TEORÍA DE JUEGOS

Iker Caballero Bragagnini

Tabla de contenido

EL PROBLEMA DE LA DECISIÓN 2

LA INCERTIDUMBRE Y EL TIEMPO 5

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA 11

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA: RACIONALIDAD Y CONOCIMIENTO COMÚN 17

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA: EQUILIBRIO DE NASH 25

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA: ESTRATEGIAS MIXTAS 28

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN COMPLETA 36

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN COMPLETA: CREDIBILIDAD Y RACIONALIDAD SECUENCIAL 48

JUEGOS ESTÁTICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA 51

JUEGOS ESTÁTICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA: ALGORITMOS DE SOLUCIÓN 60

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA: EQUILIBRIO BAYESIANO PERFECTO 68

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA: JUEGOS DE SEÑALIZACIÓN 71

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA: ALGORITMO DE SOLUCIÓN PARA JUEGOS DE SEÑALIZACIÓN 74

JUEGOS DINÁMICOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA: JUEGOS DE SEÑALIZACIÓN CON REPUTACIÓN 85

El problema de la decisión

- Los problemas de decisión confrontan al ser humano diariamente, tanto a individuos como a grupos. Algunos son triviales, pero otros son complejos, por lo que el estudio de estas situaciones se desarrolla a partir de un lenguaje formal que permita su fácil representación y proporcione un conjunto de herramientas que permita estructurar el pensamiento sobre los problemas de decisión

    - Un problema de decisión tiene tres componentes: las acciones, los resultados y las preferencias

        - Las acciones o *actions* son todas las alternativas que tiene el jugador para elegir. El conjunto de acciones puede ser finito o puede ser infinito

$$A = \{a_1, a_2, \dots\} \qquad A = [\underline{a}, \bar{a}] \Rightarrow a \in [\underline{a}, \bar{a}]$$

        - Los resultados o *outcomes* son las posibles consecuencias de cualquiera de las acciones. El conjunto de resultados puede ser finito o puede ser infinito

$$X = \{x, y\} \qquad X = [\underline{x}, \bar{x}] \Rightarrow x \in [\underline{x}, \bar{x}]$$

        - Las preferencias o *preferences* describen como el jugador clasifica el conjunto de posibles resultados, de más deseado a menos deseado. Las relaciones de preferencia pueden ser débiles, estrictas, o se puede ser indiferente

$$x \preccurlyeq y \qquad x \prec y \qquad x \sim y$$

    - Para poder representar las preferencias de los jugadores, se hacen dos suposiciones sobre la habilidad para pensar en el problema de decisión del jugador

        - Los jugadores deben ser capaces de clasificar cualquier par de resultados del conjunto de resultados, por lo que no hay indecisión entre dos resultados. El axioma de completitud expresa que la relación de preferencia $\preccurlyeq$ es completa, dado que cualquier par de resultados $x, y \in X$ se pueden clasificar con esta relación de preferencia, de modo que $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$ (un resultado es mejor o tan bueno como otro)

        - Los jugadores deben ser capaces de clasificar todos los resultados del conjunto de resultados, de modo que no hay contradicciones en la clasificación. El axioma de transitividad expresa que la relación de preferencia $\preccurlyeq$ es transitiva, dado que para cualquier trio de resultados $x, y, z \in X$, si $x \preccurlyeq y$ y $y \preccurlyeq z$, entonces $x \preccurlyeq z$

        - Si una relación de preferencia cumple con ambos axiomas, se dice que es una relación de preferencia racional o *rational preference relation*. Todos los juegos asumirán que los jugadores tienen estas preferencias racionales

    - El marqués de Condorcet planteó una situación en la que individuos con preferencias racionales que se agrupan pueden tener preferencias irracionales: la paradoja de Condorcet

        - En esta paradoja, no se puede llegar a una decisión debido a que las preferencias racionales de los jugadores no son las misma y al escoger por mayorías, se rompe la condición de transitividad

        - De este modo, que los individuos de un grupo tengan preferencias racionales no quiere decir que el grupo tenga preferencias racionales

- Cuando solo se tienen en cuenta jugadores con preferencias racionales, se pueden reemplazar las relaciones de preferencia con una función de recompensa o *payoff function*

    - Una función de recompensa $u: X \to \mathbb{R}$ representa la relación de preferencia $\preccurlyeq$ si, para cualquier par $x, y \in X$, $u(x) \leq u(y)$ si y solo si $x \preccurlyeq y$

        - La función de recompensa, por tanto, asigna un mayor número o recompensa u_k a los resultados x_k más preferidos (con una posición más alta en la clasificación)

        - No obstante, este número no tienen significado, por lo que la recompensa es una construcción ordinal. Esto significa que cualquier transformación estrictamente creciente de la función u representaría la misma relación de preferencia

$$u(x) = a + bu(x) \qquad u(x) = \big(u(x)\big)^c$$

        - Los jugadores con preferencias racionales escogerán acciones que maximicen la función de recompensa

    - Si el conjunto de resultados X es finito, entonces cualquier preferencia racional sobre X se puede representar con una función de recompensa

        - Se puede encontrar el resultado menos preferido $\underline{x} \in X$ tal que todos los otros resultados $y \in X$ cumplen que $\underline{x} \preccurlyeq y$. Dividiendo los resultados en n grupos de preferencia $X_1, X_2, \dots, X_n$ (incluyendo en el grupo los resultados que son indiferentes entre si) porque el conjunto es finito y las preferencias son racionales, y considerando valores $u_n > \cdots > u_2 > u_1$ (las recompensas), se puede crear una función de recompensa $u(x)$ tal que $u(x) = u_k$ para toda $x \in X_k$. Por lo tanto, existe una función que representa la relación $\preccurlyeq$

- Muchas veces, se asume que $u(x_k) = x_k$. No obstante, esto no siempre es así y es importante distinguir las recompensas de los resultados

- Se asume que el jugador es un *homo economicus*, en el sentido que este escoge acciones para maximizar su bienestar definido por su función de recompensa sobre los posibles resultados

  - La suposición de que el jugador es racional es la base del paradigma de la teoría de la elección racional o *rational choice theory paradigm*

    - La teoría de la elección racional expresa que cuando un tomador de decisiones escoge entre diferentes acciones potenciales, este se guiará por su racionalidad para tomar la mejor decisión

  - Las suposiciones que se hacen cuando se adopta el paradigma son que el jugador entiende completamente el problema de decisión sabiendo todas las acciones y los resultados posibles (A y X), como cada acción afecta exactamente la materialización del resultado y sus preferencias racionales sobre los resultados

    - Si los jugadores no saben sus posibles acciones, estos pueden ser inconscientes del mejor curso de acción

    - Si los jugadores no saben los posibles resultados o como cada acción afecta a la materialización de estos, entonces no pueden predecir las consecuencias de sus acciones correctamente

    - Si los jugadores no saben sus preferencias racionales, pueden percibir incorrectamente el efecto de sus elecciones en su bienestar

  - Aunque se hayan definido las preferencias sobre los resultados, para operacionalizar el paradigma es necesario definirlas sobre las acciones

    - Como cada acción conlleva un único resultado, esta relación biyectiva hace que se pueda considerar preferencias y recompensas sobre acciones

$$a_k \text{ yields } x_k, \text{which yields } u_k$$

- Se puede definir la recompensa sobre las acciones de la siguiente manera: si $x(a)$ es el resultado de una acción a, entonces la recompensa de una acción a es dada por una función de recompensa $v: A \to \mathbb{R}$, de manera que $v(a) = u\big(x(a)\big)$ para toda $a \in A$

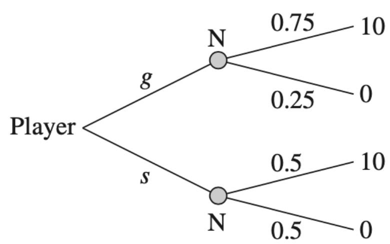
- Un jugador que enfrenta un problema de decisión con una función de recompensa v sobre acciones es racional si escoge una acción $a \in A$ que maximice la recompensa. De este modo, $a^* \in A$ se escoge si, y solo si, $v(a^*) \geq v(a)$ para toda $a \in A$

$$\max_{a \in A} v(a) = u\big(x(a)\big)$$

La incertidumbre y el tiempo

- Hay veces donde no hay una relación biyectiva entre acciones y resultados, de modo que los resultados pueden ser inciertos. Para lidiar con la incertidumbre, se utiliza el concepto de aleatoriedad y riesgo y se describen con una lotería

  - Cuando hay incertidumbre en los resultados de una acción, se puede entender que el resultado es una variable aleatoria con probabilidades p para cada resultado posible, las cuales dependen de la acción que se escoja. Por lo tanto, se utiliza el concepto de probabilidad condicionada



    - Una lotería simple sobre los resultados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es definida como una distribución de probabilidad $p = (p(x_1|a), p(x_2|a), \dots, p(x_n|a))$ dada una acción $a \in A$, donde $p(x_k|a) \geq 0$ es la probabilidad de que x_k ocurra y $\sum_{k=1}^{n} p(x_k|a) = 1$ para toda $a \in A$

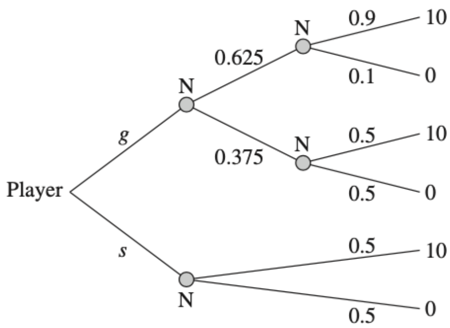
    - Para representar la lotería, se utiliza la notación vectorial y no la de conjuntos para tener en cuenta la probabilidad de cada resultado, aunque sea la misma para dos resultados

    - Aunque la probabilidad sea condicional, a veces se suele simplificar la notación de la probabilidad utilizando $p(x)$

    - Los problemas en donde no hay incertidumbre, por tanto, se pueden considerar como un problema en donde la probabilidad de los resultados después de cualquier decisión es 1 para algún resultado y 0 para todos los otros. Este tipo de lotería se llama lotería degenerada

- A un jugador solo le debe importar la distribución de probabilidad de los resultados finales, de modo que la manera exacta en la que la aleatoriedad se desarrolla no debe afectar al bienestar de los jugadores

    - Hay veces en las que hay loterías simples sobre loterías simples después de una decisión, llamadas loterías complejas. En este tipo de loterías, después de una decisión hay una lotería simple cuyo resultado es otra lotería simple



    - Como el jugador es indiferente a cómo se desarrolla la aleatoriedad y solo le importan las probabilidades de los resultados finales, si dada una acción $a \in A$ la probabilidad $p(x_k|a)$ es la misma en dos juegos diferentes, entonces estos son iguales porque la distribución de probabilidades es la misma

    - Para comprobar esto último, se multiplican las probabilidades de las loterías para obtener la probabilidad de un resultado x_k dada una acción a

- Las loterías también se pueden definir sobre un conjunto de resultados continuo. Una lotería simple sobre un intervalo $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ viene dada por una función de distribución de probabilidad condicional acumulada $F: X \to [0,1]$, donde $F(\hat{x}|a) = P(x \leq \hat{x}|a)$ es la probabilidad de que el resultado sea menor o igual a $\hat{x}$ dada una acción $a \in A$

$$F(\hat{x}|a) = P(x \leq \hat{x}|a) \;\; for \;\; \forall a \in A$$

    - La función de probabilidad acumulada tiene asociada una función de densidad condicional $f(x|a)$ para toda acción $a \in A$

- Se considera que la elección de una acción $a \in A$ es la elección de una lotería sobre los resultados X, dado que la relación biyectiva ya no es con los resultados, sino que es con una lotería

- Bajo esta consideración, se puede utilizar la teoría de la utilidad esperada desarrollada por Von Neumann y Morgenstern para poder evaluar resultados aleatorios

    - Existen importantes suposiciones que permiten que este método de evaluación sea válido, como el axioma de independencia

    - Este método se basa en el valor esperado de una lotería, considerado el valor medio ponderado de las recompensas para cada realización de la lotería, dada la interpretación de la lotería como una lista de ponderaciones

- Siendo $u(x)$ la función de recompensa del jugador sobre las resultados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y siendo $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ la lotería sobre X tal que $p_k = P(x = x_k)$, se puede definir la recompensa esperada de la lotería p de la siguiente manera:

$$E[u(x)|p] = \sum_{k=1}^{n} p_k u(x_k) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n)$$

    - Como a cada acción a le corresponde una lotería p, se puede definir la función de recompensas sobre las acciones, de modo que la función $v: A \to \mathbb{R}$ se define como $v(a) = E[u(x)|a]$ para toda $a \in A$. En este caso, las probabilidades pasan a ser condicionales a la acción (como en la definición para las loterías)

$$v(a) = E[u(x)|a] = \sum_{k=1}^{n} p(x_k|a)u(x_k) \quad for\ \forall a \in A$$

- Si el conjunto de resultados es continuo, entonces la definición se modifica. Siendo $u(x)$ la función de recompensa del jugador sobre los resultados $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ con una lotería que viene dada por una distribución de probabilidad acumulada $F(x)$ y función de densidad $f(x)$, se puede definir la recompensa esperada del jugador de la siguiente manera:

$$E[u(x)] = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)f(x)\, dx$$

    - Como a cada acción a le corresponde una lotería, se puede definir la función de recompensas sobre las acciones, de modo que la función $v: A \to \mathbb{R}$ se define como $v(a) = E[u(x)|a]$ para toda $a \in A$. En este caso, la función de densidad pasa a ser condicional a la acción (como en la definición para las loterías)

$$v(a) = E[u(x)|a] = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)f(x|a)\,dx \quad for\ \forall a \in A$$

- En la teoría de la utilidad esperada, no obstante, cualquier función de recompensa que preserve el orden de preferencia de los resultados ya no es válida. Esto ocurre porque, al utilizar el valor esperado, el valor de cada resultado afecta la media ponderada y puede hacer que la acción escogida varíe

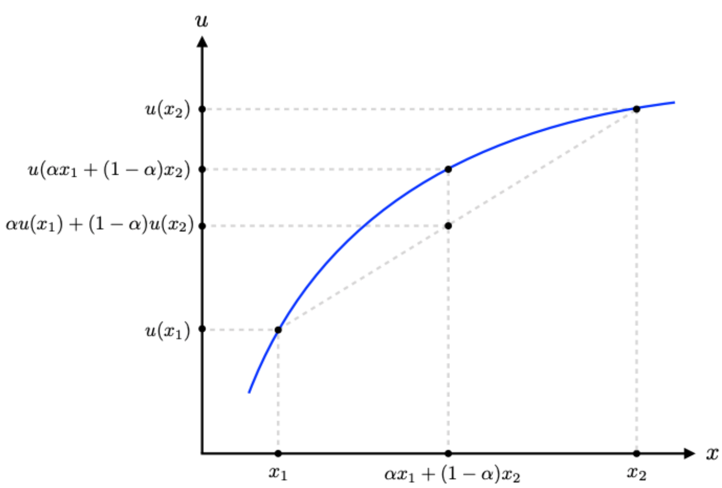
  - De este modo, la intensidad de las preferencias también importa y la representación con recompensa esperada involucra una clasificación cardinal, a diferencia de la recompensa de ciertos resultados, que involucraba una clasificación ordinal. En consecuencia, la suposición que se haga sobre la función de recompensa sobre los resultados no es inocua sobre la toma de decisión como antes

- Usando el criterio de la recompensa esperada para evaluar loterías, es necesario discutir las actitudes frente al riesgo de los individuos, porque se asume que a los jugadores les importa su recompensa esperada

  - Un jugador es adverso al riesgo o *risk averse* si su función de recompensa $u(x)$ es cóncava, de modo que no prefiere estar expuesto al riesgo de la lotería

$$\frac{du(x)}{dx} \geq 0 \;\Rightarrow\; risk\ aversion$$

  - Otra definición para la propiedad de concavidad de una función es que la función será cóncava si la recompensa del valor esperado de dos resultados $x_1, x_2 \in X$ es mayor a la recompensa esperada



$$u[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = u[E(x)] > E[u(x)] = \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

$$\alpha \in (0,1)$$

- Si el jugador tiene este perfil de riesgo, entonces no está dispuesto a intercambiar una recompensa segura por cualquier lotería no degenerada que tenga el mismo valor esperado, dado que disminuiría su bienestar

- Un jugador es amante al riesgo o *risk lover* si su función de recompensa $u(x)$ es convexa, de modo que prefiere estar expuesto al riesgo de la lotería que no estarlo

$$\frac{du(x)}{dx} \leq 0 \ \Rightarrow \ risk\ love$$

  - Otra definición para la propiedad de convexidad de una función es que la función será convexa si la recompensa del valor esperado de dos resultados $x_1, x_2 \in X$ es menor a la recompensa esperada

$$[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = u[E(x)] < E[u(x)] = \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

$$\alpha \in (0,1)$$

  - Si el jugador tiene este perfil de riesgo, entonces preferirá intercambiar una recompensa segura por cualquier lotería no degenerada que tenga el mismo valor esperado, dado que aumentaría su bienestar

- Si el jugador es indiferente entre estar expuesto al riesgo o no, entonces este es neutral al riesgo o *risk neutral* y su función de recompensa es lineal

  - En este caso, la recompensa del valor esperado de dos resultados $x_1, x_2 \in X$ es igual a la recompensa esperada

$$[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = u[E(x)] = E[u(x)] = \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

$$\alpha \in (0,1)$$

  - Si el jugador tiene este perfil de riesgo, entonces está dispuesto a intercambiar una recompensa segura por cualquier lotería no degenerada que tenga el mismo valor esperado, dado que no afecta a su bienestar

- La actitud frente al riesgo está determinada por la representación de las recompensas (la función de recompensas que se utiliza) y no por el orden de resultados

- Un jugador racional es aquel que escoge una acción entre el conjunto de posibles acciones que maximiza su recompensa, por lo que se puede utilizar esta lógica junto a la adopción de la recompensa esperada para evaluar decisiones

  - Una de las cuatro suposiciones de la racionalidad de los jugadores es que se sepa como las acciones afectan a como se materializarán los resultados

    - Cuando hay incertidumbre, por tanto, el jugador debe entender como cada acción se traduce en una lotería sobre un conjunto de posibles resultados, de modo que debe saber cual es la probabilidad de cada resultado dada una acción

  - Un jugador enfrentándose a un problema de decisión con una función de recompensas u sobre los resultados es racional si escoge una acción $a \in A$ si, y solo si, $v(a^*) = E[u(x)|a^*] \geq E[u(x)|a] = v(a)$ para toda $a \in A$

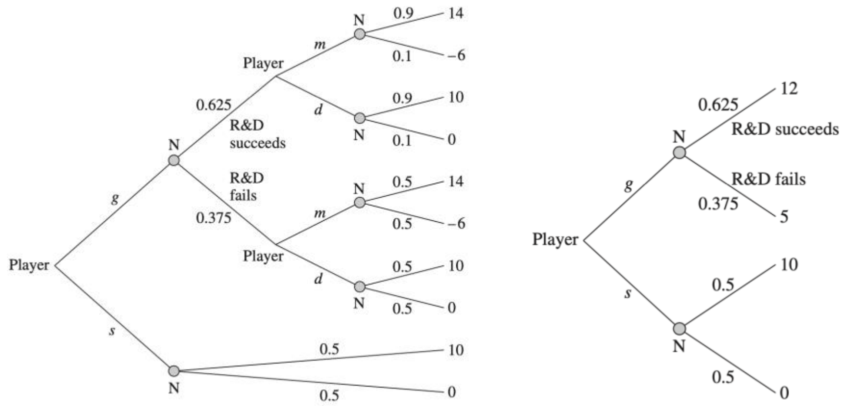
$$\max_{a \in A} v(a) = E[u(x)|a]$$

- La estructura discutida hasta ahora para lidiar con problemas de decisión bajo incertidumbre no tiene dimensión temporal, de modo que es una estructura estática. No obstante, muchos problemas necesitan la toma de decisiones consecutiva bajo una secuencia de decisiones impuesta por el mismo problema

  - La optimización de decisiones en este contexto se conoce como inducción hacia atrás o programación dinámica, cuya idea principal es que el jugador puede predecir racionalmente sus movimientos para saber como actuar al principio

    - La suposición de que el jugador sea racional implica que este es racional en cada etapa en la que se enfrente a una decisión. Por lo tanto, al principio de cada problema, el jugador sabe que actuará de manera óptima en etapas posteriores y puede predecir que hará

    - El método consiste en evaluar las decisiones desde el último grupo de nodos, definido como todos los nodos de decisión en la misma etapa, hasta el nodo inicial. De este modo, se calcula la recompensa esperada en cada nodo en el que no haya más nodos posteriores hasta que se reduce el juego a un problema de decisión más simple



- No obstante, si las recompensas se obtienen en diferentes momentos en el tiempo, normalmente se utilizan recompensas futuras descontadas para evaluar decisiones, de modo que una unidad de recompensa actual es más valiosa que una en el futuro
    - La motivación para descontar las recompensas futuras es la incertidumbre sobre el futuro junto con los valores esperados futuros
    - Si un jugador espera recibir un flujo de resultados $x_1, x_2, \dots, x_T$ en los periodos $t = 1,2,\dots,T$, y evalúa los resultados con una función de recompensa $u(x)$ en cada periodo, entonces en el primer periodo $t = 1$ su suma descontada de recompensas futuras será la siguiente:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u(x_t)$$

    - Es importante descontar las recompensas porque cambios en la tasa de descuento afectarán al factor de descuento δ, y en consecuencia, al valor de las decisiones presentes frente al de las recompensas futuras

Juegos estáticos con información completa

- En muchos problemas de decisión, los resultados no solo se ven afectados por las decisiones propias, sino también por decisiones de otros jugadores, de modo que los jugadores están en un ambiente estratégico
    - El marco usado para los problemas de decisiones, por tanto, debe modificarse para poder describir y analizar situaciones estratégicas en las que los jugadores que interactúan entienden su contexto, cómo sus acciones afectan a los resultados que ellos y otros obtendrán, y cómo los otros jugadores los valoran

- El lenguaje más simple que puede capturar las interacciones estratégicas es el de juegos, y el conjunto de situaciones más simple es el de juegos estáticos con información completa o *static games with complete information*

- En los juegos estáticos, un conjunto de jugadores independientemente escoge una acción definitiva, que causa la realización de unos resultados. Por ello, se puede considerar que los juegos estáticos tienen dos pasos:

  - En el primer paso, cada jugador escoge una acción simultáneamente e independientemente. Esto quiere decir que los jugadores deben tomar decisiones sin observar las acciones de los otros jugadores y sin interactuar con ellos para poder coordinarse (no hay ventaja informativa)

  - Las recompensas son distribuidas a cada jugador, condicional a las acciones escogidas por los jugadores. Una vez los jugadores decidan sus acciones, estas resultarán en un resultado o en una distribución probabilística sobre los resultados, y estos resultados conllevan unas recompensas dependiendo de las preferencias indicadas por la función de recompensa sobre los resultados de cada jugador

- El concepto de conocimiento común permite definir los juegos de información completa, por lo que es necesario una definición concreta

  - Un evento E es conocimiento común si todos los jugadores saben o conocen E, si todo el mundo sabe que todo el mundo sabe E, y así hasta el infinito

  - Requerir conocimiento común no es una suposición inocua, pero es necesario para un marco de análisis en la que los jugadores tienen que razonar estratégicamente

- Los juegos con información completa requieren que haya tres componentes que sean conocimiento común o *common knowledge* entre todos los jugadores del juego:

  - Todas las posibles acciones y resultados de las acciones de todos los jugadores

  - Cómo cada combinación de acciones de todos los jugadores afecta al resultado que se materializa

  - Las preferencias de cada uno de los jugadores sobre los resultados

- Una vez se entiende qué son los juegos estáticos con información completa, se puede desarrollar un marco formal para analizar la esencia estratégica de estos juegos. Por ahora, se analizarán juegos de forma normal con estrategias puras o *normal-form games with pure strategies*

    - Una estrategia se define como un plan de acción que intenta cumplir un objetivo específico, pero se puede definir de manera más formal.

        - Una estrategia pura para un jugador i es un plan de acción determinístico denotado como s_i, y el conjunto de todas las estrategias puras para un jugador i se denota como S_i

        - Un perfil de estrategias puras $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, donde $s_i \in S_i$ para toda $i = 1,2, \dots, n$, describe una combinación particular de estrategias puras escogidas por todos los n jugadores del juego. El perfil de estrategias es un vector de n estrategias perteneciente a S, definido como el producto cartesiano de todos los conjuntos de estrategias puras de los jugadores

$$S \equiv S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

        - Se utiliza el término "puro" para especificar que se escoge un cierto plan de acción, y que no se escoge de manera estocástica, lo cual es posible con estrategias mixtas o estocásticas

        - En un juego estático de información completa, el conjunto de acciones A_i es coincidente con el conjunto de estrategias S_i porque cada jugador elige de manera simultánea y solo puede escoger una acción. No obstante, en juegos secuenciales, esto no tiene por qué ser cierto, y S_i puede no ser igual a A_i

$$Static\ games\ \Rightarrow\ A_i = S_i\ \ for\ \ i = 1,2, \dots, n$$

    - Una de las maneras más comunes de representar un juego es representándolo de forma normal, la cual debe incluir tres componentes:

        - Un conjunto finito de todos los jugadores

$$N = \{1,2, \dots, n\}$$

        - Un conjunto de todas las acciones para cada uno de los jugadores, representado por un conjunto de conjuntos de acciones o estrategias

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad or \quad \{S_i\}_{i=1}^{n} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

- Un conjunto de las funciones de recompensa para cada jugador que dará un valor de recompensa a cada combinación de acciones escogidas de los jugadores

$$\{v_i\}_{i=1}^{n} = \{v_1(s_1, s_2, \dots, s_n), v_2(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots, v_n(s_1, s_2, \dots, s_n)\}$$

- La representación del juego es muy general, y captura las situaciones en las que los jugadores $i \in N$ deben escoger una posible estrategia $s_i \in S_i$ simultáneamente

  - Después de que las estrategias sean seleccionadas, los jugadores realizarán sus recompensas, $v_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}$, donde $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ es el perfil estratégico que ha sido seleccionado

  - Un juego de forma normal Γ , por tanto, se puede representar como un triple de conjuntos N, $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{v_i\}_{i=1}^{n}$

$$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i\}_{i=1}^{n} \rangle$$

- Para juegos con dos jugadores en donde cada jugador tenga un número finito de estrategias, hay una representación conveniente llamada representación matricial

  - Un juego finito es un juego con un número finito de jugadores, el que el número de estrategias en S_i es finito para todos los jugadores $i \in N$

    - Aunque a veces se puedan escoger infinitas acciones, se puede hacer una buena aproximación restringiendo la atención a un número finito de acciones

  - Cualquier juego finito con dos jugadores se puede representar de forma matricial de modo que se capture toda la información relevante de un juego en forma normal. Para representarlo, se hace de la siguiente manera:

		Player 2		
		R	*P*	*S*
	R	0, 0	−1, 1	1, −1
Player 1	*P*	1, −1	0, 0	−1, 1
	S	−1, 1	1, −1	0, 0

    - Las filas representan las estrategias o las acciones del jugador 1. Si hay k estrategias en S_1, entonces habrá k filas en la matriz

    - Las columnas representan las estrategias o las acciones del jugador 2 . Si hay m estrategias en S_2 , entonces habrá m columnas en la matriz

        - Cada casilla de la matriz contiene un vector de dos elementos, (v_1, v_2), donde v_i es la recompensa del jugador i cuando las acciones o estrategias de los dos jugadores corresponden a la misma fila y columna

- Ahora que se tiene una representación formal de un juego, es necesario saber como resolverlo con tal de predecir como los jugadores actuarán

    - Para ello, es necesario hacer suposiciones sobre el comportamiento y las creencias de los jugadores

        - En consecuencia, se necesita un concepto de solución, el cual es un método para analizar juegos con el objetivo de restringir el conjunto de posibles resultados a aquellos que sean más razonables que otros

        - Se usa el término de equilibrio para cualquier perfil de estrategia que emerja como una predicción o solución del concepto de solución, siendo más de un equilibrio posible. Los equilibrios se pueden entender, por tanto, como las predicciones o soluciones de la teoría

        - Estos equilibrios no son las recompensas que obtienen los jugadores, si no que son las estrategias que los jugadores utilizan en equilibrio (el perfil de estrategias)

    - Para ello, es necesario hacer las siguientes suposiciones sobre el comportamiento y las creencias de los jugadores:

        - Los jugadores son racionales, de modo que un jugador escoge su acción o estrategia, $s_i \in S_i$, para maximizar su recompensa consistentemente con sus creencias sobre lo que está pasando en el juego

        - Los jugadores son inteligentes, de modo que un jugador sabe las acciones, los resultados y las preferencias de todos los jugadores

        - El hecho de que los jugadores sean racionales e inteligentes es conocimiento común entre los jugadores del juego

        - Cualquier predicción o equilibrio del concepto de solución debe ser autorrealizado o *self-fulfilling*

    - La suposición de que un equilibrio tiene que ser autorrealizado es el núcleo del análisis propuesto y de la teoría de juegos no cooperativa o *noncooperative game theory*

        - Los jugadores tienen un comportamiento no cooperativo cuando cada jugador tiene el control de sus propias acciones, y se ciñen a una solo si esta es en su mayor interés

        - De este modo, el equilibrio es un perfil de estrategias en donde todos los jugadores están felices con su decisión dadas las decisiones que han tomado los otros

- La teoría de juegos se debe evaluar por qué tan buena es como una herramienta metodológica, de modo que describa un método de análisis que se aplique a un gran conjunto de juegos. Los criterios que se usan para evaluar sulen ser la existencia, la unicidad y la invariabilidad

    - Un concepto de solución es valioso si se puede aplicar a una gran variedad de juegos y no solo a un pequeño grupo, por lo que tiene que aplicarse generalmente y no de manera específica

        - Si se aplica el concepto de solución a diferentes juegos, se requiere que exista al menos un equilibrio

    - Un concepto de solución debe restringir el conjunto de posibles resultados a uno más pequeño de resultados más razonables

        - Idealmente, el concepto permite restringir el conjunto de posibles resultados a un único resultado

        - No obstante, este requerimiento suele ser difícil de cumplir por la naturaleza de la interacción no cooperativa. Los resultados también dependen de las acciones de otros jugadores, lo que hace que haya muchas combinaciones de estrategias que apoyen la existencia de múltiples equilibrios

    - Un concepto de solución no debería variar al introducirse pequeños cambios, definidos como pequeños cambios en las funciones de recompensa de los jugadores

        - Formalmente, si para cualquier valor pequeño $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ se incrementan las recompensas para todos los resultados para cada jugador por no más de ε, entonces la predicción o solución no debería cambiar

        - La invariabilidad es una propiedad de robustez para un concepto de solución, de modo que dos juegos con el mismo conjunto de jugadores y estrategias o acciones, pero con funciones de recompensa parecidas, este concepto no debería proporcionar predicciones muy diferentes

- Es deseable evaluar si las propiedades de las predicciones o soluciones permiten mejorar el bienestar social para los jugadores. Esta evaluación se hace a través del concepto de optimalidad de Pareto

  - Un perfil de estrategia $s \in S$ domina en el sentido de Pareto o *Pareto dominates* un perfil de estrategia $s' \in S$ si $v_i(s) \geq v_i(s')$ para cualquier $i \in N$ y $v_i(s) > v_i(s')$ para al menos un jugador $i \in N$. En este caso, s' está dominada en el sentido de Pareto o *Pareto dominated* por s

  - Un perfil de estrategia es óptimo en el sentido de Pareto o *Pareto optimal* si no está dominada en el sentido de Pareto por ningún otro perfil de estrategias

  - No siempre se puede conseguir un equilibrio con optimalidad paretiana

Juegos estáticos con información completa: racionalidad y conocimiento común

- Una de las implicaciones de la racionalidad de los jugadores es el concepto de dominación en estrategias puras

  - Como muchas veces es necesario referirse a las estrategias de los oponentes de $i \in N$, se suele utilizar una notación conveniente

    - Las acciones o estrategias escogidas por todos los jugadores que no son i se expresan de la siguiente manera:

$$(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$$

    - Para poder simplificar la expresión, se suele utilizar el el suscrito $-i$ para denotar todos los jugadores menos $i \in N$. Por lo tanto, s_{-i} es un perfil de estrategias particular para todos los jugadores que no son i

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

$$S_{-i} \equiv S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$$

$$s_{-i} \in S_{-i}$$

    - En consecuencia, la recompensa de un jugador i definida por sus acciones o estrategias se puede reescribir como $v_i(s_i, s_{-i})$, donde $s = (s_i, s_{-i})$

- Hay situaciones en las que la mejor estrategia o acción que un jugador puede tomar no depende de las decisiones de otros jugadores, el cual es el concepto de dominación

  - Siendo $s_i \in S_i$ y $s_i' \in S_i$ posibles estrategias para el jugador i, se dice que s_i' está estrictamente dominada o *strictly dominated* por s_i si para cada posible combinación de las estrategias de los otros jugadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, la recompensa del jugador i de la estrategia s_i' es estrictamente menor a s_i

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s'_{-i}) \quad for \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

    - Utilizando las relaciones de referencia, la condición expresa que $s_i \succ s_{-i}$

  - En cambio, siendo $s_i \in S_i$ y $s_i' \in S_i$ posibles estrategias para el jugador i, se dice que s_i' está débilmente dominada o *weakly dominated* por s_i si para cada posible combinación de las estrategias de los otros jugadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, la recompensa del jugador i de la estrategia s_i' es menor o igual a s_i

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s'_{-i}) \quad for \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

    - Esto significa que para algunos perfiles $s_{-i} \in S_{-i}$ la relación será estricta, mientras que para otros será de equivalencia

  - Un teorema derivado de estas definiciones expresa que un jugador racional nunca jugará una estrategia estrictamente dominada

    - Esto es obvio para las estrictamente dominadas porque un jugador no puede optimizar en el sentido de Pareto si hay una estrategia que proporciona una mayor recompensa independientemente de las decisiones de los otros jugadores y no la juega

    - Para las estrategias débilmente dominadas, en cambio, si se puede dar el caso debido a que la relación es débil

    - Por lo tanto, el conocimiento del juego hace que se puedan identificar estas estrategias la racionalidad hace que estas se eviten

  - Se dice que $s_i \in S_i$ es una estrategia estrictamente dominante o *strictly dominant strategy* para i si cualquier otra estrategia de i está estrictamente dominada por esta

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \ \ for \ \forall s_i' \in S_i \ such \ that \ s_i' \neq s_i \ \ and \ \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Si todos los jugadores en el juego tuvieran una estrategia estrictamente dominante, esta sería un buen predictor del comportamiento porque se deriva únicamente de la racionalidad

- En cambio, se dice que $s_i \in S_i$ es una estrategia débilmente dominante o *weakly dominant strategy* para i si cualquier otra estrategia de i está débilmente dominada por esta

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}) \;\; for\ \forall s_i' \in S_i\ such\ that\ s_i' \neq s_i \;\; and \;\; \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

  - Este no siempre es un buen predictor del comportamiento porque un jugador puede tener varias estrategias débilmente dominantes

- Un concepto de solución simple se basa en el concepto de dominación. El perfil de estrategia $s^D \in S$ es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante o *strict dominant strategy equilibrium* si $s_i^D \in S_i$ es una estrategia estrictamente dominante para toda $i \in N$

  - Este concepto es muy sencillo porque solo requiere encontrar la estrategia estrictamente dominante de cada jugador y usar el perfil de estrategias para describir o predecir el comportamiento

- En cambio, el perfil de estrategia $s^{WD} \in S$ es un equilibrio de estrategia débilmente dominante o *weakly dominant strategy equilibrium* si $s_i^{WD} \in S_i$ es una estrategia débilmente dominante para toda $i \in N$

  - Este concepto de solución no es tan fuerte como el de equilibrio de estrategia estrictamente dominante, dado que solo es la estrategia que proporciona más recompensas para unos perfiles $s_{-i} \in S_{-i}$ concretos

- Si el juego $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$ tiene un equilibrio de estrategia estrictamente dominante s^D, entonces s^D es el único equilibrio de estrategia dominante

  - Debido a que esta estrategia, por definición, proporciona una mayor recompensa que cualquier otra, cualquier otra estrategia será descartada porque proporciona una recompensa menor (de otro modo, las estrategias no serían estrictamente dominantes). En consecuencia, solo puede haber un único equilibrio de estrategia dominante porque no se puede llegar a los equilibrios débilmente dominantes (las otras estrategias han sido descartadas)

- Evaluando los conceptos de solución, se puede ver como el equilibrio de estrategia estrictamente dominante cumple con la unicidad y la invariabilidad, pero no con el de existencia. En cambio, el equilibrio de estrategia débilmente dominante no tiene porque cumplir con los criterios

        - Debido al teorema anterior, el equilibrio de estrategia estrictamente dominante es único. Además, siempre se puede encontrar un número pequeño ε tal que $v(s_i, s_{-i}) > v(s_i', s_{-i})$ gracias a que la desigualdad es estricta

        - El equilibrio de estrategia débilmente dominante, en cambio, no tiene por qué ser único y no tiene por qué ser invariable, debido a que utiliza una relación débil

        - No obstante, el equilibrio no siempre existe porque hay veces en el que la mejor estrategia de un jugador depende de las estrategias de los otros jugadores

        - El equilibrio tampoco tiene que ser Pareto óptimo, dado que hay situaciones no cooperativas en las que se podría obtener una recompensa mayor sin perjudicar a ningún otro jugador al cooperar. No obstante, esto no es un fallo del concepto de solución, sino que es debido a la propiedad de autorrealización

- La suposición de racionalidad de los jugadores hace que un jugador nunca juegue una estrategia estrictamente dominada y que juegue una estrategia estrictamente dominante si la tiene. No obstante, no siempre existe un equilibrio de estrategia estrictamente dominante, por lo que es necesario desarrollar enfoques alternativos que se puedan aplicar a una mayor cantidad de juegos

    - A partir de la suposición de racionalidad de los jugadores y de conocimiento común, se puede desarrollar la idea detrás del método IESDS

        - La racionalidad implica que se saben las estrategias que no se jugarán (las estrategias estrictamente dominadas)

        - El conocimiento común de la estructura del juego y de la racionalidad de los jugadores permite que los jugadores ignoren las estrategias estrictamente dominadas de sus rivales, dado que un jugador sabe que sus rivales son racionales y no las jugarían

        - Esto hace que los jugadores sepan que, siempre que haya estrategias estrictamente dominadas, se estará jugando una versión reducida del juego original

		Player 2		
		L	*C*	*R*
	U	4, 3	5, 1	6, 2
Player 1	*M*	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	2, 8

		Player 2	
		L	*R*
	U	4, 3	6, 2
Player 1	*M*	2, 1	3, 6
	D	3, 0	2, 8

- No obstante, el hecho que todos los jugadores saben que están jugando un juego reducido también es conocimiento común. Eso hace que se juegue una versión reducida de la versión reducida, dado que los rivales saben que no van a jugarse estrategias estrictamente dominadas, y se pueden encontrar nuevas estrategias que ahora están estrictamente dominadas (aunque no lo estuvieran en la versión original del juego) y eliminarlas

		Player 2	
		L	*R*
	U	4, 3	6, 2
Player 1	*M*	2, 1	3, 6
	D	3, 0	2, 8

		Player 2	
		L	*R*
Player 1	*U*	**4, 3**	6, 2

- Esta lógica puede aplicarse de manera reiterada porque la racionalidad es conocimiento común, dejando una versión muy reducida del juego original y posibilitando encontrar una solución o equilibrio

o El proceso anteriormente descrito permite eliminar estrategias estrictamente dominadas permite obtener un único equilibrio. Este se denomina eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas o *iterated elimination of strictly dominated strategies* (IESDS), el cual se puede dividir en cuatro pasos:

- Siendo S_i^k el conjunto de estrategias del jugador $i \in N$ que sobrevive k rondas de la IESDS, el primer paso consiste en definir $S_i^0 = S_i$, de modo que el conjunto inicial es el conjunto de estrategias del jugador $i \in N$, y establecer $k = 0$

- El segundo paso consiste en saber si hay jugadores con alguna estrategia $s_i \in S_i^k$ que sea estrictamente dominada. De haber, entonces se pasa al paso tres, y si no hay, al cuatro

- El tercer paso consiste en eliminar para cada uno de los jugadores cualquier estrategia $s_i \in S_i^k$ que sea estrictamente dominada, creando así un nuevo juego con conjuntos de estrategia S_i^k que no incluyan las estrategias dominadas, y en establecer $k = k + 1$. Una vez hecho esto, se vuelve al paso dos

- El cuarto paso es la solución o predicción, de modo que las estrategias que quedan en S_i^k son predictores razonables del comportamiento de los jugadores

- Un perfil de estrategia $s^{ES} = (s_1^{ES}, s_2^{ES}, \ldots, s_n^{ES})$ es un equilibrio de eliminación iterada o *iterated-elimination equilibrium* si sobrevive al proceso de IESDS

  - Este equilibrio es parecido al de dominación estricta, pero no solo se basa en la suposición de racionalidad, sino también en la del conocimiento común de racionalidad

  - Otra diferencia entre este equilibrio y el de dominación estricta es que en este no hace falta que todos los jugadores tengan una estrategia estrictamente dominante en la versión original del juego (en los conjuntos de estrategia de los jugadores), mientras que en el de dominación estricta si que es requerido (por la definición del equilibrio)

- Evaluando el concepto de solución del equilibrio de eliminación iterada, se puede ver como cumple con el criterio de existencia, pero no con el de unicidad ni con el de optimalidad paretiana

  - Como el equilibrio no requiere la existencia de una estrategia estrictamente dominante ni de estrategias estrictamente dominadas para todos los jugadores, este se puede aplicar a cualquier juego y siempre existirá al menos un equilibrio

  - No obstante, no es necesario que haya un único equilibrio, de modo que puede haber múltiples y no deja predecir el comportamiento de manera precisa

  - Además, no es necesario que el resultado o los resultados sean óptimos en el sentido de Pareto

- Si para un juego $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$, s^D es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante, entonces s^D es el único equilibrio que sobrevive a la IESDS

  - Como s^D es un perfil de estrategias con las estrategias estrictamente dominantes, todas las otras estrategias serán estrictamente dominadas, y eso hace que después de una ronda de eliminación, se obtenga únicamente el perfil de estrategias s^D, el cual será el equilibrio s^{ES}

- Los dos conceptos anteriormente vistos se enfocan en encontrar el equilibrio eliminando las estrategias que no se jugarían. Un enfoque alternativo seria encontrar el equilibrio a partir de las estrategias que se jugarían y bajo qué condiciones, lo cual se hace con el concepto de mejor respuesta

  - Una estrategia $s_i \in S_i$ es la mejor respuesta o *best response* de un jugador a las estrategias de sus oponentes si, dado el perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$, la recompensa que se obtiene jugando s_i es mayor o igual a cualquier otra $s_i' \in S_i$

$$v(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}) \;\; for \;\; \forall s_i' \in S_i$$

    - Como las decisiones también dependen de las decisiones de otros jugadores, para que un jugador sea optimice en un juego, este tiene que escoger la mejor estrategia como respuesta a las estrategias de otros jugadores

    - Un jugador racional que cree que sus oponentes jugarán un perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ siempre escogerá una mejor respuesta a s_{-i}

  - Si s_i es una estrategia estrictamente dominada para el jugador $i \in N$, entonces s_i no puede ser la mejor respuesta para ningún perfil $s_{-i} \in S_{-i}$

    - Si s_i está estrictamente dominada, entonces existe otra estrategia s_i' tal que $v(s_i', s_{-i}) > v(s_i, s_{-i})$ para todo perfil $s_{-i} \in S_{-i}$. Por lo tanto, no existe ningun $s_{-i} \in S_{-i}$ tal que $v(s_i, s_{-i}) \geq v(s_i', s_{-i})$, y eso hace que s_i no sea la mejor respuesta a ningún perfil $s_{-i} \in S_{-i}$

    - Si la relación de dominación fuera débil, entonces sí que podría ser la mejor respuesta a algún perfil $s_{-i} \in S_{-i}$

  - Si en un juego finito en forma normal s^* es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante, o si es el único equilibrio que sobrevive la IESDS, entonces s^* es la mejor respuesta para cualquier s_{-i}^* para cualquier jugador $i \in N$

    - Suponiendo que s^* es el único perfil de estrategia que sobrevive la IESDS, este tiene que ser la mejor respuesta porque no puede haber otro perfil dominante para $s_{-i}^* \in S_{-i}$ que se juegue (todas las otras estrategias son eliminadas)

  - A partir del concepto de mejor respuesta, es necesario especificar contra qué perfiles de estrategia el jugador debería jugar una mejor respuesta, es decir, cual es la mejor estrategia a escoger entre todas las posibles dependiendo de las estrategias de los otros

- Los jugadores tienen que tener la posibilidad de hacer conjeturas o tener creencias para poder saber qué estrategia escoger. El concepto de creencias es muy importante para el análisis del comportamiento estratégico, porque muchas veces las decisiones de un jugador dependen de las de otros jugadores

- Un jugador debería jugar una mejor respuesta cuando sus creencias de lo que los otros jugadores jugarán justifican el uso de esta mejor respuesta

- Una creencia de un jugador i se define como un posible perfil estratégico $s_{-i} \in S_{-i}$ de los otros jugadores

  - Como el jugador tiene una creencia sobre las estrategias que jugarán sus oponentes, este será capaz de formular una mejor respuesta para esta creencia

- Un jugador racional tendrá una lista de mejores respuestas para cada uno de los posibles perfiles de estrategia de sus oponentes, por lo que, si se entiende la lista como un plan, este plan convierte las creencias en la elección de una acción que sea mejor respuesta a esas creencias

  - Este plan se puede entender como la función de mejor respuesta o *best response function* del jugador i. No obstante, puede ser que corresponda más de una acción como mejor respuesta de un perfil de estrategia s_{-i}, por lo que no se puede utilizar la noción de función y se utiliza la de correspondencia

  - La correspondencia de mejor respuesta o *best-responde correspondence* de un jugador i selecciona para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ un subconjunto $\beta_i(s_{-i}) \subset S_i$ donde cada estrategia $s_i \in \beta_i(s_{-i})$ es la mejor respuesta para el perfil s_{-i}

- Otra de las cuestiones importantes, sabiendo que son las creencias y las mejores respuestas, es saber qué creencias deberían tener los jugadores sobre las estrategias de sus oponentes

  - Este razonamiento debe tener en cuenta la racionalidad de los jugadores, el conocimiento común de la racionalidad de los jugadores, y el hecho de que todos los jugadores intentan adivinar el comportamiento de sus oponentes

  - Se puede, por lo tanto, plantear un concepto de solución nacido de preguntar qué estrategias un jugador racional utilizaría: un jugador racional solo escogerá estrategias que son mejor respuesta para algún perfil de sus oponentes

- Una estrategia $s_i \in S_i$ nunca es una mejor respuesta si no hay ninguna creencia $s_{-i} \in S_{-i}$ para el jugador i para la cual $s_i \in \beta_i(s_{-i})$
  - El siguiente paso es utilizar el conocimiento común de racionalidad para construir un proceso iterativo que lleve el razonamiento al límite. De este modo, se eliminan las estrategias que no son la mejor respuesta para ningún perfil de estrategia de los oponentes, dejando un juego más pequeño, y se vuelve a hacer lo mismo (de manera parecida al método IESDS)
  - El conjunto de estrategias que sobrevive este proceso iterado se denomina conjunto de estrategias racionalizables o *rationalizable strategies*, y el concepto de solución definido por este proceso iterado se denomina racionalizabilidad o *rationalizability*
- Si para un juego $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i\}_{i=1}^{n} \rangle$, s^D es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante, entonces s^D es el único equilibrio que sobrevive al proceso de racionalización
  - Como s^D es un perfil de estrategias con las estrategias estrictamente dominantes, todas las otras estrategias no serán la mejor respuesta a ningún perfil de estrategia de los oponentes porque están estrictamente dominadas. Eso hace que después de una ronda de eliminación, se obtenga únicamente el perfil de estrategias s^D, el cual será el equilibrio
- El problema con este concepto de solución es que las creencias pueden estar mal
  - Este concepto de solución es equivalente al de IESDS en términos de existencia, unicidad y optimalidad paretiana
  - Puede ser que los jugadores escojan una estrategia como mejor respuesta a un perfil de estrategias de los jugadores, pero que este perfil no sea el que se realice y que por tanto haya comportamiento diferente al previsto

Juegos estáticos con información completa: equilibrio de Nash

- Como los conceptos de solución anteriormente planteados no podían aplicarse o no podían restringir el conjunto de comportamientos razonables, se utiliza un concepto de solución que junta tanto creencias como acciones y comportamientos, el equilibrio de Nash
  - El perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \in S$ es un equilibrio de Nash si s_i^* es la mejor respuesta para s_{-i}^* para toda $i \in N$, de modo que

la recompensa de s_i^* es mayor o igual a cualquier otra estrategia dado un perfil s_{-i}^*

$$v_i(s_i^*, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*) \;\; for \;\; \forall s_i' \in S_i \;\; and \;\; \forall i \in N$$

- El equilibrio de Nash es un perfil de estrategias para los que cada jugador escoge su mejor respuesta a las estrategias de todos los otros jugadores, por lo que no hay ninguna desviación provechosa para ningún jugador

- Si cada jugador escoge su mejor respuesta, es posible comprobar si un perfil es un equilibrio de Nash a través de comparar si la recompensa de jugar las estrategias de equilibrio es mayor o igual a la de jugar otra alternativa bajo las estrategias de equilibrio de los oponentes

- Considerando un perfil de estrategia $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$, si s^* es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante, el único equilibrio sobreviviente al IESDS o el único equilibrio sobreviviente al proceso de racionalización, entonces s^* es el único equilibrio de Nash

  - Esto se puede comprobar por las definiciones de cada tipo de equilibrio

- Los requerimientos para la existencia de un equilibrio de Nash son que cada jugador tiene que jugar una mejor respuesta a sus creencias y que las creencias de los jugadores sobre las estrategias de sus oponentes tienen que ser correctas

  - El primer requerimiento es una consecuencia directa de la racionalidad, pero el segundo requerimiento es mucho más demandante porque obliga a los jugadores a predecir el comportamiento de sus jugadores

  - Si estas creencias tienen algún peso, que puede basarse en experiencia pasada o en algún tipo de razonamiento deductivo, entonces estas serán autocumplidas por el hecho de que apoyan el comportamiento que los jugadores creen que ocurrirán

- Evaluando el equilibrio de Nash bajo los criterios de evaluación anteriormente mencionados, se puede ver como este respeta el de existencia para la mayoría de juegos, pero no tiene por qué ser único o óptimo en el sentido de Pareto

  - Hay juegos para los cuales no existe un equilibrio de Nash, aunque para condiciones generales, suele haber al menos uno

- Cuando los juegos se pueden representar en forma de matriz, existe un método simple para poder encontrar todos los equilibrios de Nash con estrategias puras, el cual se basa en que el equilibrio requiere un par de estrategias en las que ambos jugadores estén jugando una mejor respuesta a la estrategia de su oponente

    - Para cada columna (estrategia del segundo jugador), hay que encontrar la recompensa más alta para el primer jugador

		Player 2		
		L	*C*	*R*
	U	7, 7	4, 2	1, 8
Player 1	*M*	2, 4	$\underline{5, 5}$	$\underline{2, 3}$
	D	$\underline{8, 1}$	3, 2	0, 0

        - Por definición de mejor respuesta, la casilla debe estar en una fila que sea una mejor respuesta a una estrategia del segundo jugador concreta, por lo que este paso identifica la mejor respuesta del primer jugador para cada una de las estrategias del segundo jugador

        - Se obtendrá, en consecuencia, un conjunto de mejores respuestas del primer jugador $\beta_1(s_2)$

    - Para cada fila (estrategia del primer jugador), hay que encontrar la recompensa más alta para el segundo jugador

		Player 2		
		L	*C*	*R*
	U	7, 7	4, 2	$\overline{1, 8}$
Player 1	*M*	2, 4	$\underline{\overline{5, 5}}$	$\underline{2, 3}$
	D	$\underline{8, 1}$	$\overline{3, 2}$	0, 0

        - Por definición de mejor respuesta, la casilla debe estar en una columna que sea una mejor respuesta a una estrategia del primer jugador concreta, por lo que este paso identifica la mejor respuesta del segundo jugador para cada una de las estrategias del primer jugador

        - Se obtendrá, en consecuencia, un conjunto de mejores respuestas del segundo jugador $\beta_2(s_1)$

- Si cualquier casilla de una matriz tiene dos marcas (esas estrategias son mejores respuestas para ambos jugadores), esas estrategias serán un equilibrio de Nash de estrategias puras
    - Esto ocurre porque con esas estrategias, los dos jugadores están jugando su mejor respuesta a la creencia que el otro utilizará esa estrategia, de modo que no hay desviación provechosa

Juegos estáticos con información completa: estrategias mixtas

- Aunque antes se restringían las estrategias a estrategias puras, ahora se introducen las estrategias estocásticas o mixtas.
    - Este tipo de comportamiento es importante, dado que permite expandir el conjunto de estrategias y el conjunto de creencias de los jugadores
        - Si un jugador i puede creer que sus oponentes escogerán estrategias estocásticas, entonces esto pone al jugador i en una situación similar a la de un decisor que se enfrenta a un problema en el que hay incertidumbre probabilística
    - Este comportamiento tiene implicaciones e interpretaciones interesantes para el equilibrio de Nash y para otros conceptos de solución
- Las estrategias mixtas se pueden dividir en estrategias mixtas con conjuntos finitos o con conjuntos infinitos. Además, estas tienen implicaciones para las creencias y para el valor esperado
    - Siendo $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$ el conjunto finito de estrategias puras del jugador i, se define ΔS_i como el *simplex* de S_i, que es el conjunto de todas las distribuciones probabilísticas sobre S_i. Una estrategia mixta para un jugador i es un elemento $\sigma_i \in \Delta S_i$, de modo que este elemento es una distribución de probabilidad $\sigma_i = \left(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \dots, \sigma_i(s_{im})\right)$ sobre S_i, donde $\sigma_i(s_{ik})$ es la probabilidad de que un jugador i juegue una estrategia $s_{ik} \in S_i$
        - Cualquier distribución de probabilidad σ_i sobre conjuntos finitos de elementos debe cumplir con dos condiciones: la probabilidad de cualquier evento no puede ser negativa y la suma de todas las probabilidades debe de ser igual a la unidad

$$\sigma_i(s_{ik}) \geq 0 \;\; for \;\; \forall s_{ik} \in S_i$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_i(s_{ik}) = 1 \;\; for \; k = 1,2, \dots, m$$

- En otras palabras, una estrategia mixta para un jugador i es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras. Por lo tanto, se puede entender el simplex como el conjunto de estrategias mixtas. Este será el conjunto de todos los vectores $\left(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \dots, \sigma_i(s_{im})\right)$ tales que ningún elemento sea negativo y que la suma de todos ellos sea uno

  $$\Delta S_i = \left\{\left(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \dots, \sigma_i(s_{im})\right) \in [0,1]^m \middle| \textstyle\sum_{j=1}^{m} \sigma_i\left(s_{ij}\right) = 1\right\}$$

- Cualquier estrategia pura es una estrategia mixta con una distribución degenerada, en la que se escoge una sola estrategia con probabilidad uno y todas las otras tienen una probabilidad nula

o Dada una estrategia mixta σ_i para el jugador i, se dice que una estrategia pura $s_{ik} \in S_i$ está en el apoyo o *support* de σ_i, $\sup(\sigma_i)$, si, y solo si, esta estrategia ocurre con probabilidad positiva $\sigma_i(s_{ik}) > 0$

$$\sigma_i(s_{ik}) > 0 \; for\ some\ k \Rightarrow \; s_{ik} \in \sup(\sigma_i)$$

- A partir de la definición de estrategia mixta para conjuntos finitos de estrategias, se puede ver que es posible no escoger algunas estrategias puras en la mezcla, por lo que puede haber estrategias puras con una probabilidad nula

o Siendo S_i el conjunto de estrategias puras del jugador i y asumiendo que es un intervalo continuo. Una estrategia mixta para el jugador i es una función de distribución acumulada $F_i: S_i \to [0,1]$, donde esta se define como $F_i(x) = P(s_i \leq x)$

- En este caso, los valores de $F_i(x)$ para cada posible valor de s_i será la probabilidad que se le asigna a jugar esos valores o estrategias

- Si F_i es diferenciable con una función de densidad de probabilidad f_i, entonces se dice que $s_i \in S_i$ está en el apoyo de F_i si $f_i(s_i) > 0$

o En el contexto de estrategias mixtas, una creencia para un jugador i es una distribución de probabilidad $\pi_i \in \Delta S_{-i}$ sobre las estrategias de sus oponentes, de modo que $\pi_i(s_{-i})$ es la probabilidad que el jugador i asigna a que sus oponentes jueguen un perfil de estrategia $s_{-i} \in S_{-i}$

- Por lo tanto, la creencia del jugador i pertenece al *simplex* o conjunto de perfiles de estrategias mixtas de los oponentes, por lo que se puede representar el conjunto de la siguiente manera:

$$\Delta S_{-i} = \left\{\left(\pi_i(s_{-i1}), \pi_i(s_{-i2}), \dots, \pi_i(s_{-im})\right) \in [0,1]^m \middle| \sum_{j=1}^{m} \pi_i\left(s_{ij}\right) = 1\right\}$$

- En este caso, tanto σ_{-i} como π_i pertenecerán al mismo conjunto, dado que las creencias son sobre las estrategias mixtas de los otros oponentes, no de las propias

$$\pi_i, \sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$$

- Cuando un oponente escoge una estrategia mixta, el jugador i se enfrenta a una lotería diferente dependiendo de la acción que escoja, porque el jugador se enfrenta a la aleatoriedad del oponente. Para evaluar las diferentes loterías del jugador i, se utiliza la noción de recompensa esperada anteriormente vista

  - La recompensa esperada de un jugador i cuando escoge una estrategia pura $s_i \in S_i$ y sus oponentes escogen una estrategia mixta $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ es la media ponderada de las recompensas del jugador i por las probabilidades descritas en σ_{-i}, siempre que el conjunto de estrategias sea finito. Si en vez de escoger una estrategia pura se escoge una mixta $\sigma_i \in \Delta S_i$, entonces se define de manera similar

$$E(v_i(s_i, \sigma_{-i})|\sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

$$E(v_i(\sigma_i, \sigma_{-i})|\sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

		Player 2		
		R	*P*	*S*
	R	0, 0	−1, 1	1, −1
Player 1	*P*	1, −1	0, 0	−1, 1
	S	−1, 1	1, −1	0, 0

$$v_1(R, \sigma_2) = \tfrac{1}{2} \times 0 + \tfrac{1}{2} \times (-1) + 0 \times 1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$v_1(P, \sigma_2) = \tfrac{1}{2} \times 1 + \tfrac{1}{2} \times 0 + 0 \times (-1) = \tfrac{1}{2}$$

$$v_1(S, \sigma_2) = \tfrac{1}{2} \times (-1) + \tfrac{1}{2} \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

  - Cuando las estrategias de los individuos son intervalos, las probabilidades de las diferentes elementos dentro del intervalo se suman y se utiliza la función de distribución de probabilidad

$$v_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} -s_i & \text{if } s_i < s_j \\ \frac{1}{2} - s_i & \text{if } s_i = s_j \\ 1 - s_i & \text{if } s_i > s_j. \end{cases}$$

$$F_2(s_2) = \begin{cases} s_2 & \text{for } s_2 \in [0, 1] \\ 1 & \text{for } s_2 > 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad f_2(s_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } s_2 \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } s_2 > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_1(s_1, \sigma_2) &= \Pr\{s_1 < s_2\}(-s_1) + \Pr\{s_1 = s_2\}\left(\frac{1}{2} - s_1\right) + \Pr\{s_1 > s_2\}\left(1 - s_1\right) \\ &= (1 - F_2(s_1))(-s_1) + 0\left(\frac{1}{2} - s_1\right) + F_2(s_1)(1 - s_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- La recompensa esperada de un jugador i cuando escoge una estrategia pura $s_i \in S_i$ y sus oponentes escogen una estrategia mixta $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ es la integral múltiple de las recompensas del jugador i por la función de densidad f para cada jugador y estrategia, siempre que el conjunto de estrategias sea infinito. Si en vez de escoger una estrategia pura se escoge una mixta $\sigma_i \in \Delta S_i$, entonces se define de manera similar

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \int_{\underline{s_2}}^{\overline{s_2}} \int_{\underline{s_3}}^{\overline{s_3}} \dots \int_{\underline{s_n}}^{\overline{s_n}} v(s_i, s_{-i}) f_2(s_2) f_3(s_3) \dots f_n(s_n) ds_2 ds_3 \dots ds_n$$

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \int_{\underline{s_1}}^{\overline{s_1}} \int_{\underline{s_2}}^{\overline{s_2}} \dots \int_{\underline{s_n}}^{\overline{s_n}} v(s_i, s_{-i}) f_1(s_1) f_2(s_2) \dots f_n(s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n$$

- En el primer caso, la recompensa esperada tiene en cuenta la recompensa de jugar s_i cuando sus oponentes juegan un perfil de estrategia s_{-i} y las probabilidad de que se realice ese perfil concreto (probabilidades definidas por las estrategias mixtas de los oponentes). En el segundo, no solo se tiene en cuenta estos dos elementos, sino que también se tiene en cuenta la probabilidad de que el jugador juegue una estrategia $s_i \in S_i$ concreta (probabilidades definidas por su propia estrategia mixta)

- Una vez se sabe que son las estrategias mixtas y sus implicaciones, se puede dar una definición más completa del equilibrio de Nash para este contexto más generalista
  - Un perfil de estrategia mixta $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador la estrategia mixta σ_i^* es la mejor respuesta al perfil de estrategias mixtas $\sigma_{-i}^* \in \Delta S_{-i}$, de modo que la recompensa esperada es mayor o igual para cada $\sigma_i \in \Delta S_i$

$$E\big(v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)\big) \geq E\big(v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)\big) \;\; for \;\; \forall i \in N \;\; and \;\; \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

- Este equilibrio, por tanto, requiere un grupo de estrategias en las que los jugadores están jugando su mejor respuesta a la mejor respuesta de los otros

- Se puede pensar que el perfil de estrategias mixtas σ_{-i}^* es la creencia del jugador i sobre las jugadas de sus oponentes, π_i, que captura la idea de que el jugador i tiene incertidumbre sobre el comportamiento de sus oponentes

- Si σ^* es un equilibrio de Nash, y tanto la estrategia s_i como s_i' están en el apoyo de σ_i^*, entonces la recompensa de jugar la estrategia s_i y la de jugar la estrategia s_i' dado un perfil de estrategias mixtas σ_{-i}^* debe ser la misma que la recompensa del equilibrio de Nash para i

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$$

  - Si un jugador combina aleatoriamente estrategias, eso significa que es indiferente entre ellas (si no, escogería solo una). Por lo tanto, si $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > v_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$ o $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < v_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$, se podría reducir la probabilidad de una de las estrategias a cero e incrementar la otra a $\sigma_i^*(s_i) + \sigma_i^*(s_i')$ para obtener un mayor valor esperado, lo que significaría que σ_i^* no sería una mejor respuesta para σ_{-i}^* porque se podría obtener una mayor recompensa. Por lo tanto, para que la estrategia mixta sea una mejor respuesta, $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$

  - A la vez, si $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$, entonces σ_i^* no sería mejor respuesta. En cambio, si $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$, entonces reduciendo la probabilidad de s_i se obtendría una mayor recompensa esperada, pero s_i es parte del apoyo y su probabilidad es positiva. En consecuencia, $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$

  - Esta observación permite ver que el jugador siempre tiene que ser indiferente entre las estrategias que forman parte del apoyo de σ_i^*, lo cual impondrá restricciones que facilitarán la obtención del equilibrio de Nash y permitirán comprobar si un perfil de estrategias es o no un equilibrio de Nash (comparando si una estrategia otorga una recompensa igual o no dadas las estrategias de equilibrio de los oponentes)

  - Si se obtienen probabilidades $\sigma_i \notin [0,1]$, eso quiere decir que existe dominación por parte de alguna estrategia u acción

- Para juegos simples de dos jugadores (en forma matricial), se puede utilizar un método de cuatro pasos para encontrar el equilibrio de Nash con estrategias mixtas

- El primer paso consiste en escribir cual sería la recompensa esperada para cada jugador y para cada estrategia pura $s_i \in S_i$, expresando la recompensa que se obtendría para cualquier estrategia mixta del otro jugador. Debido a que el *simplex* cuando hay m estrategias puras se puede representar con $m-1$ probabilidades, solo se consideran $m-1$ variables

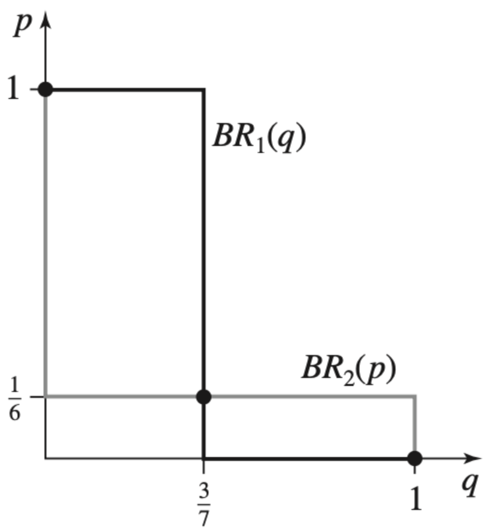
$$v_1(s_{11}, \sigma_2^*) = \sigma_2^*(s_{21})v_i(s_{11}, s_{21}) + \cdots + \sigma_2^*(s_{2m})v_i(s_{11}, s_{2m})$$

$$v_1(s_{12}, \sigma_2^*) = \sigma_2^*(s_{21})v_i(s_{12}, s_{21}) + \cdots + \sigma_2^*(s_{2m})v_i(s_{12}, s_{2m})$$

$$\ldots$$

$$v_1(s_{1m}, \sigma_2^*) = \sigma_2^*(s_{21})v_i(s_{1m}, s_{21}) + \cdots + \sigma_2^*(s_{2m})v_i(s_{1m}, s_{2m})$$

- El segundo paso solo aplica si cada jugador tiene dos estrategias, de modo que la matriz es 2×2, por lo que, si algún jugador tiene más de dos estrategias, se va directamente al tercer paso. En este paso, se compara que ocurre cuando una de las dos recompensas esperadas es mayor, menor o igual, pudiendo así graficar las correspondencias de mejor respuesta para cada posible probabilidad de cada jugador. De este modo, se puede ver qué estrategias se escogen para cada probabilidad del otro jugador (en términos de la probabilidad para cada probabilidad del otro jugador), y la estrategia mixta, que será la intersección entre las correspondencias de mejor respuesta y la probabilidad que se obtiene al igualar las recompensas esperadas de un mismo jugador (porque en la estrategia mixta las recompensas de jugar cada una de las estrategias deben ser iguales entre sí)



$$BR_1(q) = \begin{cases} p = 1 & \text{if } q < \frac{3}{7} \\ p \in [0, 1] & \text{if } q = \frac{3}{7} \\ p = 0 & \text{if } q > \frac{3}{7}. \end{cases}$$

$$BR_2(p) = \begin{cases} q = 1 & \text{if } p < \frac{1}{6} \\ q \in [0, 1] & \text{if } p = \frac{1}{6} \\ q = 0 & \text{if } p > \frac{1}{6}. \end{cases}$$

- El tercer paso consiste en igualar todas las recompensas para cada jugador, dado que en la estrategia mixta del jugador i, las recompensas de jugar cada una de las estrategias deben ser iguales entre sí. De este modo, se obtendrán las $m-1$ variables que indican la probabilidad para cada estrategia pura del otro jugador a través de la resolución de un sistema de $\frac{m!}{2!(m-2)!}$ ecuaciones para cada jugador

$$v_1(s_{11}, \sigma_2^*) = v_1(s_{12}, \sigma_2^*) = \cdots = v_1(s_{1m}, \sigma_2^*)$$

$$v_2(s_{21}, \sigma_1^*) = v_2(s_{22}, \sigma_1^*) = \cdots = v_2(s_{2m}, \sigma_1^*)$$

- En el cuarto paso, las probabilidades que se han obtenido igualando las recompensas esperadas serán las que conformarán las estrategias mixtas, y estas a su vez conformarán el perfil de estrategias mixtas que será el equilibrio de Nash mixto

- Es posible que haya equilibrios de Nash con estrategias puras y con estrategias mixtas a la vez, de modo que el equilibrio mixto no es único

  - El teorema de imparidad de Wilson defiende que casi todos los juegos finitos tienen un número impar de equilibrios de Nash

- A partir de la introducción de las estrategias mixtas, es posible reconsiderar los coneptos de IESDS y de racionalizabilidad y definir ambos conceptos de forma precisa

  - Siendo $\sigma_i \in \Delta S_i$ y $s_i' \in S_i$ estrategias posibles para el jugador i, se dice que s_i' está estrictamente dominada por σ_i si la recompensa de la última es mayor para cualquier perfil de estrategia de los oponentes

$$v(\sigma_i, s_{-i}) > v(s_i', s_{-i}) \;\; for \;\; \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- De este modo, no es necesario que sea una estrategia pura la que sea dominante, sino que también puede serlo una estrategia mixta

- Es posible eliminar estrategias que un principio no parecen estrictamente dominadas considerando mezclas entre las otras estrategias. Por lo que, iterando el método, se puede hacer el mismo procedimiento IESDS solo que considerando también estrategias mixtas

	L	C	R
U	5, 1	1, 4	1, 0
M	3, 2	0, 0	3, 5
D	4, 3	4, 4	0, 3

Player 2's expected payoff from mixing C and R ⇒

$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
2
2.5
3.5

Player 2

Player 1	C	R
U	1, 4	1, 0
M	0, 0	3, 5
D	4, 4	0, 3
$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	2	1.5

	C	R
M	0, 0	3, 5
D	4, 4	0, 3

- Una estrategia $\sigma_i \in \Delta S_i$ no puede ser nunca una mejor respuesta si no hay creencias $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ para el jugador i las cuales $\sigma_i \in \beta_i(\sigma_{-i})$

  - Si una estrategia pura $s_i \in S_i$ no es mejor respuesta para ninguna creencia $s_{-i} \in S_{-i}$, por mucho que los oponentes mezclen sus estrategias en una mixta $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$, esta seguirá sin ser una mejor respuesta porque reduciría la recompensa para cualquier estrategia de los oponentes que se realizara, por lo que se puede eliminar

  - Debido a que una estrategia mixta σ_i no puede ser nunca una mejor respuesta si está estrictamente dominada, cuando no hay estrategias puras que eliminar por racionalizabilidad, se pueden encontrar estrategias mixtas para las cuales haya estrategias puras estrictamente dominadas, y eliminarlas

- Para cualquier juego de dos jugadores, una estrategia σ_i está estrictamente dominada si, y solo si, no es mejor respuesta

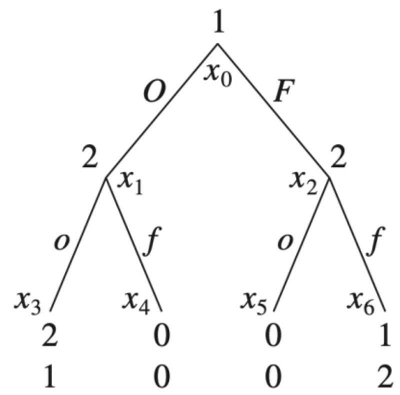
  - El conjunto de estrategias que sobreviven al proceso de racionalizabilidad no es mayor al del método IESDS (mismo o menor número de estrategias). En el caso de dos jugadores, no obstante, el conjunto es el mismo

- Nash definió el concepto de solución del equilibrio de Nash y mostró condiciones generales bajo las cuales existe este equilibrio, el cual se basa en el teorema de punto fijo
    - El teorema de existencia de Nash expresa que cualquier juego de n jugadores con conjuntos de estrategia finitos S_i para cada jugador tiene un equilibrio de Nash de estrategias mixtas

Juegos dinámicos de información completa

- Lo malo de la representación de juegos en la forma normal es que no puede capturar juegos que se desarrollan a lo largo del tiempo, de manera que no se puede representar situaciones en las que el orden de los movimientos puede ser importante
    - La representación más común para situaciones de este tipo es la forma extensiva. Esta representación tiene que incluir siete aspectos, los cuales son los siguientes:
        - El conjunto N de los jugadores y el conjunto $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ de las recompensas de los jugadores sobre los resultados
        - El orden de los movimientos, que representa el momento en el que los jugadores pueden realizar acciones
        - El conjunto de acciones de los jugadores cuando estos pueden realizarlas
        - El conocimiento que los jugadores tienen cuando es su torno de realizar una acción. Como algunos jugadores escogen que acción realizar después de que otros jugadores escogen, entonces es necesario representar lo que los jugadores saben cuando toman sus decisiones (no tanto el orden cronológico)
        - Las distribuciones de probabilidad sobre los eventos exógenos en el juego. Existe la posibilidad de que un evento aleatorio ocurra durante el desarrollo del juego, de modo que hay movimientos de la naturaleza (un jugador no estratégico con una estrategia estocástica predeterminada)
        - La estructura del juego en forma extensiva representado por los seis aspectos anteriores tiene que ser conocimiento común entre todos los jugadores. De este modo, es posible analizar estas situaciones con métodos y conceptos de solución anteriormente introducidos

- La notación formal que se utiliza para juegos en forma extensiva es la del árbol de un juego, el cual es una descripción diagramática para representar juegos en forma extensivo. El árbol de un juego es un conjunto de nodos $w \in W$ con una relación de precedencia $w > w'$, en donde w precede w' y cada nodo del juego tiene solo un predecesor



  - Esta definición se apoya en las relaciones de precedencia, las cuales se representan con el símbolo "$>$". La relación de precedencia es transitiva, asimétrica e incompleta (no se puede ordenar cualquier par de nodos w_1 y w_2)

$$w > w' \; and \; w' > w'' \;\; \Rightarrow \;\; w > w'' \quad (transitivity)$$

$$w > w' \;\; \Rightarrow \sim(w' > w) \qquad\qquad (assimetry)$$

  - Existe un nodo especial w_0 denominado la raíz del árbol o nodo inicial, el cual precede a todos los otros nodos $w \in W$. Normalmente se utiliza un círculo vacío "o" para representar este nodo en el diagrama

$$w_0 > \forall w' \in W \;\; when \;\; w_0 \neq w'$$

  - Un nodo solo puede ser precedido por un único nodo, de modo no puede haber más de un nodo precediendo

  - Todos los nodos que no preceden otros nodos se denominan nodos terminales y se representan con el subconjunto $Z \subset W$. Estos denotan las recompensas de cada jugador en el juego (asociadas a los resultados obtenidos para cada jugador). Normalmente no se utiliza ningún círculo para denotar los nodos terminales en el diagrama

  - Todos los nodos que preceden a otros nodos se denominan nodos no terminales, y cada nodo $w \notin Z$ se asigna a un jugador $i(w)$ con un conjunto de acciones $A_i(w)$ (que se puede describir en función de nodos) o a la naturaleza. Normalmente se utiliza un círculo "•" para denotar los nodos no terminales en el diagrama

$$i(w) = i \quad for \;\; i = 1,2,\dots,n$$

$$A_i(w) = \{w' \in W | w > w'\} \; for \;\; i = 1,2,\dots,n$$

- Para representar el conocimiento de cada jugador cuando les toca decidir, se utiliza el concepto de conjunto de información. Cada jugador i tiene una colección de conjuntos de información o *information sets* $h_i \in H_i$ que parte los nodos del juego en el que el jugador i mueve con las siguientes propiedades:

  - Si h_i es un conjunto único o *singleton* que incluye solo un $w \in W$, entonces el jugador i que decide en w sabe que está en el nodo w. Como solo hay un nodo en el conjunto, el jugador tiene información de que está en un solo nodo

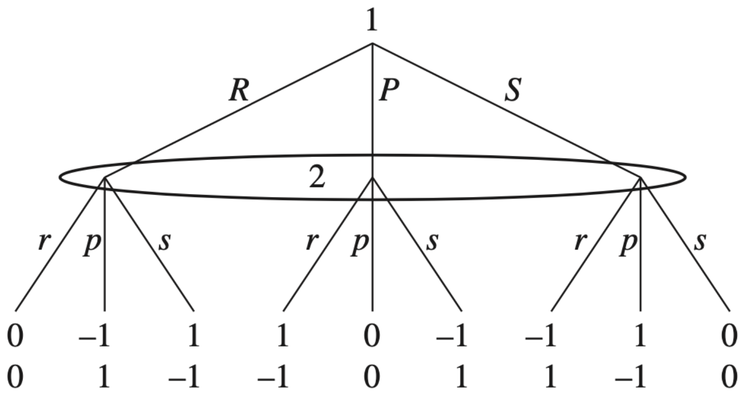
$$h_i = \{w\}$$

  - Si $w \neq w'$ y si $w, w' \in h_i$, entonces el jugador i que decide en w no sabe si está en el nodo w o en el nodo w'. Como hay más de un nodo en el conjunto, el jugador tiene información de que podría estar en ambos nodos

$$h_i = \{w, w'\}$$

  - Además, si $w \neq w'$ y si $w, w' \in h_i$, entonces $A_i(w) \neq A_i(w')$. Esto es así porque si hubiera conjuntos diferentes de acciones para cada nodo, el jugador podría deducir en qué nodo está porque la estructura del juego es conocimiento común y sería ilógico decir que el jugador no sabe en qué nodo se encuentra

  - Gráficamente, el conjunto de información con más de un nodo se representa rodeando los nodos no terminales con un óvalo, mientras que aquellos conjuntos de información únicos no necesitan otra representación más que el nodo



- Aunque se definieron los juegos de información completa para juegos en forma normal, es necesario diferenciar dos tipos diferentes de juegos de información completa para los juegos extensivos

  - Un juego de información completa en el que todos los conjuntos de información son únicos y no hay ningún movimiento de la naturaleza se llama juego de información perfecta. En cambio, un juego en el que hay algunos conjuntos de información con más de un nodo o hay movimientos de la naturaleza se llama juego de información imperfecta

  - En los juegos de información perfecta, todos los jugadores saben exactamente en qué nodo están y que ha ocurrido en los nodos anteriores, mientras que en los juegos de información imperfecta algunos jugadores no saben en qué nodo están. Esto implica que cualquier juego con movimientos simultáneos es un juego de información imperfecta

  - Un juego será de información imperfecta cuando un jugador tenga que decidir sin saber el movimiento de otros jugadores (incertidumbre endógena) o sin saber la realización de la elección de la naturaleza (incertidumbre exógena). En ambos casos, el jugador tiene que tener creencias sobre las acciones no observadas para poder analizar la situación

- Para los juegos extensivos, las estrategias anteriormente descritas se adaptan a la estructura de este tipo de juegos

  - Una estrategia pura s_i para el jugador i es un plan completo de una jugada que describe que acción pura $a_i \in A_i$ escogerá el jugador i en cada uno de sus conjuntos de información

    - Formalmente, una estrategia pura para el jugador i es una función $s_i: H_i \to A_i$ que asigna una acción $s_i(h_i) \in A_i(h_i)$ a cada conjunto de información $h_i \in H_i$ (no para cada nodo de los conjuntos). El conjunto S_i denota es el conjunto de todas las estrategias puras $s_i \in S_i$

- Una estrategia pura normalmente se representa juntando las acciones puras para cada nodo de información, de modo que un conjunto de estrategias cualquiera se suele representar de la siguiente manera:

$$S_i = \{a_1^1 a_2^1 \dots a_k^1, \dots, a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}\}$$

$$k = number\ of\ information\ sets$$

$$m_k = number\ of\ pure\ actions\ in\ kth\ information\ set$$

$$a_k^{j_k} = pure\ action\ j\ in\ the\ kth\ information\ set$$

- La estrategia del jugador i define acciones condicionales al nodo del juego en el que este se encuentra, de modo que un conjunto pequeño de acciones se puede traducir en un conjunto enorme de estrategias cuando hay movimientos secuenciales y se conoce de lo que precede su movimiento. Generalmente, se asume que el jugador i tiene k conjuntos de información, por lo que el número de estrategias en el conjunto de estrategias, $|S_i|$, es igual al producto del número de acciones m para cada conjunto de información

$$|S_i| = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$$

$$m_k = number\ of\ pure\ actions\ in\ kth\ information\ set$$

$$k = number\ of\ information\ sets$$

- Una estrategia mixta σ_i para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $s_i \in S_i$

  - La definición de una estrategia mixta para juegos en forma extensiva es la misma que para juegos en forma normal, de modo que el jugador escoge aleatoriamente entre todos sus planes completos de juego (estrategias puras)

  - No obstante, no tiene en cuenta el dinamismo de los juegos en forma extensiva, porque la estrategia mixta se selecciona antes de que comience el juego y entonces sigue una estrategia pura particular a partir de la realización (se mezcla entre planes completos, no entre acciones en cada conjunto de información)

- La definición de estrategia mixta es sensible para juegos en forma normal porque solo se tenía que tomar una decisión, mientras que no lo es para juegos en forma extensiva porque puede ser que se quiera mezclar en algunos nodos independientemente de lo que decida en nodos anteriores. Por ello, se utiliza el concepto de estrategia de comportamiento

- Una estrategia de comportamiento o *behavioural strategy* especifica para cada conjunto de información $h_i \in H_i$ una distribución de probabilidad independiente sobre $A_i(h_i)$ y se denota por $\alpha_i: H_i \to \Delta A_i(h_i)$, donde $\alpha_i\big(a_i(h_i)\big)$ es la probabilidad de que el jugador i juega la acción $a_i(h_i) \in A_i(h_i)$ en el conjunto de información h_i

  - El conjunto $\Delta A_i(h_i)$ denota el *simplex*, que es el conjunto de estrategias de comportamiento. Las dimensiones de

$$\Delta A_i(h_i) = \left\{\alpha_{i1}\big(a_{i1}(h_i)\big), \dots, \alpha_{ik_i}\left(a_{ik_i}(h_i)\right) \middle| \alpha_i\big(a_i(h_i)\big) \in [0,1]^{k_i}\right\}$$

$$|\Delta A_i(h_i)| = k_i$$

  - Con esta estrategia el jugador mezcla sus acciones cuando le toca decidir, a diferencia de con la estrategia mixta, en donde el jugador mezcla antes del juego, pero se mantiene leal a la estrategia pura realizada

  - En esta estrategia, por tanto, no hay una probabilidad definida para cada posible estrategia pura en S_i, sino que solo se definen las probabilidades para cada acción en el conjunto de información h_i

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \quad (mixed\ strategy)$$

$$\sum_{a_i(h_i) \in A_i(h_i)} \alpha_i\big(a_i(h_i)\big) = 1 \quad for\ \forall h_i \in H_i \ \ (behav. strategy)$$

- Es suficiente solo considerar un tipo de estrategia (entre las mixtas y las de comportamiento) cuando el juego es de recuerdo perfecto

  - Un juego de perfecto recuerdo o *perfect recall* es uno en el que ningún jugador olvida la información que previamente sabia, de modo que un jugador sabe los movimientos que ha realizado en conjuntos de información anteriores. Kuhn, en su investigación de 1963, demostró que, para juegos de recuerdo perfecto, las estrategias mixtas y de comportamiento son equivalentes porque pueden generar la misma distribución de probabilidad sobre los resultados

- A partir del siguiente sistema de ecuaciones, se puede encontrar cualquier estrategia mixtas y estrategia de comportamiento equivalentes entre sí para juegos estáticos y dinámicos en donde cada jugador tenga un solo turno

$$\begin{cases} \alpha_i(a_1) = \sum_{s_i(a_1)\in S_i} \sigma_i\big(s_i(a_1)\big) \\ \quad\quad\quad \dots \\ \quad\quad\quad \dots \\ \quad\quad\quad \dots \\ \alpha_i(a_k) = \sum_{s_i(a_k)\in S_i} \sigma_i\big(s_i(a_k)\big) \\ \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \end{cases}$$

- A partir del siguiente sistema de ecuaciones, se puede encontrar cualquier estrategia mixtas y estrategia de comportamiento equivalentes entre sí para juegos dinámicos donde un jugador tiene dos turnos. En este caso, se utiliza la regla de Bayes con tal de que sea consistente con las estrategias

$$Pure\ strat.\, i\text{: } \{AAA, AAB, ABB, BBB, ABA, BAA, BAB, BBA\}$$

$$\Delta S_i = \left\{(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8) \in [0,1]^8 \middle| \sum_{j=1}^{8} p_j = 1\right\}$$

$$\begin{cases} \alpha = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ \beta = \dfrac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \\ \gamma = \dfrac{p_5 + p_6}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8} \\ \quad\quad\quad \dots \\ \sum_{j=1}^{8} p_j = 1 \end{cases}$$

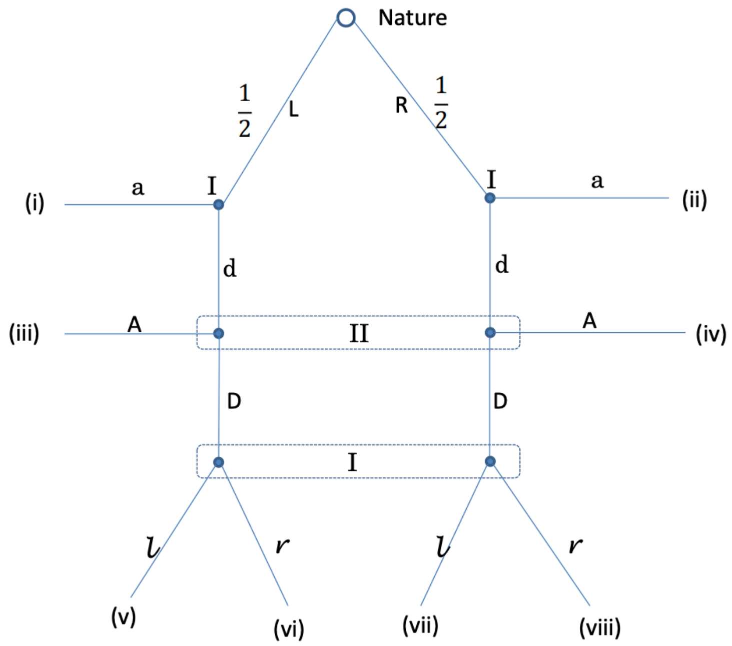
- El conjunto de estrategias mixtas equivalentes a las estrategias de comportamiento será el siguiente:

$$E \equiv \left\{\sigma_i(s_{i1}), \dots, \sigma_i(s_{im}) \middle| \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1, \alpha_i\big(a_i(h_i)\big) = \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i\big(s_i; a_i(h_i)\big), \sigma_i \geq 0\right\}$$

$$|E| = |A_i| + 1$$

- Cuando el juego no es de recuerdo perfecto y hay varios jugadores, es posible demostrar que hay estrategias mixtas para las cuales no existen estrategias de comportamiento equivalentes a través del siguiente algoritmo

- Primero se dibuja la forma extensiva del juego y después se hace una tabla con las probabilidades de llegar a cada nodo final, asumiendo que los oponentes hacen unas acciones específicas cualesquiera. Si se comienza con una estrategia mixta, la probabilidad será la distribución de probabilidad para la estrategia mixta, mientras que, si se comienza con una estrategia de comportamiento, la probabilidad se obtendrá multiplicando las probabilidades para cada nodo del jugador



(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

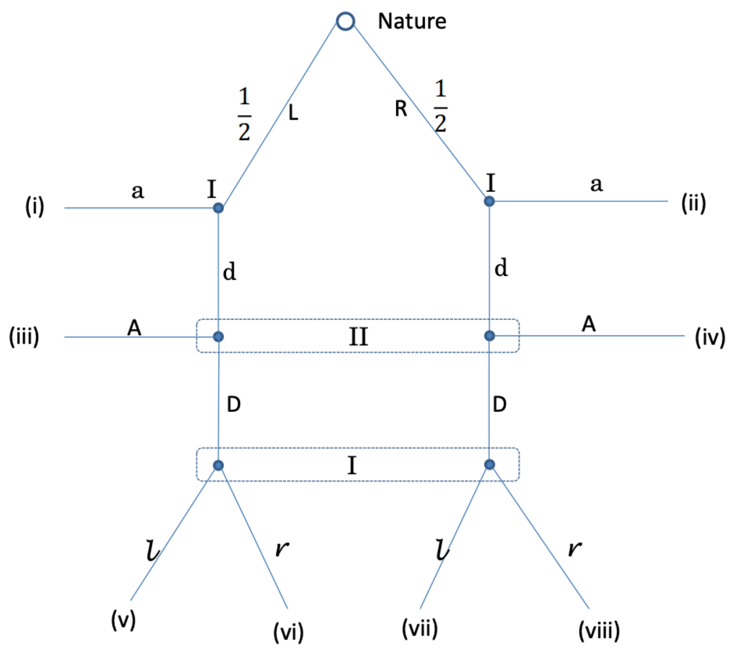
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\beta}{2}$	0	0	$\frac{(1-\alpha)\gamma}{2}$	$\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{2}$	$\frac{(1-\beta)\gamma}{2}$	$\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{2}$

- Después de obtener la tabla, se puede plantear un sistema de ecuaciones para cada una de las equivalencias que muestran las tablas y obtener así una contradicción entre valores

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{(1-\alpha)\gamma}{2} = 0 \\ \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{(1-\beta)\gamma}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Contrad.$$

- Cuando el juego no es de recuerdo perfecto y hay varios jugadores, es posible demostrar que hay estrategias de comportamiento para las cuales no existen estrategias mixtas equivalentes a través del siguiente algoritmo

  - Primero se dibuja la forma extensiva del juego y después se hace una tabla con las probabilidades de llegar a cada nodo final, asumiendo que los oponentes hacen unas acciones específicas cualesquiera. Si se comienza con una estrategia mixta, la probabilidad será la distribución de probabilidad para la estrategia mixta, mientras que, si se comienza con una estrategia de comportamiento, la probabilidad se obtendrá multiplicando las probabilidades para cada nodo del jugador



(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

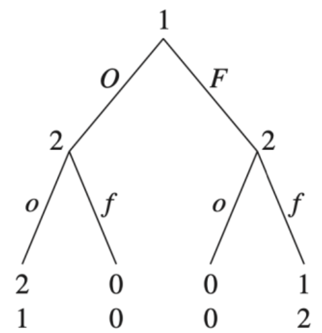
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\beta}{2}$	0	0	$\frac{(1-\alpha)\gamma}{2}$	$\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{2}$	$\frac{(1-\beta)\gamma}{2}$	$\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{2}$

- Después de obtener la tabla, se puede plantear un sistema de ecuaciones para cada una de las equivalencias que muestran las tablas y obtener así una contradicción entre valores

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_5 + p_6) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(p_3 + p_4 + p_7 + p_8) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p_3 + p_7}{p_3 + p_4 + p_7 + p_8}\right) = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p_4 + p_8}{p_3 + p_4 + p_7 + p_8}\right) = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p_5 + p_7}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}\right) = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p_6 + p_8}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}\right) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_5 + p_6 = \frac{1}{2} \\ p_3 + p_4 + p_7 + p_8 = \frac{1}{2} \\ p_3 + p_7 = p_4 + p_8 \\ p_5 + p_7 = p_6 + p_8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Contrad.$$

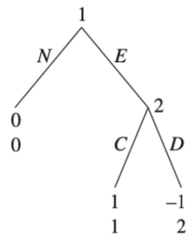
- El equilibrio de Nash es un concepto naturalmente estático, dado que asume que un jugador toma las estrategias de otros como dadas y juega una mejor respuesta. Por ello, es necesario representar los juegos extensivos en forma normal y así analizar el juego para encontrar equilibrios de Nash
    - Cuando hay un juego de dos jugadores, es posible representar este en forma de matriz con los dos conjuntos de estrategias puras de la forma extensiva

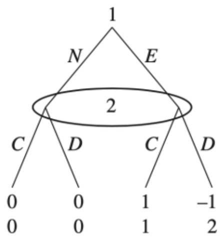


		Player 2			
		oo	of	fo	ff
Player 1	O	2, 1	2, 1	0, 0	0, 0
	F	0, 0	1, 2	0, 0	1, 2

- Todos los juegos extensivos tienen una representación en forma normal, pero no todos los juegos en forma normal tienen una representación en forma extensiva

	C	D
N	0, 0	0, 0
E	1, 1	−1, 2





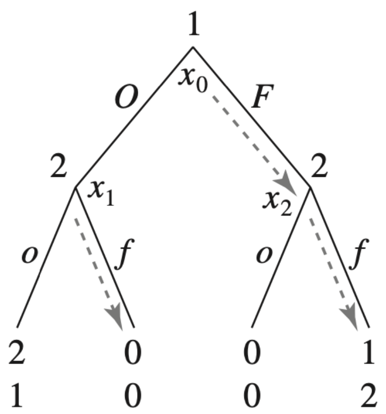
- Cada una de las recompensas en la forma extensiva del juego se multiplicará en la forma normal. Esto ocurre porque cada estrategia define una acción para cada conjunto de información, por lo que, si para un mismo conjunto de información la acción es la misma, la recompensa será la misma. Si hay r estrategias que definen la misma acción para un mismo conjunto de información, entonces la recompensa se repetirá r veces en la matriz

- Como los juegos extensivos se pueden representar en forma normal, se puede utilizar el método anteriormente descrito para encontrar equilibrios de Nash con estrategias puras

		Player 2			
		oo	of	fo	ff
Player 1	O	$\overline{\underline{2, 1}}$	$\overline{\underline{2, 1}}$	$\underline{0, 0}$	0, 0
	F	0, 0	$\overline{1, 2}$	$\underline{0, 0}$	$\overline{\underline{1, 2}}$

  - Aunque pueda haber equilibrios de Nash diferentes en los que se obtenga la misma recompensa, la diferencia entre estos reside en las acciones que se toman fuera del equilibrio, no en las que se toman en equilibrio (de otro modo las recompensas serían diferentes)

  - En la forma extensiva, cada recompensa está asociada a un único camino de jugadas porque solo existe un único camino desde la raíz del árbol hasta cada nodo terminal, lo cual es debido a que cada nodo solo puede ser precedido por un único nodo

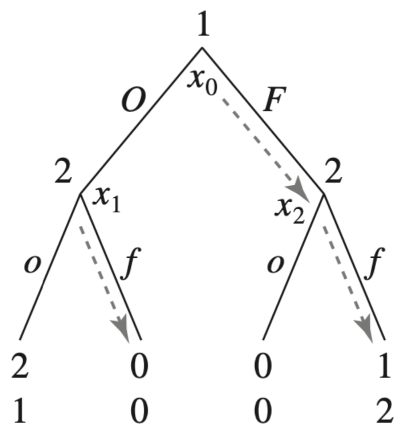


- Esto implica que si un perfil de estrategias s^* es un equilibrio de Nash, cada jugador i preferirá mantenerse en el camino que lleve al equilibrio que desviarse y seguir otro camino, dada su creencia de que sus oponentes juegan un perfil de estrategia s_{-i}^*

- Siendo $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ un perfil de estrategias de comportamiento que es un equilibrio de Nash en un juego de forma extensiva, se dice que un conjunto de información está en el camino de equilibrio o *equilibrium path* si dado σ^* se llega a él con probabilidad positiva, mientras que un conjunto de información está fuera del camino de equilibrio si dado σ^* nunca se llega a él (probabilidad nula)

  - En un equilibrio de Nash, en consecuencia, los jugadores escogen proceder con el camino de equilibrio por sus creencias sobre lo que los otros jugadores harán en y fuera del camino de equilibrio

  - De esta manera, la amenaza impuesta por los oponentes cuando el jugador i toma una desviación del camino de equilibrio refuerza las acciones de este en el camino de equilibrio, haciendo que las creencias sean correctas y sean autocumplidas



  - No obstante, hay acciones fuera del camino de equilibrio que no son creíbles porque el jugador no responde de manera óptima.

Esto muestra una debilidad de la representación en forma normal, en donde se encuentran equilibrios de Nash con movimientos no creíbles

Juegos dinámicos de información completa: credibilidad y racionalidad secuencial

- El concepto de equilibrio de Nash anterior solo exige que los jugadores actúen de manera racional en el camino de equilibrio dadas sus creencias de lo que ocurre en y fuera del camino de equilibrio
    - No obstante, no pone ninguna restricción sobre las creencias fuera del camino de equilibrio ni sobre como considerar estas creencias
        - Los juegos extensivos en forma normal no son capaces de cumplir estos requerimientos, lo cual añade restricciones sobre lo que se consideraría como comportamiento racional
    - Se esperaría que los jugadores racionales jugaran de manera óptima en respuesta a sus creencias en cualquier momento en el que tengan que decidir, por lo que es necesario un concepto de solución que cumpla esta idea
- El principio de racionalidad secuencial permite crear un procedimiento para obtener una solución que respete las ideas anteriores, el método de inducción hacia atrás
    - Dado un perfil de estrategias de comportamiento $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ de los oponentes del jugador i, se dice que σ_i es secuencialmente racional si, y solo si, i está jugando su mejor respuesta a σ_{-i} en cada uno de sus conjuntos de información
        - Este concepto requiere que los jugadores jueguen de manera óptima tanto en el camino de equilibrio como fuera de él
        - El equilibrio de Nash mostrado anteriormente, por tanto, no siempre era secuencialmente racional
        - Aplicando este concepto a juegos extensivos, el jugador que mueve primero puede predecir de manera correcta el comportamiento de los jugadores (tiene creencias correctas), dado que predice que en cada nodo posterior los oponentes jugarán su mejor respuesta
    - La inducción hacia atrás o *backward induction* es un procedimiento en el que se empieza por los nodos que preceden a los nodos terminales y se mueve inductivamente hacia atrás en el árbol del juego

        - Cualquier juego finito de información perfecta tiene un equilibrio por inducción hacia atrás que es secuencialmente racional. Si no hay dos nodos que prescriban las mismas recompensas para cualquier jugador, entonces el equilibrio por inducción hacia atrás es único

        - Dado que un juego finito de información perfecta tiene un conjunto finito de nodos terminales, es posible escoger una mejor respuesta en cada nodo hasta llegar a la raíz del árbol a través del proceso de inducción hacia atrás, lo cual permite obtener una especificación de los movimientos que es secuencialmente racional

        - Cualquier juego finito de información perfecta tiene al menos un equilibrio de Nash secuencialmente racional en estrategias puras. Si no hay dos nodos que prescriban las mismas recompensas para cualquier jugador, entonces el equilibrio de Nash secuencialmente racional es único

        - El método de inducción hacia atrás requiere que cada jugador juegue una mejor respuesta a las acciones de los jugadores después de él (las mejores respuestas se construyen en cada conjunto de información). Por lo tanto, debe existir al menos un equilibrio de Nash secuencialmente racional, debido a que la definición de equilibrio de Nash es que todos los jugadores juegan una mejor respuesta para sus creencias, y como existe un equilibrio por inducción hacia atrás para juegos finitos de información perfecta, al menos habrá un perfil de estrategias en donde todos los jugadores jueguen su mejor respuesta para cualquiera de sus creencias

- Aunque se espera que los jugadores racionales jueguen de manera secuencialmente racional y que el método de inducción hacia atrás es un método útil para encontrar equilibrios de Nash secuencialmente racionales, para juegos de información imperfecta es necesario el concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

    - Para los juegos de información imperfecta y juegos infinitos, es imposible aplicar el método de inducción hacia atrás

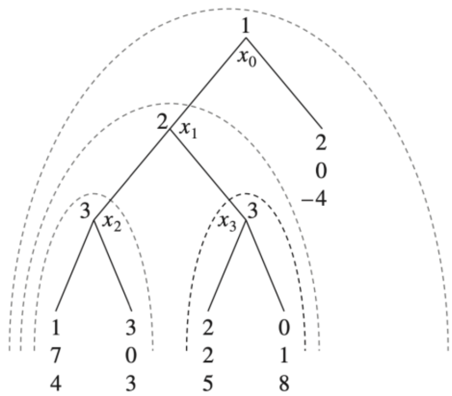
        - En un juego de información imperfecta, es necesario plantear una creencia para poder aplicar el método (lo cual no pertenece al proceso de inducción hacia atrás), dado que el jugador no sabe en qué nodo está (ya sea por conjuntos de información de más un nodo o por la naturaleza) y eso hace que pueda haber una mejor estrategia diferente para cada nodo

- En juegos infinitos, puede que no haya un conjunto finito de nodos terminales, por lo que no se puede comenzar el proceso de inducción hacia atrás

- Para poder lidiar con ambos tipos de juego, se utiliza el concepto de subjuegos. Un subjuego propio G de un juego en forma extensiva Γ consiste de un único nodo y todos sus sucesores en Γ con la propiedad de que si $w \in G$ y $w' \in h(w)$, entonces $w' \in G$. El subjuego G es a su vez un árbol de juego con sus conjuntos de información y sus recompensas heredadas de Γ

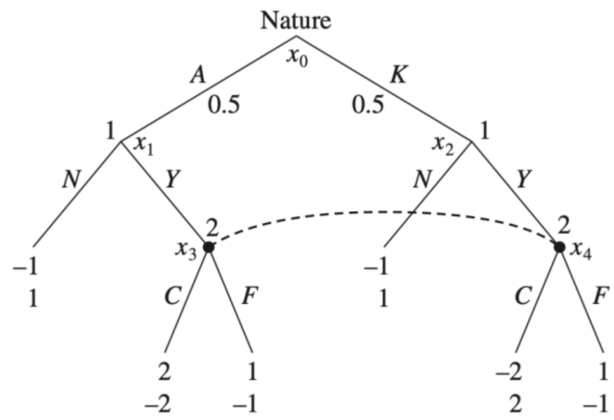
    - La propiedad de los subjuegos expresa que si un nodo w pertenece a un subjuego, y hay otro nodo w' que pertenece al mismo conjunto de información que w, entonces ambos deben de pertenecer al mismo subjuego

    - En juegos de información perfecta, cada conjunto de información es un nodo, por lo que cada nodo puede ser la raíz de un juego y eso hace que, en juegos de información perfecta, cada nodo (con todos los nodos que lo suceden) es un subjuego propio



    - Esta idea permite dividir un juego Γ en varios juegos más pequeños y utilizar el concepto de racionalidad secuencial para juegos de información imperfecta. En cualquier nodo o conjunto de información dentro de un subjuego G, la mejor respuesta de un jugador depende solo de sus creencias dentro del subjuego G, y no de nodos fuera del subjuego

    - Las restricciones impuesta por la relación de precedencia entre nodos y la de nodos de un mismo conjunto de información permite dividir los subjuegos de manera correcta



- Siendo Γ un juego extensivo de n jugadores, un perfil de estrategias de comportamiento $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si para cada subjuego propio G de Γ la restricción de σ^* a G es un equilibrio de Nash en G

  - Este concepto de solución no solo requiere que todos los jugadores estén jugando una mejor respuesta (como en el equilibrio de Nash), sino que también requiere que el perfil de estrategias se componga de mejores respuestas fuera del camino de equilibrio (tiene que ser equilibrio de Nash hasta en subjuegos que no se alcanzan en equilibrio)

  - Aunque todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos son equilibrios de Nash, no todos los equilibrios de Nash son equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, lo cual permite ver que este concepto de solución refina el del equilibrio de Nash

  - Para cualquier juego finito de información perfecta, el conjunto de equilibrios de Nash perfectos en subjuegos coincide con el de equilibrios de Nash que sobreviven la inducción hacia atrás. Esto ocurre porque cada subjuego en ese tipo de juegos será un juego finito de información perfecta, por lo que se puede aplicar el procedimiento y obtener el mismo perfil de estrategias de comportamiento

Juegos estáticos de información incompleta

- En todos los juegos anteriores se había supuesto que la estructura del juego es conocimiento común y que este conocimiento también lo era. No obstante, hay situaciones en las que se tiene una idea de las características de los oponentes, pero no se está seguro

  - Este tipo de situaciones no es diferente a un juego con movimientos simultáneos, en las que un jugador no sabe las acciones que realizan sus oponentes, pero sí sabe las que puede realizar

- Anteriormente, los jugadores formaban conjeturas sobre las acciones (creencias sobre las estrategias) y estas tenían que ser consistentes y correctas

- A partir de las suposiciones relacionados con el conocimiento común de la estructura del juego y las creencias, se podían crear conceptos de solución como los anteriormente vistos

- Las creencias sobre las características de los jugadores se denominan tipos, y los juegos que incorporan la posibilidad de que los jugadores puedan tener diferentes tipos se llaman juegos de información incompleta

  - En este tipo de juegos, se asume que el conjunto de jugadores y acciones es conocimiento común pero no se conoce el conjunto de funciones de recompensa, de modo que hay incertidumbre sobre las preferencias

  - Se asume que existe una distribución de probabilidad sobre los tipos de los jugadores, de modo que si esta distribución es conocimiento común y este hecho también es conocimiento común, es posible calcular la recompensa esperada de las acciones propias y pasar de un juego de información incompleta a uno de información imperfecta (porque la naturaleza decide los tipos de los jugadores)

- Las situaciones en donde los jugadores saben las recompensas de sus diferentes perfiles de estrategia o acciones, pero no saben las recompensas de los demás se puede representar a través de un juego estático de información incompleta

  - La representación en forma normal de un juego estático bayesiano de información incompleta de n jugadores es la siguiente:

$$\hat{\Gamma} = \langle N, \Omega, \{A_i\}_{i=1}^{n}, \{\Theta_i\}_{i=1}^{n}, \{T_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i(\cdot;\omega), \omega \in \Omega\}_{i=1}^{n}, \{\phi_i\}_{i=1}^{n} \rangle$$

    - El conjunto $N = \{1,2,\dots,n\}$ es el conjunto de jugadores y $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es el conjunto de todos los conjuntos de acciones de los jugadores

    - El conjunto Ω es el conjunto de todos los estados posibles ω en el juego, los cuales se pueden entender como la unión de tipos o señales de los jugadores. Este conjunto tiene r estados, donde r es el producto del número de tipos para cada jugador

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\} \qquad |\Omega| = r = k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$$

$$when\ \ \omega = \theta_{1j} \cap \theta_{2j} \cap \dots \cap \theta_{nj}\ \ or\ \ \omega = \tau_{1j} \cap \tau_{2j} \cap \dots \cap \tau_{nj}$$

- El conjunto $\{\Theta_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de todos los conjuntos de tipos $\Theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ik_i}\}$ para cada uno de los jugadores, donde k_i es el número de tipos para el jugador i

- El conjunto de señales $\{T_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de todos los conjuntos de señales $T_i = \{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{ik_i}\}$ para cada uno de los jugadores. Las señales son informativas del tipo propio para cada jugador, pero no del tipo de los otros jugadores, de modo que el jugador i no tiene manera de saber el estado en el que se encuentra y tiene que planear una acción para cada señal. Por ella, cada señal depende del estado y es una función $\tau_i: \Omega \to T_i$, pero está restringida a dar una misma señal para diversos estados donde el jugador i tenga un mismo tipo

$$\tau_i(\theta_{ij} \cap \theta_{-i}) = \tau_i(\theta_{ij} \cap \theta'_{-i}) = \cdots = \tau_{ij} \ \ when \ \ \theta_{-i}, \theta'_{-i} \in \Theta_{-i}$$

$$\tau_{ij} = signal\ that\ informs\ player\ i\ is\ type\ j$$

- Como ahora las recompensas dependen también del tipo de los jugadores, la función de recompensa $v_i: A \times \Omega \to \mathbb{R}$ (cuando $A \equiv A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$) se define para un perfil de acción determinado $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y un estado $\omega \in \Omega$

$$\{v_i(a; \omega), \omega \in \Omega\}_{i=1}^n \ \ when \ \ A \equiv A_1 \times A_2 \times A_n$$

- El conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de creencias de los jugadores, que pueden ser diferentes para cada jugador y así, para un mismo estado, los jugadores pueden asignar probabilidades diferentes. El jugador i tendrá una creencia $\phi_i(\omega|\tau_{ij})$ sobre los tipos de los otros jugadores, que es una distribución condicional posterior de probabilidad en los estados dado que i sabe que su tipo es θ_{ij} a través de la señal τ_{ij}

$$\phi_i(\omega_m|\tau_{ij}) = \frac{p(\omega_m \cap \tau_{ij})}{p(\tau_{ij})} = \frac{p(\omega_m \cap \tau_{ij})}{\sum_{k=1}^r p(\omega_k \cap \tau_{ij})}$$

- Las creencias se pueden obtener o especificar de diferentes maneras en un juego estático bayesiano con información incompleta

  - Se pueden dar las creencias de los jugadores sobre el tipo de los oponentes de manera directa, de modo que se pueden extraer las creencias para los otros casos en caso de que no se especifiquen todas

    - Bob believes each type of Andy is equally likely, independent of his type

- Andy believes $\Pr(B_H) = \frac{1}{3}$ independent of his type.

$$\tau_A(HL) = \tau_A(HH) = H_A \qquad \tau_A(LH) = \tau_A(LL) = L_A$$

$$\tau_B(HH) = \tau_B(LH) = H_B \qquad \tau_B(HL) = \tau_B(LL) = L_B$$

$$\phi_A(HH|H_A) = \frac{1}{3} \qquad \phi_A(HL|H_A) = \frac{2}{3}$$

$$\phi_A(LH|L_A) = \frac{1}{3} \qquad \phi_A(LL|L_A) = \frac{2}{3}$$

$$\phi_B(HH|H_B) = \phi_B(LH|H_B) = \frac{1}{2} \qquad \phi_B(HL|L_B) = \phi_B(LL|L_B) = \frac{1}{2}$$

- Se pueden dar las probabilidades conjuntas de que ocurran los tipos, de manera que, aplicando la regla de Bayes, se puede obtener la creencia de un jugador para un estado ω en el que el jugador tiene un tipo θ_i indicado por la señal τ_i. Para ello, se utiliza la definición de un estado ω como un conjunto de tipos o señales

		Player 2's type	
		c	d
Player 1's type	a	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\tau_1(ac) = \tau_1(ad) = a \qquad \tau_1(bc) = \tau_1(bd) = b$$

$$\tau_2(ac) = \tau_2(bc) = c \qquad \tau_2(ad) = \tau_2(bd) = d$$

$$\phi_1(ac|a) = \frac{p(ac \cap a)}{p(a)} = \frac{p(a \cap c)}{p(a)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}$$

…

$$\phi_1(bd|b) = \frac{p(bd \cap b)}{p(b)} = \frac{p(b \cap d)}{p(b)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}$$

- El orden de los eventos en los juegos estáticos bayesianos de información incompleta es el siguiente:

- La naturaleza escoge un perfil de tipos $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ con una distribución de probabilidad *a priori*, por lo que se entiende que escoge el estado ω

- Cada jugador i sabe su propio tipo θ_i a través de la señal τ_i, que es su información privada, y entonces forman creencias posteriores $\phi_i(\omega|\tau_i)$ sobre el estado en el que se encuentra dado su tipo o señal

- Los jugadores escogen sus acciones $a_i \in A_i$ simultáneamente

- Dado el perfil de acciones que ha sido escogido por todos los jugadores $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, las recompensas $v_i(a; \omega)$ se realizan para cada jugador $i \in N$

- Aunque para juegos estáticos de información completa no había distinción entre las estrategias y las acciones, en juegos estáticos de información incompleta, las acciones y las estrategias son diferentes debido a que diferentes tipos pueden escoger diferentes acciones. Por lo tanto, las estrategias y el concepto de equilibrio de Nash se definen de manera diferente

  - Considerando un juego estático bayesiano de información completa $\hat{\Gamma}$, una estrategia pura para un jugador i es una función $s_i: T_i \to A_i$ que especifica una acción pura $a_i(\tau_i)$ que el jugador escogería cuando recibe la señal τ_i que induce al tipo θ_i, y una estrategia mixta para un jugador i es una distribución de probabilidad sobre las acciones puras del jugador

    - Se puede interpretar que en la estrategia pura de cada jugador se escoge una acción para cada señal y tipo antes de saber su propio tipo a través de la señal, y después la juega

$$s_i(\tau_i) = \begin{cases} a_i \; when \; \tau_{i1} \\ a_i \; when \; \tau_{i2} \\ \dots \\ a_i \; when \; \tau_{ik_i} \end{cases}$$

    - Además, se puede interpretar que cada jugador escoge una estrategia mixta $\sigma_i = (\sigma_i(a_{i1}), \sigma_i(a_{i2}), \dots) \in \Delta A_i$, donde ΔA_i es el *simplex* de A_i, para cada señal y tipo antes de saber su propio tipo (a través de la señal), y después la juega

$$\sigma_i(\tau_{i1}) = \begin{cases} a_{i1} \; with \; \sigma_i(a_{i1}) \\ a_{i2} \; with \; \sigma_i(a_{i2}) \\ \dots \end{cases}$$

$$\Delta A_i = \left\{ \left(\sigma_i(a_{i1}), \sigma_i(a_{i2}), \dots, \sigma_i(a_{im})\right) \in [0,1]^m \middle| \sum_{j=1}^{m} \sigma_i(a_{ij}) = 1 \right\}$$

- Para juegos estáticos bayesianos de información incompleta, es mejor utilizar las acciones que las estrategias puras a la hora de calcular las recompensas esperadas de jugar una acción. Sin embargo, esto no es posible al utilizar estrategias mixtas

- Se puede calcular la recompensa esperada de escoger una acción $a_i \in A_i$ cuando los oponentes juegan una perfil de acciones $a_{-i}(\omega)$ (creencia sobre los movimientos de los otros jugadores) dada una señal τ_i del jugador i

$$E[v_i(a_i, a_{-i}(\omega); \omega)|\tau_i] = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_i(\omega|\tau_i) v_i(a_i, a_{-i}(\omega); \omega)$$

  - Como el jugador recibe una señal τ_i que induce al tipo θ_i, se utiliza la acción a_i y el perfil de acciones $a_{-i}(\omega)$ que tomarían los oponentes para cada uno de los estados en los que el jugador tenga un tipo θ_{ij} inducido por una señal τ_{ij}, por lo que se utilizan las probabilidades de que se esté en un estado ω dada una señal τ_{ij}

$$E[v_1(a_1, a_2(\omega); \omega)|\tau_{11}] = \phi_1(\omega_1|\tau_{11}) v_1(a_1, a_2(\omega_1); \omega_1)$$

$$+ \cdots + \phi_1(\omega_r|\tau_{11}) v_1(a_1, a_2(\omega_r); \omega_r)$$

$$\dots$$

$$E\left[v_1(a_1, a_2(\omega); \omega)\middle|\tau_{1k_i}\right] = \phi_1(\omega_1|\tau_{1k_i}) v_1(a_1, a_2(\omega_1); \omega_1)$$

$$+ \cdots + \phi_1(\omega_r|\tau_{1k_i}) v_1(a_1, a_2(\omega_r); \omega_r)$$

- También se puede calcular la recompensa esperada de escoger una estrategia mixta σ_i cuando los oponentes juegan un perfil de estrategias mixtas $\sigma_{-i}(\omega)$ (creencia sobre los movimientos de los otros jugadores) dada una señal τ_i del jugador i

$$E[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}(\omega); \omega)|\tau_i] = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_i(\omega|\tau_i) v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}(\omega); \omega)$$

  - Como el jugador recibe una señal τ_i que induce al tipo θ_i, se utiliza la estrategia mixta σ_i y el perfil de estrategias mixtas $\sigma_{-i}(\omega)$ que tomarían los oponentes para cada uno de los estados en los que el jugador tenga un tipo θ_{ij} inducido por una señal τ_{ij}, por lo que se utilizan las probabilidades de que se esté en un estado ω dada una señal τ_{ij}

$$E[v_1(\sigma_1, \sigma_2(\omega); \omega)|\tau_{11}] = \phi_1(\omega_1|\tau_{11}) \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \sigma_1(a_1) \sigma_2(a_2, \omega_1) v_1(a_1, a_2; \omega_1)$$

$$+\cdots+\phi_1(\omega_r|\tau_{11})\sum_{a_1\in A_1}\sum_{a_2\in A_2}\sigma_1(a_1)\sigma_2(a_2,\omega_r)v_1(a_1,a_2;\omega_r)$$

$$\ldots$$

$$E\left[v_1(\sigma_1,\sigma_2(\omega);\omega)\middle|\tau_{1k_i}\right]=\phi_1(\omega_1|\tau_{1k_i})\sum_{a_1\in A_1}\sum_{a_2\in A_2}\sigma_1(a_1)\sigma_2(a_2,\omega_1)v_1(a_1,a_2;\omega_1)$$

$$+\cdots+\phi_1(\omega_r|\tau_{1k_i})\sum_{a_1\in A_1}\sum_{a_2\in A_2}\sigma_1(a_1)\sigma_2(a_2,\omega_r)v_1(a_1,a_2;\omega_r)$$

- Considerando un juego estático bayesiano de información completa $\hat{\Gamma}$, un perfil de acciones $a^*=(a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*)$ es un equilibrio de Nash bayesiano (BNE) de estrategias puras si para cada una de las señales del jugador i y cualquier acción $a_i'\in A_i$, la recompensa esperada de jugar $a_i^*\in A_i$ es mayor o igual a a_i' para cualquier jugador $i\in N$ dada una creencia $a_{-i}^*\in A_{-i}$

$$E[v_i(a_i^*,a_{-i}^*(\omega);\omega)|\tau_i]\geq E[v_i(a_i',a_{-i}^*(\omega);\omega)|\tau_i]$$

$$for\ \ \forall i\in N,\forall\tau_i\in T_i\ and\ \ \forall a_i'\in A_i$$

  - La definición expresa que, independientemente de la realización de los tipos, ningún jugador tiene incentivos a jugar otra acción para cada señal que reciben. Por lo tanto, dada una señal τ_i y una creencia $a_{-i}^*(\cdot)$, se obtiene una recompensa mayor o igual jugando a_i^* que jugando cualquier otra estrategia

  - Una forma sencilla de comprobar si un perfil de estrategias puras es un BNE es comprobando si la recompensa de las estrategias de equilibrio es mayor o igual a la de jugar otra estrategia pura, bajo las estrategias de equilibrio de los oponentes

- Considerando un juego estático bayesiano de información completa $\hat{\Gamma}$, un perfil de estrategias mixtas $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*,\ldots,\sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash bayesiano (BNE) de estrategias mixtas si para cada una de las señales del jugador i y cualquier estrategia mixta $\sigma_i'\in\Delta A_i$, la recompensa esperada de jugar $\sigma_i^*\in\Delta A_i$ es mayor o igual a σ_i' para cualquier jugador $i\in N$ dada una creencia $\sigma_{-i}^*\in\Delta A_{-i}$

$$E[v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*(\omega);\omega)|\tau_i]\geq E[v_i(\sigma_i',\sigma_{-i}^*(\omega);\omega)|\tau_i]$$

$$for\ \ \forall i\in N,\forall\tau_i\in T_i\ and\ \ \forall\sigma_i'\in\Delta A_i$$

  - Esta es la extensión natural del BNE para incluir las estrategias mixtas. Estos se pueden encontrar igualando las recompensas esperadas para las estrategias puras que se usen al mezclar y obteniendo la probabilidad de jugar cada estrategia

- Para un equilibrio mixto bayesiano, generalmente al menos un tipo de los jugadores tiene que mezclar a la vez, dado que la mezcla hace indiferente al otro jugador. No obstante, existen casos en los que, para unas creencias exactas, acciones puras de los oponentes pueden dejar al jugador i indiferente, lo cual haría que se tuviera que considerar tanto acciones puras como mezclas para la estrategia mixta del jugador i

- Dado que la estrategia mixta y la estrategia de comportamiento son equivalentes para juegos con recuerdo perfecto, se pueden expresar las estrategias mixtas a través de estrategias de comportamiento siempre que la condición se cumpla

- Una forma sencilla de comprobar si un perfil de estrategias mixtas es un BNE es comprobando si la recompensa de las estrategias de equilibrio es mayor o igual a la de jugar otra estrategia mixta, bajo las estrategias de equilibrio de los oponentes

- A partir del teorema de existencia de Nash, todo juego bayesiano con información incompleta finito tiene al menos un equilibrio de Nash bayesiano, teniendo en cuenta tanto estrategias puras como mixtas

- Existen dos interpretaciones del equilibrio bayesiano que permitirán obtener un algoritmo para obtener todos los equilibrios (puros y mixtos) en un juego

  - La interpretación provisional expresa que cada tipo de los jugadores es como un jugador diferente, por lo que se puede realizar un análisis para diversos jugadores

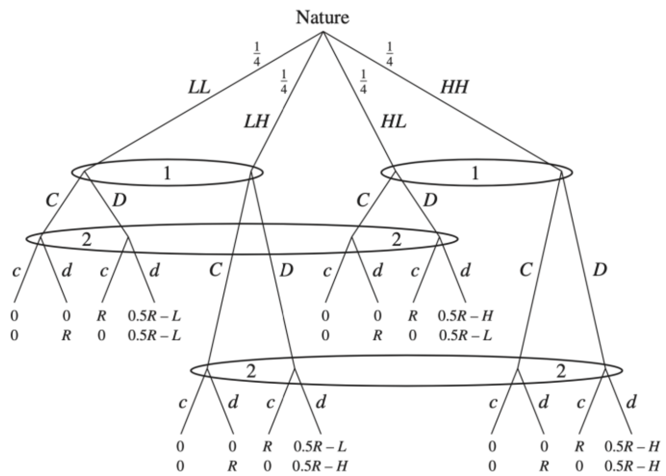
(u_A, u_B)		B_H		B_L	
		P	N	P	N
A_H	P	$15, 10$	$15, 15$	$15, 3$	$15, 7$
	N	$20, 10$	$0, 0$	$20, 3$	$0, 0$
A_L	P	$-2, 10$	$-2, 15$	$-2, 3$	$-2, 7$
	N	$3, 10$	$0, 0$	$3, 3$	$0, 0$

- Esta será la interpretación más común para poder obtener todos los equilibrios, dada la sencillez a la hora de lidiar con estrategias mixtas

  - La interpretación *ex ante* expresa que la estrategia de un jugador describe que hacer en cada tipo, de modo que se puede interpretar el tipo o señal de los jugadores como diferentes conjuntos de información en un juego extensivo

- Cuando el jugador i recibe su señal, es como si estuviera en un único conjunto de información (de los otros jugadores que no lo saben) que se identifica con su tipo. Como las estrategias de los jugadores se especifican para cada señal (para cada conjunto de información), se especifica lo que el jugador hará incluso en aquellos tipos de este que no se realicen, por lo que el jugador i pueda formar creencias bien definidas sobre el comportamiento de los oponentes

- Cada tipo del jugador i corresponde a un conjunto de información de este, de modo que se puede dibujar un árbol de juego en donde el jugador está en un mismo conjunto de información para los diversos estados en donde tiene el mismo tipo. Normalmente, se utiliza un árbol en el que el primer movimiento es la naturaleza y escoge con probabilidades conjuntas obtenidas multiplicando las creencias para un mismo estado de los jugadores



$$P(HH) = \phi_1(HH|\tau_{1H})\phi_2(HH|\tau_{2H})$$

- Dado que cada tipo corresponde a un conjunto de información del oponente, entonces se puede representar un juego de dos jugadores a través de una matriz de la misma manera que con los juegos en forma extensiva

		cc	cd	dc	dd
Player 1	CC	$0, 0$	$0, \frac{R}{2}$	$0, \frac{R}{2}$	$0, R$
	CD	$\frac{R}{2}, 0$	$\frac{3R}{8} - \frac{H}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{H}{4}$	$\frac{3R}{8} - \frac{H}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{L}{4}$	$\frac{R}{4} - \frac{H}{2}, \frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}$
	DC	$\frac{R}{2}, 0$	$\frac{3R}{8} - \frac{L}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{H}{4}$	$\frac{3R}{8} - \frac{L}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{L}{4}$	$\frac{R}{4} - \frac{L}{2}, \frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}$
	DD	$R, 0$	$\frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}, \frac{R}{4} - \frac{H}{2}$	$\frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}, \frac{R}{4} - \frac{L}{2}$	$\frac{R}{2} - \frac{L}{2} - \frac{H}{2}, \frac{R}{2} - \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$

- Para obtener las recompensas de cada casilla, se usa la probabilidad conjunta de que ocurran dos tipos concretos de cada jugador (el estado) y su recompensa

$$Ev_1(CD, dd) = \frac{1}{4} \times v_1(C, d; L) + \frac{1}{4} \times v_1(C, d; L) + \frac{1}{4} \times v_1(D, d; H) + \frac{1}{4} \times v_1(D, d; H)$$
$$= \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{R}{2} - H\right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{R}{2} - H\right) = \frac{R}{4} - \frac{H}{2}$$

$$Ev_2(CD, dd) = \frac{1}{4} \times v_2(C, d; L) + \frac{1}{4} \times v_2(C, d; H) + \frac{1}{4} \times v_2(D, d; L) + \frac{1}{4} \times v_2(D, d; H)$$
$$= \frac{1}{4} \times R + \frac{1}{4} \times R + \frac{1}{4} \times \left(\frac{R}{2} - L\right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{R}{2} - H\right) = \frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}.$$

- Ambas interpretaciones son equivalentes y métodos para encontrar el equilibrio son equivalentes porque la probabilidad de que se den los tipos siempre es positiva. No obstante, la interpretación provisional es más sencilla para encontrar equilibrios mixtos

Juegos estáticos de información incompleta: algoritmos de solución

- Cuando hay incertidumbre sobre las recompensas solo para un jugador, entonces hay un jugador completamente informado (aquel con más de un tipo) y otro que está completamente desinformado (aquel con solo un tipo). Para estas situaciones, el siguiente algoritmo permite obtener todos los equilibrios de Nash bayesianos posibles

  - El primer paso consiste en construir la matriz con las recompensas para cada tipo de ambos jugadores y plantear el conjunto de estados, señales y creencias de los jugadores

M/F	(p)		$(1-p)$	
	F_L		F_{NL}	
	B	S	B	S
B	1,2	0,0	1,0	0,1
S	0,0	2,1	0,2	2,0

    - A partir de esta matriz, se puede saber que recompensa obtiene cada tipo de jugador cuando decide realizar una acción. Hay que tener cuidado a la hora de montar la matriz, teniendo en cuenta si se tienen que restar unidades de la recompensa o no por aportaciones de los propios jugadores (que tienen un efecto en su utilidad)

    - El conjunto de estados estará compuesto por los dos tipos del jugador informado

$$States: \{L, NL\}$$

- Las señales del jugador desinformado para ambos estados tienen que ser una misma señal con tal de que este esté completamente desinformado del estado en el que se encuentra, mientras que las señales del jugador informado tienen que ser diferentes para cada estado de modo que este esté completamente informado

$$Signals:$$

$$\tau_1(L) = \tau_1(NL) = \tau_1 \qquad \tau_2(L) = \tau_{2L} \quad \tau_2(NL) = \tau_{2NL}$$

- Las creencias del jugador desinformado tienen que ser la distribución de probabilidad de que se den los tipos del jugador informado, mientras que las creencias del jugador informado tienen que ser 1 o 0 dependiendo de la señal que se reciba (de modo que este sabe con certeza el estado en el que se encuentra y hay dos creencias para cada tipo)

$$Beliefs:$$

$$\mu_1(L|\tau_1) = p \quad \mu_1(NL|\tau_1) = 1 - p$$

$$\mu_2(L|\tau_{2L}) = 1 \quad \mu_2(NL|\tau_{2L}) = 0$$

$$\mu_2(L|\tau_{2NL}) = 0 \quad \mu_2(NL|\tau_{2NL}) = 1$$

- El segundo paso consiste en eliminar las estrategias que estén estrictamente dominadas, dado que no pueden formar parte del equilibrio

  - Para poder ver que estrategias están estrictamente dominadas, se puede utilizar la interpretación *ex ante* del equilibrio bayesiano, de modo que se ve si para ambos tipos del oponente existe una estrategia en la cual se consigue una recompensa estrictamente mayor dada cualquier estrategia del oponente

  - A veces, las estrategias dominadas no se ven a simple vista, por lo que se pueden plantear las recompensas esperadas de un tipo del otro jugador para ver si se llega a un resultado incoherente que indique que una de las dos recompensas siempre será mayor que la otra, siendo esa acción dominante y permitiendo seguir con el proceso de eliminación

$$1\ mixes \Rightarrow E\left[v_2(a_1, a_{21}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right] \geq E\left[v_2(a_1, a_{22}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right]$$

$$\Rightarrow if\ \sigma_1^* \notin [0,1], then\ one\ action\ dominates\ as\ \sigma_1^* \in [0,1]$$

- El tercer paso consiste en suponer que el jugador desinformado (aquel con una sola señal o tipo) juega una estrategia mixta, de modo que se puede generalizar los resultados porque una estrategia pura no es más que una lotería degenerada, y después se encuentran las correspondencias de mejor respuesta de cada tipo de jugador para la estrategia mixta del jugador desinformado

    - Para poder encontrar la correspondencia, primero se tiene que plantear la condición para la cual jugar una acción da una recompensa esperada mayor o igual a otra (condición de mejor respuesta). En este caso, se compara un par de acciones y se calcula el valor esperada con las formulaciones anteriormente vistas

$$1:\ mixes\ \Rightarrow\ E\left[v_2(a_1, a_{21}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right] \geq E\left[v_2(a_1, a_{22}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1) v_2(a_{21}, a_1; \omega) \geq \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1) v_2(a_{22}, a_1; \omega)$$

$$Example:$$

$$M:\ qB + (1-q)S\ \Rightarrow\ E[v_2(a_1, B; \omega)|F_L] \geq E[v_2(a_1, S; \omega)|F_L]$$

$$\Rightarrow\ qv_F(B, B; L) + (1-q)v_F(S, B; L) \geq qv_F(B, S; L) + (1-q)v_F(S, S; L)$$

$$\Rightarrow\ 2q \geq 1 - q\ \Rightarrow\ q \geq \frac{1}{3}$$

    - Como solo hay incertidumbre en las preferencias del jugador informado, la señal de este permite que la creencia de cada estado corresponda con el estado real en el que se encuentran los jugadores, por lo que no se tiene en cuenta

    - Una vez encontrada la probabilidad q, se pueden plantear mejores respuestas según q para cada tipo del jugador informado

$$Example:$$

$$BR(F_L) = \begin{cases} B & for\ \ q > \dfrac{1}{3} \\ \{\alpha B + (1-\alpha)S | \alpha \in [0,1]\} & for\ \ q = \dfrac{1}{3} \\ S & for\ \ q < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

- En el quinto paso, se obtienen las mejores respuestas del jugador desinformado para cada intervalo posible de q

- Una vez que se tienen las correspondencias de mejor repuesta para cada tipo o señal del jugador informado, entonces se pueden plantear casos para cada tramo de probabilidad q obtenido y obtener la mejor respuesta del jugador desinformado para cada intervalo de q

$$For\ interval\ of\ q\text{:}\ \ Player\ 2\ chooses\ a_2^* \in BR(\tau_2)\ for\ \forall\tau_2 \in T_2$$

$$E[v_1(a_{11}, a_2^*; \omega)|\tau_1] \geq E[v_1(a_{12}, a_2^*; \omega)|\tau_1]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1)v_1(a_{11}, a_2^*; \omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1)v_1(a_{11}, a_2^*; \omega)$$

$$\Rightarrow BR(1)\ to\ BR\left(2_{\tau_2}\right)$$

$$Example\text{:}$$

$$For\ q < \frac{1}{3}\text{:}\ \ F_L\ chooses\ S\ and\ F_{NL}\ chooses\ B$$

$$E[v_1(B, a_2^*; \omega)|\tau_1] \geq E[v_1(S, a_2^*; \omega)|\tau_1]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1)v_1(B, a_2^*; \omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1)v_1(S, a_2^*; \omega)$$

$$\Rightarrow pv_1(B, S; L) + (1-p)v_1(B, B; NL) \geq pv_1(S, S; L) + (1-p)v_1(S, B; NL)$$

- Cuando el jugador informado utiliza estrategias mixtas, entonces se obtendrá una expresión que depende de $\sigma_2(a_2)$, por lo que se puede encontrar la distribución de probabilidad del tipo del jugador informado. En estos casos, el jugador desinformado siempre jugará una estrategia mixta porque al menos uno de los tipos del jugador informado mezcla para hacerlo indiferente

$$For\ q = \hat{q}\text{:}\ \ Player\ 2\ chooses\ a_2^* \in BR(\tau_2)\ for\ \forall\tau_2 \in T_2$$

$$E[v_1(a_{11}, a_2^*; \omega)|\tau_1] \geq E[v_1(a_{12}, a_2^*; \omega)|\tau_1]$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1) \sum_{a_2\in A_2} \sigma_2(a_2)v_1(a_{11}, a_2^*; \omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \mu_1(\omega|\tau_1) \sum_{a_2\in A_2} \sigma_2(a_2)v_1(a_{12}, a_2^*; \omega)$$

$$\Rightarrow BR\left(1, \sigma_2(a_2)\right)\ to\ BR\left(2_{\tau_2}\right)$$

- Como $0 \leq \sigma_2(a_2) \leq 1$, se puede encontrar una fórmula para $\sigma_2(a_2)$ que dependa de p o de las creencias cuando estas no están especificadas y resolver la desigualdad, obteniendo así el intervalo de p o de creencias para el cual $0 \leq \sigma_2(a_2) \leq 1$ y en donde pueda existir un equilibrio. Por lo tanto, solo habrá un equilibrio mixto para ese intervalo (no se consideran los otros)

$$When\ q < \frac{1}{3}\ \ and\ \ \mu_1(\omega|L) = p\ \ and\ \ \mu_1(\omega|NL) = 1 - p:$$

$$p[\alpha v_1(B,B;L) + (1-\alpha)v_1(B,S;L)] + (1-p)[\alpha v_1(B,B;NL) + (1-\alpha)v_1(B,S;NL)]$$

$$\geq p[\alpha v_1(S,B;L) + (1-\alpha)v_1(S,S;L)] + (1-p)[\alpha v_1(S,B;NL) + (1-\alpha)v_1(S,S;NL)]$$

$$\Rightarrow \alpha(p) = \frac{2-3p}{3-3p} \Rightarrow \begin{cases} p\ when\ \alpha \geq 0 \\ p\ when\ \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2-3p}{3-3p} \geq 0 \\ \dfrac{2-3p}{3-3p} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow p \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \big(qB + (1-q)S, (\alpha B + (1-\alpha)S, B)\big)\ for\ \ p \leq \frac{2}{3}\ \ \&\ \ \alpha = \frac{2-3p}{3-3p}$$

- Para los valores en donde p es igual a la probabilidad crítica, una acción pura del jugador informado para sus tipos podría dejar indiferente al jugador desinformado, de modo que se considerarían los casos en donde se juegan acciones puras y la mezcla (dado que las recompensas esperadas coincidirían con las que se obtendrían si el jugador informado mezclara)

- Finalmente, se comprueban que los perfiles de estrategia obtenidos son un equilibrio de Nash bayesiano mirando la matriz y viendo si no hay ninguna desviación provechosa posible. Si la hay, este no es un equilibrio de Nash bayesiano y se elimina ese caso

  - Los equilibrios, si las creencias no están especificadas (p no se especifica), se plantean en base a un intervalo de p

  - Como en la mayoría de juegos tiene que haber un número de equilibrios impar, esto puede ayudar a ver si hay algún perfil que no es un equilibrio

  - Para poder comprobar perfiles de estrategias mixtas, se tiene que ver si las estrategias son mejor respuesta para ambos tipos del jugador informado

$$E[v_2(a_1^*, a_2; \omega)|\tau_{21}] \geq E[v_2(a_1^*, a_2; \omega)|\tau_{21}]$$

$$E[v_2(a_1^*, a_2; \omega)|\tau_{22}] \geq E[v_2(a_1^*, a_2; \omega)|\tau_{22}]$$

  - Generalmente, existen dos tipos de equilibrio: un perfil en el que ambos jugadores juegan estrategias puras (para los dos tipos del jugador informado) o un perfil en donde el jugador desinformado y un tipo del jugador informado mezclan (el otro tipo juega una estrategia pura)

- A partir del concepto de dominación estricta anteriormente explicado, es posible solucionar juegos complejos a través de los siguientes métodos
    - Cuando un juego tiene un conjunto de tipos o señales en un intervalo para los jugadores, a veces es posible aplicar el método IESDS o analizar las estrategias débilmente dominadas para poder obtener un equilibrio
        - El primer paso consiste en plantear las funciones de recompensa de cada uno de los jugadores y acción disponible. Como los conjuntos de tipos o señales son intervalos (discretos o continuos), entonces normalmente se puede plantear una función genérica para cada jugador y acción, y no es necesario hacerlo para cada tipo
        - El segundo paso consiste en plantear el intervalo de tipos (indicando como se distribuyen las variables si es continuo). Es recomendable representar gráficamente estos valores (a través de una línea) con tal de mejorar el entendimiento sobre el problema
        - El tercer paso es ver si existen acciones dominadas estrictamente o débilmente para un cierto valor o intervalo en el conjunto de tipos. Para ello se suele utilizar el caso en el que se da un tipo de los extremos de los intervalos y se ve que acciones tomarían los jugadores dados estos tipos
        - El cuarto paso es analizar las implicaciones de eliminar las acciones dominadas para un intervalo de tipos para los jugadores oponentes
        - La eliminación puede afectar a la probabilidad de jugar una acción dado un tipo, lo cual afectará a la recompensa esperada de los oponentes y a la probabilidad de que jueguen un perfil de acciones concreto, y a su vez esto afecta a la recompensa esperada del jugador y así repetidamente

$$IESDS \Rightarrow \ \phi_i(\omega|\tau_i) \Rightarrow E\big(v_{-i}(a_{-i}, a_i(\omega); \omega \in \Omega)\big) \Rightarrow \phi_{-i}(\omega|\tau_{-i}) \Rightarrow \cdots$$

        - En otros casos se puede utilizar otros aspectos del problema con tal de obtener una intuición, tales como las condiciones necesarias para jugar una acción (que sea provechosa), valores dados, etc.

- El último paso consiste en ver hacia donde tiende el juego, de modo que al realiza el proceso unas cuantas veces se puede ver que en el límite se tiende a un equilibrio. En todo caso, se tienen que tener en cuenta resultados anteriores y ver el caso de los extremos (dado que puede ser útil para saber en qué casos no hay equilibrio o no lo hay de un tipo concreto)

- Cuando en un juego de dos jugadores hay dos tipos para cada jugador, normalmente habrá tipos para los cuales haya acciones dominadas, de modo que se puede combinar el algoritmo anterior junto con el IESDS

  - El primer paso consiste en plantear la matriz del juego y el conjunto de estados, de señales y de creencias. Hay que tener cuidado a la hora de montar la matriz, teniendo en cuenta si se tienen que restar unidades de la recompensa o no por aportaciones de los propios jugadores (que tienen un efecto en su utilidad). En este caso, se tiene que adaptar al hecho de que habrá dos tipos para cada jugador, de modo que se multiplican los estados y ahora habrá señales y creencias para los dos tipos de los jugadores (ahora los dos están parcialmente desinformados del estado en el que se encuentran)

<table>
<tr><td rowspan="2">(u_A, u_B)</td><td></td><td colspan="2">B_H</td><td colspan="2">B_L</td></tr>
<tr><td></td><td>P</td><td>N</td><td>P</td><td>N</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_H</td><td>P</td><td>$15, 10$</td><td>$15, 15$</td><td>$15, 3$</td><td>$15, 7$</td></tr>
<tr><td>N</td><td>$20, 10$</td><td>$0, 0$</td><td>$20, 3$</td><td>$0, 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_L</td><td>P</td><td>$-2, 10$</td><td>$-2, 15$</td><td>$-2, 3$</td><td>$-2, 7$</td></tr>
<tr><td>N</td><td>$3, 10$</td><td>$0, 0$</td><td>$3, 3$</td><td>$0, 0$</td></tr>
</table>

$$States: \{HH, HL, LH, LL\}$$

$$Signals:$$

$$\tau_1(HH) = \tau_1(HL) = \tau_{1H} \qquad \tau_1(LH) = \tau_1(LL) = \tau_{1L}$$

$$\tau_2(HH) = \tau_2(LH) = \tau_{2H} \qquad \tau_2(HL) = \tau_2(LL) = \tau_{2L}$$

  - Las creencias, en este caso, pueden depender del tipo del otro jugador, por lo que se tienen que plantear para cada jugador y cada tipo de este. Normalmente, los eventos serán independientes, por lo que la probabilidad conjunta o la de un estado serán el producto entre probabilidades *a priori*, mientras que la probabilidad total se puede expresar como la suma de todas las probabilidades conjuntas con el tipo τ_{ij}. Aplica la misma lógica cuando se dan las probabilidades conjuntas en una tabla

$$Beliefs\ depending\ on\ types\ of\ other\ player:$$

$$\mu_1(\omega|\tau_{1j}) = \frac{P(\tau_{1j})P(\tau_{2k})}{\sum_{k=1}^{\bar{k}} P(\tau_{1j})P(\tau_{2k})}$$

1\2	Low	High
Low	0.4	0.1
High	0.1	0.4

- El segundo paso es ver si existen acciones dominadas para el tipo de un jugador. Esto se hace comparando las recompensas de una acción para todos los tipos del oponente, de modo que, si la recompensa es igual o menor a la de otra acción, como los tipos tienen probabilidad positiva, se puede eliminar

- El tercer paso es aplicar el método IESDS con tal de que, una vez eliminadas las acciones dominadas, se puede encontrar las acciones dominadas para el otro jugador. Si no se ve ninguna a simple vista, se encuentran las recompensas esperadas para un tipo del otro jugador y se ve si hay alguna recompensa esperada estrictamente superior, de modo que se puede seguir el proceso de eliminación

$$E\left[v_2(a_1, a_{21}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right] \geq E\left[v_2(a_1, a_{22}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega\in\Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1\in A_1} \sigma_1(a_1)v_2(a_1, a_{21}; \omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1\in A_1} \sigma_1(a_1)v_2(a_1, a_{22}; \omega)$$

$$\Rightarrow if\ \sigma_1^* \notin [0,1], then\ one\ action\ dominates\ as\ \sigma_1^* \in [0,1]$$

$$j = type\ or\ signal\ of\ player\ 1$$

- El cuarto paso consiste en, una vez se han descartado todas las estrategias dominadas para los tipos, suponer que los tipos para los que no se juegan estrategias estrictamente dominantes juegan estrategias mixtas, de modo que se puede analizar cada caso en función de la probabilidad de la estrategia y obtener la correspondencia de mejor respuesta

$$Player\ 1_j\!:\ q_1B + (1-q_1)S\ \Rightarrow\ E\left[v_1(a_{11}, a_2; \omega)\middle|\tau_{1j}\right] \geq E\left[v_1(a_{12}, a_2; \omega)\middle|\tau_{1j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega\in\Omega} \phi_1(\omega|\tau_{1j}) \sum_{a_2\in A_2} \sigma_2(a_2)v_2(a_{11}, a_2; \omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \phi_1(\omega|\tau_{1j}) \sum_{a_2\in A_2} \sigma_2(a_2)v_2(a_{12}, a_2; \omega)$$

$$\Rightarrow BR(\tau_{1j})$$

$$Player\ 2_j\!:\ q_2B + (1-q_2)S\ \Rightarrow\ E\left[v_2(a_1, a_{21}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right] \geq E\left[v_2(a_1, a_{22}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1) v_2(a_1, a_{21}; \omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1) v_2(a_1, a_{22}; \omega)$$

$$\Rightarrow BR(\tau_{2j})$$

- El quinto paso consiste en analizar los casos con un método similar al ya descrito anteriormente, y finalmente comprobar que los perfiles de estrategia obtenidos sean equilibrios de Nash bayesianos

$$For\ interval\ of\ q_1, q_2:\ Player\ 2\ chooses\ a_2^* \in BR(\tau_2)\ for\ \forall \tau_2 \in T_2$$

$$E\left[v_1(a_{11}, a_2^*; \omega)\middle|\tau_{1j}\right] \geq E\left[v_1(a_{12}, a_2^*; \omega)\middle|\tau_{1j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} \phi_1(\omega|\tau_{1j}) \sum_{a_2 \in A_2} \sigma_2(a_2^*) v_2(a_{11}, a_2^*; \omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \phi_1(\omega|\tau_{1j}) \sum_{a_2 \in A_2} \sigma_2(a_2^*) v_2(a_{12}, a_2^*; \omega)$$

$$For\ interval\ of\ q_1, q_2:\ Player\ 1\ chooses\ a_1^* \in BR(\tau_1)\ for\ \forall \tau_1 \in T_1$$

$$E\left[v_2(a_1^*, a_{12}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right] \geq E\left[v_2(a_1^*, a_{22}; \omega)\middle|\tau_{2j}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1^*) v_2(a_1^*, a_{21}; \omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \phi_2(\omega|\tau_{2j}) \sum_{a_1 \in A_1} \sigma_1(a_1^*) v_2(a_1^*, a_{22}; \omega)$$

- Si las creencias son un parámetro, se sigue la misma lógica que en el algoritmo anterior. Para los valores en donde p es igual a la probabilidad crítica, una acción pura del jugador informado para sus tipos podría dejar indiferente al jugador desinformado, de modo que se considerarían los casos en donde se juegan acciones puras y la mezcla

Juegos dinámicos de información incompleta: equilibrio bayesiano perfecto

- Igual que con los juegos de información completa, los juegos en forma normal no capturan el dinamismo de los juegos dinámicos, por lo que no se tiene en cuenta la racionalidad secuencial
  - Algunos de los equilibrios de Nash bayesianos que se pueden encontrar no son equilibrios que cumplen con la racionalidad secuencial, de modo que no son creíbles
    - No obstante, cuando hay información incompleta, ni con la noción de equilibrio perfecto en subjuegos es posible eliminar equilibrios que no son secuencialmente racionales, dada la definición de subjuego (el juego tiene un único subjuego)

- Además, las acciones de los jugadores con información privada pueden afectar la probabilidad con la que otros llegan a un conjunto de información

- Esto implica que es necesario otro concepto de equilibrio para poder satisfacer la secuencialidad racional, el equilibrio de Bayes perfecto

    - Para poder representar los juegos dinámicos de información incompleta, se utiliza la forma extensiva introducida anteriormente, pero es necesario introducir el concepto de sistema de creencias

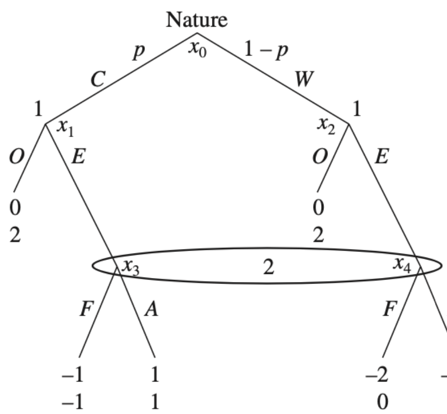
        - Un sistema de creencias μ de un juego en forma extensiva asigna una distribución de probabilidad a los nodos de decisión de cada conjunto de información, de modo que para cada conjunto de información $h \in H$ y cada nodo de decisión $w \in h$, $\mu(w) \geq 0$ y $\sum_{w \in h} \mu(w) = 1$, siendo $\mu(w)$ la probabilidad que asigna el jugador i a estar en el nodo w

        - Cada jugador tendrá una creencia bien definida sobre dónde está en cada nodo de información, por lo que cada juego dinámico con información incompleta tendrá un sistema de creencias

        - Como cada nodo w representa una historia, $\mu(w)$ se puede entender como la probabilidad condicional de que un jugador sea de un tipo dado que se juegue una acción a_{-i}

$$\mu_i(w) = \mu_i(\theta_{-i}|a_{-i})$$

$$Example:$$



$$\mu_2(x_3) = \mu_2(C|E) \qquad 1 - \mu_2(x_3) = \mu_2(W|E)$$

        - Debido a que las creencias sobre las acciones que toman los oponentes deben ser consistentes con las creencias sobre el tipo de estos, entonces dado un perfil de estrategias σ^* que es un equilibrio de Nash bayesiano, se requiere que las creencias de los conjuntos de información en el camino de equilibrio sean consistentes con la regla de Bayes

$$\mu_i(w) = \mu_i(\theta_{-i}|a_{-i}) = \frac{p(\theta_{-i})\sigma_{-i}(\theta_{-i}, a_{-i})}{p(h)}$$

$$\Theta(a_{-i}) \equiv \{\theta_{-i} \in \Theta_{-i} | a_{-i}(\theta_{-i}) = a_{-i}\}$$

$$p(h) = p(a_{-i}) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}(a_{-i})} p(\theta_{-i})\, \sigma_{-i}(\theta_{-i}, a_{-i})$$

$$Example:$$

$$\mu_2(x_3) = \mu_2(C|E) = \frac{p\sigma_C}{p\sigma_C + p\sigma_W}$$

$$where\ \sigma_C\ and\ \sigma_W\ are\ probabilities\ of\ behav.strat.$$

- Si se llega a nodos en los que se tiene que llegar con probabilidad nula, el jugador puede asignar cualquier probabilidad porque la regla de Bayes no aplica (división de cero entre cero), por lo que en conjuntos de información fuera del camino de equilibrio, cualquier creencia se puede asignar sin necesidad de respetar la regla de Bayes

- A partir de la definición de sistema de creencias, se puede definir el equilibrio bayesiano perfecto. Un equilibrio bayesiano perfecto o *perfect bayesian equilibrium* (PBE) es un par (σ, μ), donde el perfil de estrategias mixto σ es secuencialmente racional dado un sistema de creencias μ y el sistema de creencias μ es consistente con el perfil σ

  - Se considera que un perfil es secuencialmente racional dado un sistema de creencias μ si, y solo si, en cada conjunto de información h_i la recompensa esperada del jugador i se maximiza

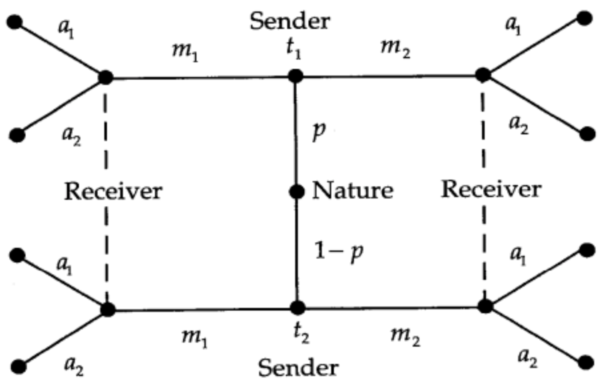
$$\max_{\sigma_i} E[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i)|h, \mu] = \sum_{\theta \in \Theta} \mu_i(\theta_{-i}|\sigma_i) v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i)$$

$$E[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i)|h, \mu] \geq E[v_i(\sigma_i', \sigma_{-i}, \theta_i)|h, \mu]\ \ for\ \ \forall \sigma_i' \in \Delta S_i$$

  - Como se ha mencionado anteriormente, un sistema de creencias es consistente con un perfil si las creencias respetan la regla de Bayes para los conjuntos de información en el camino de equilibrio

Juegos dinámicos de información incompleta: juegos de señalización

- En los juegos de información incompleta al menos uno de los jugadores no tiene información sobre el tipo del otro jugador. En este caso, a veces existen situaciones en las que un jugador quiere señalizar algo a sus oponentes, modeladas a través de los llamados juegos de señalización



  - Los juegos de señalización comparten una estructura que incluye los siguientes componentes:

    - La naturaleza escoge un tipo $\theta \in \Theta$ con probabilidad p_θ para el emisor S (jugador 1)

    - Cada tipo de emisor envía un mensaje $m \in M$ (escoge una acción), por lo que una estrategia pura del emisor se define como una función $s_S: \Theta_S \to M$. El emisor tiene un conjunto de acciones rico, en el sentido de que este tiene al menos tantos mensajes como como tipos, y cada mensaje impone un coste diferente para cada tipo

    - El receptor R (jugador 2) observa el mensaje, pero no el tipo del jugador, de modo que actualiza sus creencias μ. Una vez observado, este realiza una acción $a(m) \in A(m)$ consistente con sus creencias, de modo que una estrategia pura del receptor se define como una función $s_R: M \to A(m)$

    - Las recompensas de cada jugador $v_i(\theta_S, m, a(m))$ dependen del tipo, el mensaje y la acción. Si las recompensas de los jugadores no dependen del mensaje, entonces se está en un juego de charla barata o *cheap talk game*

  - Los juegos se llaman juegos de señalización por la potencial señal que el jugador 1 puede transmitir al jugador 2. Dependiendo de las acciones de cada tipo del jugador 1, se revelará información al jugador 2 o no en equilibrio, por lo que los PBE en estrategias puras se pueden dividir en *pooling* y *separating*

- Los equilibrios agrupadores o *pooling equilibria* son equilibrios en los que todos los tipos de jugador 1 escogen la misma acción, de modo que no se revela nada al jugador 2. Como las creencias se tienen que derivar de la regla de Bayes en los conjuntos de información en el camino de equilibrio, todos los otros conjuntos de información tienen probabilidad nula, y sus creencias en los conjuntos a los que si se llaga deben apoyar su estrategia. Si el jugador 1 no juega una *pooling strategy* es por la secuencialidad racional del jugador 2 dadas sus creencias

- Los equilibrios separadores o *separating equilibria* son equilibrios en los que cada tipo de jugador 1 escoge una acción diferente, de modo que, en equilibrio, se revela su tipo al jugador 2. Las creencias del jugador 2 estarán, por tanto, bien definidas en todos los conjuntos de información

- Un equilibrio bayesiano perfecto en estrategias puras en los juegos de señalización es un triple (s_S, s_R, μ) que cumple las siguientes condiciones:

  - La racionalidad secuencial del emisor (dada una estrategia s_R) hace que se escoja un mensaje que maximiza la recompensa esperada para cualquier tipo de emisor. En este caso, la recompensa esperada es igual a v_S porque el jugador sabe el estado en el que está y las recompensas de sus decisiones

$$\max_{m \in M} E\left[v_S\big(\theta, m, a(m)\big) | h, \mu\right] = v_S\big(\theta, m, a(m)\big)$$

$$for \;\; \forall \theta \in \Theta$$

  - La racionalidad secuencial del receptor (dado un sistema de creencias μ) hace que se escoja una acción que maximiza la recompensa esperada para cualquier mensaje

$$\max_{a(m) \in A(m)} E\left[v_R\big(\theta, m, a(m)\big) | h, \mu\right] = \sum_{\theta \in \Theta} \mu(\theta | m) v_R\big(\theta, m, a(m)\big)$$

$$for \;\; \forall m \in M$$

  - El sistema de creencias μ es consistente con la estrategia del emisor, de modo que definiendo $\Theta(m) \equiv \{\theta \in \Theta | m(\theta) = m\}$ y $p(m) = \sum_{\theta \in \Theta(m)} p_\theta$ para cada $m \in M$, las creencias deben respetar la regla de Bayes si $p(m) > 0$

$$\mu(\theta|m) = \begin{cases} \frac{p_\theta}{p(m)} & if \ \ \theta \in \Theta(m) \\ 0 & if \ \ \theta \notin \Theta(m) \end{cases}$$

- Aunque solo se habían considerado estrategias puras hasta ahora, también se puede extender el análisis a estrategias mixtas, de modo que se modifica ligeramente el juego
  - Cuando se permite la existencia de estrategias mixtas, puede haber dos fuentes de estrategias mixtas, dado que tanto el emisor como el receptor pueden mezclar
    - El tipo más interesante de PBE con estrategias mixtas suele ser aquel en donde el emisor mezcla, particularmente cuando no hay equilibrios *pooling* o *separating*. No obstante, cualquier jugador puede mezclar
    - Cuando el emisor mezcla en un solo tipo, el PBE se denomina PBE híbrido o *hybrid equilibrium*, mientras que, si mezcla en todos sus tipos, el PBE se denomina PBE completamente mixto o *completely mixed equilibrium*
  - Los juegos de señalización con estrategias mixtas comparten una estructura que incluye los siguientes componentes:
    - La naturaleza escoge un tipo $\theta \in \Theta$ con probabilidad p_θ para el emisor S (jugador 1)
    - Cada tipo de emisor juega una estrategia mixta $\sigma_S \in \Delta M$, por lo que una estrategia mixta del emisor se define como una función $\sigma_S: \Theta_S \to \Delta M$. El emisor tiene un conjunto de acciones rico, en el sentido de que este tiene al menos tantos mensajes como como tipos, y cada mensaje impone un coste diferente para cada tipo
    - El receptor R (jugador 2) observa el mensaje, pero no el tipo del jugador, de modo que actualiza sus creencias μ. Una vez observado, este juega una estrategia mixta $\sigma_R(m) \in \Delta A(m)$ consistente con sus creencias, de modo que una estrategia mixta del receptor se define como una función $\sigma_R: M \to \Delta A(m)$
    - Las recompensas de cada jugador $v_i(\theta_S, \sigma_S, \sigma_R)$ dependen del tipo y las estrategias mixtas de los jugadores. Si las recompensas de los jugadores no dependen de la estrategia mixta del emisor, entonces se está en un juego de charla barata o *cheap talk game*

- Un equilibrio bayesiano perfecto en estrategias mixtas en los juegos de señalización es un triple $(\sigma_s, \sigma_R, \mu)$ que cumple las siguientes condiciones:

  - La racionalidad secuencial del emisor (dada una estrategia s_R) hace que se escoja una estrategia mixta que maximiza la recompensa esperada para cualquier tipo de emisor. En este caso, la recompensa esperada es igual a v_s porque el jugador sabe el estado en el que está y las recompensas de sus decisiones

$$\max_{\sigma_s(\theta)\in\Delta M} E\left[v_s\left(\theta, \sigma_s(\theta), \sigma_R(m)\right)|h, \mu\right] = v_s\left(\theta, \sigma_s(\theta), \sigma_R(m)\right)$$

$$for\ \ \forall\theta \in \Theta$$

  - La racionalidad secuencial del receptor (dado un sistema de creencias μ) hace que se escoja una estrategia mixta que maximiza la recompensa esperada para cualquier mensaje

$$\max_{\sigma_R(m)\in\Delta A(m)} E\left[v_R\left(\theta, m, \sigma_R(m)\right)|h, \mu\right] = \sum_{\theta\in\Theta} \mu(\theta|m) v_R\left(\theta, m, \sigma_R(m)\right)$$

$$for\ \ \forall m \in M$$

  - El sistema de creencias μ es consistente con la estrategia del emisor, de modo que si $p(m) = \sum_{\theta\in\Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m, \theta) > 0$ para cada $m \in M$, entonces:

$$\mu(\theta|m) = \frac{p_\theta \sigma_R(m, \theta)}{\sum_{\theta\in\Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m, \theta)}$$

Juegos dinámicos de información incompleta: algoritmo de solución para juegos de señalización

- El primer paso consiste en encontrar las correspondencias de mejor respuesta en cada conjunto de información para el receptor

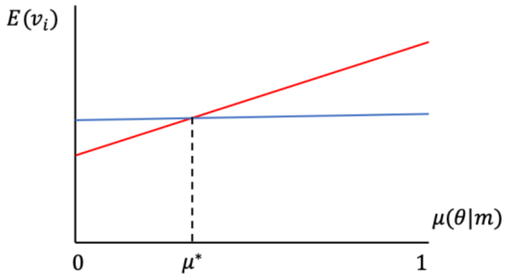
  - Para poder encontrarlas, primero se expresa la recompensa esperada del receptor en términos de sus creencias

$$E\left[v_R\left(\theta, m, \sigma_R(m)\right)|h, \mu\right] = \sum_{\theta\in\Theta} \mu(\theta|m) v_R\left(\theta, m, \sigma_R(m)\right)$$

    - En este caso, las recompensas para cada nodo terminal ya estarán definidas y cada recompensa esperada será una función de las creencias

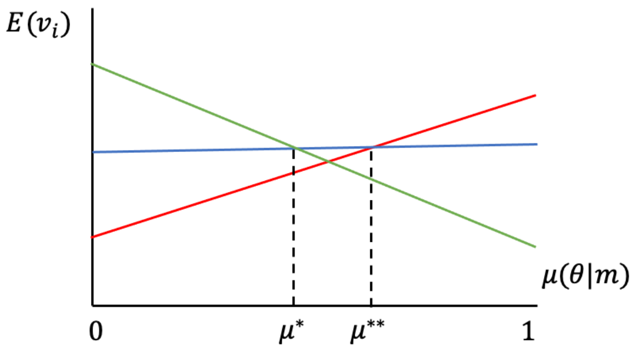
- Después, es necesario analizar la recompensa esperada de las estrategias en función de los posibles valores de $\mu(\theta|m)$. Para ello se suele utilizar un gráfico en el que se representan gráficamente las recompensas esperadas para cada conjunto de información

    - Las intersecciones entre funciones de recompensa esperada pueden indicar una probabilidad o creencia crítica, dado que indican en el punto donde una acción (como función de la creencia) es mejor que otra, por lo que se puede obtener así la correspondencia de mejor respuesta en función de las creencias

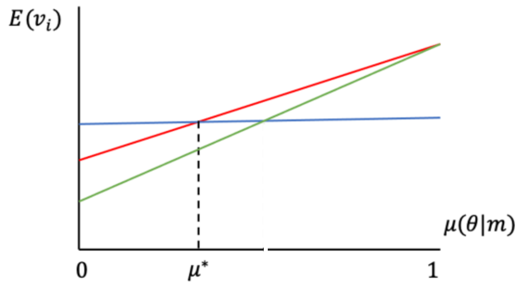


$$BR_{R|m}(\mu) = \begin{cases} a_1 & for\ \mu < \mu^* \\ \{(\sigma_R^1, \sigma_R^2) \in [0,1]^2 | \sum_{a \in A} \sigma_R(a) = 1\} & for\ \mu = \mu^* \\ a_2 & for\ \mu > \mu^* \end{cases}$$

    - No todas las intersecciones entre recompensas esperadas son probabilidades críticas, dado que solo pueden ser probabilidades críticas aquellos puntos en los que la intersección sea con las recompensas esperadas más altas (ya sea una intersección cuando $\mu(\theta|m) = 0$)



    - A través de este método, se pueden descartar estrategias estrictamente dominadas (no las débiles). Las estrategias estrictamente dominadas darán una recompensa esperada menor a otra estrategia para cualquier creencia, mientras que las estrategias débilmente dominadas dan una menor o igual (la función solo intersecta con la débilmente dominante cuando la probabilidad es 1 o 0)



- Las correspondencias de mejor respuesta se obtienen para cada conjunto de información y se utilizarán para plantear los posibles perfiles de estrategia de equilibrio

- El segundo paso consiste en comprobar si se puede reducir el conjunto de perfiles de estrategias que constituirían un equilibrio

  - Para ello, se comprueba si el emisor jugaría ambos mensajes con probabilidad positiva para un tipo concreto (si mezcla entre sus mensajes)

    - Lo primero es hacer una suposición de que un tipo concreto del emisor juega los mensajes con probabilidad positiva, de modo que se supone una estrategia mixta para uno de sus tipos (se suponen casos diferentes en los que se asume que solo un tipo mezcla)

    - A través de la secuencialidad racional del emisor, eso quiere decir que jugando otro mensaje m_2 obtiene una recompensa esperada igual a la de jugar el mensaje m_1. Por lo tanto, se puede ver que acciones del receptor harían esto posible en los conjuntos y así obtener las creencias necesarias para que estas se jueguen

$$E\left[v_S\left(\theta_1, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_1, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right]$$

$$\Rightarrow payoff\ interv. \Rightarrow BR_R(m, \mu) \Rightarrow \mu^*(\theta_1|m_1), \mu^*(\theta_1|m_2)$$

    - Si se necesita mezclar en uno de los conjuntos de información del receptor, entonces se tiene que encontrar la distribución de probabilidad de la mezcla con tal de después saber las recompensas esperadas en cada nodo

$$E\left[v_S\left(\theta_1, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_1, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right] \Rightarrow \sigma(m)$$

    - Después, es necesario ver qué mensaje escogerían los otros tipos del emisor dadas las acciones que tomaría el receptor en los conjuntos de información

- Finalmente, se tiene que ver como afecta el mensaje de los otros tipos del emisor a las creencias de los nodos para esos tipos. De este modo, se comparan las creencias con las creencias que se habían obtenido anteriormente y se intenta encontrar una contradicción. Cuando se encuentra una contradicción, el mensaje con mayor recompensa esperada asumiendo $\mu^*(\theta_1|m)$ es el que se juega en un tipo concreto

$$m_1^*, m_2^* \;\Rightarrow\; \mu(\theta_2|m) \;\Rightarrow\; \mu(\theta_1|m) \neq \mu^*(\theta_1|m)$$

$$\Rightarrow E\left[v_S\left(\theta_1, m_1, \sigma_R(m_1)\right)|\mu^*(\theta_1|m_1)\right] \gtreqless E\left[v_S\left(\theta_1, m_2, \sigma_R(m_2)\right)|\mu^*(\theta_1|m_2)\right]$$

  - Esto permite descartar equilibrios completamente mixtos y equilibrios híbridos, además de acotar el conjunto de posibles PBE

    - Como se plantea que un tipo del emisor juega un mensaje con probabilidad positiva, no se descarta que también juega el otro mensaje con probabilidad positiva, lo cual hace que se suponga una estrategia mixta para un tipo del emisor y se puedan descartar equilibrios híbridos si no hay un PBE con estrategia mixta para ese tipo del emisor

    - Si no hay PBE con estrategia mixta para un tipo del emisor, entonces no habrá un equilibrio completamente mixto

- El tercer paso es encontrar los equilibrios *separating*. Por lo tanto, se plantean los posibles triples que formarían los PBE y se comprueba que no hay desviaciones provechosas

  - El primer paso consiste en plantear los diferentes casos en equilibrio, uno para cada combinación de tipos y mensajes que sean diferentes para cada tipo

$$Suppose\ S_{\theta_1}\ plays\ m_1\ and\ S_{\theta_2}\ plays\ m_2$$

$$Suppose\ S_{\theta_1}\ plays\ m_2\ and\ S_{\theta_2}\ plays\ m_1$$

    - Si se sabe que el emisor jugará un mensaje concreto para uno de sus tipos en equilibrio, entonces se pueden descartar los casos que no contemplen este

  - El segundo paso consiste en definir las creencias del receptor dada la supuesta estrategia del emisor (el mensaje para cada tipo)

    - En este caso, se llega a los conjuntos de información con probabilidad positiva, por lo que es necesario que las creencias sigan la regla de Bayes

$$\mu(\theta|m) = \frac{p_\theta \sigma_R(m,\theta)}{\sum_{\theta\in\Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m,\theta)}$$

$$p(m) = \sum_{\theta\in\Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m,\theta) > 0 \ for \ \forall m \in M$$

- Debido a que a cada tipo le corresponde una acción diferente, la probabilidad de que se de una acción $m \in M$ debe ser la misma a la que se de un tipo de emisor $\theta \in \Theta$ (el mensaje es completamente informativo). De este modo, la probabilidad de estar en el nodo resultante de que el tipo de emisor θ juegue m tiene que ser 1

$$Suppose\ S_{\theta_1}\ plays\ m_1\ and\ S_{\theta_2}\ plays\ m_2$$

$$\mu(\theta_1|m_1) = \frac{p_{\theta_1}}{p(m_1)} = \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_1}} = 1 \quad \mu(\theta_2|m_1) = 1 - \mu(\theta_1|m_1) = 0$$

$$\mu(\theta_1|m_2) = 1 - \mu(\theta_2|m_2) = 0 \quad \mu(\theta_2|m_2) = \frac{p_{\theta_2}}{p(m_2)} = \frac{p_{\theta_2}}{p_{\theta_2}} = 1$$

$$Suppose\ S_{\theta_1}\ plays\ m_2\ and\ S_{\theta_2}\ plays\ m_1$$

$$\mu(\theta_1|m_1) = 1 - \mu(\theta_2|m_1) = 0 \quad \mu(\theta_2|m_1) = \frac{p_{\theta_2}}{p(m_1)} = \frac{p_{\theta_2}}{p_{\theta_2}} = 1$$

$$\mu(\theta_1|m_2) = \frac{p_{\theta_1}}{p(m_2)} = \frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_1}} = 1 \quad \mu(\theta_2|m_2) = 1 - \mu(\theta_1|m_2) = 0$$

- El tercer paso consiste en ver qué acción tomaría el receptor a partir de su correspondencia de mejor respuesta en cada conjunto de información y las creencias derivadas. Entonces, se obtiene un perfil de estrategias en donde el emisor y el receptor definen una acción para cada tipo o conjunto de información

$$s^1 = \big((m_1, m_2), (a_1, a_2)\big) \qquad s^2 = \big((m_2, m_1), (a_2, a_1)\big)$$

$$s^3 = \big((m_1, m_2), (a_2, qa_1 + (1-q)a_2)\big)$$

  - En el caso en el que se tengan dos acciones para las cuales el receptor es indiferente (puede jugar ambas), se plantean dos perfiles de estrategia diferentes para el mismo caso (uno con cada acción para la cual se es indiferente)

- El cuarto paso consiste en ver si para los perfiles de estrategia no hay ninguna desviación provechosa del emisor

        - Para comprobarlo, solo es necesario mirar las acciones del receptor para cada tipo del emisor y ver si, sabiendo que el receptor no cambiaría su acción en sus conjuntos de información (porque piensa que el mensaje es informativo del tipo), el emisor puede obtener una recompensa mayor cambiando el mensaje para cualquiera de sus tipos

        - Los perfiles de estrategia en los que no haya ninguna desviación provechosa serán *separating equilibria*

- El cuarto paso es encontrar los equilibrios *pooling*. Por lo tanto, se plantean los posibles triples que formarían los PBE y se comprueba que no hay desviaciones provechosas

    - El primer paso consiste en plantear los diferentes casos en equilibrio, uno para cada posible mensaje, de modo que el mensaje es el mismo para cada tipo de emisor

$$Suppose\ both\ types\ play\ m_1$$

$$Suppose\ both\ types\ play\ m_2$$

        - Si se sabe que el emisor jugará un mensaje concreto para uno de sus tipos en equilibrio, entonces se pueden descartar los casos que no contemplen este

    - El segundo paso consiste en definir las creencias del receptor dada la supuesta estrategia del emisor (el mensaje para cada tipo)

        - En este caso, se llega solo a uno de los conjuntos de información con probabilidad positiva, por lo que es necesario que las creencias sigan la regla de Bayes en ese conjunto, pero no en el otro

$$\mu(\theta|m) = \frac{p_\theta \sigma_R(m,\theta)}{\sum_{\theta \in \Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m,\theta)}$$

$$p(m) = \sum_{\theta \in \Theta(m)} p_\theta \sigma_R(m,\theta) > 0\ \ for\ \forall m \in M$$

        - Debido a que el jugador juega el mismo mensaje para sus tipos, la probabilidad de que se de una acción $m \in M$ debe ser 1. A partir de eso, la probabilidad de que se de un tipo del emisor $\theta \in \Theta$ dado un mensaje m debe ser la misma probabilidad de que el emisor sea de un tipo $\theta \in \Theta$ (el mensaje no es informativo). Las probabilidades de los

$$Suppose\ both\ types\ play\ m_1$$

$$\mu(\theta_1|m_1) = \frac{p_{\theta_1}}{p(m_1)} = \frac{p_{\theta_1}}{1} = p_{\theta_1} \quad \mu(\theta_2|m_1) = 1 - \mu(\theta_1|m_1) = p_{\theta_2}$$

$$\mu(\theta_1|m_2), \mu(\theta_2|m_2) \in [0,1]$$

$$Suppose\ both\ types\ play\ m_2$$

$$\mu(\theta_1|m_2) = \frac{p_{\theta_1}}{p(m_2)} = \frac{p_{\theta_1}}{1} = p_{\theta_1} \quad \mu(\theta_2|m_2) = 1 - \mu(\theta_1|m_2) = p_{\theta_2}$$

$$\mu(\theta_1|m_1), \mu(\theta_2|m_1) \in [0,1]$$

- El tercer paso consiste en ver qué acción tomaría el receptor a partir de su correspondencia de mejor respuesta en cada conjunto de información y las creencias derivadas. Entonces, se obtiene un perfil de estrategias en donde el emisor y el receptor definen una acción para cada tipo o conjunto de información

    - Si la probabilidad *a priori* de los tipos del emisor son parámetros, se tienen que plantear diversos casos para las probabilidades críticas utilizadas en la correspondencia de mejor respuesta del conjunto de información concreto en el que se asume estar

    - Debido a que no se definen las creencias para los conjuntos de información fuera del camino de equilibrio, es necesario plantear unas creencias tales que hagan que la recompensa esperada del emisor en el otro conjunto de información sea igual o menor a la del conjunto de información de la suposición (para que no haya desviaciones provechosas)

$$E\left[v_S(\theta_1, m_1, a_R^*)|p_{\theta_1}\right] \geq E[v_S(\theta_1, m_1, a_R)|\mu(\theta_1|m_2)] \Rightarrow a_R^*$$

$$\Rightarrow \mu^*(\theta_1|m_2)$$

    - Si se encuentran varias posibles combinaciones, se pueden plantear diversos casos para cada posible combinación de acción y creencias

$$Case\ 1: \left\{(m_1, m_1), (a_1, a_2), \mu(\theta_1|m_1) = p_{\theta_1}, \mu^*(\theta_1|m_2)\right\}$$

$$Case\ 2: \left\{(m_1, m_1), (a_1, a_1), \mu(\theta_1|m_1) = p_{\theta_1}, \mu^*(\theta_1|m_2)\right\}$$

...

- Hay casos en los que la probabilidad *a priori* hace que el receptor sea indiferente entre sus acciones, de modo que este mezcla y se puede obtener un continuo de equilibrios y de recompensas esperadas

- El cuarto paso consiste en ver si para los perfiles de estrategia no hay ninguna desviación provechosa del emisor

  - Para comprobarlo, solo es necesario mirar las acciones del receptor para cada tipo del emisor y ver si, sabiendo que el receptor no cambiaría su acción en sus conjuntos de información (porque piensa que el mensaje es informativo del tipo), el emisor puede obtener una recompensa mayor cambiando el mensaje para cualquiera de sus tipos

  - Los perfiles de estrategia en los que no haya ninguna desviación provechosa serán *pooling equilibria*

- El quinto paso es encontrar los equilibrios híbridos. Para ello, se plantean triples en donde el emisor sigue una estrategia mixta en uno de sus tipos y se comprueba que no hay desviaciones provechosas

  - El primer paso consiste en plantear los diferentes casos en equilibrio, uno para cada tipo del emisor. No obstante, la mayoría de casos en donde se puede mezclar se pueden analizar mientras se analizan los dos tipos de equilibrio

$$Suppose\ \ S_{\theta_1}\ plays\ xm_1 + (1-x)m_2$$

$$Suppose\ \ S_{\theta_2}\ plays\ ym_1 + (1-y)m_2$$

    - Si se sabe que el emisor jugará un mensaje concreto para uno de sus tipos en equilibrio, entonces se pueden descartar aquellos casos que induzcan a un equilibrio híbrido no compatible y asumir que ese tipo del emisor jugará un mensaje concreto

  - El segundo paso consiste en obtener las creencias del receptor dada la secuencialidad racional del receptor y del emisor

    - Como el tipo del emisor mezcla, es necesario que la recompensa esperada de sus acciones sea la misma. Eso hace que, generalmente, sea necesario que el receptor mezcle en alguno de sus conjuntos de información y que, en consecuencia, las creencias tengan que ser igual a la probabilidad crítica μ^*

$$\mu(\theta|m) = \mu^*$$

- A través de la suposición de que el emisor juega una estrategia mixta, se puede plantear una sola ecuación que permita obtener la probabilidad con la que se juega cada mensaje. Solo es necesaria una porque, si el equilibrio es híbrido, entonces hay un tipo para el cual se juega una estrategia pura y eso hace que la creencia para uno de los nodos esté determinada

$$\mu^*(\theta_1|m_1) = \frac{\sigma_1(m_1)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_1)p_\theta} \Rightarrow \sigma_1^*(m_1)$$

- Para saber si es posible un equilibrio híbrido en un rango de probabilidades a *priori* se puede utilizar el sistema anterior y plantear las probabilidades σ_1^* en función de p_θ

$$\mu^*(\theta_1|m_1) = \frac{\sigma_1(m_1)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_1)p_\theta} \Rightarrow \sigma_1^*(m_1, p_\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sigma_1(m_1, p_\theta) \geq 0 \\ \sigma_1(m_1, p_\theta) \leq 1\end{cases} \Rightarrow p_\theta \in \left[\overline{p_\theta}, \underline{p_\theta}\right]$$

- El tercer paso consiste en obtener la distribución de probabilidad con la cual mezcla el receptor para cada conjunto de información

  - Como el tipo del emisor tiene que ser indiferente entre los mensajes para poder mezclar, se puede igualar la recompensa esperada de cada tipo de emisor para cada mensaje y plantear un sistema de ecuaciones que permitirá encontrar la distribución de probabilidad (de mezcla) en cada conjunto de información

$$\begin{cases}E\left[v_S\left(\theta_1, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_1, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right] \\ E\left[v_S\left(\theta_2, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_2, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right]\end{cases} \Rightarrow (q^*, r^*)$$

- Cuando se encuentran las distribuciones de probabilidad, cada estrategia y cada creencia encontrada constituyen un PBE

- El último paso es encontrar los equilibrios completamente mixtos. Para ello, se plantean triples en donde el emisor sigue una estrategia mixta en cada tipo y se comprueba que no hay desviaciones provechosas

  - El primer paso consiste en plantear los diferentes casos en equilibrio, uno para cada posible mezcla que pueda hacer el receptor en cada conjunto de información

$$Suppose\ R\ plays\ qa_1 + (1-q)a_2\ in\ h_1\ and\ \ ra_1 + (1-r)a_2\ \ in\ h_2,$$

$$so\ S_{\theta_1}\ and\ \ S_{\theta_2}\ mix$$

- Debido a que el emisor solo mezcla si es indiferente entre sus mensajes, lo único necesario es plantear aquellos casos para los cuales el receptor mezcla entre sus acciones (lo cual deja indiferente al emisor). Si hay alguna acción pura para la cual el emisor queda indiferente, también se tiene que considerar este caso (la condición es que la recompensa de jugar cada acción sea la misma)

$$Suppose\ R\ plays\ qa_1 + (1-q)a_2\ in\ h_1\ and\ a_2\ in\ h_2$$

$$so\ S_{\theta_1}\ and\ \ S_{\theta_2}\ mix$$

- Si en la correspondencia de mejor tipo del emisor hay más de una estrategia mixta que puede respetar la condición de igualdad de recompensas esperadas, entonces se plantea un caso para cada estrategia mixta diferente

Case 1: Player 2 plays $rU + (1-r)\,M$ after L and $qU + (1-q)\,D$ after R. I find what (if any) strategy for player 2 of this form leaves both types of player 1 indifferent and thus is consistent with PBE: 3

Case 2: Player 2 plays $rM + (1-r)\,D$ after L and $qU + (1-q)\,D$ after R. I find what (if any) strategy for player 2 of this form leaves both types of player 1 indifferent and thus is consistent with PBE:

- Una manera rápida para poder descartar casos es suponiendo que estos se dan y viendo si hay estrategias mixtas estrictamente dominadas. Se ve el rango de recompensas del emisor y si en un conjunto de información el receptor mezcla en un intervalo de recompensas fuera del intervalo del otro para algún tipo, eso significa que siempre se obtendrá una recompensa mayor o menor jugando un mensaje, por lo que se escogería aquel conjunto en donde se mezcla con un intervalo mayor

$$[v_S(\theta_S, m_1, a_1), v_S(\theta_S, m_1, a_2)] \gtreqless [v_S(\theta_S, m_2, a_1), v_S(\theta_S, m_2, a_2)]$$

- El segundo paso consiste en obtener las creencias del receptor dada la secuencialidad racional del receptor y del emisor

  - Como el tipo del emisor mezcla, es necesario que la recompensa esperada de sus acciones sea la misma. Eso hace que, generalmente, sea necesario que el receptor mezcle en alguno de sus conjuntos de información y que, en consecuencia, las creencias tengan que ser igual a la probabilidad crítica μ^*

$$\mu(\theta|m) = \mu^*$$

  - A través de la suposición de que el emisor juega una estrategia mixta, se puede plantear un sistema de ecuaciones que permita obtener la probabilidad con la que se juega cada mensaje. Es necesario utilizar más de una ecuación porque se llega a cada conjunto de información del receptor y la creencia de ningún nodo está determinada

$$\begin{cases} \mu^*(\theta_1|m_1) = \dfrac{\sigma_1(m_1)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_1)p_\theta} \\ \mu^*(\theta_1|m_2) = \dfrac{\sigma_1(m_2)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_2)p_\theta} \end{cases} \Rightarrow\ \sigma_1^*(m_1), \sigma_1^*(m_2)$$

- Para saber si es posible un equilibrio híbrido en un rango de probabilidades a *priori* se puede utilizar el sistema anterior y plantear las probabilidades σ_1^* en función de p_θ

$$\begin{cases} \mu^*(\theta_1|m_1) = \dfrac{\sigma_1(m_1)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_1)p_\theta} \\ \mu^*(\theta_1|m_2) = \dfrac{\sigma_1(m_2)p_{\theta_1}}{\sum_{\theta\in\Theta}\sigma_1(m_2)p_\theta} \end{cases} \Rightarrow\ \sigma_1^*(m_1, p_\theta), \sigma_1^*(m_2, p_\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1(m, p_\theta) \geq 0 \\ \sigma_1(m, p_\theta) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow p_\theta \in \left[\overline{p_\theta}, \underline{p_\theta}\right]$$

- El tercer paso consiste en obtener la distribución de probabilidad con la cual mezcla el receptor para cada conjunto de información

  - Como el tipo del emisor tiene que ser indiferente entre los mensajes para poder mezclar, se puede igualar la recompensa esperada de cada tipo de emisor para cada mensaje y plantear un sistema de ecuaciones que permitirá encontrar la distribución de probabilidad (de mezcla) en cada conjunto de información

$$\begin{cases} E\left[v_S\left(\theta_1, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_1, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right] \\ E\left[v_S\left(\theta_2, m_1, \sigma_R(m_1)\right)\right] = E\left[v_S\left(\theta_2, m_2, \sigma_R(m_2)\right)\right] \end{cases} \Rightarrow (q^*, r^*)$$

- Cuando se encuentran las distribuciones de probabilidad, cada estrategia y cada creencia encontrada constituyen un PBE

* Para poder comprobar si un perfil de estrategias mixtas y de creencias es un PBE, dado un juego de señalización finito de dos jugadores, se puede utilizar el siguiente algoritmo:

  - Primero, hace falta comprobar si las creencias son correctas o no

    - Si las creencias son correctas, entonces estas deberían respetar la regla de Bayes para un perfil de estrategias mixtas del emisor y del receptor

        - Es importante tener en cuenta que, si se juega una estrategia mixta, es necesario que la probabilidad de jugar cada acción sea positiva, dado que de otro modo se jugaría una estrategia pura

        - De no respetar la regla, entonces el triple no es un PBE y se puede descartar

    - Si las creencias son correctas, entonces se comprueba que el equilibrio es secuencialmente racional para ambos jugadores

        - Primero se empieza con el receptor, de modo que utilizando las creencias se tiene que ver si puede conseguir una recompensa esperada más alta escogiendo una acción o una mezcla alternativa (se comprueba si es la mejor respuesta para cada conjunto de información y cada creencia). De ser así, entonces el triple no es un PBE

        - Si el receptor juega una mejor respuesta en cada conjunto de información, entonces se tiene que comprobar que no hay desviaciones provechosas para el emisor dadas las acciones del receptor. Para ello, se comprueba si se obtiene una mayor recompensa esperada escogiendo una acción o mezcla alternativa (se comprueba si es la mejor respuesta para cada conjunto de información y cada creencia). De ser así, entonces el triple no es un PBE

    - Si las creencias son correctas y las estrategias de los jugadores son secuencialmente racionales, entonces el triple es un PBE

Juegos dinámicos de información incompleta: juegos de señalización con reputación

- Es posible incluir varias etapas en los juegos de señalización, de modo que se pueden incluir subjuegos que determinan juegos anteriores

    - Este tipo de juegos de señalización se llaman juegos de reputación, en donde existen diversas etapas

        - Cada etapa suele ser un juego de señalización casi igual en donde cambian las recompensas y las creencias (dado que estas dependen de las rondas posteriores)

    - Estos juegos de señalización se llaman juegos de reputación porque, como se repite unas veces concretas, este permite construir una reputación

        - Cuantas más etapas haya, mayor es la reputación de ser del mejor tipo posible si se imita el mensaje que este mandaría. Si en cada etapa se juega el mensaje, es lógico que el oponente piense que en verdad el tipo es el mejor posible

        - Esta reputación se manifiesta en las creencias del receptor, el cual modifica sus creencias a partir de la información que recibe de los mensajes del emisor y, cuantas más etapas haya, mayor será el rango de probabilidades para las cuales se da un equilibrio concreto

$$n \uparrow \;\Rightarrow\; p \in \left[\underline{p} \uparrow, \overline{p}\right]$$

        - El oponente, al predecir todo esto, juega una acción diferente a la que jugaría de solo haber una etapa (induce que el resultado final será peor si juega otra)

- Este tipo de juegos se pueden resolver mediante el método de inducción hacia atrás, de modo que se analiza la última etapa del juego y después se analizan las anteriores

    - Como se está en la última etapa del juego, entonces la probabilidad de que el emisor sea de un tipo u otro dependerán de las creencias del receptor en esa etapa (las creencias *a priori*)

        - Solo se dan las probabilidades *a priori* de la primera etapa y las etapas del juego dependen de los mensajes y acciones de los jugadores, por lo que estas se consideran parámetros

$$\mu^k(\theta)$$

        - Las creencias de cada nodo dependerán de la etapa en la que se esté

$$\mu^k(\theta|m) \qquad k = game\ stage$$

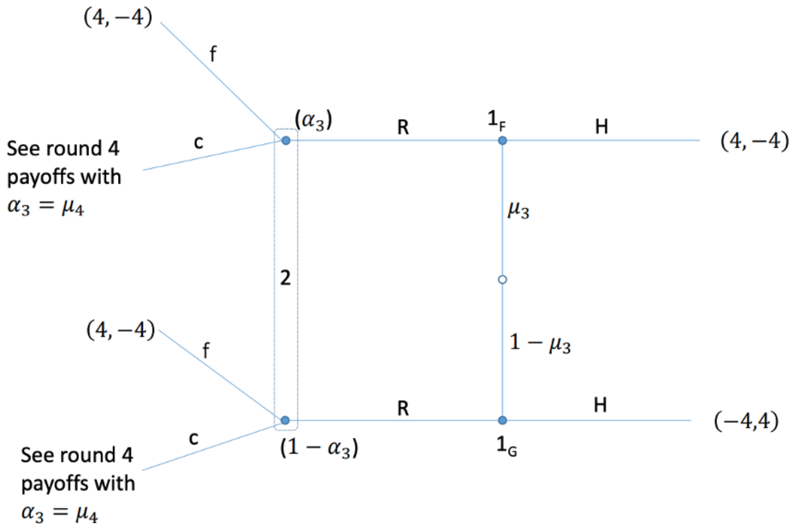
        - Debido a que no pasa nada en el juego entre el momento en que el receptor desarrolla sus creencias *a priori* en la ronda actual y sus creencias posteriores de la ronda anterior, se pueden igualar estas

$$\mu^k(\theta) = \mu^{k-1}(\theta|m)$$

    - Para resolver este juego, se utiliza el mismo algoritmo que se utiliza para los juegos de señalización

- Para plantear los casos de $\mu^k(\theta|m)$, se utilizan las probabilidades críticas de los conjuntos de información del receptor

- Como se igualan las creencias *a priori* con las creencias posteriores de la ronda anterior, se pueden expresar los casos en términos de las creencias posteriores, facilitando así el análisis



- Todo el algoritmo se aplica una vez en cada etapa, y normalmente se plantea todo con creencias como parámetros (aunque se den aquellas *a priori* en la primera etapa)

○ A diferencia de con los juegos de señalización simples, en este tipo de juegos es necesario obtener el valor de la recompensa esperada para cada tipo de jugador y para cada etapa, dado que será la recompensa esperada que tendrá que valorar el receptor en la etapa anterior

- En cada nodo final en el que hay otra etapa del juego, se ponen los valores de las recompensas esperadas para todos los tipos de todos los jugadores divididos en casos según la creencia *a priori* de la etapa siguiente o la creencia posterior en la misma etapa

$$U_{II}(G) \geq U_{II}(T) \iff -10 \geq \frac{-100\alpha_0}{9} - 1 \iff \alpha_0 \geq \frac{81}{100}$$

$$(U_{I_E}, U_{I_N}, U_{II}) = \begin{cases} (10, 10, -10) & \text{if } p > \frac{81}{100} \\ \left(\in \left[\frac{1000}{121}, 10\right], \in [0, 10], -10\right) & \text{if } p = \frac{81}{100} \\ \left(\frac{1000}{121}, 0, -\frac{-1000p}{81}\right) & \text{if } p < \frac{81}{100} \end{cases}$$

- No obstante, como hay más de un posible conjunto de recompensas esperadas, es necesario ver qué acción sería la mejor respuesta para cada uno de los casos y ver si concuerda con los casos encontrados en cada caso

- Para equilibrios híbridos, las recompensas se calculan de la siguiente manera:

$$E[v_S(\sigma_S^*, \sigma_R^*, \mu^*)|\theta] = \sum_{m \in S_S} \sigma_S^*(m) \sum_{a \in S_R} \sigma_R^*(a) E[v_S(m, a, \mu^*)|\theta]$$

$$E[v_R(\sigma_S^*, \sigma_R^*, \mu^*)] = \sum_{\theta \in \Theta} \mu^k(\theta) \sum_{m \in S_S} \sigma_S^*(m) \sum_{a \in S_R} \sigma_R^*(a) E[v_S(m, a, \mu^*)|\theta]$$

- Si el juego es uno de suma cero, entonces se pueden simplificar los cálculos para obtener la recompensa del receptor, de modo que solo es necesario calcular la recompensa esperada del emisor para cada uno de sus tipos y multiplicarlo por -1

$$E[v_R(\sigma_S^*, \sigma_R^*, \mu^*)] = -\left[\sum_{\theta \in \Theta} \mu^k(\theta) E[v_S(\sigma_S^*, \sigma_R^*, \mu^*)|\theta]\right]$$