para poder introducir otras operaciones útiles, como la resta o substracción, es necesario utilizar un sistema de números más grande que los naturales: el sistema de números enteros
  - Un entero es una expresión de la forma  $a - b$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales. Dos enteros se consideran iguales ( $a - b = c - d$ ) si, y solo si,  $a + d = c + b$ 
    - En términos de teoría de conjuntos, lo que se hace es empezar por el espacio  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  de pares ordenados  $(a, b)$  de números naturales y después, se establece una relación de equivalencia  $(a, b) \sim (c, d)$  si, y solo si,  $a + d = c + b$
    - En este caso, el símbolo  $a - b$  denota el espacio de todos los pares equivalentes a  $(a, b)$ , por lo que se puede definir de la manera siguiente:

$$a - b \equiv \{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \sim (c, d)\}$$

- No obstante, la interpretación en términos de la teoría de conjunto no afecta a la manipulación de enteros, por lo que no es relevante para derivar resultados
- La expresión conjunto de todos los enteros se denota por  $\mathbb{Z}$
- La suma de dos enteros  $(a - b) + (c - d)$  se define como  $(a - b) + (c - d) \equiv (a + c) - (b + d)$ , mientras que el producto de dos enteros  $(a - b) \times (c - d)$ , se define como  $(a - b) \times (c - d) \equiv (ac + bd) - (ad + bc)$ 
  - Siendo  $a, b, a', b', c, d$  números naturales, si  $(a - b) = (a' - b')$ , entonces  $(a - b) + (c - d) = (a' - b') + (c - d)$  y  $(a - b) \times (c - d) = (a' - b') \times (c - d)$ , y también  $(c - d) + (a - b) = (c - d) + (a' - b')$  y  $(c - d) \times (a - b) = (c - d) \times (a' - b')$ . Por lo tanto, la adición y la multiplicación son operaciones bien definidas (insumos iguales dan resultados iguales)
  - La demostración del lema anterior es la siguiente:

$$(a - b) + (c - d) = (a' - b') + (c - d)$$

$$\Rightarrow (a + c) - (b + d) = (a' + c) - (b' + d)$$

$$\Rightarrow a + c + b' + d = a' + c + b + d$$

$$(a - b) = (a' - b') \Rightarrow a + b' = a' + b$$

$$\Rightarrow a + b' + c + d = a' + b + c + d$$

$$(a - b) \times (c - d) = (a' - b') \times (c - d)$$

$$\Rightarrow (ac + bd) - (ad + bc) = (a'c + b'd) - (a'd + b'c)$$

$$\Rightarrow ac + bd + a'd + b'c = a'c + b'd + ad + bc$$

$$\Rightarrow (a + b')c + (a' + b)d = (a' + b)c + (a + b')d$$

$$(a - b) = (a' - b') \Rightarrow a + b' = a' + b$$

$$\Rightarrow (a + b')(c + d) = (a' + b)(c + d)$$

$$\Rightarrow (a + b')c + (a + b')d = (a' + b)c + (a' + b)d$$

$$\Rightarrow (a + b')c + (a' + b)d = (a' + b)c + (a + b')d$$

- Los enteros  $n - 0$  se comportan de la misma manera que los números naturales  $n$

- Siendo  $n$  y  $m$  dos números naturales, entonces  $(n - 0) + (m - 0) = (n + m) - 0$  y  $(n - 0) \times (m - 0) = nm - 0$

$$(n - 0) + (m - 0) = (n + m) - (0 + 0)$$

$$\Rightarrow (n + m) - (0 + 0) = (n + m) - 0$$

$$(n - 0) \times (m - 0) = (nm + 0 \times 0) - (a0 + 0m)$$

$$\Rightarrow (nm + 0 \times 0) - (n0 + 0m) = nm - 0$$

- Siendo  $n$  y  $m$  dos números naturales, entonces  $n - 0$  es igual a  $m - 0$  si, y solo si,  $n = m$

$$n = m \Rightarrow n + 0 = m + 0 \Rightarrow n - 0 = m - 0$$

- De este modo, se puede identificar a los números naturales con los enteros definiendo  $n \equiv n - 0$  sin afectar a las definiciones, y, consecuentemente, se puede definir el incremento de enteros como  $x + + \equiv x + 1$  para cualquier entero  $x$  (consistente con el incremento de números naturales)

- Con los resultados anteriores, es posible definir otras operaciones y la tricotomía de los enteros

- Si  $(a - b)$  es un entero, entonces se define la negación  $-(a - b)$  como el entero  $(b - a)$ . En particular, si  $n = n - 0$  es un número natural positivo, se puede definir la negación  $-n = 0 - n$
- Siendo  $x$  un entero, solamente una de las siguientes proposiciones es verdad:  $x$  es cero,  $x$  es igual a un número natural positivo  $n$  o  $x$  es la negación  $-n$  de un número natural positivo  $n$

$$x = a - b$$

$$a > b \Rightarrow a = b + n \Rightarrow a - b = n - 0 = n$$

$$a = b \Rightarrow a - b = a - a = 0 - 0 = 0$$

$$a < b \Rightarrow b = a + n \Rightarrow b - a = 0 - n = -n$$

- Si  $n$  es un número natural positivo, entonces a  $-n$  se le denomina entero negativo, por lo que un entero es positivo, negativo o cero
- Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  números enteros, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$xy = yx$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$x1 = 1x = x$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx$$

- La operación de substracción entre dos enteros se define con la fórmula  $x - y \equiv x + (-y)$ . A partir de esta definición, se pueden generalizar lemas y corolarios vistos anteriormente

- Debido a que la operación de substracción se define en términos de la adición y la negación, y ambas operaciones están bien definidas, no es necesario verificar el axioma de sustitución en esta operación
- A partir de esta definición, se puede ver que, si  $a$  y  $b$  son números naturales, entonces  $a - b = a - b$  y ya no se necesita utilizar la notación “—”

$$a - b = a + (-b) = (a - 0) + (0 - b) = a - b$$

- Siendo  $a$  y  $b$  enteros tal que  $ab = 0$ , entonces o  $a = 0$  o  $b = 0$  o ambos casos
- Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros tales que  $ac = bc$  y  $c$  no es cero, entonces  $a = b$

$$ac = bc \Rightarrow ac - bc = 0 \Rightarrow (a - b)c = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\Rightarrow a = b$$

- Finalmente, es posible extender la noción de orden vista para los naturales para los enteros
  - Siendo  $n$  y  $m$  enteros, se dice que  $n$  es más grande o igual que  $m$  ( $n \geq m$  o  $m \leq n$ ) si, y solo si, se tiene que  $n = m + a$  para algún número natural  $a$ . Se dice que  $n$  es estrictamente más grande que  $m$  ( $n > m$  o  $m < n$ ) si, y solo si,  $n \geq m$  y  $n \neq m$
  - Siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  enteros, se cumplen las siguientes propiedades:
    - (a)  $a > b$  if and only if  $a - b$  is a positive natural number
    - (b) (Addition preserves order) If  $a > b$ , then  $a + c > b + c$
    - (c) (Positive multiplication preserves order) If  $a > b$  and  $c$  is positive, then  $ac > bc$ .
    - (d) (Negation reverses order) If  $a > b$ , then  $-a < -b$ .
    - (e) (Order is transitive) If  $a > b$  and  $b > c$ , then  $ac > bc$ .
    - (f) (Order trichotomy) Exactly one of the statements  $a > b$ ,  $a < b$  or  $a = b$  is true.
- Ahora que se han construido los enteros, se puede utilizar una construcción similar para construir los números racionales, lo cual permitirá desarrollar la operación de división
  - Un número racional es una expresión de la forma  $a//b$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros y  $b$  no es cero. La expresión  $a//0$  no se considera un número racional, y dos números racionales se consideran iguales ( $a//b = c//d$ ) si, y solo si,  $ad = cb$ 
    - El conjunto de números racionales se denota por  $\mathbb{Q}$
  - Si  $a//b$  y  $c//d$  son números racionales, se define la suma de estos como  $(a//b) + (c//d) \equiv (ad + bc)//(bd)$ , el producto como  $(a//b) * (c//d) \equiv (ac)//(bd)$  y la negación como  $-(a//b) \equiv (-a)//b$ 
    - Si  $b$  y  $d$  no son cero, entonces  $bd$  tampoco lo es, y la suma o producto de dos números racionales sigue siendo un número racional
    - Las operaciones de suma, el producto y la negación están bien definidas, en el sentido que si una reemplaza  $a//b$  con otro número racional  $a'//b'$  que sea igual a  $a//b$ , entonces el resultado de las operaciones no cambia, y ocurre de manera similar con  $c//d$

- Los números racionales  $a//1$  se comportan de la misma manera que los enteros  $a$

$$(a//1) + (b//1) = (a + b)//1$$

$$(a//1) \times (b//1) = (ab//1)$$

$$-(a//1) = (-a)//1$$

- Dos números racionales  $a//1$  y  $b//1$  son iguales si, y solo si,  $a$  y  $b$  son iguales. Debido a esto, se puede identificar un entero  $a$  con  $a//1$  definiendo  $a \equiv a//1$

$$a//1 = b//1 \Rightarrow a1 = 1b \Rightarrow a = b$$

- Todos los números naturales son números racionales debido a que todos los enteros son números racionales
  - Un número racional  $a//b$  es igual a  $0 = 0//1$  si, y solo si,  $a \times 1 = b \times 0$  (si el numerador  $a = 0$ ). Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  no son cero, entonces  $a//b$  tampoco lo es
- Si  $x = a//b$  es un racional diferente a cero ( $a, b \neq 0$ ), entonces se define el recíproco  $x^{-1}$  de  $x$  como el número racional  $x^{-1} \equiv b//a$ , y el recíproco de cero no está definido
  - Esta operación es consistente con la noción de igualdad, debido a que si dos números racionales  $a//b$  y  $a'//b'$  son iguales, entonces sus recíprocos también son iguales

- Siendo  $x, y$  y  $z$  números racionales, entonces las siguientes leyes del álgebra se mantienen:

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$xy = yx$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$x1 = 1x = x$$

$$x(y + z) = xy + xz$$



$$(y + z)x = yx + zx$$

- Además, si  $x$  es un racional diferente de cero, entonces también se cumple lo siguiente:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

- A partir de los resultados anteriores, es posible definir el cociente  $x/y$  y la substracción de números racionales  $x - y$

- Se define el cociente  $x/y$  de dos números racionales  $x$  e  $y$ , siendo  $y \neq 0$ , con la fórmula  $x/y \equiv x \times y^{-1}$
- Con esta definición, es posible ver como  $a/b = a//b$  para cualquier entero  $a$  y cualquier entero diferente a cero  $b$

$$a/b = a \times b^{-1} = (a//1) * (1//b) = (a1)/(1b) = a//b$$

- De manera similar, también se puede definir la substracción de racionales con la fórmula  $x - y \equiv x + (-y)$
- Un número racional  $x$  es positivo si, y solo si, se tiene que  $x = a/b$  para enteros positivos  $a$  y  $b$ , y se dice que es negativo si, y solo si, se tiene que  $x = -y$  para un número racional positivo  $y$  (cuando  $x = (-a)/b$  para enteros positivos  $a$  y  $b$ )
- Por lo tanto, cualquier entero positivo es un número racional positivo, y cualquier número entero negativo es un número racional negativo
- Siendo  $x$  un número racional, solamente una de las proposiciones siguientes es verdad:  $x$  es igual a cero,  $x$  es un número positivo racional, o  $x$  es un número negativo racional

$$x = a/b$$

$$a > 0 \Rightarrow a/b > 0/1 \Rightarrow x > 0$$

$$a = 0 \Rightarrow a/b = 0/b \Rightarrow x = 0$$

$$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)/b > 0/1 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$$

- Considerando  $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y  $b \in \mathbb{Z}^+$ , donde  $b$  no es divisor de  $c$ , entonces el resto se define de la siguiente manera:

$$r = a - qb$$

- Para poder calcular el residuo, se tiene que encontrar el múltiplo  $q$  (el cociente) más grande de  $b$  que sea menor o igual a  $a$  (de modo que  $a \geq qb$ ) y entonces se calcula  $r$

$$a = 100 \text{ \& } b = 45 \Rightarrow qd = (2)(45) \Rightarrow r = 100 - 90 = 10$$

- Cuando  $b$  es divisor de  $a$ ,  $r = 0$  y  $q$  es el cociente de  $a/b$
- El residuo siempre cumple la desigualdad  $0 \leq r < b$ , mientras que el cociente  $q$  puede ser 0 si  $a < b$  o negativo si  $a < 0 < b$

- Finalmente, se puede extender la noción de orden para los números racionales

- Siendo  $x$  e  $y$  números racionales, se dice que  $x > y$  si, y solo si,  $x - y$  es un número racional positivo, y  $x < y$  si, y solo si,  $x - y$  es un número racional negativo. Se escribe  $x \geq y$  si, y solo si, o  $x > y$  o  $x = y$ , y  $x \leq y$  se define de manera similar
- Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  números racionales, entonces las siguientes propiedades se mantienen:

(a) (*Order trichotomy*) Exactly one of the three statements  $x = y$ ,  $x < y$ , or  $x > y$  is true.

(b) (*Order is anti-symmetric*) One has  $x < y$  if and only if  $y > x$ .

(c) (*Order is transitive*) If  $x < y$  and  $y < z$ , then  $x < z$ .

(d) (*Addition preserves order*) If  $x < y$ , then  $x + z < y + z$ .

(e) (*Positive multiplication preserves order*) If  $x < y$  and  $z$  is positive, then  $xz < yz$ .

- Habiendo definido los números enteros y los racionales, a través del concepto de división de dos números enteros, se pueden analizar tipos de números especiales que son determinantes

- Si un entero es divisible por 2, se dice que es un entero par o *even*, mientras que, si no lo es, se le llama impar u *odd*

- Cuando un número impar se divide por 2, el residuo siempre es  $r = 1$ , mientras que el de un entero par siempre es  $r = 0$ . Por lo tanto, un número par siempre se puede expresar como  $2k$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ , mientras que un número impar se puede expresar como  $2k + 1$  (por la expresión del residuo)

- Algunos resultados útiles sobre la suma y el producto de números enteros pares e impares son los siguientes:

- La suma o resta de dos números enteros pares siempre es un número entero par

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \\ 2k_1 - 2k_2 = 2(k_1 - k_2) \end{cases} \text{ where } (k_1 \pm k_2) \in \mathbb{Z}$$

- La suma o resta de dos números enteros impares siempre es un número entero par

$$\begin{cases} (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) = 2(k_1 + k_2 + 1) \\ (2k_1 + 1) - (2k_2 + 1) = 2(k_1 - k_2) \end{cases}$$

$$\text{where } (k_1 + k_2 + 1) \in \mathbb{Z}$$

- La suma o resta de un entero par a un entero impar siempre es un número entero impar

$$\begin{cases} (2k_1 + 1) + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) + 1 \\ (2k_1 + 1) - 2k_2 = 2(k_1 - k_2) + 1 \end{cases} \text{ where } (k_1 \pm k_2) \in \mathbb{Z}$$

- El producto de dos enteros pares es un entero par

$$(2k_1)2k_2 = 2(2k_1k_2) \text{ where } (2k_1k_2) \in \mathbb{Z}$$

- El producto de dos enteros impares es un entero impar

$$(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$$

$$\text{where } (2k_1k_2 + k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$$

- El producto de un entero par y otro impar es un entero par

$$(2k_1 + 1)(2k_2) = 2(2k_1k_2 + k_2) \text{ where } (2k_1k_2 + k_2) \in \mathbb{Z}$$

- Una vez se han definido las cuatro operaciones aritméticas básicas y se ha desarrollado la noción de orden y la clasificación de los racionales, entonces se pueden construir operaciones como el valor absoluto y la exponenciación

- Si  $x$  es un número racional, el valor absoluto  $|x|$  de  $x$  se define de la siguiente manera: si  $x$  es positivo, entonces  $|x| \equiv x$ , y si  $x$  es negativo, entonces  $|x| \equiv -x$ . Si  $x = 0$ , entonces  $|x| \equiv 0$

- A partir del valor absoluto, se puede dar una definición del concepto de distancia: siendo  $x$  e  $y$  números racionales, la cantidad  $|x - y|$  se denomina distancia entre  $x$  e  $y$  y se define como  $d(x, y) \equiv |x - y|$

- Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  números racionales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) (*Non-degeneracy of absolute value*) We have  $|x| \geq 0$ . Also,  $|x| = 0$  if and only if  $x$  is 0.

(b) (*Triangle inequality for absolute value*) We have  $|x+y| \leq |x| + |y|$ .

(c) We have the inequalities  $-y \leq x \leq y$  if and only if  $y \geq |x|$ . In particular, we have  $-|x| \leq x \leq |x|$ .

(d) (*Multiplicativity of absolute value*) We have  $|xy| = |x| |y|$ . In particular,  $|-x| = |x|$ .

(e) (*Non-degeneracy of distance*) We have  $d(x, y) \geq 0$ . Also,  $d(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ .

(f) (*Symmetry of distance*)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(g) (*Triangle inequality for distance*)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

- El valor absoluto es útil para poder saber qué tan cerca están dos números, y se puede dar una definición artificial a esa cercanía, llamada  $\varepsilon$ -cercanía

- Siendo  $\varepsilon > 0$  un número racional y  $x$  e  $y$  números racionales, se dice que  $y$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $x$  si, y solo si,  $d(x, y) \leq \varepsilon$
- No se define la noción de cercanía- $\varepsilon$  para  $\varepsilon \leq 0$ , dado que los números racionales solo estarían  $\varepsilon$ -cerca si  $x = y$  y nunca estarían  $\varepsilon$ -cerca en el caso de que  $\varepsilon < 0$
- Esta definición no es estándar en matemáticas, pero es útil para trabajar con otros conceptos más complejos
- Siendo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $w$  números racionales, se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) If  $x = y$ , then  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$  for every  $\varepsilon > 0$ . Conversely, if  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$  for every  $\varepsilon > 0$ , then we have  $x = y$ .
- (b) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$ , then  $y$  is  $\varepsilon$ -close to  $x$ .
- (c) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$ , and  $y$  is  $\delta$ -close to  $z$ , then  $x$  and  $z$  are  $(\varepsilon + \delta)$ -close.
- (d) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  and  $w$  are  $\delta$ -close, then  $x + z$  and  $y + w$  are  $(\varepsilon + \delta)$ -close, and  $x - z$  and  $y - w$  are also  $(\varepsilon + \delta)$ -close.
- (e) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, they are also  $\varepsilon'$ -close for every  $\varepsilon' > \varepsilon$ .
- (f) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $y$  and  $z$  are both  $\varepsilon$ -close to  $x$ , and  $w$  is between  $y$  and  $z$  (i.e.,  $y \leq w \leq z$  or  $z \leq w \leq y$ ), then  $w$  is also  $\varepsilon$ -close to  $x$ .
- (g) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  is non-zero, then  $xz$  and  $yz$  are  $\varepsilon|z|$ -close.
- (h) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  and  $w$  are  $\delta$ -close, then  $xz$  and  $yw$  are  $(\varepsilon|z| + \delta|x| + \varepsilon\delta)$ -close.

○ A partir de definir la exponenciación para números enteros y para números naturales, es posible derivar unas propiedades útiles para los exponentes

- Siendo  $x$  un número racional, elevar  $x$  a la potencia de 0 se define como  $x^0 \equiv 1$ , en particular definiendo  $0^0 \equiv 1$ . Suponiendo inductivamente que se ha definido  $x^n$  para un número natural  $n$ , entonces se define  $x^{n+1} \equiv x^n \times x$

- Siendo  $x$  un número racional diferente a cero, para cualquier número entero negativo  $-n$ , se define  $x^{-n} \equiv 1/x^n$

- Siendo  $x$  y  $z$  números racionales, y siendo  $n$  y  $m$  números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) We have  $x^n x^m = x^{n+m}$ ,  $(x^n)^m = x^{nm}$ , and  $(xy)^n = x^n y^n$ .
- (b) Suppose  $n > 0$ . Then we have  $x^n = 0$  if and only if  $x = 0$ .
- (c) If  $x \geq y \geq 0$ , then  $x^n \geq y^n \geq 0$ . If  $x > y \geq 0$  and  $n > 0$ , then  $x^n > y^n \geq 0$ .
- (d) We have  $|x^n| = |x|^n$ .

- Siendo  $x$  y  $z$  números racionales, y siendo  $n$  y  $m$  números enteros, se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) We have  $x^n x^m = x^{n+m}$ ,  $(x^n)^m = x^{nm}$ , and  $(xy)^n = x^n y^n$ .
- (b) If  $x \geq y > 0$ , then  $x^n \geq y^n > 0$  if  $n$  is positive, and  $0 < x^n \leq y^n$  if  $n$  is negative.
- (c) If  $x, y > 0$ ,  $n \neq 0$ , and  $x^n = y^n$ , then  $x = y$ .
- (d) We have  $|x^n| = |x|^n$ .

- Siendo  $x$  un número racional negativo, si  $n$  es un número par, entonces  $x^n > 0$ , mientras que si  $n$  es impar, entonces es un número negativo

$$x^{2k} = (x^k)^2 > 0 \quad \& \quad x^{2k+1} = x^{2k} x < 0$$

- A través de intercalar los enteros y los racionales por racionales, se puede ver como existen “agujeros” o “brechas” entre los racionales

- Siendo  $x$  un número racional, existe un número entero  $n$  tal que  $n \leq x < n + 1$ , el cual es único (para cada  $x$  solo existe una  $n$  que cumple la desigualdad). En particular, existe un número natural  $N$  tal que  $N > x$  (no hay un número racional mayor que todos los naturales)

- El número entero  $n$  para el cual  $n \leq x < n + 1$  se refiere a la parte entera de  $x$  o suelo de  $x$ , denotado por  $n = \lfloor x \rfloor$ . De este modo, se pueden encontrar números  $n$  y  $n + 1$  para cualquier  $x$

- Siendo  $x$  y  $y$  son dos racionales tales que  $x < y$ , entonces existe un tercer número racional tal que  $x < z < y$ . Por lo tanto, siempre hay al menos un número racional entre cualquier par de números racionales  $x < y$

- La demostración de este teorema es la siguiente:

$$x < y \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2}$$

$$z \equiv \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \Rightarrow z < y$$

$$z \equiv \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow x < z$$

- Como se puede ver, existen infinitos agujeros o brechas entre racionales, aunque estos sean infinitesimalmente pequeños, y se puede estudiar el caso de la raíz de 2

- No existe ningún número racional  $x$  por el cual  $x^2 = 2$

$$\text{Suppose } x^2 = 2 \Rightarrow x = \frac{p}{q} \text{ for } \forall p, q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$$\text{if } p = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q = 2r \text{ where } r = k^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{if } p = 2k + 1 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2q^2$$

$$\Rightarrow q = 2r + 1 \text{ where } r = k(k + 1) \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2$$

- Sin embargo, si se pueden obtener números racionales arbitrariamente cerca de  $\sqrt{2}$ . Para cualquier número racional  $\varepsilon > 0$  existe un número racional  $x$  no negativo tal que  $x^2 < 2 < (x + \varepsilon)^2$
- Los números que no pertenecen a los racionales se denominan números irracionales, de modo que, como hay infinitos agujeros o brechas entre dos números racionales, hay infinitos números irracionales entre dos números racionales  $x < y$

## Los números reales y las secuencias

- Aunque se han desarrollado los sistemas numéricos más esenciales, es necesario construir otro sistema numérico que permita trabajar con números irracionales y racionales a la vez: el sistema de números reales
  - Existen áreas de las matemáticas, tales como la geometría, que suelen trabajar con números irracionales como  $\sqrt{2}$ 
    - Los campos del cálculo diferencial e integral están estrechamente relacionados con la geometría, por lo que también suele trabajar con números reales
  - No obstante, la construcción de este sistema numérico es un poco más compleja que con los otros, dado que se pasa de un sistema discreto a un sistema continuo
    - La construcción requiere de la noción de límite y de secuencias para poder trabajar de manera rigurosa con esta
- La construcción de números reales debe apoyarse en el concepto de secuencia, de secuencia de Cauchy y de sus propiedades

- Siendo  $m$  un entero, una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  de números racionales es una función cualquiera desde el conjunto  $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$  a  $\mathbb{Q}$  (un mapeado que asigna a cada entero  $n \geq m$  un número racional  $a_n$ )
  - De manera más informal, una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  de números racionales es una colección de racionales  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$
- El objetivo es definir los números reales como límites de secuencias de números racionales, por lo que se tiene que distinguir entre secuencias convergentes y secuencias divergentes y es necesaria la definición de  $\varepsilon$ -cercanía

$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots$

$1, 0, 1, 0, 1, \dots$

- Siendo  $\varepsilon > 0$ , una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  se denomina  $\varepsilon$ -estable si, y solo si, cada par  $(a_j, a_k)$  de la secuencia de elementos está  $\varepsilon$ -cerca para cada número natural  $j$  y  $k$ . De este modo, la secuencia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  es  $\varepsilon$ -estable si, y solo si,  $d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$  para  $\forall j, k \in \mathbb{N}$
- Sin embargo, la noción de  $\varepsilon$ -estabilidad no captura bien el comportamiento limitativo de una secuencia al ser muy sensible a los miembros iniciales de una secuencia, por lo que es necesario una noción de estabilidad que no sea sensible a estos

$10, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

- Siendo  $\varepsilon > 0$ , una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  se denomina eventualmente  $\varepsilon$ -estable si, y solo si, la secuencia  $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$  es  $\varepsilon$ -estable para algún número natural  $N \geq 0$ . De este modo, la secuencia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  es eventualmente  $\varepsilon$ -estable si, y solo si, existe una  $N \geq 0$  tal que  $d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$  para  $\forall j, k \geq N$
- Estas definiciones no son estándar en la literatura, pero sirven para poder trabajar con secuencias de manera más sencilla
- Una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  de números racionales se denominan secuencia de Cauchy si, y solo si, para cualquier número racional  $\varepsilon > 0$ , la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  es eventualmente  $\varepsilon$ -estable. De este modo, la secuencia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  es una secuencia de Cauchy si, y solo si, para toda  $\varepsilon > 0$  existe una  $N \geq 0$  tal que  $d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$  para  $\forall j, k \geq N$



- El parámetro  $\varepsilon$  está restringido a ser un número racional positivo porque los reales aún no se han construido. No obstante, las definiciones no varían cuando se requiere que  $\varepsilon$  sea un real positivo
- Para demostrar que una secuencia es una serie de Cauchy, se comienza por las condiciones en  $N$  para que la secuencia sea  $\varepsilon$ -estable y se encuentra una  $N^*$  que cumpla estas. El planteamiento es el siguiente:

$$|a_j - a_k| \leq \varepsilon \text{ for } \forall j, k \geq N$$

$$\forall j, k \geq N \Rightarrow \text{find inequalities for } a_j \text{ and } a_k$$

$$\Rightarrow |a_j - a_k| \leq c \Rightarrow c \leq \varepsilon \Rightarrow N^*$$

- Es posible relacionar la noción de secuencia de Cauchy con la de una secuencia acotada

- Siendo  $M \geq 0$  un racional, una secuencia finita  $a_1, a_2, \dots, a_n$  está acotada por  $M$  si, y solo si,  $|a_i| \leq M$  para toda  $1 \leq i \leq n$ , y una secuencia infinita  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  está acotada por  $M$  si, y solo si,  $|a_i| \leq M$  para toda  $i \geq 1$ . En general, una secuencia está acotada si, y solo si, está acotada por  $M$  para alguna  $M \geq 0$
- Debido a que  $|a_i| \leq M$  implica que  $-M \leq a_i \leq M$ , se tiene que fijar el número  $M$  como un valor absoluto (con tal de que  $M$  sea cero o positivo y así  $-M \leq a_i \leq M$  tenga sentido)
- Todas las secuencias finitas  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están acotadas, y se puede demostrar esta proposición por inducción:

$$P(1): a_1 \leq M' \text{ when } M' = |a_1|$$

$$P(n): |a_i| \leq M'' \text{ for } 1 \leq i \leq n$$

$$P(n+1):$$

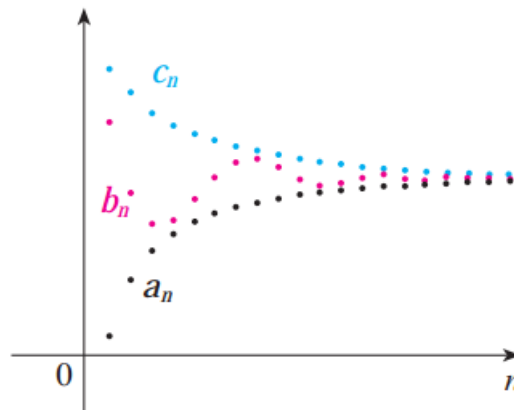
$$|a_i| \leq M'' \text{ for } 1 \leq i \leq n \text{ \& } |a_{n+1}| \leq M'' + |a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow |a_i| \leq M''' \text{ for } 1 \leq i \leq n+1 \text{ and } M''' = M'' + |a_{n+1}|$$

- Cualquier secuencia de Cauchy  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  está acotada
- Para poder definir los números reales como límites de secuencias de Cauchy, es necesario saber cuándo dos secuencias de Cauchy dan el mismo límite sin la necesidad de los números reales

- Para ello, se pueden utilizar definiciones similares a aquellas vistas anteriormente para las secuencias de Cauchy
  - Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  dos secuencias y  $\varepsilon > 0$  un número racional, se dice que la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  si, y solo si,  $a_n$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $b_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . De este modo, la secuencia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  está  $\varepsilon$ -cerca de la secuencia  $b_0, b_1, b_2, \dots$  si, y solo si,  $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$  para toda  $n = 0, 1, 2, \dots$
  - Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  dos secuencias y  $\varepsilon > 0$  un número racional, se dice que la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  está eventualmente  $\varepsilon$ -cerca de  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  si, y solo si, existe una  $N \geq 0$  tal que las secuencias  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  estén  $\varepsilon$ -cerca. De este modo, la secuencia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  está eventualmente  $\varepsilon$ -cerca de la secuencia  $b_0, b_1, b_2, \dots$  si, y solo si, existe una  $N \geq 0$  tal que  $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$  para toda  $n \geq N$
  - Estas definiciones no son estándar en la literatura, pero permiten trabajar de manera más sencilla con la equivalencia entre series
- Dos secuencias  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  son equivalentes si, y solo si, para cada número racional  $\varepsilon > 0$ ,  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  están eventualmente  $\varepsilon$ -cerca. De este modo,  $a_0, a_1, a_2, \dots$  y  $b_0, b_1, b_2, \dots$  son equivalentes si, y solo si, para cada número racional  $\varepsilon > 0$  existe una  $N \geq 0$  tal que  $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$  para toda  $n \geq N$ 
  - Igual que antes, el parámetro  $\varepsilon$  está restringido a ser un número racional positivo porque los reales aún no se han construido. No obstante, las definiciones no varían cuando se requiere que  $\varepsilon$  sea un real positivo
  - Esto se puede demostrar del mismo modo que se demuestra que una secuencia es una secuencia de Cauchy, pero adaptándose a la definición
- Una vez se tienen las nociones básicas de secuencias, es posible construir los números reales y sus propiedades a través de un operador similar al límite: el límite formal
  - Un número real se define como un objeto de la forma  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , donde  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy de números racionales. Dos números reales  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  son iguales si, y solo si,  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  son secuencias de Cauchy equivalentes
    - El límite formal de una secuencia  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  se denota como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
    - El conjunto de todos los números reales se denota por  $\mathbb{R}$

- Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  números reales y dada la definición de igualdad de números reales, se cumplen las tres leyes de la igualdad: un número real  $x$  es igual a sí mismo ( $x = x$ ); si  $x = y$ , entonces  $y = x$ ; y si  $x = y$  y  $y = z$ , entonces  $x = z$
- Esto conlleva a que, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$  y  $a_n \leq c_n \leq b_n$  para alguna  $n \geq m$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x$



- A partir de la definición, es posible desarrollar operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación para números reales
  - Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  números reales, se define la suma  $x + y$  como  $x + y \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
  - Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  números reales,  $x + y$  también es un número real (la secuencia  $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy de racionales)
  - Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y  $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$  números reales y suponiendo que  $x = x'$ , entonces se tiene que  $x + y = x' + y$
  - Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  números reales, se define la multiplicación  $xy$  como  $xy \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$
  - Siendo  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y  $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$  números reales, entonces  $xy$  también es un número real y, si  $x = x'$ , entonces  $xy = x'y$
- También es posible definir la negación y la substracción de números reales a través de relacionar los números reales con los racionales

- Siendo  $q$  un número racional, este se puede expresar como un número real definiendo  $q \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} q$ , por lo que las definiciones de adición, multiplicación y equivalencia son consistentes con esta definición

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + b)$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)$$

- La negación  $-x$  de un número real  $x$  se define como  $-x \equiv (-1)x$ , dado que  $-1$  es un racional y, por tanto,  $-x$  es real y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$

$$\begin{aligned} -x &= -\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) \end{aligned}$$

- La sustracción  $x - y$  de dos números reales  $x$  e  $y$  se define como  $x - y \equiv x + (-y)$ , por lo que  $x - y$  es real y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$

$$\begin{aligned} x - y &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + (-b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \end{aligned}$$

- Debido a que las definiciones de estas operaciones son consistentes con las operaciones de los racionales y de los números enteros, entonces todas las leyes del álgebra de los enteros también se mantienen para los reales

$$(a) \quad x + y = y + x$$

$$(b) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(c) \quad x + 0 = 0 + x = x$$

$$(d) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$(e) \quad xy = yx$$

$$(f) \quad (xy)z = x(yz)$$

$$(g) \quad x1 = 1x = x$$

$$(h) \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$(i) (y + z)x = yx + zx$$

- La última operación aritmética que se necesita definir es la reciprocidad, aunque al ser más compleja, son necesarias definiciones complementarias

- El problema resulta en que puede haber una secuencia de Cauchy  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  sea equivalente a la secuencia  $(0)_{n=1}^{\infty}$ , y por tanto que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  sea cero (no pudiendo obtener un recíproco). Además, aunque  $x \neq 0$ , si que puede ser el límite formal de una secuencia que incluya el cero como elemento, de modo que no se puede hacer el recíproco de ese elemento. Por lo tanto,  $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^{-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}$  y es necesario alejar la secuencia de Cauchy de cero

$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots, \quad 10, 100, 1000, 10000, \dots$$

$$0, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$$

- Una secuencia  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  de números racionales está acotada lejos de cero si, y solo si, existe un número racional  $c > 0$  tal que  $|a_n| \geq c$  para toda  $n \geq 1$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \quad 10, 100, 1000, \dots$$

- Siendo  $x$  un número real diferente a cero,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  para alguna secuencia de Cauchy  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  está acotada lejos de cero
- Suponiendo que  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy acotada lejos de cero, la secuencia  $(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$  también es una secuencia de Cauchy

$$|a_i| \geq c \text{ for } \forall i \geq 1$$

$$\Rightarrow |a_n^{-1} - a_m^{-1}| = \left| \frac{a_m - a_n}{a_m a_n} \right| \leq \frac{|a_m - a_n|}{c^2}$$

$$\Rightarrow |a_n^{-1} - a_m^{-1}| \leq |a_m - a_n| \leq \varepsilon c^2$$

$$\Rightarrow \exists N^* \text{ such that } |a_m - a_n| \leq \varepsilon c^2$$

$$\Rightarrow |a_n^{-1} - a_m^{-1}| \leq \varepsilon \Rightarrow (a_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \text{ is a Cauchy sequence}$$

- Siendo  $x$  un número real diferente a cero y  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una secuencia de Cauchy acotada lejos de cero tal que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , el recíproco  $x^{-1}$  se define como  $x^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}$

- Siendo  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  dos secuencias de Cauchy acotadas lejos de cero tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1}$

$$P \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} a_n b_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow P = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1}$$

- A partir de la definición se puede ver que, siendo  $x$  un número real, entonces  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ , y todas las equivalencias para los racionales se mantienen para los reales
- Además, se puede ver como un número racional  $q$  diferente a cero tiene un recíproco  $q^{-1}$  al expresarse como número real, de modo que la definición es consistente con la de los racionales

- Finalmente, es posible definir la división de dos números reales con la definición de recíproco

- Siendo  $x$  y  $y$  dos números reales y siendo  $y \neq 0$ , entonces la división de dos números reales  $x/y$  se define como  $x/y \equiv xy^{-1}$
- Si  $x$ ,  $y$  y  $z$  son números reales tales que  $xz = yz$ , y  $z \neq 0$ , entonces  $x = y$

$$xz = yz \Rightarrow \frac{xz}{z} = \frac{yz}{z} \Rightarrow x = y$$

- Dado que los números racionales pueden ser positivos, negativos o cero, se puede desarrollar la misma idea para los reales y la noción de orden

- Aunque todos los racionales sean positivos o negativos en una secuencia, eso no quiere decir que el límite formal sea también positivo o negativo (respectivamente), sino que puede ser cero

$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots \quad 0.1, -0.01, 0.001, -0.0001, \dots;$$

- Por lo tanto, es necesario que se limite la atención a secuencias que estén acotadas lejos de cero
- Siendo  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una secuencia de números racionales, se dice que esta secuencia está acotada positivamente lejos de cero si, y solo si, hay un número racional positivo  $c > 0$  tal que  $a_n \geq c$  para toda  $n \geq 1$ . Del mismo modo, la secuencia está acotada negativamente lejos de cero si, y solo si, hay un número racional negativo  $-c < 0$  tal que  $a_n \leq -c$  para toda  $n \geq 1$

1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, ...    -1.1, -1.01, -1.001, -1.0001, ...

- A partir de esta definición, se puede ver que una secuencia positivamente o negativamente acotada lejos de cero también está acotada lejos de cero

*if positively:*  $a_n \geq c \text{ for } \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq c > 0 \text{ for } \forall n \geq 1$

$\Rightarrow |a_n| \geq c \text{ for } \forall n \geq 1$

*if negatively:*  $a_n \leq -c \text{ for } \forall n \geq 1$

$\Rightarrow a_n \leq -c < 0 \text{ for } \forall n \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq c \text{ for } \forall n \geq 1$

- Una secuencia no puede estar positivamente y negativamente acotada lejos de cero a la vez
- Un número real  $x$  es positivo si, y solo si, se puede escribir como  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  para alguna secuencia de Cauchy  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  que está positivamente acotada lejos de cero, y un número real  $x$  es negativo si, y solo si, se puede escribir como  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  para alguna secuencia de Cauchy  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  que está negativamente acotada lejos de cero
  - Para todo número real  $x$ , solamente una de las tres proposiciones es verdad:  $x$  es cero,  $x$  es positivo o  $x$  es negativo
  - Un número real  $x$  es negativo si, y solo si,  $-x$  es positivo
  - Si  $x$  e  $y$  son números reales positivos, entonces también lo son  $x + y$  y  $xy$
  - Si  $q$  es un número racional positivo, entonces la secuencia de Cauchy  $q, q, q, \dots$  está positivamente acotada lejos de cero y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q = q$ , de modo que la noción de positividad es consistente con la de los racionales, y lo mismo ocurre con la de la negatividad
- Una vez se han definido los números positivos y negativos, se puede definir el valor absoluto y el orden para los números reales
  - Siendo  $x$  un número real, se define el valor absoluto  $|x|$  de  $x$  para igualar a  $x$  cuando  $x$  es positivo,  $-x$  cuando es negativo, y 0 cuando  $x = 0$
  - Siendo  $x$  e  $y$  números reales, se dice que  $x$  es más grande que  $y$  ( $x > y$ ) si, y solo si,  $x - y$  es un número positivo real, y que  $x$  es más pequeño que  $y$  ( $x < y$ ) si, y solo si,  $x - y$  es un número real negativo.

Se define  $x \geq y$  si, y solo si,  $x > y$  o  $x = y$ , y  $x \leq y$  si, y solo si,  $x < y$  o  $x = y$

- Debido a que las definiciones de valor absoluto y de orden son las consistentes con la de los racionales, todas las propiedades del orden que se cumplían para los racionales también se cumplen para los reales

(a) (Order trichotomy) Exactly one of the three statements  $x = y$ ,  $x < y$ , or  $x > y$  is true.

(b) (Order is anti-symmetric) One has  $x < y$  if and only if  $y > x$ .

(c) (Order is transitive) If  $x < y$  and  $y < z$ , then  $x < z$ .

(d) (Addition preserves order) If  $x < y$ , then  $x + z < y + z$ .

(e) (Positive multiplication preserves order) If  $x < y$  and  $z$  is positive, then  $xz < yz$ .

- Siendo  $x$  un número real positivo,  $x^{-1}$  también es positivo, y si  $y$  es otro número positivo tal que  $x > y$ , entonces  $x^{-1} < y^{-1}$

$$x > 0 \Rightarrow xx^{-1} = 1 \Rightarrow x^{-1} > 0$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x^{-1}, y^{-1} > 0$$

$$\text{Suppose } x^{-1} \geq y^{-1} \Rightarrow xx^{-1} > xy^{-1} \geq yy^{-1} \Rightarrow 1 > 1$$

$$\Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$$

- Un límite formal de números racionales positivos no es necesariamente positivo, sino que puede ser cero. Sin embargo, el límite formal de racionales no negativos no es negativo

- Siendo  $a_1, a_2, a_3, \dots$  una secuencia de Cauchy de números racionales no negativos, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  es un número real no negativo

- Un corolario de esta proposición es que, siendo  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  secuencias de Cauchy de números racionales tal que  $a_n \geq b_n$  para toda  $n \geq 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$a_n \geq b_n \text{ for } \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n - b_n \geq 0 \text{ for } \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0 \text{ for } \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ for } \forall n \geq 1$$



- El último corolario no funciona si se reemplazan los signos  $\geq$  por  $>$ , dado que pueden ser iguales
- Definiendo la distancia como con los racionales, se puede ver como las propiedades básicas del valor absoluto y de la  $\varepsilon$ -cercanía se mantienen también para los números reales
  - Siendo  $x$  e  $y$  números reales, se define la distancia  $d(x, y)$  entre números reales como  $d(x, y) \equiv |x - y|$
  - Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  números reales, se cumplen las siguientes propiedades:
    - (a) *(Non-degeneracy of absolute value)* We have  $|x| \geq 0$ . Also,  $|x| = 0$  if and only if  $x$  is 0.
    - (b) *(Triangle inequality for absolute value)* We have  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
    - (c) We have the inequalities  $-y \leq x \leq y$  if and only if  $y \geq |x|$ . In particular, we have  $-|x| \leq x \leq |x|$ .
    - (d) *(Multiplicativity of absolute value)* We have  $|xy| = |x| |y|$ . In particular,  $|-x| = |x|$ .
    - (e) *(Non-degeneracy of distance)* We have  $d(x, y) \geq 0$ . Also,  $d(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ .
    - (f) *(Symmetry of distance)*  $d(x, y) = d(y, x)$ .
    - (g) *(Triangle inequality for distance)*  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
  - Siendo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $w$  números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) If  $x = y$ , then  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$  for every  $\varepsilon > 0$ . Conversely, if  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$  for every  $\varepsilon > 0$ , then we have  $x = y$ .
- (b) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$ , then  $y$  is  $\varepsilon$ -close to  $x$ .
- (c) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  is  $\varepsilon$ -close to  $y$ , and  $y$  is  $\delta$ -close to  $z$ , then  $x$  and  $z$  are  $(\varepsilon + \delta)$ -close.
- (d) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  and  $w$  are  $\delta$ -close, then  $x + z$  and  $y + w$  are  $(\varepsilon + \delta)$ -close, and  $x - z$  and  $y - w$  are also  $(\varepsilon + \delta)$ -close.
- (e) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, they are also  $\varepsilon'$ -close for every  $\varepsilon' > \varepsilon$ .
- (f) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $y$  and  $z$  are both  $\varepsilon$ -close to  $x$ , and  $w$  is between  $y$  and  $z$  (i.e.,  $y \leq w \leq z$  or  $z \leq w \leq y$ ), then  $w$  is also  $\varepsilon$ -close to  $x$ .
- (g) Let  $\varepsilon > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  is non-zero, then  $xz$  and  $yz$  are  $\varepsilon|z|$ -close.
- (h) Let  $\varepsilon, \delta > 0$ . If  $x$  and  $y$  are  $\varepsilon$ -close, and  $z$  and  $w$  are  $\delta$ -close, then  $xz$  and  $yw$  are  $(\varepsilon|z| + \delta|x| + \varepsilon\delta)$ -close.

- Los números reales positivos pueden ser arbitrariamente grandes o pequeños, no pueden ser más grandes que todos los enteros positivos y no pueden ser más pequeños en magnitud que todos los racionales positivos

- Siendo  $x$  un número real positivo, existe un número racional positivo  $q$  tal que  $q \leq x$ , y existe un número entero positivo tal que  $x \leq N$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow a_n \geq q > 0 \text{ for } \forall n \geq 1 \text{ \& } |a_i| \leq r \text{ for } 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow 0 < q \leq a_n \leq r \Rightarrow \exists N \text{ such that } q \leq r \leq N \Rightarrow N > 0$$

$$\Rightarrow q \leq x \leq N \text{ for } \forall n \geq 1$$

- Siendo  $x$  y  $\varepsilon$  números reales positivos, existe un número entero positivo  $M$  tal que  $M\varepsilon > x$

$$\frac{x}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \exists N \text{ such that } N \geq \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow M \equiv N + 1$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow M\varepsilon > x$$

- La propiedad anterior es un corolario de la primera, y expresa que no importa que tan grande sea un número  $x$  porque siempre se puede sumar  $\varepsilon$  a sí mismo para obtener un número mayor
- Dados dos números reales  $x$  y  $y$  tal que  $x < y$  es posible encontrar un número racional  $q$  tal que  $x < q < y$

- Una de las ventajas más grandes de los números reales con respecto a los números racionales es que se puede tomar la cota superior mínima  $\sup(E)$  de cualquier subconjunto  $E$  de números reales  $\mathbb{R}$

- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $M$  un número real, se dice que  $M$  es la cota superior de  $E$  si, y solo si, se tiene que  $x \leq M$  para cualquier elemento  $x$  en  $E$

$$E \equiv \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} \Rightarrow \text{upper bound: any number} \geq 1$$

- No todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tienen cota superior (pueden no tener ninguna)
- La cota superior del conjunto vacío  $\emptyset$  son todos los números reales  $M$ , dado que cualquier número es mayor
- A partir de la definición se puede ver como cualquier  $M' \geq M$  es también una cota superior de  $E$ , pero no queda claro si otro número menor a  $M$  puede ser también una cota superior de  $E$ , lo que motiva la noción de cota superior mínima

- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $M$  un número real, se dice que  $M$  es la cota superior mínima de  $E$  si, y solo si,  $M$  es una cota superior de  $E$  y cualquier otra cota superior  $M'$  de  $E$  es  $M' \geq M$

$$E \equiv \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} \Rightarrow \text{upper bound: } 1$$

- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  puede tener como mucho una cota superior mínima

$$\text{least upper bounds: } M_1, M_2 \Rightarrow M_1 \leq M_2 \text{ \& } M_2 \geq M_1$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2$$

- Siendo  $E$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , si  $E$  tiene alguna cota superior  $M$ , entonces también tiene una sola cota superior mínima
- A partir de la noción de cota superior y cota superior mínima, se puede definir la suprema y ver como se puede aplicar
- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , si  $E$  es un conjunto no vacío y tiene una cota superior  $M$ , se define la suprema  $\sup(E)$  como la cota superior mínima de  $E$ . Si  $E$  no es un conjunto vacío y no tiene cota superior, entonces  $\sup(E) \equiv +\infty$ ; y si  $E$  es un conjunto vacío, entonces  $\sup(E) \equiv -\infty$

- A través de la noción de suprema, es posible demostrar que existe un número positivo real  $x$  tal que  $x^2 = 2$

$$E \equiv \{x \in \mathbb{R}: y \geq 0 \text{ and } y^2 < 2\} \Rightarrow \exists x \text{ such that } x \equiv \sup(E)$$

$$\Rightarrow 0 < 1 \leq x \leq 2$$

*Suppose  $x^2 < 2$  and  $\varepsilon \in (0,1)$ :*

$$\Rightarrow (x + \varepsilon)^2 = x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 \leq x^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = x^2 + 5\varepsilon$$

$$x \leq 2 \text{ \& } \varepsilon \geq \varepsilon^2 \Rightarrow \exists \varepsilon \text{ such that } x^2 + 5\varepsilon < 2 \Rightarrow (x + \varepsilon)^2 < 2$$

$$\Rightarrow (x + \varepsilon)^2 \in E \Rightarrow x \neq \sup(E)$$

*Suppose  $x^2 < 2$  and  $\varepsilon \in (0,1)$ :*

$$\Rightarrow (x - \varepsilon)^2 = x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 \geq x^2 - 2\varepsilon x = x^2 - 4\varepsilon$$

$$x \leq 2 \text{ \& } 0 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \exists \varepsilon \text{ such that } x^2 - 4\varepsilon > 2 \Rightarrow (x - \varepsilon)^2 > 2$$

$$\Rightarrow x - \varepsilon > y \Rightarrow \sup(E) = x - \varepsilon \Rightarrow x \neq \sup(E)$$

- También se pueden utilizar cotas inferiores y cotas inferiores máximas de conjuntos  $E$ 
  - La cota inferior máxima de un conjunto  $E$  se denomina ínfima y se denota por  $\inf(E)$ . Todo lo que se ha obtenido para la cota superior mínima tiene su contraparte para la ínfima
- Anteriormente se ha definido la exponenciación para números racionales  $x$  y números enteros  $n$ , por lo que, una vez definidas las operaciones aritméticas para los reales, es posible definir la exponenciación de los números reales
  - Se puede definir la exponenciación de números reales a números naturales y enteros de manera consistente con las definiciones para la exponenciación con racionales
    - Siendo  $x$  un número real, elevar  $x$  a la potencia de 0 se define como  $x^0 \equiv 1$ , en particular definiendo  $0^0 \equiv 1$ . Suponiendo inductivamente que se ha definido  $x^n$  para un número natural  $n$ , entonces se define  $x^{n+1} \equiv x^n \times x$
    - Siendo  $x$  un número real diferente a cero, para cualquier entero negativo  $-n$ , se define  $x^{-n} \equiv 1/x^n$

- Todas las propiedades de la exponenciación válidas para las definiciones dadas con números racionales son válidas si  $x$  e  $y$  son reales en vez de racionales (dado que las leyes del álgebra y la inversa se definen de manera consistente con la de los racionales)

(a) *We have  $x^n x^m = x^{n+m}$ ,  $(x^n)^m = x^{nm}$ , and  $(xy)^n = x^n y^n$*

(b) *Suppose  $n > 0$ . Then we have  $x^n = 0$  if and only if  $x = 0$*

(c) *If  $x \geq y \geq 0$ , then  $x^n \geq y^n > 0$ . If  $x > y \geq 0$  and  $n > 0$ , then  $x^n > y^n \geq 0$*

(d) *We have  $|x^n| = |x|^n$*

- Siendo  $x$  un número real no negativo y siendo  $n \geq 1$  un número entero positivo, se define la raíz enésima de  $x$ , denotada como  $x^{1/n}$  o  $\sqrt[n]{x}$ , con la siguiente fórmula:

$$x^{1/n} \equiv \sup\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0 \text{ and } y^n \leq x\}$$

- Siendo  $x \geq 0$  un número real no negativo, y siendo  $n \geq 1$  un entero positivo, el conjunto  $E \equiv \sup\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0 \text{ and } y^n \leq x\}$  es un conjunto no vacío y acotada por arriba. En particular,  $x^{1/n}$  es un número real
- Siendo  $x, y \geq 0$  números reales no negativos y  $n, m \geq 1$  siendo enteros positivos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) *If  $y = x^{1/n}$ , then  $y^n = x$ .*

(b) *Conversely, if  $y^n = x$ , then  $y = x^{1/n}$ .*

(c)  *$x^{1/n}$  is a positive real number.*

(d) *We have  $x > y$  if and only if  $x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$ .*

(e) *If  $x > 1$ , then  $x^{1/k}$  is decreasing function of  $k$ . If  $x < 1$ , then  $x^{1/k}$  is an increasing function of  $k$ . If  $x = 1$ , then  $x^{1/k} = 1$  for all  $k$ .*

(f) *We have  $(xy)^{1/n} = x^{1/n} y^{1/n}$ .*

(g) *We have  $(x^{1/n})^{1/m} = x^{1/nm}$*

- Siendo  $x$  e  $y$  números reales positivos y  $n$  un número racional cualquiera, si  $x^n = y^n$ , entonces  $x = y$

$$x^n = y^n \Rightarrow x^{1/n} = y^{1/n} \Rightarrow x = y^{n/n} \Rightarrow x = y^1 \Rightarrow x = y$$

- Siendo  $x > 0$  un número real positivo y  $q$  un número racional, para definir  $x^q$  se escribe  $q = a/b$  para un número entero  $a$  y un entero positivo  $b$  y se define  $x^q \equiv (x^{1/b})^a$

- Siendo  $a$  y  $a'$  enteros y  $b$  y  $b'$  enteros positivos tal que  $a/b = a'/b'$ , y siendo  $x$  un real positivo, entonces se tiene que  $(x^{1/b'})^{a'} = (x^{1/b})^a$

$$\text{if } a = 0: a = 0 \Rightarrow a' = 0 \Rightarrow (x^{1/b'})^{a'} = (x^{1/b})^a = 1$$

$$\text{if } a > 0: a > 0 \Rightarrow a' > 0 \Rightarrow ab' = a'b$$

$$y \equiv x^{\frac{1}{ab'}} \Rightarrow (x^{1/b'})^{a'} = (y^a)^{a'} = (y^{a'})^a = (x^{1/b})^a$$

$$\text{if } a < 0: a < 0 \Rightarrow a' < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{(-a)}{b} = \frac{(-a')}{b'}$$

$$\Rightarrow \text{same as if } a > 0$$

- El lema anterior permite que  $x^q$  esté bien definido para cualquier racional  $q$  y que sea consistente con la definición de  $x^n$
- Siendo  $x$  e  $y$  números reales positivos, y siendo  $q$  y  $r$  racionales, se cumplen las siguientes propiedades:

(a)  $x^q$  is a positive real.

(b)  $x^{q+r} = x^q x^r$  and  $(x^q)^r = x^{qr}$ .

(c)  $x^{-q} = 1/x^q$ .

(d) If  $q > 0$ , then  $x > y$  if and only if  $x^q > y^q$ .

(e) If  $x > 1$ , then  $x^q > x^r$  if and only if  $q > r$ . If  $x < 1$ , then  $x^q > x^r$  if and only if  $q < r$ .

## Los números primos, los módulos y las congruencias

- A partir de la definición de los números enteros, los racionales, los reales y las secuencias, se puede definir la noción de números primos y la obtención de resultados útiles

- Un entero  $a \in \mathbb{Z}$  es divisible por otro entero  $b \in \mathbb{Z}$  diferente de cero ( $b \neq 0$ ) si existe un tercer número entero  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = bc$

- Si  $a, b > 0$  o  $a, b < 0$ , entonces  $c > 0$ . En cambio, si  $a > 0$  y  $b < 0$ ,  $c > 0$ , y si  $a < 0$  y  $b > 0$ , entonces  $c < 0$
- Que  $a$  sea divisible por  $b$ , o que  $b$  sea divisor de  $a$ , se expresa cómo  $b|a$ . Por lo tanto,  $1|a$ ,  $a|a$  y  $b|0$  para toda  $b \neq 0$

- Se cumplen las siguientes implicaciones siempre que  $c \neq 0$  y  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$(b|a) \wedge (c|b) \Rightarrow c|a$$

$$b|a \Rightarrow bc|ac$$

$$(c|a) \wedge (c|b) \Rightarrow c|(ma + nb)$$

- La demostración de la primera implicación es la siguiente:

$$b|a \Rightarrow a = bd \quad \& \quad c|b \Rightarrow b = ct \quad \text{where } d, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a = (ct)d \Rightarrow a = c(td) \quad \text{where } td \in \mathbb{Z} \Rightarrow c|a$$

- La demostración de la segunda implicación es la siguiente:

$$b|a \Rightarrow a = bd \quad \text{where } d \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a = b \left( d \frac{c}{c} \right) \text{ as } d = d \frac{c}{c} \Rightarrow ac = bdc = (bc)d \Rightarrow bc|ac$$

- La demostración de la tercera implicación es la siguiente:

$$c|a \Rightarrow a = cd \quad \& \quad c|b \Rightarrow b = ct \quad \text{where } d, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ma = m(cd) \quad \& \quad nb = n(ct) \quad \text{for } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ma = c(md) \quad \& \quad nb = c(nt) \quad \text{where } md, nt \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ma + nb = c(md) + nb \Rightarrow ma + nb = c(md) + c(nt)$$

$$\Rightarrow ma + nb = c(md + nt) \quad \text{where } md + nt \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c|(ma + nb)$$

- Dentro de los enteros positivos  $\mathbb{Z}^+$  hay una subclase peculiar de gran importancia: la clase de los números primos
  - Un número  $p$  es un número primo si  $p > 1$  y solo tiene como divisores  $p|p$  y  $1|p$ . Un número entero positivo mayor a 1 se conoce como compuesto si no es un número primo

- Cualquier entero positivo excepto 1 es un producto de números primos

- Si  $n$  es un número primo, no hay nada que demostrar, pero si  $n$  es un compuesto, entonces se tienen divisores entre 1 y  $n$ . Si  $m$  es el menor de estos divisores,  $m$  es un primo, ya que de otro modo se llega a una contradicción:

$$\exists l \text{ s. t. } 1 < l < m < n \text{ \& } l|m \Rightarrow (l|m \Rightarrow l|n) \text{ as } m|n \Rightarrow \rightarrow \leftarrow$$

- Por lo tanto,  $n$  es un primo o es divisible por un número primo menor a  $n$ , tal como  $p_1$ , de modo que  $n = p_1 n_1$  donde  $1 < n_1 < n$ . En este caso, o  $n_1$  es un primo (la demostración estaría completa), o es divisible por un número  $p_2$  menor a  $n_1$ , en cuyo caso se llega al siguiente resultado:

$$n = p_1 n_1 = p_1 p_2 n_2 \text{ for } 1 < n_2 < n_1 < n$$

- Repitiendo este argumento, se obtiene una secuencia de números decrecientes  $n, n_1, \dots, n_{k-1}, \dots$  más grandes de 1, cada cual con la misma alternativa vista. Por lo tanto, habrá algún número  $n_{k-1}$  es un número primo  $p_k$ , por lo que se obtiene que el número  $n$  debe ser un producto de números primos:

$$n = p_1 p_2 \dots p_k$$

- Los primos no son necesariamente distintos, ni están ordenados en ningún orden en particular. Si se ordenan en orden creciente, se asocian conjuntos de primos iguales en factores únicos, y se cambia la notación apropiadamente, se puede expresar  $n$  en lo que se llama forma estándar:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \text{ for } a_1, a_2, \dots > 0 \text{ \& } p_1 < p_2 < \dots$$

- Si  $ab = n$ , entonces  $a$  y  $b$  no pueden exceder  $\sqrt{n}$  a la vez (dado que si no  $ab > n$ ), por lo que  $a, b \leq \sqrt{n}$ 
  - Por lo tanto, cualquier número compuesto  $n$  es divisible por un primo  $p$  que no puede exceder  $\sqrt{n}$
- La forma estándar de  $n$  es única: aparte de reordenar los factores,  $n$  puede expresarse cómo un producto de primos solo de una manera
  - Este teorema es el fundamento del sistema aritmético, y es un corolario del primer teorema de Euclido, el cual muestra que si  $p|ab$ , entonces  $p|a$  o  $p|b$



- Un corolario obvio de este teorema es que, si  $p|abc \dots l$ , entonces o  $p|a$  o  $p|b$  o  $p|c$  y así. Además, si  $a, b, c, \dots, l$  son primos, entonces  $p$  es uno de  $a, b, c, \dots, l$
- Suponiendo que  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_j^{b_j}$ , donde cada producto es el producto de primos en su forma estándar, entonces  $p_i | q_1^{b_1} \dots q_j^{b_j}$  para toda  $i$ , de modo que cada  $p$  es una  $q$ , y cada  $q$  es una  $p$ . De este modo,  $k = j$  y, como se pueden ordenar los factores en orden creciente,  $p_i = q_i$  para toda  $i$

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$$

- Si  $a_i > b_i$ , se divide por  $p_i^{b_i}$  para obtener  $p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i - b_i} \dots p_k^{a_k} = p_1^{b_1} \dots p_{i-1}^{b_{i-1}} p_{i+1}^{b_{i+1}} \dots p_k^{b_k}$ , por lo que el lado izquierdo es divisible por  $p_i^{b_i}$  mientras que el otro no, lo cual es una contradicción. De manera similar,  $a_i < b_i$  es una contradicción, y se deduce que  $a_i = b_i$ , lo cual demuestra que los números primos se representan de manera única
- La descomposición de números primos permite obtener la raíz  $n$ -ésima de un número positivo, encontrar números primos divisores de un número o encontrar números divisores (en general)

$$320 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 5 = 2^6 * 5$$

$$\sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 5} = \sqrt[6]{2^6 * 5} = 2\sqrt[6]{5}$$

- Para poder construir una tabla de los números primos hasta un límite moderado  $N$ , se puede usar un procedimiento llamado el tamiz de Eratóstones
- Los primeros números primos son los siguientes:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \dots$$

- Se ha visto que si  $n \leq N$ , y  $n$  no es un primo, entonces  $n$  tiene que ser divisible por un primo  $p \leq \sqrt{n}$ . Por lo tanto, se pueden escribir los números  $2, 3, 4, 5, 6, \dots, N$  y se pueden ir eliminando de manera sucesiva aquellos números que sean el cuadrado del número actual y el producto de este por todos los números restantes en la secuencia:

$$(1) 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots \text{ (for 2, starting from } 2^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots, N \text{ (remaining numbers)}$$

$$(2) 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 48, \dots \text{ (for 3, starting from } 3^2 \text{)}$$

$\Rightarrow 2,3,5,7,11,13,17,19,23,25, \dots, N$  (remaining numbers)

(3) 25,35,45,55,65,85, ... (for 5, starting from  $5^2$ )

$\Rightarrow 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29, \dots, N$  (remaining numbers)

- Este proceso continúa hasta que el último número restante de la secuencia de números restantes es más grande que  $\sqrt{N}$ . Los números que quedan serán primos
- Esta tabla indica que los números primos son infinitos, lo cual motiva el segundo teorema de Euclido: el número de primos es infinito
  - Siendo  $2,3,5, \dots, p$  los agregados de los primos hasta  $p$ , y definiendo  $q = (2 * 3 * 5 * \dots * p) + 1$ , entonces  $q$  no es divisible por ninguno de los primos  $2,3,5, \dots, p$
  - Por lo tanto, o  $q$  es primo, o es divisible por un primo entre  $p$  y  $q$ . Como en ambos casos habría un primo más grande que  $p$ , esto demuestra que los números primos son infinitos
- La distribución “promedio” de primos es muy regular: su densidad muestra un decrecimiento estable pero lento
  - Los números de primos en los primeros cinco bloques de 1000 números son 168,135,127,120 y 119, mientras que aquellos en los últimos cinco bloques de 1000 bajo 10.000.000 son 62,58,67,64 y 53. Los últimos 53 primos se dividen en conjuntos de 5,4,7,4,6,3,6,4,5 y 9 en los diez 100.000
  - No obstante, la distribución de primos en detalle es extremadamente irregular: las tablas muestran en algunos intervalos grandes bloques de números compuestos
- Existen bloques de números compuestos consecutivos cuyo tamaño o longitud excede cualquier número  $N$ 
  - Es fácil ver que estos bloques deben ocurrir: suponiendo que  $2,3,5, \dots, p$  es una secuencia de primos hasta  $p$ , entonces todos los números hasta  $p$  son divisibles por uno de estos primos. Si se define  $2 * 3 * 5 * \dots * p = q$ , todos los  $p - 1$  números  $q + 2, q + 3, q + 4, \dots, q + p$  son compuestos (dado que  $q$  es compuesto y  $2,3,4, \dots$  son divisibles por uno de los primos de la secuencia)

- Por el teorema de un número de primos infinito, entonces  $p$  puede ser tan grande como uno quiera y todos los números a partir de algún punto (menor a  $p$ ) serán compuestos
- Definiendo  $\pi(x)$  como el número de primos que no exceden  $x$  (menores o iguales), el número de primos que no exceden  $x$  es asintótico a  $x/\log(x)$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

- Debido a que  $\pi(p_n) = n$  para un primo  $p_n$ , la función  $\pi(x)$ , como función de  $x$ , y  $p_n$ , como función de  $n$ , son funciones inversas
- Otro teorema relacionado es el siguiente:

$$p_n \sim n \log(n)$$

- Para poder demostrar teoremas como el teorema fundamental de la aritmética y el primer teorema de Euclido, es necesaria la noción del módulo de un número
  - El módulo es un sistema  $S$  de números tales que la suma o diferencia de cualquier par de miembros de  $S$  son miembros de  $S$

$$m, n \in S \Rightarrow (m \pm n) \in S$$

- Los números de un módulo no necesariamente necesitan ser enteros o racionales (pueden ser números complejos)
- El número cero forma un módulo en sí mismo, llamado módulo nulo (sumar y restar 0 permiten obtener 0)
- A partir de la definición de  $S$ , se puede obtener el siguiente resultado:

$$a \in S \Rightarrow a - a = 0 \in S \quad \& \quad a + a = 2a \in S$$

- Repitiendo el argumento, se puede ver cómo  $na \in S$  para cualquier número entero  $n$  (positivo o negativo). De manera más general, para cualquier par de enteros  $x$  e  $y$ , se cumple la siguiente implicación:

$$a, b \in S \Rightarrow xa + yb \in S$$

- Además, es obvio que, para  $a, b \in S$ , el agregado de posibles valores de  $xa + yb$  forman un módulo
- Cualquier módulo  $S$ , excepto el módulo nulo, contiene algunos números positivos

- Suponiendo que  $d$  es el número positivo más pequeño de  $S$ , si  $n$  es cualquier número positivo de  $S$ , entonces  $n - zd \in S$  para toda  $z$
- Aunque la relación es avanzada, existe una relación entre el módulo, las congruencias y los residuos
  - HIGHEST DIVISOR...
  - Si  $m$  es un divisor de  $x - a$ , se dice que  $x$  es congruente a  $a$  al módulo  $m$ , y se denota de la siguiente manera:

$$x \equiv a \pmod{m}$$

- La definición no introduce ninguna idea nueva, dado que  $x \equiv a \pmod{m}$  es lo mismo que  $m \mid x - a$ . La dualidad del uso de la palabra módulo proviene de la noción de congruencia con respecto a un módulo de números
- Si  $x \equiv a \pmod{m}$ , entonces  $a$  se conoce como el residuo de  $x$  al módulo  $m$ , y si  $0 \leq a \leq m - 1$ , entonces  $a$  es el menor residuo de  $x$  al módulo  $m$  (el residuo no negativo más pequeño). Por lo tanto, dos números  $x$  y  $y$  congruentes  $\pmod{m}$  tienen los mismos residuos  $\pmod{m}$ , y esta relación se puede expresar de la siguiente manera, donde  $a$  es el residuo y  $p, q \in \mathbb{Z}$ :

$$x = pm + a \quad \& \quad y = qm + a \Rightarrow x - y = (p - q)m = km$$

- Una clase de residuos  $\pmod{m}$  es la clase de todos los números congruentes a un residuo concreto  $\pmod{m}$ , y cada miembro de esta clase se conoce como representante de la clase. Cada una de las clases de residuos  $\pmod{m}$  contiene exactamente un entero dentro del rango  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ , por lo que, en vez de trabajar con todo el conjunto de números (la clase) se suele trabajar con su representante más pequeño no negativo (dentro del rango)

$$x \equiv y \pmod{3} \Rightarrow \{5, 17, \dots\}$$

## Los límites de secuencias

- Para poder definir los reales en base a límites (no límites formales) primero es necesario hacer definiciones de distancia y cercanía y utilizar secuencias de números reales con tal de desarrollar la noción de convergencia y las leyes de los límites
  - Las definiciones de distancia y  $\varepsilon$ -cercanía se pueden definir para los números reales de manera análoga a las definiciones para los racionales

- Dados dos números reales  $x$  e  $y$ , se define la distancia  $d(x, y)$  como  $d(x, y) \equiv |x - y|$
- Esta definición es consistente con la de los números racionales, de modo que las propiedades del valor absoluto para los racionales también se mantienen para los números reales

(a) (*Non-degeneracy of absolute value*) We have  $|x| \geq 0$ . Also,  $|x| = 0$  if and only if  $x$  is 0.

(b) (*Triangle inequality for absolute value*) We have  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

(c) We have the inequalities  $-y \leq x \leq y$  if and only if  $y \geq |x|$ . In particular, we have  $-|x| \leq x \leq |x|$ .

(d) (*Multiplicativity of absolute value*) We have  $|xy| = |x| |y|$ . In particular,  $|-x| = |x|$ .

(e) (*Non-degeneracy of distance*) We have  $d(x, y) \geq 0$ . Also,  $d(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ .

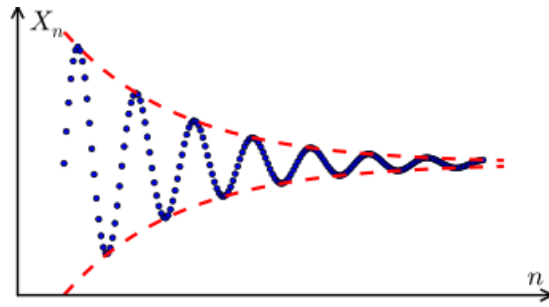
(f) (*Symmetry of distance*)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(g) (*Triangle inequality for distance*)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

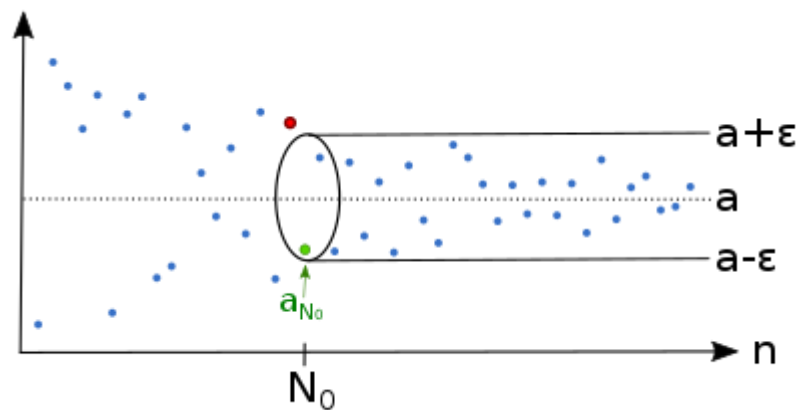
- Siendo  $\varepsilon > 0$  un número real y  $x$  e  $y$  números reales, se dice que  $y$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $x$  si, y solo si,  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Esta definición es consistente con la dada para números racionales

- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales donde  $m$  es un entero, es posible definir las secuencias de Cauchy para números reales a partir de la noción de  $\varepsilon$ -estabilidad para números reales

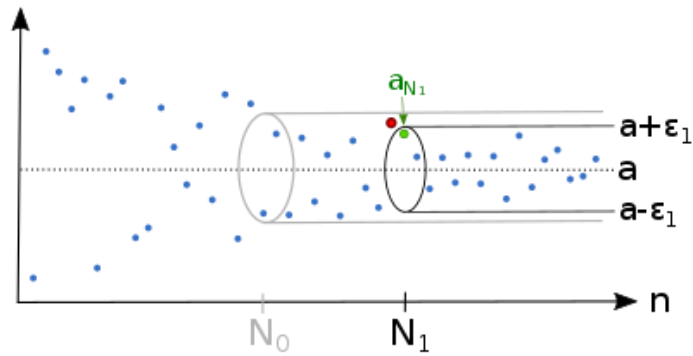
- Siendo  $\varepsilon > 0$  un número real, una secuencia  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  de números reales que empieza en un índice entero  $N$  se denomina  $\varepsilon$ -estable si, y solo si,  $a_j$  y  $a_k$  están  $\varepsilon$ -cerca para cualquier  $j, k \geq N$
- Una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  de números reales que empieza en un índice entero  $m$  se denomina eventualmente  $\varepsilon$ -estable si, y solo si, existe una  $N \geq m$  tal que  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  es  $\varepsilon$ -estable
- Una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy si, y solo si, es eventualmente  $\varepsilon$ -estable para cada  $\varepsilon > 0$ . De este modo, una secuencia de números reales  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy si, y solo si, para cada número real  $\varepsilon > 0$ , existe una  $N \geq m$  tal que  $|a_n - a_{n'}| \leq \varepsilon$  para toda  $n, n' \geq N$



- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números racionales que empieza por un índice entero  $m$ ,  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy en el sentido de su definición para números racionales si, y solo si, también lo es en el sentido de su definición para números reales
- Una vez con las nociones y conceptos previos, se puede definir la convergencia a un límite  $L$ 
  - Siendo  $\varepsilon > 0$  y  $L$  números reales, una secuencia  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  si, y solo si,  $a_n$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  para cada  $n \geq N$ . De este modo,  $|a_n - L| < \varepsilon$  para cada  $n \geq N$



- Siendo  $\varepsilon > 0$  y  $L$  números reales, una secuencia  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  está eventualmente  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  si, y solo si, existe una  $N \geq m$  tal que  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  esté  $\varepsilon$ -cerca de  $L$
- Una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  converge a  $L$  si, y solo si, está eventualmente  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  para cada  $\varepsilon > 0$



- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales que comienza en un índice entero  $m$  y  $L \neq L'$  dos números reales distintos, no es posible que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  converja a  $L$  y a  $L'$  a la vez

$$\exists N \geq m \text{ such that } |a_n - L| \leq \varepsilon \text{ for } \forall n \geq N$$

$$\exists M \geq m \text{ such that } |a_n - L'| \leq \varepsilon \text{ for } \forall n \geq M$$

$$\Rightarrow n \equiv \max(N, M) \Rightarrow |a_n - L| \leq \varepsilon \text{ and } |a_n - L'| \leq \varepsilon$$

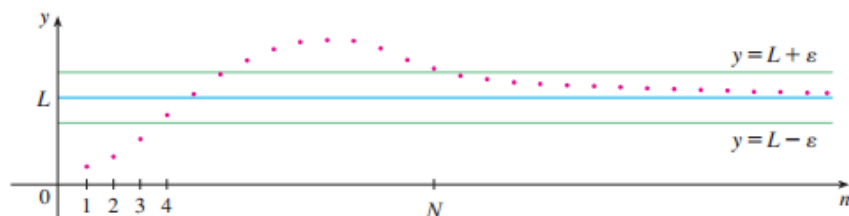
$$\Rightarrow |a_n - L| + |a_n - L'| \leq 2\varepsilon \Rightarrow 0 < |L - L'| \leq 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon \equiv \frac{|L - L'|}{3} \Rightarrow |L - L'| \leq \frac{2}{3}|L - L'|$$

$$\Rightarrow \text{not eventually } \varepsilon - \text{close for all } \varepsilon > 0$$

- A partir de la definición de convergencia y de la propiedad de unicidad de los límites, se puede definir el límite de una secuencia

- Si una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  converge a un número real  $L$ , se dice que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es convergente y que su límite es  $L$ , denotándose como  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Si una secuencia, en cambio, no converge a ningún número real  $L$ , entonces la secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es divergente y se deja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  indefinido



- Convencionalmente se utiliza la frase " $a_n \rightarrow L$  as  $n \rightarrow \infty$ " para no escribir " $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $L$ "

- Como se puede ver, la notación  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  no da indicación del índice inicial  $m$  de la secuencia, pero este es irrelevante porque cualquier índice  $m' \geq m$  debe hacer que la secuencia converja al mismo límite
- Suponiendo que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es una secuencia convergente de números reales,  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  es también una secuencia de Cauchy

$$\exists N \geq m, |a_n - L| \leq \delta \text{ for } \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \exists N \geq m, |a_n - a_j + a_j - L| \leq \delta \text{ for } \forall n \geq N$$

$$\text{so } |a_n - a_j + a_j - L| \leq |a_n - a_j| + |a_j - L|$$

$$\exists M > 0 \text{ such that } |a_n - a_j| + |a_j - L| \leq M\delta \Rightarrow \varepsilon \equiv M\delta$$

$$\Rightarrow \text{for } \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq m \text{ such that } |a_n - L| \leq \varepsilon \text{ for } \forall n \geq N$$

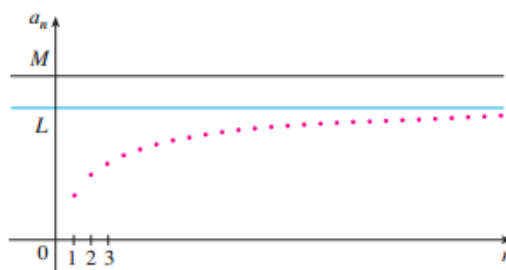
$$\Rightarrow \text{for } \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq m \text{ such that } |a_n - a_j| \leq \varepsilon \text{ for } \forall n, j \geq N'$$

- Los límites formales pueden reemplazarse por los límites definidos anteriormente y se puede definir la acotación de secuencias de números reales como con los números racionales

- Suponiendo que  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy de números racionales, entonces  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

- Una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  de números reales está acotada por un número real  $M$  si, y solo si,  $|a_n| \leq M$  para cualquier  $n \geq m$ . Se dice que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  está acotada si, y solo si, está acotada por un número real  $M > 0$



- Toda secuencia de Cauchy de números reales está acotada, de modo que toda secuencia convergente de números reales también está acotada



- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  secuencias convergentes de números reales, y siendo  $x$  e  $y$  números reales definidos como  $x \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $y \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , se cumplen las siguientes propiedades:

(a) *The sequence  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $x + y$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(b) *The sequence  $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $xy$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

(c) *For any real number  $c$ , the sequence  $(ca_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $cx$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(d) *The sequence  $(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $x - y$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(e) *Suppose that  $y \neq 0$ , and that  $b_n \neq 0$  for all  $n \geq m$ . Then the sequence  $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$  converges to  $y^{-1}$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)^{-1}.$$

(f) *Suppose that  $y \neq 0$ , and that  $b_n \neq 0$  for all  $n \geq m$ . Then the sequence  $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$  converges to  $x/y$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

(g) *The sequence  $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  converges to  $\max(x, y)$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \max\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right).$$

(h) *The sequence  $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  converges to  $\min(x, y)$ ; in other words,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(a_n, b_n) = \min\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right).$$

- Estas leyes nacen de que la definición de límite es consistente con la de los números reales y que el límite se puede sustituir por el límite formal (cumpliendo todas sus propiedades)
- Existen secuencias que no convergen a ningún número real, pero convergen al infinito (positivo o negativo) o a ningún número real. Para poder hacer estas ideas precisas, es necesario el concepto de sistema de números reales extendido, lo cual permitirá extender las ideas de suprema e ínfima

- El sistema de números reales  $\mathbb{R}^*$  es la línea real  $\mathbb{R}$  con dos elementos adicionales, llamados  $+\infty$  y  $-\infty$ . Estos elementos son distintos entre ellos y también son distintos de cada número real
  - Un número real extendido  $x$  se denomina finito si, y solo si, es un número real, mientras que se denomina infinito si, y solo si, es igual a  $+\infty$  o  $-\infty$
- Los símbolos  $+\infty$  y  $-\infty$  no tienen un significado claro debido a que no se puede operar con ellos, pero es posible definir algunas operaciones para el sistema de números reales extendidos y definir el orden en este sistema
  - La operación de negación  $x \mapsto -x$  en  $\mathbb{R}$  se puede extender a  $\mathbb{R}^*$  al definir  $-(+\infty) \equiv -\infty$  y  $-(-\infty) \equiv +\infty$ , de modo que todos los números reales extendidos tienen una negación
  - Aunque se puedan introducir operaciones con los números reales extendidos como la adición, la multiplicación, y más, algunas leyes familiares del álgebra fallan y eso comporta varios problemas, por lo que se dejan sin definir
  - Siendo  $x$  e  $y$  números reales extendidos, se dice que  $x \leq y$  si, y solo si, una de las siguientes proposiciones es cierta:  $x$  e  $y$  son números reales tal que  $x \leq y$  para números reales,  $y = +\infty$  o  $x = -\infty$ . Además, se dice que  $x < y$  si se tiene que  $x \leq y$  y  $x \neq y$
  - Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  números reales extendidos, entonces las siguientes proposiciones son verdaderas:
    - (a) (*Reflexivity*) We have  $x \leq x$ .
    - (b) (*Trichotomy*) Exactly one of the statements  $x < y$ ,  $x = y$ , or  $x > y$  is true.
    - (c) (*Transitivity*) If  $x \leq y$  and  $y \leq z$ , then  $x \leq z$ .
    - (d) (*Negation reverses order*) If  $x \leq y$ , then  $-y \leq -x$ .
- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^*$ , se define la suprema  $\sup(E)$  o la cota superior mínima de  $E$  con las siguientes reglas:

- (a) If  $E$  is contained in  $\mathbf{R}$  (i.e.,  $+\infty$  and  $-\infty$  are not elements of  $E$ ), then we let  $\sup(E)$  be as defined in Definition 5.5.10.
  - (b) If  $E$  contains  $+\infty$ , then we set  $\sup(E) := +\infty$ .
  - (c) If  $E$  does not contain  $+\infty$  but does contain  $-\infty$ , then we set  $\sup(E) := \sup(E \setminus \{-\infty\})$  (which is a subset of  $\mathbf{R}$  and thus falls under case (a)).
- También se define la ínfima  $\inf(E)$  de  $E$  o la cota inferior máxima de  $E$  con la fórmula  $\inf(E) \equiv -\sup(-E)$ , donde  $-E \equiv \{-x: x \in E\}$
  - Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^*$ , entonces las siguientes proposiciones son verdaderas:
    - (a) For every  $x \in E$  we have  $x \leq \sup(E)$  and  $x \geq \inf(E)$ .
    - (b) Suppose that  $M \in \mathbf{R}^*$  is an upper bound for  $E$ , i.e.,  $x \leq M$  for all  $x \in E$ . Then we have  $\sup(E) \leq M$ .
    - (c) Suppose that  $M \in \mathbf{R}^*$  is a lower bound for  $E$ , i.e.,  $x \geq M$  for all  $x \in E$ . Then we have  $\inf(E) \geq M$ .

○ Habiendo definido la suprema y la ínfima de conjuntos de números reales, se puede hablar de la suprema e ínfima de una secuencia y sus propiedades

- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales, se define  $\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$  como la suprema del conjunto  $\{a_n: n \geq m\}$ , y  $\inf(a_n)_{n=m}^{\infty}$  como la ínfima del mismo conjunto  $\{a_n: n \geq m\}$
- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $x$  un número real extendido  $x \equiv \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$ ,  $a_n \leq x$  para toda  $n \geq m$ . Además, cuando  $M \in \mathbb{R}^*$  es una cota superior para  $a_n$  ( $a_n < M$  para toda  $n \geq m$ ), entonces  $x \leq M$ , y para todo número real extendido  $y < x$ , existe al menos una  $n \geq m$  para la que  $y < a_n \leq x$
- Existe una proposición como la anterior correspondiente para la ínfima, pero con las referencias del orden revertidas y con una demostración equivalente
- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales con una cota superior finita  $M \in \mathbb{R}$  y que es creciente ( $a_{n+1} \geq a_n$  para toda  $n \geq m$ ), entonces  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  converge y su límite es igual que la suprema de  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  (que es menor a  $M$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq M$$

- Existe una proposición como la anterior correspondiente para la ínfima, pero para una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  con una cota inferior finita y decreciente, con una demostración equivalente
  - No todas las secuencias acotadas son convergentes, aunque todas las secuencias convergentes sí que son acotadas. Sin embargo, se ve como esto sí que es verdad si una secuencia es monótona (convergencia y acotación son equivalentes)
- A través de la noción de límites, es posible definir el punto límite y los límites inferiores y superiores
  - Para poder definir la noción de punto límite, antes se tiene que definir la noción de  $\varepsilon$ -adherencia
    - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $x$  e  $\varepsilon > 0$  números reales, se dice que  $x$  es  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  si, y solo si, existe una  $n \geq m$  tal que  $a_n$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $x$
    - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $x$  e  $\varepsilon > 0$  números reales, se dice que  $x$  es continuamente  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  si, y solo si, es  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  para toda  $N \geq m$
    - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $x$  e  $\varepsilon > 0$  números reales, se dice que  $x$  es un punto límite o punto adherente de  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  si, y solo si, es continuamente  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  para toda  $\varepsilon > 0$ . De este modo,  $x$  es un punto límite de  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  si, para cada  $\varepsilon > 0$  y toda  $N \geq m$ , existe una  $n \geq N$  tal que  $|a_n - x| \leq \varepsilon$
  - Existen, por tanto, diferencias entre las definiciones relacionadas con la  $\varepsilon$ -cercanía y la  $\varepsilon$ -adherencia
    - La diferencia entre que una secuencia esté  $\varepsilon$ -cerca a  $L$  y que  $L$  sea  $\varepsilon$ -adherente a la secuencia es que la  $\varepsilon$ -cercanía implica que todos los elementos de la secuencia estén a una distancia menor a  $\varepsilon$  de  $L$ , mientras que la  $\varepsilon$ -adherencia solo requiere que un elemento de la secuencia esté a una distancia  $\varepsilon$  de  $L$
    - Para que  $L$  sea continuamente  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  se necesita que sea  $\varepsilon$ -adherente a  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  para toda  $N \geq m$  (todos los elementos subsiguientes a  $a_N$  deben ser  $\varepsilon$ -adherentes para cualquier  $N \geq m$ ), mientras que para que  $L$  sea eventualmente  $\varepsilon$ -cercano a  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  solo se necesita que  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  esté  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  para alguna  $N \geq m$  (todos los elementos subsiguientes a  $a_N$  deben de estar  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  pero solo para alguna  $N \geq m$ )

- Esto hace que haya diferencias sutiles entre los límites y los puntos límite, dado que la  $\varepsilon$ -cercanía es más fuerte que la  $\varepsilon$ -adherencia, pero la  $\varepsilon$ -adherencia continua es más fuerte que la  $\varepsilon$ -cercanía
- Debido a las definiciones y diferencias anteriores, se puede ver como los límites son casos especiales de los puntos límite y se pueden definir los límites superiores e inferiores
  - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia que converge a un número real  $c$ ,  $c$  es un punto límite de  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y es el único punto límite de la secuencia
  - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia, se define una nueva secuencia  $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$  por la fórmula  $a_N^+ \equiv \sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$  ( $a_N^+$  es la suprema de todos los elementos en la secuencia a partir de  $a_N$ ) y se define el límite superior de una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  denotado por  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  con la siguiente fórmula:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$$

$$1.1, -1.01, 1.001, -1.0001, 1.00001, \dots$$

$$1.1, 1.001, 1.001, 1.00001, 1.00001, \dots$$

- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia, se define una nueva secuencia  $(a_N^-)_{N=m}^{\infty}$  por la fórmula  $a_N^- \equiv \inf(a_n)_{n=N}^{\infty}$  ( $a_N^-$  es la ínfima de todos los elementos en la secuencia a partir de  $a_N$ ) y se define el límite inferior de una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  denotado por  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  con la siguiente fórmula:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \sup(a_N^-)_{N=m}^{\infty}$$

$$1.1, -1.01, 1.001, -1.0001, 1.00001, \dots$$

$$-1.01, -1.01, -1.0001, -1.0001, -1.000001, \dots$$

- Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales,  $L^+$  el límite superior de la secuencia y  $L^-$  el límite inferior de la secuencia (tanto  $L^+$  como  $L^-$  son números reales extendidos), se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) *For every  $x > L^+$ , there exists an  $N \geq m$  such that  $a_n < x$  for all  $n \geq N$ . (In other words, for every  $x > L^+$ , the elements of the sequence  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  are eventually less than  $x$ .) Similarly, for every  $y < L^-$  there exists an  $N \geq m$  such that  $a_n > y$  for all  $n \geq N$ .*

- (b) For every  $x < L^+$ , and every  $N \geq m$ , there exists an  $n \geq N$  such that  $a_n > x$ . (In other words, for every  $x < L^+$ , the elements of the sequence  $(a_n)_{n=m}^\infty$  exceed  $x$  infinitely often.) Similarly, for every  $y > L^-$  and every  $N \geq m$ , there exists an  $n \geq N$  such that  $a_n < y$ .
- (c) We have  $\inf(a_n)_{n=m}^\infty \leq L^- \leq L^+ \leq \sup(a_n)_{n=m}^\infty$ .
- (d) If  $c$  is any limit point of  $(a_n)_{n=m}^\infty$ , then we have  $L^- \leq c \leq L^+$ .
- (e) If  $L^+$  is finite, then it is a limit point of  $(a_n)_{n=m}^\infty$ . Similarly, if  $L^-$  is finite, then it is a limit point of  $(a_n)_{n=m}^\infty$ .
- (f) Let  $c$  be a real number. If  $(a_n)_{n=m}^\infty$  converges to  $c$ , then we must have  $L^+ = L^- = c$ . Conversely, if  $L^+ = L^- = c$ , then  $(a_n)_{n=m}^\infty$  converges to  $c$ .

- Las dos primeras propiedades expresan que, eventualmente, los elementos de la secuencia serán mayores o menores a un número (dependiendo de la relación entre el número y el límite superior e inferior). Esto ocurre porque debe haber algún elemento  $a_n$  que sea menor o mayor que el número, dado que, en el caso contrario, el número no sería mayor o menor a la suprema o ínfima y se entraría en una contradicción
  - Debido a que el límite superior es el ínfimo de la serie  $(a_N^+)_{N=m}^\infty$  (cuyos elementos son iguales o mayores a todos los de la secuencia original  $(a_n)_{n=m}^\infty$ ), y el límite inferior es la suprema de la serie  $(a_N^-)_{N=m}^\infty$  (cuyos elementos son iguales o menores a todos los de la secuencia original  $(a_n)_{n=m}^\infty$ ), se cumple que  $\inf(a_n)_{n=m}^\infty \leq L^- \leq L^+ \leq \sup(a_n)_{n=m}^\infty$
  - A partir de las últimas dos propiedades, se puede ver como, si  $L^+ = L^-$ , entonces solo hay un punto límite y la secuencia converge a este
- A partir de la definición de límite superior e inferior, es posible derivar una propiedad para comparar el límite superior e inferior de secuencias y corolarios útiles para la convergencia
- Suponiendo que  $(a_n)_{n=m}^\infty$  y  $(b_n)_{n=m}^\infty$  son dos secuencias de números reales tales que  $a_n \leq b_n$  para toda  $n \geq m$ , las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} \sup(a_n)_{n=m}^\infty &\leq \sup(b_n)_{n=m}^\infty & \inf(a_n)_{n=m}^\infty &\leq \inf(b_n)_{n=m}^\infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n & \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

- Suponiendo que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(c_n)_{n=m}^{\infty}$  secuencias de números reales tales que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para toda  $n \geq m$ , y que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(c_n)_{n=m}^{\infty}$  convergen al mismo límite  $L$ , entonces  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  también converge a  $L$
  - Siendo  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  una secuencia de números reales, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe y es igual a cero si, y solo si, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$  existe y también es igual a cero
- Una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  de números reales es una secuencia de Cauchy si, y solo si, es convergente
  - Esta proposición indica que los reales son un sistema numérico completo y es similar a la proposición anterior sobre las series de Cauchy de números racionales, solo que esta extiende el concepto para números reales
- Aunque se ha dedicado gran parte del estudio de límites a secuencias de números reales, también se puede estudiar desde las subsecuencias
  - Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  secuencias de números reales, se dice que  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  es una subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  si, y solo si, existe una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que es estrictamente creciente (que  $f(n+1) > f(n)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b_n = a_{f(n)}$ )
    - Una subsecuencia no se define con una función  $f$  biyectiva, pero es necesariamente inyectiva (a cada valor  $n$  le corresponde una  $f(n)$  diferente) para que dos elementos con un diferente índice en  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  no se refieran a un mismo elemento en  $a_{f(n)}$
    - Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  secuencias de números reales,  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  es una subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  (propiedad reflexiva), y si  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  es una subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  es una subsecuencia de  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ , entonces  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  es subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  (propiedad transitiva)
    - No obstante, el ser una subsecuencia no cumple la propiedad simétrica, de modo que si  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  es subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , no quiere decir que  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  es subsecuencia de  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$
  - Es posible relacionar el concepto de subsecuencia y con el concepto de límite y punto límite
    - Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $L$  un número real, las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes (una implica la otra):

(a) *The sequence  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converges to  $L$*

(b) *Every subsequence of  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converges to  $L$*

- Debido a que la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converge en  $L$  y una subsecuencia es una secuencia cuyos elementos son  $a_{f(n)}$  para toda  $n \geq 0$ , entonces los elementos de esta serán algunos de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , lo cual hace que, si  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  tiende a  $L$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces la subsecuencia también tienda a esta
- Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  una secuencia de números reales y  $L$  un número real, las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes (una implica la otra):

(a)  *$L$  is a limit point of  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$*

(b) *There exists a subsequence of  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  which converges to  $L$*

- Debido a que la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  tiene un punto límite en  $L$  y una subsecuencia es una secuencia cuyos elementos son  $a_{f(n)}$  para toda  $n \geq 0$ , entonces los elementos de esta serán algunos de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , lo cual hace que, si  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  tiene como punto límite  $L$  ( $a_n$  es  $\varepsilon$ -adherente para toda  $N \geq 0$ ), entonces debe haber una secuencia que contenga unos elementos específicos para los cuales haya una  $\varepsilon$ -cercanía eventual (dado que todos los elementos para  $N \geq 0$  son  $\varepsilon$ -adherentes y eso quiere decir que hay elementos que cumplirían la  $\varepsilon$ -cercanía) para alguna  $f(N) \geq 0$  y que, por tanto, se converja a  $L$
- Siendo  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  una secuencia acotada (existe un número real  $M > 0$  tal que  $|a_n| \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ), existe al menos una subsecuencia de  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  que converge
  - Siendo  $L$  un número real que es el límite superior de la secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , y sabiendo que  $-M \leq a_n \leq M$ , entonces  $-M \leq L \leq M$ , y  $L$  es un punto límite (por las propiedades de los puntos límite) y las proposiciones anteriores aseguran que debe existir una subsecuencia que converja (a  $L$  en este caso, dado que la secuencia está acotada también)
- Antes se han estudiado las propiedades de la exponenciación  $x^q$  cuando  $x$  es un número real y  $q$  es un número racional, pero no para  $x^\alpha$  cuando  $\alpha$  es real, de modo que se pueden utilizar límites para ello
  - Siendo  $x > 0$  y  $\alpha$  números reales y  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  una secuencia de números racionales que converge a  $\alpha$ ,  $(x^{q_n})_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia convergente y, si



$(q'_n)_{n=1}^{\infty}$  es cualquier otra secuencia de números racionales que converge a  $\alpha$ , entonces  $(x^{q_n})_{n=1}^{\infty}$  y  $(x^{q'_n})_{n=1}^{\infty}$  tienen el mismo límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q'_n}$$

- Debido a este lema que expresa que las secuencias  $(x^{q_n})_{n=1}^{\infty}$  y  $(x^{q'_n})_{n=1}^{\infty}$  convergen al mismo número, se puede definir la exponenciación con exponentes reales que serán el límite de estas secuencias
- Siendo  $x > 0$  y  $\alpha$  números reales, se define la cantidad  $x^{\alpha}$  por la fórmula  $x^{\alpha} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}$ , donde  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de números racionales que converge a  $\alpha$ 
  - Gracias la definición de números reales, siempre hay una secuencia  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  que converja a  $\alpha$ , y gracias al lema anterior, se sabe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}$  existe y que cualquier otra secuencia que converja a  $\alpha$  tiene el mismo límite. Esto hace que la definición esté bien definida
  - Como  $\alpha$  es el límite de la secuencia  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ , esta definición es consistente con la definición de exponenciación dada anteriormente con exponente racional
  - Todas las propiedades para la exponenciación de un número real a la potencia de un racional también se mantienen para exponentes reales

## Las series

- Ahora que se ha desarrollado una teoría razonable de los límites de una secuencia, es posible utilizarla para poder desarrollar una teoría de series infinitas. No obstante, primero es necesario desarrollar la teoría para series finitas
  - Siendo  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $(a_i)_{i=m}^n$  una secuencia finita de números reales, asignando a cada  $a_i$  un número entero  $i$  entre  $m$  y  $n$  incluidos, entonces se define la suma finita  $\sum_{i=m}^n a_i$  por la siguiente fórmula recursiva:

$$\sum_{i=m}^n a_i \equiv 0 \text{ when } n < m$$

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i \equiv \left( \sum_{i=m}^n a_i \right) + a_{n+1} \text{ when } n \geq m - 1$$

- Debido a esto, a veces se expresa  $\sum_{i=m}^n a_i$  de manera menos formal de la siguiente manera:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

- La diferencia entre una serie y una suma se debe a la lingüística. Estrictamente hablando, una serie es una expresión de la forma  $\sum_{i=m}^n a_i$ , aunque matemáticamente sea equivalente a un número real, que es la suma de las series
- La variable  $i$  es una *dummy variable*, de modo que se puede cambiar por cualquier otro signo porque la expresión  $\sum_{i=m}^n a_i$  no depende realmente de la cantidad  $i$

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j$$

- Las series cumplen una serie de propiedades bastante útiles para poder trabajar con ellas

- Siendo  $m \leq n < p$  números enteros, y siendo  $a_i$  como un número real asignado a cada entero  $m \leq i \leq p$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^p a_i = \sum_{i=m}^p a_i$$

- Siendo  $m \leq n$  y  $k$  enteros, y siendo  $a_i$  un número real asignado a cada número entero  $m \leq i \leq n$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

- Siendo  $m \leq n$  números enteros, y siendo  $a_i$  y  $b_i$  números reales asignados a cada número entero  $m \leq i \leq n$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \left( \sum_{i=m}^n a_i \right) + \left( \sum_{i=m}^n b_i \right)$$

- Siendo  $m \leq n$  y  $c$  enteros, y siendo  $a_i$  un número real asignado a cada número entero  $m \leq i \leq n$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n ca_i = c \left( \sum_{i=m}^n a_i \right)$$

- Siendo  $m \leq n$  números enteros, y siendo  $a_i$  un número real asignado a cada número entero  $m \leq i \leq n$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\left| \sum_{i=m}^n a_i \right| \leq \sum_{i=m}^n |a_i|$$

- Siendo  $m \leq n$  números enteros, y siendo  $a_i$  y  $b_i$  números reales asignados a cada número entero  $m \leq i \leq n$ , entonces, si  $a_i \leq b_i$  para toda  $m \leq i \leq n$ , se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n a_i \leq \sum_{i=m}^n b_i$$

- Siendo  $m \leq n$  números enteros y siendo  $c$  una constante, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=m}^n c = nc$$

- La sumatoria, no obstante, no cumple con las siguientes propiedades:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = a_m b_m + \dots \neq a_m b_m + a_m b_{m+1} + \dots \neq \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) \left( \sum_{k=m}^n b_k \right)$$

$$\sum_{k=m}^n f(a_k) = f(a_m) + \dots \neq f(a_m + \dots) \neq f \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) \text{ if } f \text{ not linear}$$

- Siendo  $X$  un conjunto finito con  $n$  elementos (en donde  $n \in \mathbb{N}$ ) y siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función de  $X$  a los números reales (se asigna un elemento  $f(x)$  a cada  $x$  de  $X$ ), se puede definir la suma finita  $\sum_{x \in X} f(x)$  seleccionando una biyección  $g$  de  $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$  a  $X$  y se usa la siguiente definición:

$$\sum_{x \in X} f(x) \equiv \sum_{i=1}^n f(g(i))$$

- Esta biyección  $g$  existe debido a que se asume que el subconjunto  $X$  tiene  $n$  elementos. Un ejemplo de una biyección sencilla de este tipo es la biyección  $g: \{1,2,3\} \rightarrow X$  con  $g(1) \equiv a$ ,  $g(2) \equiv b$  y  $g(3) \equiv c$
- Para poder comprobar que esta definición da un único valor bien definido, es necesario comprobar que diferentes biyecciones  $g$  resultan en la misma suma
- Por lo tanto, siendo  $X$  un conjunto finito con  $n$  elementos (en donde  $n \in \mathbb{N}$ ),  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función de  $X$  a los números reales, y siendo  $g$  y  $h$  de  $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$  a  $X$  se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=1}^n f(g(i)) = \sum_{i=1}^n f(h(i))$$

- Suponiendo que  $X$  es un conjunto, que  $P(x)$  es una propiedad perteneciendo a un elemento  $x$  de  $X$ , y  $f: \{y \in X : P(y) \text{ is true}\} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces se puede establecer la siguiente suma:

$$\sum_{x \in \{y \in X : P(y) \text{ is true}\}} f(x)$$

- Se suele abreviar esta suma como  $\sum_{x \in X : P(x) \text{ is true}} f(x)$  o como  $\sum_{P(x) \text{ is true}} f(x)$  cuando no hay confusión posible
- Hay propiedades básicas útiles que las sumas sobre conjuntos finitos cumplen:
- Si  $X$  es vacío y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$

- Si  $X$  consiste en un solo elemento  $X = \{x_0\}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_0)$$

- Si  $X$  es un conjunto finito,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y  $g: Y \rightarrow X$  es una biyección, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(g(y))$$

- Siendo  $n \leq m$  son enteros, y siendo  $X$  el conjunto  $X \equiv \{i \in \mathbb{Z} : n \leq i \leq m\}$ , si  $a_i$  es un número real asignado a cada entero  $i \in X$ , se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{i=n}^m a_i = \sum_{x \in X} a_i$$

- Siendo  $X$  e  $Y$  conjuntos finitos disjuntos (por lo que  $X \cap Y = \emptyset$ ) y  $f: X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{z \in X \cup Y} f(z) = \left( \sum_{x \in X} f(x) \right) + \left( \sum_{y \in Y} f(y) \right)$$

- Si  $X$  es un conjunto finito,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  es otra función, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} [f(x) + g(x)] = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

- Si  $X$  es un conjunto finito,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y  $c$  es una constante, se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

- Siendo  $X$  un conjunto finito y siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $f(x) \leq g(x)$  para toda  $x \in X$ , entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{x \in X} g(x)$$

- Siendo  $X$  un conjunto finito y siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\left| \sum_{x \in X} f(x) \right| \leq \sum_{x \in X} |f(x)|$$

- Siendo  $X$  e  $Y$  conjuntos finitos, y siendo  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  una función, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) = \sum_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y)$$

- Prueba por inducción...
- La sumatoria doble cumple con propiedades similares a las anteriores para una suma finita. Además, si cada elemento tiene un índice diferente, se puede multiplicar cada sumatoria por separado

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} [f(x, y) + g(x, y)] \right) = \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) + \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} g(x, y) \right)$$

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} c f(x, y) \right) = c \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) \text{ for } c \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x) g(y) \right) = \left( \sum_{x \in X} f(x) \right) \left( \sum_{y \in Y} g(y) \right)$$

$$\sum_{i=n}^m \sum_{j=n}^m c = m^2 c$$

- La doble sumatoria, no obstante, no cumple las siguientes igualdades:

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) g(x, y) \right) \neq \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} g(x, y) \right)$$

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) \neq f \left[ \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} a_{i,j} \right) \right] \text{ if } f \text{ not linear}$$

- Un corolario del lema anterior es que, siendo  $X$  e  $Y$  conjuntos finitos, y siendo  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  una función, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \left( \sum_{y \in Y} f(x, y) \right) &= \sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \sum_{(y,x) \in Y \times X} f(y, x) = \\ &= \sum_{y \in Y} \left( \sum_{x \in X} f(x, y) \right) \end{aligned}$$

- A partir del lema anterior, solo es necesario demostrar que  $\sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \sum_{(y,x) \in Y \times X} f(x, y)$ , pero esto se cumple por la

propiedad de la sustitución por una biyección del tipo  $h: X \times Y \rightarrow Y \times X$  definida por  $h(x, y) \equiv (y, x)$ , de modo que se demuestra este teorema

$$\sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \sum_{(y,x) \in Y \times X} f(h(x, y)) = \sum_{(y,x) \in Y \times X} f(y, x)$$

- Una vez desarrollada la teoría de series finitas, es posible desarrollar la teoría para las series infinitas

- Una serie infinita formal es cualquier expresión de la forma  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  donde  $m$  es un entero y  $a_n$  es un número real para cualquier entero  $n \geq m$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$$

- Esta definición es para una serie infinita formal, dado que no se fija igual a ningún número real. La notación  $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$  está diseñada para parecerse a una suma, pero que no lo es porque tiene el símbolo "..."
- Por lo tanto, para poder definir a qué suma una serie infinita, es necesaria otra definición para la convergencia de estas series
- Siendo  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  una serie infinita formal, para cualquier entero  $N \geq m$ , se define la  $N$ -ésima suma parcial  $S_N$  de esta serie como  $S_N \equiv \sum_{n=m}^N a_n$ , en donde  $S_N \in \mathbb{R}$ 
  - Si la secuencia  $(S_N)_{N=m}^{\infty}$  converge a algún límite  $L$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , entonces se dice que la serie infinita  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es convergente y que converge a  $L$ , y se suele escribir  $L = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$  y decir que  $L$  es la suma de la serie infinita. Si, en cambio, las sumas parciales  $S_N$  divergen, entonces se dice que la serie infinita  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es divergente, y no se le asigna un número real a esta
  - Esta proposición muestra que, si una serie es convergente, entonces tiene una única suma, de modo que es seguro hablar de la suma  $L = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$  de una serie convergente
- Siendo  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  una serie formal de números reales, entonces  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  converge si, y solo si, para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe un número entero  $N \geq m$  tal que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \varepsilon \text{ for } \forall p, q \geq N$$

- Esta proposición muestra que una serie converge si, y solo si, la cola de la secuencia es eventualmente menor a  $\varepsilon$  para cualquier  $\varepsilon > 0$
- No obstante, esta no es muy útil porque no es fácil calcular las sumas parciales  $\sum_{n=p}^q a_n$  en la práctica, de modo que se usan los corolarios de este resultado
- Un corolario de la proposición anterior es que, siendo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie convergente de números reales, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , de modo que, si el límite no es cero o es divergente, la serie es divergente

- La idea detrás de esta prueba es que, si las series tienen que sumar a un número finito, entonces, necesariamente, los términos de la secuencia deben estar haciéndose más y más pequeños de manera progresiva (con tal de que la suma no diverja)
- La demostración permite ver que la secuencia de una serie convergente debe tender a cero, dado que, de otro modo, la secuencia de sumas parciales  $(S_N)_{N=m}^{\infty}$  no tendería a  $L$

$$S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N \quad S_{N-1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1}$$

$$if \sum_{n=m}^{\infty} a_n = L$$

$$\Rightarrow (S_N)_{N=m}^{\infty} \rightarrow L \text{ as } N \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow S_N \rightarrow L \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ \& } S_{N-1} \rightarrow L \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$S_N - S_{N-1} = a_N \Rightarrow L - L = 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

- No obstante, esta prueba solo dice que la secuencia debe tender a cero necesariamente si la suma de sus términos tiene que ser un número finito. No es condición suficiente, debido a que hay secuencias que tienden a cero, pero sus sumas no convergen
- Por lo tanto, se dice que esta prueba sirve solo para saber si una serie diverge, pero no si converge. Si una secuencia  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  tiende a cero, entonces esta serie puede converger o no, pero si tiende a cero, seguro que diverge
- Siendo  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  una serie formal de números reales, se dice que la serie es absolutamente convergente si, y solo si, la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$  es convergente. Para poder diferenciar esta convergencia de la anterior, la convergencia anterior se denomina convergencia condicional



- Siendo  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  una serie formal de números reales, si la serie converge absolutamente, entonces también converge condicionalmente. Además, en este caso, se cumple la desigualdad triangular

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

- El converso de la proposición anterior no es verdad, dado que hay series que condicionalmente convergen pero que no convergen absolutamente
- Se considera a la clase de todas aquellas series convergentes para incluir la clase de series absolutamente convergentes como una subclase. Por lo tanto, no es que la convergencia condicional implique que no hay convergencia absoluta, sino que puede ser que no haya convergencia absoluta, de modo que se tiene que diferenciar

- Las series cumplen un conjunto de propiedades útiles que permitirán trabajar mejor con series infinitas

- Si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es una serie de números reales convergiendo a  $x$ , y  $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$  es una serie de números reales convergiendo a  $y$ , entonces  $\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n)$  es también una serie convergente que converge a  $x + y$

$$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n = x + y$$

- Si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es una serie de números reales convergiendo a  $x$ , y  $c$  es un número real, entonces  $\sum_{n=m}^{\infty} ca_n$  es también una serie convergente y converge a  $cx$

$$\sum_{n=m}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=m}^{\infty} a_n = cx$$

- Si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es una serie de números reales convergiendo a  $x$  y  $k \geq 0$  es un entero, si dos series  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$  son convergentes, entonces la otra también lo es, de modo que se obtiene la siguiente identidad:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n = x$$

- Esta propiedad muestra que la convergencia de una serie no depende de los primeros parámetros (aunque también influyan en el valor al que converge), por lo que no se le suele prestar mucha atención al índice inicial  $m$
- Si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es una serie de números reales convergiendo a  $x$  y  $k$  es un entero, entonces  $\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$  también converge a  $x$ . Esto ocurre porque no altera el valor que se asigna a cada elemento para cada  $n$  posible
- Siendo  $x$  un número real, si  $|x| \geq 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} x^n$  es divergente, pero si  $|x| < 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} x^n$  es absolutamente convergente y converge al siguiente valor:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

- Este tipo de series se denominan series geométricas, y son un caso especial de las series de potencias

## Las funciones continuas en $\mathbb{R}$

- En análisis matemático no se suele trabajar con la línea real  $\mathbb{R}$ , sino con ciertos subconjuntos de la línea real (y poco con la línea real extendida y sus subconjuntos), tales como intervalos y conjuntos numéricos
  - Siendo  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , se define un intervalo cerrado  $[a, b]$  como  $[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R}^*: a \leq x \leq b\}$  y un intervalo abierto  $(a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R}^*: a < x < b\}$ . Del mismo modo, un intervalo semiabierto  $[a, b)$  se define como  $[a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R}^*: a \leq x < b\}$  y un intervalo semiabierto como  $(a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R}^*: a < x \leq b\}$ 
    - Al número  $a$  se le llama extremo izquierdo del intervalo, mientras que al número  $b$  se le llama extremo derecho. Si  $a$  y  $b$  son números reales (no  $+\infty$  o  $-\infty$ ), entonces los intervalos anteriores son subconjuntos de la línea real
    - Cuando un intervalo tiene un infinito como extremo es un intervalo semi-infinito, mientras que si ambos lo son se denomina intervalo doblemente infinito. Todos los otros intervalos se denominan intervalos acotados
    - El eje real positivo  $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$  es el intervalo abierto  $(0, +\infty)$ , mientras que el eje real no negativo  $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$  es el intervalo semiabierto  $[0, +\infty)$ . De manera similar, el eje real negativo  $\{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$  es el intervalo abierto  $(-\infty, 0)$ , mientras que el eje real no negativo  $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$  es el intervalo semiabierto  $(-\infty, 0]$ .

La línea real es el intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , mientras que la línea real extendida  $[-\infty, +\infty]$

- Si  $a > b$ , entonces los intervalos anteriores son el conjunto vacío, mientras que si  $a = b$ , todos son el conjunto vacío menos  $[a, b]$ , que será un conjunto con un único elemento  $\{a\}$ . Por ello, estos intervalos se denominan degenerados
- Aparte de los intervalos, otros conjuntos importantes son los conjuntos numéricos como  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{R}$ , y los que se pueden formar combinando diversos intervalos y conjuntos
  - Hay infinitas combinaciones que se pueden hacer con las operaciones intersección y de unión
- Igual que las secuencias de números reales tienen puntos límite, los conjuntos de números reales tienen puntos adherentes
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ , se dice que  $x$  es  $\varepsilon$ -adherente a  $X$  si, y solo si, existe una  $y \in X$  que está  $\varepsilon$ -cerca de  $x$ . Aunque esta terminología no es estándar en la literatura, es útil para poder definir el punto adherente, que sí es estándar
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , se dice que  $x$  es un punto adherente de  $X$  si, y solo si, es  $\varepsilon$ -adherente a  $X$  para toda  $\varepsilon > 0$
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , la clausura de  $X$ , a veces denotada por  $\bar{X}$ , se define como el conjunto de todos los puntos adherentes de  $X$ 
  - Siendo  $X$  e  $Y$  subconjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}$ , se cumplen las siguientes relaciones:  $X \subseteq \bar{X}$ ,  $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$  y  $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$
  - Siendo  $X$  e  $Y$  subconjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}$ , si  $X \subseteq Y$ , entonces  $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$
  - Siendo  $a < b$  números reales e  $I$  siendo cualquiera de los cuatro intervalos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  y  $[a, b]$ , la clausura de  $I$  es  $[a, b]$ . Similarmente, la clausura de  $(a, \infty)$  y  $[a, \infty)$  es  $[a, \infty)$  y la clausura de  $(-\infty, a)$  o  $(-\infty, a]$  es  $(-\infty, a]$ . Además, la clausura de  $(-\infty, \infty)$  es  $(-\infty, \infty)$
  - La clausura de  $\mathbb{N}$  es  $\mathbb{N}$ , la clausura de  $\mathbb{Z}$  es  $\mathbb{Z}$ , y la clausura de  $\mathbb{Q}$  es  $\mathbb{R}$ . Además, la clausura del conjunto  $\emptyset$  es  $\emptyset$
- El siguiente lema permite ver que los puntos adherentes en un conjunto  $X$  pueden obtenerse como el límite de elementos en  $X$ :

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y siendo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x$  es un punto adherente de  $X$  si, y solo si, existe una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  que consiste enteramente de elementos en  $X$  que converge a  $x$
- Un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}$  se denomina cerrado si  $\bar{E} = E$ , o, en otras palabras, cuando  $E$  contiene todos sus puntos adherentes
  - De este modo, los intervalos  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, a]$  y  $(-\infty, \infty)$  son subconjuntos cerrados
  - Siendo  $X \subseteq \mathbb{R}$ , si  $X$  es cerrado y  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  es una secuencia convergente consistiendo en elementos de  $X$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  también está dentro de  $X$ . De manera conversas, si es verdad que cualquier secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  consistiendo en elementos de  $X$  tiene su límite dentro de  $X$ , entonces  $X$  es necesariamente cerrado
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , se dice que  $x$  es un punto límite (o punto clúster) de  $X$  si, y solo si, es un punto adherente de  $X - \{x\}$ . Se dice que  $x$  es un punto aislado de  $X$  si  $x \in X$  y existe alguna  $\varepsilon > 0$  tal que  $|x - y| > \varepsilon$  para toda  $y \in X - \{x\}$ 
  - A partir del lema sobre la obtención de puntos adherentes a partir de límites de secuencias, se puede ver que  $x$  es un punto límite de  $X$  si, y solo si, existe una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  formada solo por elementos de  $X$  que sean distintos de  $x$  tal que  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converja a  $x$
  - Es posible demostrar que el conjunto de puntos adherentes se divide en el conjunto de puntos límite y en el de puntos aislados. De manera conversas, cada punto límite o aislado es un punto adherente
  - Siendo  $I$  un intervalo, entonces todo elemento de  $I$  es un punto límite de  $I$ . Esto se puede demostrar encontrando secuencias que converjan a los extremos del intervalo y a un valor en medio
- Un conjunto  $X$  de la línea real se denomina acotado si  $X \subset [-M, M]$  para un número real  $M > 0$ 
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:
    - (a)  $X$  is closed and bounded.
    - (b) Given any sequence  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  of real numbers which takes values in  $X$ , there exists a subsequence  $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$  of the original sequence, which converges to some number  $L$  in  $X$ .

- El teorema se llama teorema para la línea de Heine-Borel, y tiene un papel importante en las siguientes secciones, ya que expresa que cualquier subconjunto de la línea real cerrado y acotada también es compacto
- Muchas funciones familiares  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son de la línea real a la línea real porque se asigna un número real  $f(x)$  a cada número real  $x$ . No obstante, hay muchos tipos de funciones y se pueden llevar a cabo operaciones aritméticas sobre ellas
  - Es posible tomar cualquier función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cualquier elemento en  $\mathbb{R}$  y restringir el dominio a un conjunto más pequeño  $X \subseteq \mathbb{R}$ , creando una nueva función  $f|_X$  de  $X$  a  $\mathbb{R}$ 
    - Esta función es la misma que la función original, pero está definida para un dominio más pequeño, de modo que  $f|_X(x) \equiv f(x)$  cuando  $x \in X$ , pero queda indefinido si  $x \notin X$
    - También es posible restringir la imagen de  $\mathbb{R}$  a un subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{R}$  siempre que todos los valores de  $f(x)$  estén dentro de  $Y$  (como la función  $f(x) \equiv x^2$ )
    - Hay una diferencia entre la función  $f$  y su valor  $f(x)$  en el punto  $x$ , ya que  $f$  es una función y  $f(x)$  es un número. No obstante, esta distinción es sutil y no se suele hacer a no ser que sea necesario
  - Si  $X$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, se puede formar un gráfico  $\{(x, f(x)): x \in X\}$  de la función  $f$ , el cual es un subconjunto de  $X \times \mathbb{R}$  y un subconjunto, por tanto, del plano euclideo  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 
    - Uno puede estudiar la función a través de su gráfico al utilizar geometría del plano  $\mathbb{R}^2$ , aunque se suele utilizar un enfoque más analítico en análisis matemático. No obstante, ambos enfoques se utilizan para un mejor entendimiento y rigor
  - Dadas dos funciones  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , se pueden definir los siguientes conceptos:
    - La suma o resta de las funciones  $f \pm g: X \rightarrow \mathbb{R}$  se define de la siguiente manera:

$$(f \pm g)(x) \equiv f(x) \pm g(x)$$

- El producto de las funciones  $fg: X \rightarrow \mathbb{R}$  se define de la siguiente manera:

$$(fg)(x) \equiv f(x)g(x)$$

- La división de las funciones  $f/g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dado que  $g(x) \neq 0$  para toda  $x$ , se define de la siguiente manera:

$$(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x)$$

- El máximo de las funciones  $\max(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}$ , se define de la siguiente manera:

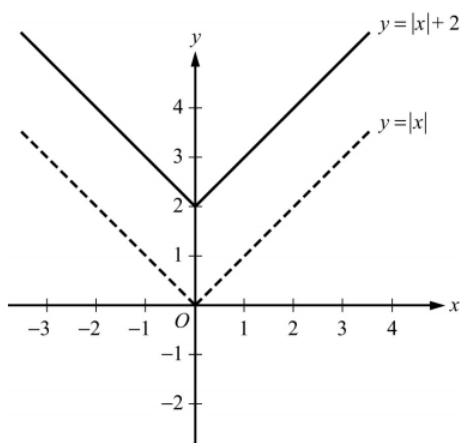
$$\max(f, g)(x) \equiv \max(f(x), g(x))$$

- El mínimo de las funciones  $\min(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}$ , se define de la siguiente manera:

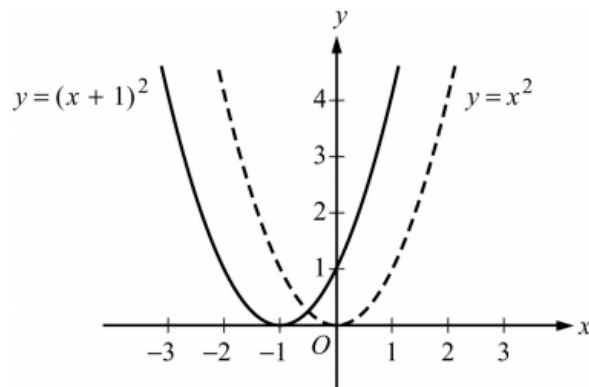
$$\min(f, g)(x) \equiv \min(f(x), g(x))$$

- Dados los conceptos anteriores, para cualquier función  $f(x)$  y cualquier número positivo  $c$ , se cumplen las siguientes proposiciones:

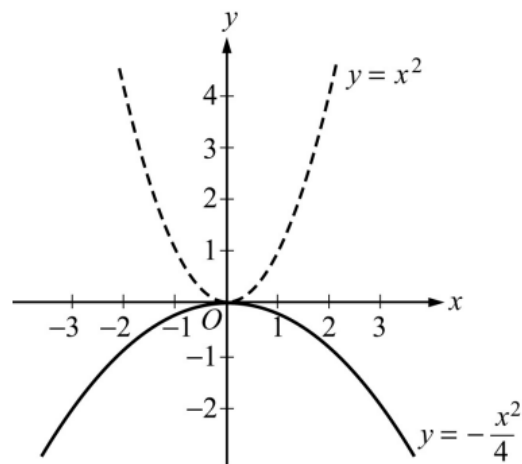
- El grafo  $f(x) + c$  es el grafo de  $f(x)$  desplazada hacia arriba  $c$  unidades. El grafo  $f(x) - c$  es el grafo de  $f(x)$  desplazada hacia abajo  $c$  unidades



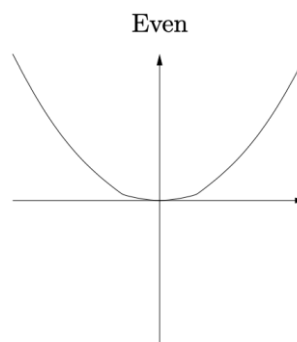
- El grafo  $f(x + c)$  es el grafo de  $f(x)$  desplazada hacia la izquierda  $c$  unidades. El grafo  $f(x - c)$  es el grafo de  $f(x)$  desplazada hacia la derecha  $c$  unidades



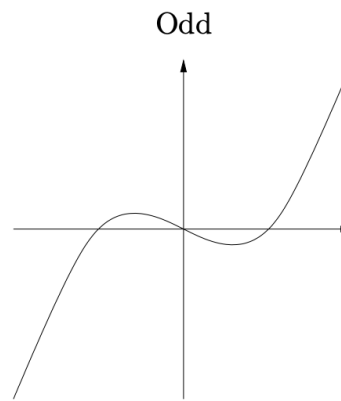
- El grafo de  $cf(x)$  es el grafo de  $f(x)$  estirado verticalmente por un factor  $c$  si  $c > 1$ , y es el grafo de  $f(x)$  comprimido verticalmente por un factor  $c$  si  $0 < c < 1$



- Una función real  $f$  de una variable real  $x$  puede ser par o *even*, impar o *odd* o ninguna de las dos:
  - Una función real de variable real es par si, para todas las  $x \in X$ , se cumple que  $f(-x) = f(x)$ , de modo que la función es simétrica en el eje de las ordenadas



- Una función real de variable real es impar si, para todas las  $x \in X$ , se cumple que  $f(-x) = -f(x)$



- Anteriormente se definió lo que significa que una secuencia  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  converja a un límite  $L$ , de modo que se puede definir la misma noción para una función  $f$  definida en la línea real o en un subconjunto de esta
  - Del mismo modo que se utilizaban las nociones de  $\varepsilon$ -cercanía y  $\varepsilon$ -cercanía eventual, se pueden definir nociones similares para lidiar con los límites de una función
    - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $L$  y  $\varepsilon > 0$  números reales, se dice que una función  $f$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  si, y solo si,  $f(x)$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  (si  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ) para toda  $x \in X$
    - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $L$  y  $\varepsilon > 0$  números reales y  $x_0$  un punto adherente de  $X$ , se dice que  $f$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  cerca de  $x_0$  si, y solo si, existe un  $\delta > 0$  tal que  $f$  se vuelve  $\varepsilon$ -cercana a  $L$  cuando se restringe al conjunto  $\{x \in X : |x - x_0| < \delta\}$
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $L$  un número real,  $E$  un subconjunto de  $X$  y  $x_0$  un punto adherente de  $E$ , se dice que  $f$  converge a  $L$  en  $x_0$  en  $E$ , denotado por  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ , si, y solo si, después de restringir  $f$  a  $E$ , esta función está  $\varepsilon$ -cerca a  $L$  cerca de  $x_0$  para toda  $\varepsilon > 0$ 
    - Si  $f$  no converge a ningún número  $L$  en  $x_0$ , se dice que  $f$  diverge en  $x_0$  y se deja  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$  indefinido
    - En otras palabras,  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$  si, y solo si, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para toda  $x \in E$  tal que  $|x - x_0| < \delta$
    - Normalmente se omite  $E$  de la notación anterior, pero es peligroso ignorarla porque puede haber diferencia entre que  $E$  incluya  $x_0$  o que no lo haga (por ejemplo, para funciones a binarias)



- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $L$  un número real,  $E$  un subconjunto de  $X$  y  $x_0$  un punto adherente de  $E$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a)  $f$  converges to  $L$  at  $x_0$  in  $E$ .

(b) For every sequence  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  which consists entirely of elements of  $E$  and converges to  $x_0$ , the sequence  $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$  converges to  $L$ .

- La última proposición se puede expresar de la siguiente manera: si  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$
- Este resultado permite expresar la definición en términos de límites de secuencias, por lo que se puede escribir  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow x_0$  en  $E$
- Solo se considera el límite de una función  $f$  en  $x_0$  en el caso que  $x_0$  sea un punto adherente de  $E$ , dado que, si no lo es, entonces quiere decir que no es un punto límite (dado que un punto límite es un punto adherente) y  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  no puede tender a  $x_0$
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $E$  un subconjunto de  $X$  y  $x_0$  un punto adherente de  $E$ , entonces  $f$  puede tener como mucho un solo límite en  $x_0$  en  $E$

$$\text{If } \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L \text{ \& } \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L':$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L'$$

$$\Rightarrow L' = L \Rightarrow L \text{ is unique}$$

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones,  $E$  un subconjunto de  $X$  y  $x_0$  un punto adherente de  $E$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades para los límites de las funciones:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \max(f, g)(x) = \max \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \min(f, g)(x) = \min \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

- Estas propiedades se pueden demostrar a través de las propiedades de los límites de las secuencias a través de la proposición anterior
- Se ha quitado  $E$  de la notación por brevedad, pero se sigue necesitando que  $x \in E$ . Además, para la identidad final se necesita que  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \neq 0$
- Si  $f$  converge a  $L$  en  $x_0$  en  $X$ , y si  $Y$  es un subconjunto de  $X$  tal que  $x_0$  sigue siendo un punto adherente de  $Y$ , entonces  $f$  también converge a  $L$  en  $x_0$  en  $Y$ . De este modo, la convergencia en un conjunto grande implica la convergencia en un conjunto más pequeño, pero lo converso no es verdad
- El límite en  $x_0$  solo debería depender de los valores de la función cerca de  $x_0$ , con tal de que los valores lejos de  $x_0$  no sean relevantes
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $L$  y  $\delta > 0$  números reales,  $E$  un subconjunto de  $X$  y  $x_0$  un punto adherente de  $E$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$  si, y solo si,  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$
$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$$
- Esta proposición muestra que si el límite de una función  $f$  existe en  $x_0$ , entonces solo depende de los valores de  $f$  cerca de  $x_0$
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un subconjunto de  $X$ ,  $x_0$  un punto adherente de  $E$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para toda  $x \in E$ , si  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} h(x) = L$  para un número real  $L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) = L$
- Esta proposición se puede demostrar con las propiedades de las secuencias y la proposición anterior sobre el límite de una función en términos del límite de una secuencia, dado que es una proposición análoga a la vista anteriormente para límites de secuencia

- A veces, al evaluar el límite de una función, se tienen indeterminaciones en el resultado. No obstante, hay técnicas para poder evaluar el límite y evitar la indeterminación

- Las indeterminaciones nacen de aquellas ocasiones en las que no es clara cuál debería ser la suma, diferencia, producto, cociente o potencia de dos límites. Existen 7 formas de indeterminación:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty \text{ \& } \infty^0$$

- Estas indeterminaciones se obtienen aplicando el álgebra de los límites para dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$
- Es importante diferenciar estas formas de las formas que parecen, pero no son indeterminaciones, tales como  $f/g \rightarrow \infty$ ,  $f/g \rightarrow -\infty$  y aquellas funciones donde el límite no existe
- Las expresiones  $0^\infty$  y  $0^{-\infty}$  no son indeterminaciones, ya que la primera es equivalente a 0 y la segunda a  $0^{-\infty} = 1/0 = \infty$
- Para resolver indeterminaciones se pueden utilizar diferentes métodos como la factorización de polinomios, el uso de conjugados cuando hay raíces involucradas, usando denominadores comunes (para poder jugar con ellos) o usando identidades trigonométricas

Indeterminate form	Conditions	Transformation to 0/0	Transformation to $\infty/\infty$
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	—	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$	—
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{1/g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/f(x)}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \ln \lim_{x \rightarrow c} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$
$0^0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0^+, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$
$1^\infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
$\infty^0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$

- La factorización de polinomios viene muy bien para lidiar con formas indeterminadas como  $\infty/\infty$  y  $0/0$ . Además, el uso de denominadores comunes también funciona bien porque permite jugar con eso y obtener expresiones equivalentes alternativas, siendo el denominador más útil el de la potencia de  $x$  más grande

- El uso de conjugados viene muy bien para formas indeterminadas como  $\infty - \infty$  (conjugados de toda la expresión, no solo del radical)
  - Para lidiar con indeterminaciones como  $0^0, 1^\infty, 0 \times \infty$  y  $\infty^0$ , lo que normalmente se hace es ponerlas en la forma de  $0/0$  o  $\infty/\infty$  y resolver después
  - No obstante, para algunos límites más difíciles, es necesario utilizar identidades trigonométricas y desigualdades con tal de poder evaluar los límites
- Una vez se tienen las nociones de subconjuntos de la línea real y del límite de una función, es posible introducir la noción de continuidad de una función

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in X$ , se dice que  $f$  es continua en  $x_0$  si, y solo si,  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  en  $X$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X} f(x) = f(x_0)$$

- Se dice que  $f$  es continua en  $X$  (o simplemente continua) si, y solo si,  $f$  es continua en  $x_0$  para toda  $x_0 \in X$ , mientras que es discontinua en  $x_0$  si, y solo si, no es continua en  $x_0$
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in X$ , las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

(a)  *$f$  is continuous at  $x_0$ .*

(b) *For every sequence  $(a_n)_{n=0}^\infty$  consisting of elements of  $X$  with  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , we have  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ .*

(c) *For every  $\varepsilon > 0$ , there exists a  $\delta > 0$  such that  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  for all  $x \in X$  with  $|x - x_0| < \delta$ .*

(d) *For every  $\varepsilon > 0$ , there exists a  $\delta > 0$  such that  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$  for all  $x \in X$  with  $|x - x_0| \leq \delta$ .*

- Estas equivalencias lógicas se pueden demostrar a través de la definición de límite de función dada anteriormente
- Esta proposición permite ver que hay maneras equivalentes de formular la continuidad de una función
- La definición de continuidad junto con las leyes aritméticas de los límites vistas anteriormente implica que la aritmética preserva la continuidad de las funciones. Adicionalmente hay otras funciones que son continuas, tales como las exponenciales y las compuestas

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y  $x_0 \in X$ , si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$ , las funciones  $f \pm g$ ,  $fg$ ,  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$  también son continuas en  $x_0$ . Si  $g$  no es cero en  $X$ , entonces  $f/g$  también es continua en  $x_0$
  - Siendo  $a > 0$  un número real positivo, la función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) \equiv a^x$  es continua
  - Siendo  $p$  un número real, la función  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) \equiv x^p$  es continua
  - La función de valor absoluto  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) \equiv |x|$  es continua
  - Siendo  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y  $x_0 \in X$ , si  $f$  es continua en  $x_0$  y  $g$  es continua en  $f(x_0)$ , la composición  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x_0$
- Para poder estudiar la continuidad de manera más rigurosa junto a los límites de una función, se introduce la noción de límites laterales, que se pueden entender como dos mitades de un límite  $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X} f(x)$ 
    - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0$  un número real, si  $x_0$  es un punto adherente de  $X \cap (x_0, \infty)$ , entonces se define el límite a la derecha  $f(x_0 +)$  de  $f$  en  $x_0$  como  $f(x_0 +) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \cap (x_0, \infty)} f(x)$  siempre que este límite exista. Del mismo modo, si  $x_0$  es un punto adherente de  $X \cap (-\infty, x_0)$ , entonces se define el límite a la izquierda  $f(x_0 -)$  de  $f$  en  $x_0$  como  $f(x_0 -) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$  siempre que este límite exista
    - A veces se suele utilizar una notación abreviada para los límites laterales cuando el dominio  $X$  de  $f$  es claro por el contexto
$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \cap (x_0, \infty)} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$$
    - En este caso,  $f$  no tiene por qué estar definida en  $x_0$  siempre que  $f(x_0 +)$  y  $f(x_0 -)$  estén definidos, dado que lo único necesario es que  $x \in X \cap (-\infty, x_0)$  y que  $x \in X \cap (x_0, \infty)$  para los límites laterales
    - Si el límite  $f(x_0 +)$  existe y  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  es una secuencia en  $X$  que converge a  $x_0$  desde la derecha ( $a_n > x_0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ), entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0 +)$ . Del mismo modo, si el límite  $f(x_0 -)$  existe y

$(b_n)_{n=0}^{\infty}$  es una secuencia en  $X$  que converge a  $x_0$  desde la izquierda ( $b_n < x_0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ), entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0 -)$

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que contiene  $x_0$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, y suponiendo que  $x_0$  es un punto adherente de  $X \cap (x_0, \infty)$  y  $X \cap (-\infty, x_0)$ , si  $f(x_0 +)$  y  $f(x_0 -)$  existen y son iguales a  $f(x_0)$ , entonces  $f$  es continua en  $x_0$

- Siendo  $L \equiv f(x_0)$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = L$  y se puede ver que existe una  $\delta_+ > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para toda  $x \in X \cap (x_0, \infty)$  tal que  $|x - x_0| < \delta_+$ , y que también existe una  $\delta_- > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para toda  $x \in X \cap (-\infty, x_0)$  tal que  $|x - x_0| < \delta_-$
- Escogiendo  $\delta \equiv \min(\delta_+, \delta_-)$  se ve que  $\delta > 0$  y, suponiendo que  $x \in X$  tal que  $|x - x_0| < \delta$ , puede ser que  $x > x_0$ ,  $x = x_0$  y  $x < x_0$ . No obstante, en los tres casos  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , por lo que  $f$  es continua en  $x_0$

$$x > x_0 \Rightarrow x \in X \cap (x_0, \infty) \Rightarrow |x - x_0| < \delta_+ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x < x_0 \Rightarrow x \in X \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow |x - x_0| < \delta_- \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x = x_0 \Rightarrow |x - x_0| = 0 < \delta = \min(\delta_+, \delta_-) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Cuando los límites laterales de una función  $f$  en un punto  $x_0$  existen, pero no son iguales, se dice que  $f$  tiene una discontinuidad de salto en  $x_0$ . Si, en cambio, los límites laterales son iguales, pero no iguales a  $f(x_0)$ , se dice que  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $x_0$ 
  - No obstante, estas no son las únicas formas en las que una función puede ser discontinua, existiendo discontinuidades asintóticas (cuando los límites tienden cada uno a  $\infty$  o  $-\infty$ ) y oscilatorias (donde la función se mantiene acotada pero no tiene un límite cerca de  $x_0$ )
- En las secciones anteriores se ha visto que hay muchas funciones continuas, las cuales tienen propiedades útiles, especialmente si el dominio es un intervalo cerrado, de modo que se puede explotar el teorema de Heine-Borel mucho más
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  está acotada por arriba si existe un número real  $M$  tal que  $f(x) \leq M$  para toda  $x \in X$ , mientras que uno dice que  $f$  está acotada por abajo si existe un número real  $M$  tal que  $f(x) \geq -M$  para toda  $x \in X$ . Se dice que  $f$  es acotada si existe un número real  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para toda  $x \in X$ 
    - Una función, por tanto, está acotada si, y solo si, está acotada por arriba y por abajo. Además, una función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada si, y

solo si, su imagen  $f(X)$  es un conjunto acotado (si  $f(X) \subset [-M, M]$  para un número real  $M$ )

- No todas las funciones son acotadas, pero si el dominio de la función continua es un intervalo cerrado y acotado, entonces se tiene acotación. Siendo  $a < b$  números reales y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es una función acotada
  - Si  $f$  no fuera acotada, entonces existe una  $x \in [a, b]$  tal que  $|f(x)| \geq M$ . En particular, el conjunto  $\{x \in [a, b]: |f(x)| \geq n\}$  no está vacío para toda  $n$ , por lo que se puede escoger una secuencia  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  en  $[a, b]$  tal que  $|f(x_n)| \geq n$  para toda  $n$ . Como esta secuencia está en  $[a, b]$ , existe una subsecuencia  $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$  que converge a un límite  $L \in [a, b]$  donde  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  es una secuencia creciente de números naturales (teorema de Heine-Borel), por lo que  $n_j \geq j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$
  - Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , es también continua en  $L$  y eso implica que  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = f(L)$
  - Esto último implica que la secuencia  $(f(x_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$  es convergente, y por tanto acotada. Pero como  $|f(x_{n_j})| \geq n_j \geq j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , y  $n_j \geq j$ , esto implica que  $|f(x_{n_j})| \geq n_j \geq j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , de modo que la secuencia  $(f(x_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$  no estaría acotada, y por tanto se llega a una contradicción
- Siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in X$ , se dice que  $f$  llega a un máximo en  $x_0$  si  $f(x_0) \geq f(x)$  para toda  $x \in X$ , mientras que se dice que  $f$  llega a un mínimo en  $x_0$  si  $f(x_0) \leq f(x)$ 
  - Si una función llega a un máximo en algún punto  $x_0$ , entonces debe de estar acotada por arriba, mientras que si llega a un mínimo en algún punto  $x_0$ , entonces debe estar acotada por abajo
  - Siendo  $a < b$  números reales y siendo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  llega a un máximo en algún punto  $x_{max} \in [a, b]$  y a un mínimo en algún punto  $x_{min} \in [a, b]$ . Esta proposición se denomina principio del máximo
  - Este principio no dice que no se pueda llegar a un máximo o mínimo en diferentes puntos. Además, el principio implica que, como en un intervalo cerrado toda función continua está acotada, esta tiene un máximo y un mínimo en algún punto (al menos una vez), pero no es cierto para intervalos abiertos o infinitos

- Una función continua llega a un máximo y a un mínimo, pero también llega a cualquier punto entre medio, lo cual se puede demostrar a través del teorema del valor intermedio
  - Siendo  $a < b$  números reales,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  e  $y$  un número real entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe una  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = y$ . Este teorema se denomina teorema del valor intermedio
    - El teorema del valor intermedio muestra que si  $f$  toma valores  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces también tiene que tomar valores intermedios. Pero si  $f$  no se asume continua, entonces no aplica
    - Una función continua puede tomar el valor intermedio múltiples veces (para diferentes puntos)
    - A partir de este teorema se puede demostrar que se puede tomar la  $n$ -ésima raíz de un número, ya que considerando una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) \equiv x^n$ , debe existir un valor  $c$  tal que  $f(c) = y$  cuando  $y$  está entre medio de  $f(a)$  y  $f(b)$
  - Siendo  $a < b$  números reales,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ ,  $M \equiv \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  y  $m \equiv \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  los valores extremos de la función  $f$  e  $y$  un número real entre  $m$  y  $M$ , entonces existe una  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = y$  y  $f([a, b]) = [m, M]$ 
    - Esta proposición es un corolario del teorema del valor intermedio
- Una clase de funciones distinta a la clase de funciones continuas es la de funciones monótonas, la cual tiene propiedades similares
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  es monótonamente creciente si, y solo si,  $f(y) \geq f(x)$  cuando  $x, y \in X$  y  $y > x$ . En cambio, se dice que  $f$  es monótonamente decreciente si, y solo si,  $f(y) \leq f(x)$  cuando  $x, y \in X$  y  $y < x$ 
    - Se dice que  $f$  es estrictamente monótonamente creciente si, y solo si,  $f(y) > f(x)$  cuando  $x, y \in X$  y  $y > x$ , mientras que se dice que  $f$  es estrictamente monótonamente decreciente si, y solo si,  $f(y) < f(x)$  cuando  $x, y \in X$  y  $y < x$
    - Las funciones continuas no necesariamente son monótonas, y las funciones monótonas no son necesariamente continuas. Además, una función monótona puede tener muchas discontinuidades
    - Las funciones monótonas obedecen el principio del máximo, pero no el teorema del valor intermedio



- Siendo  $a < b$  números reales y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es continua y estrictamente monótonamente creciente, la función  $f$  es una biyección de  $[a, b]$  a  $[f(a), f(b)]$  y la inversa  $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$  también es continua y estrictamente monótonamente creciente
  - Existe una proposición análoga para las funciones estrictamente monótonamente decrecientes
- Se sabe que una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  permanece acotada (y en verdad alcanza su máximo y mínimo, por el principio del máximo). No obstante, si se reemplaza el intervalo cerrado por un intervalo abierto, entonces las funciones continuas no tienen por qué estar acotadas
  - Informalmente hablando, el problema es que mientras la función es continua en cualquier punto dentro del intervalo abierto, esta se vuelve cada vez menos continua cuando uno se acerca a algún extremo que sea una discontinuidad
    - Un ejemplo claro es el de la función  $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) \equiv 1/x$ . Esta función es continua en cada punto de  $(0, 2)$  pero no está acotada por ningún valor (ya que al acercarse a 0 se tiende a infinito)
  - Este fenómeno se puede analizar de manera más formal a través de la definición formal de la continuidad
    - Se sabe que si  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $x_0$ , entonces para toda  $\varepsilon > 0$  debe existir un  $\delta$  tal que  $f(x)$  esté  $\varepsilon$ -cerca de  $f(x_0)$  cuando  $x \in X$  esté  $\delta$ -cerca de  $x_0$  (implicación de la continuidad de la función). En otras palabras, se puede forzar  $f(x)$  a estar  $\varepsilon$ -cerca de  $f(x_0)$  si se asegura que  $x$  está  $\delta$ -cerca de  $x_0$  para alguna  $\delta > 0$
    - Una manera de interpretar este hecho es ver que alrededor de cada punto  $x_0$  existe una isla de estabilidad  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  donde la función  $f(x)$  no se va a más de una distancia de  $\varepsilon$  de  $f(x_0)$
  - Justamente para la función  $f(x) = 1/x$ , es posible ver cómo es necesario un valor de  $\delta$  más bajo cuando se está cerca de 0, haciendo que la isla de estabilidad  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  sea más pequeña que para otros valores

$$x_0 = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{11} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{11} \quad \& \quad \frac{11}{12} < \frac{1}{x} < \frac{11}{10}$$

$$x_0 = 0.1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{1010} \Rightarrow |x - 0.1| < \frac{1}{1010} \quad \& \quad 9.901 < \frac{1}{x} < 10.1$$

- No obstante, otras funciones continuas no exhiben este comportamiento, de modo que la  $\delta$  no cambia para ningún valor dentro del intervalo abierto (para cualquier  $x_0$ ). En esta situación, se dice que la función es uniformemente continua
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  es uniformemente continua si, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  y  $f(x_0)$  estén  $\varepsilon$ -cerca cuando dos puntos de  $x, x_0 \in X$  que están  $\delta$ -cerca

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ when } |x - x_0| < \delta \text{ for } \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{where } x, x_0 \in X$$

- Esta definición se debe comparar con la noción de continuidad: se sabe que la función  $f$  es continua si para toda  $\varepsilon > 0$  y toda  $x_0 \in X$  existe una  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  y  $f(x_0)$  estén  $\varepsilon$ -cerca cuando  $x \in X$  esté  $\delta$ -cerca de  $x_0$ . La diferencia entre la continuidad uniforme y la continuidad común es que la continuidad uniforme puede tomar un solo valor  $\delta$  que funcione para toda  $x_0 \in X$ , mientras que para la continuidad ordinaria se podrían usar  $\delta$  diferentes
- Por lo tanto, una función uniformemente continua es una función continua, pero lo converso es falso. En los ejemplos, la función  $f(x) = 1/x$  es continua pero no uniformemente continua, mientras que  $g(x) = 2x$  es uniformemente continua
- Las nociones de puntos adherentes y de funciones continuas tienen varias formulaciones equivalentes, tanto de manera formal (con  $\delta$  y  $\varepsilon$ ) y de manera secuencial (involucrando la convergencia de secuencias). El concepto de continuidad uniforme puede ser expresada de manera similar con una formulación secuencial, esta vez utilizando el concepto de secuencias equivalentes
  - Siendo  $m$  un entero,  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  dos secuencias de números reales y  $\varepsilon > 0$ , se dice que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  sí, y solo si,  $a_n$  está  $\varepsilon$ -cerca de  $b_n$  para toda  $n \geq m$
  - Se dice que  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  está eventualmente  $\varepsilon$ -cerca a  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  sí, y solo si, existe una  $N \geq m$  tal que las secuencias  $(a_n)_{n=N}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=N}^{\infty}$  estén  $\varepsilon$ -cerca
  - Dos secuencias  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  son equivalentes sí, y solo si, para cada  $\varepsilon > 0$ , las secuencias  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  están eventualmente  $\varepsilon$ -cerca

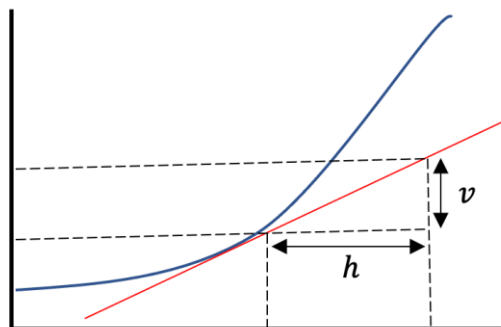
- La cantidad  $\varepsilon$  puede ser un número racional o real sin diferencia alguna
- La noción de equivalencia se puede expresar de una manera más precisa utilizando el lenguaje de los límites
  - Siendo  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  secuencias de números reales (no necesariamente acotadas o convergentes), entonces  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  son equivalentes sí, y solo si,  $(a_n - b_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$
- Mientras tanto, la noción de continuidad uniforme se puede expresar usando secuencias equivalentes
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , y siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, entonces las siguientes dos proposiciones son lógicamente equivalentes:
    - (a)  *$f$  is uniformly continuous on  $X$*
    - (b) *Whenever  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  and  $(y_n)_{n=0}^{\infty}$  are two equivalent sequences consisting of elements of  $X$ , the sequences  $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$  and  $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$  are also equivalent*
- Hasta ahora se ha discutido el significado de que una función tenga un límite cuando  $x \rightarrow x_0$  siempre que  $x_0$  sea un número real, pero no se ha discutido que ocurre si  $x_0 = \pm\infty$ 
  - Primero es necesario una noción de lo que significa que  $\infty$  o  $-\infty$  sea un punto adherente a un conjunto
    - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , se dice que  $+\infty$  es adherente a  $X$  si, y solo si, para toda  $M \in \mathbb{R}$  existe una  $x \in X$  tal que  $x > M$ , mientras que  $-\infty$  es adherente a  $X$  si, y solo si, para toda  $M \in \mathbb{R}$  existe una  $x \in X$  tal que  $x < M$
    - En otras palabras  $+\infty$  es adherente si, y solo si,  $X$  no tiene una cota superior, y  $-\infty$  es adherente si, y solo si,  $X$  no tiene una cota inferior. Por lo tanto, un conjunto está acotado si, y solo si,  $\pm\infty$  no son puntos adherentes de este
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  con  $+\infty$  como punto adherente y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f(x)$  converge a  $L$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  en  $X$ , denotado por  $\lim_{x \rightarrow +\infty; x \in X} f(x) = L$ , si, y solo si, para toda  $\varepsilon > 0$  existe una  $M$  tal que  $f$  esté  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  en  $X \cap (M, +\infty)$ . Del mismo modo, se dice que  $f(x)$  converge a  $L$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  en  $X$ , denotado por  $\lim_{x \rightarrow -\infty; x \in X} f(x) = L$ , si, y solo si, para toda  $\varepsilon > 0$  existe una  $M$  tal que  $f$  esté  $\varepsilon$ -cerca de  $L$  en  $X \cap (-\infty, M)$

- En otras palabras,  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  si, y solo si,  $|f(x) - L| \leq \varepsilon$  para toda  $x \in X$  tal que  $x > M$ , y  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  si, y solo si,  $|f(x) - L| \leq \varepsilon$  para toda  $x \in X$  tal que  $x < M$
- La mayoría de cosas que se hacía con límites en otros puntos  $x_0$  se pueden seguir haciendo con límites infinitos
- Todas las leyes de los límites se mantienen para los límites infinitos, dado que esta definición es consistente con la noción de límite de una secuencia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty; n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

## La diferenciabilidad de funciones

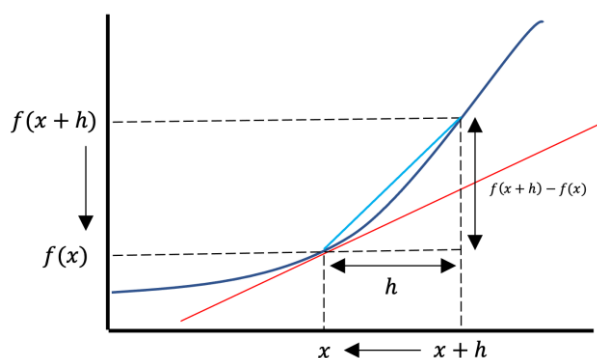
- Habiendo considerado lo que significa que una función sea continua, se puede entender el concepto de diferenciabilidad de una función con razonamientos geométricos
  - La idea básica es que, para una función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $X \subseteq \mathbb{R}$ , se quiere estudiar cual es el gradiente del gráfico de una función o la pendiente de una línea tangente al gráfico
  - La pendiente de una tangente se define como la *ratio* entre la distancia vertical entre dos puntos de la tangente y la distancia horizontal entre esos mismos



$$\text{tangent slope} = \frac{v}{h}$$

- En la práctica, no siempre se puede saber la distancia vertical y horizontal entre ambos puntos, de modo que se puede aproximar su pendiente a través de la pendiente de una secante entre dos puntos de la función  $f$ . En este caso, la pendiente de la secante si se puede saber con exactitud y se puede aproximar a la de la tangente si la

distancia entre los puntos se reduce cada vez más ( $h \rightarrow 0$ ) dado que cuando se está muy cerca del punto  $x$  (sin ser igual a él), la pendiente de la secante será casi la misma que la de la tangente



$$\text{chord slope} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow \frac{v}{h} \text{ as } h \rightarrow 0$$

- Una función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $X \subseteq \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $a$  si está definida en todos los puntos en la vecindad de  $x = a$  y la pendiente de la secante entre los puntos  $(a, f(a))$  y  $(a+h, f(a+h))$  tiende a un límite finito  $f'(a)$  cuando  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

- El valor del límite finito se llama derivada de  $f$  en  $a$ , denotado por  $f'(a)$ , que es el valor al que se aproxima la pendiente de la tangente cuando la distancia horizontal tiende a 0. De este modo, una función es diferenciable si tiene una derivada
- Una expresión equivalente para la pendiente de la secante nace del hecho de que  $h$  es la diferencia entre un valor  $x$  y un valor  $a$ . Esta expresión equivalente es mucho más útil a la hora de demostrar propiedades

If  $h = x - a$  then

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{x-a \rightarrow 0} \frac{f(a+x-a) - f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

- En este punto es posible tratar la noción de derivada y su definición usando límites y de manera más rigurosa, no siendo necesario trabajar con axiomas geométricos y se puede extender a más variables y a vectores

- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un elemento de  $X$  que también es un punto límite de  $X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se puede definir lo siguiente:

- Si el siguiente límite converge a algún número real  $L$ , entonces se dice que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  sobre  $X$  con la derivada  $L$ , denotándose como  $f'(x_0) \equiv L$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Si el límite no existe, o si  $x_0$  no es un elemento de  $X$  o no es un punto límite de  $X$ , no se define  $f'(x_0)$  y se dice que  $f$  no es diferenciable en  $x_0$  sobre  $X$
- Como  $x \in X - \{x_0\}$ ,  $x - x_0 \neq 0$  y por tanto no se divide entre cero ni se anulan los resultados de esta resta
- A veces se puede utilizar  $\frac{df}{dx}$  en vez de  $f'$ , aunque no se suele utilizar debido a que puede llevar a confusiones
- El dominio de la función derivada nunca pueda ser más grande que el de  $f$ , por lo que el dominio de  $f'$  es un subconjunto del dominio de  $f$ . Esto ocurre porque, si la función  $f$  es diferenciable en todo su dominio, está definida para todos los valores de  $X$  (al tener que ser continua), por lo que la derivada no puede tener un valor que no esté definido previamente para la función  $f$  porque si no, no se podría diferenciar en ese punto

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ where } X \subseteq \mathbb{R} \text{ \& } f': X' \rightarrow \mathbb{R} \text{ when } X' \subseteq \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow X' \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$$

- Es necesario que  $x_0$  sea un punto límite con tal de que  $x_0$  sea adherente a  $X - \{x_0\}$ , ya que de otro modo el límite estaría automáticamente indefinido
- En particular, no se define la derivada de una función en un punto aislado (un punto singular que se incluye como unión a un conjunto, por ejemplo)

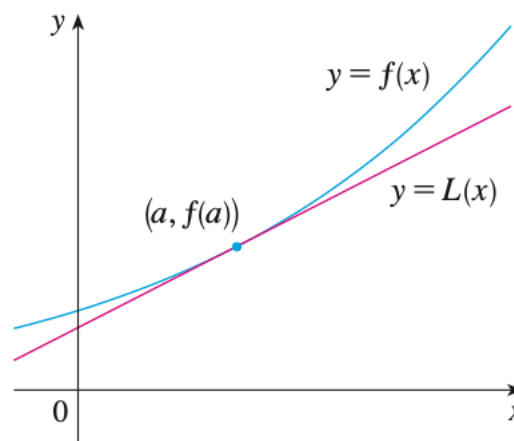
$$X \equiv [1,2] \cup \{3\}$$

- En la práctica, el dominio  $X$  casi siempre será un intervalo, el modo que todos los elementos  $x_0$  de  $X$  son puntos límite automáticamente y no se necesita tener en cuenta estos detalles
- Si  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $x_0$ , y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  es igual a  $f$  ( $f(x) = g(x)$  for  $\forall x \in X$ ), entonces  $g$  también es diferenciable en  $x_0$  y  $g'(x_0) = f'(x_0)$ 
  - No obstante, si dos funciones  $f$  y  $g$  tienen el mismo valor en  $x_0$  ( $f(x_0) = g(x_0)$ ), esto no implica que  $g'(x_0) = f'(x_0)$ . Por lo tanto, hay una gran diferencia entre dos funciones sean iguales en todo su dominio, y que sean iguales en un punto
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $L$  un número real, las siguientes proposiciones son equivalentes: la función  $f$  es diferenciable en  $x_0$  sobre  $X$  con derivada  $L$  y para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  está  $\varepsilon|x - x_0|$ -cerca de  $f(x_0) + L(x - x_0)$  cuando  $x \in X$  está  $\delta$ -cerca a  $x_0$

$$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon|x - x_0|$$

when  $x \in X$  and  $|x - x_0| \leq \delta$

- Este teorema expresa que cuando una función es diferenciable en  $x_0$ , entonces es aproximadamente lineal cerca de  $x_0$ . De manera más informal, si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces se puede aproximar  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , y de manera conversas
- Geométricamente, esto significa que se puede hacer una línea tangente al punto  $(x_0, f(x_0))$  con tal de obtener los valores de  $f(x)$  cuando  $x$  está cerca de  $x_0$



- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces  $f$  es continua

- Aunque una función continua puede no ser diferenciable en un punto, si una función es diferenciable en un punto, entonces esta es continua
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es diferenciable en  $x_0$ , entonces  $f$  también es continua en  $x_0$
- Las propiedades básicas de las derivadas se pueden mostrar con el siguiente teorema. Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones, se cumplen las siguientes propiedades:

- Si  $f$  es una función constante (existe un número real  $c$  tal que  $f(x) = c$  para toda  $x \in X$ ), entonces  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f'(x_0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

- Si  $f$  es una función identidad ( $f(x) = x$  para toda  $x \in X$ ), entonces  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f'(x_0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

- Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x_0$ , entonces  $f \pm g$  también es diferenciable en  $x_0$  y  $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{[f(x) - f(x_0)] \pm [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

- Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x_0$ , entonces  $fg$  también es diferenciable en  $x_0$  y  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&+ f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

- Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $c$  es un número real, entonces  $cf$  es también diferenciable en  $x_0$  y  $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\
&= cf'(x_0)
\end{aligned}$$

- Si  $g$  es diferenciable en  $x_0$  y  $g$  no es cero en  $X$  ( $g(x) \neq 0$  para toda  $x \in X$ ), entonces  $1/g$  es también diferenciable en  $x_0$  y  $(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g^2(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} - \frac{\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

- Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x_0$  y  $g$  no es cero en  $X$  ( $g(x) \neq 0$  para toda  $x \in X$ ), entonces  $f/g$  también es diferenciable en  $x_0$  y  $(f/g)'(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)]/g^2(x_0)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x)g(x_0) + f(x)g(x) - f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \left(\frac{1}{g^2(x_0)}\right) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{-f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \left(\frac{1}{g^2(x_0)}\right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

- Siendo  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$  puntos límite de  $X$  e  $Y$  (respectivamente) y  $f: X \rightarrow Y$  una función tal que  $f(x_0) = y_0$  y diferenciable en  $x_0$ . Si  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que es diferenciable en  $y_0$ , entonces la función  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $x_0$  y su derivada es  $g'(y_0)f'(x_0)$

- La demostración de este teorema se basa en los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

- Aunque con la notación de Leibniz la regla de la cadena es visualmente más atractiva, la notación puede llevar a confusiones debido a que las cantidades  $dz$ ,  $dy$  y  $dx$  se tratan como si fueran números reales, aunque no se ha asignado un significado a estas. No obstante, se puede interpretar como números reales infinitesimales con el uso de otros conceptos (para tratar de manera rigurosa)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

- Las derivadas más comunes se encuentran resumidas en las siguientes tablas:

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(cx) = c$	$\frac{d}{dx}(x^c) = cx^{c-1}$
$\frac{d}{dx}(c^x) = c^x \ln(c) \quad c > 0$	$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \ln x)$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^3}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$	$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) = \frac{-1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n+1}}}$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad x > 0$	$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln x) = \ln x + 1$	$\frac{d}{dx}(\log_c x) = \frac{1}{x \ln c} \quad c > 0 \quad c \neq 1$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x \cdot \ln x}\right) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \cdot \ln x)^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\log_c x}\right) = \frac{-1}{x \cdot \ln c \cdot (\log_c x)^2}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{-1}{(x+1)^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{-2}{(x+1)^3}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^n}\right) = \frac{-n}{(x+1)^{n+1}}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\right) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^4}}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x+1}}\right) = \frac{-1}{n \cdot \sqrt[n]{(x+1)^{n+1}}}$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad  x  < 1$	$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad  x  < 1$	$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad  x  < 1$
$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad  x  < 1$
$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad  x  > 1$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$
$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad  x  > 1$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

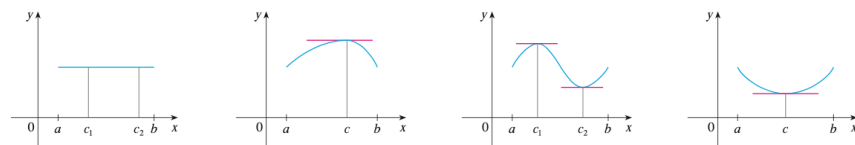
- Estas derivadas se pueden obtener a través de las propiedades de los límites cuando se aplica la definición de derivada
- Una de las aplicaciones más comunes de las derivadas es encontrar los máximos y los mínimos de una función
  - Siendo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in X$ , se dice que  $f$  alcanza un máximo local si, y solo si, existe una  $\delta > 0$  tal que la restricción  $f|_{X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$  de  $f$  a  $X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  alcanza un máximo en  $x_0$ , y se dice que  $f$  alcanza un mínimo local si, y solo si, existe una  $\delta > 0$  tal que la restricción  $f|_{X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$  de  $f$  a  $X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  alcanza un mínimo en  $x_0$
  - Si  $f$  alcanza un máximo o mínimo en  $x_0$ , a veces se dice que  $f$  alcanza un máximo o mínimo global en  $x_0$  con tal de distinguir este del máximo o mínimo local. Sin embargo, si  $f$  alcanza un máximo o mínimo global en  $x_0$ , entonces también alcanza un máximo o mínimo local en  $x_0$

$$f(x) \equiv 3x^2 - 4$$

$$\text{global min. at } 0 : f(0) = -4 > f(x) \text{ for } x \in X - \{0\}$$

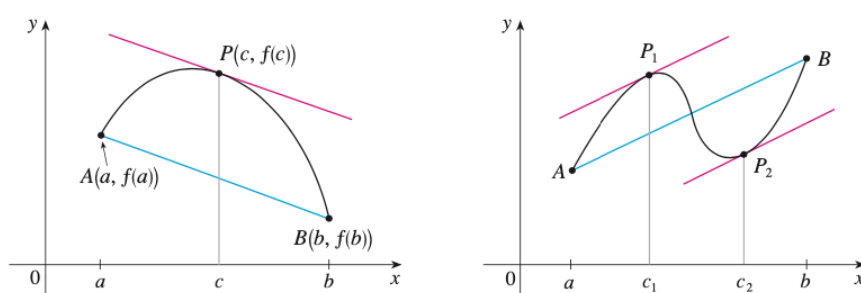
$$\text{local min. at } 0 : f(0) = -4 > f(x) \text{ for } \delta \equiv 1 \text{ and } x \in (-1, 1)$$

- Si  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un máximo o mínimo local en un punto  $x_0$  en  $X$  y  $Y \subset X$  es un subconjunto de  $X$  que contiene  $x_0$ , entonces la restricción  $f|_Y: Y \rightarrow \mathbb{R}$  también alcanza un mínimo local en  $x_0$
- Siendo  $a < b$  números reales y  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función, si  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f$  alcanza un máximo o mínimo local en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ 
  - En este caso,  $f$  tiene que ser diferenciable para que esta proposición funcione y no funciona con un intervalo cerrado  $[a, b]$ , dado que los extremos de un intervalo pueden ser un mínimo o máximo local sin que la derivada tenga que ser cero (por ejemplo, si  $f(x) \equiv x$ )
- Siendo  $a < b$  números reales y  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es diferenciable en  $(a, b)$ , si  $g(a) = g(b)$ , entonces existe una  $x \in (a, b)$  tal que  $g'(x) = 0$ 
  - Este teorema se denomina teorema de Rolle, y surge de combinar la proposición anterior con el principio de los máximos
  - El sentido geométrico de este teorema es que, para funciones continuas y diferenciables en un intervalo, si la imagen de la función en los extremos del intervalo es la misma, necesariamente la función debe de tener un punto estacionario. Esto ocurre porque, si  $f(a) = f(b)$ , entonces las imágenes están en el mismo nivel del eje de ordenadas, y como se tiene que pasar necesariamente por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ , los puntos de la función tendrán que “dirigirse” hacia estos, lo cual implica que la función cambia su dirección en algún punto (haciendo que haya un punto estacionario en el proceso) o que, si no lo cambia, es porque la función es una constante y cada punto es uno estacionario



- Solo se asume que  $g$  es diferenciable en el intervalo  $(a, b)$ , aunque el teorema también se mantiene si se asume que la función es diferenciable en  $[a, b]$  (dado que es mayor que el intervalo abierto)
- A partir de este teorema, es posible obtener el siguiente corolario: siendo  $a < b$  números reales y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe una  $x \in (a, b)$  tal que 
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- El sentido geométrico de este corolario reside en que, para funciones continuas y diferenciables en un intervalo, debe haber algún punto en el que la pendiente de la tangente en este sea igual a la pendiente de la recta secante entre  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ . Esto ocurre porque, como se tiene que pasar necesariamente por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ , y en algún momento la función debe de “dirigirse” a estos puntos, el crecimiento de la función debe “adaptarse” de modo que se lleguen a ambos puntos, y esta “adaptación” se puede interpretar como pasar por el valor medio entre los puntos (definido como la pendiente de la secante, por lo que se llama teorema del valor medio)



- Este corolario se puede utilizar para demostrar desigualdades entre funciones con la misma variable real  $x$  y un mismo dominio o intervalo en el cual son continuas y diferenciables (sin tener en cuenta los extremos de los intervalos para la diferenciable). A partir de la equivalencia establecida por el teorema del valor medio para una función, se puede establecer una desigualdad entre las derivadas para valores del dominio o intervalo y reescribir la desigualdad a partir de la equivalencia anterior

Show  $\ln(1+x) < x$  for  $x > 0$ :

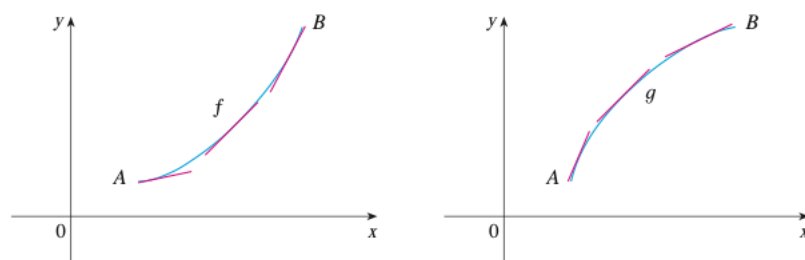
Use MVT in any  $[a, b]$  with  $0 < a < b \Rightarrow \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{1}{c}$  where  $c \in (a, b)$

$$\text{As } 0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

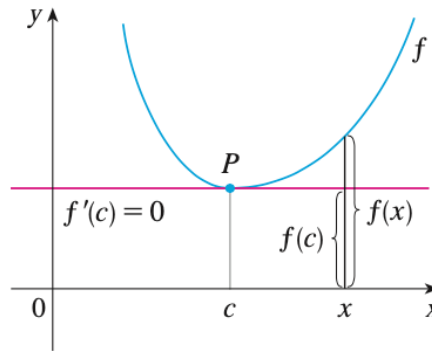
$$\text{Set } a = 1 \text{ and } b = 1 + x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \Rightarrow \ln(1+x) < x$$

- El crecimiento de una función guarda relación con las derivadas de esta, de modo que se pueden definir proposiciones precisas para poder estudiar el crecimiento de las funciones
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, si  $f$  es monótonamente creciente y  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) \geq 0$ , mientras que si es monótonamente decreciente y  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) \leq 0$

- Se asume que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  porque hay funciones monótonas que no siempre son diferenciables, por lo que no se podría concluir si  $f'(x_0) \geq 0$  o  $f'(x_0) \leq 0$
  - Aunque una función sea estrictamente monótona, derivada en  $x_0$  no tiene por qué ser estrictamente positiva o negativa. No obstante, se tiene un resultado converso
- Siendo  $a < b$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, se pueden dar los siguientes tres casos:
- Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x \in [a, b]$ , entonces  $f$  es una función estrictamente monótonamente creciente
  - Si  $f'(x) < 0$  para toda  $x \in [a, b]$ , entonces  $f$  es una función estrictamente monótonamente decreciente
  - Si  $f'(x) = 0$  para toda  $x \in [a, b]$ , entonces  $f$  es una función constante
- Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, si  $f''(x) > 0$  para toda  $x \in X$ , entonces el gráfico de  $f$  es convexo, mientras que si  $f''(x) < 0$  para toda  $x \in X$ , entonces el gráfico de  $f$  es cóncavo
- Geométricamente, un gráfico de una función  $f$  es convexo en  $X$  si está por encima de todas sus tangentes en  $X$ , mientras que es cóncavo en  $X$  si está por debajo de todas sus tangentes en  $X$



- A partir de esta interpretación geométrica y de la definición, se puede ver que, suponiendo que  $f''(x)$  es continua en  $x_0$ , si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) > 0$ , entonces la función tiene un mínimo local en  $x_0$ , mientras que si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) < 0$ , entonces la función tiene un máximo local en  $c$



- Hay muchas aplicaciones y casos en los que es necesario estudiar la diferenciabilidad de la inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  de una función  $f: X \rightarrow Y$ 
  - Siendo  $f: X \rightarrow Y$  una función invertible con inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  y suponiendo que  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$  son tal que  $y_0 = f(x_0)$  (de modo que  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ ), si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f^{-1}$  es diferenciable en  $y_0$ , la derivada de  $f^{-1}$  en  $y_0$  es el recíproco de  $f'(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- La demostración de este lema se hace mediante la regla de la cadena:

$$(f^{-1} \circ f)(x_0) = x_0 \Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$$

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(y_0)f'(x_0) \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Un corolario de este lema es que, si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f'(x_0) = 0$ , entonces  $f^{-1}$  no puede ser diferenciable en  $y_0 = f(x_0)$  porque no está definida. Esto responde a como diferenciar una función inversa asumiendo que es diferenciable *a priori*, pero no se puede usar el lema si no se sabe antes
- Siendo  $f: X \rightarrow Y$  una función invertible con inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  y suponiendo que  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$  son tal que  $y_0 = f(x_0)$  (de modo que  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ ), si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  y  $f^{-1}$  es continua en  $y_0$ , la derivada de  $f^{-1}$  en  $y_0$  es el recíproco de  $f'(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- La demostración de este teorema se realiza a través de secuencias y límites de las secuencias:

$$x_n \equiv f^{-1}(y_n) \text{ (sequence of elem. in } X - \{x_0\})$$



$$\Rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0 \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ as } f^{-1} \text{ is continuous}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Este teorema es una versión mejorada del lema anterior, que compensa el hecho de tener que saber si la función  $f^{-1}$  es diferenciable *a priori* a través de relajar la necesidad de diferenciabilidad a la de continuidad
- Una de las proposiciones más importantes en la diferenciabilidad de funciones es la regla de l'Hôpital, la cual permite lidiar con límites de cocientes a través de las derivadas
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y  $x_0 \in X$  un punto límite de  $X$ , y suponiendo que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  y que  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x_0$  pero  $g'(x_0) \neq 0$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que  $g'(x_0) \neq 0$  para toda  $x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}$  y se da el siguiente resultado:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

- La demostración de esta proposición proviene de la definición de derivada:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

- La presencia de  $\delta$  se debe a que  $g(x)$  se puede desvanecer en algunos puntos a parte de  $x_0$ , lo que implicaría que el cociente no estuviera necesariamente definido para todos los puntos en  $X - \{x_0\}$
- Siendo  $a < b$  números reales,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en  $[a, b]$ , y suponiendo que  $f(a) = g(a) = 0$ , que  $g'$  no es cero en  $[a, b]$  y que  $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} f'(x)/g'(x)$  existe y es igual a  $L$ , entonces  $g(x) \neq 0$  para cualquier  $x \in (a, b]$  y el límite  $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} f(x)/g(x)$  existe y es igual a  $L$

$$\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

- Esta proposición es una versión más sofisticada de la regla de l'Hôpital que solo considera los límites a la derecha de  $a$ , aunque se puede derivar otra proposición para los límites a la izquierda de  $a$  o cerca de ambos lados de  $a$
- Si al usar la versión menos general de la regla de l'Hôpital se obtiene una indeterminación del tipo  $0/0$ , se puede aplicar la segunda versión de manera iterada hasta no obtener indeterminaciones siempre que los límites existan

$$\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si los límites no existen para derivadas de un orden mayor a  $n$ , entonces solo se puede aplicar la regla de l'Hôpital hasta la derivada de orden  $n$
- Cuando un límite resulta en una indeterminación del tipo  $\infty/\infty$  cuando  $x \rightarrow a$ , se puede utilizar la segunda versión regla de l'Hôpital para poder resolver la indeterminación si se cumplen las suposiciones del teorema

$$\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si las suposiciones no se cumplen, se tienen que utilizar métodos alternativos para poder resolver la indeterminación
- Cuando un límite resulta en una indeterminación del tipo exponencial ( $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ , etc.) cuando  $x \rightarrow a$ , se pueden utilizar logaritmos para simplificar la expresión y usar la regla de l'Hôpital para poder resolver la indeterminación si se cumplen las suposiciones del teorema

$$\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} f(x)^{\frac{1}{g(x)}} = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{\ln(f(x))}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{1}{g'(x)}$$

- Si las suposiciones no se cumplen, se tienen que utilizar métodos alternativos para poder resolver la indeterminación
- La regla de l'Hôpital también permite calcular límites infinitos para cocientes de funciones de una manera más simple (si se cumplen las suposiciones de los teoremas)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{or } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x)/t^2}{g'(x)/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si las suposiciones no se cumplen, se tienen que utilizar métodos alternativos para poder resolver el límite

## La integral de Riemann

- Antes de introducir el concepto de integral, es necesario describir como uno puede hacer una partición de un intervalo grande en intervalos más pequeños, restringido a intervalos acotados la mayor parte del tiempo
  - Siendo  $x$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , se dice que  $X$  está conectado si, y solo si, cuando  $x, y \in X$  tal que  $x < y$ , el intervalo acotado  $[x, y]$  es un subconjunto de  $X$  (cualquier elemento entre  $x$  e  $y$  está en  $X$ )
    - El intervalo vacío está conectado y un intervalo con un único elemento también
    - Si  $X$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , entonces las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:  $X$  está acotado y conectado, y  $X$  es un intervalo acotado
    - Si  $I$  y  $J$  son intervalos acotados, entonces la intersección  $I \cap J$  también es un intervalo acotado (gracias a que el conjunto contiene los elementos coincidentes entre  $I$  y  $J$ , y si no hay, es  $\emptyset$ )
  - A partir del concepto de longitud de un intervalo y de partición, es posible desarrollar propiedades útiles de la longitud y otros conceptos relacionados con las particiones

- Si  $I$  es un intervalo acotado, se define la longitud de  $I$ , denotada por  $|I|$  de la siguiente manera: si  $I$  es un intervalo  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  o  $(a, b]$  para números reales  $a < b$ , entonces se define  $|I| \equiv b - a$ , y si  $I$  es un punto o el conjunto vacío, se define  $|I| \equiv 0$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado, una partición  $\mathbf{P}$  de un intervalo  $I$  es un conjunto finito  $\mathbf{P}$  de intervalos acotados contenidos en  $I$ , de modo que cualquier  $x \in I$  está en solamente uno de los intervalos  $J$  de  $\mathbf{P}$

$$I = [a, b] \Rightarrow \mathbf{P} = \{\{a\}, (a, b), \{b\}, \emptyset\}$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $n$  un número natural y  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$  de cardinalidad  $n$ , entonces  $|I| = \sum_{J \in \mathbf{P}} |J|$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  dos particiones de  $I$ , se dice que  $\mathbf{P}'$  es más fino que  $\mathbf{P}$  (o que  $\mathbf{P}$  es más grueso que  $\mathbf{P}'$ ) si para toda  $J$  en  $\mathbf{P}'$  existe una  $K$  en  $\mathbf{P}$  tal que  $J \subseteq K$

$$\mathbf{P} = \{\{a\}, (a, b), \{b\}, \emptyset\} \quad \mathbf{P}' = \{[a, b), \{b\}, \emptyset\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} \text{ is finer than } \mathbf{P}'$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado y siendo  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  dos particiones de  $I$ , se define el refinamiento común  $\mathbf{P} \# \mathbf{P}'$  de  $\mathbf{P}$  y de  $\mathbf{P}'$  como el conjunto  $\mathbf{P} \# \mathbf{P}' \equiv \{K \cap J : K \in \mathbf{P} \text{ y } J \in \mathbf{P}'\}$ . Para poder saber qué subconjuntos incluir, se encuentra la intersección de cada subconjunto uno por uno

$$\mathbf{P} = \{\{a\}, (a, b), \{b\}, \emptyset\} \quad \mathbf{P}' = \{[a, b), \{b\}, \emptyset\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} \# \mathbf{P}' = \{\{a\}, (a, b), \{b\}, \emptyset\}$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado, y siendo  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  dos particiones de  $I$ ,  $\mathbf{P} \# \mathbf{P}'$  es también una partición de  $I$  y es más fina que  $\mathbf{P}$  y que  $\mathbf{P}'$
- Una vez se ha visto la noción de partición, es posible utilizarlo para describir una clase de funciones simples: las funciones constantes por partes
  - Siendo  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que una función es constante si, y solo si, existe un número real  $c$  tal que  $f(x) = c$  para toda  $x \in X$ 
    - Si  $E$  es un subconjunto de  $X$ , se dice que  $f$  es constante en  $E$  si la restricción  $f|_E$  de  $f$  a  $E$  es constante ( $f(x) = c$  para toda  $x \in E$ ). El número  $c$  se conoce como el valor constante de  $f$  en  $E$

- Si  $E$  es un conjunto no vacío, la función  $f$  que es constante en  $E$  solo puede tener un único valor constante. No obstante, si  $E$  es el conjunto vacío  $c$  es un valor constante de  $f$  en  $E$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$ , se dice que  $f$  es una función constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$  si para todo  $J \in \mathbf{P}$ ,  $f$  es constante en  $J$

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if } J_1 \\ b & \text{if } J_2 \\ c & \text{if } J_3 \\ \dots & \end{cases}$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $f$  es una función constante por partes con respecto a  $I$  si existe una partición  $\mathbf{P}$  de  $I$  tal que  $f$  es una función constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$ , si  $\mathbf{P}'$  es una partición de  $I$  más fina que  $\mathbf{P}$ , entonces  $f$  es también constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}'$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones constantes por partes en  $I$ , las funciones  $f \pm g$ ,  $fg$ ,  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$ . Si  $g(x) \neq 0$  para toda  $x \in I$ , entonces  $f/g$  es también una función constante por partes en  $I$
- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$ , se define la integral constante por partes  $p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f \equiv \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J|$ , donde para cada  $J$  en  $\mathbf{P}$ ,  $c_J$  es el valor constante de  $f$  en  $J$

$$p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f \equiv \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J|$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{if } x = 3 \\ 6 & \text{if } 3 < x \leq 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f &= c_{[1,3)} |[1, 3)| + c_{\{3\}} |\{3\}| + c_{(3,4]} |(3, 4]| \\ &= 2 \times 2 + 4 \times 0 + 6 \times 1 \\ &= 10. \end{aligned}$$

- Esta definición parece tener problemas debido a que si  $J$  es vacío entonces  $c_J$  puede ser el valor constante de  $f$  en  $J$ , pero como  $|J| = 0$  cuando  $J$  es vacío y  $c_J$  es irrelevante. Debido a que  $\mathbf{P}$  es finito, la suma  $\sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J|$  siempre está bien definida (no es divergente o infinita)

- Esta integral corresponde intuitivamente a la noción del área de un rectángulo, dado que se multiplican las longitudes de sus lados (si  $f$  es negativa, entonces el área  $c_J|J|$  es negativa también)
- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función, y suponiendo que  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  son particiones de  $I$  tal que  $f$  es constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$  y con respecto a  $\mathbf{P}'$ , se puede ver que  $p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f = p.c. \int_{[\mathbf{P}']} f$ 
  - Esto ocurre por como se define la longitud de un intervalo y las implicaciones que eso tiene para una partición
  - Esto permite definir una integral constante por partes para un intervalo acotado  $I$
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función constante por partes en  $I$ , se define la integral constante por partes  $p.c. \int_I f \equiv \int_{[\mathbf{P}]} f$  cuando  $\mathbf{P}$  es cualquier partición de  $I$  con respecto a la cual  $f$  es constante por partes
- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones constantes por partes en  $I$  se cumplen las siguientes propiedades:

(a) We have  $p.c. \int_I (f + g) = p.c. \int_I f + p.c. \int_I g$ .

(b) For any real number  $c$ , we have  $p.c. \int_I (cf) = c(p.c. \int_I f)$ .

(c) We have  $p.c. \int_I (f - g) = p.c. \int_I f - p.c. \int_I g$ .

(d) If  $f(x) \geq 0$  for all  $x \in I$ , then  $p.c. \int_I f \geq 0$ .

(e) If  $f(x) \geq g(x)$  for all  $x \in I$ , then  $p.c. \int_I f \geq p.c. \int_I g$ .

(f) If  $f$  is the constant function  $f(x) = c$  for all  $x$  in  $I$ , then  $p.c. \int_I f = c|I|$ .

(g) Let  $J$  be a bounded interval containing  $I$  (i.e.,  $I \subseteq J$ ), and let  $F: J \rightarrow \mathbf{R}$  be the function

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

Then  $F$  is piecewise constant on  $J$ , and  $p.c. \int_J F = p.c. \int_I f$ .

- (h) Suppose that  $\{J, K\}$  is a partition of  $I$  into two intervals  $J$  and  $K$ . Then the functions  $f|_J: J \rightarrow \mathbf{R}$  and  $f|_K: K \rightarrow \mathbf{R}$  are piecewise constant on  $J$  and  $K$  respectively, and we have

$$p.c. \int_I f = p.c. \int_J f|_J + p.c. \int_K f|_K.$$

- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definida en un intervalo acotado  $I$ , se quiere definir la integral de Riemann  $\int_I f$ , pero es necesario definir la noción de integrales de Riemann superiores e inferiores
  - Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $g$  mayoriza  $f$  en  $I$  si  $g(x) \geq f(x)$  para toda  $x \in I$ , y se dice que  $g$  minoriza  $f$  en  $I$  si  $g(x) \leq f(x)$  para toda  $x \in I$ 
    - La integral de Riemann se basa en intentar integrar una función primero mayorizándola o minorizándola por una función constante por partes (la cual ya se sabe integrar)
  - Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definida en un intervalo acotado  $I$ , se define la integral de Riemann superior  $\overline{\int_I f}$  y la integral de Riemann inferior  $\underline{\int_I f}$  por las siguientes fórmulas:

$$\overline{\int_I f} \equiv \inf \left\{ p.c. \int_I g : g \text{ is p.c. on } I \text{ and majorizes } f \right\}$$

$$\underline{\int_I f} \equiv \sup \left\{ p.c. \int_I g : g \text{ is p.c. on } I \text{ and minorizes } f \right\}$$

- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función en un intervalo acotado  $I$  que está acotada por un número real  $M$  ( $-M \leq f(x) \leq M$  para toda  $x \in I$ ), se cumple la siguiente desigualdad:

$$-M|I| \leq \underline{\int_I f} \leq \overline{\int_I f} \leq M|I|$$

- La función  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = M$  es constante (por tanto, es también constante por partes) y mayoriza  $f$ . Con un argumento similar para una función  $h$  que minoriza  $f$ , se pueden obtener las siguientes desigualdades:

$$\overline{\int_I f} \leq p.c. \int_I g = M|I| \quad -M|I| = p.c. \int_I h \leq \underline{\int_I f}$$

- Sabiendo que  $g$  mayoriza  $f$  y  $h$  minoriza  $f$ , entonces  $g$  mayoriza  $h$ , por lo que tomando la suprema en  $h$  y la ínfima en  $g$ , se obtiene la siguiente desigualdad:

$$p.c. \int_I h \leq p.c. \int_I g \Rightarrow \underline{\int_I f} \leq p.c. \int_I g \Rightarrow \underline{\int_I f} \leq \overline{\int_I f}$$

$$\Rightarrow -M|I| \leq \underline{\int_I f} \leq \overline{\int_I f} \leq M|I|$$

- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definida en un intervalo acotado  $I$ , si  $\underline{\int_I f} = \overline{\int_I f}$ , entonces se dice que  $f$  es integrable en el sentido de Riemann en  $I$  y se define la integral de Riemann como  $\int_I f \equiv \underline{\int_I f} = \overline{\int_I f}$ . Esta integral también se suele llamar integral definida, y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_I f = \int_I f(x) dx$$

- Si la integral de Riemann superior e inferior no coinciden, se dice que  $f$  no es integrable en el sentido de Riemann
- Comparando esta definición con los límites de una secuencia, se puede ver como el límite superior siempre era mayor o igual al inferior, pero que solo eran iguales cuando la secuencia era convergente, y en este caso ambos eran iguales a ese límite de la secuencia
- La integral no se considera para funciones no acotadas, llamadas integrales impropias. Es posible evaluar estas integrales utilizando métodos más sofisticados
- La integral de Riemann es consistente con la integral constante por partes y la reemplaza. Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función constante por partes en un intervalo acotado  $I$ ,  $f$  es integrable en el sentido de Riemann y  $\int_I f = p.c. \int_I f$ 
  - Debido a este lema, la integral constante por partes se deja de utilizar y se usa solo la integral de Riemann
  - Un caso especial de este lema es que si  $I$  es un punto o el conjunto vacío, entonces  $\int_I f = 0$  (dado que  $p.c. \int_I f = 0$  por su definición)
  - Toda función constante por partes es integrable en el sentido de Riemann, pero esta integral es más general y se pueden integrar una mayor parte de funciones
- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en un intervalo  $I$  y  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$ , se define la suma de Riemann superior  $U(f, \mathbf{P})$  y la suma de Riemann inferior  $L(f, \mathbf{P})$  con las siguientes fórmulas:



$$U(f, \mathbf{P}) \equiv \sum_{J \in \mathbf{P}: J \neq \emptyset} \left( \sup_{x \in J} f(x) \right) |J| \quad L(f, \mathbf{P}) \equiv \sum_{J \in \mathbf{P}: J \neq \emptyset} \left( \inf_{x \in J} f(x) \right) |J|$$

- La restricción  $J \neq \emptyset$  es necesaria debido a que las cantidades  $\sup_{x \in J} f(x)$  y  $\inf_{x \in J} f(x)$  serían infinitas (o negativo infinitas) si  $J$  es vacío
- A partir de esta definición es posible conectar las sumas de Riemann a las integrales de Riemann superiores e inferiores

- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en un intervalo  $I$ ,  $g$  una función constante por partes con respecto a alguna partición  $\mathbf{P}$  de  $I$  que mayoriza  $f$  y  $h$  otra función constante por partes con respecto a alguna partición  $\mathbf{P}$  de  $I$  que minoriza  $f$ , se cumplen las siguientes desigualdades:

$$p.c. \int_I g \geq U(f, \mathbf{P}) \quad p.c. \int_I h \leq L(f, \mathbf{P})$$

- Estas desigualdades se dan porque, si  $g$  mayoriza  $f$ , entonces la cota superior mínima de  $f$  es menor o igual a la de  $g$ . Del mismo modo, si  $h$  mayoriza  $f$ , entonces su cota inferior máxima de  $f$  es mayor o igual a la de  $h$
- Siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en un intervalo  $I$ , se cumplen las siguientes igualdades:

$$\overline{\int_I f} = \inf \{ U(f, \mathbf{P}) : \mathbf{P} \text{ is a partition of } I \}$$

$$\underline{\int_I f} = \sup \{ L(f, \mathbf{P}) : \mathbf{P} \text{ is a partition of } I \}$$

• c

- Siendo  $I$  un intervalo acotado, y siendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de integrables en el sentido de Riemann en  $I$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) The function  $f+g$  is Riemann integrable, and we have  $\int_I(f+g) = \int_I f + \int_I g$ .
- (b) For any real number  $c$ , the function  $cf$  is Riemann integrable, and we have  $\int_I(cf) = c(\int_I f)$ .
- (c) The function  $f-g$  is Riemann integrable, and we have  $\int_I(f-g) = \int_I f - \int_I g$ .
- (d) If  $f(x) \geq 0$  for all  $x \in I$ , then  $\int_I f \geq 0$ .
- (e) If  $f(x) \geq g(x)$  for all  $x \in I$ , then  $\int_I f \geq \int_I g$ .
- (f) If  $f$  is the constant function  $f(x) = c$  for all  $x$  in  $I$ , then  $\int_I f = c|I|$ .
- (g) Let  $J$  be a bounded interval containing  $I$  (i.e.,  $I \subseteq J$ ), and let  $F : J \rightarrow \mathbf{R}$  be the function

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

Then  $F$  is Riemann integrable on  $J$ , and  $\int_J F = \int_I f$ .

- (h) Suppose that  $\{J, K\}$  is a partition of  $I$  into two intervals  $J$  and  $K$ . Then the functions  $f|_J : J \rightarrow \mathbf{R}$  and  $f|_K : K \rightarrow \mathbf{R}$  are Riemann integrable on  $J$  and  $K$  respectively, and we have

$$\int_I f = \int_J f|_J + \int_K f|_K.$$

- Normalmente se abrevia  $\int_J f|_J$  como  $\int_J f$ , aunque  $f$  se define en un dominio más largo que solo  $J$
- El teorema anterior sobre las propiedades de la integral de Riemann asegura que la suma, la resta y la multiplicación por una constante preservan la integrabilidad en el sentido de Riemann, aunque hay muchas
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables en el sentido de Riemann, las funciones  $\max(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\min(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como  $\max(f, g) \equiv \max(f(x), g(x))$  y  $\min(f, g) \equiv \min(f(x), g(x))$  también son integrables en el sentido de Riemann
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en el sentido de Riemann, la parte positiva  $f_+ \equiv \max(f, 0)$  y la parte negativa  $f_- \equiv \min(f, 0)$  también son integrables en el sentido de Riemann en  $I$ . De este modo, el valor absoluto  $|f| = f_+ - f_-$  es también integrable en el sentido de Riemann en  $I$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado, si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  son integrables en el sentido de Riemann, entonces  $fg: I \rightarrow \mathbb{R}$  también lo es
- Aunque solo se hayan visto las integrales de Riemann para funciones constantes por partes es posible ver como estas integrales también se puede aplicar a muchas funciones útiles
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f$  una función que es continuamente uniforme en  $I$ ,  $f$  es integrable en el sentido de Riemann

- Asumiendo que el intervalo  $I$  no es un punto o el conjunto vacío (dado que la demostración sería trivial) y que  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad uniforme se sabe que existe una  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  cuando  $x, y \in I$  son tal que  $|x - y| < \delta$ . Además, se puede hacer una partición de  $I$  en  $N$  intervalos  $J_1, J_2, \dots, J_N$  con longitud  $(b - a)/N$

- Como  $\overline{\int_I f} \leq \sum_{k=1}^N \left( \sup_{x \in J_k} f(x) \right) |J_k|$  y  $\underline{\int_I f} \geq \sum_{k=1}^N \left( \inf_{x \in J_k} f(x) \right) |J_k|$  por definición, se puede establecer la siguiente desigualdad:

$$\overline{\int_I f} - \underline{\int_I f} \leq \sum_{k=1}^N \left( \sup_{x \in J_k} f(x) - \inf_{x \in J_k} f(x) \right) |J_k|$$

- No obstante,  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  para toda  $x, y \in J_k$  porque  $|J_k| = (b - a)/N$  y, por el principio de Arquímedes,  $(b - a)/N < \delta$  (existe una  $N$  tal que se cumple esta desigualdad). Por lo tanto, se tiene se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(x) < f(y) + \varepsilon \text{ for all } x, y \in J_k$$

- Tomando la suprema en  $x$  y la ínfima en  $y$ , se puede obtener una desigualdad que permitirá ver como  $\overline{\int_I f} - \underline{\int_I f}$  no es positiva y hará que  $f$  sea integrable (por la acotación de las integrales superiores e inferiores de Riemann y la definición de integración en el sentido de Riemann)

$$f(x) < f(y) + \varepsilon \text{ for all } x, y \in J_k$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in J_k} f(x) < f(y) + \varepsilon \text{ for all } y \in J_k$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in J_k} f(x) < \inf_{y \in J_k} f(y) + \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in J_k} f(x) - \inf_{y \in J_k} f(y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_I f} - \underline{\int_I f} \leq \varepsilon(b-a)$$

- Siendo  $[a, b]$  es un intervalo cerrado y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua,  $f$  es integrable en el sentido de Riemann
  - Este corolario del teorema anterior no es verdad si  $[a, b]$  se sustituye por cualquier otro tipo de intervalo, dado que no se garantizaría que las funciones continuas en estos intervalos están acotadas. Aún así, si se asume que la función es continua y acotado, se puede recuperar la integrabilidad en el sentido de Riemann
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada,  $f$  es integrable en el sentido de Riemann
- Aunque las funciones acotadas y continuas representan una gran clase de funciones, se puede extender la clase un poco más al incluir funciones continuas por partes acotadas
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es una función continua en  $I$  si, y solo si, existe una partición  $\mathbf{P}$  de  $I$  tal que  $f|_J$  es continua en  $J$  para toda  $J \in \mathbf{P}$

$$F(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 7 & \text{if } x = 2 \\ x^3 & \text{if } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua por partes y acotada,  $f$  es una función integrable en el sentido de Riemann
- Siendo  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ 
  - Debido a que existen funciones monótonas que no son continuas por partes, esta proposición no está implícita en la anterior sobre funciones continuas por partes y acotadas
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona y acotada,  $f$  es integrable en el sentido de Riemann en  $I$
- Siendo  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótonamente decreciente que no es negativa ( $f(x) \geq 0$  para toda  $x \geq 0$ ), la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  converge si, y solo si,  $\sup_{N>0} \int_{[0,N]} f$  es finita

- Esto se debe a que existe una relación entre  $\sum_{n=0}^N f(n)$ ,  $\sum_{n=0}^{N-1} f(n)$  y  $\int_{[0,N]} f$  (debido a la definición de integral de Riemann)
- Existe una generalización de la integral de Riemann llamada integral de Riemann-Stieltjes, la cual se define de la misma manera que la integral de Riemann, pero sin tomar la longitud  $|J|$  de los intervalos  $J$ , sino una longitud especial  $\alpha[J]$  de estos
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida para un dominio  $X$  que contenga  $I$ , se define la longitud  $\alpha$ , denotada por  $\alpha[I]$  de la siguiente manera: si  $I$  es un punto o el conjunto vacío  $\alpha[I] = 0$ , pero si  $I$  es otro tipo de intervalo para  $a < b$ , entonces  $\alpha[J] = \alpha(b) - \alpha(a)$ 
    - La longitud  $\alpha$  y la longitud anteriormente definida solo coinciden cuando  $\alpha(x) \equiv x$  debido a la definición de  $\alpha[I]$ , y se puede ver como la noción de longitud anterior es un caso especial de la longitud  $\alpha$
    - A veces se escribe  $\alpha|_a^b$  o  $\alpha(x)|_{x=a}^{x=b}$  en vez de  $\alpha[[a, b]]$  con tal de simplificar la notación
    - Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida para un dominio  $X$  que contenga  $I$  y  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$ , la longitud  $\alpha$  de un intervalo  $I$  es la suma de la longitud  $\alpha$  de los intervalos  $J$  de la partición  $\mathbf{P}$

$$\alpha[I] = \sum_{J \in \mathbf{P}} \alpha[J]$$

- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $\mathbf{P}$  una partición de  $I$ ,  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida para un dominio  $X$  que contenga  $I$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es constante por partes con respecto a  $\mathbf{P}$ , se define la integral constante por partes de Riemann-Stieltjes de la siguiente manera:

$$p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f d\alpha \equiv \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J \alpha[J]$$

- Si  $\alpha(x) \equiv x$ , para un intervalo  $I$ , cualquier partición  $\mathbf{P}$  y cualquier función  $f$  que sea constante por partes para una partición  $\mathbf{P}$ , se cumple la siguiente igualdad:

$$p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f = p.c. \int_{[\mathbf{P}]} f d\alpha$$

- Se puede obtener un análogo a la proposición anteriormente vista sobre la integral de Riemann en un intervalo  $I$  al sustituir las integrales constantes por partes por las integrales constantes por partes de Riemann-Stieltjes

- Por lo tanto, se define  $p. c. \int_I f d\alpha$  para cualquier función constante por partes  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y cualquier  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida para un dominio que contiene  $I$  con la siguiente fórmula:

$$p. c. \int_I f d\alpha \equiv p. c. \int_{[P]} f d\alpha$$

- Si se asume que  $\alpha$  es una función monótonamente creciente, entonces  $\alpha[I] \geq 0$  para todos los intervalos  $I$  en  $X$  y se puede verificar que las propiedades de las integrales constantes por partes se mantienen cuando se sustituye  $p. c. \int_I f$  por  $p. c. \int_I f d\alpha$  (y las longitudes  $|I|$  por  $\alpha[I]$ )

- A partir de esto, se pueden definir las integrales superiores e inferiores de Riemann-Stieltjes  $\overline{\int_I f d\alpha}$  y  $\underline{\int_I f d\alpha}$  cuando  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada y  $\alpha$  se define en un dominio que contiene  $I$  con las siguientes formulas:

$$\overline{\int_I f d\alpha} \equiv \inf \left\{ p. c. \int_I g d\alpha : g \text{ is p. c. on } I \text{ and majorizes } f \right\}$$

$$\underline{\int_I f d\alpha} \equiv \sup \left\{ p. c. \int_I g d\alpha : g \text{ is p. c. on } I \text{ and minorizes } f \right\}$$

- Por lo tanto, se dice que  $f$  es integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes en  $I$  con respecto a  $\alpha$  si la integral superior e inferior de Riemann-Stieltjes son iguales

$$\int_I f d\alpha \equiv \overline{\int_I f d\alpha} = \underline{\int_I f d\alpha}$$

- Igual que antes, si  $\alpha(x) \equiv x$ , entonces la integral de Riemann-Stieltjes es idéntica a la integral de Riemann, y por tanto esta última es un caso especial de la primera
- Esta integral se puede expresar equivalentemente de la siguiente manera:

$$\int_I f d\alpha = \int_I f(x) d\alpha(x)$$

- A partir de este punto, casi toda la teoría anterior sobre la integral de Riemann se mantiene para la integral de Riemann-Stieltjes haciendo las sustituciones adecuadas

- El siguiente resultado sobre las propiedades de la integral de Riemann no se mantiene para la integral de Riemann-Stieltjes:

(g) Let  $J$  be a bounded interval containing  $I$  (i.e.,  $I \subseteq J$ ), and let  $F : J \rightarrow \mathbf{R}$  be the function

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

Then  $F$  is Riemann integrable on  $J$ , and  $\int_J F = \int_I f$ .

- La proposición sobre la integrabilidad de Riemann de una función continua y acotada y, consecuentemente, de una función continua por partes y acotada, no se mantienen para la integral de Riemann-Stieltjes. No obstante, el teorema sobre la integrabilidad de una función uniformemente continua sí se mantiene
- Estas proposiciones no se mantienen necesariamente porque si  $\alpha$  es discontinua en lugares clave (por ejemplo, en lugares donde  $f$  también es discontinua), entonces es probable que la integral de Riemann-Stieltjes no esté definida
- Ahora que se han obtenido resultados clave para la integral de Riemann y su generalización, se puede conectar la diferenciación con la integración a través de los teoremas fundamentales del cálculo
  - Siendo  $a < b$  números reales,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una función integrable en el sentido de Riemann y  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  la función  $F(x) \equiv \int_{[a,x]} f$ ,  $F$  es continua. Si  $x_0 \in [a, b]$  y  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces  $F$  es diferenciable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$  (primer teorema fundamental del cálculo)

$$\left( \int_{[a,x]} f \right)'(x) = f(x)$$

- Debido a que  $f$  es integrable en el sentido de Riemann, la función es acotada, por lo que existe un número real  $M$  tal que  $-M \leq f(x) \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$ . Si  $x < y$  son dos elementos de  $[a, b]$ , entonces las siguientes igualdades y desigualdades se cumplen (para los casos  $x > y$  y  $x = y$  la derivación es análoga):

$$F(y) - F(x) = \int_{[a,y]} f - \int_{[a,x]} f = \int_{[x,y]} f$$

$$\Rightarrow \int_{[x,y]} f \leq \int_{[x,y]} M = p.c. \int_{[x,y]} M = M(y - x)$$

$$\text{and } \int_{[x,y]} f \geq \int_{[x,y]} -M = p.c. \int_{[x,y]} -M = -M(y - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |F(y) - F(x)| \leq M(y - x) & \text{if } y > x \\ |F(y) - F(x)| \leq M(x - y) & \text{if } y < x \\ |F(y) - F(x)| \leq 0 & \text{if } y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq M|x - y|$$

- Si  $x \in [a, b]$  y  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  es cualquier secuencia en  $[a, b]$  convergiendo a  $x$ , entonces  $-M|x_n - x| \leq F(x_n) - F(x) \leq M|x_n - x|$  para toda  $n$ . Tomando límites, se ve que  $F(x_n) - F(x)$  tiende a cero y, por tanto, que  $F$  es continua en  $x$  y, por tanto, que es continua para  $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|x_n - x| = 0 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -M|x_n - x| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - F(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

- Suponiendo que  $x_0 \in [a, b]$  y que  $f$  es continua en  $x_0$ , se escoge una  $\varepsilon > 0$  y, como  $f$  es continua, entonces existe una  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$  para toda  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ . Si se cumple que  $|F(y) - F(x_0) - f(x_0)(y - x_0)| \leq \varepsilon|y - x_0|$  para cualquier  $y$  en el intervalo anterior, entonces  $F$  sería diferenciable en  $x_0$  y su derivada sería  $f(x_0)$ . Si  $y$  pertenece a este mismo intervalo, entonces se pueden dar los siguientes tres casos:

*If  $x_0 = y$ :*

$$|F(y) - F(x_0) - f(x_0)(y - x_0)| \leq \varepsilon|y - x_0| \Rightarrow 0 = 0$$

*If  $x_0 < y$ :*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$

$$\Rightarrow \left| \int_{[x_0, y]} f - f(x_0)(y - x_0) \right| \leq \varepsilon|y - x_0| \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$

$$\Rightarrow |F(y) - F(x_0) - f(x_0)(y - x_0)| \leq \varepsilon|y - x_0| \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$

*If  $x_0 < y$ :*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$

$$\Rightarrow \left| \int_{[x_0, y]} f - f(x_0)(x_0 - y) \right| \leq \varepsilon|x_0 - y| \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$



$$\Rightarrow |F(y) - F(x_0) - f(x_0)(x_0 - y)| \leq \varepsilon |x_0 - y| \text{ for } \forall x \in [x_0, y]$$

- Antes del segundo teorema fundamental del cálculo, es necesario utilizar la noción de antiderivada y un lema relacionado a esta

- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que una función  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una antiderivada  $\int f$  de  $f$  si  $F$  es diferenciable en  $I$  y  $F'(x) = f(x)$  para toda  $x \in I$

$$\int f \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \text{ for } \forall x \in I$$

- La antiderivada también se suele llamar integral indefinida, y a diferencia de la integral de Riemann o de Riemann-Stieltjes, las cuales son números, la antiderivada es una función o una familia de funciones
- Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función, y  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  dos antiderivadas de  $f$ , existe un número real  $C$  tal que  $F(x) = G(x) + C$  para toda  $x \in I$

$$\int f = F(x) = G(x) + C$$

- Siendo  $a < b$  números reales y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en el sentido de Riemann, si  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una antiderivada de  $f$ , entonces se cumple la siguiente igualdad (segundo teorema fundamental del cálculo):

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

- Siendo  $\mathbf{P}$  una partición de  $[a, b]$ , se puede interpretar que  $F$  es una función  $\alpha$  (como en la integral de Riemann-Stieltjes) y, utilizando la definición de suma de Riemann superior, se cumplen las siguientes igualdades:

$$F(b) - F(a) = \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} F[J] \quad U(f, \mathbf{P}) = \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} \sup_{x \in J} f(x) |J|$$

$$L(f, \mathbf{P}) = \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} \inf_{x \in J} f(x) |J|$$

- Suponiendo que  $J$  es un intervalo  $I$  (que no sea un punto, ya que de otro modo es trivial) para  $c < d$ , se puede ver que, gracias al teorema del valor intermedio y a que  $F$  es antiderivada de  $f$ , se puede ver que  $L(f, \mathbf{P}) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, \mathbf{P})$

$$F[J] = F(d) - F(c) = (d - c)F'(e) = (d - c)f(e) = \\ = f(e)|J| \leq \sup_{x \in J} f(x)|J|$$

$$F[J] = F(d) - F(c) = (d - c)F'(e) = (d - c)f(e) = \\ = f(e)|J| \geq \inf_{x \in J} f(x)|J|$$

$$\Rightarrow \inf_{x \in J} f(x)|J| \leq f(e)|J| \leq \sup_{x \in J} f(x)|J|$$

$$\Rightarrow \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} \inf_{x \in J} f(x)|J| \leq \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} F[J] \leq \sum_{J \in \mathbf{P}; J \neq \emptyset} \sup_{x \in J} f(x)|J| \\ \Rightarrow L(f, \mathbf{P}) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, \mathbf{P})$$

- Gracias a que  $L(f, \mathbf{P}) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, \mathbf{P})$ , se puede establecer una desigualdad similar con las integrales inferior y superior de Riemann. Pero como  $f$  es integrable en el sentido de Riemann, entonces ambas coinciden y eso quiere decir que se respeta la igualdad del teorema

$$L(f, \mathbf{P}) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, \mathbf{P})$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_{[a,b]} f} \Rightarrow \int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

- Estos resultados permiten simplificar los cálculos y saber propiedades y resultados útiles
  - El primer teorema fundamental del cálculo asegura que toda función continua integrable en el sentido de Riemann tiene una antiderivada, pero no todas las funciones con una antiderivada son integrables en el sentido de Riemann
  - Uno puede utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo con tal de calcular integrales relativamente fáciles siempre que se pueda encontrar la antiderivada del integrando  $f$
- Una vez vistos los teoremas fundamentales del cálculo, se pueden discutir consecuencias útiles de estos que permitirán integrar funciones de manera más sencilla, transformar integrales de Riemann en integrales de Riemann-Stieltjes y cambiar variables

- Siendo  $I = [a, b]$  y  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en  $[a, b]$  tal que  $F'$  y  $G'$  son integrables en el sentido de Riemann en  $I$ , se produce la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} F'G$$

- Siendo  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótonamente creciente y diferenciable en  $[a, b]$ , de modo que  $\alpha'$  es integrable en el sentido de Riemann, y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función constante por partes en  $[a, b]$ , entonces  $f\alpha'$  es integrable en el sentido de Riemann en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$$

- Como  $f$  es una función constante por partes, es integrable en el sentido de Riemann, y como  $\alpha'$  también lo es, entonces  $f\alpha'$  también es integrable en ese sentido
- Suponiendo que  $f$  es una función constante por partes con respecto a una partición  $\mathbf{P}$  de  $[a, b]$ , a partir de que la integral de Riemann en un intervalo es igual a la suma de las particiones de este y del segundo teorema fundamental, se puede obtener la igualdad propuesta por el teorema

$$\int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{\mathbf{P}} f d\alpha = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J \alpha[J]$$

$$\int_{[a,b]} f\alpha' = \sum_{J \in \mathbf{P}} \int_J f\alpha' = \sum_{J \in \mathbf{P}} \int_J c_J \alpha' = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J \int_J \alpha' = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J \alpha[J]$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$$

- Siendo  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótonamente creciente y diferenciable en  $[a, b]$ , de modo que  $\alpha'$  es integrable en el sentido de Riemann, y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes con respecto a  $\alpha$  en  $[a, b]$ , entonces  $f\alpha'$  es integrable en el sentido de Riemann en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$$

- De manera informal, este corolario afirma que  $f d\alpha$  es igual a  $f \frac{d\alpha}{dx} dx$  cuando  $\alpha$  es diferenciable. Aún así, la ventaja de la integral de

Riemann-Stieltjes es que esta tiene sentido, aunque  $\alpha$  no se pueda diferenciar

- Siendo  $[a, b]$  un intervalo cerrado,  $\phi: [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$  una función continua monótonamente creciente y  $f: [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función constante por partes en  $[\phi(a), \phi(b)]$ ,  $f \circ \phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es también una función constante por partes en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} f \circ \phi \, d\phi = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f$$

- Siendo  $\mathbf{P}$  una partición de  $[\phi(a), \phi(b)]$  tal que  $f$  es una función constante por piezas con respecto a  $\mathbf{P}$ , para cada  $J \in \mathbf{P}$  y valor constante  $c_J$  se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_{[\phi(a), \phi(b)]} f = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J|$$

- Para cada intervalo  $J$ , se define  $\phi^{-1}(J) \equiv \{x \in [a, b]: \phi(x) \in J\}$ , por lo que  $\phi^{-1}(J)$  está conectado y es un intervalo. Además,  $c_J$  es el valor constante de  $f \circ \phi$  en  $\phi^{-1}(J)$ , por lo que si se define  $\mathbf{Q} \equiv \{\phi^{-1}(J): J \in \mathbf{P}\}$  entonces  $\mathbf{Q}$  es una partición de  $[a, b]$  y  $f \circ \phi$  es constante por partes con respecto a  $\mathbf{Q}$ . Debido a que  $\phi[\phi^{-1}(J)] = J$ , se obtiene la igualdad de la proposición

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f \circ \phi \, d\phi &= \int_{[\mathbf{Q}]} f \circ \phi \, d\phi = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J \phi[\phi^{-1}(J)] = \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J| \\ &\Rightarrow \int_{[a,b]} f \circ \phi \, d\phi = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f \end{aligned}$$

- Siendo  $[a, b]$  un intervalo cerrado,  $\phi: [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$  una función continua monótonamente creciente y  $f: [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $[\phi(a), \phi(b)]$ ,  $f \circ \phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes con respecto a  $\phi$  en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} f \circ \phi \, d\phi = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f$$

- Combinando esta proposición con el corolario del teorema para la integrabilidad de  $f\alpha'$  se puede obtener la formulación más estándar del cambio de variable
- Siendo  $[a, b]$  un intervalo cerrado,  $\phi: [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$  una función continua monótonamente creciente tal que  $\phi'$  es integrable en el sentido de

Riemann y  $f: [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $[\phi(a), \phi(b)]$ , entonces  $(f \circ \phi)\phi': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)\phi' = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f$$

- Tal y como se ha mencionado antes, hay unos tipos de integrales que no se pueden considerar integrales de Riemann al ser no acotadas: las integrales impropias. Por lo tanto, es necesario desarrollar métodos y teoría para estas

## Las técnicas de integración

- Es posible desarrollar técnicas para usar las propiedades y los resultados básicos de la integral de Riemann con tal de poder integrar funciones complejas, tales como el cambio de variables y la integración por partes (vistas anteriormente)
  - Debido a los teoremas fundamentales del cálculo, es necesario encontrar la antiderivada de una función  $f$ , pero no siempre se puede encontrar fácilmente porque hay funciones complejas
    - Para poder evaluar integrales con funciones complejas, es posible introducir una nueva variable cambiando la original. Esta estrategia se conoce como el cambio de variable y se basa en la regla de la cadena para la diferenciación
    - La idea es poder reemplazar una integral relativamente complicada por una más simple a través de cambiar la variable de integración  $x$  por una variable  $u$  que sea función de  $x$
    - La complicación al aplicar el cambio de variable es escoger una sustitución adecuada, normalmente sustituyendo para una parte difícil del integrando
  - Siendo  $I$  un intervalo acotado,  $u = \phi(x)$  una función diferenciable en  $I$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en el sentido de Riemann en  $I$ , entonces  $(f \circ \phi)\phi': I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $I$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int f(u) du = \int f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

- Esta estrategia consiste en introducir una variable  $u$  que sea función de  $x$  y, debido a que también se tiene que cambiar la variable con respecto a la que se integra,  $du$  tiene que ser la derivada  $\frac{du}{dx}$  multiplicada por  $dx$

$$u = \phi(x) \quad \frac{du}{dx} = \phi'(x) \Rightarrow du = \phi'(x) dx$$

- Para poder evaluar integrales de Riemann o integrales definidas por sustitución, es posible aplicar dos métodos

- El primero consiste en evaluar la antiderivada o la integral indefinida primero y luego utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo para poder evaluar la integral definida
- El segundo método consiste en cambiar los límites de integración (el intervalo) cuando la variable se cambia, de modo que se puede aplicar la proposición anteriormente vista (consecuencia de los teoremas fundamentales del cálculo)
- Siendo  $[a, b]$  un intervalo cerrado,  $\phi: [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$  una función continua monótonamente creciente tal que  $\phi'$  es integrable en el sentido de Riemann y  $f: [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $[\phi(a), \phi(b)]$ , entonces  $(f \circ \phi)\phi': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el sentido de Riemann en  $[a, b]$  y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f(u) du$$

- Como se ha visto antes, es posible evaluar las integrales de Riemann-Stieltjes a través del método de cambio de variable para el diferencial  $d\alpha$  por  $\alpha' dx$
- Cuando la integral a evaluar es complicada, pero es el producto de dos funciones  $F$  y  $G'$  (o se puede convertir en esta clase de producto), entonces es posible utilizar la integración por partes
- Igual que el cambio de variable proviene de la regla de la cadena de la diferenciación, la integración por partes proviene de la regla del producto para la diferenciación

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

$$\Rightarrow F(x)G(x) = \int F'(x)G(x) + F(x)G'(x) dx$$

$$\Rightarrow F(x)G(x) = \int F'(x)G(x) dx + \int F(x)G'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int F(x)G'(x) dx = F(x)G(x)|_I - \int F'(x)G(x) dx$$

- El problema de este método es escoger  $F(x)$  y  $G'(x)$  de tal modo que la integral resultante sea más simple que la integral original
- Siendo  $I$  un intervalo acotado y  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en  $I$  tal que  $F'$  y  $G'$  son integrables en el sentido de Riemann en  $I$ , se produce la siguiente igualdad

$$\int FG' = FG|_I - \int F'G$$

- Aplicando dos cambios de variable a las funciones de la fórmula anterior, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera:

$$u \equiv F(x) \Rightarrow du = F'(x) dx \quad v \equiv G(x) \Rightarrow dv = G'(x) dx$$

$$\int uv' = uv|_I - \int u'v \quad \text{or} \quad \int u dv = uv|_I - \int v du$$

- Al lidiar con una integral, se escoge que función será  $F(x)$  y cual  $G'(x)$ , de modo que, derivando  $F(x)$  y encontrando la antiderivada de  $G'(x)$  se puede aplicar la fórmula
- Si se combina la fórmula de la integración por partes con el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible evaluar la integral definida o de Riemann por partes
  - Siendo  $I = [a, b]$  y  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en  $[a, b]$  tal que  $F'$  y  $G'$  son integrables en el sentido de Riemann en  $I$ , se produce la siguiente igualdad:

$$\int_{[a,b]} FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} F'G$$

- Como se ha podido ver, la integración es más difícil que la diferenciación, dado que es obvio que tipo de fórmula aplicar para diversas funciones al diferenciar, pero no es obvio a la hora de integrar. Por lo tanto, lo mejor es seguir una estrategia organizada a la hora de integrar (cuando no sea obvio como lidiar con esta)
  - El primer paso consiste en simplificar el integrando hasta el máximo, siendo la mayoría de veces muy útil usar manipulación algebraica o identidades trigonométricas

$$\int \sqrt{x} (1 + \sqrt{x}) dx = \int (\sqrt{x} + x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta} d\theta &= \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \sin 2\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\sin x + \cos x)^2 dx &= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx \end{aligned}$$

- Esto hace que el integrando se simplifique y que sea mucho más obvio ver qué método aplicar
- El segundo paso consiste en encontrar una función  $u \equiv g(x)$  en el integrando cuya diferencial  $du = g'(x) dx$  exista, además de algún factor constante para sacar fuera de la integral
- Si los dos pasos anteriores no han permitido encontrar una solución, entonces se puede mirar la forma del integrando con tal de simplificar el integrando
  - Si  $f$  es el producto de potencias de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de  $\tan(x)$  y  $\sec(x)$  o de  $\cot(x)$  y  $\csc(x)$ , entonces se usan las sustituciones vistas anteriormente para las funciones trigonométricas
  - Si  $f$  es una función racional, entonces se puede utilizar el procedimiento de fracciones parciales
  - Si  $f(x)$  es el producto de una potencia de  $x$  (o polinomio) y una función transcendental (trigonométrica, exponencial o logarítmica), entonces se utiliza la integración por partes
  - Cuando hay radicales particulares en la expresión, se puede utilizar las siguientes sustituciones anteriormente vistas:

$$\sqrt{\pm x^2 \pm a^2} \Rightarrow x = \begin{cases} \sin \theta \\ \tan \theta \\ \sec \theta \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{ax + b} \Rightarrow u = \sqrt[n]{ax + b}$$

- Si los tres pasos anteriores no han producido una respuesta, entonces se intenta hacer lo siguiente:
  - Aunque no haya una sustitución obvia, se puede probar a sustituir las variables otra vez para intentar ganar una intuición de qué sustitución puede ser adecuada



- Aunque la integración por partes se aplica productos de la forma descrita anteriormente, puede ser efectiva en funciones únicas, de modo que aplicar integración por partes puede ser útil
- Racionalizar el denominador o usar identidades trigonométricas con tal de probar pueden ser más sustanciales que en el primer paso y hacer que se manipule el integrando y se simplifique
- Otro consejo es relacionar el problema a problemas previos, dado que hay integrales para las cuales se pueden aplicar métodos similares o simplificaciones o expresiones equivalentes para el problema
- Hay veces que es necesario utilizar dos o tres métodos para evaluar una integral, de modo que sustituir e integrar por partes varias veces puede ser útil

## Las aplicaciones de la integración

## Las ecuaciones paramétricas y las coordenadas polares

## Los espacios métricos\*

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad a > 0, a \neq 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$	$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$
$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$	$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$
$\int x e^x dx = (x - 1)e^x$	$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$

$\int \ln x  dx = x \ln x - x$	$\int (\ln x )^2 dx = x(\ln x )^2 - 2x \ln x  + 2x$
$\int x^n \ln x  dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x  - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \quad n \neq -1$	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3}$
$\int x^n \ln(ax) dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(ax) - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \quad n \neq -1$	
$\int \ln(ax) dx = x \ln(ax) - x$	$\int \frac{\ln(ax)}{x} dx = \frac{1}{2} [\ln(ax)]^2$
$\int \ln(ax+b) dx = \frac{ax+b}{a} \ln(ax+b) - x$	$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{b}{2a} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b)$
$\int \log_a x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{x \ln x - x}{\ln a}$	$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x)$

$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$	$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$
$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$	$\int \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$
$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x $	$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$	$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \ln(\sqrt{1+x^2})$
$\int \csc x \, dx = \ln\left \tan\frac{x}{2}\right $	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x$	$\int \csc^{-1} x \, dx = x \csc^{-1} x + \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x $	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x$	$\int \sec^{-1} x \, dx = x \sec^{-1} x - \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\int \cot x \, dx = \ln \sin x $	$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$	$\int \cot^{-1} x \, dx = x \cot^{-1} x + \ln(\sqrt{1+x^2})$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x$	$\int \sinh^2 x \, dx = \frac{\sinh(2x)}{4}$	$\int \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\int \cosh x \, dx = \sinh x$	$\int \cosh^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}$	$\int \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$
$\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x $	$\int \tanh^2 x \, dx = x - \tanh x$	$\int \sec^2(ax) \, dx = \frac{1}{a}\tan(ax)$
$\int \operatorname{csch} x \, dx = -\operatorname{coth}^{-1}(\cosh x)$	$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\operatorname{coth} x$	$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x)$	$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x$	$\int \sin^{-1}(ax) \, dx = x \sin^{-1}(ax) + \sqrt{a^2-x^2}$
$\int \operatorname{coth} x \, dx = \ln \sinh x $	$\int \tanh(ax) \, dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax)$	$\int \tan^{-1}(ax) \, dx = x \tan^{-1}(ax) + \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)$

## Las funciones continuas en espacios métricos\*

## La convergencia uniforme\*

## Las series de potencias\*

- Una subclase importante de series de funciones son las series de potencias o *power series*. Primero es necesario introducir la noción de series de potencias formales, y después se puede desarrollar teoría útil a partir de esta
  - Siendo  $a$  un número real, una serie de potencias formales centrada en  $a$  es cualquier serie de la siguiente forma, en donde  $c_0, c_1, c_2, \dots$  es una secuencia de números reales (que no dependen de la variable real  $x$ )

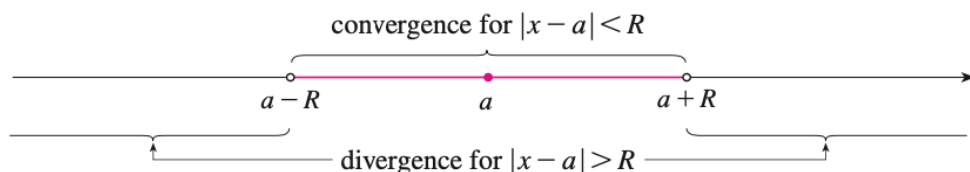
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

- Uno se refiere a  $c_n$  como el  $n$ -ésimo coeficiente de la serie de potencias, y cada término  $c_n(x-a)^n$  de la serie es una función de la variable real  $x$
- Se denomina a esta serie como serie de potencias formal porque aún no se ha asumido aún que la serie converge para cualquier  $x$ . No obstante, estas series convergen siempre que  $x = a$ , por lo que mientras más cerca se está de  $a$ , más fácil será para la serie converger, de modo que se necesita una noción para expresar esta idea

- Siendo  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  una serie de potencias formal, se define el radio de convergencia  $R$  de esta serie se define como la siguiente cantidad:

$$R \equiv \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}}$$

- Para esta cantidad se adopta la convención de que  $R = 1/0 = +\infty$  y que  $R = 1/+\infty = 0$
- Cada número  $|c_n|^{1/n}$  es no negativo, de modo que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$  puede tomar cualquier valor de 0 a  $+\infty$  (ambos incluidos). Por lo tanto,  $R \in [0, +\infty]$  y el radio de convergencia  $R$  siempre existe, aunque la secuencia  $|c_n|^{1/n}$  no sea convergente, ya que el límite superior de cualquier secuencia siempre existe (aunque sea  $+\infty$  o  $-\infty$ )
- Siendo  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  una serie de potencias formal, y siendo  $R$  un radio de convergencia, se puede definir la noción de convergencia a través de  $R$ :



- Si  $x \in \mathbb{R}$  es tal que  $|x-a| > R$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  es divergente para cada valor de  $x$
- Si  $x \in \mathbb{R}$  es tal que  $|x-a| < R$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  es absolutamente convergente para cada valor de  $x$
- Por lo tanto, solo hay cuatro posibilidades para una serie de potencias: la serie converge solo para  $x = a$ , la serie converge para toda  $x$  o una de las dos proposiciones anteriores
- Asumiendo que  $R > 0$  (la serie converge en algún punto diferente a  $x = a$ ), siendo  $f: (a-R, a+R) \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  (esta función existe debido a la condición de convergencia absoluta anterior), se cumplen las siguientes propiedades:
  - Para cualquier  $0 < r < R$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  converge uniformemente para  $f$  en el intervalo compacto  $[a-r, a+r]$ . En particular,  $f$  es continua en  $(a-R, a+R)$
  - La función  $f$  es diferenciable en  $(a-R, a+R)$ , y para cualquier  $0 < r < R$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}$  converge uniformemente a  $f'$  en el intervalo  $[a-r, a+r]$

- Para un intervalo cerrado  $[y, z]$  contenido en  $(a - R, a + R)$ , se obtiene la siguiente identidad:

$$\int_{[y,z]} f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1} - (y-a)^{n+1}}{n+1}$$

- Es posible hacer observaciones de los resultados anteriores sobre la convergencia y las propiedades
  - En los resultados anteriores no se ha especificado nada sobre el caso en el que  $|x - a| = R$  (en los puntos  $a - R$  y  $a + R$ ), ya que se puede tener tanto convergencia como divergencia en esos puntos
  - Aunque se dice que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  converge en el intervalo  $(a - R, a + R)$ , no necesita converger uniformemente en ese intervalo (no es lo mismo). No obstante, también se muestra que convergerá uniformemente en un intervalo más pequeño  $[a - r, a + r]$ , por lo que no es suficiente con que la serie sea convergente en todos los subintervalos cerrados de  $(a - R, a + R)$  para que la serie sea convergente uniformemente en todo el intervalo
- Una función  $f(x)$  que se pueda representar como una serie de potencias se conoce como una función analítica real, la cual permite obtener la fórmula de Taylor
  - Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y siendo  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  una función, si  $a$  es un punto interior de  $E$ , se dice que  $f$  es una función real analítica en  $a$  si existe un intervalo abierto  $(a - r, a + r)$  en  $E$  para alguna  $r > 0$  tal que exista una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  centrada en  $a$  con un radio de convergencia  $R \geq r$  y que converge en  $(a - r, a + r)$ 
    - Si  $E$  es un conjunto abierto, y  $f$  es una función real analítica en todos los puntos  $a$  de  $E$ , se dice que  $f$  es una función real analítica en  $E$
    - La noción de ser una función analítica real está muy relacionada a la noción de ser analítica compleja (del análisis real)
  - Como se ha visto anteriormente, si una función es analítica real en el punto  $a$ , entonces  $f$  es tanto continua como diferenciable en  $(a - r, a + r)$  para alguna  $r > 0$ . Sin embargo, se puede obtener un resultado mucho más general
    - Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y siendo  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  una función, para cualquier  $k \geq 2$  se dice que  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable  $k$  veces en  $E$  si, y solo si,  $f$  es diferenciable y  $f'$  es  $k - 1$  veces diferenciable. Si  $f$  es  $k$  veces diferenciable, se define la  $k$  derivada  $f^{(k)}: E \rightarrow \mathbb{R}$  por regla recursiva  $f^{(1)} \equiv f'$  y  $f^{(k)} \equiv (f^{(k-1)})'$  para toda  $k \geq 2$

- También se define  $f^{(0)} \equiv f$  y se deja que cualquier función sea 0 veces diferenciable. Además, una función se considera infinitamente diferenciable (o suave) si, y solo si, es  $k$  veces diferenciable para toda  $k \geq 0$
- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $a$  un punto interior de  $E$ , y siendo  $f$  una función que es real analítica en  $a$ , entonces hay una  $r > 0$  para la cual tiene una expansión de series de potencias para toda  $x \in (a - r, a + r)$  y alguna  $r > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

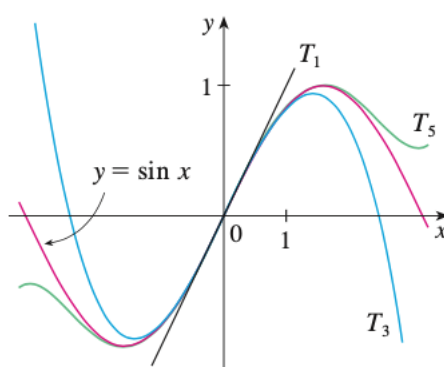
- Por lo tanto, para toda  $k \geq 0$ , entonces la función  $f$  es diferenciable  $k$  veces en  $(a - r, a + r)$ , y para toda  $k \geq 0$  la derivada  $k$  viene dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (n+1)(n+2) \dots (n+k) (x-a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} (x-a)^n \quad \text{for } \forall x \in (a-r, a+r) \end{aligned}$$

- Siendo  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$  y siendo  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es real analítica en  $E$ , entonces  $f$  es infinitamente diferenciable en  $E$ . Además, todas las derivadas de  $f$  también son funciones reales analíticas en  $E$ 
  - Para todo punto  $a \in E$  y  $k \geq 0$ , se sabe que  $f$  será  $k$  veces diferenciable en  $a$ . Por lo tanto,  $f$  es  $k$  veces diferenciable en  $E$  para  $k \geq 0$  y, en consecuencia, es infinitamente diferenciable. Además, cada derivada  $f^{(k)}$  de  $f$  tiene una expansión de serie de potencias en cada  $x \in E$ , por lo que  $f^{(k)}$  es una función real analítica
  - Lo converso a este corolario no es cierto, ya que hay funciones infinitamente diferenciables que no son reales analíticas
- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $a$  un punto interior de  $E$ , y siendo  $f$  una función que es real analítica en  $a$  la cual tiene una expansión de series de potencias para toda  $x \in (a - r, a + r)$  y alguna  $r > 0$ , entonces para cualquier entero  $k \geq 0$  se tiene que  $f^{(k)}(a) = k! c_k$ , de modo que se puede obtener la fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \text{for } \forall x \in (a-r, a+r)$$

- La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  también se conoce como serie de Taylor de  $f$  alrededor de  $a$
- La fórmula de Taylor expresa que si una función es real analítica, entonces es igual a su serie de Taylor. Esto solo funciona para funciones reales analíticas, de modo que el teorema de Taylor falla cuando se consideran funciones infinitamente diferenciables que no son reales analíticas



- Un corolario de este teorema es que siendo  $c$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $a$  un punto interior de  $E$ , y siendo  $f$  una función que es real analítica en  $a$ , si  $f$  tiene dos expansiones de series de potencias centradas en  $a$  y con un radio de convergencia positivo, entonces  $c_n = d_n$  para toda  $n \geq 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

- A partir del teorema de Taylor,  $f^{(k)}(a) = k! c_k$  para toda  $k \geq 0$ , pero también  $f^{(k)}(a) = k! d_k$ , de modo que como  $k! \neq 0$ , entonces  $c_k = d_k$  para toda  $k \geq 0$
- Aunque una función real analítica tenga una sola serie de potencias alrededor de un punto en concreto, puede tener diferentes series de potencias para diferentes puntos. Por lo tanto, esto solo establece la unicidad de las series de potencias alrededor de un mismo punto, no para cualquier punto
- Una tipo de serie que se deriva de una serie de Taylor alrededor de cero para la función  $f(x) = (1+x)^k$  es la serie binomial, la cual tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} x^n$$

- A través del *test* de la razón, se puede demostrar que esta serie converge cuando  $|x| < 1$  y diverge cuando  $|x| > 1$
- La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es a través del binomio de Newton o el coeficiente binomial

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{k!}{(k-n)! n!}$$

- Algunas identidades útiles para trabajar con este tipo de serie son las siguientes:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)! n!} = \frac{k}{n} \frac{(k-1)!}{(k-n)! (n-1)!} = \frac{k}{n} \binom{k-1}{n-1}$$

$$\binom{k-1}{n} = \frac{(k-1)!}{(k-1-n)! n!} = \frac{k-n}{k} \frac{k!}{(k-n)! n!} = \frac{k-n}{k} \binom{k}{n}$$

$$\begin{aligned} \binom{k}{n-1} &= \frac{k!}{(k-n+1)! (n-1)!} = n(k-n) \frac{k!}{(k-n)! n!} = \\ &= n(k-n) \binom{k}{n} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} = 2^k$$

- Si  $k$  es cualquier número real y  $|x| < 1$ , entonces se da la siguiente identidad:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots$$

- La convergencia en el caso  $|x| = 1$  depende del valor de  $k$ . Se puede demostrar que si  $-1 < k \leq 0$ , entonces la serie converge a 1, mientras que si  $k \geq 0$ , entonces converge a 1 y a  $-1$
- La serie binomial, no obstante, se puede generalizar aún más si se considera una función  $f(x, y) = (x + y)^k$ , lo cual permite obtener una identidad conocida como el teorema generalizado del binomio:

$$(x + y)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} y^n$$

- Ahora es posible utilizar toda la teoría desarrollada anteriormente para poder desarrollar una base rigurosa para muchas funciones estándar en matemáticas, tales como la función exponencial y la logarítmica
  - Para cualquier número real  $x$ , se define la función exponencial  $\exp(x)$  como el número real siguiente:

$$\exp(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Se define la función del logaritmo natural  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  como la inversa de la función exponencial, de modo que  $\exp(\ln(x)) = x$  y  $\log(\exp(x)) = x$
- Con toda la teoría desarrollada, se puede discutir sobre la clase de funciones especiales más importante: las funciones trigonométricas. Estas normalmente se definen a través de conceptos geométricos como círculos, triángulos y ángulos, pero es posible definir las utilizando conceptos analíticos
  - Si  $z$  es un número complejo, entonces se definen el seno y el coseno de la siguiente manera:

$$\cos(z) \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- Como se han definido el coseno y el seno para los números complejos, también se han definido automáticamente para los números reales
- A partir de la definición de series de potencias para  $\exp(z)$  se puede expandir la serie para ambas funciones:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow \cos(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$



$$\Rightarrow \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- En particular, se puede ver como las funciones  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$  siempre son reales cuando la variable  $x$  es real, y ambas series convergen para toda  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que son funciones reales analíticas en 0 con un radio infinito de convergencia (la función es real analítica para toda  $x \in \mathbb{R}$ )

## Las funciones vectoriales

- En general, una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio un elemento del codominio o rango. Una función con variable vectorial o una función vectorial, por tanto, se define como una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y su codominio un conjunto de vectores
  - Si  $f(t)$ ,  $g(t)$  y  $h(t)$  son componentes del vector  $\mathbf{r}(t)$ , entonces  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de variable real llamadas funciones componentes de  $\mathbf{r}$  y se puede definir de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}(t) \equiv (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\mathbf{e}_1 + g(t)\mathbf{e}_2 + h(t)\mathbf{e}_3$$

- En este caso  $t$  es la variable independiente de la cual dependen las funciones componentes y el vector
- Se utilizan los vectores base  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  para poder establecer la equivalencia
- El límite de una función vectorial  $\mathbf{r}$  se define tomando los límites de sus componentes. Si  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , entonces el límite de  $\mathbf{r}(t)$  se define de la siguiente manera:

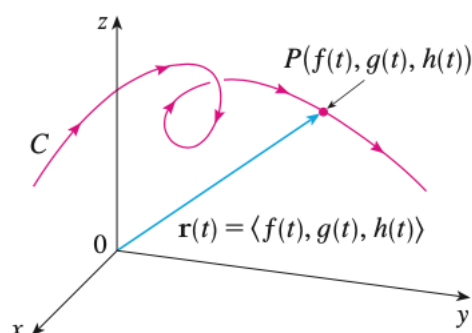
$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right)$$

- El límite de una función vectorial  $\mathbf{r}$  se define tomando los límites de sus componentes. Si  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , entonces el límite de  $\mathbf{r}(t)$  se define de la siguiente manera:
  - Esta definición de límite es válida si los límites de las funciones componente existen
  - De manera equivalente, se puede dar una definición más formal. Un vector  $\mathbf{b}$  es el límite de  $\mathbf{r}(t)$  si, y solo si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |t - a| < \delta$ , entonces  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$

- Una función vectorial  $\mathbf{r}$  es continua en  $a$  si se cumple la siguiente definición:

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

- Utilizando la definición del límite de una función vectorial, se puede ver que una función vectorial es continua en  $a$  si, y solo si, las funciones componentes también son continuas en  $a$
- Hay una conexión cercana entre las funciones vectoriales continuas y las curvas espaciales. Suponiendo que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de variable real continua en un intervalo  $I$ , entonces el conjunto  $C$  de todos los puntos  $(x, y, z)$  en el espacio (donde  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  y  $z = h(t)$  y  $t$  varía en el intervalo) se denomina curva espacial

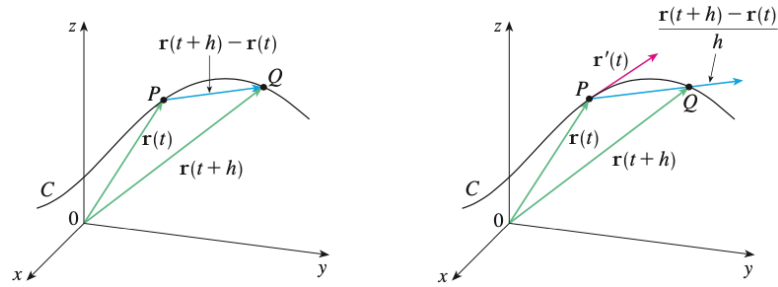


- Las ecuaciones  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  y  $z = h(t)$  se denominan ecuaciones paramétricas de  $C$  y  $t$  se denomina parámetro
  - Considerando una función vectorial  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , entonces  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de posición del punto  $P(f(t), g(t), h(t))$  en  $C$ . Por lo tanto, cualquier función vectorial continua  $\mathbf{r}$  define una curva espacial  $C$  que es trazada por la punta del vector móvil  $\mathbf{r}(t)$
- Igual que con otras funciones de variables reales, las funciones vectoriales se pueden derivar e integrar utilizando propiedades similares
- La derivada  $\mathbf{r}'$  de una función vectorial  $\mathbf{r}$  se define de manera similar a la derivada de una función de variable real. Si el siguiente límite converge a algún vector, entonces se dice que  $\mathbf{r}$  es diferenciable en  $t_0$  sobre un conjunto  $T$ :

$$\mathbf{r}'(t) \equiv \lim_{t \rightarrow t_0; t \in T - \{t_0\}} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

- El vector resultante  $\mathbf{r}'(t)$  se puede denominar como el vector tangente de la curva definida por  $\mathbf{r}$  en el punto  $P$ , siempre que  $\mathbf{r}'(t)$

exista y  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . La línea tangente a  $C$  en  $P$  se define como la línea que pasa por  $P$  paralela al vector tangente  $\mathbf{r}'(t)$



- Si  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones diferenciables, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)) = f'(t)\mathbf{e}_1 + g'(t)\mathbf{e}_2 + h'(t)\mathbf{e}_3$$

- La demostración de este teorema se basa en la definición de derivada de una función vectorial y del límite de una función vectorial

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h), g(t+h), h(t+h)) - (f(t), g(t), h(t))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \right) = \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \right) = \\ &= (f'(t), g'(t), h'(t)) \end{aligned}$$

- Igual que con las funciones de variable real, las derivadas de orden más alto se definen de manera similar a la anterior
- Las identidades que cumplen las derivadas de funciones vectoriales son análogas a las que cumplen las funciones de variables reales

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t)) \quad (\text{Chain Rule})$$

## El cálculo diferencial en diversas variables

- Aunque se ha visto como derivar con respecto a una única variable real, muchas veces es necesario derivar con respecto a un vector de variables o a una matriz, por lo que se pueden aplicar reglas de diferenciación análogas a las del caso univariante
  - El vector de derivadas parciales o vector gradiente con respecto a un vector columna de variables reales  $\mathbf{x}$  se define de la siguiente manera:

$$\Delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial f(\mathbf{x})/\partial x_1 \\ \partial f(\mathbf{x})/\partial x_2 \\ \dots \\ \partial f(\mathbf{x})/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

- Como se puede ver, el gradiente es un vector columna, por lo que la forma del vector (columna o fila) se determina por la forma del vector en el denominador. En este caso,  $\mathbf{x}$  es un vector columna, pero si fuera fila, se cumpliría lo siguiente:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

- La aproximación lineal de Taylor de primer orden se puede expresar en términos de la Hessiana (con respecto al vector  $\mathbf{x}_0$ )

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0) = f(\mathbf{x}_0) + \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)' (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

- La matriz de segundas derivadas o matriz Hessiana se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial^2 y / \partial x_1 \partial x_1 & \partial^2 y / \partial x_1 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y / \partial x_1 \partial x_n \\ \partial^2 y / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 y / \partial x_2 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y / \partial x_2 \partial x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial^2 y / \partial x_n \partial x_1 & \partial^2 y / \partial x_n \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y / \partial x_n \partial x_n \end{bmatrix} = [f_{ij}]$$

- En general, la matriz  $H$  es una matriz cuadrada y simétrica. Esta simetría se obtiene para funciones vectoriales continuas o continuamente diferenciables gracias al teorema de Young
- Cada columna de  $H$  es la derivada del gradiente con respecto a la variable correspondiente en  $\mathbf{x}'$ , lo cual se puede representar de la siguiente manera:

$$H = \left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)}{\partial x_1} \quad \left| \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)}{\partial x_2} \quad \right| \cdots \left| \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)}{\partial x_n} \quad \right] =$$

$$= \frac{\partial(\partial f(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(\partial f(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'}$$

- La aproximación lineal de Taylor de segundo orden se puede expresar en términos de la Hessiana (con respecto al vector  $\mathbf{x}_0$ )

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' \mathbf{H}_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

- Una función lineal se puede escribir a partir de un vector columna  $\mathbf{a}$  de constantes y un vector columna  $\mathbf{x}$  de variables como  $y = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ . Por lo tanto, el gradiente de  $\mathbf{a}'\mathbf{x}$  con respecto a  $\mathbf{x}$  da el siguiente resultado:

$$\frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

- En un sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , cada elemento  $y_i$  de  $\mathbf{y}$  es  $y_i = \mathbf{a}_i'\mathbf{x}$ , en donde  $\mathbf{a}_i'$  es la fila  $i$  de  $A$ . Por lo tanto, el gradiente de  $y_i$  con respecto a  $\mathbf{x}$  tiene que ser  $\mathbf{a}_i$  (para coincidir con la forma de  $\mathbf{x}$ ) y se puede formar un vector gradiente para cada  $i$

$$\begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial \mathbf{x}' \\ \partial y_2 / \partial \mathbf{x}' \\ \cdots \\ \partial y_n / \partial \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2' \\ \cdots \\ \mathbf{a}_n' \end{pmatrix}$$

- Si se recogen todos los términos, se puede ver se cumple una regla similar en el caso de que un vector de variables esté multiplicada por una matriz

$$\frac{\partial A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = A' \quad \frac{\partial A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = A$$

- Una función cuadrática se puede escribir a partir de una matriz de parámetros  $A$  de tamaño  $n \times n$  y un vector columna  $\mathbf{x}$  de variables como  $\mathbf{x}'A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$

- En este caso, el gradiente de  $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$  con respecto a  $\mathbf{x}$  depende de si la matriz  $A$  es simétrica o no, por lo que se obtienen los siguientes gradientes:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} \text{ if } A \text{ is symmetric}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (A + A')\mathbf{x} \text{ if } A \text{ is not symmetric}$$

- Haciendo referencia a la doble sumatoria de la forma cuadrática, se puede ver que  $a_{ij}$  multiplica  $x_ix_j$ , por lo que la derivada de  $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$  con respecto a  $a_{ij}$  debe ser  $x_ix_j$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\partial a_{ij}} = x_ix_j$$

- La matriz cuadrada cuya entrada  $ij$  es  $x_ix_j$  es la matriz  $\mathbf{x}\mathbf{x}'$ , por lo que la matriz gradiente de  $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$  con respecto a  $A$  es  $\mathbf{x}\mathbf{x}'$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\partial A} = \mathbf{x}\mathbf{x}'$$

- La derivación de determinantes suele aparecer en muchos problemas prácticos, de modo que es importante saber como lidiar con ella

- A partir de la expansión de cofactores, se puede ver que la derivada del determinante de una matriz  $A$  con respecto a  $a_{ij}$  es  $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ , lo cual permite obtener la matriz inversa  $A^{-1}$  con el cofactor  $ji$  en  $A$ , denotado por  $|C_{ji}|$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = c_{ij} \Rightarrow A_{ij}^{-1} = \frac{|C_{ji}|}{|A|}$$

- Eso implica que la derivada del logaritmo de  $|A|$  con respecto a  $a_{ij}$  es dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \ln|A|}{\partial a_{ij}} = \frac{(-1)^{i+j}|A_{ij}|}{|A|} \Rightarrow \frac{\partial \ln|A|}{\partial A} = A^{-1'}$$

- Igual que con una función única, una función de varias variables se puede optimizar a través de condiciones necesarias y suficientes de máximos y mínimos
  - Para maximizar o minimizar una función multivariante, la condición de primer orden es análoga a la condición necesaria para funciones de una variable

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

- La interpretación de la condición es la misma: en el óptimo, ningún pequeño incremento puede dar un valor mayor (en caso de maximizar) ni menor (en caso de minimizar) al de la función en este punto
- Las condiciones suficientes son análogas en el caso de las funciones multivariante, pero se utiliza la matriz Hessiana: la matriz Hessiana en el óptimo  $\mathbf{x}^*$  tiene que ser definida positiva para que sea un mínimo y definida negativa para que sea un máximo

$$\mathbf{b}'\mathbf{H}^*\mathbf{b} > 0 \quad \text{for minimum}$$

$$\mathbf{b}'\mathbf{H}^*\mathbf{b} < 0 \quad \text{for maximum}$$

where  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  is any vector

- En el caso con varias variables, no es posible verificar por inspección, de modo que es necesario utilizar métodos analíticos para poder determinar la definición de la Hessiana
- Para comprobar que la Hessiana es una definida negativa, se puede utilizar el criterio de Sylvester y comprobar si las submatrices principales de orden par son positivas y si las de orden impar son negativas. Lo mismo se puede hacer para comprobar que es definida positiva, pero en ese caso, todos los determinantes de las submatrices principales tienen que ser positivos

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\mathbf{x}^*) \right| < 0 \qquad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\mathbf{x}^*) \end{array} \right| > 0$$

1st submatrix

2nd submatrix

- Para condiciones necesarias, en cambio, el criterio es similar: la matriz Hessiana en el óptimo  $\mathbf{x}^*$  tiene que ser semidefinida positiva para que sea un mínimo y semidefinida negativa para que sea un máximo

$$\mathbf{b}'H^*\mathbf{b} \geq 0 \quad \text{for minimum}$$

$$\mathbf{b}'H^*\mathbf{b} \leq 0 \quad \text{for maximum}$$

where  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  is any vector

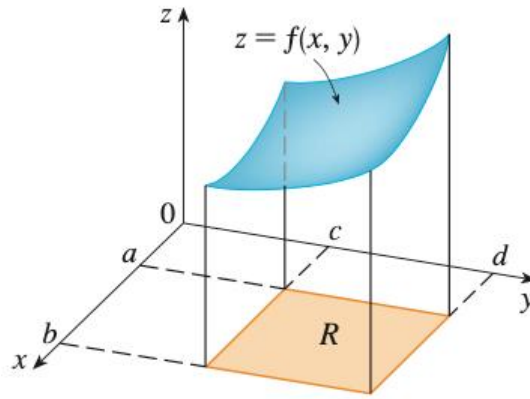
- Para comprobar que la Hessiana es una semidefinida positiva o negativa, el criterio de Sylvester no se puede aplicar (no solo importan las submatrices principales), pero se tienen que revisar todas las submatrices posibles para cada orden (no solo las principales)
- Finalmente, es posible aplicar los resultados anteriores para la diferenciación implícita, para el efecto de las derivadas sobre el gráfico de una función y para el teorema de Taylor
  - Aunque muchas funciones  $f$  vistas expresan la imagen  $f(x)$  (como una variable y normalmente) en función de  $x$  de manera explícita, estas también se pueden definir implícitamente como una relación entre ellas
    - Para poder encontrar la derivada de  $y$ , no hace falta resolver la ecuación para  $y$  en términos de  $x$ , si no que se puede diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a  $x$  y así solucionarla para  $dy/dx$

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{d}{dx}c \Rightarrow \frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}$$

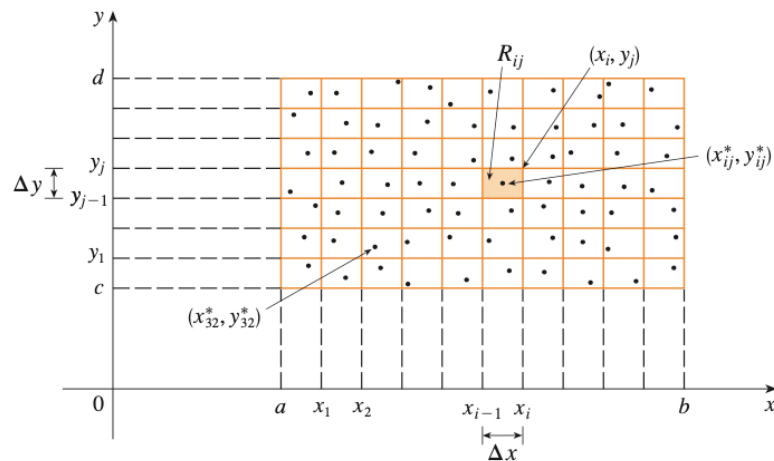
## Las integrales múltiples

- Es necesario referirse al problema geométrico del volumen de un sólido con tal de poder definir nociones de sumas de Riemann dobles y de integrales dobles, ya que hay una relación intrínseca
  - Considerando una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de dos variables definida en un rectángulo cerrado  $R \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  y asumiendo que  $f(x, y) \geq 0$ , el gráfico de  $f$  es una superficie con ecuación  $z = f(x, y)$ . Siendo  $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$  un sólido encima de  $R$  y bajo el gráfico de  $f$ , se intenta encontrar el volumen de  $S$



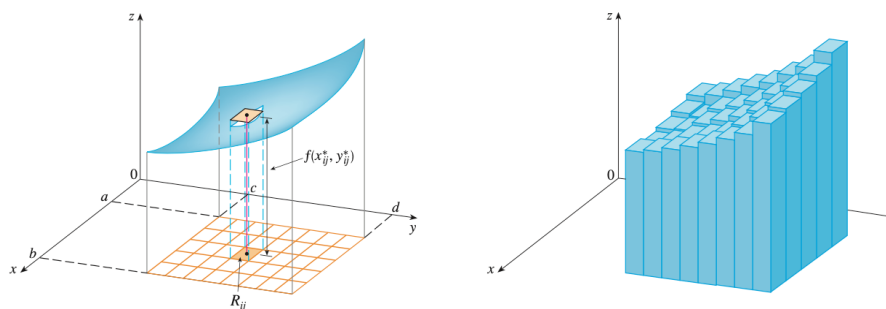


- El primer paso es dividir el rectángulo en subrectángulos, por lo que se crea una partición  $\mathbf{P}$  de  $[a, b]$  de  $m$  intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de la misma longitud  $|[x_{i-1}, x_i]| = (b - a)/m$  y una partición  $\mathbf{P}'$  de  $[c, d]$  de  $n$  intervalos  $[y_{j-1}, y_j]$  de la misma longitud  $|[y_{j-1}, y_j]| = (d - c)/n$ . Esto permite formar subrectángulos  $R_{ij} \equiv \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$  con área  $\Delta A = |[x_{i-1}, x_i]| |[y_{j-1}, y_j]|$



- Escogiendo un punto de muestra  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  en cada  $R_{ij}$ , entonces se puede aproximar parte de  $S$  que queda sobre  $R_{ij}$  a través de una columna o caja rectangular fina con base  $R_{ij}$  y altura  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ . El volumen de esta caja será  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ , por lo que, si se suman todos los volúmenes de las diferentes cajas, se puede aproximar el volumen total de  $S$  a partir de la siguiente fórmula:

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$



- La intuición de este problema permite ver que, cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , la aproximación se volverá mejor y el volumen se puede obtener calculando el límite de esta suma, el cual se denominará integral doble
- Siendo  $f$  una función de dos variables acotada y continua en un rectángulo cerrado  $R \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  tal que  $f(x, y) \geq 0$ ,  $f$  es integrable en  $R$  y la doble integral de Riemann de  $f$  se define como el siguiente límite (si este existe):

$$\iint_R f \, dA = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

- Esta suma se denomina doble suma de Riemann y se usa para aproximar el valor de la doble integral de Riemann
- La doble integral de Riemann cumple las propiedades de linealidad vistas anteriormente

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA + \iint_R g(x, y) \, dA$$

$$\iint_R c f(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA \quad \text{where } c \text{ is a constant}$$

- Si  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para toda  $(x, y) \in R$ , entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\iint_R f \, dA \geq \iint_R g \, dA$$

- Evaluar integrales dobles es aún más difícil que evaluar integrales simples directamente, pero expresando la integral doble como una integral iterada, es posible evaluar la integral doble de Riemann evaluando dos integrales de Riemann simples
  - Siendo  $f$  una función de dos variables acotada y continua en un rectángulo cerrado  $R \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  tal que  $f(x, y) \geq 0$ , se

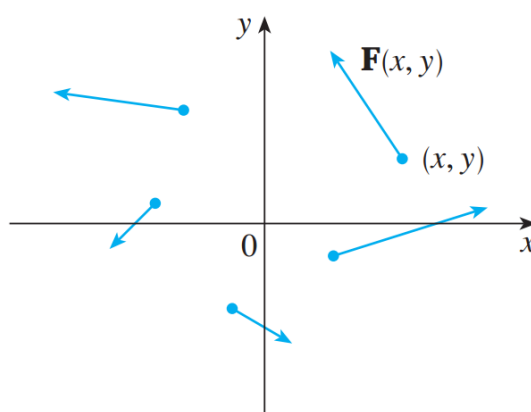
puede integrar parcialmente con respecto a una de las dos variables para obtener una función de la otra variable

$$A(x) = \int_{[c,d]} f \, dy \quad A(y) = \int_{[a,b]} f \, dx$$

- Si se integran estas funciones con respecto a la variable de la cual dependen, se pueden obtener las siguientes equivalencias:

## El cálculo vectorial

- Uno de los conceptos más importantes para poder entender el cálculo vectorial es el concepto de campo vectorial. En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  cuyo rango es el conjunto de vectores  $V_2$  o  $V_3$ , respectivamente
  - Siendo  $D$  un conjunto en  $\mathbb{R}^2$  (una región plana), un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  es una función  $\mathbf{F}$  que asigna a cada punto  $(x, y)$  en  $D$  un vector bidimensional  $\mathbf{F}(x, y)$ 
    - La mejor manera de imaginarse un campo vectorial es dibujar la flecha que representa el vector  $\mathbf{F}(x, y)$  comenzando en el punto  $(x, y)$ . Claramente, es imposible hacer esto para todos los puntos, pero se puede tener una impresión razonable de  $\mathbf{F}$  haciendo esto para algunos puntos representativos en  $D$

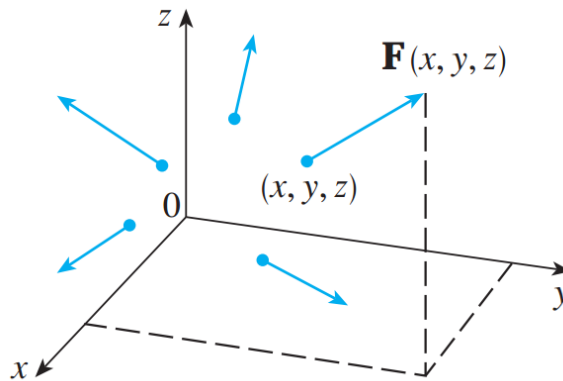


- Debido a que  $\mathbf{F}$  es un vector bidimensional, se puede escribir en términos de funciones componente  $P$  y  $Q$  de la siguiente manera, donde estas son funciones escalares de dos variables que se suelen llamar campos escalares (para distinguirlos de los campos vectoriales):

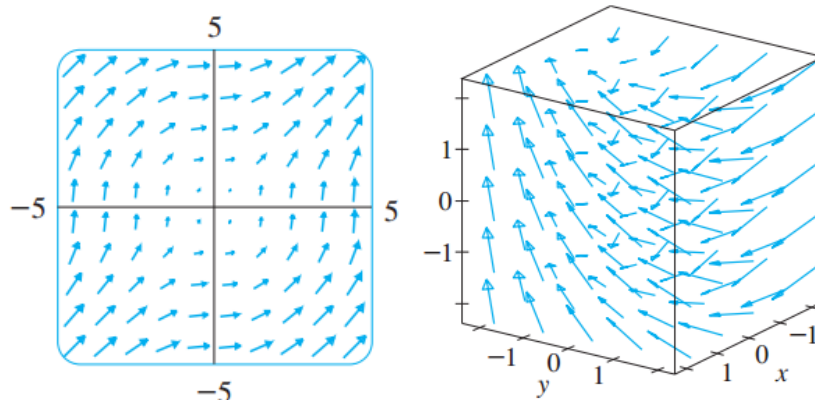
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

- Siendo  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  es una función de  $\mathbf{F}$  que asigna a cada punto  $(x, y, z)$  en  $E$  un vector tridimensional  $\mathbf{F}(x, y, z)$ 
  - El campo vectorial se puede expresar en términos de funciones componentes  $P$ ,  $Q$  y  $R$  de la siguiente manera:

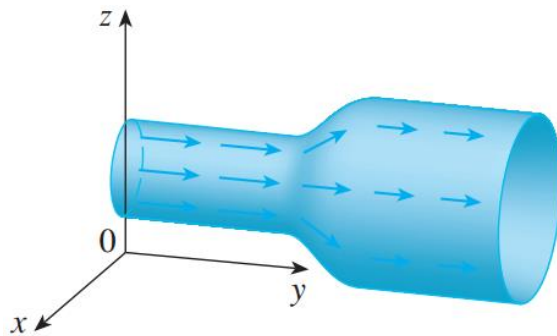
$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$



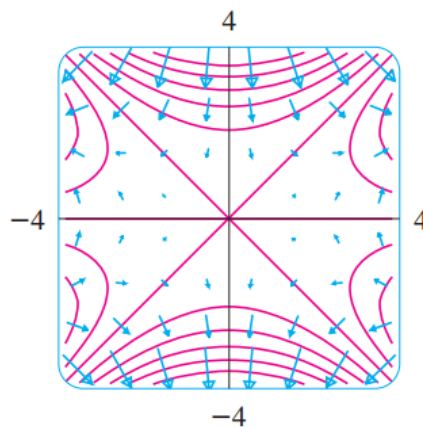
- Los siguientes aspectos y proposiciones sobre los campos vectoriales son útiles
  - Igual que con las funciones vectoriales, se puede definir la continuidad de los campos vectoriales y demostrar que  $\mathbf{F}$  es continua si, y solo si, sus funciones componentes son continuas. Esto aplica para cualquier campo vectorial
  - A veces se identifica el punto  $(x, y, z)$  con su vector de posición  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  y se escribe  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Entonces  $\mathbf{F}$  se vuelve una función que asigna un vector  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  a un vector  $\mathbf{x}$
  - Algunos programas computacionales algebraicos son capaces de graficar los campos vectoriales, dado que permite obtener una mejor impresión del campo vectorial al poder graficar muchos vectores representativos



- Los campos vectoriales son muy importantes para problemas físicos, y permiten extender algunos conceptos
  - Imaginando un fluido fluyendo establemente a lo largo de una tubería y siendo  $\mathbf{V}(x, y, z)$  el vector de la velocidad en el punto  $(x, y, z)$ , entonces  $\mathbf{V}$  asigna un vector a cada punto  $(x, y, z)$  en un cierto dominio  $E$  (el interior de la tubería) y por tanto  $\mathbf{V}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  que se conoce como campo de velocidad. La rapidez se indica por la longitud de la flecha

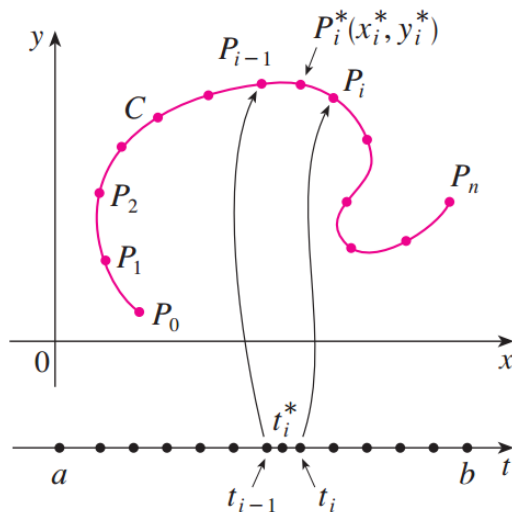


- Si  $f$  es una función escalar de dos variables, su gradiente se define como  $\nabla f(x, y) = (\partial f / \partial x)\mathbf{i} + (\partial f / \partial y)\mathbf{j}$ , de modo que,  $\nabla f$  es un campo vectorial de gradiente en  $\mathbb{R}^2$ . El gráfico indica la dirección del gradiente (por lo que se tendría que pensar en una superficie tridimensional)



- Del mismo modo, para tres variables o tres dimensiones se obtiene que  $\nabla f(x, y, z) = (\partial f / \partial x)\mathbf{i} + (\partial f / \partial y)\mathbf{j} + (\partial f / \partial z)\mathbf{k}$ , por lo que  $\nabla f$  es un campo vectorial de gradiente en  $\mathbb{R}^3$
- A un vector  $\mathbf{F}$  se le llama un campo vectorial conservador si es el gradiente de alguna función escalar, de modo que existe una función  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . En esta situación,  $f$  se conoce como función potencial de  $\mathbf{F}$

- No todos los campos vectoriales son conservadores, pero estos suelen ocurrir sobre todo en física
- Otro concepto clave para el cálculo vectorial es el concepto de la integral de línea o de curvas. Estas se definen de una manera similar a una integral normal, solo que en vez de integrar sobre un intervalo se integra sobre una curva
  - Se comienza el desarrollo planteando una curva plana  $C$  que está dada por las siguientes ecuaciones paramétricas  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  donde  $t \in [a, b]$ 
    - Esto es equivalente a una ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ . Además, se asume que  $C$  es una curva suave, de modo que  $\mathbf{r}'$  es continua y  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$
  - Para poder llegar a la definición de la integral de línea o de curva, es necesario establecer un símil con el desarrollo de la integral pero para una curva paramétrica
    - Si se divide el intervalo  $[a, b]$  del parámetro  $t$  en  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de igual ancho y se deja que  $x_i = x(t_i)$  y  $y_i = y(t_i)$ , entonces los puntos correspondientes  $P_i(x_i, y_i)$  dividen  $C$  en  $n$  subarcos con longitud  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$



- Se escoge cualquier punto  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  en el subarco  $i$  (correspondiendo a un punto  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ ). Si  $f$  es cualquier función de dos variables cuyo dominio incluye la curva  $C$ , se evalúa  $f$  en el punto  $(x_i^*, y_i^*)$  y se multiplica por  $\Delta s_i$  en la siguiente suma, similar a una suma Riemanniana:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

- Tomando el límite de estas sumas, se puede establecer una analogía con la integral de Riemann vista anteriormente
- Si  $f$  se define una curva suave  $C$  dada la ecuación  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , entonces la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $C$  es la siguiente, siempre que el límite exista:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

- Recordando que la longitud de una curva paramétrica  $C$  es  $\int_a^b \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$ , se puede utilizar un argumento similar al que se usó para derivar esta cantidad para demostrar que si  $f$  es una función continua, entonces el límite anterior siempre existe y la siguiente fórmula se puede usar para evaluar la integral de línea:

$$\text{Length of } C = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$$

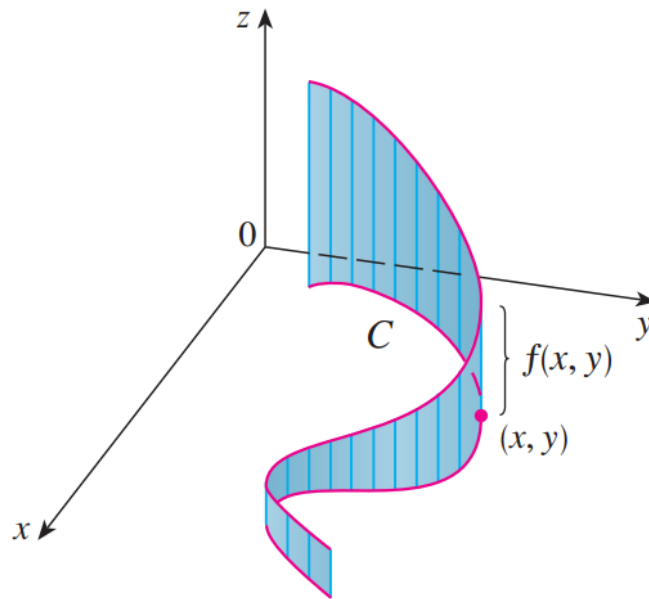
$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

- El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva, siempre que la curva se recorra exactamente una vez a medida que  $t$  aumenta de  $a$  a  $b$
- En el caso especial en el que  $C$  es un segmento de línea que junta  $(a, 0)$  y  $(b, 0)$ , usando  $x$  como el parámetro, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas como  $x = x$  y  $y = 0$  para  $x \in [a, b]$ , obteniendo que la integral de línea se reduce a una integral ordinaria para una variable

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, 0) dx = \int_a^b f(x, 0) dx$$

- Igual que con una integral ordinaria, se puede interpretar la integral de línea como una función positiva como un área. En verdad, si

$f(x, y) \geq 0$ , entonces  $\int_C f(x, y) ds$  representa el área de uno de los lados de “la valla” o “la cortina” que se forma por debajo de la curva  $f(x, y)$ , cuya base es la curva  $C$  y su altura es  $f(x, y)$



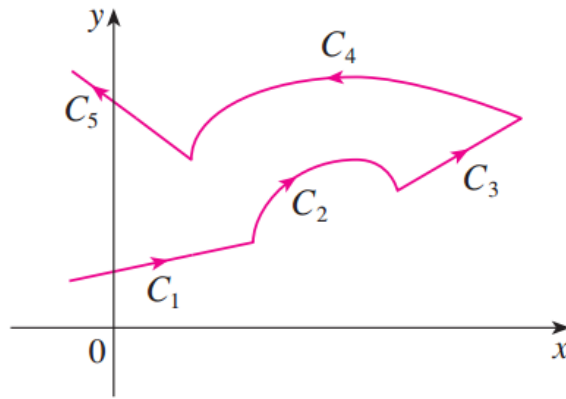
- Si la curva no es un segmento de línea y tampoco se da una función paramétrica para cada variable  $x$  e  $y$ , entonces una de las dos variables tiene que servir como parámetro y estar limitado por sus valores en los puntos en el que comienza y acaba la curva. De este modo, se obtendría una integral con respecto a la variable que sirve de parámetro y se podría calcular

$$f(x, y) = 2x \quad x = x \quad \& \quad y = x^2 \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_C 2x ds = \int_C 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_C 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

- Suponiendo que  $C$  es una curva por piezas que es suave, de modo que  $C$  es la unión de un número finito de curvas suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , en donde  $C_{i+1}$  es el punto terminal de  $C_i$





- A partir de esto, se puede definir la integral de  $f$  a lo largo de  $C$  como la suma de las integrales de  $f$  a lo largo de las piezas suaves de  $C$ :

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

- Cualquier interpretación física de la integral de línea  $\int_C f(x, y) ds$  depende de la interpretación de la función  $f$ . Se pueden hacer varias interpretaciones, pero se puede entender de manera introductoria usando el ejemplo de la masa de una cuerda fina

- Si  $\rho(x, y)$  representa la densidad lineal en un punto  $(x, y)$  de una cuerda fina que tiene la forma de la curva  $C$ , entonces la masa de la parte de la cuerda de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  es aproximadamente  $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ , de modo que la masa total de la cuerda es  $\sum \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$
- Tomando más y más puntos de la curva, se puede obtener la masa  $m$  de la cuerda como el valor límite de estas aproximaciones:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

- El centro de masa de la función de densidad  $\rho$  se localiza en el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , que se define de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds$$

- Es posible obtener dos otras integrales de línea al reemplazar  $\Delta s_i$  por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  o  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  en la definición anteriormente vista. Estas se llaman integrales de línea de  $f$  a lo largo de  $C$  con respecto a  $x$  e  $y$

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

- Cuando se quiere distinguir la integral de línea original de estas, la original se conoce como integral de línea con respecto a la longitud de arco (la longitud de la curva)
- Las fórmulas anteriores se pueden evaluar expresando todo en términos de  $t$ , por lo que  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  hacen que  $dx = x'(t) dt$  y  $dy = y'(t) dt$ :

$$\int_C f(x, y) dx = \int_C f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_C f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

- Frecuentemente ocurre que las integrales de línea con respecto a  $x$  e  $y$  ocurren a la vez. Cuando esto ocurre, lo normal es abreviar escribiendo lo siguiente:

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

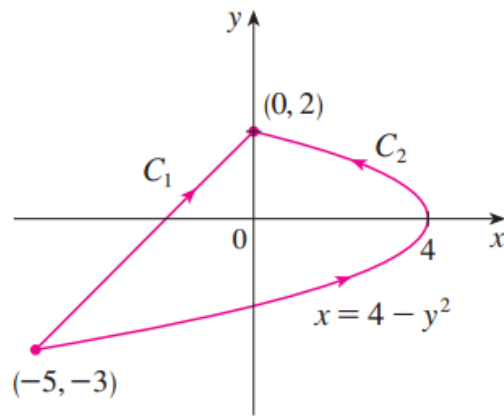
- Cuando uno está configurando una integral de línea, a veces lo más difícil es imaginar la representación paramétrica de una curva con una descripción geométrica dada
  - En particular, normalmente se necesita parametrizar un segmento de línea, de modo que es útil memorizar que la representación vectorial del segmento de línea que comienza en  $\mathbf{r}_0$  y acaba en  $\mathbf{r}_1$  se da por la siguiente fórmula:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

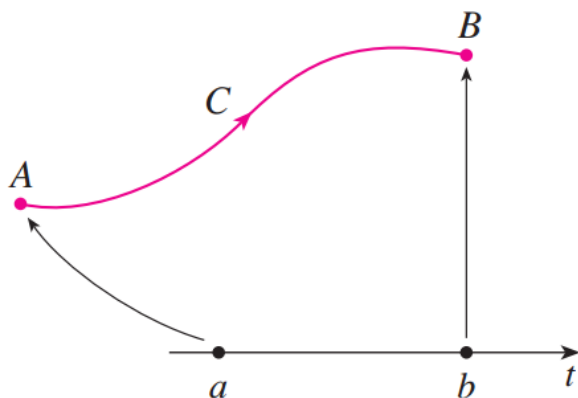
- De este modo, cuando se dice que un segmento de línea comienza en un punto y acaba en otro, se pueden identificar ambos puntos como  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}_1$  para poder obtener  $x(t)$  e  $y(t)$  como una función de  $t \in [0, 1]$

$$\mathbf{r}_0 = (-5, -3) \quad \& \quad \mathbf{r}_1 = (0, 2)$$

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -5(1 - t) + 0t = 5t - 5 \\ y(t) = -3(1 - t) + 2t = 5t - 3 \end{cases}$$



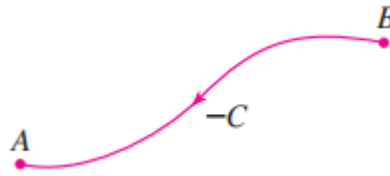
- Si no es un segmento de línea, entonces una de las dos variables ( $x$  o  $y$ ) tiene que servir como parámetro y estar limitado por sus valores en los puntos en el que comienza y acaba la curva. De este modo, se obtendría una integral con respecto a la variable que sirve de parámetro
- Al calcular las integrales de línea, se puede ver que, aunque dos curvas tengan el mismo punto de inicio y el mismo punto de final, el valor de la integral de la línea puede ser diferente. Además, aunque ambas curvas fueran iguales, la dirección de la curva también afecta al valor final
  - Esto se debe a que, en general, el valor no solo depende de los puntos al comienzo y al final de la curva, sino que también depende del camino que sigue la curva y de la dirección u orientación de esta
  - En general, una parametrización dada  $x(t)$  y  $y(t)$  para  $t \in [a, b]$  determina la orientación de una curva  $C$ , con la dirección positiva correspondiendo a valores incrementales del parámetro  $t$



- Si  $-C$  denota la curva consistiendo de los mismos puntos que  $C$  pero con la orientación opuesta, entonces se obtienen los siguientes resultados:

$$\int_{-C} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx$$

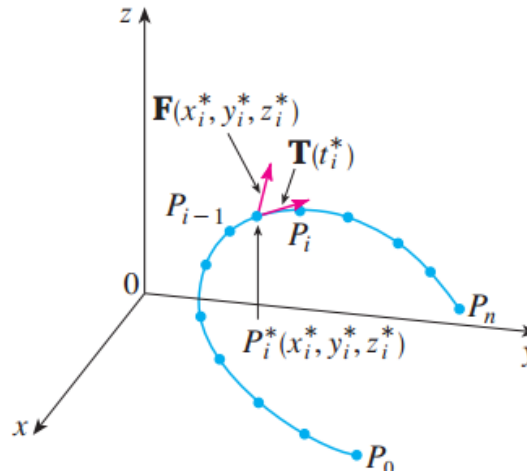
$$\int_{-C} f(x, y) dy = - \int_C f(x, y) dy$$



- Pero si se integra con respecto a la longitud de arco, el valor de una integral de línea no cambia cuando la orientación de la curva se revierte:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

- Esto es porque  $\Delta s_i$  siempre es positivo, mientras que  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$  cambian de signo cuando la orientación de  $C$
- Todo lo visto para líneas en el plano y en el espacio se puede generalizar para campos vectoriales. Para poder motivar la generalización, se usa el ejemplo del trabajo y una fuerza variable
  - Se tiene que recordar que el trabajo hecho por una fuerza variable  $f(x)$  en mover una partícula de  $a$  a  $b$  en el eje  $x$  es  $\int_a^b f(x) dx$  y que el trabajo hecho por una fuerza constante  $\mathbf{F}$  en mover un objeto del punto  $P$  al punto  $Q$  es  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$ , donde  $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$  es el vector del desplazamiento
  - Se supone que  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  es un campo vectorial o de fuerza en  $\mathbb{R}^3$ , tal que el campo gravitacional o el campo de fuerza eléctrica. Un campo vectorial o de fuerza en  $\mathbb{R}^2$  se puede entender como un caso especial en el que  $R = 0$  y  $P$  y  $Q$  dependen solo de  $x$  e  $y$ . Uno quiere calcular el trabajo que hace esta fuerza en mover una partícula a lo largo de la curva suave  $C$
  - Se divide  $C$  en subarcos  $P_{i-1}P_i$  con longitudes  $\Delta s_i$  al dividir el intervalo del parámetro  $[a, b]$  en subintervalos del mismo ancho. Escogiendo un punto  $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  en el subarco  $i$  correspondiendo al valor de parámetro  $t_i^*$ , si  $\Delta s_i$  es pequeña, entonces mientras la partícula se mueve de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  a lo largo de la curva, esta procede aproximadamente en la dirección de  $\mathbf{T}(t_i^*)$ , el vector unitario tangente en  $P_i^*$



- Por lo tanto, el trabajo hecho por una fuerza  $\mathbf{F}$  en mover una partícula de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  es aproximadamente la siguiente:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

(displacement approximation)  $\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)$

(force)  $\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$

- De este modo, se puede expresar el trabajo total de mover una partícula a lo largo de la curva  $C$  a través de una suma riemanniana, donde  $\mathbf{T}(x, y, z)$  es el vector unitario tangente en el punto  $(x, y, z)$  en  $C$ :

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

- Intuitivamente, las aproximaciones son mejores cuanto mayor es  $n$  (la cantidad de subarcos), de modo que se define el trabajo  $W$  hecho por un campo de fuerza  $\mathbf{F}$  como el límite de la suma riemanniana anterior:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i = \\ &= \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \end{aligned}$$

- Esta ecuación dice que el trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco del componente tangencial de la fuerza
- Si la curva  $C$  se da por una ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , entonces  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$  y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \left[ \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] d\mathbf{r} = \\
&= \int_a^b \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\
&\quad \text{as } d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) \, dt
\end{aligned}$$

- Esta integral normalmente se abrevia normalmente como  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  y ocurre en otras áreas de la física
- Siendo  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continua definido en una curva suave  $C$  dada una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  para  $t \in [a, b]$ , entonces la integral de línea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  es la siguiente:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

- Finalmente, se denota la conexión entre las integrales de línea de campos vectoriales y las integrales de línea de los campos escalares (funciones escalares como  $f(x, y)$ )
- Suponiendo que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  en  $\mathbb{R}^3$  se da por una forma de componentes por la ecuación  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \\
&= \int_a^b (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot [x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}] \, dt = \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\
&\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \, dt
\end{aligned}$$

- Como el resultado final no es más que la suma de integrales de línea con respecto a cada una de las variables, se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz \quad \text{where } \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

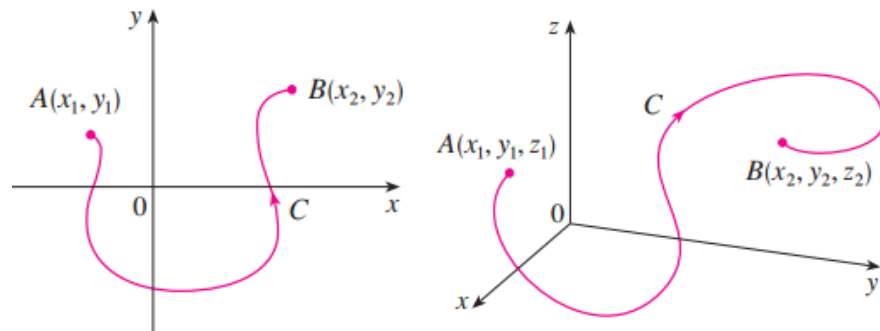
- Recordando el teorema fundamental del cálculo, si se piensa en el  $\nabla f$  de una función  $f$  de dos o tres variables como una derivada de  $f$ , entonces se puede obtener una versión del teorema fundamental para integrales de línea
  - Siendo  $C$  una curva suave dada por la función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$  y siendo  $f$  diferenciable de dos o tres variables cuyo vector gradiente  $\nabla f$  es continuo en  $C$ , entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

- El teorema dice que se puede evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservador (el campo vectorial de gradiente de la función potencial  $f$ ) simplemente con saber el valor de  $f$  en los puntos finales de  $C$ . Esto es lo mismo que decir que la integral de línea del gradiente es el cambio neto en  $f$
- Si  $f$  es una función de dos variables y  $C$  es una curva plana con punto inicial  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , o si se tienen tres variables y puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$



- El teorema se puede demostrar para el caso más general:

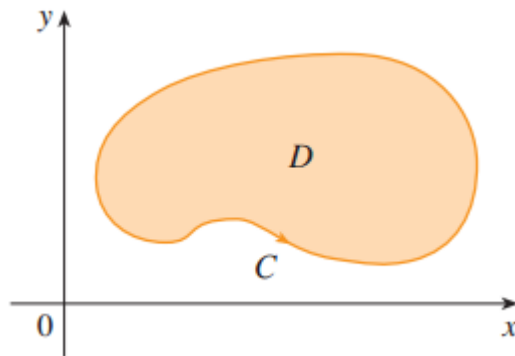
$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) dt = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

- Aunque el resultado se ha demostrado para curvas paramétricas  $C$  suaves, también se mantiene para curvas suaves por piezas. Esto se puede ver al dividir  $C$  en un número finito de curvas suaves y sumando los resultados de las integrales de línea para cada curva suave (que respetan la igualdad anterior)
- Uno de los teoremas más importantes de todo el cálculo vectorial es el teorema de Green, el cual permite relacionar entre las integrales de línea alrededor de una curva cerrada simple  $C$  y una doble integral en la región plana  $D$  acotada por  $C$ 
  - Siendo  $C$  una curva paramétrica positivamente orientada, suave por piezas y cerrada simplemente en el plano y siendo  $D$  la región acotada por  $C$ , si  $P$  y  $Q$  tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene  $D$ , entonces se cumple la siguiente igualdad:

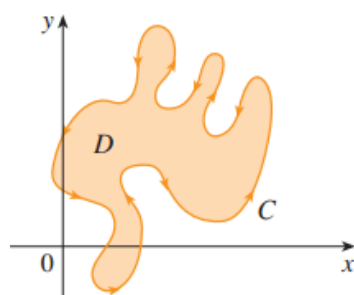
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy$$

- Se asume que el dominio  $D$  contiene todos los puntos dentro de  $C$  y todos los puntos sobre  $C$

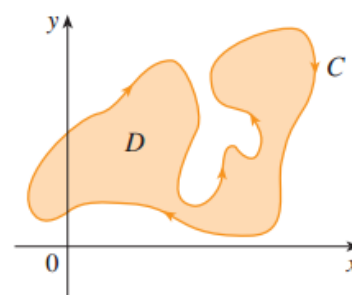


- En este teorema se usa la convención de que la orientación positiva de una curva cerrada simplemente  $C$  se refiere a un solo recorrido contrario al sentido de las agujas del reloj de  $C$ . Por lo tanto, si  $C$  se da por una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , entonces la región  $D$  siempre está a la izquierda cuando el punto  $\mathbf{r}(t)$  recorre  $C$  (si fuera en el sentido de las agujas del reloj, sería a la derecha)





(a) Positive orientation



(b) Negative orientation

- La notación siguiente a veces se usa para indicar que la integral de línea se calcula usando la orientación positiva de la curva cerrada  $C$ :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint P dx + Q dy$$

- Otra notación para la curva de contorno orientada positivamente de  $D$  es  $\partial D$ , de modo que la ecuación del teorema de Green se puede expresar de la siguiente manera:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

- El teorema de Green debería ser considerado como la contraparte del teorema fundamental del cálculo para integrales dobles: tal como en la segunda parte del teorema, se puede ver como en la parte izquierda de las ecuaciones se tienen las derivadas de las funciones y a la derecha se tienen los valores originales de la función (solo en la frontera de este dominio)
- El teorema de Green no es fácil de demostrar en general, pero se puede proporcionar una demostración para el caso especial cuando la región sea de tipo I y II, las cuales se conocen como regiones simples:
- Ahora se puede definir dos operaciones que se pueden realizar en campos vectoriales y que juegan un rol básico en aplicaciones del cálculo vectorial para flujo de fluidos y electricidad y magnetismo. Cada operación se parece a la diferenciación, pero uno produce un campo vectorial mientras que la otra produce un campo escalar
  - Si  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y las derivadas parciales de  $P$ ,  $Q$  y  $R$  existen, entonces el rizo o *curl* de  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  definido de la siguiente manera:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

- Con tal de poder memorizar la construcción de esta operación, se introduce el operador  $\nabla = \mathbf{i}(\partial/\partial x) + \mathbf{j}(\partial/\partial y) + \mathbf{k}(\partial/\partial z)$ , que tiene sentido cuando se produce el gradiente  $\nabla f$ . De este modo, si se considera que  $\nabla = [(\partial/\partial x), (\partial/\partial y), (\partial/\partial z)]$ , entonces se puede considerar el producto vectorial con el campo vectorial  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \text{curl } \mathbf{F}\end{aligned}$$

- Por lo tanto, la mejor manera de recordar la fórmula y para futuras aplicaciones es ver que se respeta la siguiente igualdad:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

- Si  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y las derivadas parciales de  $P$ ,  $Q$  y  $R$  existen, entonces la divergencia de  $\mathbf{F}$  es la función de tres variables definida de la siguiente manera:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- Se puede observar que  $\text{curl } \mathbf{F}$  es un campo vectorial, pero  $\text{div } \mathbf{F}$  es un campo escalar. En términos del operador del gradiente, la divergencia de  $\mathbf{F}$  se puede escribir simbólicamente como el producto escalar de  $\nabla$  y  $\mathbf{F}$ :

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

- Uno de los teoremas más importantes del cálculo vectorial, derivado del teorema de Green, es el teorema de la divergencia, el cual se puede interpretar como una extensión para campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ 
  - Siendo  $E$  una región sólida simple,  $S$  una superficie de frontera de  $E$  con orientación positiva (hacia afuera) y  $\mathbf{F}$  un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contine  $E$ , entonces se respeta la siguiente igualdad:

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_E \text{div } \mathbf{F} dV$$

- Esta igualdad se puede reescribir utilizando la notación de producto escalar:

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

- Por lo tanto, el teorema de la divergencia muestra que, bajo ciertas condiciones, el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la superficie frontera de  $E$  es igual a la triple integral de la divergencia de  $\mathbf{F}$  sobre  $E$

## Otra notación operatoria

- Para poder representar multiplicaciones muy largas, se suele utilizar la notación del producto
  - Si  $m$  y  $n$  son dos números enteros tal que  $m \leq n$ , el símbolo  $\prod_{k=m}^n a_k$  (el producto de  $k = m$  hasta  $n$  de  $a_k$ ) es el producto de todos los elementos  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$

- La forma expandida del producto permite expresar la multiplicación como un producto individual de elementos. Esta permite observar un patrón para poder obtener una fórmula general para los términos y se escribe de la siguiente manera:

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_n$$

- A  $k$  se le llama el índice del producto,  $m$  es el límite inferior del producto y  $n$  es su límite superior
- Una definición matemática más precisa es la definición recursiva del producto, que expresa que si  $m$  es un número entero, entonces:

$$\prod_{k=m}^m a_k = a_m \text{ and } \prod_{k=m}^n a_k = \left( \prod_{k=m}^{n-1} a_k \right) a_n \text{ for all integers } n > m$$

- Como el producto no es más que una multiplicación muy larga, este cumple con la propiedad multiplicativa

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \left( \prod_{k=m}^n b_k \right)$$

- Es posible que las variables o elementos que se quiere utilizar dependan de dos o más índices, por lo que se utiliza la sumatoria sobre, triple, etc.

$$\prod_{k=m}^n \prod_{l=m}^n a_{k,l} = a_{m,m} a_{m,m+1} \dots a_{m+1,m} a_{m+1,m+1} \dots a_n$$

- Como el producto no es más que una multiplicación muy larga, este cumple con la propiedad multiplicativa

$$\prod_{k=m}^n \prod_{l=m}^n (a_{k,l} b_{k,l}) = \left( \prod_{k=m}^n \prod_{l=m}^n a_{k,l} \right) \left( \prod_{k=m}^n \prod_{l=m}^n b_{k,l} \right)$$

- A través del concepto del factorial, también se puede derivar el concepto de coeficiente binomial
  - El factorial, denotado como  $n!$  se define como el producto de todos los números desde 1 hasta  $n$

$$n! = n(n-1) \dots 3 \times 2 \times 1$$

- Se puede definir el factorial cuando  $n = 0$  como equivalente a la unidad. Este resultado es conveniente para muchas fórmulas matemáticas

$$0! = 1$$

- A partir de la definición matemática de factorial, se puede ver como hay ciertas equivalencias útiles a la hora de operar con factoriales

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \qquad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- El coeficiente binomial se define como el número de subconjuntos de tamaño  $r$  (tendrán  $r$  elementos) de un conjunto con  $n$  elementos. Para todos los números  $0 \leq r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

- A partir de la definición matemática del coeficiente binomial, se puede obtener una equivalencia útil a la hora de operar

$$\binom{n+1}{n} = n+1$$