複素解析学I演習2023年（チョイ）

問 1 (フックス群としてのモジュラー群)．複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合 A に対して、成分 a,b,c,d が A の元で $ad-bc=1$ を満たす一次分数変換 $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ の集合を $\mathrm{PSL}(2,A)$ と書く．特に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ を**モジュラー群**と呼ぶ．上半平面 $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$ の部分集合 $D:=\{z\in\mathbb{H}:|z|>1,\ |\mathrm{Re}\,z|<\frac{1}{2}\}$ を定義する．

(1) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の元 f は全単射写像 $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ を定義することを示せ．

(2) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は $S(z):=-1/z$ と $T(z):=z+1$ によって生成されることを示せ．つまり、全ての元が $S^{\pm1}$ と $T^{\pm1}$ の有限回の合成として表れることを示せ．

(3) 集合 D は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ の**基本領域**であることを示せ．つまり、次の二つが成り立つことを示せ：

 (a) 任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して $f(z)\in\overline{D}$ を満たす $f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が少なくとも一つ存在する．

 (b) 任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して $f(z)\in D$ を満たす $f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が多くとも一つしか存在しない．

(4) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}$ に**真性不連続に作用**することを示せ．つまり、任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して軌道 $\{f(z):f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\}$ が離散集合であることを示せ．

問 2 (カラテオドリ級関数集合の極点)．開単位円板上で定義された正則関数 f が $f(0)=1$ を満たすとする．もし任意の $|z|<1$ を満たす複素数 z に対して $\mathrm{Re}\,f(z)>0$ ならば、f を**カラテオドリ級**の関数という．関数 f が冪級数展開 $f(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$ を持つとする．

(1) 正の整数 k と実数 $0<r<1$ に対して次の式を示せ：

$$c_kr^k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta.$$

(2) 次の二つの条件が同値であることを示せ：

 (a) 関数 f がカラテオドリ級である．

 (b) 任意の正の整数 n に対して点 $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{C}^n$ は $\theta\in[0,2\pi)$ によって媒介変数表示された曲線 $(e^{-i\theta},\cdots,e^{-in\theta})\in\mathbb{C}^n$ の凸包絡の元である．

問 3 (アールフォルス・清水標数)．複素平面上の有理型関数 f を考える．次のように $r\geq 0$ に対する関数 $A(\cdot,f)$ を定義する：

$$A(r,f):=\frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{x^2+y^2}\leq r}f^{\#}(x+iy)^2\,dx\,dy,\qquad \text{ただし、}f^{\#}(z):=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2},\quad z\in\mathbb{C}.$$

関数 $f^{\#}$ を f の**球面導関数**と呼ぶ．

(1) 任意の点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して、

$$\frac{1}{\pi}f^{\#}(x+iy)^2=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

を満たす実平面 $\mathbb{R}^2$ 上の実関数 P と Q を求め、関数 $K(x,y):=1+|f(x+iy)|^2$ を用いて表せ．

(2) グリーンの定理と偏角の原理を用いて $r \geq 0$ に対して次の式が成り立つことを示せ：

$$\int_0^r A(t,f)\frac{dt}{t} = \int_0^r n(t,f)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}\,d\theta - \log\sqrt{1+|f(0)|^2}.$$

ただし、$n(r,f)$ は閉円板 $\overline{B(0,r)}$ 内にある重複度を込めて数えた f の極の数である．左辺の関数を f の**アールフォルス・清水標数**と呼ぶ．

(3) 球面導関数 $f^{\#}$ が有界ならば、ある定数 $C>0$ が存在して、全ての $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \leq Ce^{|z|^2}$ であることを示せ．特に、f は $\mathbb{C}$ 全体上正則である．

問 4 (四分円上のディリクレ問題)．領域 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}$ 上に定義された調和関数 $v \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ が次の境界値条件を満たすとする：各点 $(x_0,y_0) \in \partial\Omega$ に対して

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y_0>0, \\ 0 & \text{if } y_0=0 \text{ and } 0<x_0<1. \end{cases}$$

(1) シュワルツの鏡像の原理を用いて v は領域 $\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x>0\}$ 上の調和関数 $\tilde{v} \in C^2(\widetilde{\Omega},\mathbb{R})$ に拡張されることを示せ．

(2) 適切な等角変換とポアソン積分を用いて v を求めよ．