RENTA FIJA Y CRÉDITO

Iker Caballero Bragagnini

Tabla de contenido

Los tipos de interés

- El valor futuro de una inversión depende de cómo se calcula el tipo de interés, el cual expresa el valor temporal del dinero. El valor temporal del dinero justifica el uso de tipos de interés y proviene del hecho de que el coste de oportunidad de no gastar el dinero hoy es mayor que el de gastar el dinero mañana

    - Los tipos de interés se pueden clasificar de varias maneras según diferentes criterios

        - Los tipos de interés simples son aquellos que se aplican cuando se paga solo por el principal invertido, mientras que, si se obtiene interés del principal invertido y de los pagos de interés anteriores, el tipo de interés será compuesto

        - Los tipos de interés se pueden clasificar entre tipos de interés actuales o *spot interest rates*, que se aplican del periodo presente t a uno futuro T, y tipos de interés futuros o *forward rates*, que son tipos aplicados desde un momento futuro mayor a t pero menor a otro T (el vencimiento)

        - Con *forward rates* se tiene que distinguir entre el *term* (momento en el que el *forward rate* se aplica) y el *tenor* (periodo sobre el que se aplica). Denotando el *term* como t y el *tenor* como Δt, el *forward rate* se aplica entre t y $t + \Delta t$

    - Dentro de los tipos de interés compuestos, los tipos de interés se puede componer de manera discreta o continua

        - Suponiendo que se tiene una unidad monetaria en un tipo de interés r pagado una vez al año, entonces después de T años la cantidad futura sería la siguiente:

$$1\$ \times (1 + r) \times (1 + r) \times \dots \times (1 + r) = (1 + r)^T$$

        - Suponiendo que se reciben m pagos de intereses a una tasa anual de r/m, después de T años se obtendría la siguiente cantidad, que es el tipo de interés compuesto discretamente:

$$\left(1 + \frac{r(T - t)}{m}\right)^m$$

        - Si estos pagos m se vuelven muy frecuentes ($m \to \infty$), entonces se puede calcular el límite para obtener la siguiente cantidad, que es el tipo de interés compuesto continuamente:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r(T-t)}{m}\right)^m = e^{r(T-t)}$$

- Otra manera de derivar el resultado anterior es a través de un argumento de una cuenta bancaria en el mercado monetario, de modo que si en el momento t se tiene una cantidad $M(t)$, entonces se quiere calcular la cantidad futura $M(t+dt)$ en un paso de tiempo muy pequeño dt para un interés anual r

$$M(t+dt)-M(t)\approx\frac{dM}{dt}dt+\frac{d^2M}{dt^2}(dt)^2+\cdots$$

$$\Rightarrow\ dM = rM(t)\,dt\ \Rightarrow\ \int_t^T\frac{1}{M(t')}\,dM = r\int_t^T dt'$$

$$\Rightarrow \ln\big(M(T)\big)-\ln\big(M(t)\big)=rT\ \Rightarrow\ M(T)=M(t)e^{r(T-t)}$$

- Esta ecuación relaciona el valor del dinero con el futuro, pero se puede obtener lo que vale una cantidad futura en el presente, se puede dividir por el factor, resultando en $e^{-r(T-t)}$

- En la práctica se suele trabajar con tipos compuestos discretamente, dado que la composición continua es teórica. No obstante, se pueden obtener fórmulas que relacionen ambos tipos de interés a través de saber que un tipo compuesto continuamente r es igual a uno compuesto discretamente r':

$$e^{r(T-t)}=\left(1+\frac{r'(T-t)}{m}\right)^m\ \Rightarrow\ \begin{cases} r=\dfrac{m}{T-t}\ln\left(1+\dfrac{r'(T-t)}{m}\right)\\ r'=\dfrac{m}{T-t}\left(e^{r(T-t)/m}-1\right)\end{cases}$$

- Los *spot interest rates* y los *forward rates* están relacionados a través de equivalencias debidas a argumentos de no arbitraje

    - Asumiendo *spot* y *forward rates* continuos, entonces el *spot* a T años $r(T)$ es igual al *forward* $F(0;T)$ desde el momento actual $t=0$ hasta T. El valor de la inversión debe ser el mismo cuando se invierte a T años vista al *spot rate* $r(T)$ o si se se reinvierte una cantidad al *spot rate* a un año $r(1)$ en cada año intermedio hasta T, pero como $r(T)=F(0;T)$, entonces:

$$e^{Tr(T)}=e^{r(1)}e^{F(1;2)}\dots e^{F(T-1;T)}=e^{F(0;1)}e^{F(1;2)}\dots e^{F(T-1;T)}$$

$$\Rightarrow\ r(T)=F(0;T)=\frac{F(0;1)+F(1;2)+\cdots F(T-1;T)}{T}$$

- Asumiendo *spot* y *forward rates* discretos, entonces se puede obtener un argumento similar para obtener una relación parecida para los tipos de interés discretos:

$$\left(1+r(T)\right)^T = \left(1+r(1)\right)\left(1+F(1;2)\right)\ldots\left(1+F(T-1;T)\right)$$

$$= \left(1+F(0;1)\right)\left(1+F(1;2)\right)\ldots\left(1+F(T-1;T)\right)$$

$$\Rightarrow\ r(T) = \sqrt[T]{\left(1+F(0;1)\right)\left(1+F(1;2)\right)\ldots\left(1+F(T-1;T)\right)} - 1$$

- Hay varias formas de expresar el tipo de interés, aunque las más comunes son las siguientes:

$(a)\ \ Decimal\text{: } 0.06$

$(b)\ \ Percentage\text{: } 6\%$

$(c)\ \ Basis\ points\text{: } 600bp$

$(d)\ \ Percentage\ points\text{: } 6pp$

  - Los puntos base se calculan multiplicando el interés en forma porcentual por 100, mientras que los puntos porcentuales ya vienen indicados por la forma porcentual

$$6\% = 6 * 100 = 600bp$$

$$6\% = 6pp$$

  - De este modo, los puntos base representan el 0.01% o el 0.0001 del tipo de interés

$$1\ bp = \frac{1\%}{100} = \frac{0.01}{100} = 0.0001$$

- Los tipos de interés del mercado monetario (fijados por las autoridades monetarias) son un factor importante que determina el valor actual de los flujos de caja futuros, por lo que son un factor muy importante para productos de renta fija

  - Los tipos de interés pueden ser fijos o variables para diferentes instrumentos. Para bonos con cupones, el cupón suele tener consigo un tipo de interés fijo en el tiempo, pero también pueden ser variables para algunos bonos

- Cuando uno compra un producto de renta fija directamente del emisor y lo piensa mantener hasta el vencimiento, los tipos de interés no afectan al comprador. No obstante, si este se compra en el mercado secundario, entonces el precio puede variar dependiendo de los tipos de interés y de otros factores

- El precio que los inversores están dispuestos a pagar se afecta por los tipos de interés porque estos funcionan como un *benchmark* de rentabilidad, haciendo que probablemente los flujos de caja que se reciben del instrumento se tengan que adaptar para obtener esa misma rentabilidad y que otros instrumentos similares ya existentes sean más o menos atractivos en comparación

- Otra medida relacionada a los tipos de interés y al coste de oportunidad es la inflación, que representa la subida generalizada de precios y la cual es necesario tener en cuenta para poder valorar algunos activos de renta fija

  - La inflación representa la subida generalizada de precios, y la relación que tiene con los tipos de interés se representa matemáticamente a través de la ecuación de Fisher

$$(1 + i) = (1 + r)(1 + \pi^e)(1 + p)$$

    - En este caso, i es el tipo de interés nominal, r es el tipo de interés real, π^e se refiere a las expectativas de inflación y p es la prima de riesgo

    - A través de la aproximación $\ln(1 + a) \approx a$ para una a pequeña, se puede aproximar la ecuación de Fisher a la siguiente:

$$i \approx r + \pi^e + p$$

- Lo que la fórmula expresa es que el tipo de interés nominal o el *yield* (rendimiento) de un activo de renta fija contiene los tres componentes explicados anteriormente

    - Contiene un rendimiento real que los inversores demandan independientemente de las expectativas de la inflación futura

    - Contiene las expectativas inflacionarias sobre un periodo de tiempo concreto (la llamada *breakeven inflation* y denotada por bei cuando se ignora p)

    - Contiene un factor que captura la combinación de la prima de riesgo y el descuento por liquidez. La prima de riesgo representa una compensación por aceptar riesgo de inflación cuando se tienen instrumentos de renta fija nominales (la inflación inesperada), mientras que el descuento de liquidez representa la prima de rendimiento que los inversores demandan por tener un instrumento de renta fija vinculado a la inflación menos líquido

    - Este tercer componente suele ser difícil de desagregar y los practicantes normalmente lo ignoran

$$i \approx r + bei$$

- El tipo de *breakeven* se puede interpretar como el tipo promedio de la inflación que igualaría los rendimeintos de un bono o instrumento vinculado a la inflación con un bono o instrumento nominal comparable con el mismo rendimiento

    - Esto se puede ilustrar de manera más clara a través de la ecuación de Fisher. Considerando un bono nominal a 5 años con un rendimiento del 4.5% y uno vinculado a la inflación con rendimiento real de 1.5%, entonces se obtiene $bei = 3\%$:

$$i \approx r + bei \quad \Rightarrow \quad 4.5\% \approx 1.5\% + bei \quad \Rightarrow \quad bei = 3\%$$

    - Un inversor puede utilizar la *breakeven inflation* para ver cual de ambos bonos comprar. Si se espera una inflación menor al 3%, entonces se debería comprar el bono nominal, mientras que, si es mayor, debería comprar el bono vinculado a la inflación (si es exactamente 3% es indiferente)

$$\pi < 3\% \;\Rightarrow\; 4.5\% > 1.5\% + \pi \quad \Rightarrow \quad Buy\ nominal$$

$$\pi > 3\% \;\Rightarrow\; 4.5\% < 1.5\% + \pi \quad \Rightarrow \quad Buy\ infl.-linked$$

- La dificultad de conceptualizar la inflación nace de la dificultad de conceptualizar el tipo de interés real, por lo que es de vital importancia. Un tipo de interés real refleja la cantidad que se ganaría o pagaría después de tener en cuenta el impacto de la inflación

    - También se puede entender como la tasa de rendimiento en exceso de equilibrio, por encima de la inflación esperada futura (por la ecuación de Fisher), tal que la oferta iguala a la demanda en un tipo de oportunidad de inversión

    - Finalmente, también se puede interpretar como el rendimiento de no consumir en el momento actual para consumir más bienes y servicios en un momento futuro

    - Un tipo de interés real debería reflejar el crecimiento de la productividad de la economía y representar el tipo al que las inversiones se deberían recompensar (las inversiones compiten en base al rendimiento real que ofrecen, asociado a un riesgo

    - Los tipos de interés reales pueden ser negativos cuando las expectativas de la inflación son mayores a los tipos de interés nominales. Estos, en general, ocurren porque un activo no se considera un uso productivo del capital, porque tiene demasiada demanda (comparada a su oferta) y eso hace que baje el rendimiento, y porque hay un *flight to quality* a otros tipos de activo

- Los instrumentos vinculados a la inflación más famosos son los bonos vinculados a la inflación, cuyo valor está vinculado a un índice de precios específico con tal de mantener el poder adquisitivo

    - Algunos de los índices que más se utilizan es el CPI correspondiente a cada país, el HICP (CPI harmonizado) correspondiente a cada país y el RPI (en UK)

    - Los bonos más famosos de este tipo son los americanos, llamados TIPS (de *Treasury Inflation Protected Securities*)

Los activos de renta fija y su análisis

- Los activos de renta fija o *fixed income* son una clase de activo que incluyen aquellos activos que proporcionan un rendimiento de la forma de pagos periódicos fijos

    - Los pagos de un activo de renta fija se saben con antelación y suelen quedarse fijas en el tiempo

        - Esto contrasta con las acciones u otros activos que pueden no pagar ningún flujo de caja a los inversores o que pueden pagar flujos variables

        - Este tipo de activos son sensibles a los tipos de interés, dado que sirven como un *benchmark* para el rendimiento que se espera recibir de la inversión

    - Estos activos suelen ser emitidos por instituciones como gobiernos o corporaciones

        - Estas instituciones suelen ser activos para recaudar dinero con tal de financiar operaciones y proyectos, y en el vencimiento del contrato, los emisores devuelven el dinero prestado a los inversores con un interés

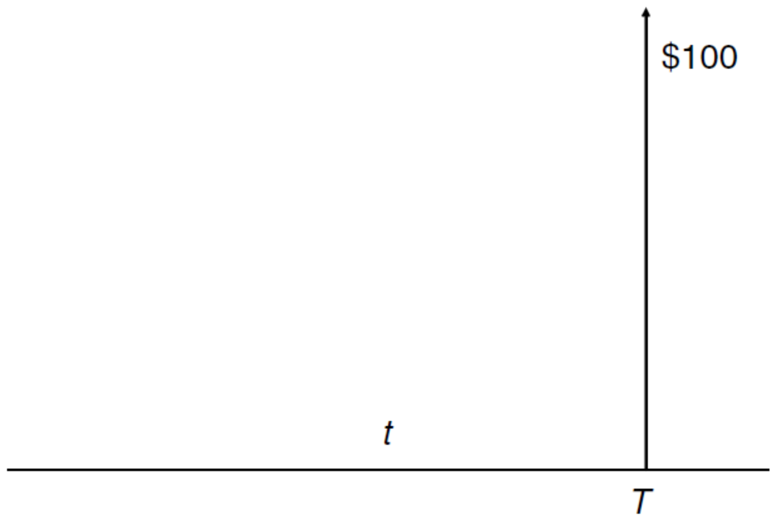
        - Los inversores suelen usar estos activos para diversificar la cartera, dado que son menos volátiles y suelen estar más protegidos que otras inversiones

    - Los bonos y otros activos de renta fija se comercian en bolsas cotizadas, pero también se comercian en mercados OTC

        - La excepción a esto son los *private placements*, que son como préstamos transferibles. Como no hay mercado secundario, los *private placements* se tienen en cuenta usualmente en el *banking book*, mientras que a otros activos se les aplica *mark to market* en el *trading book*

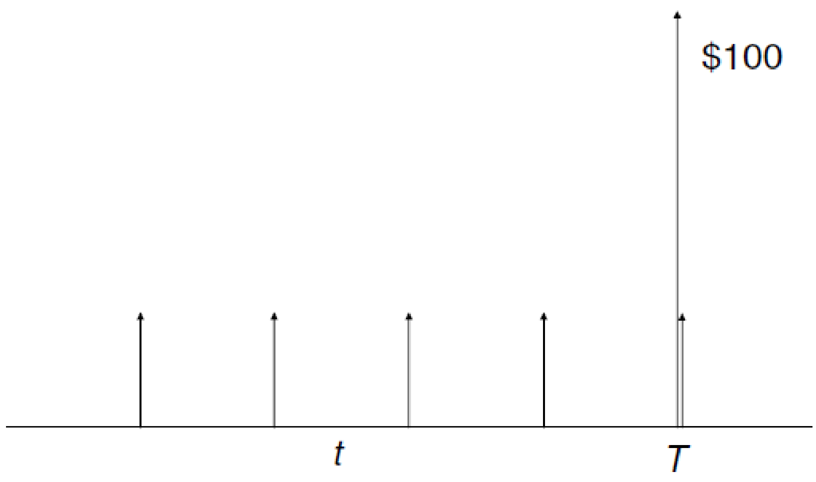
- Para poder analizar los activos de renta fija, primero se consideran los contratos de renta fija más simples y sus características, lo cual permitirá sentar unas bases para el análisis

    - El bono de cupón cero o *zero-coupon bond* es un contrato que paga un importe fijo conocido, el principal, en alguna fecha en el futuro, la fecha de vencimiento o *maturity date* T



- Esta promesa de riqueza futura tiene un valor actual positivo (no puede tener uno negativo ni nulo). Además, aparte de que se esté en circunstancias extremas (tipos de interés nulos), la cantidad que se paga inicialmente será menor que la cantidad que se recibirá en el vencimiento

- El bono con cupones o *coupon-bearing bond* es similar al bono anterior, excepto que también paga cantidades pequeñas llamadas cupones o *coupons* en intervalos hasta e incluyendo la fecha de vencimiento



- Estos cupones normalmente son fracciones previamente especificadas del principal. Por lo tanto, este bono es más valioso que el bono sin cupones debido a estos pagos de cupones

- El cupón se puede calcular como la *ratio* entre la suma de los cupones pagados en un año y su principal. Si el cupón se paga en una frecuencia que no sea anual (semianual, trimestral, etc.), entonces el interés de cupón o *coupon rate* es el interés que se paga en cada pago multiplicado por el número de veces que se paga en un año

$$coupon\ rate = \frac{sum\ of\ coupons\ paid\ annually}{face\ value}$$

$$coupon\ rate = int.paid\ in\ frequency \times frequency$$

- El valor de un bono viene determinado por el tamaño del cupón, la fecha de vencimiento y la visión del mercado del comportamiento futuro de los tipos de interés. Estos últimos afectan debido a que sirven como un *benchmark* para el *coupon rate* y hacen que un bono sea más o menos atractivo

- Se puede interpretar a un bono con cupones como una cartera de bonos de cupón cero: hay un bono de cupón cero para cada fecha de cupón (fecha de vencimiento igual a la fecha de cupón) y con un principal equivalente a la cuantía del cupón, y finalmente un bono de cupón cero con la misma fecha de vencimiento que el bono original. Por lo tanto, los flujos de efectivo tienen que ser iguales:

$$CF_{CB} = \sum_t CF_{ZCB}(t)$$

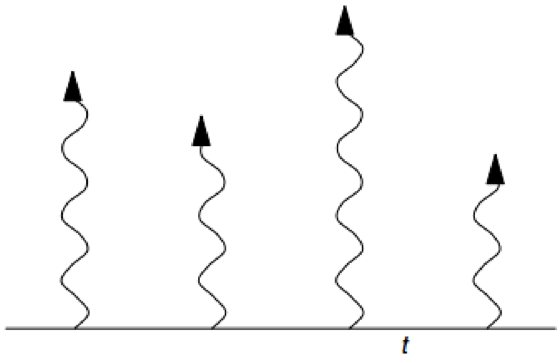
- Cualquiera que tiene una cuenta bancaria tiene una cuenta en el mercado monetario, la cual es una cuenta que acumula interés compuesto a un tipo que varía de vez en cuando

  - Es importante diferenciar las cuentas del mercado monetario con cuentas corrientes, dado que, aunque las dos pertenecen al mercado monetario, estas últimas tienen un tipo de interés fijado por el banco. Normalmente existen los dos tipos de cuenta en los principales bancos

  - La tasa a la que el interés se acumula suele ser un tipo de interés a corto plazo e impredecible. Como el dinero se mantiene en una cuenta del mercado monetario crece a una tasa impredecible, la cuenta es arriesgada cuando se compara a un bono de cupón cero a un año

  - No obstante, la cuenta del mercado monetario se puede cerrar en cualquier momento, mientras que, si se vende el bono antes del vencimiento, no hay garantías de qué tanto valdrá en el momento de la venta (el precio al que se vende dependerá del contexto)

- En su forma más simple, el tipo de interés variable es la cantidad que uno obtendría de una cuenta bancaria. Esta cantidad varía en el tiempo, reflejando el estado de la economía en respuesta a la presión de otros bancos para su negocio



  - Esta incertidumbre sobre el tipo de interés que se recibe se compensa por la flexibilidad del depósito, dado que se puede extraer en cualquier momento

  - La medida de interés más común es el LIBOR y el EURIBOR, que viene con varios vencimientos y es el tipo de interés ofertado por bancos de las diferentes divisas para depósitos a plazo fijo (donde se deposita el dinero y no se saca hasta la fecha acordada)

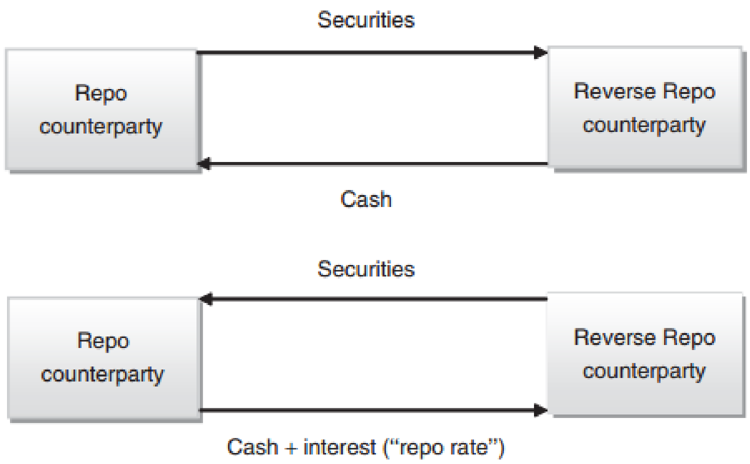
  - A veces, el pago de cupón de un bono no es una cantidad predeterminada en unidades monetarias, sino que depende del nivel de un índice, medido en el momento del pago o antes. Típicamente, no se puede saber al comienzo del contrato el nivel que el índice tendrá en el momento del pago

- Un acuerdo de tipo futuro o *forward rate agreement* (FRA) es un acuerdo entre dos partes de que un tipo de interés predeterminado aplicara a un principal predeterminado a lo largo de un periodo de tiempo en el futuro

  - Una parte A paga a una parte B el principal en el momento T_1 y B paga a A el principal más un tipo de interés agregado en un momento $T_2 > T_1$

  - El valor de este intercambio en el momento en el que se entra en el contrato es generalmente diferente a cero, de modo que hay una transferencia de efectivo de una parte a la otra en el comienzo del contrato

- Un *repo* es un acuerdo de recompra, el cual es un acuerdo para vender un activo a otra contraparte y comprarlo otra vez a una fecha fija y por una cantidad fija (con un tipo de interés fijo). En cambio, un *reverse repo* es un contrato que consiste en tomar prestado un activo por un periodo corto de tiempo a un tipo de interés acordado



- El precio al cual el activo se compra otra vez es mayor al del precio de venta y la diferencia implica un tipo de interés llamado *repo rate*. Para un *reverse repo*, el precio al cual se compra es mayor al cual se vende (a su propietario)

- El *repo* más común es el *overnight repo*, en donde el acuerdo se renegocia de manera diaria. Si el acuerdo del *repo* se extiende por 30 días, se conoce como *term repo*

- Los *repos* se pueden usar para fijar tasas de interés futuras. Por ejemplo: al comprar una nota del tesoro a seis meses y un *repo* de esta por tres meses, no hay ningún flujo hoy porque el bono se ha pagado y se ha *repoed* (por una cantidad equivalente)

- En tres meses, se tendrá que recomprar la nota a un precio exacto (un flujo de efectivo negativo), y en seis meses se recibe el principal. Para que no haya arbitraje, el tipo de interés equivalente debería ser el que prevalece entre el tercer y el sexto mes

- El acrónimo STRIP se refiere a *Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities*, y los *strips* son bonos de cupón cero artificiales con una madurez más larga de la que estaría disponible, dado que se segregan los cupones y el principal de bonos normales

  - Cada *strip* se negocia de forma independiente en el mercado de deuda

  - Este proceso de segregación es reversible, de modo que todos los *strips* de un bono normal pueden reagruparse para formar un bono normal

- En todos los productos anteriores, se ha asumido que el principal se mantiene fijo en su nivel inicial. A veces no es el caso, y el principal puede amortizarse o decrecer durante la vida del contrato
    - Por lo tanto, el principal se paga de manera gradual y se paga interés sobre la cantidad del principal que queda
    - Tal amortización se acuerda en la iniciación del contrato y puede ser fija, de modo que la tasa a la que decrece el principal se conoce de antemano, o puede depender del nivel de algún índice. Por ejemplo, si el índice es alto, el principal se amortiza más rápido
- Algunos bonos tienen una cláusula o provisión llamada *call provision*, que consiste en que el emisor del bono pueda recomprar el bono en ciertas fechas o periodos por una cantidad predeterminada, posiblemente dependiente del tiempo
    - Lo que esto causa es que el valor del bono sea más bajo, y tiene consecuencias en la fijación de su precio

- Los mercados más importantes de este tipo de activos son el mercado de Estados Unidos, el mercado del Reino Unido y el mercado de Japón
  - En los Estados Unidos existen bonos con diferentes vencimientos, los cuales son las *treasury bills*, las *treasury notes* y los *treasury bonds*
    - Las *bills* son bonos con vencimiento a menos de un año, y son usualmente con cupón cero; las *notes* son bonos con vencimiento de entre 2 y 10 años, y pagan cupones cada 6 meses; y los bonos son bonos con vencimiento mayor a 10 años, y pagan cupones
    - Los bonos comercializados en el mercado de bonos extranjeros de lo Estados Unidos pero que se emiten por instituciones no estadounidenses se denominan bonos *yankees*
    - Desde 1997, el gobierno de los Estados Unidos también ha emitido bonos vinculados a la tasa de la inflación
  - En el Reino Unido, los bonos emitidos por el gobierno se denominan *gilts*. Algunos de estos bonos son *callable*, perpetuos o convertibles por otra emisión de bonos, típicamente de mayor vencimiento
    - Hay bonos vinculados a índices que tienen la cantidad del cupón y del principal vinculados con una medida de inflación concreta, el *Retail Price Index* (RPI), una medida de la inflación de año a año

que usa una cesta de bienes incluyendo pagos de interés de hipotecas

- En Japón, los bonos del gobierno de Japón o *Japanese Government Bonds* (JGBs) están disponibles como *treasury bills* a corto plazo, a medio plazo, a largo plazo (10 años) y a super largo plazo (20 años)

    - Los bonos a largo y a super largo plazo tienen cupones cada seis meses, los bonos a corto plazo no tienen cupones y los bonos a medio plazo puede tener cupones o no

    - Los bonos denominados en yenes por instituciones no japonesas se denominan bonos Samurai

- Ahora que se han presentado diferentes activos de renta fija, es necesario tener en cuenta algunos detalles como el interés acumulado, las convenciones del número de días y el tipo de composición del interés

    - El precio de mercado de los bonos cotizados en el periódico u otras plataformas se denominan precios limpios o *clean prices*, de modo que se cotizan sin tener en cuenta ningún interés acumulado

        - El interés acumulado o *accrued interest* es la cantidad de interés que se ha acumulado desde el último pago de cupón:

$$acc.int.(\%) = int.full\ period \times \frac{nº\ days\ since\ last\ coupon}{nº\ days\ in\ period\ between\ coupon\ payments}$$

        - En este caso, el interés cuando se completa el periodo no es más que el interés generado entre los pagos de cupones (el *coupon rate* dividido por la frecuencia), pero este puede ser un pago de intereses sobre un préstamo u otros activos de renta fija

$$int.full\ period = \frac{coupon\ rate}{frequency\ of\ payments}$$

        - El precio real teniendo en cuenta el interés acumulado se denomina precio sucio o *dirty price*, y es la suma del *clean price* con el interés acumulado

$$dirty\ price = clean\ price + acc.int.(\%) \times face\ value$$

    - Debido a cuestiones como el interés acumulado entre fechas de cupones, nace la pregunta de como acumular el interés sobre periodos cortos. El interés se cumula entre dos fechas a través de la siguiente fórmula:

$$acc.int\ (\%) = int.earned\ in\ reference\ period \times \frac{nº\ days\ between\ two\ dates}{nº\ days\ in\ reference\ period}$$

- Hay tres maneras principales de calcular los días en la expresión anterior: a través de una convención *actual/actual* (se cuenta el número de días de calendario), una 30/360 (se asumen que hay 30 días en un mes y 360 días en el calendario), y una *actual*/360 (se asume que cada mes tiene el número de días real pero que solo hay 360 días al año)

- Con tal de comparar los productos de renta fija se tiene que decir sobre la convención de la medición de tipos de interés, de modo que se tiene que decidir entre composición continua y composición discreto

    - Suponiendo que se recibe un interés anual de r', si se usa composición discreta, entonces se usa la siguiente fórmula, donde $M(0)$ es el valor actual de una cantidad $M(T)$ para T años:

$$M(0) = \frac{1}{(1+r')^T} M(t)$$

    - La fórmula anterior se suele usar para instrumentos simples tales como bonos con cupones (con una estructura sencilla) y otros activos de renta fija como préstamos

    - En la composición continua, el valor actual de 1 unidad monetaria pagada en el momento T en el futuro es e^{-rT} para alguna r anual. Asumiendo que se reciben m pagos a una tasa de r/m al año, se obtiene el siguiente límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m} = e^{-r}$$

    - Esto también se obtiene de la ecuación de la cuenta del mercado monetario, usada en el mundo de las opciones, que expresa que la cantidad que se recibe debe ser proporcional al tipo de interés r, al tiempo que transcurre dt y a la cantidad inicial $M(t)$:

$$M(t+dt) - M(t) \approx \frac{dM}{dt} dt + \frac{d^2M}{dt^2} (dt)^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \; dM = rM(t)\, dt \;\Rightarrow\; \int_0^T \frac{1}{M(t)}\, dM = r \int_0^T dt$$

$$\Rightarrow \ln\big(M(T)\big) - \ln\big(M(0)\big) = rT \;\Rightarrow\; M(T) = M(0)e^{rT}$$

$$\Rightarrow \; M(0) = M(T)e^{-rT}$$

- Las dos fórmulas son idénticas cuando $r = \ln(1 + r')$, de modo que esta ecuación da una relación entre el interés compuesto continuamente r y el interés discreto r'. En general, para un tipo de interés que no se compone únicamente anualmente, entonces se obtiene la siguiente relación:

$$r = freq \times \ln\left(1 + \frac{r'}{freq}\right)$$

- Hay mucha variedad de productos de renta fija, con diferentes estructuras de cupones, amortizaciones, intereses fijos y/o variables, que es necesario poder comparar los diferentes productos consistentemente. Una manera de poder comparar estos activos es a través de medidas de cómo un contrato gana dinero, llamadas *yield*

  - La medida más simple de cuanto gana un contrato es el rendimiento actual o *current yield*, la cual es una medida definida de la siguiente manera:

$$current\ yield = \frac{annual\ coupon\ income}{bond\ price}$$

    - Esta medición del rendimiento del bono no tiene en cuenta el pago del principal al vencimiento, ni el valor temporal del dinero si se reinvierte el pago del cupón, ni ninguna ganancia o pérdida de capital que pueda producirse si el bono se vende antes del vencimiento

    - Es una medida relativamente poco sofisticada, que se concentra en gran medida en las propiedades a corto plazo del bono

  - Suponiendo que se tiene un bono de cupón cero con vencimiento en el momento T con un principal igual a P, es posible obtener una fórmula del *yield* cuando este es constante en el tiempo

    - Aplicando un rendimiento o *yield* constante de y entre t y T, el principal en T tiene un valor actual de $Z(t;T) = Pe^{-y(T-t)}$ en el momento t, de modo que se obtiene el siguiente resultado:

$$Z(t;T) = Pe^{-y(T-t)} \ \Rightarrow\ \ln[Z(t;T)] = \ln(P) - y(T-t)$$

$$\Rightarrow\ y = -\frac{\ln[Z(t;T)] - \ln(P)}{T-t}$$

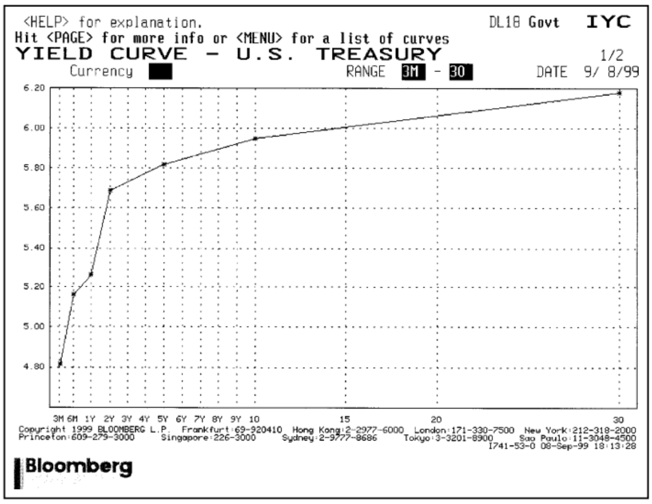
  - De manera más general, suponiendo que se tiene un bono con cupones C, se descuentan todos los N cupones (teniendo en cuenta el dia del pago de cupón t_i) y el principal P al presente usando un tipo de interés y, de modo que el valor actual es el siguiente:

$$V = Pe^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-y(t_i-t)}$$

- Si el bono se comercia en el mercado, entonces se sabe el precio al cual se puede comprar el bono. Si este es el caso, entonces se puede calcular el rendimiento hasta el vencimiento o *yield to maturity*, también llamado *internal rate of return* (IRR), como el valor y que se debe poner en esta ecuación para hacer que V sea igual al precio por el cual se comercia el bono

- Este procedimiento se tiene que hacer mediante un método de "prueba y error" o un método iterativo, debido a que la ecuación no es lineal y no se puede resolver fácilmente de manera analítica. Por lo tanto, los métodos numéricos para encontrar raíces como el de Newton-Raphson y otros serán útiles para este propósito

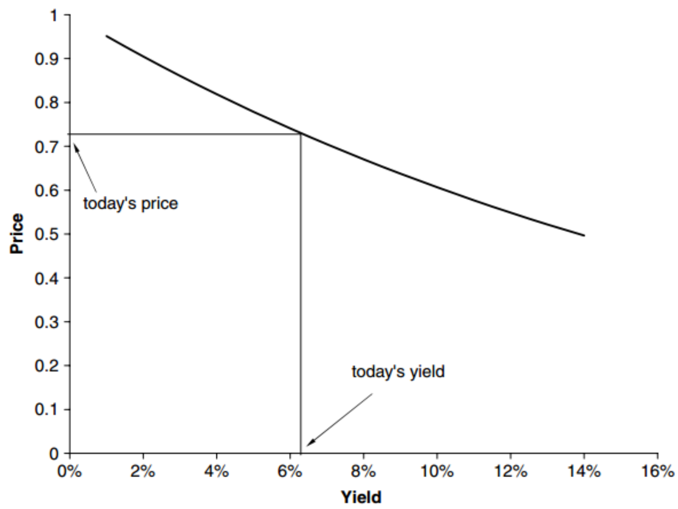
o El gráfico del *yield to maturity* contra el tiempo hasta el vencimiento se denomina curva de rendimientos o *yield curve*



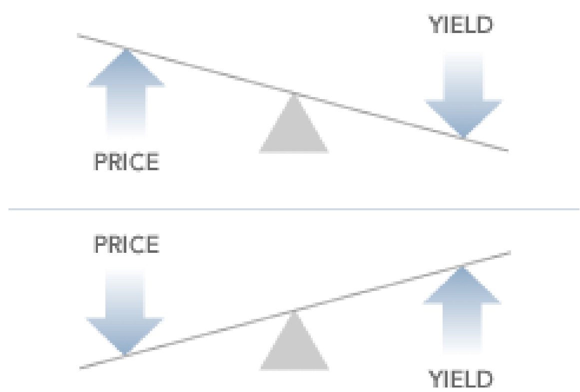
- La *yield curve* permite ver la estructura temporal de los rendimientos, o los rendimientos para cada vencimiento T, en un punto específico del tiempo (transversal). Los rendimientos no suelen ser constantes debido al coste de oportunidad que representa la inversión en horizontes temporales más largos

o A partir de la ecuación del valor de un bono en términos de su principal y sus cupones descontados, uno puede ver fácilmente la relación que hay entre el precio de un bono y su rendimiento (asumiendo que todos los flujos de efectivo son positivos)

- La relación entre el *yield* y el precio del bono es negativa porque, cuanto más alto es el precio del bono, menor tiene que ser el rendimiento y con el que se descuenta (si no, la cantidad sería menor)



- El sentido económico de la relación es que, cuando un bono gana un rendimiento muy alto, entonces es más atractivo y la demanda de este aumenta, lo cual a su vez hace que aumente el precio y se obtenga menos rendimiento. De manera contraria, si un bono tiene un rendimiento muy bajo, no habrá tanta demanda y eso provocará una bajada de precio que aumentaría el rendimiento de cada unidad monetaria invertida



- Como uno suele estar interesado en la sensibilidad de los instrumentos financieros al movimiento de ciertos factores subyacentes, es natural preguntar cómo varía el precio del bono cuando varía el rendimiento y viceversa. La duración, el DV01 y la convexidad son tres medidas que ayudan a caracterizar este tipo de variación
  - A partir de la ecuación anterior que relaciona el valor de un bono en el mercado con su principal y cupones descontados, se puede ver que la sensibilidad del precio a cambios en el *yield* es la siguiente:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}\left[Pe^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-y(t_i-t)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dy} = -P(T-t)e^{-y(T-t)} - \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i - t)e^{-y(t_i-t)}$$

- Esta expresión para dV/dy representa la pendiente de la curva de precio/rendimiento, también llamada duración en dólares (en unidades monetarias) o *dollar duration*

$$Dollar\ Duration = -\frac{dV}{dy}$$

- La cantidad $-(1/V)(dV/dy)$ se conoce como la duración de Macaulay

$$-\frac{1}{V}\frac{dV}{dy} = \frac{P(T-t)e^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i-t)e^{-y(t_i-t)}}{Pe^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-y(t_i-t)}}$$

$$Macaulay\ Duration = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dy}$$

- En la expresión para la duración, el tiempo de cada pago de cupón se pondera por su factor de descuento para el valor actual. Cuanto mayor es el valor del valor actual del cupón, mayor es la contribución a la duración

- Para movimientos pequeños en el *yield*, la duración da una buena medida del cambio de valor (porcentual) del bono por un cambio en el *yield*. No obstante, para grandes movimientos, se tiene que tener en cuenta términos de mayor orden en la expansión de Taylor de $V(y)$

o La duración modificada es similar a la duración de Macaulay, pero utiliza un tipo de interés o *yield* compuesto discretamente. Se define de la siguiente manera:

$$Mod.duration = \frac{P(T-t)(1+y)^{-(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i-t)(1+y)^{-(t_i-t)}}{[P(1+y)^{-(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i(1+y)^{-(t_i-t)}](1+y)}$$

$$\approx -\frac{1}{V(1+y)}\frac{dV}{dy}$$

- Debido a que la composición discreta se aplica en los mercados financieros, se usa la duración modificada en vez de la duración de Macaulay como aproximación de primer orden para la sensibilidad

- Además, como y se mide en unidades de tiempo inverso (porque divide), entonces las unidades de la duración son en tiempo. Es por eso que la duración es una medida del tiempo de vida medio del bono

  - Es posible demostrar que la duración de Macaulay para un bono de cupón cero es igual al tiempo hasta su vencimiento $T - t$ (el *tenor*)

$$\frac{dV}{dy} = -P(T-t)e^{-y(T-t)} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{V}\frac{dV}{dy} = \frac{P(T-t)e^{-y(T-t)}}{Pe^{-y(T-t)}}$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{V}\frac{dV}{dy} = T - t$$

  - Ahora se puede profundizar en el concepto de "tiempo de vida medio de un bono". Si se quisiera saber qué bono de cupón cero es equivalente a un bono con cupones concreto (qué vencimiento tendría que tener), se puede tomar el valor actual del bono e igualarlo al de un bono de cupón cero con el mismo *yield* pero vencimiento y principal desconocidos para obtener el siguiente resultado:

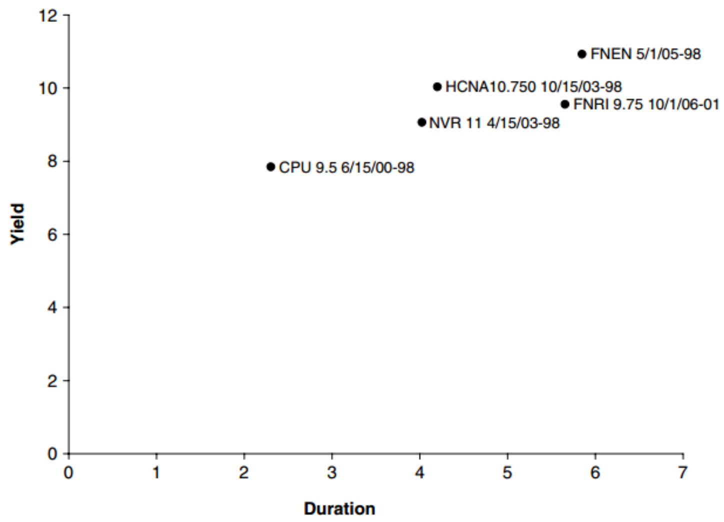
$$V_{coup} = Pe^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-y(t_i-t)} = Xe^{-y(\bar{T}-t)} = V_{zero}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_{coup}}{dy} = -P(T-t)e^{-y(T-t)} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} C_i(t_i - t)e^{-y(t_i-t)} \\ \dfrac{dV_{zero}}{dy} = -X(\bar{T}-t)e^{-y(\bar{T}-t)} \end{cases}$$

$$V_{coup} = V_{zero} \Rightarrow \frac{dV_{coup}}{dy} = \frac{dV_{zero}}{dy} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{V}\frac{dV_{coup}}{dy} = -\frac{1}{V}\frac{dV_{zero}}{dy}$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{V}\frac{dV_{coup}}{dy} = \frac{P(T-t)e^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i-t)e^{-y(t_i-t)}}{Pe^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-y(t_i-t)}} = (\bar{T} - t)$$

- Uno de los usos más comunes de la duración de Macaulay es en gráficos de *yield* contra duración para una variedad de instrumentos de renta fija. Este gráfico se utiliza para agrupar instrumentos con las mismas duraciones o con duraciones similares y hacer comparaciones entre sus *yields*



- Si dos bonos tienen la misma duración, pero uno tiene mayor rendimiento que otro, esto puede ser un indicador de que hay una mejor relación calidad-precio en el bono de mayor rendimiento o que puede haber problemas de riesgo crediticio. No obstante, esos indicadores son relativos y deben usarse con cuidado

- Es posible que dos bonos tengan perfiles de flujos de caja muy distintos pero que tengan una duración equivalente. De este modo, se tienen que tener en cuenta los flujos de caja y el vencimiento de cada uno de los bonos, dado que son factores con bastante contribución al riesgo del activo

- Aunque la duración modificada se suele usar en el mercado, esta se define como la sensibilidad con respecto a un movimiento del 1% en los *yields* o tipos, lo cual es un movimiento de una magnitud muy grande que no suele ocurrir. Por lo tanto, se ha desarrollado otra métrica llamada DV01 (de *dollar value of 01*), que se define como la sensibilidad del precio limpio del bono cuando el *yield* se mueve un 0.01%

  - Hay dos maneras de poder calcular esto. La primera es derivar el valor de la duración modificada usando la siguiente fórmula:

$$DV01 = \frac{Modified\ duration}{10000} \times Dirty\ Price$$

  - Como este cálculo es lineal, hay errores en la predicción, haciendo que este cálculo solo sea exacto para un movimiento de hasta 10bps

  - La segunda manera es utilizando un *software* que permita calcular el precio de un bono cuando hay un movimiento del 0.01%. Para tener un mayor grado de exactitud, se suele calcular el precio cuando hay un movimiento de +0.01% y -0.01% y se obtiene el promedio de ambos

- Esta medida se aplica al *clean price* y no al *dirty price* (aunque esté en la fórmula) porque los bonos cotizan al *clean price*, haciendo que la sensibilidad a los tipos de interés sea más útil para este que teniendo en cuenta el interés acumulado o *accrued interest* en el *dirty price*

- La expansión de Taylor para V permite ver que, para pequeños movimientos, la primera derivada (la duración) puede medir estos con un error pequeño. No obstante, para movimientos más grandes, se tiene que tener en cuenta el segundo término o convexidad, que representa la curvatura de la relación precio/rendimiento

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dy}\delta y + \frac{1}{2V}\frac{d^2V}{dy^2}(\delta y)^2 + O[(\delta y)^3]$$

$$where \quad \delta y = change\ in\ y$$

  - La convexidad en unidades monetarias o *dollar convexity* se define de la siguiente manera:

$$\frac{d^2V}{dy^2} = (T-t)^2 P e^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i (t_i - t)^2 e^{-y(t_i - t)}$$

  - Sin embargo, la convexidad se define de la siguiente manera:

$$\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dy^2}$$

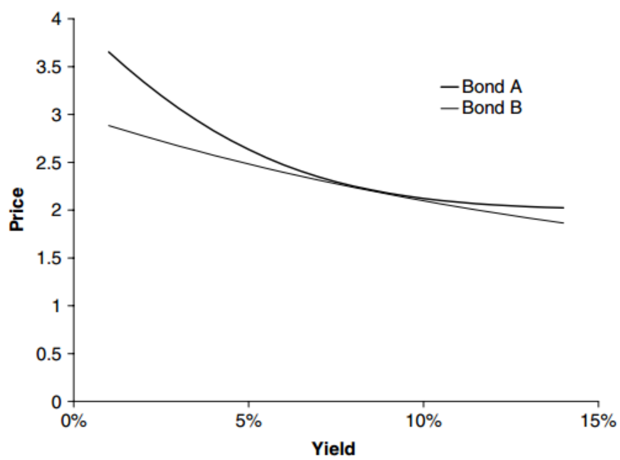
  - La convexidad de un bono de cupón cero es la siguiente:

$$\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{V}\frac{d^2}{dy^2}\left[Pe^{-y(T-t)}\right] = (T-t)^2 e^{-y(T-t)}$$

  - Un incremento de la fecha de vencimiento incrementa la convexidad de la relación precio/rendimiento, de modo que tiene un efecto positivo sobre la convexidad

- La utilidad de la convexidad se basa en que permite comparar cómo cambia la duración entre bonos o cómo cambia la sensibilidad del bono a cambios en los tipos de interés o *yields*

- Cuanto mayor es la convexidad, mayor es el aumento de la duración cuando hay un cambio en el rendimiento o *yield*, de modo que un bono con mayor convexidad que otro, teniendo la misma duración, siempre tendrá un mayor precio que el otro bono con menor convexidad



- Cabe destacar que, debido a que el tipo de interés del mercado y del *yield* afectan en la misma dirección a los precios, las medidas de duración y de convexidad también expresan la sensibilidad de primer y segundo orden de los precios de los bonos a movimientos en los tipos de interés (no solo *yield*). Esto se debe al mecanismo de oferta y demanda que hace variar los precios, conectando el tipo de interés con el *yield* a través del *coupon rate* de nuevos bonos

- No obstante, es importante ver que dos bonos con el mismo vencimiento pueden tener *yields to maturity* diferentes debido a que tienen una estructura de cupones única. Esto hace que los *yields* no se puedan usar como una medida de rendimiento para todos los bonos con un mismo vencimiento, por lo que el símil entre *yields* y tipos de interés que se hace para aproximar el impacto de uno u otro en el precio tiene que ser cuidadoso

- Normalmente se utilizan otras medidas que no sufren de los mismos problemas que los *yields*

- Los gestores de fondos y otros inversores suelen gestionar no solo un bono, sino una cartera de bonos. Por lo tanto, es necesario saber como aproximar el valor y medir la sensibilidad de los diferentes bonos

  - Considerando la expansión de Taylor para el valor de mercado de un bono con respecto a su *yield* y asumiendo que el cambio en los tipos de interés es el mismo para todos los bonos, se puede considerar la siguiente aproximación del cambio de precio para un bono:

$$\Delta V_i = \frac{dV_i}{dy_i}\Delta y_i + \frac{1}{2}\frac{d^2V_i}{dy_i^2}(\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{1}{V_i}\frac{dV_i}{dy_i}\Delta y_i + \frac{1}{2V_i}\frac{d^2V_i}{dy_i^2}(\Delta y)^2$$

- Si se quiere considerar el cambio de precio para una cartera, solo hace falta sumar las variaciones de valor de los N bonos dentro de la cartera, obteniendo la siguiente aproximación para el impacto de cambios en el tipo de interés o en el *yield*:

$$\Delta V_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \Delta V_i = -\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dV_i}{dy_i}\Delta y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{d^2V_i}{dy_i^2}(\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta V_P}{V_P} = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\Delta V_i}{V_P} = -\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{1}{V_i}\frac{dV_i}{dy_i}\Delta y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{1}{V_i}\frac{d^2V_i}{dy_i^2}(\Delta y)^2$$

- Para medir la sensibilidad, se usan las medidas en dólares de cada orden de sensibilidad debido a que son aditivas, mientras que la duración de Macaulay, la duración modificada y la convexidad no lo serían. Por lo tanto, para una cartera de bonos:

$$Ptf.duration = -\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dV_i}{dy_i}$$

$$Ptf.convexity = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{d^2V_i}{dy_i^2}$$

- También se puede sustituir el primer término de la aproximación por la duración modificada:

$$\frac{\Delta V_P}{V_P} = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\Delta V_i}{V_i} \approx -\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{1}{V_i(1+y)}\frac{dV_i}{dy_i}\Delta y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{1}{V_i}\frac{d^2V_i}{dy_i^2}(\Delta y)^2$$

- Al medir y usar *yields to maturity*, se tiene que recordar que el *yield* es el tipo de interés de descuento que hace que el valor actual del bono sea el mismo que su valor de mercado, por lo que hay un *yield* por cada instrumento y es posible que el *yield* de un instrumento suba cuando el de otro instrumento baja (sobre todo cuando tienen vencimientos o duraciones muy diferentes). No obstante, uno normalmente quiere protegerse de movimientos de un bono con los movimientos de otro para hacer *hedging*

- Esto se puede conseguir haciendo una gran suposición sobre los movimientos relativos de los *yields* de dos bonos: se asume que los bonos tienen rendimientos y_i, vencimientos T y duraciones dV_i/dy_i diferentes para toda $i = 1,2, \ldots, N$, pero que los *yields* se mueven de la misma manera (un cambio de $x\%$ en los dos). Esta suposición se conoce como suposición de desplazamientos paralelos en la *yield curve*, pero se suele dar comúnmente en los mercados reales (de manera aproximada)

- Si un gestor de una cartera de bonos quiere proteger su cartera de movimientos en los rendimientos, entonces puede hacer que la duración en dólares de la cartera sea nula. Por lo tanto, se querría conseguir una ponderación de cada bono tal que:

$$-\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dV_i}{dy_i} = 0 \quad where \quad N = total\ bonds$$

- Con tal de ilustrar el sentido de esta cobertura, se puede suponer que se tienen dos bonos A y B y que se tiene una cartera en donde se tiene 1 bono A y se querien vender Δ bonos B, queriendo determinar Δ para la cobertura. Como en una cartera de opciones, la cantidad Δ será la cantidad de bonos de B que se necesita para cubrir los cambios en el valor de la cartera causados por la variación de y_A de un bono A

$$\Pi = \frac{dV_A}{dy_A} - \Delta \frac{dV_B}{dy_B} \quad \Rightarrow \delta\Pi = \frac{dV_A}{dy_A} x - \Delta \frac{dV_B}{dy_B} x$$

$$\Rightarrow \ 0 = \frac{dV_A}{dy_A} x - \Delta \frac{dV_B}{dy_B} x \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{dV_A/dy_A}{dV_B/dy_B}$$

- No obstante, el error de este *hedge* será $O[(\delta y)^2]$, dado que solo se está haciendo una cobertura de primer orden (la duración en dólares). Si se quiere cubrir también el efecto de la convexidad, se tiene que conseguir una duración y una convexidad en dólares de la cartera nula, de modo que se plantearía el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dV_i}{dy_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{d^2V_i}{dy_i^2} = 0 \end{cases}$$

- Ahora, el error sería $O[(\delta y)^3]$, el cual sería muy pequeño y no se suele cubrir. Si el gestor quisiera aprovechar la convexidad, entonces escogería unos pesos tal que la convexidad en dólares de la cartera fuera positiva y grande, mientras que mantiene la duración en dólares en cero

- La desventaja de usar las duraciones y convexidades en dólares tradicionales para cubrir el riesgo de la cartera de bonos es que el *hedge* se limita a la suposición de movimientos paralelos de la curva. Existen técnicas más avanzadas basadas, por ejemplo, en análisis de componentes principales, que permiten cuantificar mejor las variaciones en la curva de rendimientos y cubrir los movimientos más comunes basándose en datos históricos

- Hasta ahora se ha considerado que el tipo de interés o *yield* de un bono o su rendimiento es constante, pero se puede considerar que el tipo de interés o *yield* es una función conocida del tiempo. A través de esta noción, se puede entender mejor la noción de *spot interest rate* y de *forward rate*

  - El tipo de interés o *yield* que se considera es el tipo de interés a corto plazo o *spot interest rate* $r(t)$. Esto significa que $r(t)$ se aplica en el momento t y se compone a esta tasa en cada momento del tiempo, pero que esta tasa puede cambiar a lo largo del tiempo

    - Si el *spot interest rate* $r(t)$ es una función conocida del tiempo, entonces el valor del bono también es solo una función del tiempo $V(t)$

    - También es función del vencimiento T, pero se omite la dependencia excepto cuando se requiere

  - Se suele comenzar por el ejemplo de un bono de cupón cero con $P = 1$, de modo que $V(T) = 1$ porque se recibe P en $t = T$. Por lo tanto, se puede derivar una ecuación para el valor antes del vencimiento $t < T$

    - Suponiendo que se tiene un bono, el cambio en el valor del bono en un paso en el tiempo dt (de t a $t + dt$) es el siguiente:

$$\frac{dV}{dt}dt$$

    - Por argumentos de no arbitraje, es necesario que el cambio de valor de t a $t + dt$ sea igual a lo que se obtendría de t a $t + dt$ al invertir la cantidad V en un depósito bancario con un interés de $r(t)$, dado que ambos son activos de renta fija. De este modo, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = r(t)V \quad \Rightarrow \quad \int_t^T \frac{1}{V(\tau)}\, dV(\tau) = \int_t^T r(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \; \ln|V(T)| - \ln|V(t)| = \int_t^T r(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \; \ln|V(t)| = -\int_t^T r(\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow \quad V(t;T) = e^{-\int_t^T r(\tau)\, d\tau}$$

- Ahora es posible introducir pagos de cupones y $P \neq 1$. Si durante el periodo de t a $t + dt$ se reciben pagos de cupones de $K(t)\, dt$, que puede ser de forma continua o discreta (o una combinación), el cambio de valor es el siguiente:

$$\left(\frac{dV}{dt} + K(t)\right) dt$$

- Del mismo modo que antes, por argumentos de no arbitraje, se puede obtener la siguiente solución, donde se asume que la constante de integración se escoge de tal manera que se hace que $V(T) = 1$

$$\frac{dV}{dt} + K(t) = r(t)V$$

$$\Rightarrow \quad V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)\, d\tau}\left[1 + \int_t^T K(t')e^{-\int_t^T r(\tau)\, d\tau}\; dt'\right]$$

- La ecuación anterior permite que se consideren pagos de cupones, pero si el cupón se paga de manera discreta, como en la práctica, se puede llegar a la misma ecuación por un argumento de saltos

  - Debido a que el poseedor del bono recibe un cupón K_c en el momento t_c, tiene que haber un salto en el valor del bono alrededor de la fecha de cupón. Por lo tanto, el valor antes de t_c (denotado por t_c^-) y después (denotado por t_c^+) difieren por una cantidad de K_c alrededor de t_c:

$$V(t_c^-) - V(t_c^+) = K_c$$

  - La diferencia es positiva ($V(t_c^-) - V(t_c^+) > 0$) porque el valor del bono después del cupón $V(t_c^+)$ debe descontar de su valor aquel cupón que ya se ha entregado, mientras que el valor antes del cupón $V(t_c^-)$ aún lo tiene en cuenta, de modo que será más alto. Si el cupón fuera negativo, entonces $V(t_c^+) > V(t_c^-)$

- Esto se reconoce como una condición de salto, de modo que el precio del bono no es continuo, lo cual tiene sentido debido a que hay un pago discreto en la fecha de cupón. Esta condición de salto también se aplica cuando se consideran tipos de interés estocásticos

- El problema más grande al usar el *yield to maturity* como una medida de los tipos de interés es que no es consistente entre instrumentos, dado que dos instrumentos con el mismo vencimiento pueden tener diferentes *yields* debido a sus estructuras de pagos de cupón. Por lo tanto, es difícil decir que hay un solo tipo de interés asociado a cada vencimiento, y es por eso que se utilizan *forward rates*

  - Los *forward rates* son tipos de interés que se asumen que se aplican sobre periodos concretos en el futuro para todos los instrumentos. Esto contrasta con los *yields*, que se asume que aplican hasta el vencimiento, con un *yield* diferente por cada bono

  - Suponiendo que se está en un mundo perfecto en donde se tiene una distribución continua de bonos de cupón cero Z con $P = 1$ y con todas las posibles fechas de vencimiento T, el *implied forward rate* es la curva de un *spot interest rate* que depende de l tiempo que es consistente con el precio de mercado de los instrumentos. Si el *spot interest rate* es $r(\tau)$ en el momento $t = \tau$, entonces se puede obtener la siguiente fórmula para el precio de un bono de este tipo:

$$Z(t;T) = e^{-\int_t^T r(\tau)\,d\tau}$$

  - Arreglando la fórmula para tener una expresión de $r(T)$, se obtiene el siguiente resultado:

$$Z(t;T) = e^{-\int_t^T r(\tau)\,d\tau} \Rightarrow \ln[Z(t;T)] = -\int_t^T r(\tau)\,d\tau$$

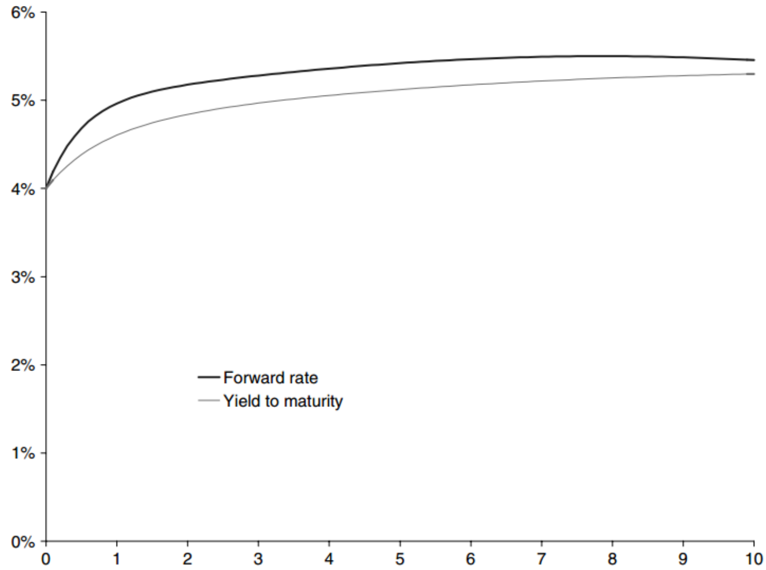
$$\Rightarrow r(T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln[Z(t;T)]$$

  - Este es el *forward rate* para el momento T con respecto al momento actual t, pero la curva puede cambiar completamente en un momento futuro. Por esa razón, normalmente se denota el *forward rate* en t que aplica al momento T futuro como $F(t;T)$

$$F(t;T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln[Z(t;T)]$$

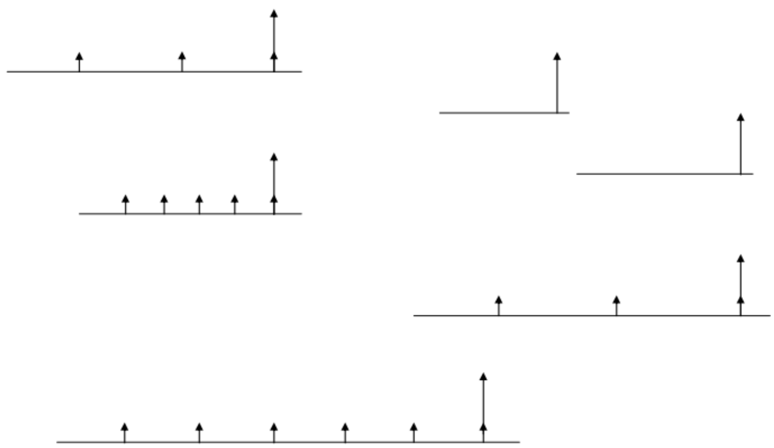
- Escribiendo esto en términos del *yield to maturity* $y(t;T)$, se obtiene la siguiente ecuación:

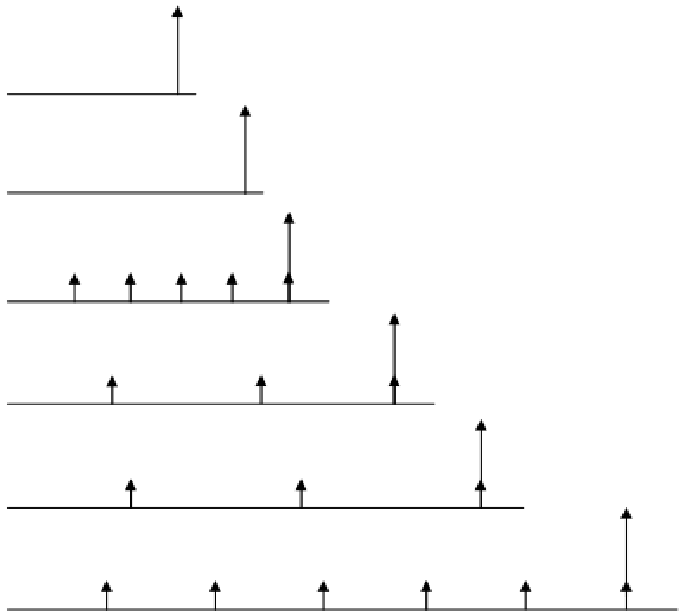
$$Z(t;T) = e^{-y(t;T)(T-t)} \quad \Rightarrow \quad F(t;T) = y(t;T) + \frac{\partial y}{\partial T}$$



- Si se considera un mundo menos perfecto, pero con bonos de cupón cero con $P = 1$, se tiene que obtener la curva de *forward rates* con un conjunto de puntos finitos

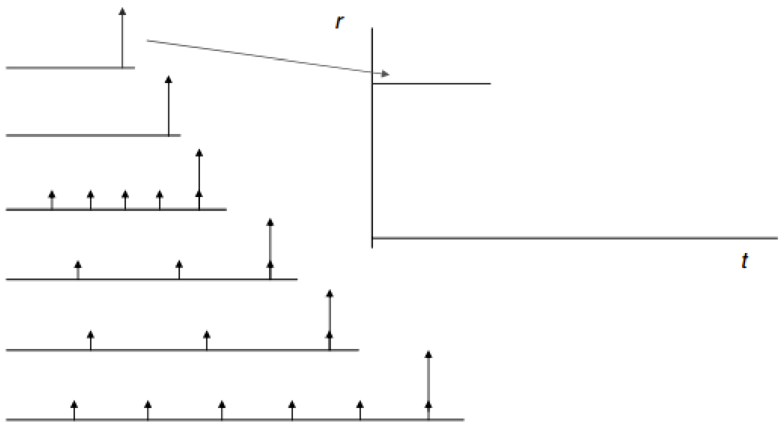
  - Se clasifican los bonos acordes a su vencimiento, poniendo primero a aquellos bonos con menor vencimiento primero. Los precios de mercado de los bonos se denotan como Z_i^M donde i es la posición del bono en la clasificación





- Usando solo el primer bono, se encuentra el tipo de interés implícito por el precio de mercado del bono (el *yield to maturity*), de modo que se obtienen los siguientes resultados:

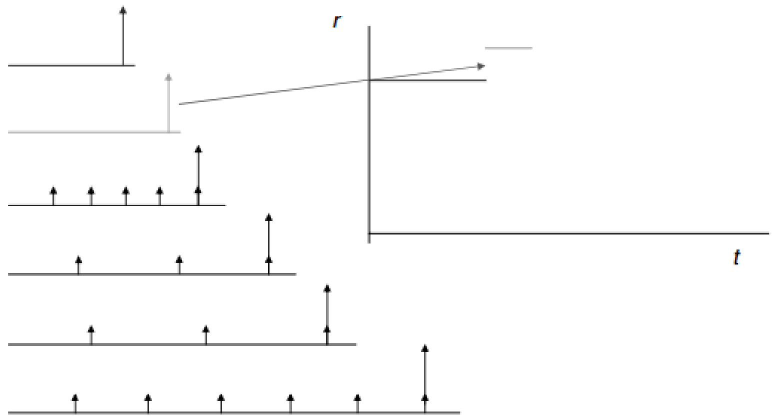
$$Z_1^M = e^{-y_1(T_1-t)} \;\Rightarrow\; y_1 = -\frac{\log(Z_1^m)}{T_1-t}$$



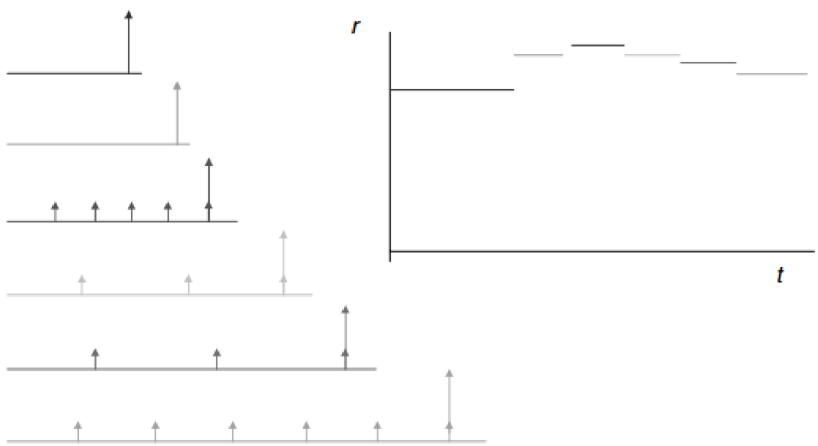
- Este tipo de interés será aquel usado para descontar entre el presente t y el vencimiento T_1 del primer bono, y se usará para todos los instrumentos siempre que se quiera descontar sobre este periodo de tiempo

- Ahora, se va al segundo bono con vencimiento T_2, y se intenta encontrar el tipo de interés que permite descontar el precio del bono entre los momentos T_1 y T_2. Este tipo de interés será el *yield* y_2 que respeta la siguiente ecuación (se usa y_1 porque se debe descontar por ese tipo de interés en ese periodo):

$$Z_2^M = e^{-y_1(T_1-t)}e^{-y_2(T_1-t)} \;\;\Rightarrow\;\; y_2 = -\frac{\ln(Z_2^M/Z_1^M)}{T_2 - T_1}$$



- A este método se le conoce como *bootstrapping*, permitiendo que se siga con el proceso para todos los bonos y construir la curva de *forward rates*. Todos los *forward rates* se aplican entre dos momentos, de modo que se asume que entre esos dos momentos el interés es constante



- Se asume explícitamente que los *forward rates* son constantes por partes, saltando de un valor a otros entre vencimientos de cada uno de los bonos, pero otros métodos de interpolación también son posibles

  - Se podría hacer una curva continua haciendo un gradiente constante por partes o *splines* cúbicas

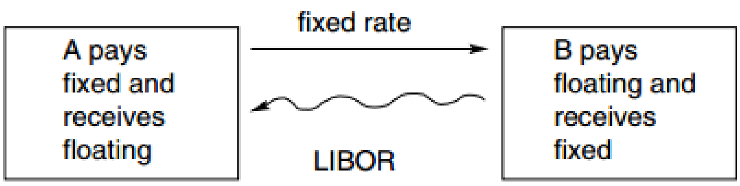
  - Si se quiere obtener el tipo de interés que aplicar en una fecha entre dos vencimientos, es necesario hacer suposiciones para obtenerlo y no hay un valor correcto

Los *swaps*

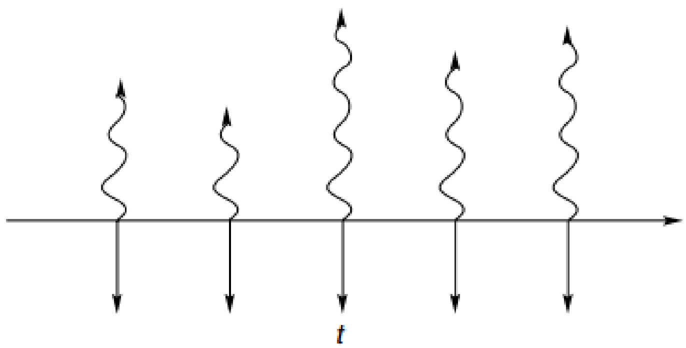
- Los *swaps* son acuerdos entre dos partes para intercambiar o *swap* flujos de caja futuros. El tamaño de estos flujos de caja se determina por fórmulas, predefinidas antes de iniciar el contrato, y estos contratos pueden estar denominados en una sola divisa o involucrar el intercambio de flujos en diferentes divisas

    - Uno de los *swaps* más sencillos es el *swap* de tipos de interés o (*vanilla*) *interest rate swap*. En un *swap* de tipos de interés, las dos partes intercambian flujos de caja representados por el tipo de interés en un principal nocional o *notional*

        - Normalmente, una parte acuerda pagar a la otra un tipo de interés fijo y el flujo de caja en la dirección opuesta es un *floating rate*. Uno de los *floating rates* usados en un *swap* es el LIBOR (de *London Interbank Offer Rate*)



        - Los flujos se pueden representar gráficamente a través de los siguientes gráficos, donde las líneas rectas representan un flujo de caja fijo y las onduladas un flujo variable:



        - Comúnmente en un *swap*, el intercambio de los pagos fijos y de *floating rate* ocurren cada 6 meses, de modo que en este caso el LIBOR relevante es el tipo a 6 meses. En su vencimiento, el principal no se intercambia, sino que es solo nocional

    - El primer intercambio de pagos o flujos es especial, dado que se fija el LIBOR a seis meses al iniciar el contrato, por lo que en el primer pago se conoce previamente el flujo variable. En cada pago posterior, se utiliza el

LIBOR a seis meses fijado en el momento del pago anterior, de modo que se usa un *spot rate* con tenor $m = 1/2$ para el siguiente pago en t

- Los pagos variables se fijan con 6 meses de antelación (coincidiendo con el *tenor* m del LIBOR a 6 meses) debido al significado del LIBOR (el tipo de interés de vencimiento fijo, que se determina en $t - m$ y se paga en t). Cada pago variable del *swap* es como una inversión única del principal nocional 6 meses antes del pago de interés

- También existe un *swap* llamado LIBOR *in arrears swap*, que es un *swap* en donde el interés LIBOR se paga en la fecha de pago es el tipo de interés a 6 meses que se fija ese mismo día, no el que se ha fijado con 6 meses de anterioridad

- Los *swaps* se crearon principalmente para explotar la ventaja comparativa, que ocurre cuando dos empresas que quieren pedir dinero prestado cotizan a tipos de interés fijos y flotantes, de modo que al intercambiar pagos entre ellas se benefician y al mismo tiempo benefician al intermediario que cierra el trato. Esto se puede entender mejor con el siguiente ejemplo:

  - Dos compañías A y B que quieran tomar prestado X en T años cotizan a los siguientes tipos de interés fijos y variables:

	Fixed	Floating
A	7%	six-month LIBOR + 30 bps
B	8.2%	six-month LIBOR + 100 bps

  - En el tipo variable normalmente se observa una prima de riesgo, la cual dependerá de la calidad crediticia de cada empresa. En este caso, el riesgo percibido sería mayor para la compañía B

  - Idealmente, la compañía A quiere tomar prestado al tipo de interés variable y B al tipo fijo, dado que la empresa B es más arriesgada y la empresa A es más segura, habiendo la posibilidad de reducir el riesgo de B y el coste de A. Si se mira el coste de financiación total con los tipos de interés que tomarían, entonces:

A	six-month LIBOR + 30 bps (floating)
B	8.2% (fixed)

$$Cost_1 = (LIBOR + 0.003) + 0.082 = LIBOR + 0.085$$

- No obstante, la empresa A tiene una ventaja comparativa en el mercado de capitales con interés fijo y la empresa B la tiene con intereses variables, visto a través de la diferencia entre tipos de interés para cada caso y comparándolas. Esto permite obtener una reducción del coste de financiación total, ahorrando en costes:

$$For\ A: \begin{cases} Fixed: \quad 0.07 - 0.082 = \ -0.012 \\ Float: \quad LIBOR + 0.003 - LIBOR - 0.01 = -0.007 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ -0.012 < -0.007 \ \Rightarrow \ A\ pays\ relat. less\ with\ fixed$$

$$For\ B: \begin{cases} Fixed: \quad 0.082 - 0.07 = \ 0.012 \\ Float: \quad LIBOR + 0.01 - LIBOR - 0.003 = 0.007 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ 0.012 > 0.007 \ \Rightarrow \ B\ pays\ relat. less\ with\ float$$

$$Cost_2 = (LIBOR + 0.01) + 0.07 = LIBOR + 0.08$$

$$\Rightarrow \ Cost_2 - Cost_1 = 0.005$$

- Si ambas empresas cogieran la opción con ventaja comparativa, entonces A pagaría el 7% y B el LIBOR+1%. En esta situación, uno puede ver la utilidad de un *swap* asumiendo que ambas empresas entran en un *swap*, y se asume que el tipo de interés variable que paga A es el LIBOR y el fijo que paga B es el 6.95%

  - Desde la perspectiva de A, la empresa paga 7% de interés de su préstamo y recibe 6.95% de interés del *swap* por parte de B. De este modo, la empresa paga un neto de LIBOR+0.05% (teniendo en cuenta el flujo para B), lo cual hace que el interés que pague sea variable (como querían originalmente) y se ahorre 0.25% que si hubiera pedido el préstamo a un LIBOR+0.3%

$$LIBOR + 7\% - 6.95\% = LIBOR + 0.05\%$$

  - Desde la perspectiva de B, la empresa paga el LIBOR+1% y 6.95% a A, mientras que reciben el LIBOR de A por el *swap*. Esto hace que paguen un total de 7.95%, lo cual es 0.25% menos que si cogieran el fijo a 8.2%

$$LIBOR + 1\% + 6.95\% - LIBOR = 7.95\%$$

  - El valor de 6.95% se puede obtener considerando la condición de entrada al contrato, donde A solo entra si obtiene un beneficio del *swap*, y fijando la parte variable y el beneficio que se llevaría A. De este modo, se iguala el tipo de interés variable que A pagaría al coste al entrar en un *swap*, pero este interés no se fija de esta manera en la práctica (solo en el ejemplo)

$$LIBOR + 7\% - x + 0.25\% = LIBOR + 0.3\%$$

$$\Rightarrow \ x = 6.95\%$$

- Normalmente las dos contrapartes negocian a través de un intermediario los tipos fijos a pagar (normalmente llevándose una comisión), por lo que el ahorro total se parte dependiendo de la negociación

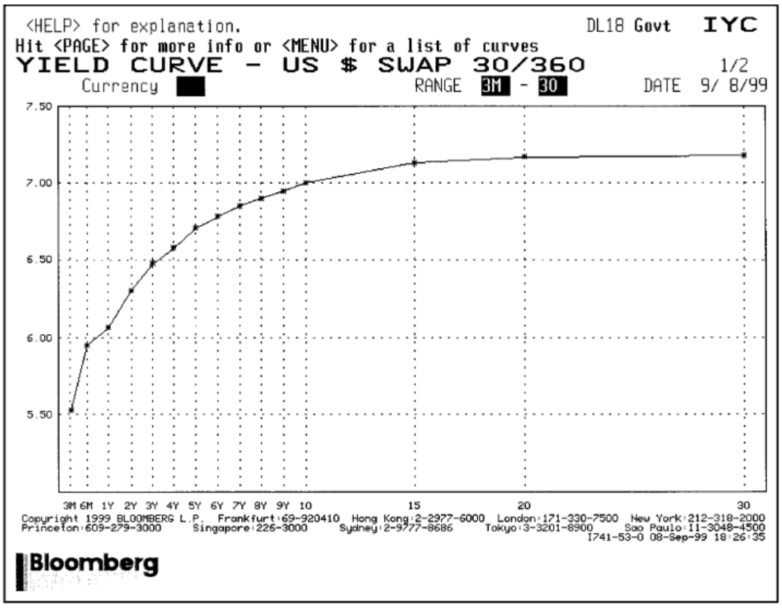
- A partir de entender el funcionamiento básico de los *swaps*, es posible definir la curva de *swaps*, las técnicas usadas para obtener la curva y la relación que tienen con los bonos

  - Cuando se entra en el contrato *swap*, lo usual es que el valor del contrato sea nulo para ambas contrapartes, lo cual se consigue fijando un tipo de interés fijo adecuado. De este modo, el valor actual de la parte fija y el de la parte variable tienen el mismo valor al principio del contrato (el neto es nulo)

    - Si la parte fija es muy alta, el contrato tiene más valor para la parte que recibe el interés fijo, y si es muy baja, tiene menos valor para esta parte. Esto haría que una de las dos partes no quisiera entrar en el contrato, de modo que debe haber un punto en el que el contrato sea igual de valioso para ambos, y este es cuando el contrato no vale nada para ninguno

    - Hay dos maneras de poder entender la fijación del tipo de interés fijo para que el contrato sea cero: a través de entender el *swap* como un contrato de bonos, haciendo que la *yield curve* determine cómo fijar este interés, o a través del mercado de *swaps*. Esto último se debe a que, el mercado de *swaps* es tan líquido (muchos vencimientos) que se puede interpretar que son los precios de los *swaps* los que determinan lo de los bonos

    - Los tipos de interés de la parte fija de un *swap* se cotizan a varios vencimientos, por lo que se puede montar una curva de *swaps* o *swap curve*



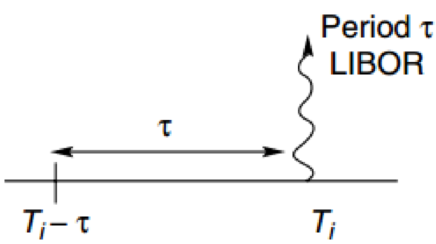
- Hay dos partes de un *swap*: la parte fija y la parte variable, las cuales se pueden relacionar con los bonos

  - Los pagos de interés fijo, como se conocen en cuantía de unidades monetarias (se multiplica el interés fijo por el principal nocional), se pueden ver como la suma de bonos de cupón cero. Si el tipo de interés fijo es r_s y el tiempo entre pagos es τ, entonces los pagos fijos resultan en la siguiente cantidad:

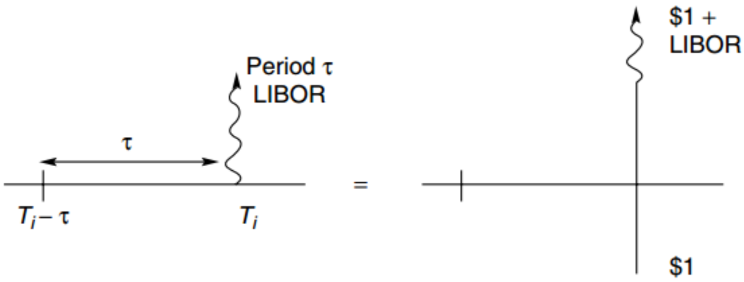
$$r_s \tau \sum_{i=1}^{N} Z(t; T_i)$$

  - Este es el valor actual (en el momento t) de todos los pagos, habiendo N pagos que se dan en cada T_i y τ es el momento entre cada T_i (entonces $\tau = T_i - T_{i-1}$ para cada i) que es fijo para todos los pagos. Esto se multiplica por el principal nocional P, el cual se asume que es $P = 1$ para el desarrollo

  - Para poder ver la relación entre la parte flotante y los bonos, se comparan los flujos de caja de uno y de otro. En el momento T_i se considera el primer pago de $r_\tau \tau$ del principal nocional, donde r_τ es el LIBOR en un periodo τ que se fija en el periodo $T_i - \tau$

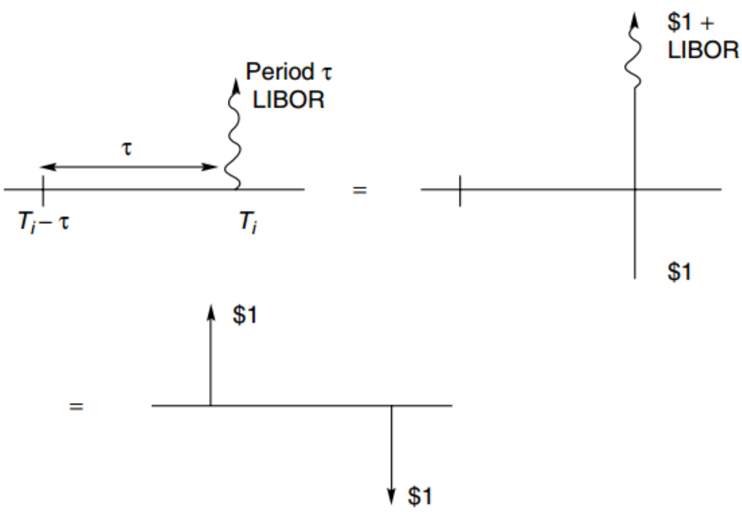


- Si se sumara y se restara el principal nocional en T_i, entonces, como se resta y se suma 1, el valor actual de estos flujos de efectivo es equivalente al valor actual del pago variable $r_\tau \tau$ en T_i



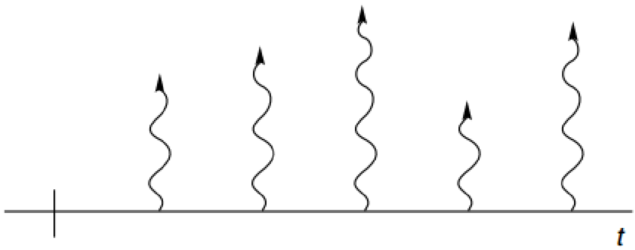
$PAYMENT$	1	2
T_i	$r_\tau \tau$	$1 + r_\tau \tau - 1$
$T_i \ - \tau$	0	0

- Como el LIBOR es el tipo de interés que se paga en un depósito, y este se ha fijado en $T_i - \tau$ y se aplica durante $\tau = T_i - (T_i - \tau)$, entonces $1 + r_\tau \tau$ en el momento T_i es lo mismo que 1 en $T_i - \tau$. Esto hace que se pueda ver este primer pago variable como dos bonos de cupón cero, que es lo mismo que depositar un dólar en $T_i - \tau$ (para el primer bono) y extraer otro dólar en T_i (para el segundo cupón) resulte en una cuantía restante de $r_\tau \tau$ (interés del primer cupón)

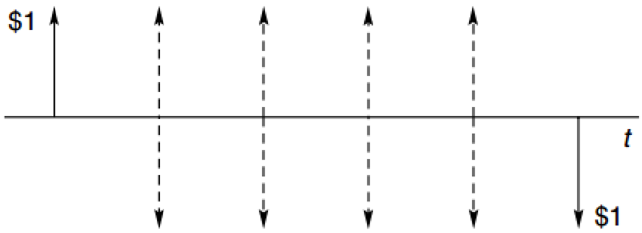


$PAYMENT$	1	2	3
T_i	$r_\tau \tau$	$1 + r_\tau \tau - 1$	$(1 + r_\tau \tau) - 1$
$T_i \ - \tau$	0	0	1

- Sumando ahora todos los pagos de la parte variable, se puede ver como la equivalencia entre un pago variable y dos bonos permite cancelar todos los flujos de efectivo excepto por el primer flujo y el último, que correspondería a la operación de invertir un dólar en un bono y pagar el otro, quedándose solo con el interés:



=



$$1 - Z(t;T_N)$$

- Juntando tanto la parte fija como la variable, se puede obtener el valor del *swap* para ambas partes y una expresión para el tipo de interés fijo del *swap*:

$$V_{fixed} = r_s\tau \sum_{i=1}^{N} Z(t;T_i) - 1 + Z(t;T_N)$$

$$V_{float} = 1 - Z(t;T_N) - r_s\tau \sum_{i=1}^{N} Z(t;T_i)$$

  - El resultado no depende de ningún modelo matemático de bonos o *swaps*

  - Esta fórmula se puede generalizar fácilmente al caso en el que $P \neq 1$ multiplicando todo por P:

$$V_{fixed} = P\left[r_s\tau \sum_{i=1}^{N} Z(t;T_i) - 1 + Z(t;T_N)\right]$$

$$V_{float} = P\left[1 - Z(t;T_N) - r_s\tau \sum_{i=1}^{N} Z(t;T_i)\right]$$

- Como el valor para ambas partes del contrato debe ser nulo, entonces se puede obtener el tipo de interés fijo (por el cual cotiza un *swap*) igualando la expresión para la parte fija a cero:

$$r_s \tau \sum_{i=1}^{N} Z(t; T_i) - 1 + Z(t; T_N) = 0 \ \Rightarrow \ r_s = \frac{1 - Z(t; T_N)}{\tau \sum_{i=1}^{N} Z(t; T_i)}$$

- El tipo de interés variable que se usa es uno de referencia como el LIBOR o el EURÍBOR, y normalmente se le puede añadir una prima adicional

o Los *swaps* son tan líquidos y existen para un gran número de vencimientos que sus precios determinan la *yield curve* y no al revés. En la práctica, a uno se le da $r_s(T_i)$ para muchos vencimientos T_i y uno utiliza la fórmula anterior para calcular los precios de los bonos de cupón cero, obteniendo así la *yield curve*

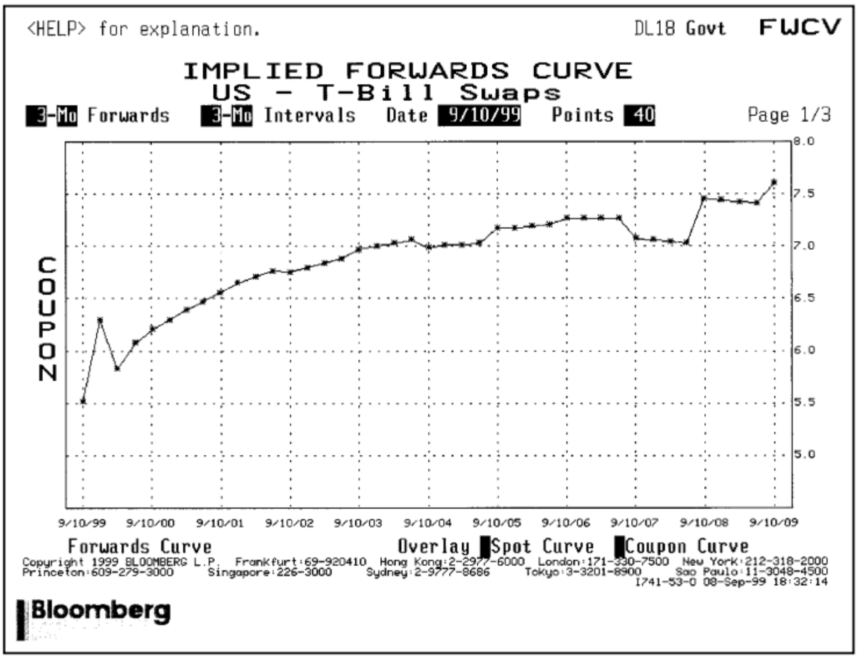
- Para el primer punto de la curva de factores de descuento (la de los tipos de interés fijos del *swap* o *swap curve*) se debe resolver la siguiente ecuación:

$$r_s(T_1) = \frac{1 - Z(t; T_1)}{\tau Z(t; T_1)} \ \Rightarrow \ Z(t; T_1) = \frac{1}{1 + r_s(T_1)\tau}$$

- Después de encontrar los primeros *j* factores de descuento, el $j + 1$ se da por la siguiente expresión:

- De este modo, son los tipos de interés fijos usados en los *swaps* los que se usan para obtener la *yield curve*, la cual a su vez se basa en los *forward rates* y hace que se obtenga una curva de *forward rates* implícita (a través de la fórmula anteriormente vista)

$$r_s(T_{j+1}) \ \Rightarrow \ Z(t; T_{j+1}) \ \Rightarrow \ y_{j+1} = -\frac{\ln\left(Z(t; T_{j+1})/Z(t; T_j)\right)}{\tau}$$



- Lo que se ha desarrollado anteriormente es la teoría para un contrato de *swap* de tipos de interés común, pero hay varios tipos de contratos más y se le pueden añadir varias características que compliquen su valoración (y las haga dependientes de modelos)
    - Se le pueden añadir características de opciones a un *swap.* Un *callable swap* o *puttable swap* permite que una parte o la otra cierren el contrato en algún momento anterior a su vencimiento natural
        - Si uno recibe una parte fija y la parte variable incrementa más de lo que se esperaba, por ejemplo, entonces uno querría cerrar la posición (y viceversa)
        - Matemáticamente, esto se podría modelar como una opción americana y dependería de un modelo matemático concreto
    - Otros tipos de características que se le pueden añadir a un *swap* son la de extensión o la de amortización
        - Un *swap* extendible es un *swap* en donde una de las partes puede extender el vencimiento del *vanilla swap* manteniendo el tipo de interés fijo original
        - Un *index amortizing rate swap* es un *swap* en el que el principal decrece con el tiempo acorde a un esquema predefinido. Este tipo de *swap* es más complicado cuando la amortización depende de un índice como el LIBOR en el momento en el que se hace el intercambio de pagos

- También existen varios otros tipos de *swap*, tales como los siguientes:

  - El *basis rate swap*, que tiene sus pagos variables definidos en términos de dos tipos de interés distintos, los cuales se suelen usar cuando uno está expuesto a riesgo de base o *basis risk* (al financiarse y prestar a tipos de interés diferentes)

  - El *equity swap*, que se basa en dar un pago (fijo o variable) sobre un tipo de interés y otro sobre un índice de acciones (no se intercambia el principal). Este componente de acciones se suele medir por el rendimiento total de un índice, donde los dividendos y las ganancias de capital se incluyen

  - El *equity basis swap*, que es un intercambio de pagos basado en dos índices de acciones diferentes

  - El *currency swap*, en donde se intercambian pagos de interés en dos divisas diferentes. Los tipos de interés pueden ser ambos fijos, variables, o uno de cada, y como en los *swaps* de tipos de interés, sí hay un intercambio de principales (en dos divisas diferentes) al principio del contrato y al final

  - Este último tipo de *swap* se suele valorar calculando el valor actual de los flujos de caja en cada divisa y transformando las cantidades con el tipo de cambio actual (*spot exchange rate*). Cuando hay dos tipos variables, se descomponen los flujos en una cartera de bonos (si se puede) y se valora de la misma manera

Date	Days	\$ LIBOR	Pay (\$m)	£ LIBOR	Pay (£m)	GBP/USD	Net payment (\$)
06/07/04		1.68%	100	4.73%	−54.350780	1.8399	0
06/01/05	184	2.63%	−0.858667	4.57%	1.295961	1.8754	1,571,778
06/07/05	181	3.41%	−1.322306	4.39%	1.231708	1.7578	842,790
06/01/06	184	4.39%	−1.742889	4.36%	1.202805	1.7718	388,241
06/07/06	181	5.31%	−2.207194	4.60%	1.175109	1.8365	−49,108
08/01/07	186	5.13%	−2.743500	5.22%	1.274042	1.9347	−278,611
06/07/07	179		−102.550750		55.742130	2.0131	9,663,732

- A partir de entender un *swap*, se puede introducir la medida de PV01 y DV01, la cual es una medida similar a la de duración para los bonos y se puede aplicar a varios activos de renta fija

  - Para un *swap* no es posible desarrollar el concepto de *yield*, por lo que no hay un tipo de interés interno para el cual, aplicado a todos los flujos, se obtenga el valor de mercado del *swap*

    - Esto ocurre porque los flujos de caja de un *swap* no son todos positivos, sino que pueden ser negativos

- Como no se puede encontrar un equivalente al *yield*, no se puede derivar ni la duración ni la convexidad de un *swap*, por lo que se necesitan medidas alternativas para analizar la sensibilidad de un *swap* a los tipos de interés

- Una sensibilidad para los tipos de interés que se puede aplicar en estos casos es el PV01 (de *present value 01*), que expresa el cambio en el valor actual de una secuencia de flujos de caja cuando la *yield* curve se desplaza hacia abajo 1 punto base o 0.01%

  - Esto hace que el PV01 de una cartera de bonos sea casi (no igual) como su duración en dólares. En el caso de un bono, el PV01 mide el cambio absoluto en el valor del bono cuando hay un decrecimiento de un 0.01% en los tipos de interés

  - La suposición de que todos los tipos de interés se desplazan igual (independientemente de su vencimiento) está implícita

  - La importancia de esta métrica es que se puede usar para cualquier secuencia de flujos de caja, positivos o negativos

- De manera general, se puede definir el PV01 para cualquier secuencia de flujos de caja asociados a un conjunto de *spot rates* de vencimientos que concuerdan con la fecha de pago de sus flujos de caja

  - Se usa notación vectorial para denotar los flujos de caja $\boldsymbol{c}$ y los tipos de interés $\boldsymbol{r}$, y se denota el valor actual por la función $PV(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{c} = \left(C_{t_1}, \dots, C_{t_1}\right) \quad \& \quad \boldsymbol{r} = \left(R_{t_1}, \dots, R_{t_n}\right)$$

  - Denotando por $\boldsymbol{r}^{-}$ los tipos de interés cuando se reducen por 0.01%, entonces PV01 se define de la siguiente manera:

$$PV01(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}) = PV(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}^{-}) - PV(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r})$$

  - Para un solo bono, la duración y el PV01 serán muy iguales, difiriendo solo en el quinto decimal o así. No obstante, cuando se tiene una cartera de bonos, entonces PV01 es la sensibilidad exacta del desplazamiento paralelo, mientras que la duración es solo la sensibilidad aproximada

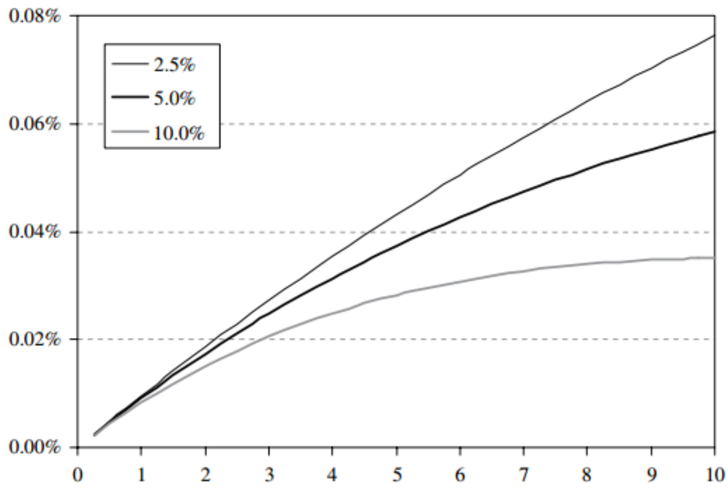
  - Ambas medidas solo coincidirían si el desplazamiento afectara a todos los *yields* de todos los bonos por igual, lo cual es muy improbable. Por lo tanto, PV01 es una medida más exacta que la duración para los bonos

- Considerando un solo flujo de caja en el momento t_i, donde r_{t_i} es el tipo de descuento asociado, se define $\delta 01$, la sensibilidad del factor de descuento a una reducción del 0.01%, de la siguiente manera:

$$\delta 01_{t_i} = \left[\left(1 + r_{t_i} - 0.01\%\right)^{-(t_i - t)} - \left(1 + r_{t_i}\right)^{-(t_i - t)} \right]$$

$$\delta 01_{t_i} = \left[e^{-\left(r_{t_i} - 0.01\%\right)(t_i - t)} - e^{-r_{t_i}(t_i - t)} \right]$$

  - El siguiente gráfico muestra $\delta 01_{t_i}$ como una función de t_i para diferentes valores de $\boldsymbol{r}$ (asumiendo que son iguales para todos los vencimientos, por lo que su estructura es plana). Es por esto que esta medida se considera una medida de sensibilidad por *tenor*, dado que depende del *tenor* t_i (desde el momento actual t)



  - Usando esta notación, se puede expresar el PV01 de un y todos los flujos de caja en cada momento t_i (donde el vencimiento se denota por T) de la siguiente manera:

$$PV01_{t_i} = C_{t_i}\, \delta 01_{t_i} \;\; \Rightarrow \;\; PV01 = P\delta 01_T + \sum_{i=1}^{N} C_{t_i} \delta 01_{t_i}$$

Las relaciones de valoración

- La noción de valor relativo permitirá formar opiniones sobre el valor de un activo y poder crear una estrategia para beneficiarse del valor relativo
  - El valor relativo se interpreta como el valor de un activo respecto a otro, y aunque el valor de un activo se suele usar para describir si un activo es caro o barato, esto se suele medir relativamente a un *benchmark*.

- Por lo tanto, se define el valor relativo como la manera óptima en la que una visión particular del mercado se puede expresar

- Usando esta definición de valor relativo, el inversor buscaría estructurar alternativas que pueden tener la misma exposición pero que ofrecen un mayor rendimiento (se busca algo barato en comparación)

- Otra definición del valor relativo se relaciona con la noción de arbitraje, pero esta no se usa para el desarrollo

- Además de comprar el instrumento subyacente, un inversor también debe considerar si su rendimiento puede mejorarse a través de usar otros activos

  - Algunos de estos activos podrían ser un futuro sobre el activo de renta fija (un bono, por ejemplo), entrando en la parte larga; un *swap* de tipos de interés, entrando en la parte fija; y una opción acorde a las expectativas del movimiento de los tipos del mercado, ejecutándola cuando sea beneficioso

  - Este marco de *spot-forward-swap-option* puede servir como un marco base para diseñar estrategias de *trading*

- En el centro del análisis de valor relativo reside un esquema triangular que da una representación visual de las relaciones que existen entre cuatro componentes principales de cualquier mercado y sirve para poder identificar oportunidades de *trading* y relaciones de valoración