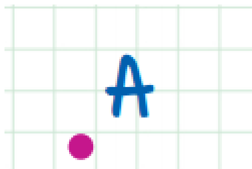
# GEOMETRÍA AFÍN

Iker Caballero Bragagnini

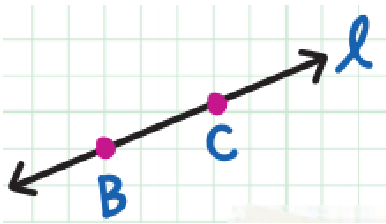
## Tabla de contenido

## La geometría básica: elementos básicos y paralelismo

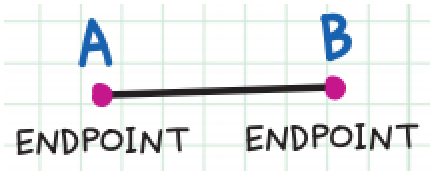
- La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las formas, las líneas, los ángulos y el espacio y su relación entre ellos
    - Algunos de los elementos básicos más importantes de la geometría son los siguientes:
        - Un punto es un elemento que indica una localización, y se denota con una letra $A$



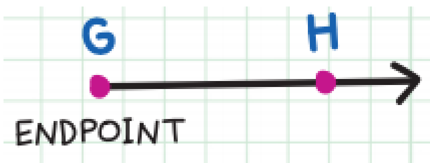

        - Una línea es un camino recto que se extiende infinitamente en direcciones opuestas, la cual se denota con una flecha horizontal sobre los dos puntos en la línea $\overleftrightarrow{BC}$ o como $\ell$



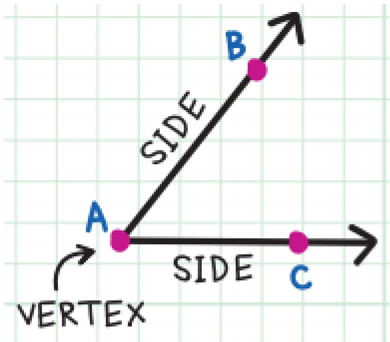

        - Un segmento de línea es una parte de una línea entre dos puntos extremos, el cual se denota por una barra horizontal entre dos puntos de la línea $\overline{AB}$. Este segmento, por tanto, tiene una longitud $AB$



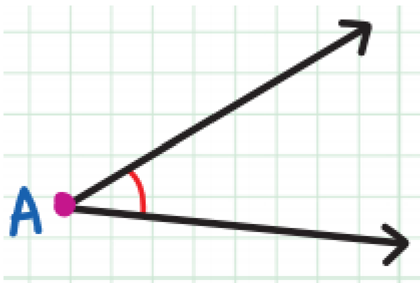

        - Un rayo es una parte de una línea que comienza en un punto y extiende infinitamente en una dirección, denotado como una flecha horizontal que se extiende en una dirección



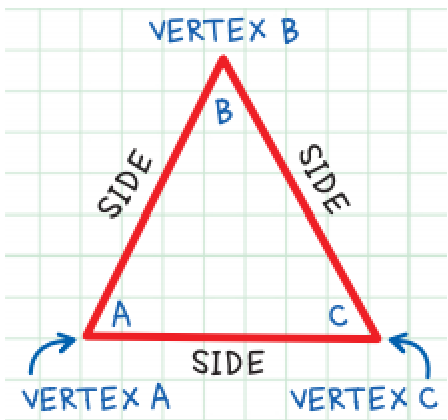
- Un vértice es el punto de intersección entre dos o más segmentos de líneas, rayos o líneas, y el nombre del ángulo que forma el vértice es una letra $A$



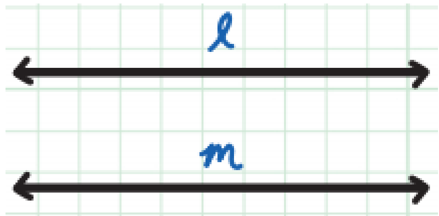

- Un ángulo se forma por dos rayos con el mismo punto extremo: el vértice. Este se denota como $\angle A$, $\angle BAC$ o $\angle CAB$



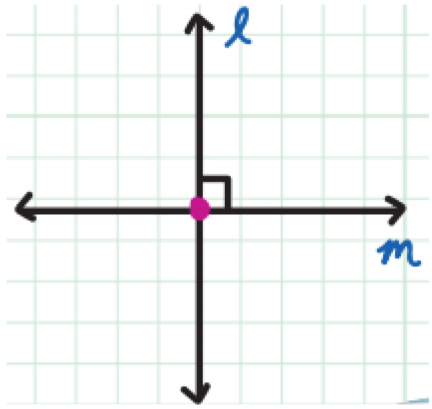

- Un triángulo es una forma con tres lados y tres vértices, denotado como $\Delta ABC$



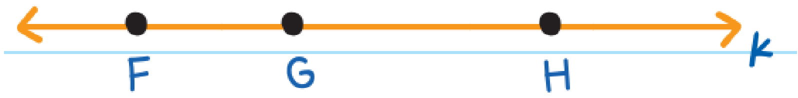

- Las líneas paralelas son líneas que siempre están a la misma distancia y nunca se encuentran, denotadas por $\ell || m$



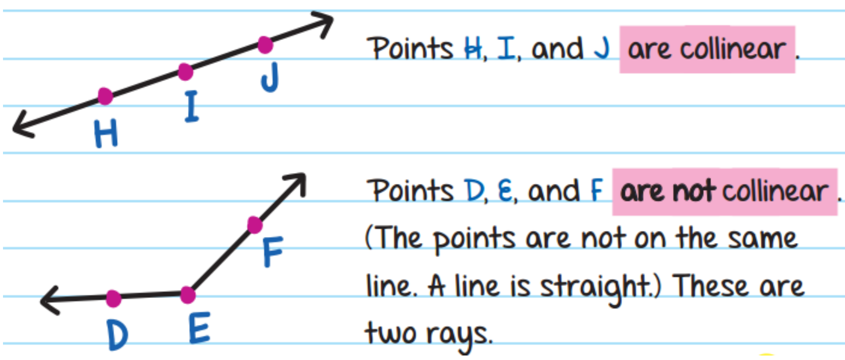

- Las líneas perpendiculares son líneas que cruzan para formar cuatro ángulos rectos, denotadas por $\ell \perp m$



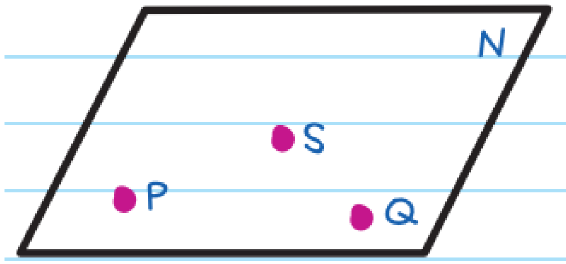

- Una línea es recta, no tiene ancho y se extiende infinitamente en direcciones opuestas, de modo que es un elemento unidimensional o plano




  - Se dice que un conjunto de puntos es colineal si estos puntos pertenecen a la misma línea

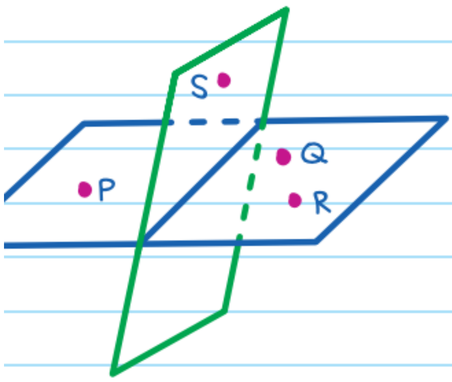



- La geometría plana lidia con formas "planas", las cuales son bidimensionales. Un plano es una superficie plana (bidimensional) que se extiende infinitamente en todas direcciones



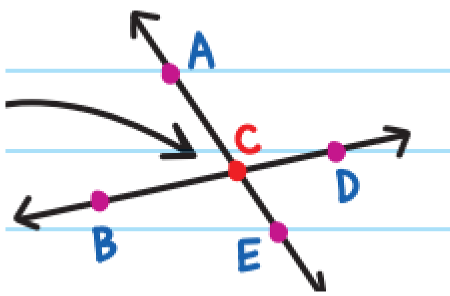

- Normalmente se nombran los planos con una letra mayúscula $N$ o con tres puntos $PSQ$ cualesquiera en el plano (en cualquier orden)

- Un conjunto de puntos es coplanar cuando estos pertenecen al mismo plano

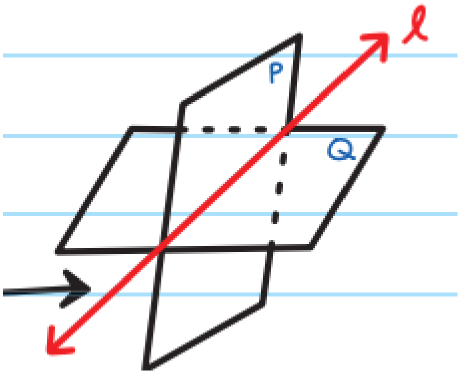



- Existen principalmente tres formas tipos de intersecciones que se dan entre líneas y planos

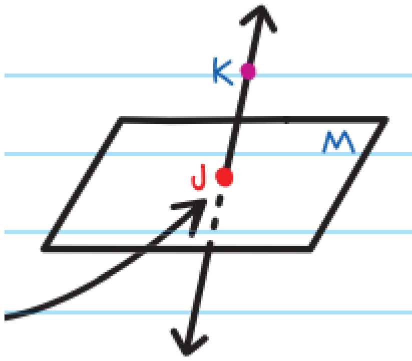
  - Dos líneas se pueden cruzar en un punto



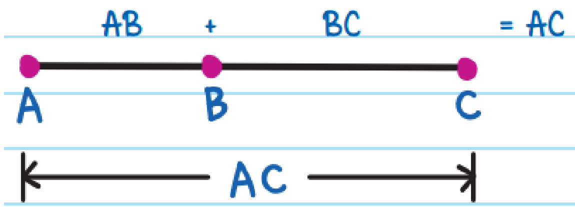

  - Dos planos se pueden cruzar a lo largo de una línea



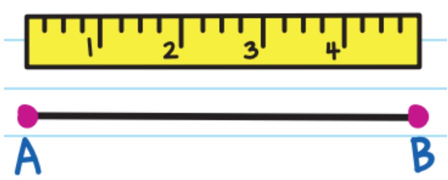

- Un plano y una línea se pueden cruzar en un punto



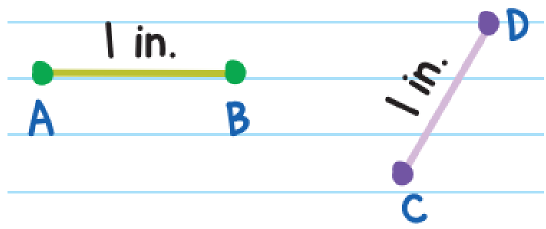

- Si $B$ es un punto en un segmento $\overleftrightarrow{AC}$ de una línea, entonces $AC = AB + BC$



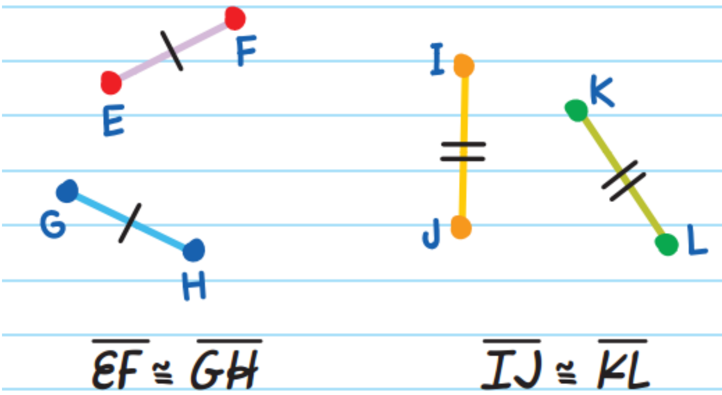

  - Si se suman las longitudes de segmentos más pequeños, se puede encontrar la longitud del segmento entero. Estas longitudes se denotan por los dos puntos $AB$



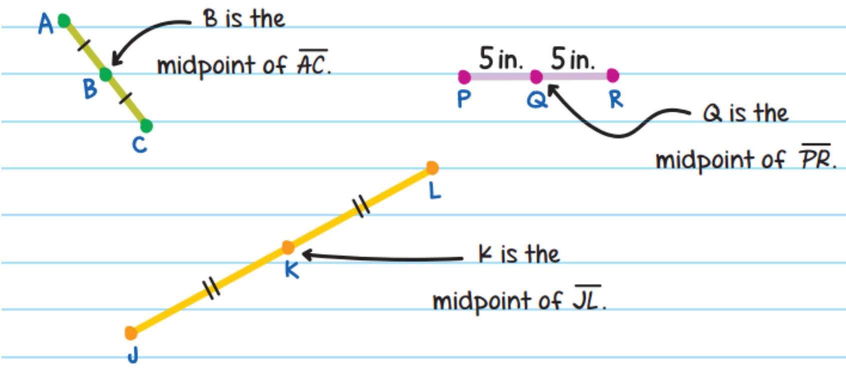

- Dos segmentos de línea son congruentes si estos tienen la misma longitud, y la congruencia se denota por el símbolo ≅



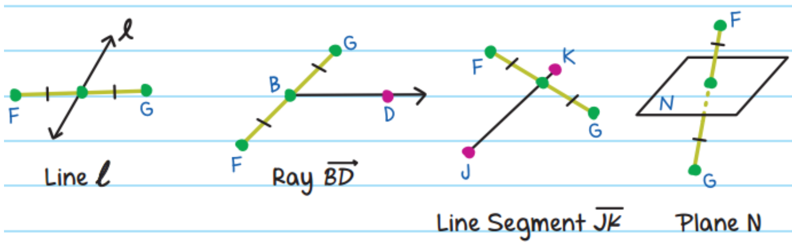

- A veces se usa una marca intermedia para demostrar que dos segmentos de una línea son congruentes. El número de marcas en los segmentos indica cuáles son los segmentos son congruentes entre ellos



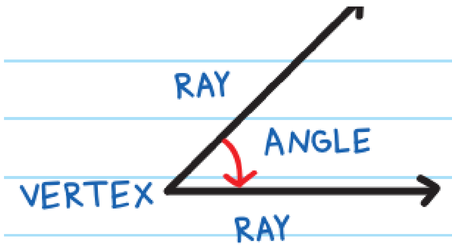

- El punto medio de un segmento de línea es el punto que está exactamente en el medio, dividiendo la línea en dos segmentos congruentes



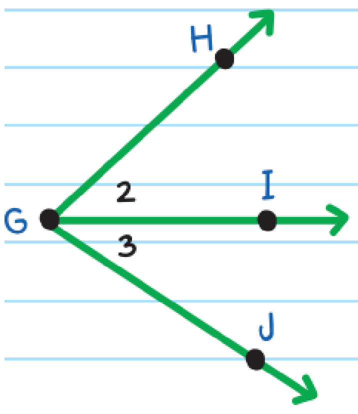

- Un bisector de un segmento es una línea, un rayo, un segmento o un plano que pasa a través de un segmento en su punto medio (lo biseccion a)



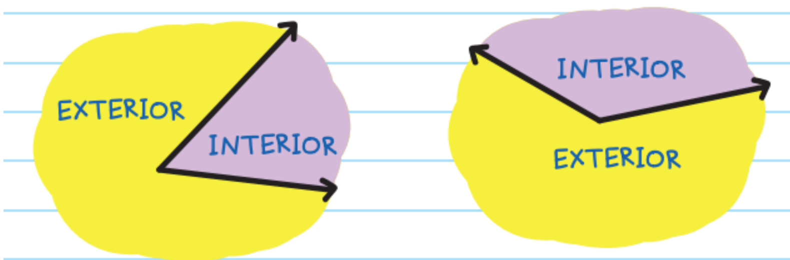

- Los ángulos son uno de los elementos más importantes de toda la geometría, de modo que se estudia de manera más detallada
    - Tal y como se ha mencionado, un ángulo (denotado por $\angle$) se forma por dos rayos con un punto extremo común, llamado vértice (denotado por $\angle A$)



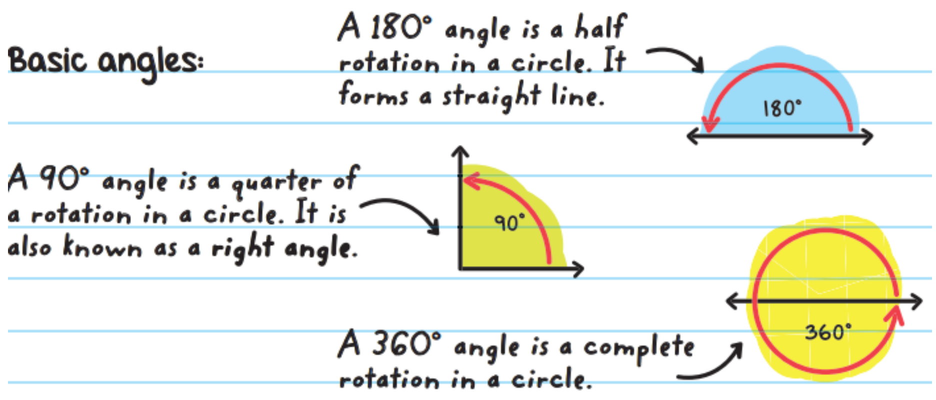

        - Si dos o más ángulos comparten el mismo vértice, no se puede usar el nombre de los ángulos solo con el vértice porque no quedaría claro cuál es




        - El espacio alrededor de un ángulo se puede clasificar como interiores y exteriores, siendo el interior el más pequeño



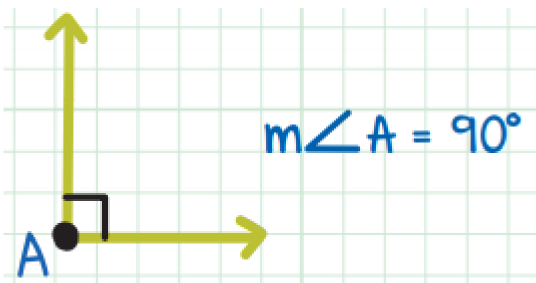
- La medida del ángulo $\angle A$ (el tamaño del ángulo) se escribe como $m\angle A$. Se utilizan los grados para medir el tamaño de un ángulo, y existen 360° en un círculo



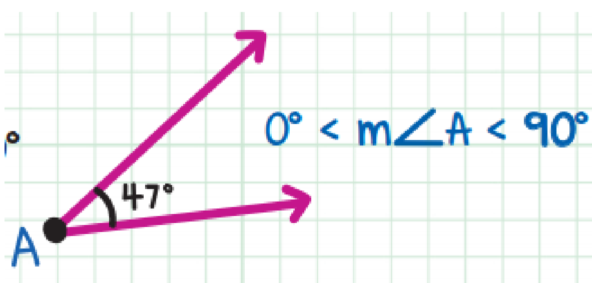

  - Los ángulos más importantes son el ángulo de 90°, que es un cuarto de una rotación en un círculo (ángulo recto); el ángulo de 180°, que es una mitad de una rotación en un círculo y forma una línea recta; y el ángulo de 360°, que es una rotación completa en un círculo

- Los tipos de ángulos más importantes son los siguientes:

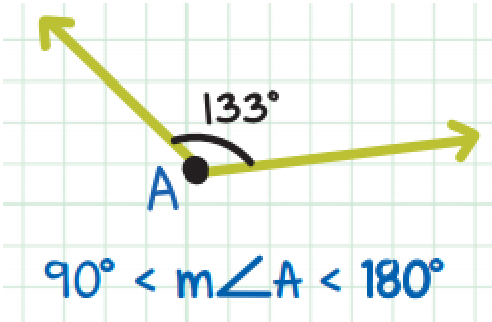
  - El ángulo recto, que es un ángulo que mide 90°



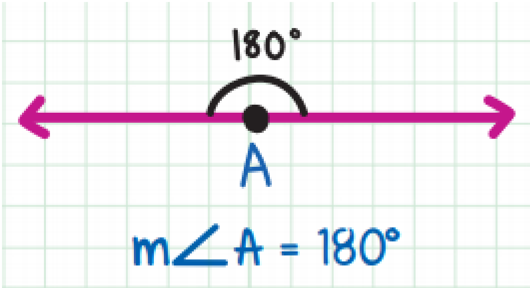

  - El ángulo agudo, que es un ángulo que mide más de 0° pero menos de 90°



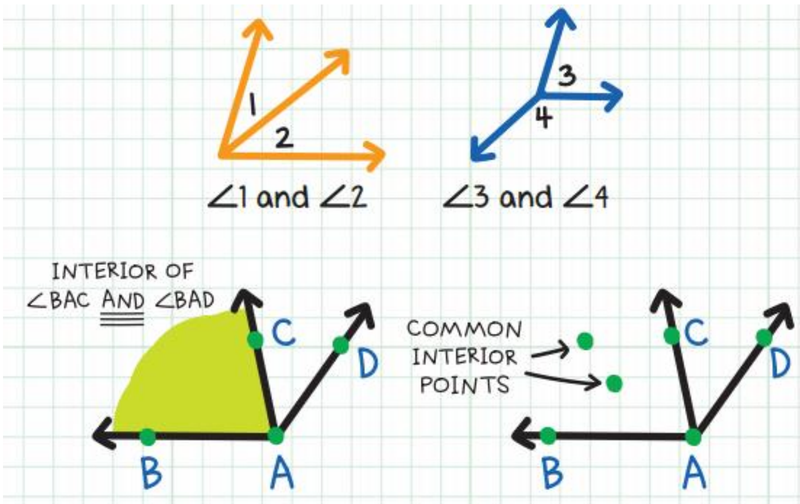

  - El ángulo obtuso, que es un ángulo que mide más de 90° pero menos de 180°



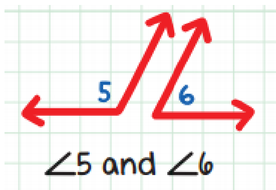

- El ángulo plano, que es un ángulo que mide exactamente 180°



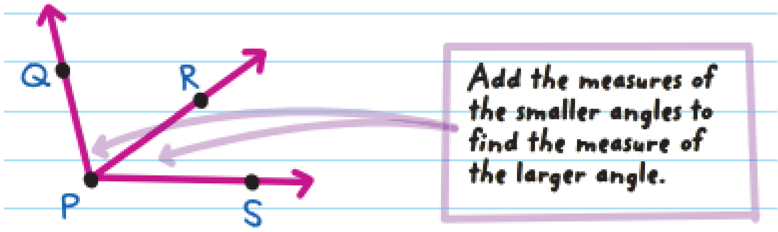

- Los ángulos adyacentes son ángulos que están en el mismo plano, tienen un vértice común, tienen un lado común y no tienen puntos interiores comunes




- Los ángulos no adyacentes son ángulos que no tienen un vértice o un costado en común

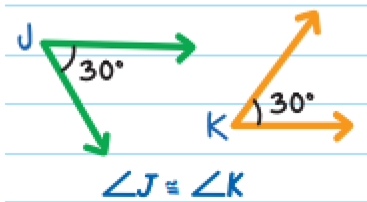


- Si el punto $R$ está en el interior de $\angle QPS$, entonces $m\angle QPR + m\angle RPS = m\angle QPS$

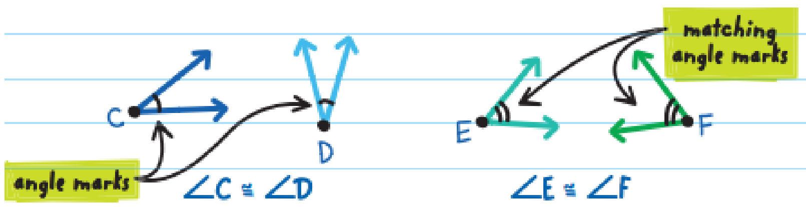



  - Esto significa que se pueden agregar las medidas de los ángulos más pequeños para encontrar la medida del ángulo completo o más grande

- Dos ángulos son congruentes si sus medidas de ángulos son iguales

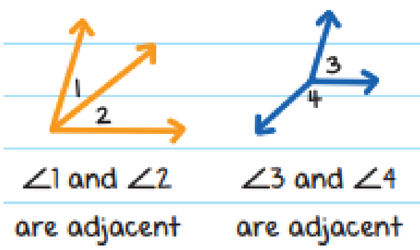



  - Se pueden usar marcas en el interior del ángulo con tal de mostrar que estos ángulos son congruentes

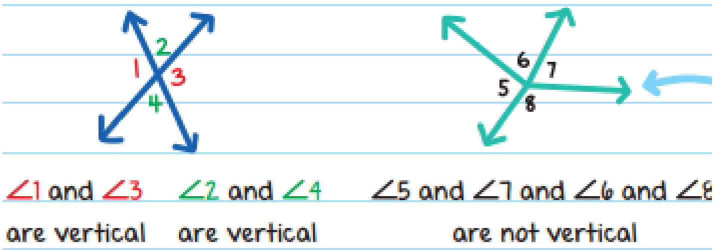



- Dos ángulos pueden estar relacionados entre ellos por sus medidas o por sus orientaciones, los cuales se conocen como pares de ángulos. Existen varios tipos de pares de ángulos, algunos de los cuales son los siguientes:

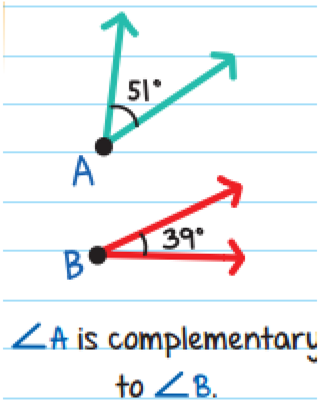
  - Los ángulos adyacentes son un tipo de pares de ángulos que se han mencionado anteriormente



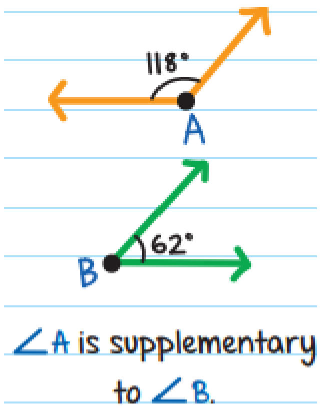
- Los ángulos verticales son ángulos no adyacentes y opuestos a cada uno, los cuales están formados cuando dos líneas se cruzan y tienen el mismo vértice y tiene ángulos congruentes



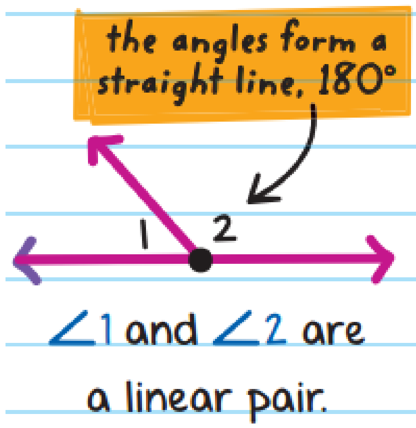

- Los ángulos complementarios son dos ángulos cuya suma es de 90°



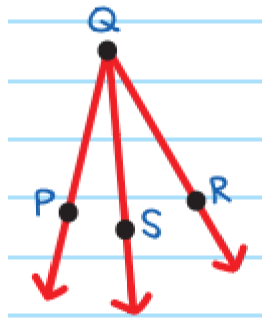

- Los ángulos suplementarios son dos ángulos cuya suma es de 180°



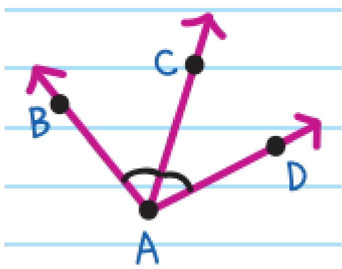

- Un par linear es un par de ángulos que son adyacentes y suplementarios a la vez



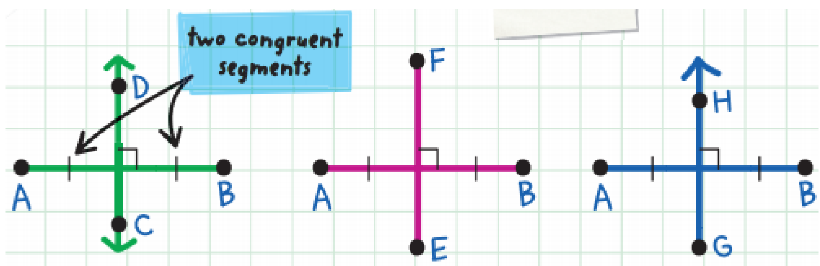

- Un bisector de un ángulo es un rayo que divide un ángulo en dos ángulos congruentes



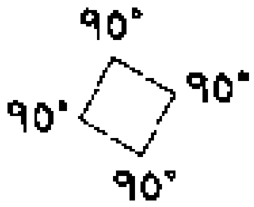

  - Si $\overrightarrow{AC}$ es el ángulo bisector de $\angle BAD$, entonces $\angle BAC = \angle CAD$



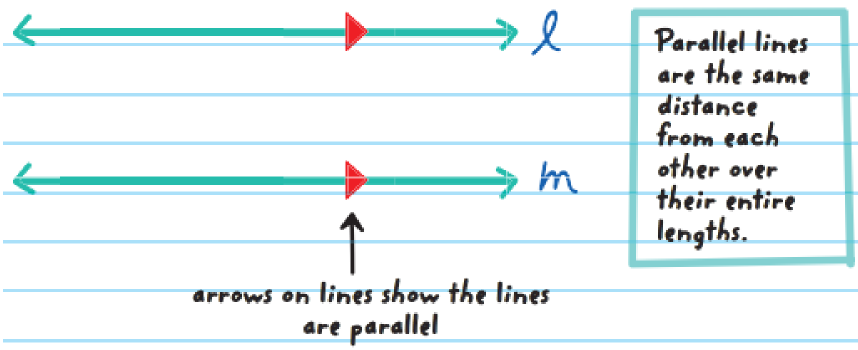

- Un bisector perpendicular es una línea, un rayo o un segmento de línea que divide un segmento de línea en dos segmentos congruentes y forma cuatro ángulos rectos



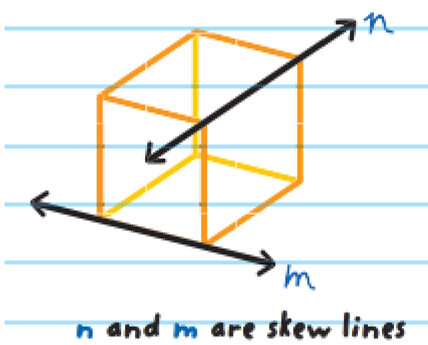

  - Las líneas, rayos o segmentos perpendiculares forman ángulos de 90°



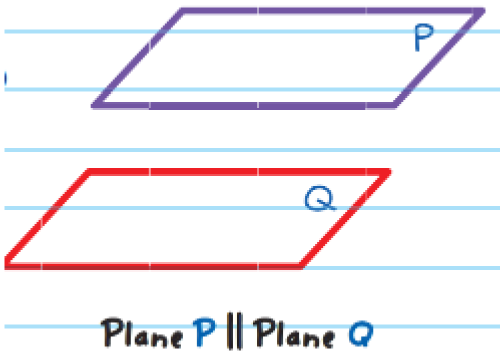

- Anteriormente, se ha mencionado el concepto de elementos paralelos, de modo que es necesario analizar detalladamente el concepto de paralelismo
    - Algunos de los tipos de paralelismo más importantes son los siguientes:
        - Las líneas paralelas, denotadas por $\ell || m$, son líneas en el mismo plano que nunca se cruzan ni se tocan, las cuales se suelen indicar por flechas dentro de las líneas. Las líneas paralelas están a la misma distancia de cada una a lo largo de su longitud



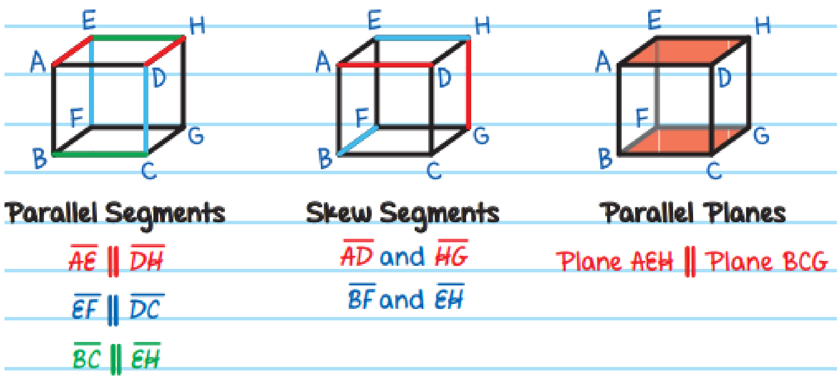

        - Las líneas cruzadas o *skew lines* son dos líneas en diferentes planos las cuales nunca se tocan



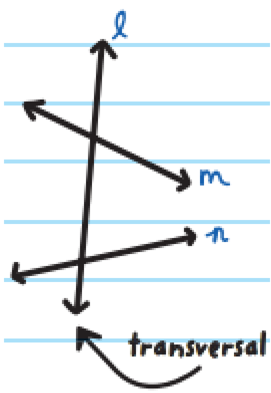

        - Los planos paralelos son dos planos que no se cruzan



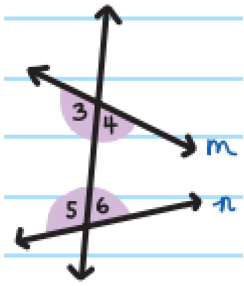

- En una forma geométrica se pueden encontrar estos tres tipos de paralelismo



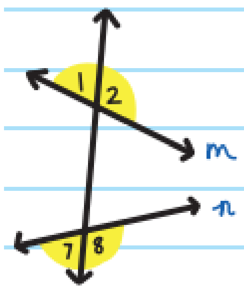

- Una transversal es una línea en la que se cruzan dos o más líneas. Los ángulos que se forman por una transversal y las líneas que se cruzan tienen nombres especiales



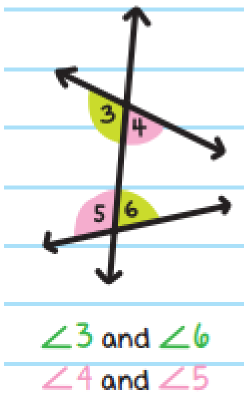

  - Los ángulos interiores son todos los ángulos que están entre las líneas que se cruzan por la transversal



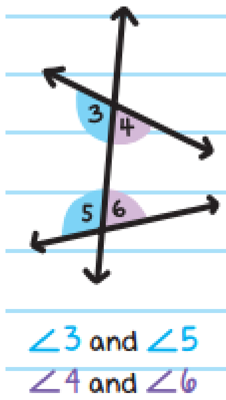

- Los ángulos exteriores son todos los ángulos que no están entre las líneas que se cruzan por la transversal



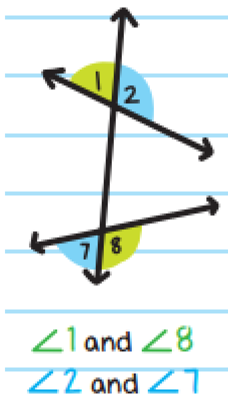

- Los ángulos interiores alternos son ángulos interiores en los lados opuestos de la transversal



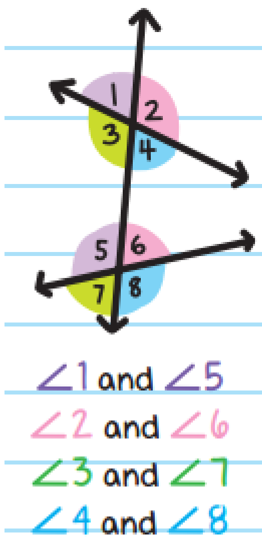

- Los ángulos interiores correspondientes son ángulos interiores en el mismo lado de la transversal




- Los ángulos interiores alternos son ángulos interiores en los lados opuestos de la transversal

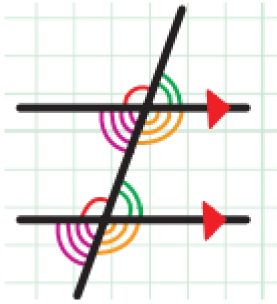



- Los ángulos correspondientes son ángulos en la misma posición relativa en cada línea del mismo lado de la transversal

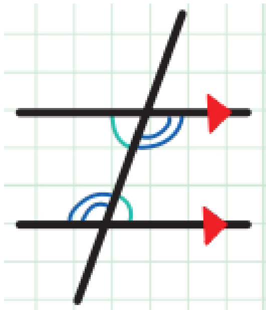



- Algunos de los postulados y teoremas más importantes relacionados con el paralelismo son los siguientes:

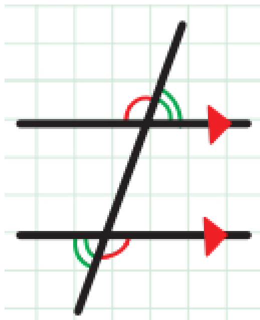
- Si dos líneas paralelas se cortan por una transversal, sus ángulos correspondientes son congruentes



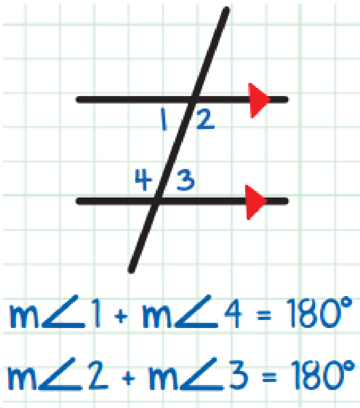
- Si dos líneas paralelas se cortan por una transversal, entonces sus ángulos interiores alternos son congruentes



- Si dos líneas paralelas se cortan por una transversal, entonces sus ángulos exteriores alternos son congruentes

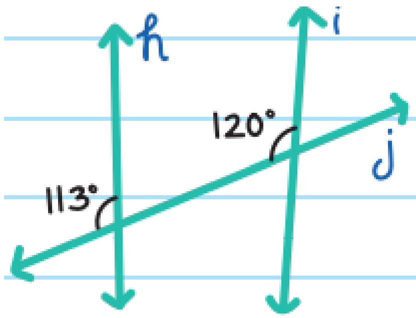


- Cuando dos líneas paralelas se cruzan por una transversal, entonces sus ángulos interiores correspondientes son suplementarios

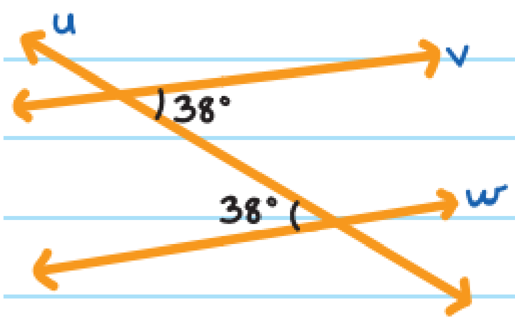



- Los conversos de los teoremas y resultados anteriores también son verdad

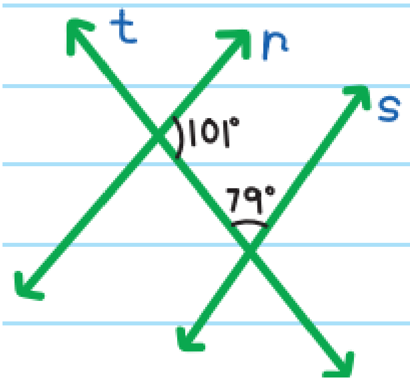
  - Si los ángulos correspondientes no son congruentes, entonces las líneas $h$ e $i$ no son paralelas



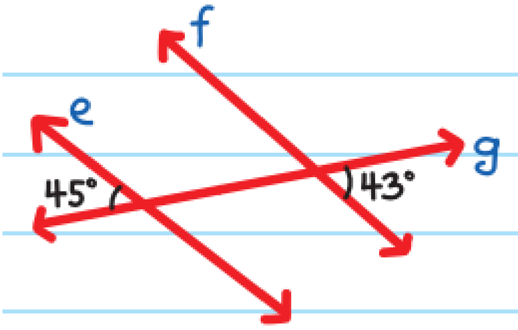

  - Si los ángulos interiores alternos son congruentes, entonces las líneas $v$ y $w$ son paralelas




  - Si los ángulos interiores correspondientes son suplementarios, entonces las líneas $r$ y $s$ son paralelas



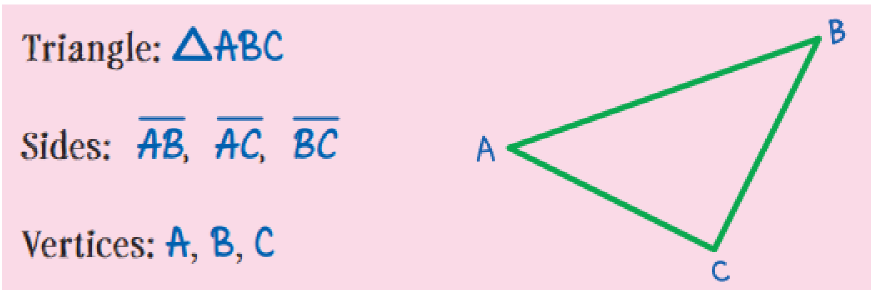

- Si los ángulos exteriores alternos no son congruentes, entonces las líneas $e$ y $f$ no son paralelas




- Si los ángulos exteriores alternos no son congruentes, entonces las líneas $e$ y $f$ no son paralelas

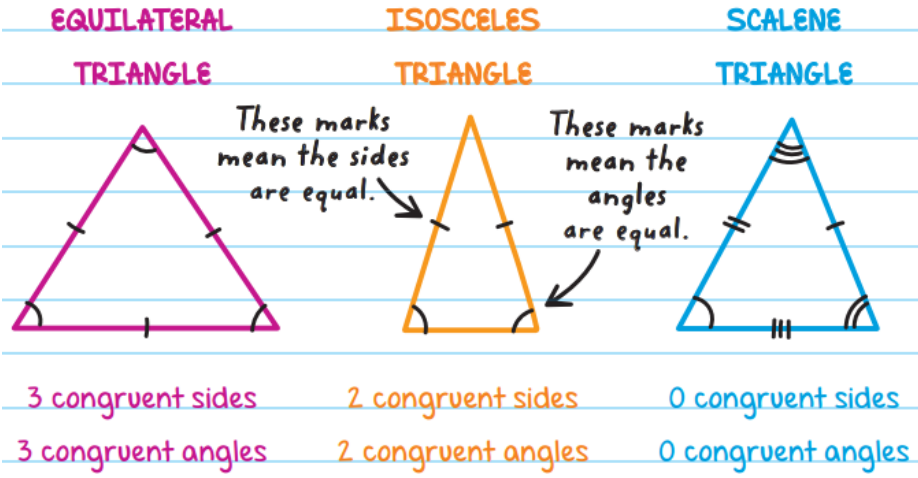
## La geometría básica: triángulos y congruencia

- Los polígonos son figuras cerradas bidimensionales con al menos tres lados. Uno de los polígonos más importantes es el triángulo, el cual se estudia en detalle
  - Un triángulo es un polígono con tres lados y tres ángulos, denotado por $\Delta ABC$ donde $A$, $B$ y $C$ son sus vértices




- Se pueden clasificar los triángulos a partir de sus lados o a partir de sus ángulos

- Si se clasifica a los triángulos por sus lados, se pueden encontrar tres clases de triángulos: los equiláteros, los isósceles y los escalenos



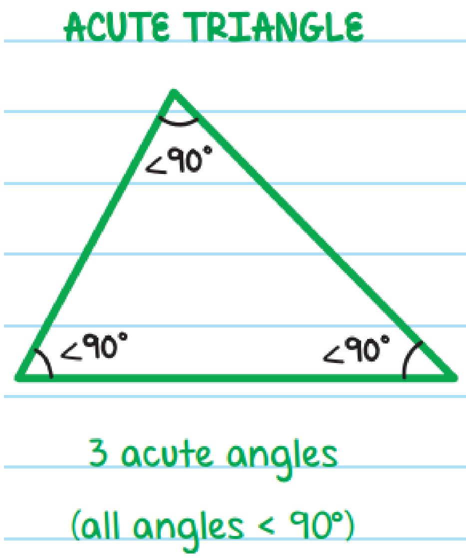

  - Un triángulo equilátero es un triángulo con tres lados y ángulos congruentes

  - Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados y ángulos congruentes

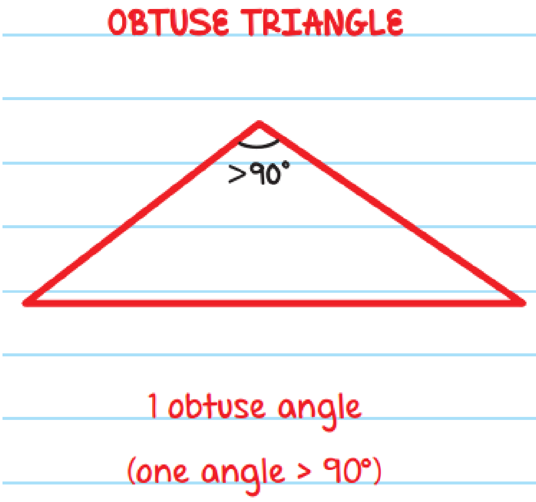
  - Un triángulo escaleno es un triángulo sin ningún lado ni ángulo

- Si se clasifica a los triángulos por sus ángulos, se pueden encontrar cuatro clases de triángulos: los agudos, obtusos, rectos y equiángulos

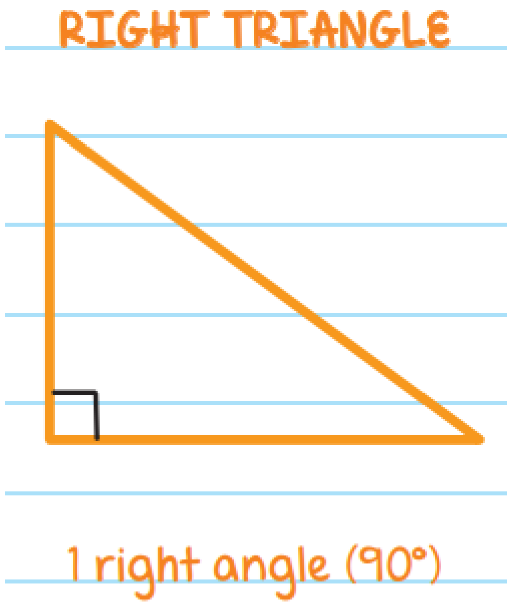
  - Un triángulo agudo es un triángulo el cual tiene tres ángulos agudos (todos son menores de 90°)



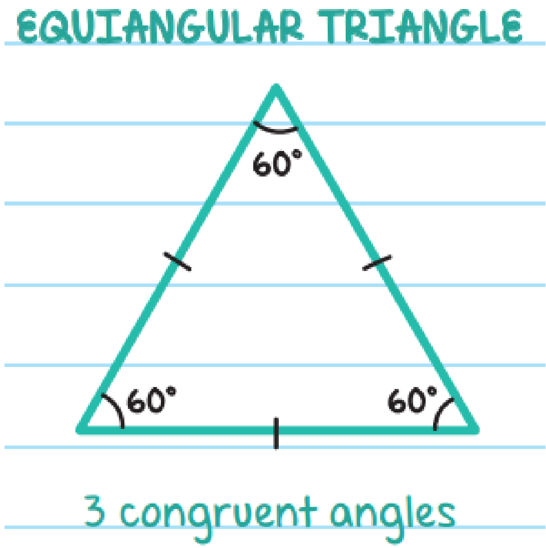
- Un triángulo obtuso es un triángulo el cual tiene un ángulo obtuso (de más de 90°)



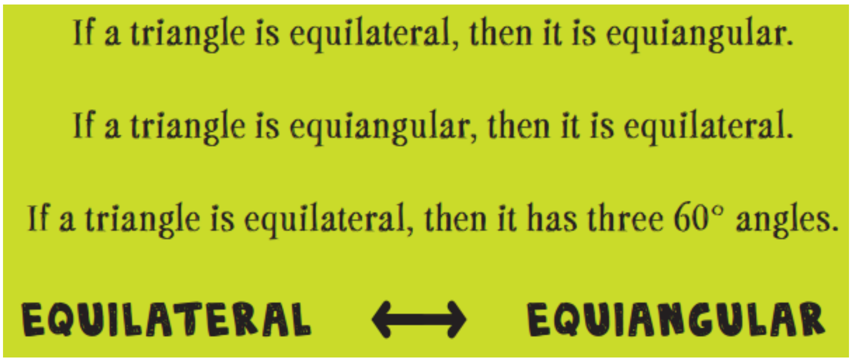

- Un triángulo recto es un triángulo el cual tiene un ángulo (de 90°)




- Un triángulo equiángulo es un triángulo el cuál tiene tres ángulos congruentes

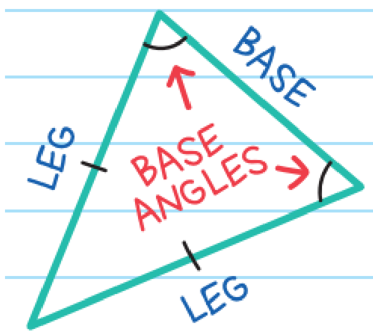



- Ambos tipos de clasificaciones tienen relación a partir de las siguientes equivalencias:

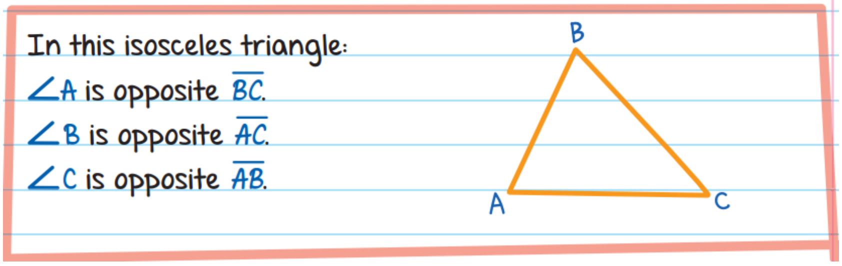



  - Se pueden combinar ambos sistemas de clasificación para describir un triángulo más precisa

- En un triángulo isósceles, los lados que son iguales en longitud se denominan piernas y el otro base. Los ángulos opuestos a las piernas se denominan ángulos base




  - Se le llama ángulo opuesto a un lado a aquel ángulo que apunta a la dirección donde está el lado




- Si se conocen dos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo, entonces solo hay un intervalo abierto de valores en los que se encuentra la longitud del tercer lado $\overline{AC}$. Ese lado debe de pertenecer a $(\overline{AB} - \overline{BC}, \overline{AB} + \overline{BC})$ si $\overline{AB} > \overline{BC}$ o a $(\overline{BC} - \overline{AB}, \overline{AB} + \overline{BC})$ si $\overline{AB} < \overline{BC}$

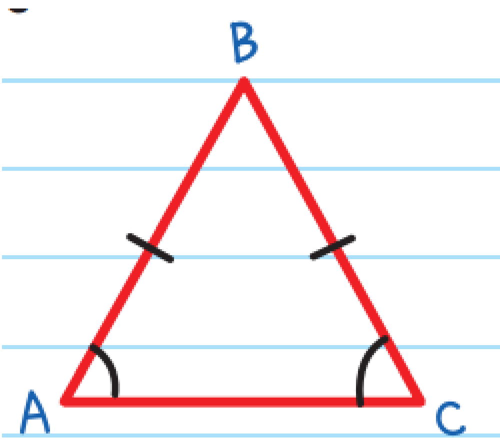
  - Esto se debe a que, si se aplanan los dos lados a la base, se obtiene una línea recta con longitud $\overline{AB} + \overline{BC}$, de modo que como el rectángulo tiene que tener ángulos positivos, el lado no puede ser mayor o igual a $\overline{AB} + \overline{BC}$ (sería una línea recta, no un triángulo)

$$\overline{AB} + \overline{BC}$$

  - Del mismo modo, si se achatan los dos lados hasta encontrarse y coincidir entre ellos, el lado restante del triángulo debería ser más que la diferencia con tal de que los ángulos sean positivos (si no, sería una línea recta vertical, no un triángulo)

$$\overline{AB} - \overline{BC}$$

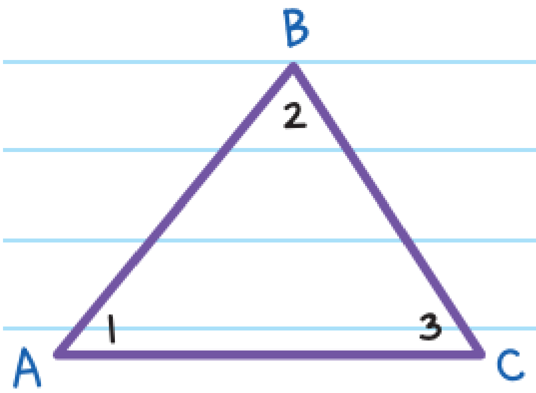
- Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes



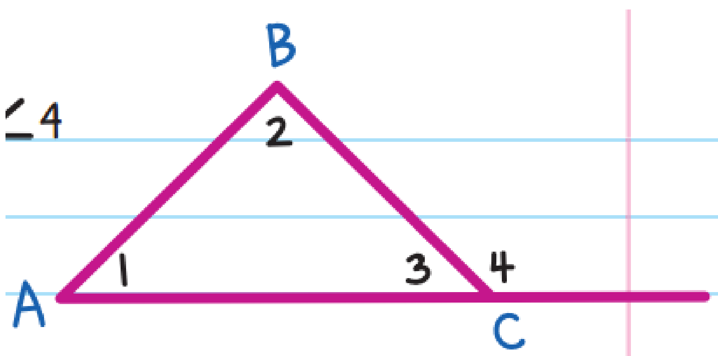

- Por lo tanto, si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A \cong \angle B$. El converso de esto también es verdad, por lo que si $\angle A \cong \angle B$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

- A partir de la noción de ángulos interiores y exteriores de un triángulo, es posible obtener los siguientes resultados:

  - La suma de los tres ángulos interiores es de 180°, de modo que se cumple $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

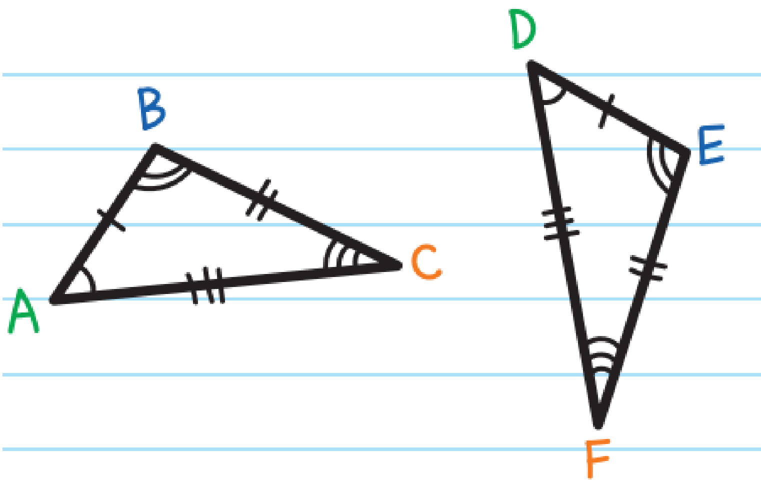



  - La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes, de modo que $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$




- La noción de congruencia permite derivar resultados útiles para poder identificar triángulos congruentes a partir de varios elementos

- Los polígonos congruentes tienen la misma forma y tamaño. Sus ángulos correspondientes (aquellos en la misma posición relativa en cada figura) y sus lados correspondientes son congruentes

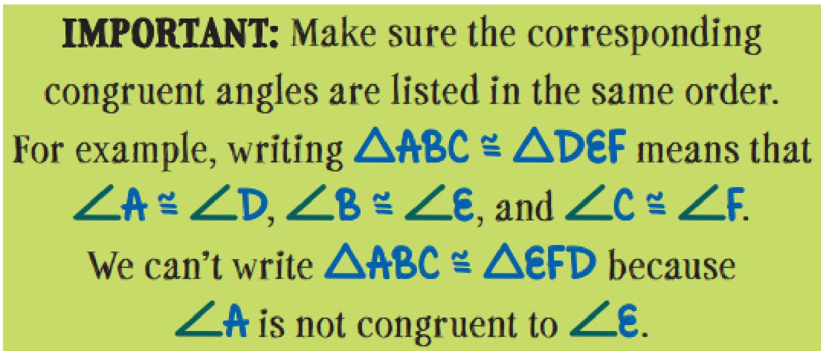



    - Si $\Delta ABC$ y $\Delta DEF$ son congruentes, los ángulos correspondientes son congruentes. Los lados correspondientes también son congruentes

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \Rightarrow \quad \angle A \cong \angle D \quad \angle B \cong \angle E \quad \angle C \cong \angle F$$

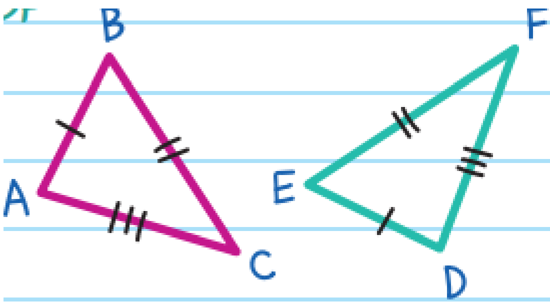
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \cong \overline{DE} \quad \overline{BC} \cong \overline{EF} \quad \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

    - Hay que asegurarse que los ángulos están enumerados en el mismo orden


**IMPORTANT:** Make sure the corresponding congruent angles are listed in the same order. For example, writing $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ means that $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, and $\angle C \cong \angle F$. We can't write $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ because $\angle A$ is not congruent to $\angle E$.

- Si los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

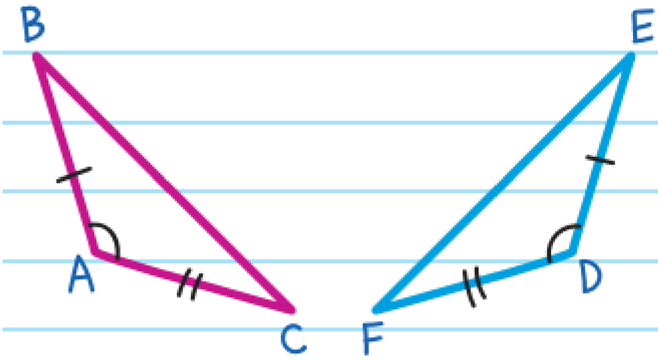



- Si se sabe que los lados correspondientes son congruentes, entonces los ángulos también serán congruentes

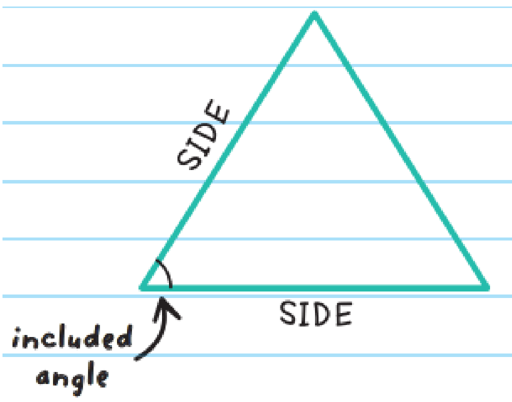
$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF} \;\Rightarrow\; \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

$$\Rightarrow \angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$$

- Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a los dos lados y el ángulo incluido (respectivamente) del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes

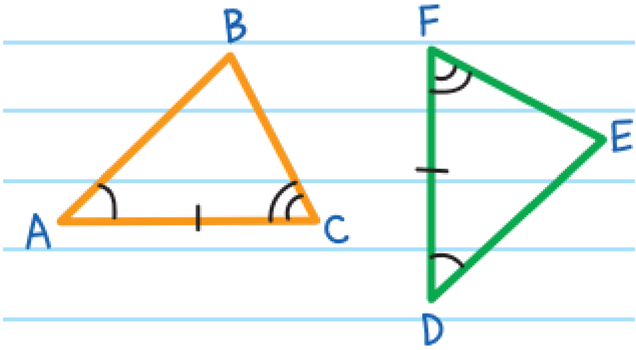



  - El ángulo incluido se refiere al ángulo que se forma entre dos lados de un triángulo

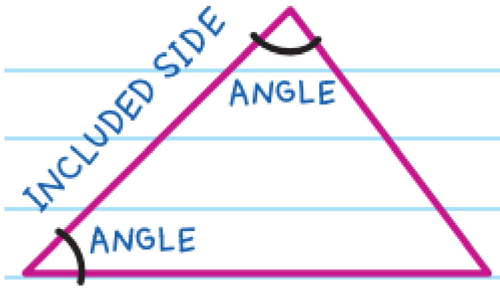



- Si dos ángulos y su lado incluido son congruentes a dos ángulos y su lado incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes

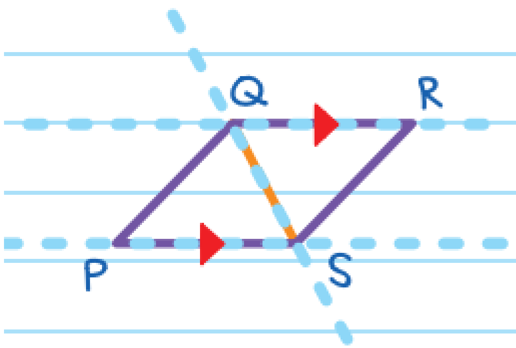
$$\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F \;\; \& \;\; \overline{AC} \cong \overline{DF} \;\; \Rightarrow \;\; \Delta ABC \cong \Delta DEF$$




- El lado incluido es el lado situado entre dos ángulos de un triángulo



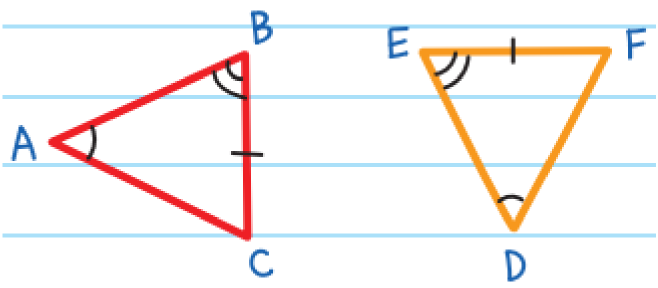

- Es posible demostrar que dos triángulos son congruentes sin saber las medidas exactas de los ángulos y lados a partir del paralelismo de sus lados




  - Usando la noción de paralelismo y de transversal, se pueden usar los resultados anteriormente vistos sobre ángulos para buscar congruencias entre ellos y, por tanto, usar el teorema anterior

- Si dos ángulos y un lado no incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado no incluido correspondiente de otro triángulo, los triángulos son congruentes

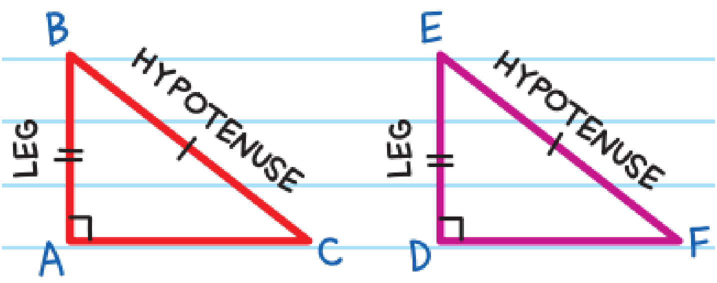
$$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E \;\; \& \;\; \overline{BC} \cong \overline{EF} \;\; \Rightarrow \;\; \Delta ABC \cong \Delta DEF$$




- Un lado no incluido es cualquiera de los lados de un triángulo que no están incluidos entre dos ángulos concretos

- Si la hipotenusa y la pierna de un triángulo rectángulo son congruentes a la hipotenusa y la pierna de otro triángulo, respectivamente, entonces los triángulos son congruentes

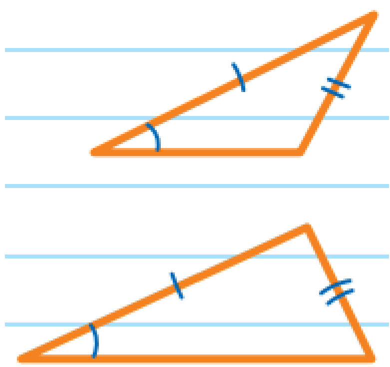
$$\angle A \cong \angle D = 90°, \overline{BC} \cong \overline{EF} \ \& \ \overline{AB} \cong \overline{DE} \ \Rightarrow \ \Delta ABC \cong \Delta DEF$$



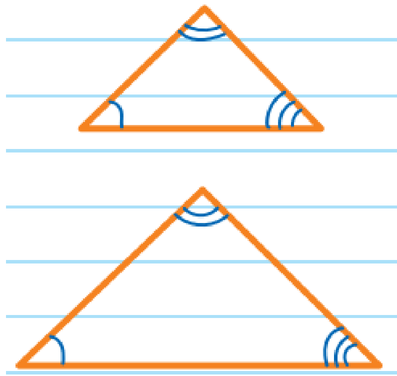

- Este teorema solo aplica específicamente a triángulos rectángulos

- Es importante destacar que no todas las proposiciones sobre la congruencia de ángulos y lados lleva a la congruencia entre triángulos

  - Que dos triángulos tengan un par de lados correspondientes y dos ángulos no incluidos sean congruentes no hacen que los triángulos sean congruentes. No todos los lados ni ángulos tienen por qué ser iguales si esto se cumple

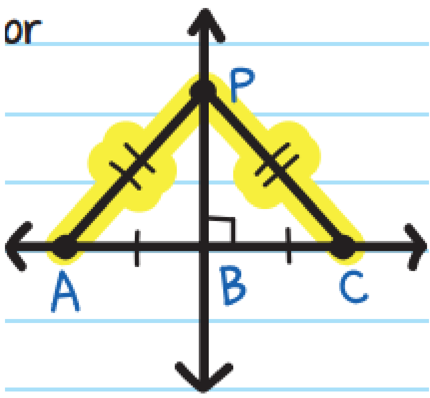


- Que dos triángulos tengan todos los ángulos correspondientes congruentes no hacen que los triángulos sean congruentes. Los lados pueden no ser congruentes

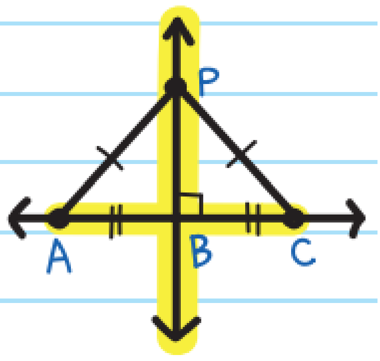


- Uno de los conceptos más importantes de los triángulos, que permiten obtener resultados útiles, es el de bisector. Este se puede usar para definir conceptos útiles como el baricentro, el ortocentro y el centroide

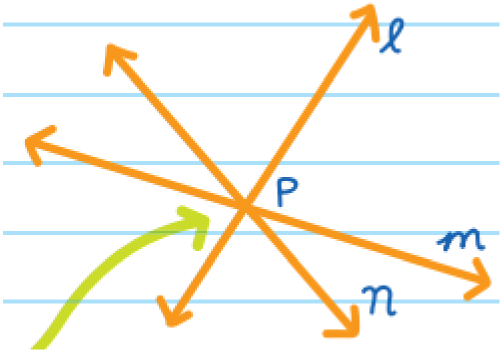
  - Si un punto está en el bisector particular de un segmento de línea, entonces el punto es equidistante a los puntos extremos del segmento. Por lo tanto, si $P$ es un punto en el bisector perpendicular de $\overline{AC}$, entonces $AP = PC$



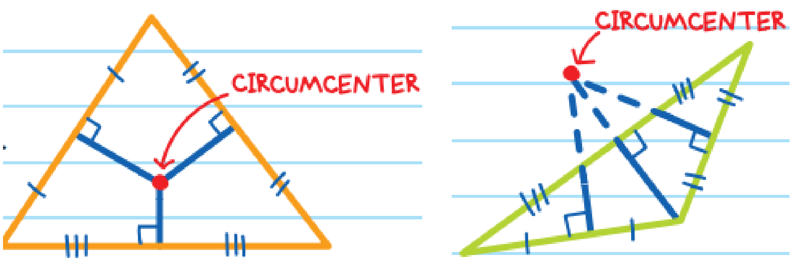

- El converso de este teorema es verdad, de modo que, si un punto es equidistante a los puntos extremos, entonces este punto debe estar en el bisector perpendicular. Si $AP = PC$, entonces $P$ es un punto en el bisector perpendicular



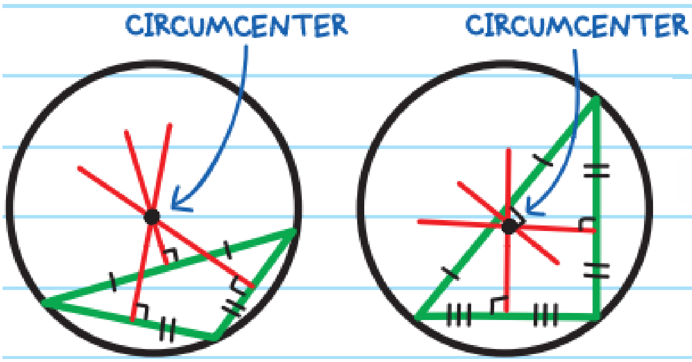

- Cuando tres o más líneas se cruzan en un punto, estas son concurrentes, y su punto de intersección se denomina punto de concurrencia



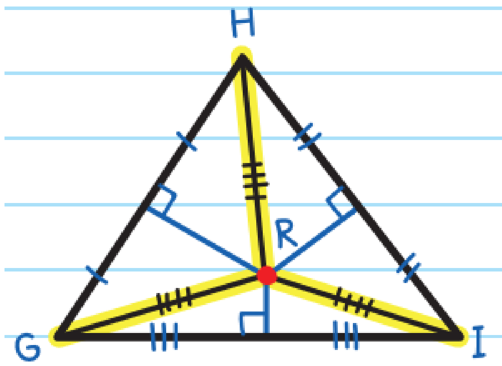

  - Se puede definir el circuncentro partir del concepto de punto de concurrencia. En un triangulo existen tres bisectores perpendiculares (forman ángulos de 90°) que se cruzan en un punto de concurrencia llamado circuncentro, el cual puede estar dentro o fuera del triángulo



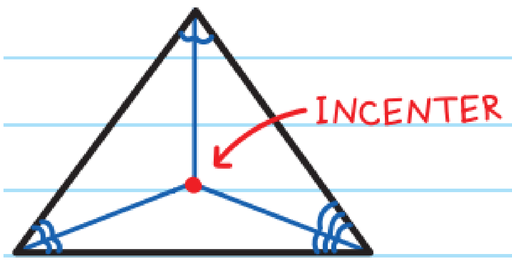

  - Se puede dibujar a través de los tres vértices de cualquier triángulo y el centro del círculo será el circuncentro



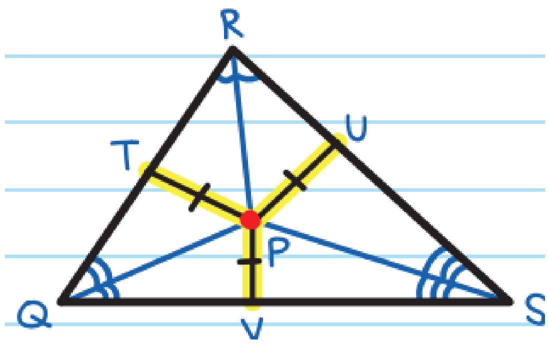

- El circuncentro de un triángulo es equidistante a sus vértices. De este modo, si $R$ es el circuncentro de $\Delta GHI$, entonces $HR = GR = GI$



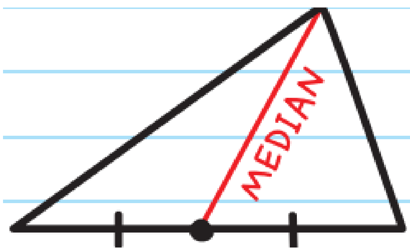

- Además del circuncentro, también se pueden definir otros conceptos relacionados como el incentro, la mediana, el centroide y el ortocentro
  - En un triángulo, los bisectores angulares de los tres ángulos interiores se cruzan en un punto, llamado incentro, este siempre está dentro del triángulo

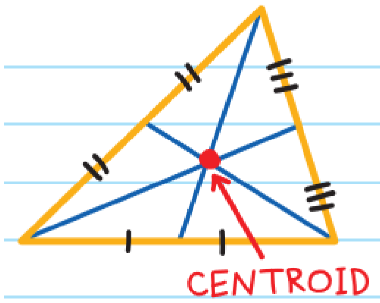



  - El incentro es equidistante a los lados del triángulo, de modo que si $P$ es el incentro, entonces $PT = PU = PV$

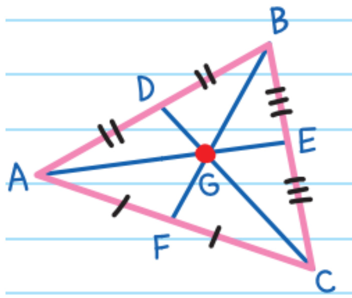



- La mediana de un triángulo es una línea que va desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Cada triángulo tiene tres medianas, las cuales se cruzan en el centroide



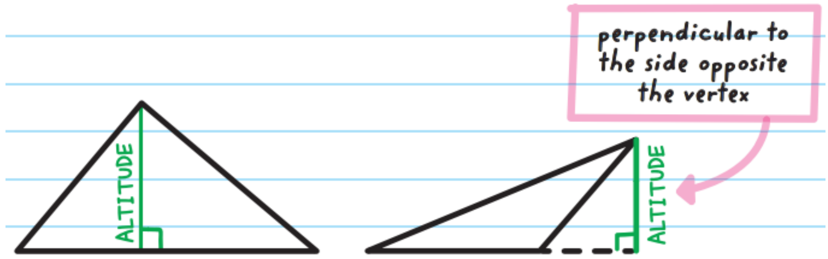




- El centroide está a $2/3$ de la distancia de cada vértice al punto medio del lado opuesto. Si $G$ es el centroide de $\Delta ABC$, entonces $BG = (2/3)BF$, $AG = (2/3)AE$ y $CG = (2/3)CD$

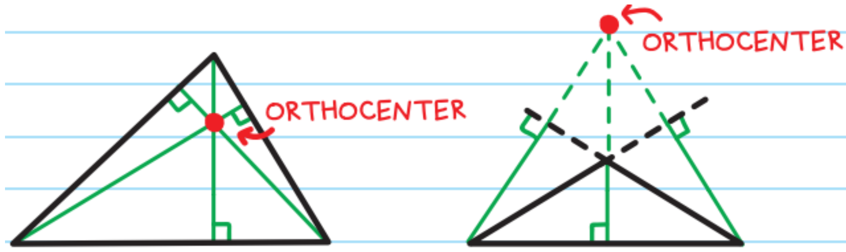



- Si se quisiera balancear un triángulo, el centroide es aquel punto en donde habría un perfecto balance, a este punto se le conoce como centro de gravedad, el punto en donde el peso está equitativamente balanceado

- La altitud de un triángulo es el segmento de línea desde un vértice al lado opuesto, y perpendicular a aquel lado. La altitud puede, por tanto, estar fuera o dentro

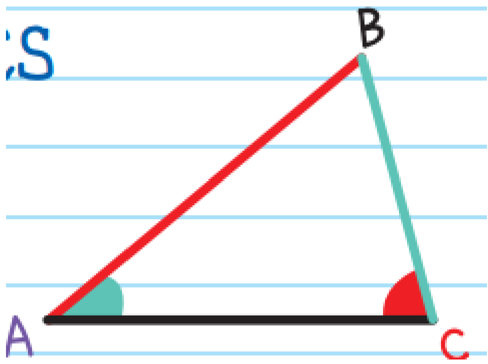



- Cada triángulo tiene tres altitudes, las cuales se cruzan en el ortocentro. Este ortocentro puede estar dentro o fuera del triángulo

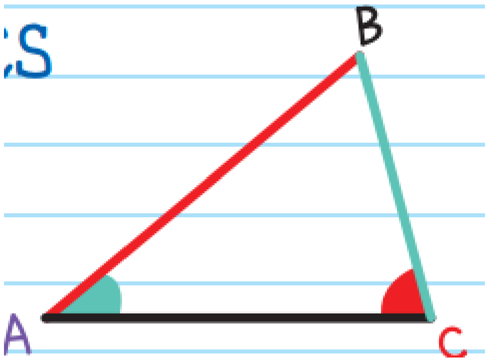



- Finalmente, una de las aplicaciones más útiles de los triángulos y que se usan mucho en matemáticas son los resultados relacionados con desigualdades, llamados desigualdades triangulares

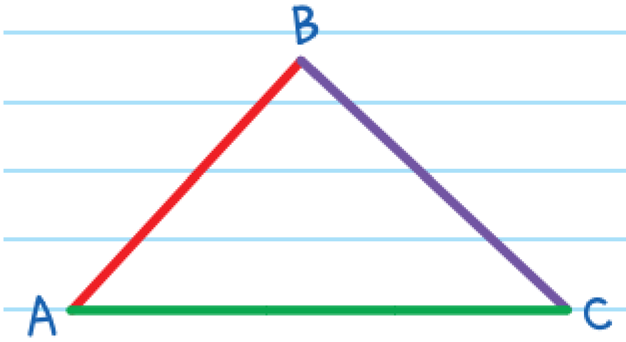
  - Cuando se comparan dos lados de un triángulo, el ángulo opuesto al lado más largo es mayor que el ángulo opuesto al lado más corto




  - Cuando se comparan dos ángulos de un triángulo, el lado opuesto al ángulo más grande es más largo que el lado opuesto al ángulo menor




- La suma de las longitudes de cualquier costado en un triángulo es mayor a la longitud de un tercer lado. Si se suman dos lados, su suma será mayor que la longitud del tercer lado

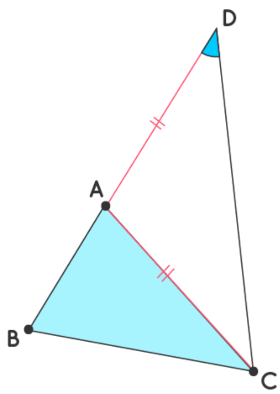



$$AB + BC > AC$$

$$AC + BC > AB$$

$$AB + AC > BC$$

  - Esto se puede demostrar de la siguiente manera: se puede extender $BA$ a un punto $D$ tal que $AD = AC$, y se junta con un $C$ a $D$



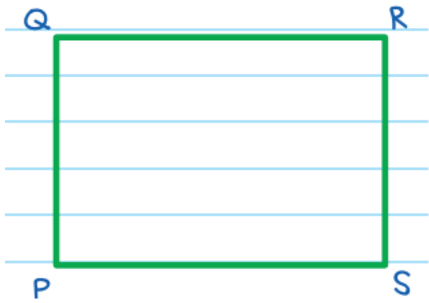

$$AD = AC \;\Rightarrow\; m\angle D = m\angle ACD \;\Rightarrow\; m\angle BCD > m\angle D$$

$$\Rightarrow\ m\angle BCD > m\angle D\ \Rightarrow\ BD > BC\ \Rightarrow\ AB + AC > BC$$

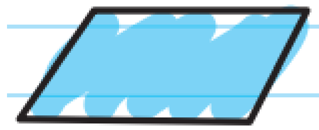
$$We\ can\ do\ the\ same\ with\ BC\ and\ AB$$

## La geometría básica: cuadriláteros y polígonos

- Otra de las formas más importantes en geometría plana es el cuadrilátero, del cual se pueden destacar diversos tipos con propiedades útiles
  - Un cuadrilátero es una forma con cuatro lados, y este se denota usando las cuatro letras de sus vértices

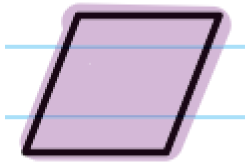



    - En el ejemplo, el cuadrilátero PQRS tiene cuatro lados y no necesita cumplir ninguna condición más para ser un cuadrilátero
  - Algunos de los tipos de cuadriláteros más comunes son los siguientes:
    - El paralelogramo, en donde los costados opuestos son paralelos e iguales en longitud

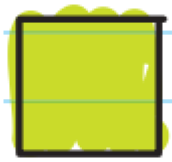


    - El rectángulo, que es un paralelogramo en donde todos los costados forman ángulos rectos

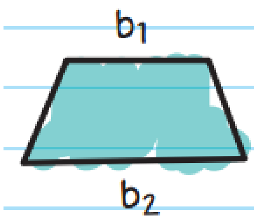
    - El rombo, que es un paralelogramo donde todos los lados son iguales en longitud



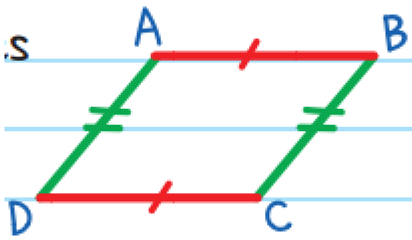
- El cuadrado, que es un paralelogramo donde todos los lados son iguales y todos forman ángulos rectos



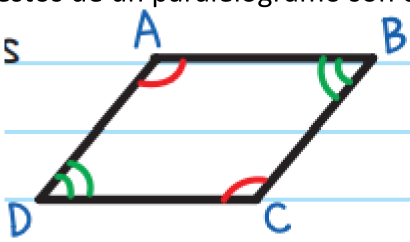
- El trapezoide, en donde se tienen dos lados paralelos y los lados no necesitan ser iguales en longitud



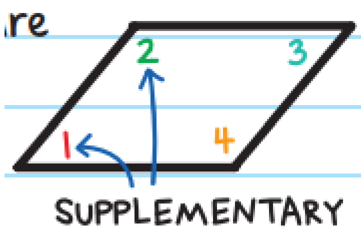

- Los paralelogramos respetan unas propiedades útiles para poder trabajar con ellos
    - Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes



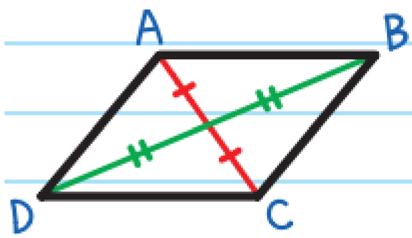

- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes



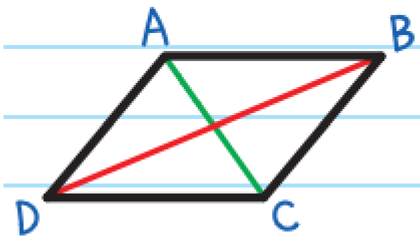

- Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios (suman 180°)



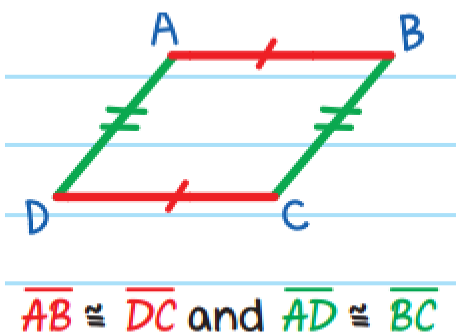

- Las diagonales de un paralelogramo, que conectan dos vértices no adyacentes, seccionan en dos la una a la otra



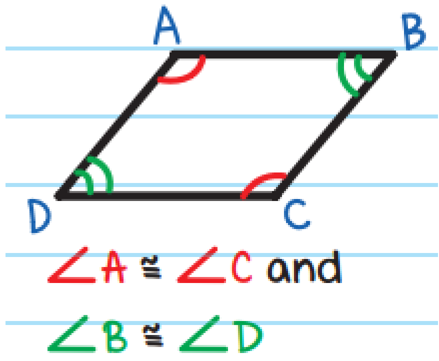

- Cada diagonal de un paralelogramo divide el paralelogramo en dos triángulos congruentes



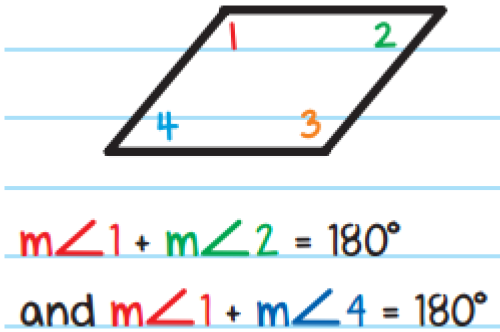

- Se puede demostrar que un cuadrilátero concreto es un paralelogramo usando las cuatro primeras propiedades anteriores como teoremas
  - Si ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces es un paralelogramo



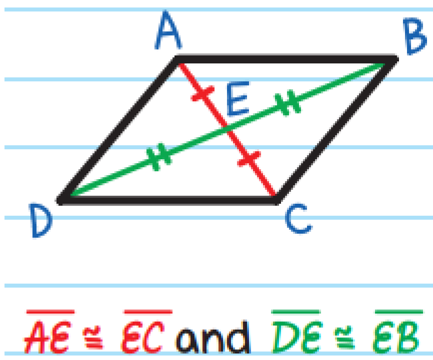

  - Si ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, entonces es un paralelogramo



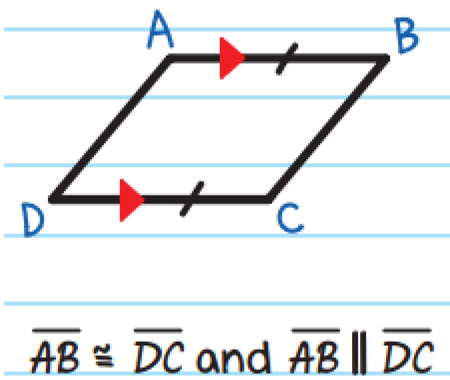

- Si un ángulo es suplementario a sus dos ángulos consecutivos, entonces es un paralelogramo



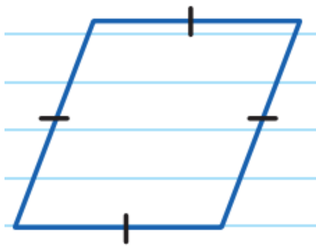

- Si un cuadrilátero tiene diagonales que se seccionan en dos mitades entre ellas, entonces es un paralelogramo



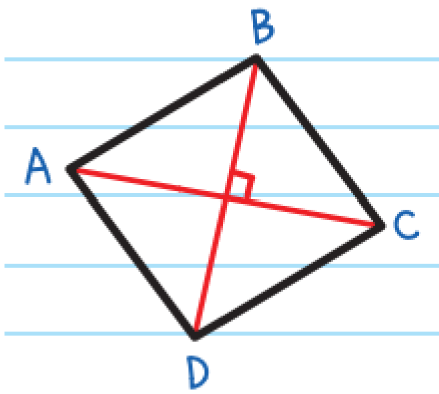

- Si un cuadrilátero tiene un par de costados que son congruentes y paralelos, entonces es un paralelogramo



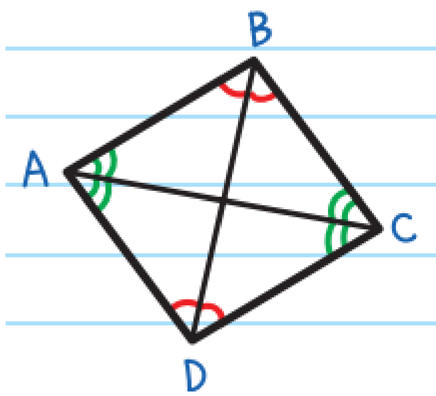

- Los rombos, los rectángulos y los cuadrados son paralelogramos muy importantes que cumplen propiedades especiales
  - Un rombo es un paralelogramo con cuatro costados congruentes. Estos cumplen con todas las propiedades de los paralelogramos además de un par más



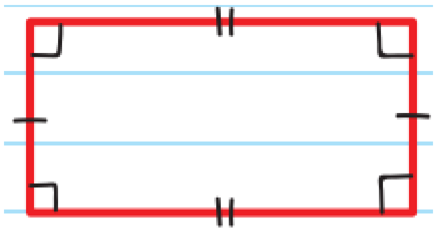
    - Los rombos tienen diagonales que son perpendiculares entre ellas, de modo que forman ángulos de 90°

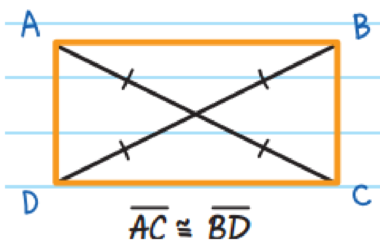



    - Cada diagonal en un rombo secciona en dos mitades un par de rombos opuestos



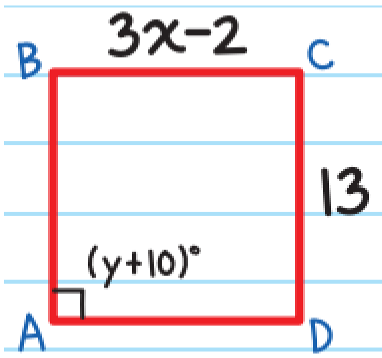

- Un rectángulo es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos. Si un paralelogramo es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes



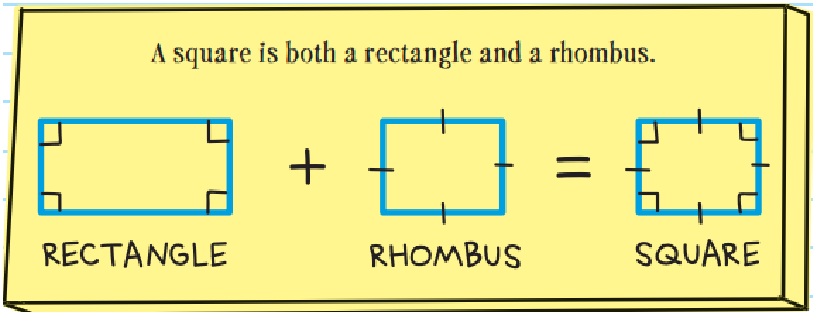



  - El converso también es verdad, de modo que si un paralelogramo tiene sus diagonales congruentes, entonces es un rectángulo

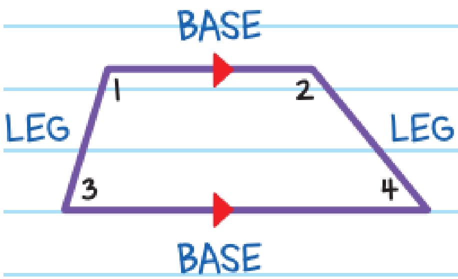
- Un cuadrado es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes



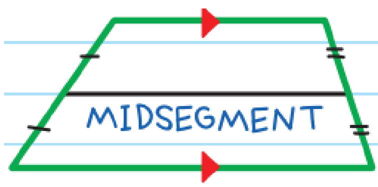

  - Un cuadrado se puede considerar tanto un rectángulo como un rombo porque combina sus propiedades



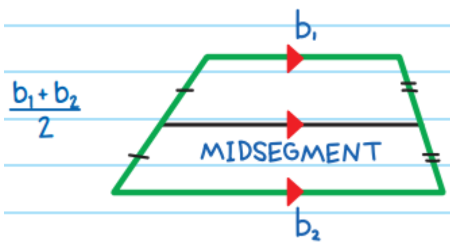

- Los trapezoides y las cometas, en cambio, son cuadriláteros que no son paralelogramos, de modo que son muy importantes también
    - Un trapezoide es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. Estos se denominan bases, mientras que los lados no paralelos se conocen como piernas



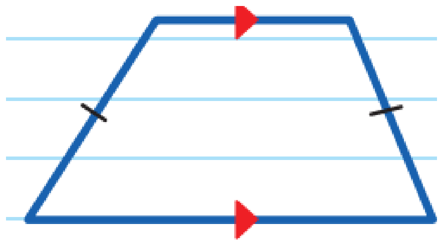

        - Los ángulos adyacentes a las bases se denominan ángulos base
        - El segmento medio o *midsegment* de un trapezoide es un segmento de línea que parte en dos mitades las piernas (de modo que, para cada pierna particular, las mitades son congruentes)



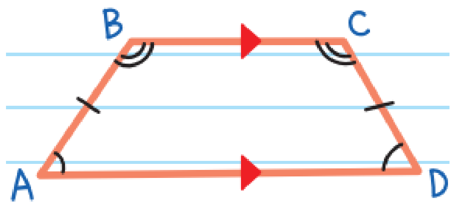

        - El segmento medio de un trapezoide es paralelo a las bases y la longitud de este segmento se encuentra a través de promediar las longitudes de las dos bases



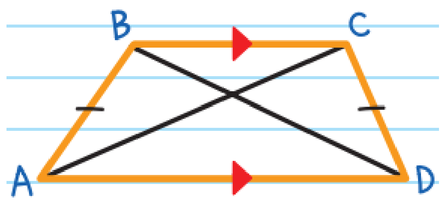
- Un trapezoide isósceles es un trapezoide que tiene sus piernas congruentes entre ellas



  - Si un trapezoide es isósceles entonces tiene dos pares de ángulos base congruentes (entre los ángulos de cada par). Por lo tanto, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\angle B \cong \angle C$ y $\angle A \cong \angle D$




  - Un trapezoide es isósceles si, y solo si, sus diagonales son congruentes. Por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si, y solo si, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$




- Medidas de ángulos
  - Un polígono es una figura plana cerrada con al menos tres lados rectos
    - Los polígonos se conocen por el número de lados que tienen:

| # OF SIDES | NAME | # OF SIDES | NAME |
|---|---|---|---|
| 3 | Triangle | 7 | Heptagon |
| 4 | Quadrilateral | 8 | Octagon |
| 5 | Pentagon | 9 | Nonagon |
| 6 | Hexagon | 10 | Decagon |

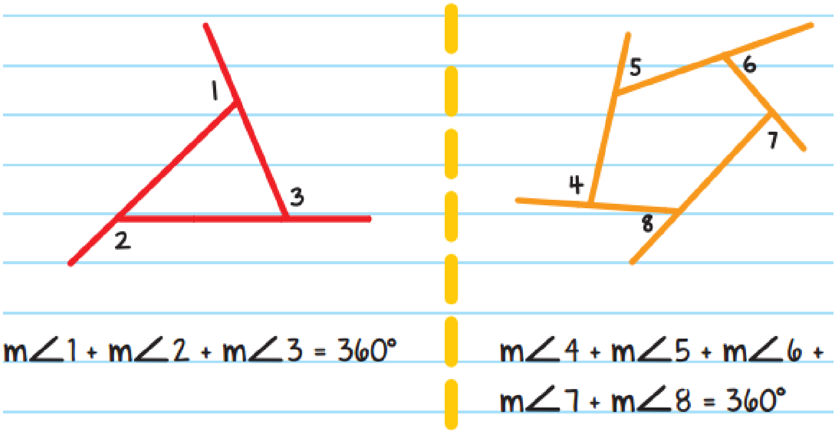
- Los ángulos interiores de un polígono se encuentran dentro de los límites de la forma
  - Como los ángulos interiores de los triángulos suman 180°, uno puede usa esta información para encontrar la suma de los ángulos interiores de todos los otros polígonos
  - Cada vez que se añade un lado, se tiene que añadir 180° a la suma total de los ángulos interiores, por lo que la suma de los ángulos interiores siempre será $(n-2)\times 180$, dado que el número de triángulos necesarios para hacer el polígono será $(n-2)$

| # OF SIDES | # OF TRIANGLES | SUM OF THE MEASURES OF INTERIOR ANGLES |
|---|---|---|
| 3 | 1 | $1 \times 180°$ |
| 4 | 2 | $2 \times 180°$ |
| 5 | 3 | $3 \times 180°$ |
| $n$ | $n - 2$ | $(n - 2) \times 180°$ |

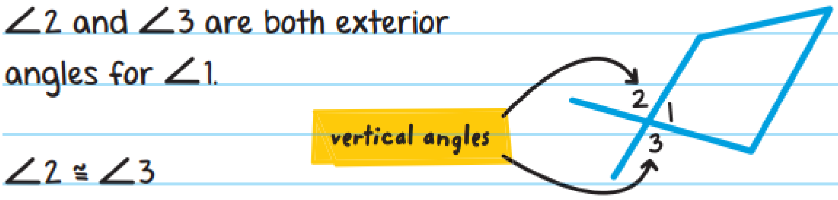
Subtract 2 from the number of sides and the difference tells how many triangles make up the polygon.

- Los ángulos exteriores son los ángulos entre los lados de un polígono y una línea extendida de su siguiente costado

- La suma de los ángulos exteriores siempre es la misma, independientemente de los lados que tenga un polígono (solo se tiene que tener en cuenta un ángulo exterior por vértice, no más)




- Los dos ángulos exteriores de cada vértice tienen la misma medida




- Un polígono regular tiene todos los ángulos congruentes y todos los lados congruentes
  - Para encontrar la medida de cada ángulo en un polígono regular, se divide la suma de las medidas entre el número de lados que tenga

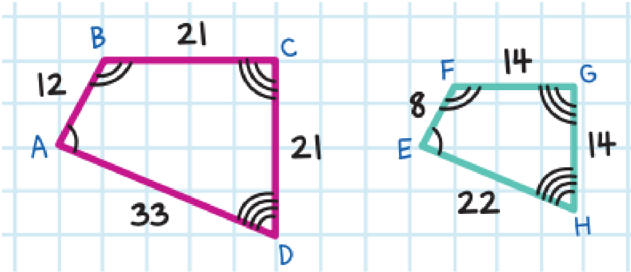
$$m\angle A = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

## La geometría básica: transformaciones geométricas y similitud

- Se dice que dos figuras son similares si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Estas son dilaciones, pero que pueden estar rotadas, trasladadas o reflejadas

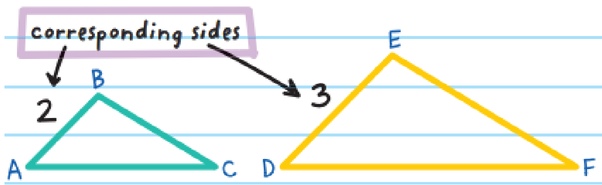
- Las figuras similares tienen ángulos correspondientes (que tienen la misma posición relativa en cada figura) que son congruentes y tienen lados correspondientes que son proporcionales en tamaño

- Dos polígonos son similares si todos sus ángulos correspondientes son congruentes y si todos sus lados correspondientes son proporcionales



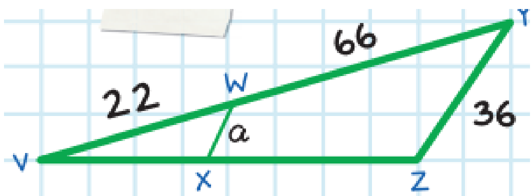

  - El orden de la similitud $ABCD \sim EFGH$ importa porque los ángulos se relacionan de par en par

  - El factor de escala de dos polígonos similares es la *ratio* de las longitudes de cada uno de sus lados con sus lados correspondientes



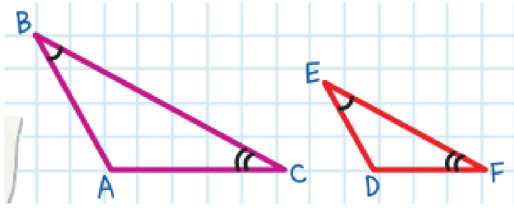

  - Si las *ratios* de las longitudes de los costados correspondientes no son todas iguales, entonces los polígonos no son similares

  - Si se sabe que dos polígonos son similares (por ejemplo, cuando están circunscritos), entonces se puede aprovechar la proporcionalidad para encontrar medidas desconocidas

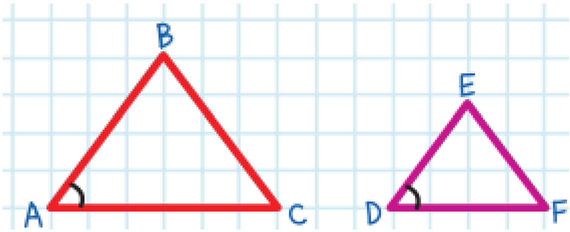



- Cuando se estudia la similitud de los triángulos, los siguientes teoremas resultan útiles para poder demostrar la similitud de dos triángulos y aplicar la proporcionalidad

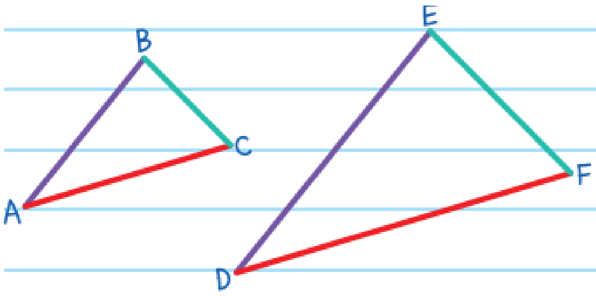
- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos del otro triángulo, entonces los triángulos son similares. Si $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$




- Si dos lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y su ángulo incluido es congruente (para esos lados), entonces los triángulos son similares. Si $\angle A \cong \angle D$ y $AB/DE = AC/DF$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

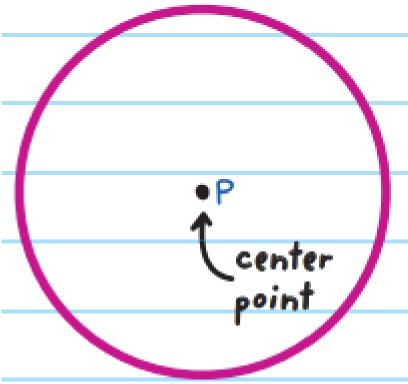


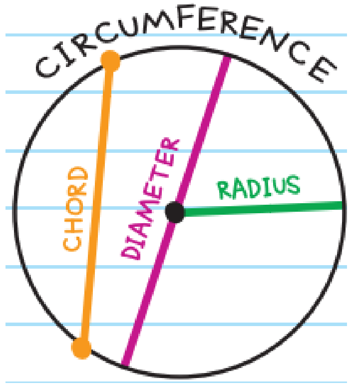

- Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son similares. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$




## La geometría básica: círculos

- Una de las formas más importantes es el círculo, el cual es una pieza fundamental para la trigonometría y para la geometría plana
  - Un círculo es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia igual de un punto llamado centro. Se denota un círculo usando el punto central, $P$






- Una cuerda es una línea cuyos puntos extremos están en el círculo

- El radio es un segmento de línea que tiene un punto extremo en el centro y el otro en el círculo. Este representa la mitad de la longitud del diámetro

$$r = \frac{1}{2}d$$

- El diámetro es una cuerda que pasa por el centro del círculo. El diámetro es dos veces la longitud del radio

$$d = 2r$$

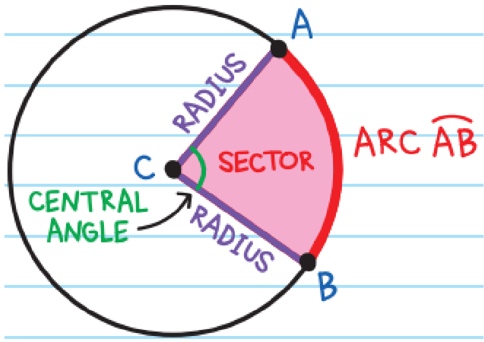
- La circunferencia $C$ de un círculo es la distancia alrededor del círculo, equivalente al perímetro de un polígono. La circunferencia $C$ de un círculo es $\pi$ veces el diámetro, de modo que se calcula de la siguiente manera:

$$C = 2\pi r$$

- El número pi $\pi$ es la *ratio* de la circunferencia del círculo a su diámetro

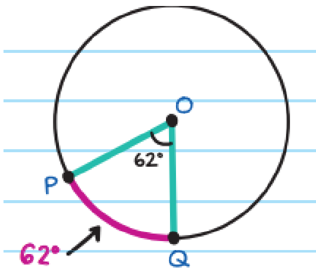
$$\pi = \frac{C}{d} = 3.1415 \ldots \approx 22/7$$

- Una vez que se han visto las partes de un círculo, se puede presentar el papel que tienen los ángulos en el análisis de los círculos




- Un ángulo central es el ángulo que tiene vértice en el centro del círculo y con unos segmentos que forman el ángulo con longitud igual al radio

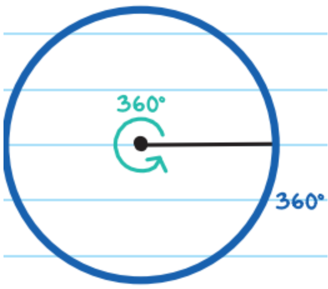
- Un arco es una parte de la circunferencia, la cual se denota por dos un arco encima de sus dos puntos extremos, como $\widehat{AB}$. La medida de un arco es igual a la medida de su ángulo central



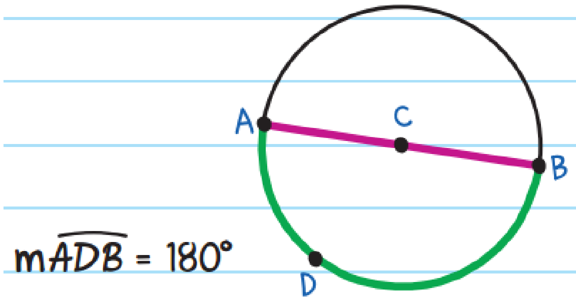

- Un sector es una parte del círculo delimitada por los segmentos y por el arco

○ A partir de la noción de arco, se pueden obtener unos resultados preliminares sobre los arcos de los círculos y conceptos relacionados

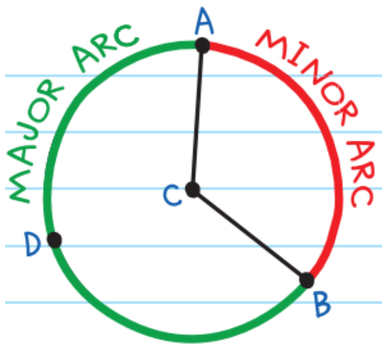
- En un círculo entero, la medida del ángulo central es de 360°, y la medida del arco es 360°



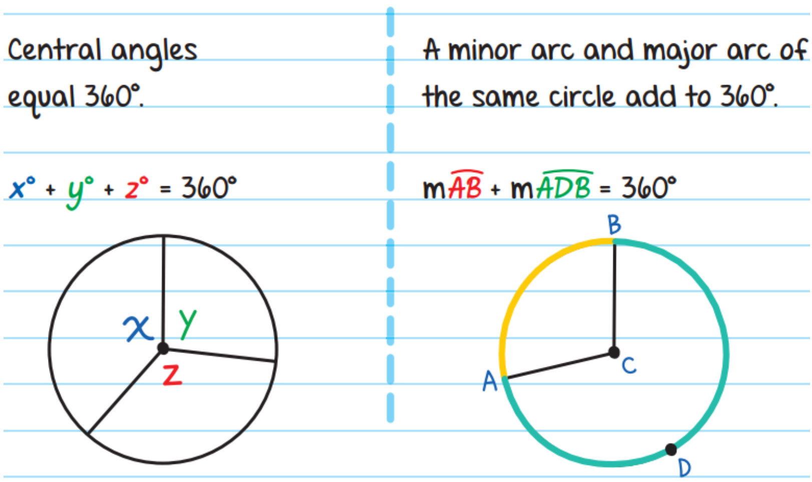

- Un arco que es 180° es un semicírculo (la mitad de un círculo) y la medida del ángulo central será 180° también




- Un arco menor es un arco más pequeño que un semicírculo, mientras que un arco mayor es un arco mayor a un semicírculo

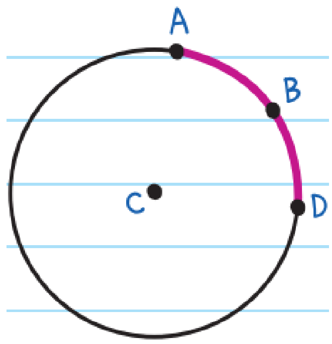



- Como la medida de un círculo es de 360°, los ángulos centrales suman 360° y las medidas del arco mayor y menor también suman 360°

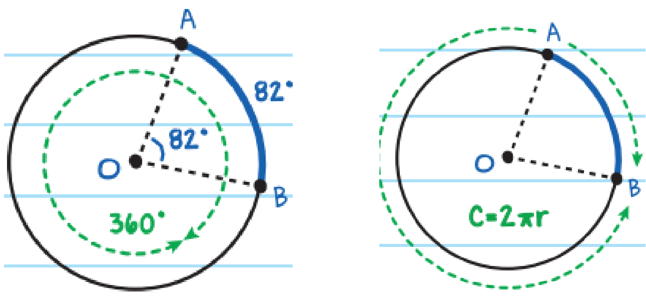



- La suma de las medidas de arcos adyacentes (arcos subsiguientes que comparten un punto extremo) es igual al arco total

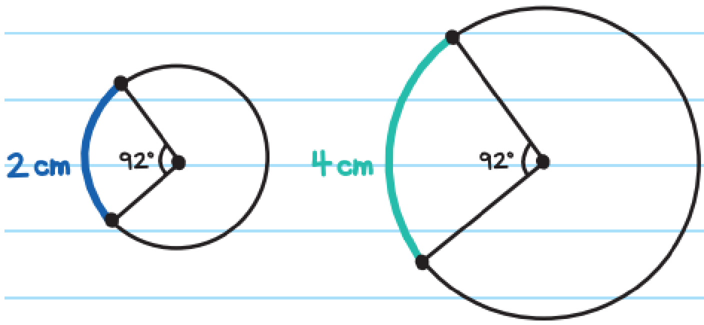
$$m\widehat{AD} = m\widehat{AB} + m\widehat{BD}$$



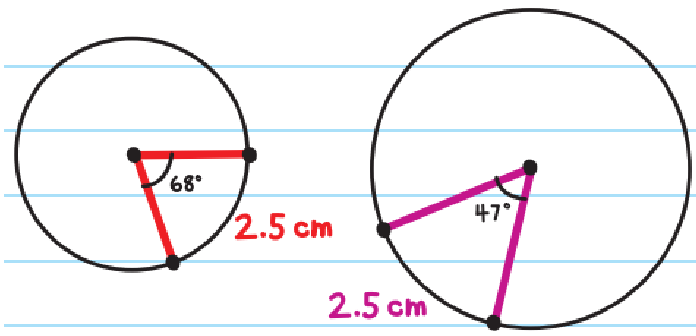

- La longitud de un arco es la distancia desde un punto extremo hasta el otro (que delimitan el arco). La medida de un arco es igual a la medida de su ángulo central, pero la longitud del arco es una fracción de la circunferencia




  - Dos arcos pueden tener la misma medida, pero diferentes longitudes

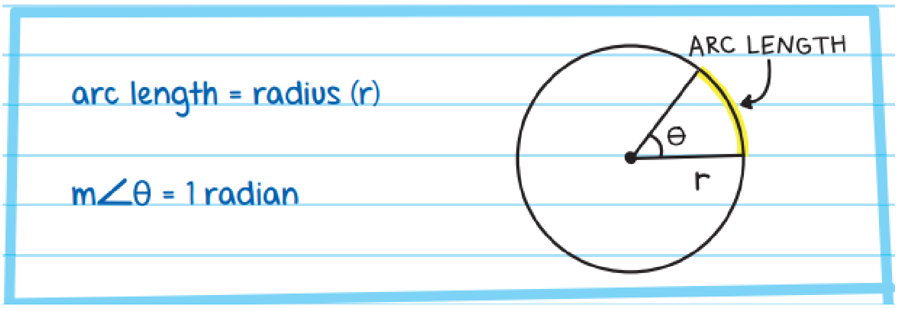



  - Dos arcos pueden tener la misma longitud, pero diferentes medidas



- Para calcular la longitud de un arco de un sector, denotada por $\ell$, con ángulo central $x°$

- Otra manera de poder medir los ángulos es utilizando radianes (denotados como rad). Un radian es la medida de un ángulo central que tiene una longitud de arco igual a su radio

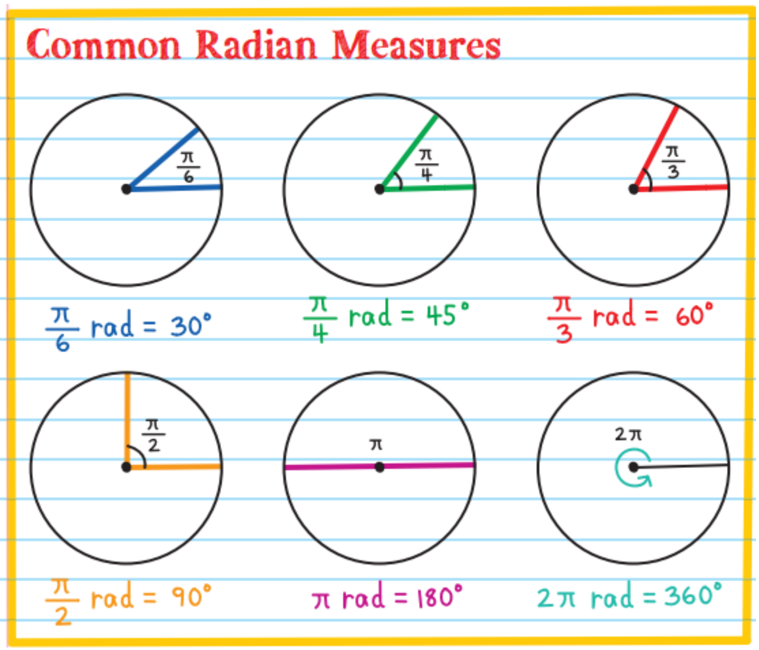



  - Como $C = 2\pi r$, se sabe que hay $2\pi$ radios en la circunferencia de un círculo. Por lo tanto, se pueden sacar las siguientes equivalencias:

$$2\pi \, rad = 360° \quad \Rightarrow \quad \pi \, rad = 180°$$

$$\Rightarrow \quad 1 \, rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$$

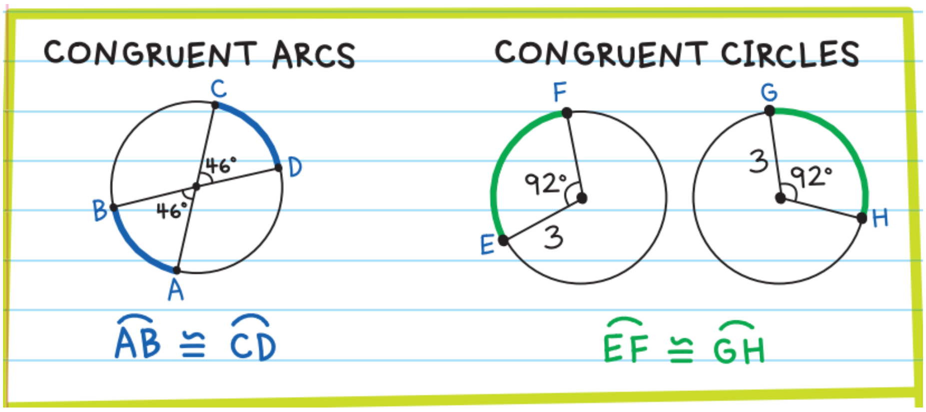
  - Las medidas más comunes de radianes observadas en la práctica son las siguientes:



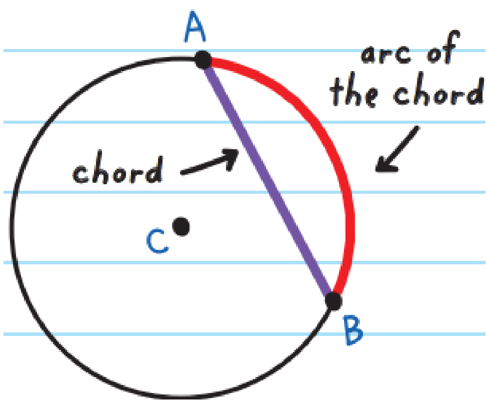
- Para convertir radianes a grados, se tiene que multiplicar por $180/\pi$, mientras que convertir grados a radianes, se tiene que multiplicar por $\pi/180$

$$1\,rad \;\Rightarrow\; \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad\qquad 1^{\circ} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\pi}{180}\right) rad$$

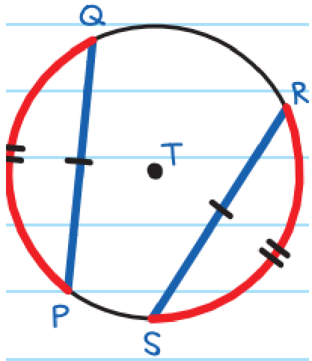
- Dos elementos muy importantes de los círculos que tienen varias aplicaciones son los arcos y las cuerdas, los cuales están estrechamente relacionados
  - Los arcos congruentes son arcos que tienen la misma medida y están en el mismo círculo o en círculos congruentes




    - Dos círculos son congruentes si tienen el mismo radio $r$
  - Una cuerda divide un círculo en arcos mayores y menores (si la cuerda no es el diámetro). El arco menor se conoce como el arco de la cuerda, por lo que una cuerda $\overline{AB}$ tiene arco $\widehat{AB}$

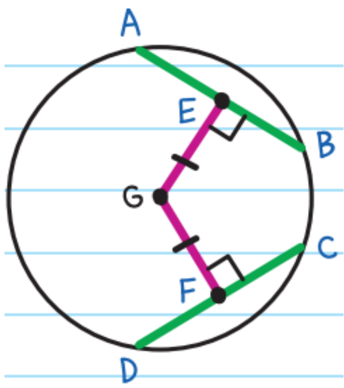



    - En un círculo o en círculos congruentes, cuerdas congruentes tienen arcos congruentes. Si $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, entonces $\widehat{PQ} \cong \widehat{RS}$



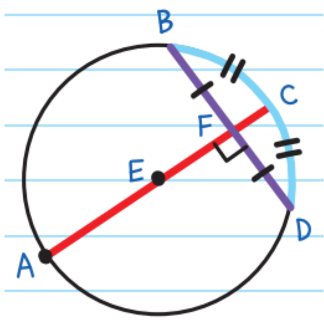

- El converso de lo anterior también se mantiene. Si $\widehat{PQ} \cong \widehat{RS}$, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

- En un círculo o en círculos congruentes, cuerdas congruentes son equidistante desde el centro. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $EG = FG$

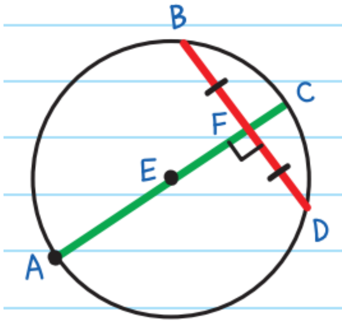



- El converso de lo anterior también se mantiene. Si $EG = FG$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

- Si un diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces secciona la cuerda en dos mitades y a su arco también. Si $\overline{AB} \perp \overline{BD}$, entonces $\overline{BF} \cong \overline{FD}$ y $\widehat{BC} \cong \widehat{CD}$

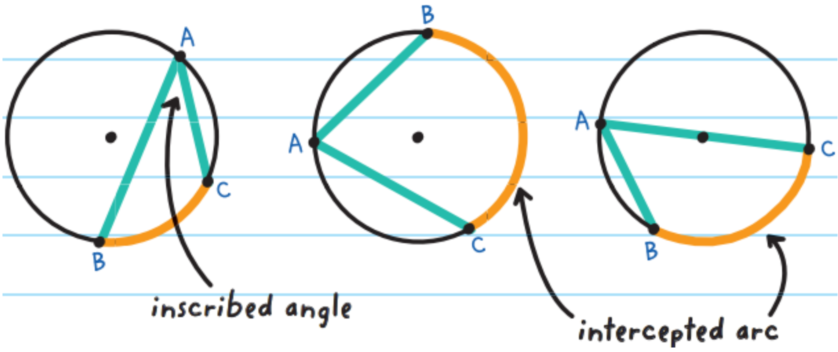



- El bisector perpendicular de una cuerda es un diámetro. Si $\overline{AC}$ es un bisector perpendicular de $\overline{BD}$, entonces $\overline{AC}$ es el diámetro del círculo



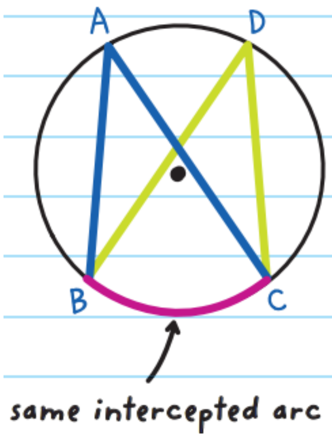

- Un ángulo se forma por dos cuerdas que se tocan con un vértice en el círculo, mientras el arco interceptado es la parte del círculo que está en el interior del ángulo inscrito
  - La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de un arco interceptado

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$$



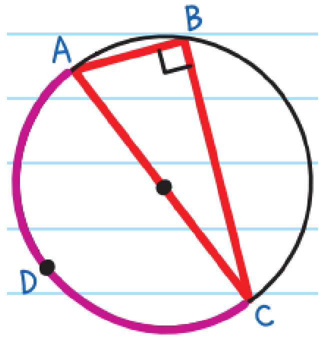

  - Si dos ángulos inscritos tienen el mismo arco interceptado, ambos ángulos son congruentes

$$m\angle A = m\angle D = \frac{1}{2} m\angle\widehat{BC} \;\Rightarrow\; \angle A \cong \angle D$$

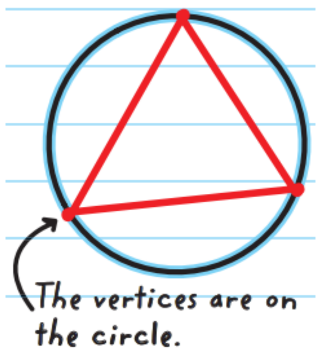


- Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto

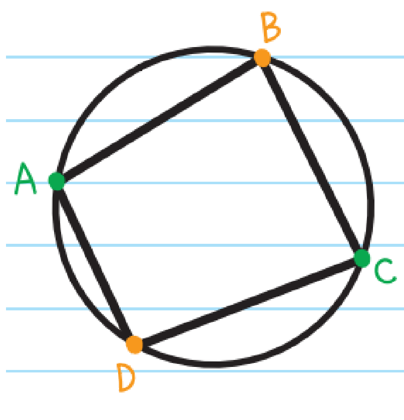
$$m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{ADC} = \frac{1}{2} 180° = 90°$$



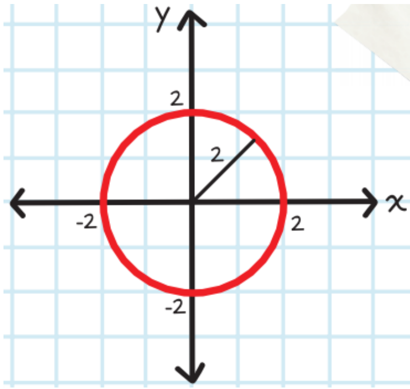

- Una forma inscrita está dentro de otra forma, solo que tocando los lados (los vértices están en el círculo)




  - Si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios (suman 180°). Por lo tanto, $\angle A + \angle C = 180$ y $\angle B + \angle D = 180$

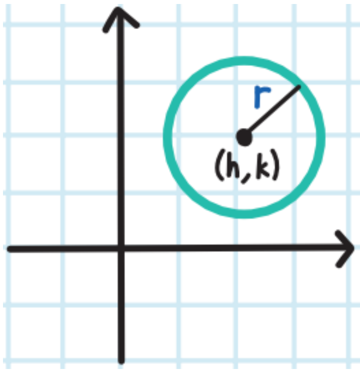



- Un círculo puede graficarse en un plano de coordenadas, usando las coordenadas de su centro y su radio
  - La ecuación de un círculo cuando su centro está en el origen y se tiene un radio $r$ es $x^2 + y^2 = r^2$, con centro $(0,0)$ y radio $r$

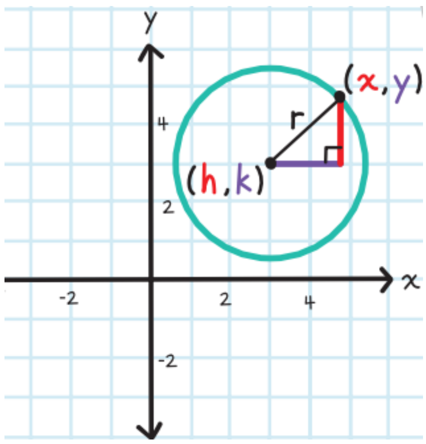



- Esta ecuación se puede conseguir usando el teorema de Pitágoras, ya que para cualquier punto $(x, y)$ en el círculo, como $r$ es la hipotenusa, entonces $x^2 + y^2 = r^2$

- Si el centro del círculo no está en el origen, usando la ecuación en su forma estándar se consigue $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, con centro $(h, k)$ y radio $r$




  - Esta ecuación también se puede obtener a través del teorema de Pitágoras de la misma forma, solo que ahora las piernas de la hipotenusa medirán $x-h$ e $y-k$ porque el segmento va de $h$ a $x$ y de $k$ a $y$, respectivamente



- Como a veces las ecuaciones de un círculo no vienen en su forma estándar, se tiene que completar el cuadrado con tal de obtener las coordenadas del centro

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y = 16 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 6^2$$

  - Para completar el cuadrado, normalmente se dejan todos los términos de $x$ e $y$ a la izquierda ordenados y el término constante a la derecha, de modo que, para cada variable, se intenta encontrar una constante (sumando y restando) tal que se pueda encontrar un cuadrado perfecto (a través de las identidades notables)

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = 16$$

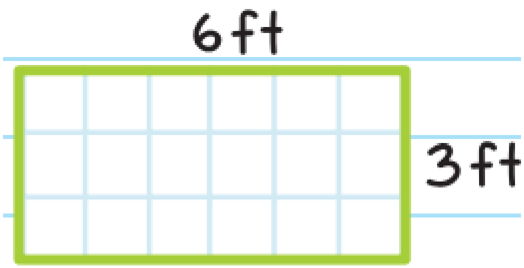
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y = 16 + 16$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 + 4y + 4 = 32 + 4$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 36 = 6^2$$

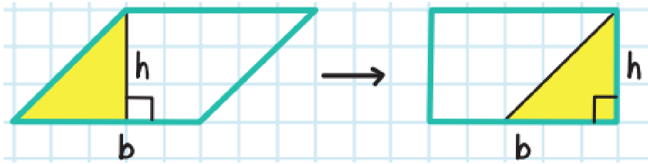
## La geometría básica: áreas, superficies y volúmenes

- Ahora que se han introducido las figuras planas, se puede estudiar el área de estas figuras en un espacio bidimensional
  - El área $A$ es la cantidad de espacio dentro de un objeto bidimensional, y se escribe en unidades cuadradas o unidades




    - El área de una figura el número de cuadrados de la misma medida que delimita la figura
  - El área de un paralelogramo es la longitud de la base por la altura (aplica a rectángulos, a rombos y a cuadrados)
    - La fórmula del área de un paralelogramo es la misma que la fórmula para el área de un rectángulo porque está hecho con las mismas partes. Si se traduce el triangulo sombreado en el

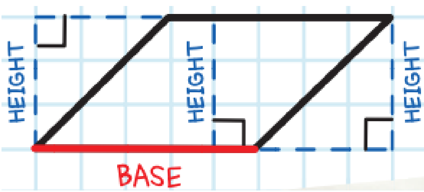
paralelogramo a la derecha, el paralelogramo se vuelve un rectángulo




- La base del paralelogramo es la longitud del rectángulo, y la altura del paralelogramo es la amplitud del rectángulo. El área rectangular es la siguiente:

$$A = bh$$

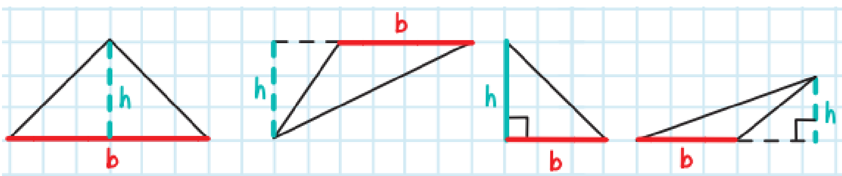
- Para encontrar la altura de un paralelogramo, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para saber la altura de la línea perpendicular que se formaría



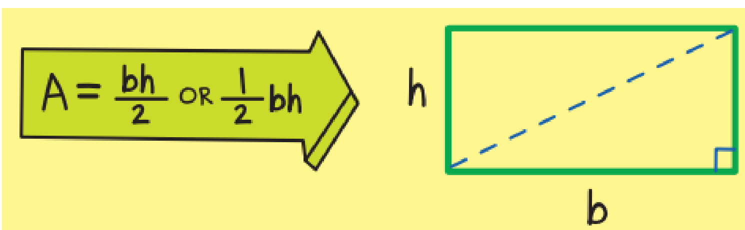

○ Con tal de calcular el área de un triángulo, se multiplica 1/2 por la longitud de la base por la altura

$$A = \frac{1}{2}bh$$

- En este caso, la altura es la longitud de la línea perpendicular dibujada de un vértice a la base



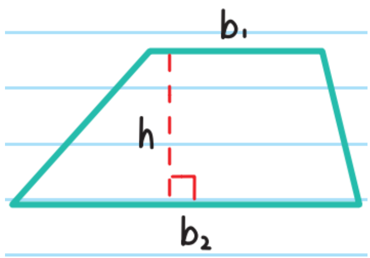

- Si se corta un rectángulo por su diagonal, el área es la suma del área de dos triángulos, de modo que la fórmula proviene de este hecho



- Con tal de calcular el área de un trapezoide, se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

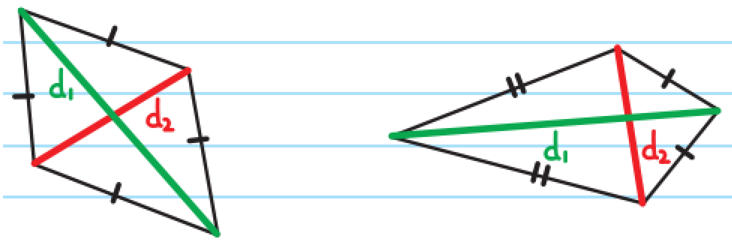
  - En este caso $b_1$ y $b_2$ son las longitudes de las dos bases (los costados paralelos) en cualquier orden




- Para encontrar el área de un rombo o una cometa, se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

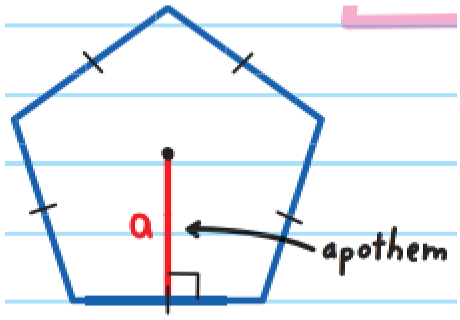
  - En este caso, $d_1$ y $d_2$ son las longitudes de las dos diagonales (en cualquier orden)



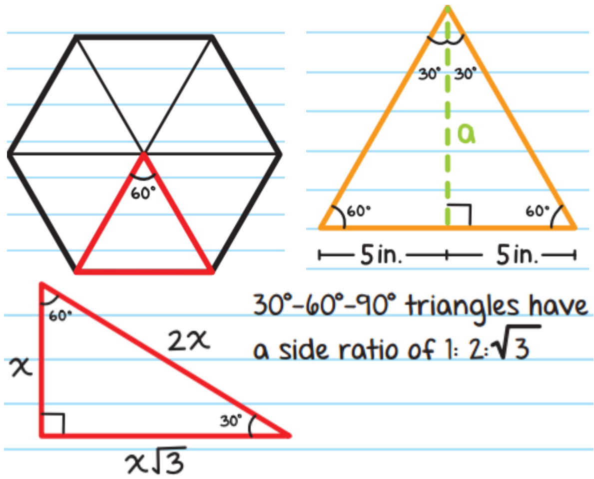

- Usando esta fórmula para encontrar el área de un polígono regular, se utiliza la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2}aP$$

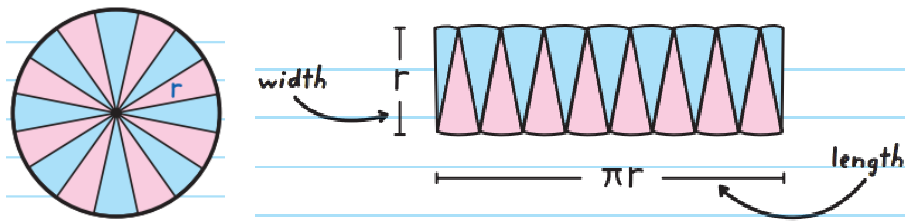
  - En este caso, $a$ es la longitud de la apotema (la distancia perpendicular desde el centro hasta un lado), mientras que $P$ es el perímetro del polígono




- Si no se conoce la apotema, se puede utilizar trigonometría para encontrarlo. Como todo polígono regular se puede dividir en $n$ triángulos, entonces se tiene que averiguar cuál podría ser la apotema a través del teorema de Pitágoras y usando proporciones triangulares




- Para encontrar una fórmula para el área de un círculo, este se divide en triángulos. Los triángulos del círculo se pueden arreglar como un rectángulo para usar resultados relacionados:

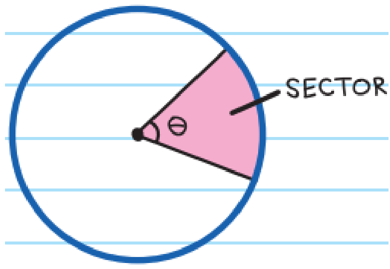



  - A través de la longitud de la base y la altura, se puede obtener la siguiente fórmula:

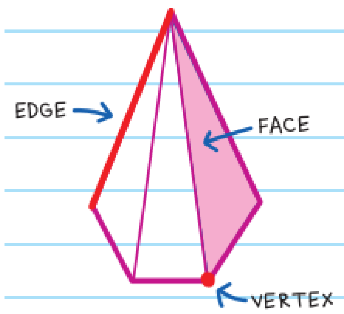
$$A = (\pi r)r = \pi r^2$$

  - Como un sector es una parte del círculo, entonces se puede encontrar la fórmula para el área del sector a través de una proporción que compara el ángulo del sector con el total del círculo

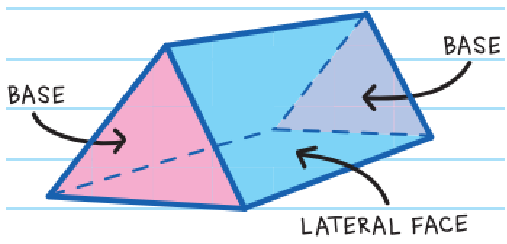
$$A = \frac{\theta}{360}\pi r^2$$



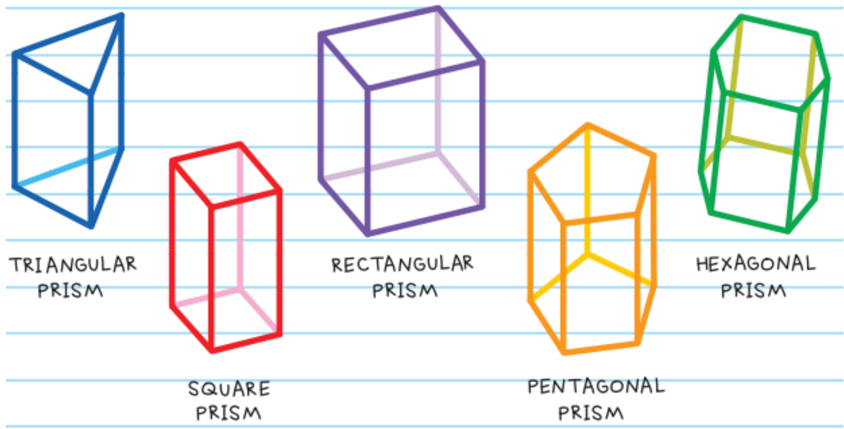

- Se ha estudiado el área, que es un concepto usado para figuras bidimensionales. No obstante, este concepto se puede extender para las superficies de figuras tridimensionales
    - Las figuras tridimensionales son formas que tienen longitud, amplitud y altura (también se conocen como sólidos)
        - El área de superficie es el área de las superficies de una forma geométrica
        - Un poliedro es una figura tridimensional hecha por polígonos. Las superficies planas se conocen como caras, los segmentos donde las caras se encuentran se conocen como bordes, y los vértices son los puntos donde tres o más segmentos se encuentran (las esquinas)




    - Los prismas son un tipo de poliedro hecho de hasta dos caras de un polígono que son paralelas y congruentes. Las caras restantes se conocen como caras laterales, que son paralelogramos



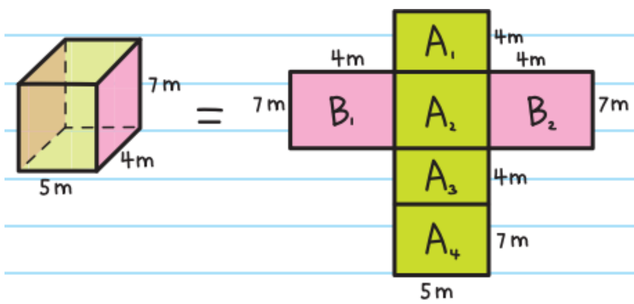

- Los prismas se categorizan según el tipo de bases que tienen




- El área de la superficie $SA$ de un poliedro es la suma del área de sus caras. Se puede calcular este sumando las áreas de las bases y de las caras laterales (área total de las caras laterales)

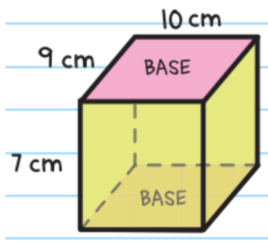
  - El área de un prisma se puede calcular desplegando el prisma en una representación bidimensional de todas las caras del prisma. El área de superficie total se puede encontrar sumando el área de las bases $B$ y el área lateral total $LA = Ph$, donde $P$ es el perímetro

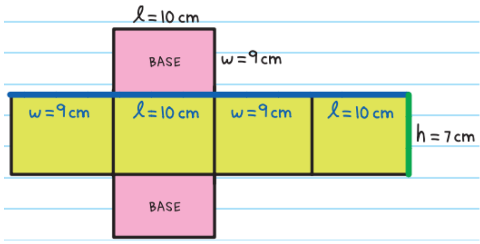
$$SA = 2B + LA = 2B + Ph$$



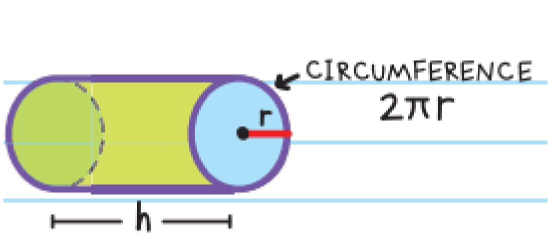

  - Para un prisma rectangular, la fórmula específica sería la siguiente:

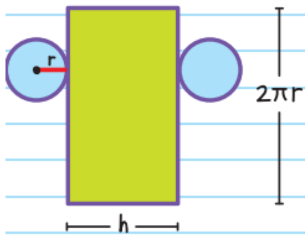
$$SA = 2(\ell w + \ell h + wh)$$



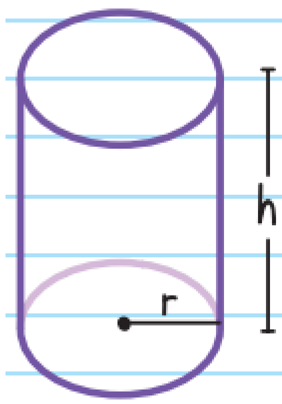

- Para encontrar el área de superficie de un cilindro, se puede aplicar la misma estrategia que se ha visto anteriormente de desplegar el poliedro sobre un espacio bidimensional



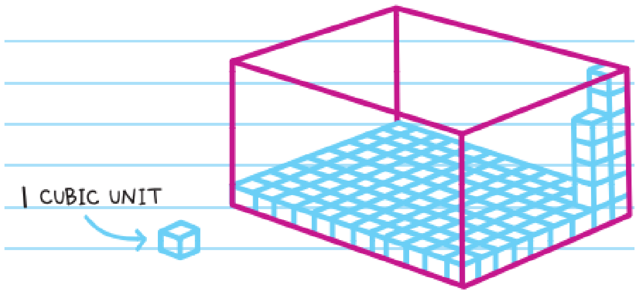




  - Sumando el área de los dos círculos de la base al área del rectángulo (el área lateral), se puede obtener el área de superficie total a partir de la siguiente fórmula:

$$SA = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$




- La generalización en tres dimensiones para el concepto de área, a diferencia del área total de la superficie, visto anteriormente, es el concepto de volumen
  - El volumen $V$ de una figura tridimensional se refiere a la cantidad de espacio que un sólido encierra o delimita

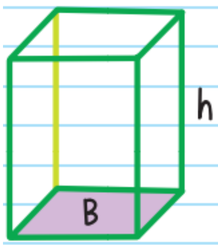



- El volumen se expresa en unidades cúbicas, el número de cubos que tienen la misma longitud de bordes, equivalente a 1 unidad, y que caben dentro del sólido

- Para encontrar el volumen de la mayoría de prismas se usa la fórmula $V = Bh$

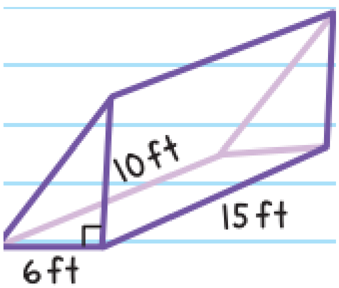
    - El volumen de un prisma rectangular utiliza la fórmula $V = Bh$ y es equivalente a la siguiente:

$$V = \ell wh$$




    - El volumen de un prisma triangular utiliza también la fórmula $V = Bh$ y es equivalente a la siguiente:

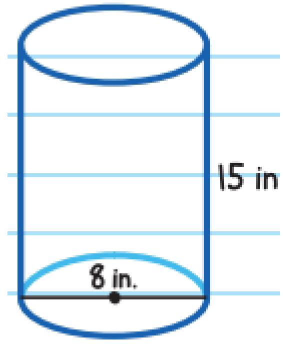
$$V = \frac{1}{2}\ell wh$$



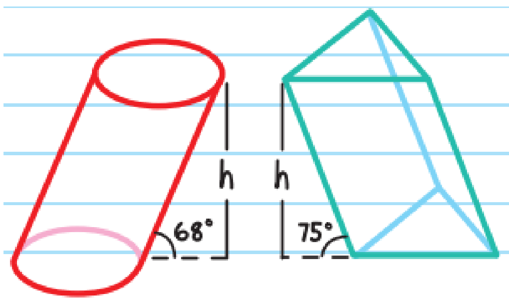

- La fórmula para el volumen de un cilindro es el área de la base multiplicada por la altura $V = Bh$

    - Debido a que la base es un círculo, entonces se usa el área para encontrar que la fórmula es la siguiente:

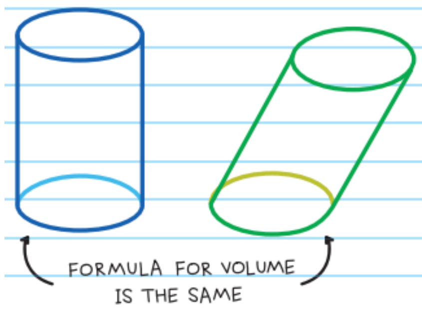
$$V = \pi r^2 h$$




- Un prisma oblicuo o un cilindro oblicuo (no paralelo o perpendicular) no tiene los ángulos rectos entre los lados y la base



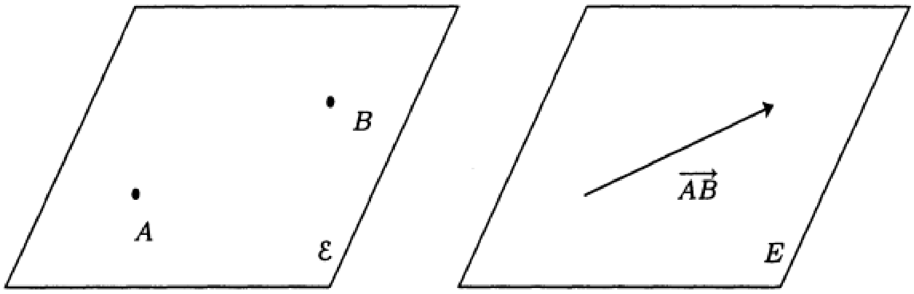

  - El volumen de un prisma o cilindro oblicuo es el mismo que el de su prisma o cilindro recto correspondiente, con la misma base y la misma altura, $V = Bh$




## La geometría afín

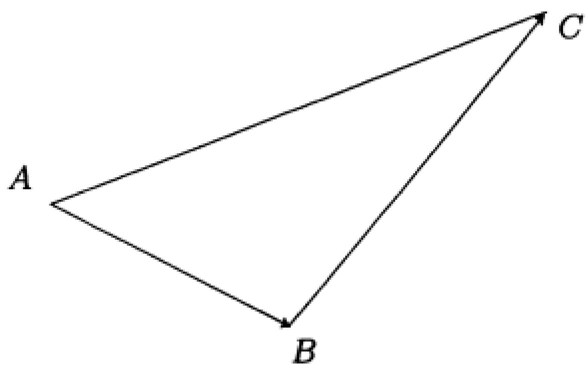
- Un espacio afín es un conjunto de puntos que contiene líneas y otros elementos, mientras que la geometría afín lidia con relaciones entre los puntos y las líneas

  - Un conjunto de puntos $\mathcal{E}$ está dotado de la estructura de un espacio afín por los datos de un espacio vectorial $E$ y un mapeo $\Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ que asocia un vector de $E$ con cualquier par ordenado de puntos en $\mathcal{E}$ $((A, B) \mapsto \overrightarrow{AB})$ tal que se cumplen las siguientes dos condiciones:




- Para cualquier punto $A$ de $\mathcal{E}$, el mapeo parcial $\Theta_A: B \mapsto \overrightarrow{AB}$ (mapeo definido en términos de un punto fijo $A$) es una biyección de $\mathcal{E}$ a $E$ (a cada punto $B$ en $\mathcal{E}$ se le asigna un vector distinto $\overrightarrow{AB}$ en $E$ y cada vector en $E$ puede representarse como $\overrightarrow{AB}$ para algún punto $B$ en $\mathcal{E}$). Por lo tanto, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos en $\mathcal{E}$ y los puntos en $E$

- Para todos los puntos $A$, $B$ y C en $\mathcal{E}$, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (no son los costados, sino una suma de vectores), lo cual se conoce como la relación de Chasles. De este modo, siempre se puede llegar desde $A$ al mismo punto final $B$ a través de otros vectores intermedios (útil para demostraciones) que si se fuera directamente de $A$ a $B$




- Por esta definición, un espacio afín se puede considerar como una generalización de un espacio vectorial en donde se ha olvidado el origen (se describen las "estructuras lineales" sin tener en cuenta el orígen). Algunas propiedades de estos espacios son las siguientes:

  - La segunda condición de la definición da directamente que $\overrightarrow{AA} = 0$ y que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ o $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

  - Se cumple la regla del paralelogramo, el cual dice que dos igualdades $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ son equivalentes, lo cual se demuestra a través de la relación de Chasles (considerando un punto intermedio). Esto quiere decir que, de darse una igualdad, la otra se da también (por equivalencia)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \\ \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} \\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

- Esta definición permite obtener varios ejemplos útiles de espacios afines

  - El conjunto vacío $\emptyset = \{0\}$ es un espacio afín dirigido por cualquier espacio vectorial debido a que para cualquier punto $A$ en $\mathcal{E}$ se puede obtener un mapeo parcial biyectivo $\Theta_{\mathbf{0}}: \emptyset \to E$ (dado que para cualquier vector $v \in E$, $v + 0 = 0$) y a que la relación de Chasles es trivial

  - Cualquier espacio vectorial tiene estructura natural de un espacio afín: el mapeado $\Theta: E \times E \to E$ simplemente es el mapeado que asocia un par ordenado $(u, v)$ el vector $v - u$. Esto quiere decir que un espacio vectorial se puede considerar un espacio afín porque el mapeo $\Theta$ describe como uno se puede mover de un punto $u$ a otro $v$ usando la sustracción (traslado de un punto a otro)

  - Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son dos espacios afines dirigidos respectivamente por los espacios vectoriales $E_1$ y $E_2$, el producto cartesiano $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ es un espacio afín dirigido por $E_1 \times E_2$: el mapeado $\Theta: (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \to E_1 \times E_2$ es uno que asocia con el par ordenado $\big((A_1, A_2), (B_1, B_2)\big)$ el par ordenado de vectores $\left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}\right)$. Por lo tanto, el producto cartesiano (la combinación de las dimensiones) de espacios afines es también un espacio afín (con una mayor dimensión) y se pueden construir espacios afines a partir de otros preexistentes

- Si $A$ es un punto de el espacio afín $\mathcal{E}$ y si $u$ es un vector del espacio vectorial $E$ subyacente, el punto único $B$ de $\mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{AB} = u$ se denota como $B = A + u$

  - Esta notación es consistente debido a que $(A + u) + v = A + (u + v)$. Esto ocurre porque $A$ llega a un punto $B$ con la translación $u$ y después se desplaza a otro $C$ con la translación $v$, que es lo mismo que llegar de un punto $A$ a $C$ con la translación $u + v$

- Una vez que un punto $A$ se ha escogido en el espacio afín $\mathcal{E}$, es posible dar a $\mathcal{E}$ la estructura de un espacio vectorial. Este espacio vectorial se denotará por $\mathcal{E}_A$ y el mapeado $\Theta_A: \mathcal{E} \to E$ $(M \mapsto \overrightarrow{AM})$ es una biyección que permite llevar la estructura del espacio vectorial $E$ a $\mathcal{E}$: el mapeado dice que $M + N = Q$ si $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AQ}$

  - Como se puede ver, ahora no se necesita un par ordenado de $\mathcal{E}$ (un producto cartesiano de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$), dado que ahora se tiene un punto de referencia $A$ que actúa como el vector $\mathbf{0}$ del espacio vectorial $\mathcal{E}_A$ debido a la relación $\overrightarrow{AA} = 0$. Esto es lo que hace que se pueda trasladar la estructura de espacio vectorial al conjunto $\mathcal{E}$

  - No obstante, un espacio vectorial $E$ tiene una estructura de espacio afín natural (no se requiere ninguna elección arbitraria o información adicional), pero no es verdad de que el espacio afín $\mathcal{E}$ tiene una estructura natural de espacio vectorial (se hace una elección del punto para que sea un espacio vectorial)

- Se dice que un subcojunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ es un subespacio afín si es vacío o contiene un punto $A$ tal que $\Theta_A(\mathcal{F})$ es un subespacio vectorial de $E$. Este subespacio vectorial no depende de la elección del punto $A$

  - Siendo $\mathcal{F}$ un subespacio afín de $\mathcal{E}$, existe un subespacio vectorial $F$ de $E$ tal que, para cualquier punto $B$ de $\mathcal{F}$, $\Theta_B(\mathcal{F}) = F$. El subespacio $\mathcal{F}$ es un subespacio afín que está dirigido por $F$

$$for\ \ A \in \mathcal{E}\ \ exists\ \ bijective\ \ \Theta_A: \mathcal{E} \to E$$

$$\Rightarrow if\ \ \mathcal{F} \subset \mathcal{E}:\ for\ \ B \in \mathcal{F}\ \ exists\ some\ \ \Theta_B: \mathcal{F} \to F \subset E$$

$$because\ of\ \Theta_A's\ \ injectivity, but\ as\ \mathcal{F} \subset \mathcal{E}\ \ then\ \ F \subset E\ \ due\ to\ \mathcal{F}\ and\ \mathcal{E}\ being\ affine\ spaces\ with\ bijective\ \Theta$$

  - Si $M$ y $N$ son puntos de $\mathcal{F}$, entonces el vector $\overrightarrow{MN}$ pertenece al espacio vectorial $F$

  - Siendo $F$ un subespacio vectorial de $E$ y $A$ es un punto de $\mathcal{E}$, entonces existe un único subespacio afín dirigido por $F$ y pasando por $A$

$$If\ \mathcal{F}\ is\ affine\ subspace\ passing\ through\ A\ directed\ by\ F,\ then\ \Theta_A(\mathcal{F}) = F\ \ and\ \ \mathcal{F} = \left\{M \in \mathcal{E} \middle| \overrightarrow{AM} \in F\right\}$$

$However, \{M \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AM} \in F\}$ $is\ an\ affine\ subspace\ directed\ by\ F\ and\ passing\ through\ A$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AM} \in F\} \text{ is unique}$$

- A partir de esta definición de los subespacios afines, se pueden encontrar varios ejemplos útiles

  - Un espacio afín de dimensión nula (el conjunto vacío $\emptyset = \{0\}$) solo tiene un punto único (el vector 0), por lo que no puede tener subconjuntos. Los subespacios de dimensión 1 se conocen como líneas, mientras que los de dimensión 2 se conocen como planos

  - Todos los puntos de un espacio afín $\mathcal{E}$ son subespacios afines