向きづけられた実ベクトルバンドルの特性類 (概略)

B をパラコンパクトな Hausdorff 空間とする. 向きづけられた実ベクトルバンドル

$$\xi = (\mathbb{R}^n \longrightarrow E \longrightarrow B,\ GL^+(n,\mathbb{R}))$$

の構造群は常に $SO(n)$ まで簡約することができる. 普遍主 $SO(n)$-バンドルとして, 可縮な空間である (無限次元) Stiefel 多様体 $V_n^O(\mathbb{R}^\infty)$ への $O(n)$-作用を $SO(n)$ へ制限することで得られるバンドル

$$\xi_{SO(n)} = \big(SO(n) \longrightarrow V_n^O(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} V_n^O(\mathbb{R}^\infty)/SO(n),\ SO(n)\big)$$

をとることができる. ここで

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty) := V_n^O(\mathbb{R}^\infty)/SO(n) = BSO(n)$$

は向きづけられた $\mathbb{R}^\infty$ の n 次元部分空間の集合であり, **有向 Grassman 多様体** と呼ばれている. 連続写像 p は n-枠 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty)$ に対して, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を順序基底とする $\mathbb{R}^\infty$ の向きづけられた部分空間を対応させる写像である. 向きを忘れる写像

$$\pi\colon \widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$$

は主 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-バンドル (被覆空間)

$$\eta = \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty),\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$$

を定める. ここで, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = O(n)/SO(n) = O(1)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty)$ に各部分空間の向きを逆にする写像として作用している.

問 1[1] $w_1(\eta \times_{O(1)} \mathbb{R}) = w_1 \in H^1(\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ であることを示せ. ここで w_1 は普遍 $O(n)$-バンドルの第 1 Stiefel-Whitney 類である.

主バンドル $\xi_{SO(n)}$ に対するホモトピー完全列より

$$\pi_1\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty)\big) \cong \pi_0(SO(n)) = \{1\}$$

であるから

$$H^1\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \cong \mathrm{Hom}\left(\pi_1\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty)\big), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) = 0$$

である. よって普遍ベクトルバンドル γ_n の π による引き戻し $\widetilde{\gamma}_n := \pi^*\gamma_n$ は, $w_1(\widetilde{\gamma}_n) = 0$ を満たし, 向きづけ可能である. 実際, $\widetilde{\gamma}_n$ の向きづけられた部分空間 $V \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty)$ 上のファイバー V に対して V の向きをそのまま与えれば, それが $\widetilde{\gamma}_n$ の自然な向きとなる. ベクトルバンドル $\widetilde{\gamma}_n$ は**階数 n の向きづけられた実ベクトルバンドルの普遍ベクトルバンドル**となっている.

[1] レポートで解く問題の 1 つとしてよい. 問 2 についても同様.

定理 (1) 整数 $i \geq 2$ に対して $\widetilde{w}_i := \pi^*(w_i) \in H^i\bigl(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\bigr)$ とするとき,

$$H^*(BSO(n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*\bigl(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\bigr) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \ldots, \widetilde{w}_n]$$

が成り立つ. $\pi^*(w_1) = 0$ であることに注意せよ.

(2) 可換環 R が $2x = 1$ なる $x \in R$ をもつとき (たとえば $\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, 奇素数 p に対する $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ など),

$$H^*(BSO(n); R) = H^*\bigl(\widetilde{\mathrm{Gr}}_n(\mathbb{R}^\infty); R\bigr) \cong \begin{cases} R\bigl[\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_{\frac{n}{2}-1}, e(\widetilde{\gamma}_n)\bigr] & n\text{: 偶数} \\ R\bigl[\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_{\frac{n-1}{2}}\bigr] & n\text{: 奇数} \end{cases}$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{p}_i := \pi^*(p_i) = p_i(\widetilde{\gamma}_n)$ であり, $e(\widetilde{\gamma}_n)$ は上記のように自然に向きづけられたベクトルバンドル $\widetilde{\gamma}_n$ の Euler 類である.

(3) (2) と同様の環 R に対し

$$H^*(BO(n); R) = H^*(\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty); R) \cong R\bigl[\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\bigr]$$

が成り立つ.

注意 (2) において n が偶数のとき

$$\widetilde{p}_{\frac{n}{2}} = e(\widetilde{\gamma}_n) \cup e(\widetilde{\gamma}_n) \in H^{2n}(BSO(n); R)$$

となっている. 一方で n が奇数のとき

$$e(\widetilde{\gamma}_n) = \frac{1}{2} \cdot 2e(\widetilde{\gamma}_n) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

となることが, 以前に出題したレポート問題の結果より分かる.

上記の定理の証明について, (1) は $\eta \times_{O(1)} \mathbb{R}$ に対して Gysin 完全列を適用すればよい. (2), (3) については

- J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press,
- 中岡 稔,『位相幾何学 —ホモロジー論—』, 共立出版

を参照せよ.

問 2 上記の定理の証明を与えよ.