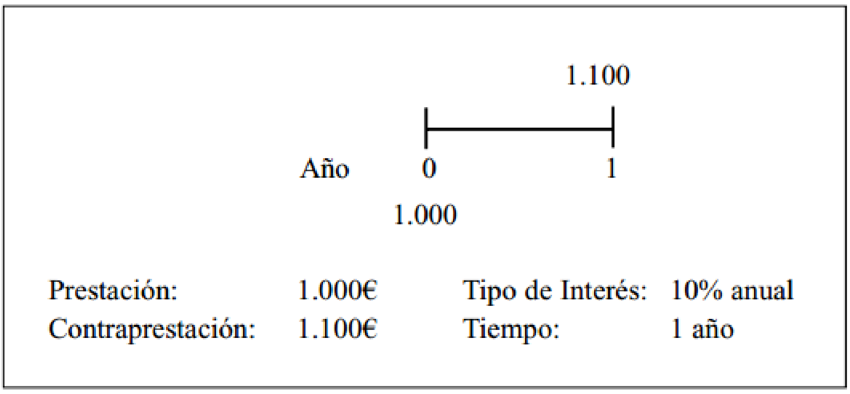
VALORACIÓN DE PRÉSTAMOS

Iker Caballero Bragagnini

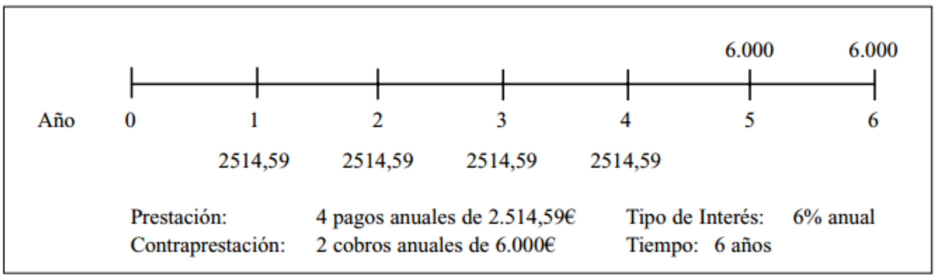
Tabla de contenido

La capitalización y descuentos simples y compuestos

- Una operación financiera es un intercambio temporal de capitales, habiendo diferentes elementos fundamentales y tipos. La matemática financiera permite diferir, actualizar y calcular valores del capital en el tiempo
  - Una operación financiera tiene cuatro elementos fundamentales: la prestación, la contraprestación, la ley financiera y el tiempo



    - La prestación es el capital o los diferentes capitales que constituyen el origen de la operación (los fondos iniciales que se invierten)
    - La contraprestación es el capital o los diferentes capitales entregados a cambio de la prestación (los fondos que se obtendrían a cambio de la inversión)
    - La ley financiera es el modelo empleado para mover el dinero en el tiempo (de capitalización y de descuento)
    - El tiempo es la duración de la operación
  - Una operación financiera puede ser simple o puede ser compleja, y esta queda representada por un flujo de fondos, el cual es un gráfico que representa el tiempo y las entradas y salidas de dinero junto a otros detalles



        - En una operación financiera simple, la prestación y la contraprestación están formadas por un solo capital (se invierte una cantidad y se recibe otra)

        - En una operación financiera compuesta, la prestación, la contraprestación, o ambas, están compuestas por varios capitales (se invierte una o más cantidades y se reciben una o más a lo largo del tiempo)

    - En las operaciones financieras debe haber equilibrio financiero entre la prestación y la contraprestación: ambas magnitudes deben ser equivalentes en el tiempo

        - La ecuación de equilibrio financiero es el instrumento que permite calcular estos equilibrios. Esta ecuación expresa la igualdad que tiene que haber entre la prestación y la contraprestación, y varía dependiendo de la ley financiera que se utilice

        - Esta ecuación permite resolver cuatro tipos de problemas: calcular la contraprestación, calcular la prestación, calcular la ley financiera y el tiempo

- El tipo de interés es el precio del dinero: la rentabilidad que se quiere obtener de nuestras inversiones

    - El tipo de interés, por tanto, se puede expresar como una suma entre la rentabilidad libre de riesgo y una prima de riesgo que se obtiene por soportar el riesgo de la inversión

$$r = risk\text{-}free\ \ profitability + risk\ premium$$

        - Cuanto más arriesgada sea una inversión, mayor la rentabilidad que se quiere obtener con la misma

    - Hay varias formas de expresar el tipo de interés, aunque las más comunes son las siguientes:

$$(a)\ \ Decimal\text{:}\ \ 0.06$$

$$(b)\ \ Percentage\text{:}\ \ 6\%$$

$$(c)\ \ Basis\ points\text{:}\ \ 600bp$$

$$(d)\ \ Percentage\ points\text{:}\ \ 6pp$$

        - Los puntos base se calculan multiplicando el interés en forma porcentual por 100, mientras que los puntos porcentuales ya vienen indicados por la forma porcentual

$$6\% = 6 * 100 = 600bp$$

$$6\% = 6pp$$

- La capitalización simple es una de las leyes que pueden emplearse para valorar el dinero en el tiempo. Utilizar esta ley implica que los intereses son improductivos, de modo que se calculan solo sobre la prestación
    - La fórmula del interés simple se compone de la prestación o principal P, del tipo de interés vencido que se ha pactado r y del tiempo t:

$$Interest = P * r * t$$

        - Tanto r como t tienen que ser homogéneos, de modo que el intervalo de tiempo al que se refieren debe ser iguales (si es anual o una fracción de un año)

$$t = \frac{nº\ of\ periods\ to\ differ\ or\ update}{nº\ of\ periods\ in\ time\ horizon\ of\ r}$$

        - Si se usa una fracción de un año, se tiene que tomar la decisión de si se usa un año natural (365) o un año comercial (360)
    - El valor final de un capital C_t es igual a su valor inicial C_0 más los intereses que este genera

$$C_t = C_0(1 + rt)$$

        - Para calcular el valor actual C_0 aplicando un descuento matemático o racional, se juega con la equivalencia anterior para obtener la siguiente fórmula:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1 + rt)}$$

        - Para calcular el valor actual C_0 utilizando un descuento comercial, se utiliza la siguiente fórmula, en donde d es el tipo de interés anticipado o tipo de descuento:

$$C_0 = C_t(1 - dt)$$

- Por supuesto, las cantidades calculadas aplicando descuento matemático y comercial no son necesariamente equivalentes, por lo que la ley de financiación que uno aplique es relevante

    - En el mundo real hay operaciones en las que no se puede elegir la ley financiera (por ejemplo, en el descuento de letras del tesoro, donde se aplica descuento comercial). No obstante, cuando se pueda elegir, se tiene que escoger aquella más rentable para uno mismo (en donde la prestación sea la menor en la mayoría de casos)

    - El tipo de interés vencido r y el tipo de interés anticipado o descuento d se relacionan de la siguiente manera:

$$r = \frac{d}{1 - dt}$$

- La relación que hay entre el interés nominal r_n, el tipo de interés real r_r y la inflación i es la siguiente:

$$(1 + r_n) = (1 + r_r)(1 + i)$$

    - En este caso, se puede como el interés real y la inflación tienen una correlación negativa, de modo que cuando sube la inflación, el tipo de interés real que se obtendría sería menor

    - En verdad, se puede hacer una aproximación a través de tomar logaritmos para poder bien si el cálculo hecho se acerca o no a lo que debería ser:

$$\log(1 + a) \approx a \quad for\ \ small\ enough\ a$$

$$\Rightarrow\ \log(1 + r_n) = \log(1 + r_r) + \log(1 + i)$$

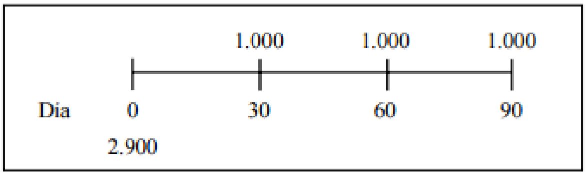
$$\Rightarrow\ r_n \approx r_r + i$$

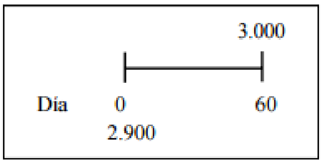
- Cuando se tienen que pagar diferentes capitales con distintos vencimientos y se quiere pagar todo o una parte en una fecha diferente al vencimiento, se pueden usar los conceptos de vencimiento medio y vencimiento común

    - Un conjunto de capitales con distintos vencimientos puede sustituirse por otro capital, suma de los anteriores, si éste se paga en la fecha de vencimiento medio de los capitales iniciales. La fórmula del valor medio (en días) es la siguiente:

$$VM = \frac{\sum Capital * Days\ to\ maturity}{\sum Capital} \quad (days)$$

- El vencimiento medio permite convertir en una operación financiera simple lo que en principio era una operación financiera compleja





- Si se sustituye un conjunto de capitales con distintos vencimientos por otro capital, que no resulta ser igual a la suma de los anteriores, la fecha en la que se paga este capital recibe el nombre de vencimiento común

  - La tasa de recargo es una forma de expresar en porcentaje el coste de una financiación. Esta tasa, sin embargo, no es el tipo de interés de la financiación

    - Para calcular el precio de aquello financiado y el número de cuotas, se tiene que sumar el precio más los intereses y dividir entre el número de cuotas

$$Financed\ price = Original\ Price + Interest$$

$$Payments = \frac{Financed\ price}{Number\ of\ payments}$$

    - Para calcular el tipo de interés de la financiación o el coste de financiación, se utiliza la ecuación de equilibrio financiero $C_0(1+rt) = C_t$ y se despeja r (sabiendo todas las otras cantidades)

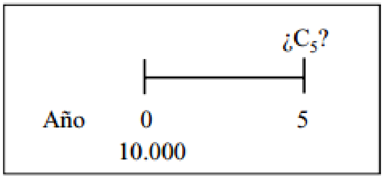
- La capitalización compuesta es la otra ley financiera que puede emplearse para valorar el dinero en el tiempo

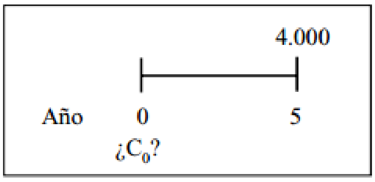
  - Utilizar esta ley supone que cada cierto periodo de tiempo, se calculan los intereses devengados por un capital y se le añaden a este

Año	Deuda inicial	+ Interés	= Deuda final	Deuda en
0			$C_0 = 100$	100
1	100	0,1*100	$C_1 = 100(1+0,1)^1$	110
2	100(1+0,1)	0,1*100(1+0,1)	$C_2 = 100(1+0,1)^2$	121
3	$100(1+0,1)^2$	$0,1*100(1+0,1)^2$	$C_3 = 100(1+0,1)^3$	133,10
4	$100(1+0,1)^3$	$0,1*100(1+0,1)^3$	$C_4 = 100(1+0,1)^4$	146,41
…	………	……………..	…………	………
9	………	……………..	$C_9 = 100(1+0,1)^9$	235,79
…	………	……………..	…………	………
t			$C_t = 100(1+0,1)^t$	depende de «t»

- Esos intereses, al formar ya parte del capital, son capaces de generar intereses en el futuro, por lo tanto, los intereses son productivos

- Para la ley de interés compuesto, la fórmula de interés compuesto es $(1+r)^t$, dado que lo que se genera se tiene que multiplicar por $(1+r)$ cada periodo siguiente





  - Esta fórmula se utiliza multiplicando a un capital C_0 para calcular su valor final C_t

$$C_t = C_0(1+r)^t$$

  - Para poder calcular el valor actual C_0 del capital C_t se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

  - Estas son las ecuaciones de equilibrio financiero que se usan para hacer valoraciones cuando la operación financiera se pacta con la ley de capitalización compuesta

- Aunque en la mayoría de casos se desplaza el capital un número entero de períodos de capitalización del interés, es posible desplazar en el tiempo un capital durante un periodo de tiempos real

  - Cuando t no es un número entero, se dice que uno se quiere desplazar un número entero de años n y una fracción de año $h \in$

[0,1]. Hay dos formas de mover el dinero en el tiempo: el convenio exponencial y el lineal

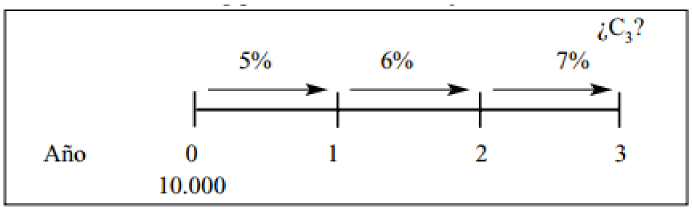
- Si se aplica el convenio exponencial, se emplea la fórmula de interés compuesto para toda la duración de la operación, multiplicando o dividiendo dependiendo de que se quiera diferir o actualizar el capital

$$(1+r)^{n+h} \Rightarrow \begin{cases} C_t = C_0(1+r)^{n+h} \\ C_0 = C_t/(1+r)^{n+h} \end{cases}$$

- Si se aplica el convenio lineal, se usa la fórmula de interés compuesto para los n periodos enteros de capitalización y la de interés simple para la fracción h de período de capitalización. Esta expresión se emplea multiplicando o dividiendo dependiendo de sí se quiere diferir o actualizar el capital

$$(1+r)^n(1+rh) \Rightarrow \begin{cases} C_t = C_0(1+r)^n(1+rh) \\ C_0 = C_t/(1+r)^n(1+rh) \end{cases}$$

- También es posible desplazar en el tiempo un capital cuando varía el tipo de interés a lo largo de la operación financiera



  - Los tipos de interés ahora se indexan según el periodo, de modo que se tienen tipos $r_1, r_2, \ldots, r_t$ y las fórmulas que empleamos son las siguientes:

$$C_t = C_0(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t) = C_0\prod_{j=0}^{t}(1+r_j)$$

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t)} = \frac{C_t}{\prod_{j=0}^{t}(1+r_j)}$$

  - La idea es la misma que antes, pero se tiene que tener en cuenta todos los tipos de interés para cada periodo

- La capitalización fraccionada es un acuerdo por el que los intereses se capitalizan cada fracción de año: cada semestre (capitalización semestral), cada trimestre (capitalización trimestral), cada mes (capitalización mensual), etc.

- La capitalización fraccionada sigue siendo, por tanto, un régimen de capitalización compuesta: los intereses se capitalizan cada fracción de año y son capaces de generar más intereses en el futuro

- La fórmula general válida para todos los casos es la siguiente, donde n ahora es el número de periodos de capitalización que hay en un año y t es el número de años que se desplaza:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- A partir de esta fórmula, es posible obtener la expresión para la capitalización continua (infinitesimal) a través del límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt}$$

- De este modo, las fórmulas de equivalencia financiera serían las siguientes:

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad C_0 = \frac{C_t}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

- Como se puede intuir, el capital calculado difiere dependiendo del tipo de capitalización fraccionada que se utilice. Para poder comparar las diversas capitalizaciones fraccionadas que uno puede escoger, es necesario homogeneizarlas a través de la tasa anual equivalente o TAE

  - La TAE es la homogeneización más común, y se trata de anualizar un interés fraccionado, un interés que se capitalice cada fracción de año. Uno tiende a anualizar porque es costumbre hablar de rentabilidad anual de una inversión, del coste anual de una financiación, etc.

  - Para calcular la TAE se utiliza la siguiente fórmula, la cual anualiza fijando $t = 1$ y restando 1:

$$TAE = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} - 1$$

  - A través de esta tasa, uno puede comparar diferentes inversiones para el mismo horizonte temporal y prestación, pero diferente fraccionamiento, sin necesidad de calcular la contraprestación en t. No obstante, si se calcula la contraprestación usando la TAE para cada año de inversión, se obtiene la misma cantidad que si se usara el interés fraccionado:

$$C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = C_0(1+TAE)^t$$

- Es posible observar tres propiedades importantes de la TAE:

  - El interés nominal coincide con la TAE cuando no se fracciona la capitalización (se juega con un tipo de interés anual con fraccionamiento anual)

  - Cuánto mayor es el fraccionamiento, mayor es la TAE, lo cual se puede demostrar con la derivada de la TAE con respecto a n:

$$\frac{d}{dn}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right] = \left[\ln\left(1+\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{r+n}\right]\left(1+\frac{r}{n}\right)^n > 0$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(1+\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{r+n}\right]\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \approx \left[\frac{r}{n} - \frac{r}{r+n}\right]\left(1+\frac{r}{n}\right)^n > 0$$

  - El incremento de la TAE se va atenuando al ir aumentado el fraccionamiento, lo cual se puede demostrar con la segunda derivada de la TAE con respecto a n:

$$\frac{d^2}{dn^2}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right] =$$

$$= \left[\ln\left(1+\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{r+n}\right]^2\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - \frac{r^2(r+n)^{n-2}}{n^{n+1}} < 0$$

- La TAE no es más que una macrotasa equivalente a un interés que se capitaliza cada fracción de año (se anualiza un interés que se capitaliza cada fracción del año). Es posible, por tanto, pasar de un horizonte temporal a otro

  - La tasa semestral equivalente o TSE se calcula de la siguiente manera:

$$if\ r\ is\ monthly \ \Rightarrow\ TSE = (1+r_{month})^6 - 1$$

$$if\ r\ is\ yearly \ \Rightarrow\ TSE = \left(1+r_{year}\right)^{1/2} - 1$$

  - La tasa trienal equivalente o TTE se calcula de la siguiente manera, donde r es un interés anual y t la cantidad de años en un trienio:

$$if\ r\ is\ monthly \ \Rightarrow\ TTE = (1+r_{month})^{36} - 1$$

$$if\ r\ is\ yearly\ \Rightarrow\ TTE = \left(1 + r_{year}\right)^3 - 1$$

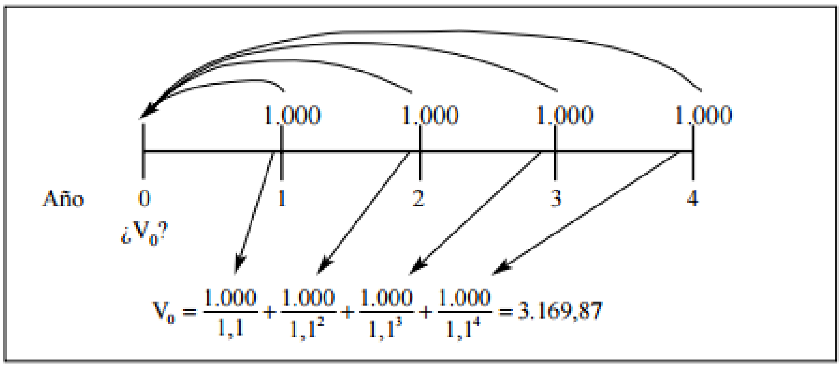
- De este modo, es posible pasar de un tipo de interés que capitalice de modo compuesto (únicamente) para un horizonte temporal a otro con la siguiente fórmula general:

$$r_1 = (1 + r_2)^n - 1$$

$$n = n^{\underline{o}}\ \ of\ periods\ of\ r_2\ in\ time\ horizon\ of\ r_1$$

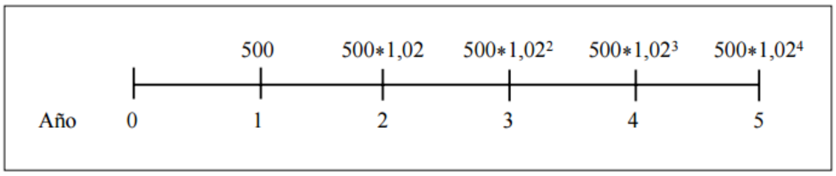
Las rentas fijas

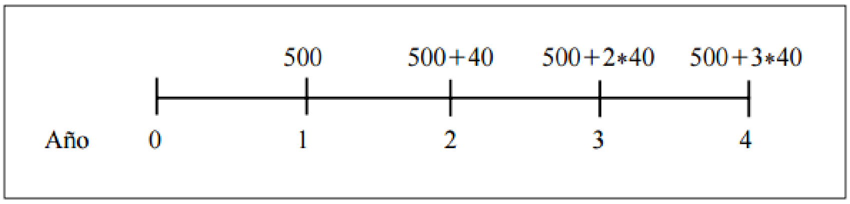
- Una renta o *annuity* es un conjunto de capitales, cada uno de los cuales tiene su propio vencimiento. Cada uno de los capitales que conforma una renta recibe el nombre de término
  - Para calcular el valor actual V_0 o el valor final de una renta V_t, uno tiene que actualizar o diferir cada uno de sus términos



    - Si la renta tiene muchos términos, uno tardaría demasiado tiempo en valorarla de esta forma, se trata de un método poco eficiente. Por lo tanto, se quieren buscar fórmulas más eficientes basadas en el interés compuesto para valorar rentas

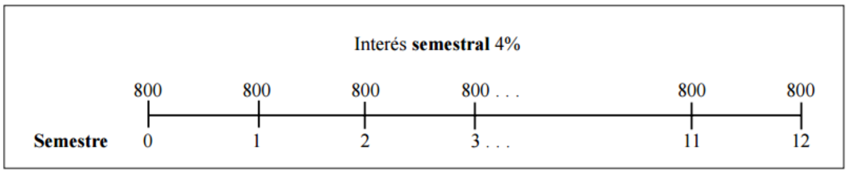
  - Atendiendo al importe de los términos de las rentas, estas pueden ser rentas fijas o rentas variables
    - Cuando las rentas son fijas o *fixed annuities*, todos los términos son iguales, mientras que, si las rentas son variables o *variable annuities*, los términos no son iguales
    - Las rentas variables pueden ser en progresión geométrica, donde sus términos siguen una progresión geométrica, o en progresión aritmética, donde sus términos siguen una progresión aritmética



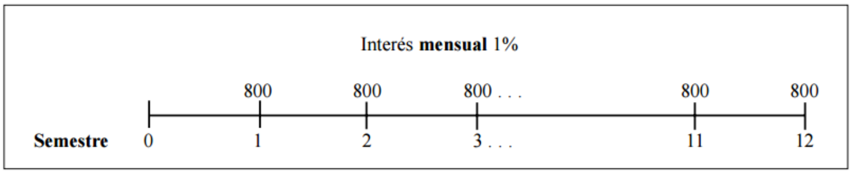


- Dependiendo de la frecuencia de los términos de la renta, las rentas pueden ser enteras, periódicas o fraccionadas

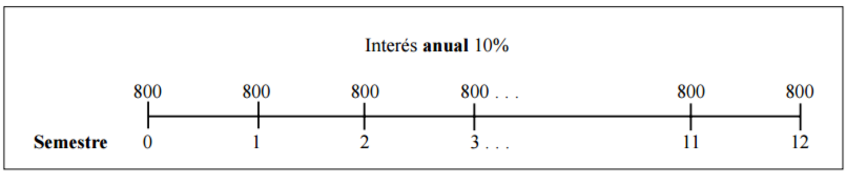
  - Para rentas enteras o *ordinary annuities*, la frecuencia de los términos de la renta coincide con la frecuencia con la que se capitalizan los intereses. Por ejemplo, si el interés es semestral, los términos tienen frecuencia semestral



  - Para rentas periódicas o *periodic annuities*, la frecuencia de los términos de la renta es menor que la frecuencia, o periodicidad, con la que se capitalizan los intereses. Por ejemplo, si el interés es mensual, los términos tienen una frecuencia semestral

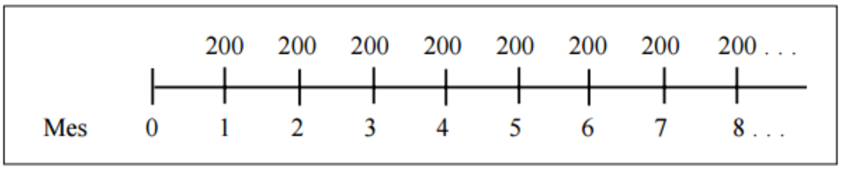


  - Para rentas fraccionadas o *fractional annuities*, la frecuencia de los términos de la renta es mayor que la frecuencia con la que se capitalizan los intereses. Por ejemplo, si el interés es anual, los términos tienen una frecuencia semestral



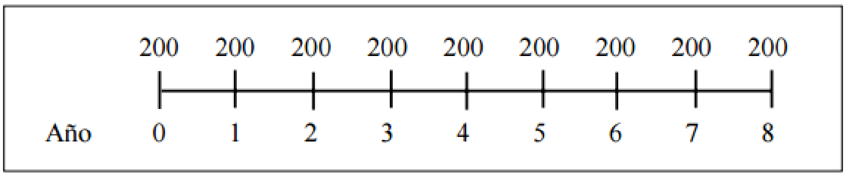
- Atendiendo a la situación del primer término de la renta, estas rentas pueden ser inmediatas o no inmediatas

- Para rentas inmediatas o *inmediate annuities*, el primer término de la renta se encuentra al final del primer periodo de la renta. Por ejemplo, si la renta es anual, el primer término se encuentra al final del primer año

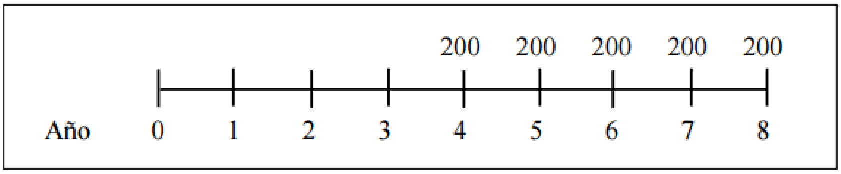


- Para rentas no inmediatas o *non-inmediate annuities*, el primer término de la renta no se encuentra al final del primer periodo de la renta. Dentro de las rentas no inmediatas hay las anticipadas y las diferidas

- Las rentas anticipadas o *anticipated annuities* son aquellas en las que el primer término de la renta se encuentra en algún momento anterior al que correspondería una renta inmediata. Por ejemplo, una renta anual cuyo primer término está en el año 0

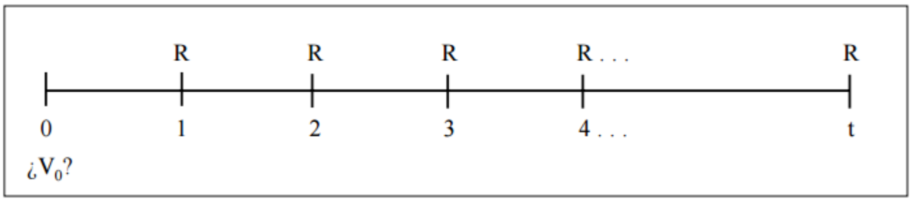


- Las rentas diferidas o *deferred annuities* son aquellas en las que el primer término de la renta se encuentra en el algún momento posterior al que correspondería a una renta inmediata. Por ejemplo, una renta anual cuyo primer término está en algún año después del primero



- Ahora se plantean diferentes métodos y casos para poder valorar rentas fijas de diversa índole

  - Para poder obtener el valor actual y final de rentas fijas, enteras y temporales, se plantea un caso general con rentas con flujos R:



- Para calcular el valor de la renta, normalmente se tendría que utilizar la actualización de sus términos:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)} + \frac{R}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+r)^t}$$

- No obstante, se puede obtener la siguiente fórmula a partir de ver que se tiene una serie geométrica:

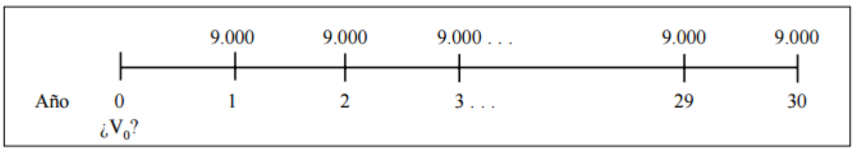
$$V_0 = R\sum_{j=1}^{t} \frac{1}{(1+r)^j} = R\sum_{j=1}^{t} \left(\frac{1}{1+r}\right)^j =$$

$$= R\left(\frac{1}{1+r}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^t}{1-\frac{1}{1+r}} = R\left(\frac{1}{1+r}\right)\frac{\frac{(1+r)^t-1}{(1+r)^t}}{\frac{r}{1+r}} =$$

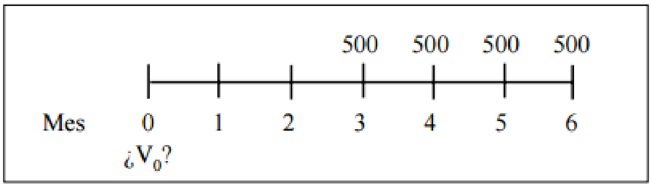
$$= R\,\frac{1-(1+r)^{-t}}{r} = \frac{\frac{(1+r)^t-1}{(1+r)^t}}{r} = \frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} \quad or \quad V_0 = \frac{1-(1+r)^{-t}}{r}$$

- El resultado es el valor de los t términos de la renta para un interés de r antes del primer término. Si la renta es inmediata, entonces representa el valor en el momento 0

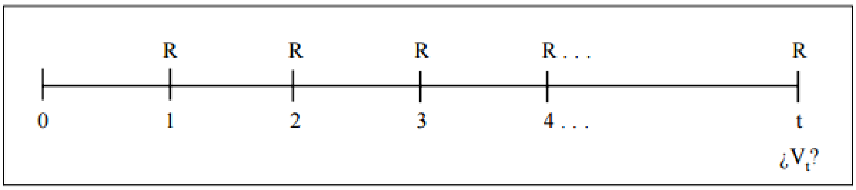


- De no ser inmediata, entonces t ya no coincide con el periodo final, sino que como representa el número de términos en la renta, en la fórmula se tiene que reducir por el número de periodos en los que no hay ningún término s y actualizar para los periodos en donde no haya renta. Así, la interpretación queda intacta



$$V_0 = \frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t} \frac{1}{(1+r)^s} = \frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^{t+s}}$$

- Si se quiere buscar el valor final V_t, en cambio, se puede plantear otro problema general similar al anterior

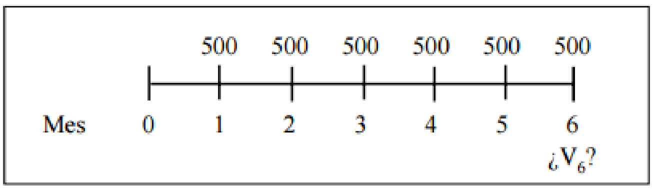


  - Para calcular el valor final, podríamos diferir el valor actual y volver a hacer una derivación similar a la anterior. No obstante, se puede diferir el valor actual usando la fórmula anterior y obtener la siguiente fórmula:

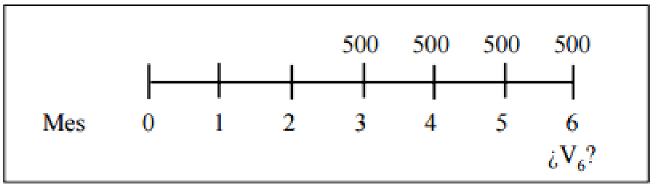
$$V_t = V_0(1+r)^t \;\Rightarrow\; V_t = \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t}(1+r)^t\right]$$

$$\Rightarrow\; V_t = \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

  - El resultado es el valor de los t términos de la renta para un interés de r, valorado en el periodo del último término. Si la renta es inmediata, entonces representa el valor en el momento t

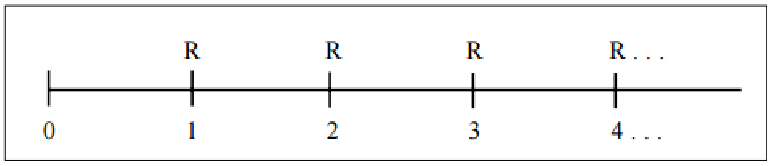


  - De no ser inmediata, como t es el número de términos que hay (independientemente de si hay periodos donde no hay ingresos), la interpretación y la fórmula quedan intactas



$$V_t = \frac{(1+r)^t - 1}{r} \quad (t = 4)$$

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas fijas, enteras e indefinidas
    - Suponiendo que se tiene que calcular el valor cual de una renta cuyos flujos son infinitos, se pueden obtener los siguientes resultados:



- Para calcular el valor actual, se debería utilizar la fórmula de la actualización

$$V_0 = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \frac{R}{(1+r)^3} + \cdots$$

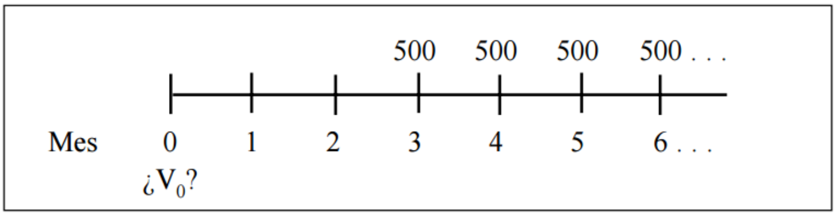
- No obstante, se pueden usar resultados de las series infinitas geométricas para obtener una fórmula más sencilla:

$$V_0 = R\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} = R\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \frac{R}{1-1+r} = \frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow \; V_0 = \frac{R}{r}$$

- El resultado de esta fórmula actualiza los infinitos términos de una renta fija, entera, indefinida o perpetua y los valora en un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

- Igual que antes, si la renta no es inmediata, entonces se tiene que descontar también para aquellos s periodos en donde no hay ningún término



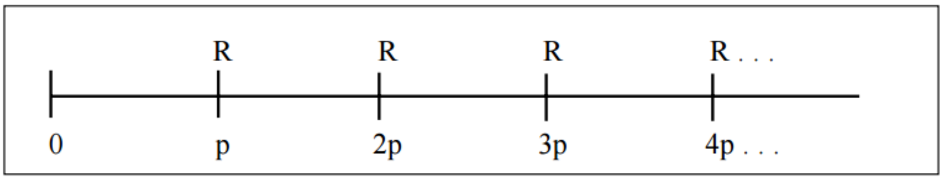
$$V_0 = \frac{R}{r}\frac{1}{(1+r)^s} = \frac{R}{r(1+r)^s}$$

- Para calcular el valor final de rentas indefinidas no existe ninguna fórmula

$$V_t = V_0(1+r)^{\infty} = \frac{R}{r}(1+r)^{\infty} = \infty$$

  - Debido a que hay infinitos términos, el valor final es infinito

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas fijas, periódicas e indefinidas
  - Suponiendo que se tiene que calcular el valor cual de una renta cuyos flujos son infinitos, se pueden obtener los siguientes resultados:



  - Para calcular el valor actual de esta renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R}{(1+r)^{2p}} + \frac{R}{(1+r)^{3p}} + \cdots$$

  - Utilizando resultados sobre series geométricas, es posible obtener la siguiente fórmula:

$$V_0 = R\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^{jp}} = R\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^p\right]^j = \frac{\frac{R}{(1+r)^p}}{1-\frac{1}{(1+r)^p}} =$$

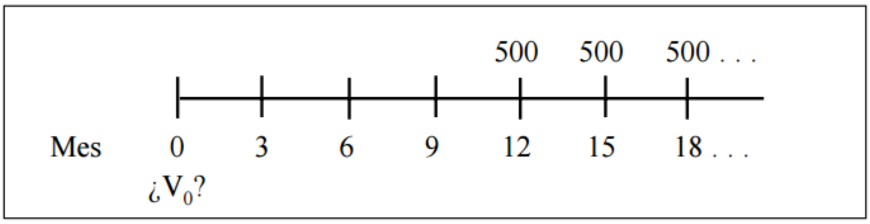
$$= \frac{\frac{R}{(1+r)^p}}{\frac{(1+r)^p-1}{(1+r)^p}} = \frac{R}{(1+r)^p-1}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{(1+r)^p - 1}$$

- Esta fórmula actualiza los infinitos términos de la renta y valora en p periodos de capitalización a un interés de r antes del primer término

- Como la renta es indefinida, su valor final también vuelve a ser infinito

  - Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho



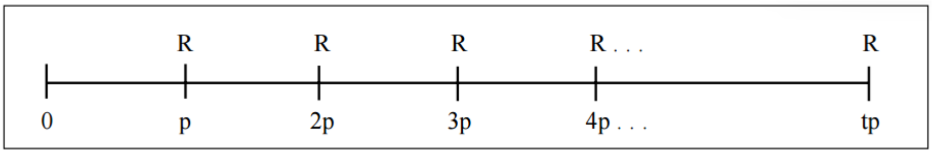
- En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p - 1}\frac{1}{(1+r)^{s-p+1}}$$

- Así, la interpretación de la fórmula es equivalente a la fórmula anterior

- Finalmente, se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas fijas, periódicas y temporales

  - Suponiendo que se tiene que calcular el valor cual de una renta cuyos flujos son infinitos, se pueden obtener los siguientes resultados:



- Para calcular el valor actual de esta renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R}{(1+r)^{2p}} + \frac{R}{(1+r)^{3p}} + \cdots + \frac{R}{(1+r)^{tp}}$$

- Utilizando resultados sobre series geométricas, es posible obtener la siguiente fórmula:

$$V_0 = R\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{(1+r)^{jp}} = R\sum_{j=1}^{t}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{p}\right]^{j} =$$

$$= R\frac{\frac{1}{(1+r)^{p}}-\frac{1}{(1+r)^{(t+1)p}}}{1-\frac{1}{(1+r)^{p}}} = R\frac{\frac{1-(1+r)^{-tp}}{(1+r)^{p}}}{\frac{(1+r)^{p}-1}{(1+r)^{p}}} =$$

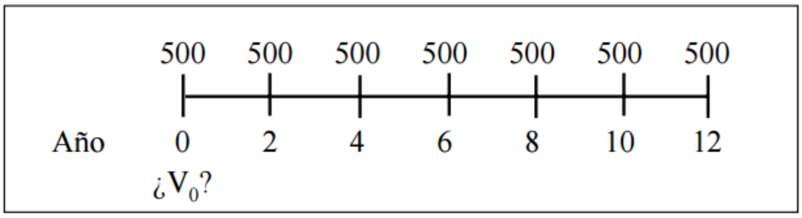
$$= R\frac{1-\frac{1}{(1+r)^{tp}}}{(1+r)^{p}-1} = R\frac{\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{tp}}}{(1+r)^{p}-1} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^{tp}}\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{p}-1}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^{tp}}\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{p}-1}$$

- Esta fórmula actualiza los t términos de una renta y los valora en p periodos de capitalización con un tipo de interés r antes del primer término

- Si la renta no es inmediata y se tiene un término en el año o momento 0, entonces se tiene que afectar la fórmula teniendo en cuenta ese término extra. En este preciso caso, $s = 0$ y $p = 2$:



$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^{tp}}\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{p}-1}(1+r)^{s-p}$$

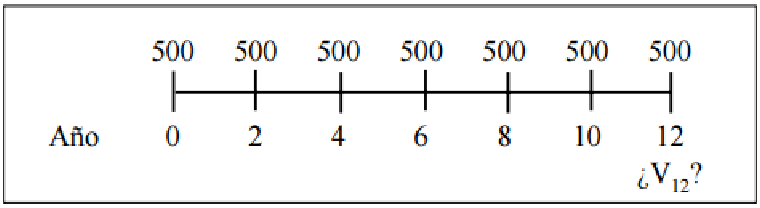
- Para obtener la fórmula del valor final, entonces solo se tiene que hacer la misma técnica que se vio anteriormente:

$$V_t = V_0(1+r)^{tp}\ \ \Rightarrow\ \ V_t = \frac{R}{(1+r)^{tp}}\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{p}-1}(1+r)^{tp}$$

$$\Rightarrow\ V_t = R\frac{(1+r)^{tp}-1}{(1+r)^{p}-1}$$

        - Esta fórmula difiere los t términos de una renta y los valora en el periodo que se encuentra el último término

        - Si la renta no es inmediata y se tiene un término en el año o momento 0, la fórmula no se afecta y se puede aplicar de manera equivalente



- También es posible comentar las metodologías que se usan para valorar rentas fraccionadas

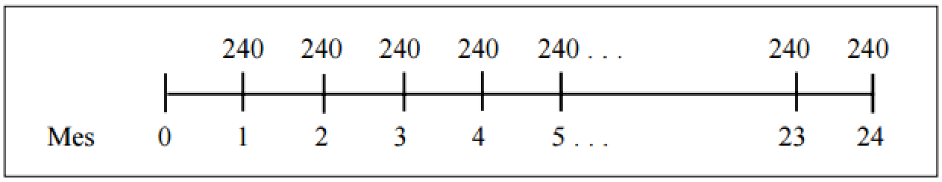
    - Son rentas cuya frecuencia es mayor que la de la capitalización del interés, lo cual supone que a lo largo de un periodo de capitalización del interés se producen varios términos de renta

        - Las rentas fraccionadas no tienen fórmulas específicas, por lo que se emplean las fórmulas de rentas enteras

    - Hay dos métodos de valoración de estas rentas, los cuales dependen de las condiciones prácticas de capitalización que se aplican a las fracciones de periodo de capitalización del interés

        - Estos dos métodos son el de interés compuesto y el de interés simple aplicado a las fracciones de periodo de capitalización del interés

    - En el caso del interés compuesto, lo importante es primero pasar el tipo de interés con un horizonte temporal mayor a un tipo de interés con un horizonte temporal menor, y después se aplica la fórmula adecuada dependiendo del tipo de renta



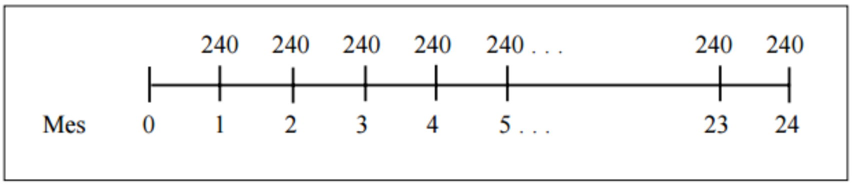
$$r_1 = (1 + r_2)^n - 1$$

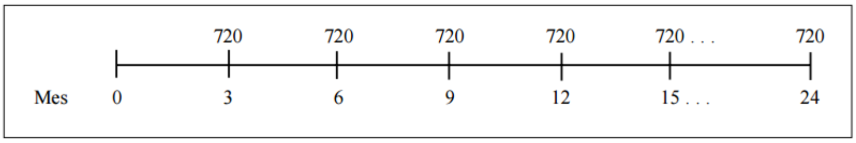
$$n = nº\ of\ periods\ of\ r_2\ in\ time\ horizon\ of\ r_1$$

- La fórmula dependerá, en cada caso, de la clasificación para la renta

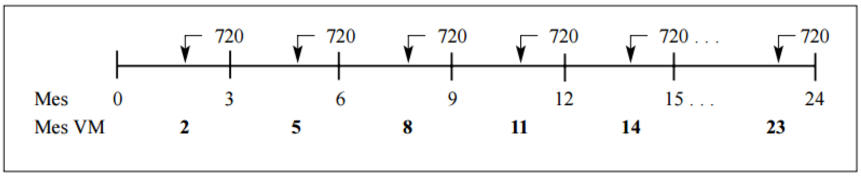
- En el caso del interés simple, hay que seguir un procedimiento un poco más complejo

  - El primer paso es que hay que agrupar (sumar) los términos fraccionados a lo largo del periodo de capitalización deseado (para cada periodo p)





  - Después, se calcula el vencimiento medio de estos nuevos flujos (utilizando, por tanto, una nueva p) debido a que el vencimiento al agrupar estos no es el mismo que poniéndolo como al final de los periodos p anteriores



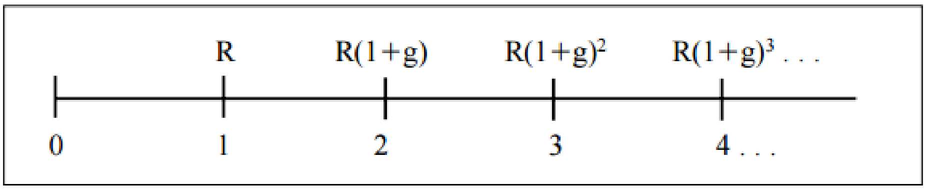
  - Finalmente, se calcula el factor corrector adecuado para cada caso junto a la fórmula de la renta correspondiente al problema, donde t es el tiempo (homogéneo al tipo de interés r, en la forma del interés compuesto simple)

$$V_0 = Formula * (1 + rt)$$

Las rentas en progresión geométrica

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión geométrica, enteras e indefinidas

  - Suponiendo que se tiene una renta geométrica, entera, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



- Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{1+r} + \frac{R(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{R(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} R\frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = R\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}} \ \Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \left(\frac{R}{1+r}\right)\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \left(\frac{R}{1+r}\right)\frac{1+r}{r-g} = \frac{R}{r-g}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{r-g}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración y g es la tasa de crecimiento. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

- Cuando $r = g$, entonces la serie geométrica no converge porque los términos son iguales a 1 (no son menores a 1 en valor absoluto) y su valor presente es infinito:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{\infty} R\frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} R\frac{(1+r)^i}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1+r}{1+r}\right)^i = \frac{R}{1+r}\sum_{i=1}^{\infty} 1^i = \infty$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \infty$$

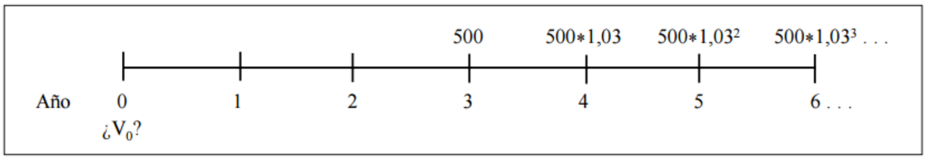
- Cuando $r < g$, entonces la serie geométrica no converge porque los términos son mayores a 1 (no son menores a 1 en valor absoluto) y su valor presente es infinito:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{\infty} R \frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{1+r} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i = \frac{R}{1+r} \infty = \infty$$

$$\Rightarrow V_0 = \infty$$

- Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



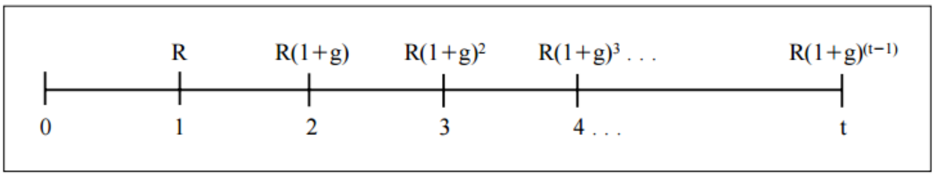
  - En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \frac{R}{r-g} \frac{1}{(1+r)^s}$$

  - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión geométrica, enteras y temporales

  - Suponiendo que se tiene una renta geométrica, entera, temporal e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



    - Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{1+r} + \frac{R(1+g)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \sum_{i=0}^{t-1} R\frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i = \frac{R}{1+r}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i =$$

$$= \left(\frac{R}{1+r}\right)\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t}{1-\frac{1+g}{1+r}} = R\,\frac{\left(\frac{1+r}{1+r}\right)^t - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t}{r-g} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^t}\frac{(1+r)^t-(1+g)^t}{r-g}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^t}\frac{(1+r)^t-(1+g)^t}{r-g}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento y t el número de términos de la renta. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

- En el caso en que $r = g$, entonces la fórmula se simplifica a una anteriormente vista:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{t-1} R\frac{(1+g)^i}{(1+r)^{i+1}} = \sum_{i=0}^{t-1} R\frac{(1+r)^i}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{1+r}{1+r}\right)^i = \frac{R}{1+r}\sum_{i=1}^{t}1^i = \frac{R}{1+r}t$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{1+r}t$$

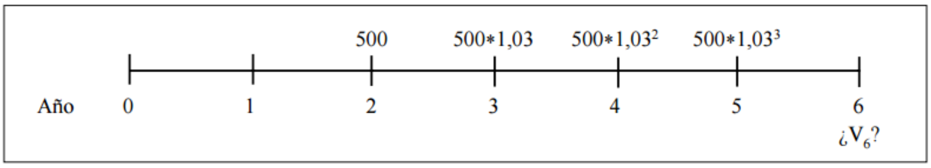
- Para obtener la fórmula del valor final, entonces solo se tiene que hacer la misma técnica que se vio anteriormente:

$$V_t = V_0(1+r)^t = \left[\frac{R}{(1+r)^t}\frac{(1+r)^t-(1+g)^t}{r-g}\right](1+r)^t$$

$$\Rightarrow\ V_t = R\,\frac{(1+r)^t-(1+g)^t}{r-g}$$

        - Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el periodo en el que se encuentra el último término

    - Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



        - En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término antes del primero, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^s} \frac{(1+r)^t - (1+g)^t}{r-g}$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos

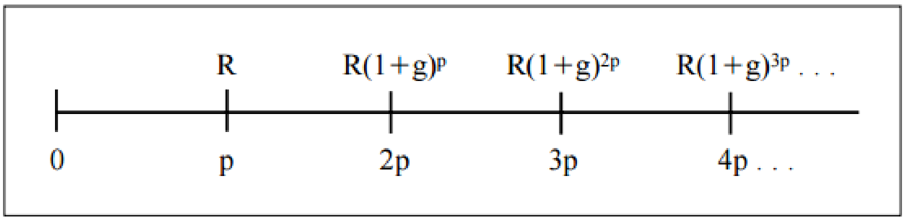
        - En este caso, es necesario diferir también para los k periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_t = R \frac{(1+r)^t - (1+g)^t}{r-g} (1+r)^k$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento, el número de términos de la renta y k el número de periodos después del último término. Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el último periodo en el que se encuentra el término, pero tiene en cuenta los k periodos después del último término

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión geométrica, periódicas e indefinidas

    - Suponiendo que se tiene una renta geométrica, periódica, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



- Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R(1+g)^p}{(1+r)^{2p}} + \frac{R(1+g)^{2p}}{(1+r)^{3p}} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} R \frac{(1+g)^{pi}}{(1+r)^{p(i+1)}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+g}{1+r} \right)^p \right]^i = \frac{R}{(1+r)^p} \frac{1}{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^p} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^p} \frac{(1+r)^p}{(1+r)^p - (1+g)^p} = \frac{R}{(1+r)^p - (1+g)^p}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^p - (1+g)^p}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento, t el número de términos de la renta y p es cada cuántos periodos de capitalización del interés vencen los términos de renta. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora en p periodos de capitalización r de interés antes del primer término

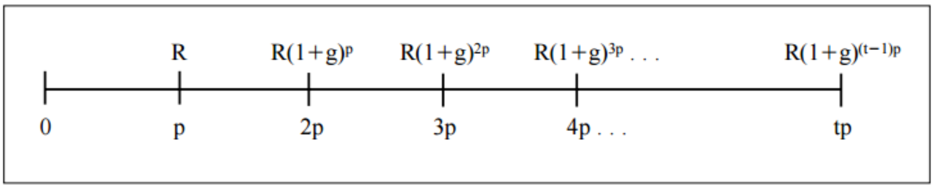
- En el caso en que $r = g$, entonces la serie geométrica no converge porque los términos son iguales a 1 (no son menores a 1 en valor absoluto) y su valor presente es infinito:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{\infty} R \frac{(1+g)^{pi}}{(1+r)^{p(i+1)}} = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+r}{1+r} \right)^p \right]^i$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{\infty} 1^i = \infty$$

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión geométrica, periódicas e indefinidas

- Suponiendo que se tiene una renta geométrica, periódica, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



  - Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R(1+g)^p}{(1+r)^{2p}} + \cdots + \frac{R(1+g)^{(t-1)p}}{(1+r)^{tp}} = \sum_{i=0}^{t-1} R \frac{(1+g)^{pi}}{(1+r)^{p(i+1)}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{t-1} \left[\left(\frac{1+g}{1+r} \right)^p \right]^i = \frac{R}{(1+r)^p} \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^{pt}}{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^p} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^p} \frac{\frac{(1+r)^{pt} - (1+g)^{pt}}{(1+r)^{pt}}}{\frac{(1+r)^p - (1+g)^p}{(1+r)^p}} = \frac{R}{(1+r)^{pt}} \frac{(1+r)^{pt} - (1+g)^{pt}}{(1+r)^p - (1+g)^p}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{(1+r)^{pt}} \frac{(1+r)^{pt} - (1+g)^{pt}}{(1+r)^p - (1+g)^p}$$

  - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento, t el número de términos de la renta y p es cada cuántos periodos de capitalización del interés vencen los términos de renta. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora en un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

  - En el caso en que $r = g$, entonces la fórmula se simplifica a una anteriormente vista:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{t-1} R \frac{(1+g)^{pi}}{(1+r)^{p(i+1)}} = \sum_{i=0}^{t-1} R \frac{(1+r)^{pi}}{(1+r)^{p(i+1)}} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{(1+r)^{pi}}{(1+r)^{pi}} = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{t-1} 1^i = \frac{R}{(1+r)^p} t$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} t$$

- Para obtener la fórmula del valor final, entonces solo se tiene que hacer la misma técnica que se vio anteriormente:

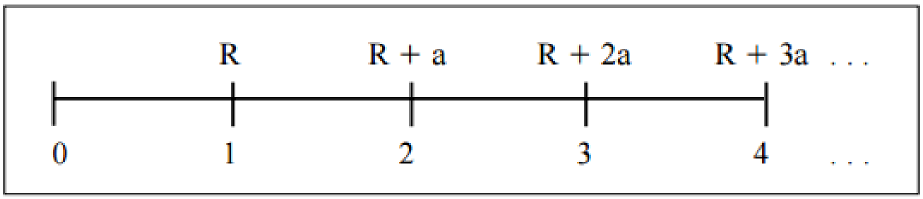
$$V_{tp} = V_0(1+r)^{tp} = \left[\frac{R}{(1+r)^{pt}} \frac{(1+r)^{pt} - (1+g)^{pt}}{(1+r)^p - (1+g)^p}\right](1+r)^{pt}$$

$$\Rightarrow V_t = R \frac{(1+r)^{pt} - (1+g)^{pt}}{(1+r)^p - (1+g)^p}$$

  - Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el periodo en el que se encuentra el último término

Las rentas en progresión aritmética

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión aritmética, enteras e indefinidas
  - Suponiendo que se tiene una renta aritmética, entera, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



  - Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{1+r} + \frac{R+a}{(1+r)^2} + \frac{R+2a}{(1+r)^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R+ia}{(1+r)^{i+1}}$$

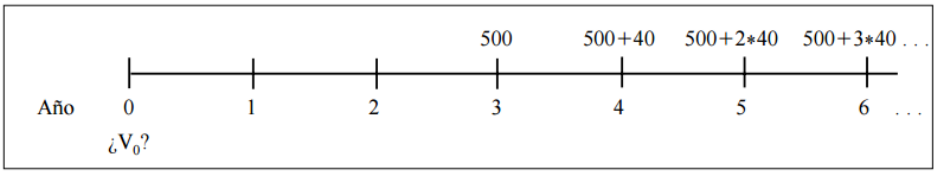
$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^i} + \frac{a}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{(1+r)^i} =$$

$$= \frac{R}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} + \frac{a}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{(1+r)^i} = \frac{R}{r} + \frac{a}{r^2}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{r} + \frac{a}{r^2}$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de progresión. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

    - Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



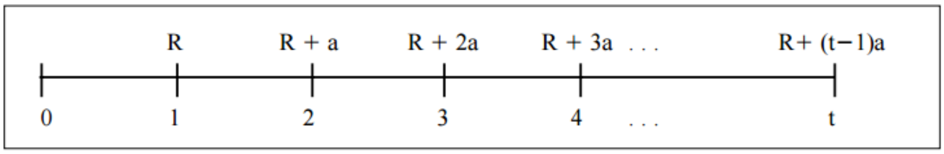
        - En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \frac{R}{r} + \frac{a}{r^2}\frac{1}{(1+r)^s}$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión aritmética, enteras y temporales

    - Suponiendo que se tiene una renta aritmética, entera, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



        - Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{1+r} + \frac{R+a}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R+(t-1)a}{(1+r)^t} = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{R+ia}{(1+r)^{i+1}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{1+r}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+r)^i} + \frac{a}{1+r}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{i}{(1+r)^i} =$$

$$= \frac{R}{1+r}\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^t}{1-\frac{1}{1+r}} + \frac{a}{1+r}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{i}{(1+r)^i} =$$

$$= R\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} + \frac{a}{r}\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} - \frac{at}{r(1+r)^t}$$

$$\Rightarrow V_0 = \left(R+\frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} - \frac{at}{r(1+r)^t}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de progresión y t es el número de términos. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

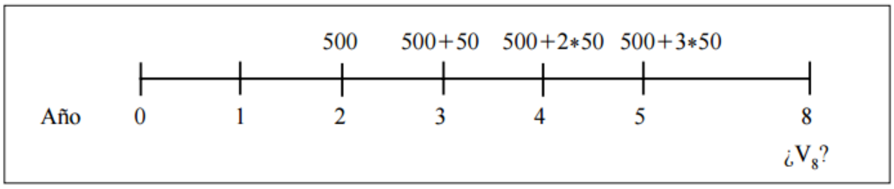
- Para obtener la fórmula del valor final, entonces solo se tiene que hacer la misma técnica que se vio anteriormente:

$$V_t = V_0(1+r)^t = \left[\left(R+\frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} - \frac{at}{r(1+r)^t}\right](1+r)^t$$

$$\Rightarrow V_t = \left(R+\frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t-1}{r} - \frac{at}{r}$$

- Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el periodo en el que se encuentra el último término

- Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



- En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término antes del primero, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \left[\left(R+\frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} - \frac{at}{r(1+r)^t}\right]\frac{1}{(1+r)^s}$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos

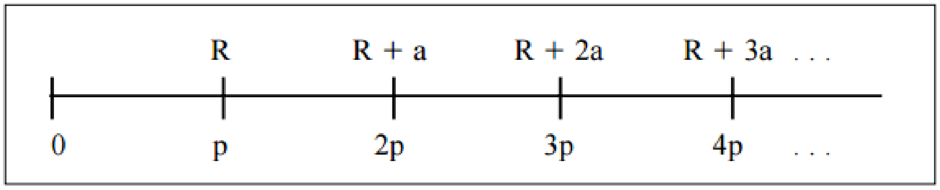
        - En este caso, es necesario diferir también para los k periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_t = \left[\left(R + \frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t - 1}{r} - \frac{at}{r}\right](1+r)^k$$

        - En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, g es la tasa de crecimiento, el número de términos de la renta y k el número de periodos después del último término. Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el último periodo en el que se encuentra el término, pero tiene en cuenta los k periodos después del último término

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión aritmética, periódicas e indefinidas

    - Suponiendo que se tiene una renta aritmética, periódica, indefinida e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



        - Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R+a}{(1+r)^{2p}} + \frac{R+2a}{(1+r)^{3p}} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R+ia}{(1+r)^{p(i+1)}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^p}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{[(1+r)^p]^i} + \frac{a}{(1+r)^p}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{[(1+r)^p]^i} =$$

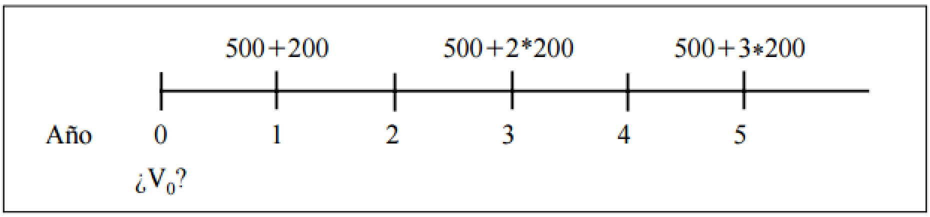
$$= \frac{R}{(1+r)^p} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r)^p}} + \frac{a}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{[(1+r)^p]^i} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^p - 1} + \frac{a}{[(1+r)^p - 1]^2}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{R}{(1+r)^p - 1} + \frac{a}{[(1+r)^p - 1]^2}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de progresión. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora en p periodos de capitalización r de interés antes del primer término

- Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



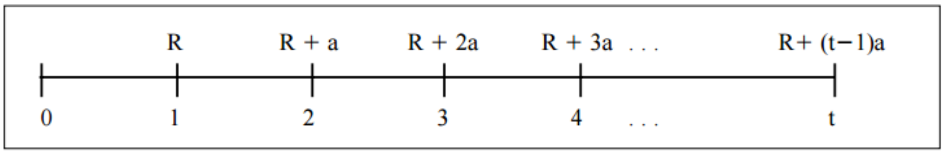
- En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \left(\frac{R}{(1+r)^p - 1} + \frac{a}{[(1+r)^p - 1]^2}\right) \frac{1}{(1+r)^{s-p+1}}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los infinitos términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos

- Se pueden obtener diversas fórmulas y metodologías para valorar rentas de progresión aritmética, periódicas y temporales

  - Suponiendo que se tiene una renta aritmética, periódica, temporal e inmediata, se pueden obtener los siguientes resultados:



- Para calcular el valor actual de la renta, se descuentan sus términos y se simplifica la expresión resultante:

$$V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} + \frac{R+a}{(1+r)^{2p}} + \cdots + \frac{R+(t-1)a}{(1+r)^{tp}} = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{R+ia}{(1+r)^{p(i+1)}}$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{R}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{[(1+r)^p]^i} + \frac{a}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{i}{[(1+r)^p]^i} =$$

$$= \frac{R}{(1+r)^p} \frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^{pt}}}{1-\dfrac{1}{(1+r)^p}} + \frac{a}{(1+r)^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{[(1+r)^p]^i} =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{pt}} \left[\left(R + \frac{a}{(1+r)^p - 1} \right) \frac{(1+r)^{pt}-1}{(1+r)^p - 1} - \frac{at}{(1+r)^p - 1} \right]$$

$$\Rightarrow\ V_0 = \frac{1}{(1+r)^{pt}} \left[\left(R + \frac{a}{(1+r)^p - 1} \right) \frac{(1+r)^{pt}-1}{(1+r)^p - 1} - \frac{at}{(1+r)^p - 1} \right]$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de progresión y t es el número de términos. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término

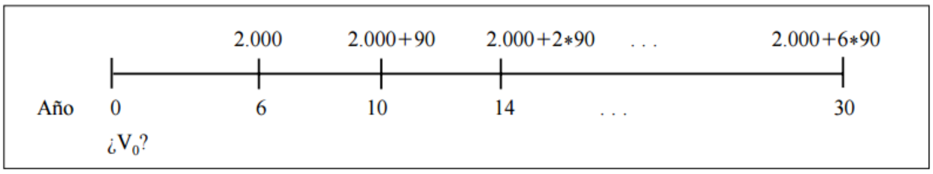
- Para obtener la fórmula del valor final, entonces solo se tiene que hacer la misma técnica que se vio anteriormente:

$$V_{tp} = V_0(1+r)^{tp} = \left(R + \frac{a}{(1+r)^p - 1} \right) \frac{(1+r)^{pt}-1}{(1+r)^p - 1} - \frac{at}{(1+r)^p - 1}$$

$$\Rightarrow\ V_{tp} = \left(R + \frac{a}{(1+r)^p - 1} \right) \frac{(1+r)^{pt}-1}{(1+r)^p - 1} - \frac{at}{(1+r)^p - 1}$$

  - Lo que hace la fórmula es diferir los t términos de la renta y los valora en el periodo en el que se encuentra el último término

- Igual que con otros casos, si la renta no es inmediata, se tiene que utilizar una fórmula que tenga en cuenta este hecho:



- En este caso, es necesario descontar también para los s periodos que no tienen ningún término antes del primero, obteniendo la siguiente fórmula:

$$V_0 = \left[\left(R + \frac{a}{r}\right)\frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t} - \frac{at}{r(1+r)^t}\right]\frac{1}{(1+r)^{s-p+1}}$$

- En este caso, R es el primer término de la renta, r es el tipo de interés de la valoración, a es la razón de crecimiento y s el número de periodos antes del primer término. Lo que hace la fórmula es actualizar los t términos de la renta y los valora a un periodo de capitalización r de interés antes del primer término, pero teniendo en cuenta que el primer término se recibe después de s periodos