確率解析入門

1　確率過程

定義 1.1 (Filtered probability space)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. $\mathbf{T} = [0,T], [0,\infty), \mathbb{N} \cup \{0\}$ などとする.

(1) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が filtration とは次が成立する時に言う.
  (i) 任意の $t \in \mathbf{T}$ に対し, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ は部分 σ-加法族 .
  (ii) $s \le t$ ならば $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}})$ を filtered probabilty space (フィルトレーション付き確率空間) という.

(2) $\mathbf{T} = [0,T], [0,\infty)$ とする. Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が右連続とは

$$\forall t \in \mathbf{T},\ \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

  が成立することを意味する.

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ という時間列と σ-field の増大列 $\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{F}_{t_1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{t_n} \subset \cdots$ の場合も $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ の場合と同一視して考える.

Filtered probability space には以下の条件を課して考えることが多い. この講義でも Section 2.2 以後は常にこの条件を課すことにする.

定義 1.2 (通常の条件 (usual condition))**.** Filtered probaility space $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}})$ が通常の条件 (usual condistions) を満たすとは, 次が成立する時に言う:

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備である.

(2) $\mathcal{N}$ を $P(A) = 0$ となる $A \in \mathcal{F}$ 全体からなる集合とする. $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ が成立する. (すなわち, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t\ \forall t$.)

(3) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ は右連続.

定義 1.3. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{F_t\}_{t\in\mathbf{T}})$ を filtered probability space とする. Ω 上の確率変数の族 $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を確率過程という. 以下, X_t は $\mathbb{R}^d$ 値とする.

(1) $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が $\mathcal{F}_t$-適合とは, X_t が $\mathcal{F}_t$-可測 $(\forall t \in \mathbf{T})$ のときに言う.

(2) $\{X_t\}$ が可測とは,

$$X : \mathbf{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

  が (t, ω) に関して可測.

(3) $\mathbf{T}=[0,T],[0,\infty)$ とする．$\{X_t\}$ が (右, 左) 連続=(right continuous, left continuous,continuous) とは,

$$t(\in \mathbf{T}) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d \qquad \forall \omega \in \Omega$$

が (右, 左) 連続.

(4) $\mathbf{T}=[0,T],[0,\infty)$ とする．$\{X_t\}$ が $\mathcal{F}_t$-発展的可測 (progressively measurable) とは, 任意の $t \in \mathbf{T}$ に対し,

$$X : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

は $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測.

(5) $\mathbf{T}=[0,T],[0,\infty)$ とする．時間区間 $\mathbf{T}$ で定義された $\mathbb{R}$ 値 $\mathcal{F}_t$ 適合左連続確率過程全体を可測にする可測空間 $(\mathbf{T}\times\Omega, \mathcal{B}(\mathbf{T})\times\Omega)$ 上の最小の σ-field を可予測 σ-field (predictable σ field) という．可予測 σ-field に関して可測な時間区間 $\mathbf{T}$ で定義された確率過程を可予測過程 (predictable process) という.

注意 1.4. (1) 確率過程が有限時間で考えている空間を出てしまう (爆発する) 場合もあり得る．その場合は, 爆発した時間に extra な点 cemetery (or coffin) point (Δ という記号がよく使われる) に行きそこに留まると考えることが多い.
(2) (1) 以外に確率積分などを考える際に確率 0 の事象であるが

$$\int_0^t f(s,\omega) dA_s(\omega) = +\infty$$

という場合を許容して考えた方が便利なことが多い．ここで, $f(s,\omega)$ は非負値確率過程, $A_t(\omega)$ は連続単調増加確率過程である．これはルベーグ積分の定義の場合と同様であると言える．そこで, このような意味で $+\infty$ の値を許容して考えることにする．(式 (3.1) とそれに続く解説を参照)

命題 1.5. $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が $\mathbb{R}^d$ 値右 (or 左) 連続 $\mathcal{F}_t$-適合確率過程とする．$\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$-発展的可測である.

Proof. 右連続のときに示す．t を固定する．$n \in \mathbb{N}$ とする.

$$X_s^n(\omega) := \begin{cases} X_{\frac{k}{n}t}(\omega) & s \in I_k := [\frac{k-1}{n}t, \frac{k}{n}t) \quad 1 \le k \le n-1 \\ X_t(\omega) & s \in I_n := [t(1-\frac{1}{n}), t] \end{cases}$$

とおく. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$\begin{aligned}\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \mid X_s^n(\omega) \in A\} &= \cup_{k=1}^n \Big(I_k \times \{\omega \mid X_{\frac{k}{n}t}(\omega) \in A\}\Big) \\ &\in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

である. $\forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$$

なので, $\{X_s\}_{0\le s\le t}$ は $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測. $\square$

命題 1.6. (1) $\mathbf{T} = [0,\infty)$ とする.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \Big\{A \times (s,t] \,\Big|\, A \in \mathcal{F}_s, 0 < s < t < \infty, \Big\} \\ \cup \{A \times [0,t] \mid A \in \mathcal{F}_0, t > 0\}\end{aligned}$$

とおくと $\mathcal{I}$ は π-system であり $\mathcal{I}$ は可予測 σ field を生成する.

(2) 可予測過程は発展的可測である.

可予測過程はジャンプ過程を扱う時に重要な役割を担うがここでは, 連続確率過程のみを扱うので発展的可測過程を主に対象とする.

定義 1.7. $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}})$ を filtered measurable space とする.

(1) $\tau : \Omega \to \mathbf{T} \cup \{+\infty\}$ が $\mathcal{F}_t$-stopping time (停止時間)

$$\iff \qquad \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbf{T}.$$

(2) $\mathcal{F}_t$ stopping time τ に対して

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbf{T}\}.$$

注意 1.8. (1) $t_0 \in \mathbf{T}$ を定数とする. $\tau := t_0$ は停止時間であり, $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$ である.

(2) $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 X_t が $\mathcal{F}_t$-適合とする. $E(\neq \emptyset) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ とする.

$$\sigma_E(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \ge 0 \mid X_t(\omega) \in E\} & \text{集合が空でなければ} \\ +\infty & \text{集合が空のとき} \end{cases}$$

と定めると $\{\sigma_E \le t\} = \cup_{s=0}^t \{X_s \in E\} \in \mathcal{F}_t$ となるので, σ_E は $\mathcal{F}_t$-停止時間である. $\mathbf{T} = [0,\infty)$ のときは, 後で考えるがこれほど単純でない.

命題 1.9. τ, σ を $\mathcal{F}_t$-stopping time とする.

(1) $\mathcal{F}_\tau$ は σ-field であり, τ は $\mathcal{F}_\tau$-可測.

(2) $\mathbf{T} = [0, \infty)$ とし, $\{\mathcal{F}_t\}$ は右連続とする.

(i) τ が $\mathcal{F}_t$-停止時間 $\Longleftrightarrow \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in \mathbf{T}$.

(ii) τ : $\mathcal{F}_t$-stopping time とする.

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Longleftrightarrow A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in \mathbf{T}.$$

(3) $\mathbf{T} = [0, \infty)$ とする. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が $\mathbb{R}^d$-値 $\mathcal{F}_t$-発展的可測確率過程, τ を $\mathcal{F}_t$-停止時間とする. このとき, $X_\tau(\omega) 1_{\{\tau(\omega) < \infty\}} := X_{\tau(\omega)}(\omega) 1_{\{\tau(\omega) < \infty\}}$ は $\mathcal{F}_\tau$-可測である.

Proof. (1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ は自明. $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}_\tau$ も自明. $A \in \mathcal{F}_\tau$ とする.

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

より $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ であり, すべて示された.

$a \in \mathbf{T}$ とする. $\{\tau \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$ を示せばよい.

$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$$

ゆえ τ は $\mathcal{F}_\tau$-可測.

(2) (i) を示す.

$$\{\tau < t\} = \cup_{n=1}^\infty \{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

より $\Longrightarrow$ は常に正しい. 逆を示す.

$$\{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^\infty \{\tau < t + \frac{1}{n}\} = \cap_{n=N}^\infty \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{N}} \ \forall N \in \mathbf{T}.$$

Filtration の右連続性より $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

(ii) を示す. $\Longrightarrow$ は上記と同じで常に正しい. 逆を示す.

$$A \cap \{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^\infty \left(A \cap \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \right) \in \cap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_t.$$

(3) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ とする. $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ を示せば良い.

$$\begin{array}{ccc} \{\omega \mid \tau(\omega) \leq t\} & \xrightarrow{\Phi} & [0, t] \times \Omega \\ \cup & & \cup \\ \omega & \longmapsto & (\tau(\omega), \omega) \end{array}$$

とおくと Φ は $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-可測.

$\because\quad [a,b]\subset[0,t]$, $B\in\mathcal{F}_t$ とすると

$$\Phi^{-1}([a,b]\times B)=\{\omega\mid a\le\tau\le b\}\cap B\in\mathcal{F}_t$$

$\mathcal{F}_t$ 発展的可測性から

$$\begin{array}{ccc}[0,t]\times\Omega & \overset{X|_{[0,t]\times\Omega}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^d\\ \cup & & \cup\\ (s,\omega) & \longmapsto & X(s,\omega)\end{array}$$

は $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測. 以上から

$$\begin{aligned}\{X_\tau\in A\}\cap\{\tau\le t\}&=\{\omega\mid X(\tau(\omega))\in A,\tau(\omega)\le t\}\\&=\{\omega\mid \left(X|_{[0,t]\times\Omega}\circ\Phi\right)(\omega)\in A,\tau(\omega)\le t\}\in\mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

□

停止時間の非自明な典型例をあげる.

命題 1.10. $\mathbf{T}=[0,\infty)$ とする. $\{X_t\}_{t\ge0}$ を $\mathcal{F}_t$-適合 $\mathbb{R}^d$ 値確率過程とする. 空でない $E\subset\mathbb{R}^d$ に対し,

$$\sigma_E(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\ge0\mid X_t(\omega)\in E\} & \text{集合が空でなければ}\\ +\infty & \text{集合が空のとき}\end{cases}$$

と定め, X_t の E への到達時刻 (hitting time) という ($t\ge0$ を $t>0$ で定義することもある).

(1) $\{X_t\}$ が右連続, $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続とする. E が開集合ならば, σ_E は $\mathcal{F}_t$ 停止時間.
(2) $\{X_t\}$ が連続で, E が閉集合なら σ_E は $\mathcal{F}_t$-停止時間.

Proof. (1) $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続なので, $\{\sigma_E<t\}\in\mathcal{F}_t\quad\forall t$ を示せば良い.

$$\begin{aligned}\{\omega\mid\sigma_E(\omega)<t\}&=\{\omega\mid\exists s<t,X_s(\omega)\in E\} &(1.1)\\&=\{\omega\mid\exists s<t,s\in\mathbb{Q},X_s(\omega)\in E\} &(1.2)\end{aligned}$$

(1.2) で $\supset$ は自明. $\subset$ は $X_s(\omega)\in E$ なら X の右連続性と E が開集合であることから $s<s'(\in\mathbb{Q})<t$ で $X_{s'}\in E$ となる. したがって

$$\{\sigma_E<t\}=\cup_{s<t,s\in\mathbb{Q}}\{X_s\in E\}\in\mathcal{F}_t.$$

(2) E closed set, X_t : r.c. より, $\sigma_E(\omega) < \infty$ ならば $X(\sigma_E(\omega), \omega) \in E$. $f_E(x) = d(E, x)(:= \inf\{|x-y| \mid y \in E\})$ とおくと f_E は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数.

$\because$ $x, x' \in \mathbb{R}^d$ とすると $f_E(x) \leq f_E(x') + |x - x'|$. したがって, $|f_E(x) - f_E(x')| \leq |x - x'|$.

また, $f_E(x) = 0$ は $x \in E$ と同値. 以上より

$$\begin{aligned}\{\omega \mid \sigma_E(\omega) \leq t\} &= \{\omega \mid \min_{0 \leq s \leq t} f_E(X_s(\omega)) = 0\} \\ &= \{\omega \mid \inf_{0 \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}} f_E(X_s(\omega)) = 0\}.\end{aligned}$$

$\inf_{0 \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}} f_E(X_s(\omega))$ は $\mathcal{F}_t$-可測ゆえ示された. □

ここで, 典型的な確率過程, 標準ブラウン運動を定義する.

定義 1.11. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. Ω で定義された $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\{B_t(\omega)\}_{t \geq 0}$ が標準ブラウン運動とは以下が成立するときに言う:

(1) $\{B_t(\omega)\}$ は連続確率過程.
(2) 任意の $0 \leq s < t$ に対し $B_t - B_s \stackrel{d}{=} N(0, (t-s)I_d)$.
(3) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ (n も任意) に対し,

$$\{B_0, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\} \quad \text{は独立}$$

注意 1.12. (1) $B_0(\omega) = x \in \mathbb{R}^d$ のとき, x から出発するブラウン運動という.
(2) B_0 の分布が $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ のとき, 初期分布を ν とするブラウン運動という.

$(B_{t_0}, \ldots, B_{t_n})$ の結合分布は次のようにわかる.

命題 1.13. $\{B_t\}$ を 初期分布を ν とする $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動とする. このとき, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ と $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(0 \leq i \leq n)$ に対し

$$\begin{aligned}&P\left(B_{t_0} \in A_0, \ldots, B_{t_n} \in A_n\right) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} g_d(t_1 - t_0, x_0, x_1) \cdots g_d(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \\ &\qquad 1_{A_0}(x_0) 1_{A_1}(x_1) \cdots 1_{A_n}(x_n) \nu(dx_0) dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

ここで

$$g_d(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right).$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
左辺 &= P\left(B_{t_0} \in A_0, B_{t_0} + B_{t_1} - B_{t_0} \in A_1, \dots, B_{t_0} + \sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \in A_n\right) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} 1_{A_0}(y_0) 1_{A_1}(y_0 + y_1) \cdots 1_{A_n}(y_0 + \cdots + y_n) \prod_{i=1}^{n} g_d(t_i - t_{i-1}, 0, y_i) \\
&\qquad \nu(dy_0) dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} 1_{A_0}(x_0) 1_{A_1}(x_1) \cdots 1_{A_n}(x_n) \prod_{i=1}^{n} g_d(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) \\
&\qquad \nu(dx_0) dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}
$$

□

定理 1.14. d 次元確率過程 $B_t(\omega) = (B_t^1(\omega), \dots, B_t^d(\omega))$ を考える. 次は同値である.

(1) $\{B_t\}$ は 0 から出発する標準ブラウン運動である.

(2) (i) 任意の $1 \le i \le d$ に対し, $\{B_t^i\}$ は 0 から出発する 1 次元ブラウン運動.

(ii) $\{B_t^1\}_{t \ge 0}, \dots, \{B_t^d\}_{t \ge 0}$ は独立.

注意 1.15. n 個の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\{X_t^1\}_{t\ge 0}, \dots \{X_t^n\}_{t \ge 0}$ が独立とは

$$\sigma(\{X_t^1\}_{t\ge 0}), \dots, \sigma(\{X_t^n\}_{t\ge 0}) \text{ が独立}$$

と定義されている. これは, 任意の $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_l$, $A_j^i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le i \le n), (0 \le j \le l)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&P\left(X_{t_0}^1 \in A_0^1, \dots, X_{t_l}^1 \in A_l^1, \dots, X_{t_0}^n \in A_0^n, \dots, X_{t_l}^n \in A_l^n\right) \\
&= P\left(X_{t_0}^1 \in A_0^1, \dots, X_{t_l}^1 \in A_l^1\right) \cdots P\left(X_{t_0}^n \in A_0^n, \dots, X_{t_l}^n \in A_l^n\right)
\end{aligned}
$$

となることと同値であることが証明できる (π-system の性質. 例えば D. Williams, Probability with Martingales 参照).

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す. まず (i) を示す. $A_1, \dots, A_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする. $1 \le i \le d$ を固

定する．$p_i(x) = x^i$ を射影とする．$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l$ とする．

$$
\begin{aligned}
P\left(B^i_{t_j} - B^i_{t_{j-1}} \in A_j, \quad 1 \le j \le l\right) &= P\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \in p_i^{-1}(A_j),\, 1 \le j \le l\right) \\
&= \prod_{j=1}^{l} \int_{p_i^{-1}(A_j)} g_d(t_j - t_{j-1}, 0, x_j)dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{l} \int_{A_j} g_1(t_j - t_{j-1}, 0, x^i_j)dx^i_j
\end{aligned}
$$

$B^i_0 = 0$ なのでこれは B^i_t が 0 出発の 1 次元ブラウン運動であることを示している．$\{B^i_t\}$ $(1 \le i \le d)$ の独立性を示す．

$$
\prod_{i=1}^{d} A^i_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad A^i_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (1 \le j \le l,\, 1 \le i \le d)
$$

とする．$0 < t_1 < \cdots < t_l$ とする．

$$
\begin{aligned}
&P\Big(B^1_{t_1} - B^1_{t_0} \in A^1_1, \ldots, B^1_{t_l} - B^1_{t_{l-1}} \in A^1_l, \ldots, \\
&\qquad\qquad B^d_{t_1} - B^d_{t_0} \in A^d_1, \ldots, B^d_{t_l} - B^d_{t_{l-1}} \in A^d_l\Big) \\
&= P\left(B_{t_1} - B_{t_0} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_1, \ldots, B_{t_l} - B_{t_{l-1}} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_l\right) \\
&= P\left(B_{t_1} - B_{t_0} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_1\right) \cdots P\left(B_{t_l} - B_{t_{l-1}} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_l\right) \\
&=: I.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
P\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_j\right) &= \int_{\prod_{i=1}^{d} A^i_j} g_d(t_j - t_{j-1}, 0, x_j)dx_j \\
&= \prod_{i=1}^{d} \int_{A^i_j} g_1(t_j - t_{j-1}, 0, x^i_j)dx^i_j \\
&= \prod_{i=1}^{d} P\left(B^i_{t_j} - B^i_{t_{j-1}} \in A^i_j\right)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
I &= \prod_{j=1}^{l}\left(\prod_{i=1}^{d} P\left(B^i_{t_j} - B^i_{t_{j-1}} \in A^i_j\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{d}\left(\prod_{j=1}^{l} P\left(B^i_{t_j} - B^i_{t_{j-1}} \in A^i_j\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{d} P\left(B^i_{t_1} - B^i_{t_0} \in A^i_1, \ldots, B^i_{t_l} - B^i_{t_{l-1}} \in A^i_l\right).
\end{aligned}
$$

最後の等号は $\{B^i_t\}$ は 1 次元ブラウン運動であることから従う． したがって, $\{B^1_t\}, \ldots, \{B^d_t\}_{t\geq 0}$ は独立である．(2) $\Longrightarrow$ (1) を示す．同じ $\{A^i_j\}$ を取る．$\{B^i_t\}$ の独立性から

$$
\begin{aligned}
&P\left(B_{t_1} - B_{t_0} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_1, \ldots, B_{t_l} - B_{t_{l-1}} \in \prod_{i=1}^{d} A^i_l\right) \\
&= \prod_{i=1}^{d} P\left(B^i_{t_1} - B^i_{t_0} \in A^i_1, \ldots, B^i_{t_l} - B^i_{t_{l-1}} \in A^i_l\right) =: I'.
\end{aligned}
$$

上記の議論を逆にたどり,

$$
I' = \prod_{j=1}^{l} \int_{\prod_{i=1}^{d} A^i_j} g_d(t_j - t_{j-1}, 0, x_j) dx_j
$$

となるので, B_t は 0 出発のブラウン運動である． □

ν を初期分布とするブラウン運動を構成する．

定義 1.16. $\{X_t\}_{t\geq 0}, \{Y_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程とする．$P(X_t = Y_t) = 1$ $(\forall t \geq 0)$ のとき, $\{Y_t\}$ は $\{X_t\}$ の modification(修正) という．特に, $\{Y_t\}$ が連続の時, $\{X_t\}$ の連続修正という．$P(X_t = Y_t\ \forall t \geq 0) = 1$ となるとき, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ と $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ は indistinguishable (区別できない) という．

注意 1.17. 以下で連続確率過程が等しいという statement が何回も出てくるがそれは, indistinguishable な意味で同じ物を同一視して等しいということである．特にこの事を書かないことが多いので注意して欲しい．

命題 1.18. $\{X_t\}_{t\geq 0}, \{Y_t\}_{t\geq 0}$ を右連続過程とする．Y_t が X_t の修正ならば $P(X_t = Y_t\ t \geq 0) = 1$.

Proof. $\tilde{\Omega} = \cap_{t\in\mathbb{Q},t\geq 0}\{\omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$ とおくと $P(\tilde{\Omega}) = 1$. $\omega \in \tilde{\Omega}$ ならば, 任意の $t \geq 0$ に対して $t_n(\in \mathbb{Q}) \downarrow t$ となる数列が存在するので, 右連続性から $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. □

まず構成の方針を述べる.

$$\Omega := (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}$$

とおく. $\omega \in \Omega$ に対して

$$\pi_t(\omega) = \omega(t)$$

と定める.

$$\mathcal{F} := \sigma\left(\{\pi_t\}_{t\geq 0}\right)$$

と定め, measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の可測関数の族 $\{\pi_t\}_{t\geq 0}$ を考える.

(1) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率 P で任意有限個の時間列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ について $(\pi_0, \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_n}) \stackrel{d}{=} (B_0, B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ となる物を構成する.
(2) $\{\pi_t\}$ の連続修正 $\{X_t\}$ が存在することを示す.

この $\{X_t\}$ が求めるものである. (1) のため, Kolmogorov の拡張定理を用いる. 定理を述べるため, 記号を用意する.

$\boldsymbol{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty, n \in \mathbb{N})$ という時間列に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\boldsymbol{t}} &:= \sigma(\pi_{t_0}, \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_n}) \\ &= \{\pi_{\boldsymbol{t}}^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n+1})\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

と定める. また, このような時間列全体の集合を $\mathcal{T}$ と書く. ただし,

$$\begin{array}{ccc}\Omega & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{t}}} & (\mathbb{R}^d)^{n+1} \\ \Cup & & \Cup \\ \omega & \longrightarrow & (\omega_{t_0}, \ldots, \omega_{t_n})\end{array}$$

$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}' \in \mathcal{T}$ に対し, $\boldsymbol{t}$ の時間がすべて $\boldsymbol{t}'$ の時間に含まれているとき, $\boldsymbol{t} \subset \boldsymbol{t}'$ と書くことにする.

定理 1.19 (Kolmogorov の拡張定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}_{\boldsymbol{t}})$ $(\boldsymbol{t} \in \mathcal{T})$ 上の確率 $P_{\boldsymbol{t}}$ があるとする. 次の (1), (2) は同値である.

(1) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率 P が存在して, $P|_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{t}}} = P_{\boldsymbol{t}}$.

(2) $\boldsymbol{t} \subset \boldsymbol{t}'$ の時, $P_{\boldsymbol{t}'}|_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{t}}} = P_{\boldsymbol{t}}$. すなわち, 任意の $\boldsymbol{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ と $\boldsymbol{t}_i = (t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ に対して

$$P_{\boldsymbol{t}}\left(\pi_{\boldsymbol{t}}^{-1}(A \times \mathbb{R}^d \times B)\right) = P_{\boldsymbol{t}_i}\left(\pi_{\boldsymbol{t}_i}^{-1}(A \times B)\right).$$

ここで $A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^i), B \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n-i})$.

ブラウン運動の場合は, $A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n+1})$, $\boldsymbol{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ に対し,

$$P_{\boldsymbol{t}}\left(\pi_{\boldsymbol{t}}^{-1}(A)\right) := \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} 1_A(x_0, x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$g_d(t_1, x_0, x_1) g_d(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots g_d(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \nu(dx_0) dx_1 \cdots dx_n$$

とおくと両立条件 (2) が成立することがわかる. 両立条件は

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_d(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) g_d(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_i = g_d(t_{i+1} - t_{i-1}, x_{i-1}, x_{i+1})$$

から従う.

注意 1.20. 上記の議論を見ると次の性質を満たす推移確率関数 $p(t, x, y)$ に対して P が存在することがわかる.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0$

(2) (Chapman-Kolmogorov's equation) すべての $s, t > 0$, x, z について

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) p(s, y, z) dy = p(t + s, x, z)$$

連続修正の存在を示すため次の定理を示そう.

定理 1.21. (Kolmogorov) $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値確率過程とする. $\alpha > 0, \beta > 0$ と $C > 0$ が存在して

$$E\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq C|t - s|^{1+\beta} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{1.4}$$

を満たすとする. $0 < \gamma < \beta/\alpha$ を満たす正数 γ を取る. このとき, X_t の連続修正 $\tilde{X}_t(\omega)$ が存在して, 次を満たす:

$\mathcal{F}$-可測関数 $C(\omega)$ が存在して,

$$\left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right| \leq C(\omega)|t - s|^\gamma \quad 0 \leq s < t \leq T \tag{1.5}$$

すなわち, $\tilde{X}$ の sample path は γ-ヘルダー連続である.

系 1.22. 上記の定理の notation を用い同じ仮定の下で考える．さらに $\beta - \alpha\gamma > p > 0$ とする．このとき,

$$E\left[\|\tilde{X}\|_{\gamma}^{p}\right] < \infty. \tag{1.6}$$

ここで, $\|\cdot\|_{\gamma}$ は γ-ヘルダーノルムを表す．またこの期待値は, $C, \alpha, \beta, \gamma, p$ にのみ依存する定数で押さえられる.

証明を後回しにして, ブラウン運動の構成を終えよう．すでに構成した 確率変数の族 $\{\pi_t\}$ を考える．$\pi_t - \pi_s \overset{d}{=} N(0, (t-s)I_d)$ ゆえ $X_i \overset{d}{=} N(0,1)$ $(1 \le i \le d)$ となる独立な 1 次元確率変数を取ると

$$\begin{aligned} E[|\pi_t - \pi_s|^{\alpha}] &= |t-s|^{\alpha/2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{d} X_i^2\right)^{\alpha/2}\right] \\ &\le C(\alpha, d)|t-s|^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

すなわち, $\alpha > 2$ なら $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1$ と取れて $0 < \gamma < \frac{1}{2} - \alpha^{-1}$ のヘルダー指数の連続修正の存在がわかる．また, α はいくらでも大きく取れるので, このヘルダー指数は 1/2 にいくらでも近づけることができる．また, 任意の $p > 1$ に対して, $\|B\|_{\gamma} \in L^p$ である.

定理 1.21 の証明. $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ の各成分について示せばよいので $d = 1$ とする．また, $T = 1$ の場合に示せば十分である．$r > 0$ とする．$1 \le k \le 2^n$ とする．Chebyshev の不等式を用い

$$\begin{aligned} P\left(|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \ge 2^{-nr}\right) &\le \frac{E\left[|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}|^{\alpha}\right]}{2^{-nr\alpha}} \\ &\le C2^{-n(1+\beta-\alpha r)}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$P\left(\cup_{k=1}^{2^n}\left\{|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \ge 2^{-nr}\right\}\right) \le C2^{-n(\beta-\alpha r)}.$$

したがって, $0 < r = \gamma < \beta/\alpha$ と γ をとり,

$$A_n = \cup_{k=1}^{2^n}\left\{|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| \ge 2^{-n\gamma}\right\}$$

とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

ゆえに $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. $\tilde{\Omega} = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$ とおくと $P(\tilde{\Omega}) = 1$. すなわち $\mathcal{F}$-可測関数

$$N(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c\}$$

を用いると $\{\omega \mid N(\omega) < \infty\} = \tilde{\Omega}$, $P(N < \infty) = 1$ となり,

$$(*) \begin{cases} \text{任意の } \omega \in \tilde{\Omega} \text{ に対して,} \\ \left|X_{k2^{-n}}(\omega) - X_{(k-1)2^{-n}}(\omega)\right| < 2^{-n\gamma} \quad n \geq N(\omega),\ 1 \leq k \leq 2^n. \end{cases}$$

$D = \{k2^{-n} \mid\ : 0 \leq k \leq 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ とおき, D の元を $[0,1]$ の 2 進有理数という. 以下の主張を示す.

Claim $\omega \in \tilde{\Omega}$ とする. $0 \leq s < t \leq 1$ を 2 進有理数で $|t-s| < 2^{-N(\omega)}$ を満たすとすると

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| < \frac{2}{1-2^{-\gamma}}|t-s|^{\gamma}.$$

Claim の証明:

$t - s < 2^{-N(\omega)}$ ならば, $m \geq N(\omega)$, $2^{-(m+1)} \leq t - s < 2^{-m}$ が一意に存在する. s, t は $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$ の形の区間一つに入っている場合とそうでない 2 つのケースがある. 前者は以下の (ii), 後者は (i) に対応する.

(i) $k2^{-m} < s < (k+1)2^{-m} < t < (k+2)2^{-m}$

(ii) $k2^{-m} \leq s < t \leq (k+1)2^{-m}$

(i) の場合を考える. $\exists m' \geq m+1$, $\exists l'$(奇数), $t = \frac{l'}{2^{m'}}$ (m' を最小の物に取れば, l' は奇数になる)

$$t - \frac{k+1}{2^m} = \frac{l'}{2^{m'}} - \frac{k+1}{2^m} = \frac{l' - 2^{m'-m}(k+1)}{2^{m'}}.$$

正整数の 2 進展開より, $m' > p_1 > p_2 > \cdots > p_j = 0$ が一意に存在して

$$l' - 2^{m'-m}(k+1) = 2^{p_1} + \cdots + 2^{p_j}.$$

したがって,

$$t - \frac{k+1}{2^m} = \frac{l'}{2^{m'}} - \frac{k+1}{2^m} = \frac{1}{2^{m'-p_1}} + \frac{1}{2^{m'-p_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m'}}. \qquad (*)$$

$t - \frac{k+1}{2^m} < 2^{-m}$ より $m' - p_1 \geq m+1$ を注意しておく. $(*)$ により, 整数 q_i が取れて

$$X_t - X_{(k+1)2^{-m}} = \sum_{i=1}^{j} \left(X_{\frac{q_i+1}{2^{m'-p_i}}} - X_{\frac{q_i}{2^{m'-p_i}}} \right).$$

ゆえに

$$\left|X_t - X_{(k+1)2^{-m}}\right| < \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{1}{2^{m'-p_i}}\right)^{\gamma} \leq \left(\frac{1}{2^{m'-p_1}}\right)^{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\gamma}}\right)^{i} \leq \frac{|t-s|^{\gamma}}{1-2^{-\gamma}}.$$

ここで, $2^{-(m'-p_1)} \leq 2^{-(m+1)} \leq t-s$ を用いた. $(k+1)2^{-m}-s$ についても同様の議論を行い, 整数列 $m+1 \leq m_1 < \cdots < m_{j'}$ が取れて

$$\frac{k+1}{2^m} - s = \frac{1}{2^{m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_{j'}}}.$$

以下同様の議論で $|X_{(k+1)2^{-m}} - X_s| < \frac{|t-s|^{\gamma}}{1-2^{-\gamma}}$ を得る. (ii) のケースを考える. このときは, $t-s \geq 2^{-(m+1)}$ より

$$\frac{k}{2^m} \leq s \leq \frac{2k+1}{2^{m+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^m}$$

となる. $t - \frac{2k+1}{2^{m+1}}$, $\frac{2k+1}{2^m} - s$ を展開して同様の議論を行えばよい. 以上で Claim が示された.

任意の 2 進有理数のペア $0 \leq s < t \leq 1$ と $\omega \in \tilde{\Omega}$ を考える.

$s = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = t$, $t_i - t_{i-1} = 2^{-N(\omega)-1}$ $(1 \leq i \leq l-1)$, $t_l - t_{l-1} \leq 2^{-N(\omega)-1}$ となる 2 進有理数の列を取れる. $l \leq 2^{N(\omega)+1}+1$ の評価が成立する. ($(l-1)\cdot 2^{-N(\omega)-1} \leq 1$ より) したがって

$$\begin{aligned}|X_t(\omega) - X_s(\omega)| &\leq \sum_{i=1}^{l}|X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)| \\ &< \sum_{i=1}^{l}\frac{2}{1-2^{-\gamma}}|t_i - t_{i-1}|^{\gamma} \\ &\leq \frac{2(2^{N(\omega)+1}+1)}{1-2^{-\gamma}}|t-s|^{\gamma}. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

連続修正 $\tilde{X}_t(\omega)$ を構成する.

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}) \\ \lim_{t_n \to t} X_{t_n}(\omega) & (\omega \in \tilde{\Omega}, t_n \text{ は 2 進有理数}) \end{cases}$$

2 進有理数 t と $\omega \in \tilde{\Omega}$ について $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ である. 仮定 (1.4) より, $\lim_{s\to t} X_s = X_t$ in probability より t が 2 進有理数でなくても $P\left(\tilde{X}_t = X_t\right) = 1$ である. $\tilde{X}_t$ が求める連続修正過程であり, (1.5) が $C(\omega) = \frac{2(2^{N(\omega)+1}+1)}{1-2^{-\gamma}}$ として成立する. □

系 1.22 の証明. 証明はレポート問題とする. $\square$

注意 1.23. (1) $S = C([0,\infty), \mathbb{R}^d)$ とおく. $w \in S$ と書く.

$$\mathcal{B}(S) = \sigma\Big(\{C(t_0, t_1, \ldots, t_n; A_0, A_1, \ldots, A_n) \mid 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, n \in \mathbb{N},$$
$$A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ 1 \le i \le n\}\Big)$$

が示せる. ただし, $\mathcal{B}(S)$ は S の広義一様収束の位相で定まる位相空間のボレル集合族を表す.

$$C(t_0, t_1, \ldots, t_n; A_0, A_1, \ldots, A_n) = \{w \in S \mid w(t_i) \in A_i,\ 0 \le i \le n\}$$

である. $\{X_t(\omega)\}_{t\ge 0}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された連続確率過程とすると

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\Phi} & S \\ \Cup & & \Cup \\ \omega & \longmapsto & X_{\cdot}(\omega) \end{array}$$

と定めると Φ は $\mathcal{F}/\mathcal{B}(S)$-可測. $\{X_t\}_{t\ge 0}$ がブラウン運動とすると $\Phi_\sharp P$ (P の Φ による像測度) は連続関数の空間の確率測度となる. $\nu = \delta_0$ (すなわち 0 から出発するブラウン運動) の像測度 μ を Wiener 測度 (ウィーナー測度) という.

ウィーナー測度 μ の定義されたウィーナー空間 $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ 上で $X_t(w) = w(t)$ $w \in S$ とおくと $\{X_t\}$ は $X_0 = 0$ となるブラウン運動となる. これを canonical な実現と言う.

2 マルチンゲール

2.1 基本概念

定義 2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}})$ を filtered probability space とする. $\mathbf{T} = [0,\infty), \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. 以下で X_t は実数値確率変数である.

(1) $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が $\mathcal{F}_t$-sub(super)martingale (劣 (優) マルチンゲール)

$\Longleftrightarrow$

(i) X_t は $\mathcal{F}_t$-適合, $X_t \in L^1$ $(\forall t)$.

(ii) $s \le t$ ならば $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \ge X_s$ $(E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \le X_s)$

(2) $\{X_t\}$ が $\mathcal{F}_t$-martingale(マルチンゲール)

$\Longleftrightarrow$

$\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールかつ優マルチンゲール, すなわち

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \forall s \leq \forall t.$$

条件付き期待値の復習:

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を sub σ-field とする. $E[X|\mathcal{G}]$ は, $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で次をみたすもの.

(i) Y は $\mathcal{G}$-可測.

(ii) $E[X; A] = E[Y; A] \quad \forall A \in \mathcal{G}$.

以下に基本性質をまとめる.

命題 2.2. (1) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: sub σ-fields. $X \in L^1$ ならば

$$E[X|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}].$$

(2) Y : 有界 $\mathcal{G}$-可測, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のとき,

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$$

(3) X と $\mathcal{G}$ が独立ならば $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.

(4) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を convex function とする. $X, \varphi(X) \in L^1$ ならば

$$\varphi\left(E[X|\mathcal{F}]\right) \leq E[\varphi(X)|\mathcal{F}].$$

系 2.3. $X \in L^p$ $(p \geq 1)$ ならば

$$E[|E[X|\mathcal{F}]|^p] \leq E[|X|^p]$$

命題 2.4. φ を $\mathbb{R}$ 上の凸関数とする.

(1) $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールとする. $\varphi(X_t) \in L^1$ $\forall t$ ならば $\{\varphi(X_t)\}_{t\in\mathbf{T}}$ は $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲール.

(2) さらに φ は非減少関数とする. $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ は $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとする. $\varphi(X_t) \in L^1$ $(\forall t)$ ならば $\{\varphi(X_t)\}_{t\in\mathbf{T}}$ は $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲール.

例えば, X_t が非負劣マルチンゲールで $p \geq 1$ に対して X_t^p が可積分ならば X_t^p は劣マルチンゲール.

Proof. $t > s$ とする. (1) の場合

$$\varphi(X_s) = \varphi(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \leq E[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s].$$

(2) だと

$$\varphi(X_s) \leq \varphi(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \leq E[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s].$$

□

例 2.5. (1) $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とし $X_t = E[X|\mathcal{F}_t]$ とおくと $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール.
(2) B_t を 1 次元ブラウン運動とする. $\mathcal{F}_t := \sigma\left(\{B_s\}_{0\leq s\leq t}\right)$ とおくと B_t は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール. 実際, $B_t \in L^1$ であり, $s < t$ のとき

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s = B_s. \end{aligned}$$

なお, $\mathcal{F}_t$ は左連続な filtration だが右連続ではない. 例えば

$$A_t = \{\omega \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, ある } t < s < t + \varepsilon \text{ が存在して } B_s(\omega) < B_t(\omega)\}$$

とおくと $A_t \in \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ だが $A_t \notin \mathcal{F}_t$. 実は $P(A_t) = 1$. $\mathcal{F}_t$ の augmented filtration(拡大フィルトレーション)

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N})$$

は右連続かつ左連続になる. B_t は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ にも適合したマルチンゲールになる.

定理 2.6 (Doob's submartingale inequality)**.** $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を右連続非負 $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとする.

(1) 任意の $a > 0$ に対し,

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq a\right) \leq \frac{E[X_t; \sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq a]}{a}.$$

(2) さらに, $p > 1$ に対して, $X_t \in L^p$ $(t \geq 0)$ とする. このとき,

$$P(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq a) \leq \frac{E[X_t^p]}{a^p}, \tag{2.1}$$

$$E[(X_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[X_t^p], \tag{2.2}$$

ここで $X_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} X_s$.

Proof. (1) 離散非負劣マルチンゲール $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$$P\left(\max_{0\le k\le n} X_k \ge a\right) \le \frac{1}{a} E\left[X_n ; \max_{0\le k\le n} X_k \ge a\right]$$

が成立する．これに帰着させる．$[0,t]$ の分割

$$\Delta_n : \{k2^{-n}t\}_{k=0}^{2^n}$$

を取る．$A_n = \{\max_{t\in\Delta_n} X_t \ge a\}$ とおく．

$$\begin{aligned} P(A_n) &\le \frac{1}{a} E\left[X_t\,;\, A_n\right] \\ &\le \frac{1}{a} E\left[X_t\,;\, \sup_{0\le s\le t} X_s \ge a\right]. \end{aligned}$$

$$\{\sup_{0\le s\le t} X_s > a\} \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

より Fatou の lemma より

$$P\left(\{\sup_{0\le s\le t} X_s > a\}\right) \le \frac{1}{a} E[X_t; \sup_{0\le s\le t} X_s \ge a].$$

a を $a-\varepsilon$ に変え, $\varepsilon \downarrow 0$ として結論を得る．

(2) 前半分は X_t^p は劣マルチンゲールなので, (1) から直接わかる．Y が非負値確率変数ならば

$$E[Y^p] = \int_0^{\infty} p x^{p-1} P(Y > x) dx.$$

$\because$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p x^{p-1} P(Y > x) dx &= E\left[\int_0^{\infty} p x^{p-1} 1_{[0,Y)}(x) dx\right] \\ &= E[Y^p]. \end{aligned}$$

Doob の不等式より

$$\begin{aligned} E[(X_t^*)^p] &\le \int_0^{\infty} p x^{p-2} E[X_t; X_t^* \ge x] dx \\ &= \frac{p}{p-1} E[X_t (X_t^*)^{p-1}] \\ &\le \frac{p}{p-1} (E[X_t^p])^{1/p} (E[(X_t^*)^p])^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

これは示すべき式である．

□

系 2.7. X_t を右連続 $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールとする．$p>1$ に対して $X_T \in L^p$ とする．このとき

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_T|^p].$$

Filtration と stopping time に関する次の結果を示す.

補題 2.8. Filtered space $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ 上の $\mathcal{F}_t$-stopping time τ, σ が $\sigma(\omega) \le \tau(\omega)$ $(\forall\omega)$ を満たすとする．このとき, $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

Proof. $A \in \mathcal{F}_\sigma$ とする．$\{\tau \le t\} \subset \{\sigma \le t\}$ より

$$A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\}.$$

$A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$, $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ より, $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ である． □

$\mathbf{T} = [0, \infty)$ の場合を考える.

定理 2.9 (Doob's optional sampling theorem)**.** $\{X_t\}_{t\ge 0}$ を $\mathcal{F}_t$ に関する右連続劣マルチンゲールとする．σ, τ を 有界な $\mathcal{F}_t$-stopping time で $\sigma(\omega) \le \tau(\omega)$ を満たすとする．このとき, $E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \ge X_\sigma$.

注意 2.10. $\{X_t\}$ が一様可積分な右連続劣マルチンゲールであれば, $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ が a.s. な ω について収束する．この意味で $X_\infty(\omega)$ を解釈して, 任意の停止時間 $\sigma(\omega) \le \tau(\omega) \le \infty$ について任意抽出定理が成立する.

Proof. $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ の場合に帰着させる．$[0, \infty)$ の分割

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$$

を考える．ただし, $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ とする．$|\Delta| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$ とおく.

$$\sigma_\Delta(\omega) := \inf\{t \ge 0 \mid \sigma(\omega) < t, t \in \Delta\}$$

と定める．次が言える.

(i) σ_Δ は $\mathcal{F}_t$-停止時間である.

(ii) σ_Δ は $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0}^\infty$ 停止時間である. ただし, $\mathbf{T} = \{t_i\}_{i=0}^\infty$ である.

(iii) $\sigma_\Delta(\omega) \ge \sigma(\omega)$ $\forall\omega$ かつ $\lim_{|\Delta|\to 0} \sigma_\Delta(\omega) = \sigma(\omega)$.

$\because$

(i) $t_i \le t < t_{i+1}$ の場合,

$$\{\sigma_\Delta(\omega) \le t\} = \{\sigma_\Delta(\omega) \le t_i\} = \{\sigma(\omega) < t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$$

ゆえ $\mathcal{F}_t$-停止時間である.

(ii) も同じ計算でわかる. (iii) は自明である.

また, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$, $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0,1,\dots}$ のいずれの filtration の場合でも

$$\mathcal{F}^{t\ge 0}_{\sigma_\Delta} = \mathcal{F}^{\{t_i\}}_{\sigma_\Delta}. \tag{2.3}$$

$\because$

$$\mathcal{F}^{t\ge 0}_{\sigma_\Delta} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall t\, A \cap \{\sigma_\Delta \le t\} \in \mathcal{F}_t\},$$
$$\mathcal{F}^{\{t_i\}}_{\sigma_\Delta} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall i\, A \cap \{\sigma_\Delta \le t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}\}$$

である. $A \in \mathcal{F}^{t\ge 0}_{\sigma_\Delta}$ とする.

$$A \cap \{\sigma_\Delta \le t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i} \quad \forall i$$

ゆえ $A \in \mathcal{F}^{\{t_i\}}_{\sigma_\Delta}$. $A \in \mathcal{F}^{\{t_i\}}_{\sigma_\Delta}$ とする. $t_i \le t < t_{i+1}$ とする.

$$A \cap \{\sigma_\Delta \le t\} = A \cap \{\sigma < t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$$

ゆえに $A \in \mathcal{F}^{t\ge 0}_{\sigma_\Delta}$ となり逆も示された. (2.3) より離散マルチンゲールの任意抽出定理を適用し,

$$E[X_{\tau_\Delta} | \mathcal{F}^{t\ge 0}_{\sigma_\Delta}] \ge X_{\sigma_\Delta}. \tag{2.4}$$

$\sigma(\omega) \le \sigma_\Delta(\omega)$ なので $\mathcal{F}^{\{t\ge 0\}}_{\sigma} \subset \mathcal{F}^{\{t\ge 0\}}_{\sigma_\Delta}$. したがって, (2.4) より任意の $A \in \mathcal{F}^{\{t\ge 0\}}_{\sigma}$ に対して,

$$E\left[X_{\tau_\Delta}; A\right] \ge E\left[X_{\sigma_\Delta}; A\right]. \tag{2.5}$$

$$\Delta_n \subset \Delta_{n+1},\ n = 1, 2, \dots,\ \lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$$

という分割の細分の列を取る. すると $\sigma_{\Delta_n}(\omega) \downarrow \sigma(\omega)$, $\tau_{\Delta_n}(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ であり, X_t の右連続性から

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau_{\Delta_n}}(\omega) = X_\tau(\omega),\ \ \lim_{n\to\infty} X_{\sigma_{\Delta_n}}(\omega) = X_\sigma(\omega). \tag{2.6}$$

また, $\left(X_{\tau_{\Delta_n}}, \mathcal{F}_{\tau_{\Delta_n}}\right)$, $\left(X_{\sigma_{\Delta_n}}, \mathcal{F}_{\sigma_{\Delta_n}}\right)$ は後ろ向き劣マルチンゲールである. したがって, $\{X_{\tau_{\Delta_n}}\}_{n=1}^\infty$, $\{X_{\sigma_{\Delta_n}}\}_{n=1}^\infty$ は一様可積分である (下の定理を参照). ゆえに, (2.6) は L^1 収束である. したがって, (2.5) で Δ_n の場合を考え, 極限を取ると

$$E[X_\tau; A] \ge E[X_\sigma; A].$$

これが示すべき式である. $\square$

定理 2.11 (後ろ向き劣マルチンゲールの収束定理)**.** $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ を後ろ向き劣マルチンゲール (Backward submartingale) とする．すなわち,

(i) $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$
(ii) X_n は $\mathcal{F}_n$-可測,
(iii) $E[X_n|\mathcal{F}_{n+1}] \geq X_{n+1}\ n = 1, 2, \ldots$

とする. さらに, $\inf_n E[X_n] > -\infty$ を仮定する．以上の下, 次が成立する.

(1) $\{X_n\}$ は一様可積分である.
(2) $P(\lim_{n\to\infty} X_n$ は収束する$) = 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} X_n$ は L^1 収束である.

系 2.12. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathcal{F}_t$-submartingale とする．τ を $\mathcal{F}_t$-stopping time とする．このとき, $\{X_{t\wedge\tau}\}_{t\geq 0}$ は $\mathcal{F}_t$-submartingale である.

Proof. $t \wedge \tau$ は $\mathcal{F}_t$-stopping time であることに注意する.
$\because$

$$\{t\wedge\tau \leq s\} = \begin{cases} \{\tau \leq s\} & (\text{if } s < t \text{ holds}) \\ \Omega & (\text{if } s \geq t) \end{cases}$$

よって, $\{t\wedge\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s$. $t > s$ とする．$A \in \mathcal{F}_s$ とする.

$$\begin{aligned} E[X_{t\wedge\tau}; A] &= E[X_{t\wedge\tau}; A \cap \{\tau \leq s\}] + E[X_{t\wedge\tau}; A \cap \{\tau > s\}] \\ &= E[X_{s\wedge\tau}; A \cap \{\tau \leq s\}] + E[X_{t\wedge\tau}; A \cap \{\tau > s\}]. \end{aligned}$$

ここで, $A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{s\wedge\tau}$ を示す.
$u > 0$ をとる.

$$A \cap \{\tau > s\} \cap \{s \wedge \tau \leq u\} = \begin{cases} A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_u & (\text{if } s \leq u\ ) \\ \emptyset & (\text{if } s > u) \end{cases}$$

これは, $A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{s\wedge\tau}$ を示している．$\mathcal{F}_t$-停止時間 $s\wedge\tau \leq t\wedge\tau$ に対して, Doob の optional sampling theorem を適用し,

$$E[X_{t\wedge\tau}; A \cap \{\tau > s\}] \geq E[X_{s\wedge\tau}; A \cap \{\tau > s\}].$$

したがって,

$$E[X_{t\wedge\tau}; A] \geq E[X_{s\wedge\tau}; A].$$

□

2.2　2 乗可積分マルチンゲール

この節以後, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ は常に通常の条件を満たす filtered probability space とする.

2 乗可積分連続マルチンゲールの性質をまとめる. 以下, 確率過程 X_t に対して

$$X_{s,t} = X_t - X_s \qquad s < t$$

のように増分を書くことにする.

定義 2.13. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ を filtered probability space とする. 次の notation を導入する.

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}_t) := \Big\{ \{M_t\}_{t\geq 0} \mid M_0 = 0, \{M_t\} \text{ は右連続 } \mathcal{F}_t\text{-マルチンゲール} \Big\}$$

$$\mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t) := \Big\{ \{M_t\}_{t\geq 0} \mid M_0 = 0, \{M_t\} \text{ は連続 } \mathcal{F}_t\text{-マルチンゲール} \Big\}$$

$$\mathcal{M}([0,T])(\mathcal{F}_t) := \Big\{ \{M_t\}_{0\leq t\leq T} \mid M_0 = 0, \{M_t\} \text{ は右連続 } \mathcal{F}_t\text{-マルチンゲール} \Big\}$$

$\mathcal{F}_t$ は省略することもある. $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2^c, \mathcal{M}_2([0,T])$ はそれぞれ 2 乗可積分な部分空間 (i.e., $M_t \in L^2$ $(\forall t)$) を表す.

これらの空間にヒルベルト空間, 距離空間の構造を入れる. そのためには, indistinguishable な process を同一視する (同値関係) 必要がある. 同一視した後も同様の記号を使う.

Doob のサブマルチンゲール不等式から以下がわかる.

命題 2.14. $M \in \mathcal{M}_2([0,T])$ に対して,

$$\|M\|_T^{\tilde{}} := E[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^2]^{1/2}$$

とおく. $\|\cdot\|_T^{\tilde{}}$ と $\|\cdot\|_T$ は同値なノルムになる.

命題 2.15. (1) $\mathcal{M}_2([0,T])$ は

$$\|M\|_T^2 = E[M_T^2]$$

を内積とする実ヒルベルト空間となる. $\mathcal{M}_2^c([0,T])$ は部分ヒルベルト空間となる.

(2) $M, N \in \mathcal{M}_2$ に対して

$$d(M,N) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\|M - N\|_n \wedge 1 \right)$$

とおくとこれは距離関数になる．$\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2^c$ はこの距離に関して完備である．

以下の補題を用いる．

補題 2.16. 確率過程のなす次のようなベクトル空間を考える．$\mathcal{F}_t$ は通常の条件を満たすとする．以下 $|X|_t := \max_{0\le s\le t}|X_s|$ とおく．

$$E_T = \Big\{\{X_t\}_{0\le t\le T} \mid X_t \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ 値 } \mathcal{F}_t \text{ 適合連続確率過程でかつ}$$
$$\|X\|_T := \left(E\left[|X|_T^2\right]\right)^{1/2} < \infty\Big\}. \tag{2.7}$$
$$E = \Big\{\{X_t\}_{t\ge 0} \mid \{X_t\}_{0\le t\le T} \in E_T, \quad \forall T \ge 0\Big\}. \tag{2.8}$$

(1) E_T の元を indistinguishable なものを同一視すると E_T は $\|\cdot\|_T$ をノルムとするバナッハ空間になる．さらに, $\lim_{n\to\infty}\|X_n - X\|_T = 0$ のとき, 部分列 X_{n_k} を適当に取れば,

$$P\left(\lim_{k\to\infty}|X_{n_k} - X|_T = 0\right) = 1. \tag{2.9}$$

(2) E の元をやはり indistinguishable なものを同一視する．このとき, $X = \{X_t\}, Y = \{Y_t\} \in E$ に対し

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\|X-Y\|_n \wedge 1\right) \tag{2.10}$$

と定めると E は d を距離とする完備距離空間である．また, $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$ $(X, X_n \in E)$ ならば適当な部分列 X_{n_k} を取ると

$$P\left(\lim_{n_k\to\infty} X_{n_k} = X \ \text{ uniformly on compact sets on } \mathbb{R}^+\right) = 1 \tag{2.11}$$

注意 2.17. (1) 証明を見ればわかるが, $p \ge 1$ に対して $\|X\|_T = E[(\max_{0\le s\le T}|X_s|)^p]^{1/p}$ を考えても同じ結果が成立する．
(2) E_T, E は連続関数の空間とした．右連続な関数空間を考えることもできる．すなわち, $[0,T]$ 上定義された $\mathbb{R}^d$ 値右連続な 関数 $\{x_t\}_{0\le t\le T}$ で $|x|_T = \sup_{0\le t\le T}|x_t| < \infty$ を満たすもの全体は, $|\cdot|_T$ をノルムとするバナッハ空間となる (x が右連続でも $|x|_T = \infty$ となることがあることに注意せよ)．$[0,\infty)$ で考えればフレシェ空間となる．この空間でも上記の結果は成立する．

補題 2.16 の証明. (1) $X, Y \in E$ に対して, $\|X-Y\|_T = 0$ と $P(X_t = Y_t\ 0 \le t \le T) = 1$ は同値なので, indistinguishable なものの同一視で E はノルム空間になる．完備性を示

す．$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列とする．部分列 で

$$\|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\|_T \leq \frac{1}{k^3} \qquad \{n_k\} \uparrow \infty \tag{2.12}$$

となるものが取れる．この部分列に対し

$$A_k = \left\{ \omega \mid \max_{0 \leq t \leq T} |X_{n_k}(t) - X_{n_{k+1}}(t)| \geq \frac{1}{k^2} \right\}$$

と定めると Chebyshev の不等式より

$$P(A_k) \leq (k^2)^2 \|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\|_T^2 \leq \frac{1}{k^2}.$$

Borel-Cantelli's 1st lemma より $P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$. したがって，$\tilde{\Omega} = \liminf_{k\to\infty} A_k^c$ と定めると $P(\tilde{\Omega}) = 1$. 任意の $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対し，$K(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在し $k \geq K(\omega)$ ならば

$$\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n_k}(t, \omega) - X_{n_{k+1}}(t, \omega)| < \frac{1}{k^2}.$$

そこで，

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} X_{n_k}(t, \omega) & 0 \leq t \leq T, \omega \in \tilde{\Omega} \\ 0 & 0 \leq t \leq T, \omega \notin \tilde{\Omega} \end{cases}$$

とおく．$\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ は連続確率過程であり，$\mathcal{F}_t$ は通常の条件を満たすので，$\mathcal{F}_t$ 適合である．$\{X_n\}$ は E_T でコーシー列であることから $\{\|X_n\|_T\}$ はコーシー列であり $\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_T$ は収束する．したがって，Fatou's lemma より

$$E[|X|_T^2] \leq \liminf_{k\to\infty} E[|X_{n_k}|_T^2] < \infty.$$

したがって，$X \in E_T$. また，(2.12) より $l \geq k$ に対して

$$\|X_{n_k} - X_{n_{l+1}}\|_T \leq \sum_{i=k}^{l} \frac{1}{i^3}.$$

$l \to \infty$ として，

$$\|X_{n_k} - X\|_T \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i^3}.$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_T = 0$ である．(2.9) は選んだ $\{X_{n_k}\}$ について成立している．

(2) $\{X_n\} \subset E$ が d に関してコーシー列であるとする． 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\{X_n|_{[0,N]}\} \subset E_N$ はコーシー列である． したがって，$X^N \in E_N$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \|X_n|_{[0,N]} - X^N\|_N = 0$． したがって，$L < N$ のとき，$P\left(X^N|_{[0,L]}(t) = X^L(t)\ 0 \le t \le L\right) = 1$. したがって，$\exists X \in E$, 任意の N について，$X|_{[0,N]} = X^N \in E_N$. $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$ は明らかである．

また，$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \|X_n|_{[0,N]} - X|_{[0,N]}\|_N = 0$ なので部分列を取れば確率 1 で $X_{n_k}|_{[0,N]} \to X|_{[0,N]}$ は一様収束となる．あとは対角線論法でさらに部分列を取れば $[0,\infty)$ で広義一様収束する部分列が選べる． □

命題 2.15 の証明. (1) 内積空間であることは自明である．$\{M^n\} \in \mathcal{M}_2([0,T])$ がコーシー列とする．命題 2.14 と補題 2.15 より，$\exists M \in \mathcal{M}_2([0,T])$, $\lim_{n\to\infty} E[|M^n - M|_T^2] = 0$. したがって $s < t$ のとき

$$E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} E[M_t^n \mid \mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} M_s^n = M_s, \quad \text{in } L^2.$$

よって $M \in \mathcal{M}_2([0,T])$. $\mathcal{M}_2^c([0,T])$ が閉部分空間であることは，連続関数の空間が右連続な空間の中の閉部分空間であることから従う．

(2) d が距離になるのは標準的な議論でわかる．$\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2^c$ が完備であることは，補題 2.15 および (1) の結果から直ちに従う． □

$M \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ とする．命題 2.4 より，M_t^2 は劣マルチンゲールである．この劣マルチンゲールはマルチンゲールと単調非減少過程の一意的な和で書ける (Doob-Meyer 分解)．これを示そう．

定義 2.18. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0})$ を filtered probability space とする．

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_+ := \Big\{ A = (A_t)_{t\ge0} \mid A_0 = 0,\ A_t \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 適合かつ}\\ t \mapsto A_t(\omega) \text{ は単調非減少な連続関数} \Big\}\\ \mathcal{A} := \Big\{ A = (A_t)_{t\ge0} \mid A_0 = 0,\ A_t \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 適合かつ}\\ t \mapsto A_t(\omega) \text{ は有界変動連続} \Big\}\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$ であり，$A \in \mathcal{A}$ ならば $X_t := \|A\|_{\mathrm{BV},t}$ とおくと X_t は $\mathcal{F}_t$ 適合連続過程である．ただし

$$\|A(\omega)\|_{\mathrm{BV},t} := s(\in [0,t]) \mapsto A_s(\omega) \text{ の全変動 (有界変動ノルム)}.$$

定理 2.19. $M = (M_t)_{t\ge0} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ とする．

(1) 次の性質を満たす $A=(A_t)\in\mathcal{A}_+$ が (indistinguishable の意味で) 一意的に存在する.

 (i) $E[A_t]<\infty \quad \forall t.$

 (ii) $\{M_t^2-A_t\}\in\mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t)$

(2) $\Delta=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots\}$ を $[0,\infty)$ の分割とする.

$$Q_t(M;\Delta):=\sum_{i=1}^{\infty}(M_{t\wedge t_i}-M_{t\wedge t_{i-1}})^2$$

と定めると任意の $T>0$, $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0}P\left(\max_{0\le t\le T}|Q_t(M;\Delta)-A_t|>\varepsilon\right)=0. \tag{2.13}$$

特に, $|\Delta_n|\to 0$ のとき, 適当な部分列 Δ_{n_k} $(n_k\uparrow\infty)$ を取れば

$$P\Big(k\to\infty \text{ のとき, } Q_t(M;\Delta_{n_k}) \text{ は } A_t \text{ に } [0,\infty) \text{ で広義一様収束する }\Big)=1.$$

注意 2.20. $Q_t(M;\Delta)$ を $Q_t(\Delta)$ と簡単に書くことにする. A_t を $\langle M\rangle_t$ と書き, M_t の 2 次変分過程 (quadratic variation process) という. (1) より

$$E[M_t^2]=E[\langle M\rangle_t] \quad \forall t\ge 0.$$

である. また次の計算はこれからよく用いることになる. $\Delta:0=t_0<\ldots<t_n=t$ とすると

$$\begin{aligned}
E[(M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2]&=E[M_{t_i}^2-2M_{t_i}M_{t_{i-1}}+M_{t_{i-1}^2}]\\
&=E[M_{t_i}^2+M_{t_{i-1}}^2]-2E\left[E[M_{t_i}M_{t_{i-1}}|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\right]\\
&=E[M_{t_i}^2+M_{t_{i-1}}^2]-2E[M_{t_{i-1}}^2]\\
&=E[M_{t_i}^2-M_{t_{i-1}}^2]
\end{aligned}$$

より

$$E[Q_t(\Delta)]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(M_{t_i}^2-M_{t_{i-1}}^2)\right]=E[M_t^2].$$

定義 2.21. $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0})$ 上の d 次元ブラウン運動が $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とは B_t が $\mathcal{F}_t$-適合過程であり, 任意の $s<t$ に対して B_t-B_s が $\mathcal{F}_s$ と独立であるときにいう.

例 2.22. B_t を 1 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする．このとき,

$$\begin{aligned} E[B_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2 - 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= B_s^2 + t - s. \end{aligned}$$

したがって, $\langle B \rangle_t = t$.

一意性の証明．A_t^1, A_t^2 が (i), (ii) を満たすとする．$K_t = A_t^1 - A_t^2$ とおくと

$$K_t = A_t^1 - M_t^2 - (A_t^2 - M_t^2)$$

ゆえ $\{K_t\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}^c$.

$$\tau_N = \inf\{t \geq 0 \mid |K_t| + \|K\|_{\mathrm{BV},t} \geq N\}$$

とおくと τ_N は $\mathcal{F}_t$-停止時間．ゆえに, $K_t^{\tau_N} := K_{\tau_N \wedge t}$ は $\mathcal{F}_t$ に関して有界マルチンゲール．$[0,t]$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$ を取る．$i < j$ に対して

$$\begin{aligned} &E\left[(K_{t_i}^{\tau_N} - K_{t_{i-1}}^{\tau_N})(K_{t_j}^{\tau_N} - K_{t_{j-1}}^{\tau_N})\right] \\ &= E\left[E\left[(K_{t_i}^{\tau_N} - K_{t_{i-1}}^{\tau_N})(K_{t_j}^{\tau_N} - K_{t_{j-1}}^{\tau_N}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] \\ &= E\left[(K_{t_i}^{\tau_N} - K_{t_{i-1}}^{\tau_N})E\left[(K_{t_j}^{\tau_N} - K_{t_{j-1}}^{\tau_N}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

よって

$$\begin{aligned} E\left[(K_t^{\tau_N})^2\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n K_{t_{i-1},t_i}^{\tau_N}\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (K_{t_{i-1},t_i}^{\tau_N})^2\right] \\ &\leq E\left[\max_i |K_{t_{i-1},t_i}^{\tau_N}| \sum_{i=1}^n |K_{t_{i-1},t_i}^{\tau_N}|\right] \\ &\leq E\left[N \max_i |K_{t_{i-1},t_i}^{\tau_N}|\right] \to 0 \ (\text{as } |\Delta| \to 0). \end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty} K_t^{\tau_N}(\omega) = K_t(\omega) \quad \forall t, \omega$$

より, $E[K_t^2] = 0$. ゆえにすべての $t \geq 0$ に対し,$P(A_t^1 = A_t^2) = 1$. □

一意性以外の (1) と (2) を示す．まず,

$$\sup_{t\geq 0,\omega} |M_t(\omega)| \leq C_0 < \infty \tag{2.15}$$

の条件の下で示し, 次に一般の場合を示す．いくつか準備をする．

補題 2.23. (2.15) を仮定する.

(1) 任意の Δ に対し, $\{M_t^2 - Q_t(\Delta)\} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ かつ

$$E[Q_t(\Delta)^2] \le 6C_0^4 \qquad \forall t \ge 0. \tag{2.16}$$

(2) Δ' を Δ の細分とする. 任意の $T > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & E\left[\max_{0\le t\le T} |Q_t(\Delta) - Q_t(\Delta')|^2\right] \\ & \le 4E\left[\max_{|u-v|\le|\Delta|, 0\le u,v\le T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2} E\left[Q_T(\Delta')^2\right]^{1/2} \\ & \le 4\sqrt{6}C_0^2 E\left[\max_{|u-v|\le|\Delta|, 0\le u,v\le T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

補題 2.23 を仮定し, (2.15) の条件の下で, (1), (2) を示す.

$\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ を $[0,\infty)$ の分割で Δ_{n+1} は Δ_n の細分となっているものとする. さらに $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ とする. 補題 2.23, 補題 2.16 より $A \in E$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} d(Q(\Delta_n), A) = 0.$$

また, (必要とあれば部分列を取ることにより)

$$P(Q(\Delta_n) \to A \text{ 広義一様 on } [0,\infty)) = 1$$

より $A \in \mathcal{A}_+$ ($Q_s(\Delta_n) \le Q_t(\Delta_n)$ $(s \le t, s,t \in \Delta_n)$ より). 任意の t に対し, $\lim_{n\to\infty} Q_t(\Delta_n) = A_t$ in L^2 ゆえ, $E[M_t^2 - Q_t(\Delta_n) \mid \mathcal{F}_s] = M_s^2 - Q_s(\Delta_n)$ で $n \to \infty$ とし, $\{M_t^2 - A_t\} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$. また, 補題 2.23 (2) で $\Delta' = \Delta_n$, $n \to \infty$ とし

$$E\left[\max_{0\le t\le T} |Q_t(\Delta) - A_t|^2\right] \le 4\sqrt{6}C_0^2 E\left[\max_{|u-v|\le|\Delta|, 0\le u,v\le T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2}. \tag{2.18}$$

Chebyshev の不等式を用い

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{0\le t\le T} |Q_t(\Delta) - A_t| \ge \varepsilon\right) \\ & \qquad \le \varepsilon^{-2} 4\sqrt{6}C_0^2 E\left[\max_{|u-v|\le|\Delta|, 0\le u,v\le T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

よって, $|\Delta| \to 0$ で確率収束する.

次に M の有界性を外して示す. まず, A_t の存在を示す. $\mathcal{F}_t$-停止時間

$$\tau_N(\omega) = \inf\{t \ge 0 \mid |M_t(\omega)| \ge N\}$$

を考える.

$$M_t^{\tau_N}(\omega) := M_{\tau_N(\omega)\wedge t}(\omega)$$

とおくと $|M_t^{\tau_N}| \le N$. ゆえに, すでに示した結果より $A^N \in \mathcal{A}_+$ が存在して $(M^{\tau_N})_t^2 - A_t^N$ が連続マルチンゲールになる. $L \le N$ ならば $\tau_L \le \tau_N$ より

$$\left((M^{\tau_N})^2 - A^N\right)_t^{\tau_L} = (M_t^{\tau_L})^2 - A_{t\wedge\tau_L}^N.$$

A_t の一意性より

$$P\left(A^N_{\tau_L(\omega)\wedge t}(\omega) = A_t^L(\omega) \quad t \ge 0\right) = 1.$$

したがって

$$P\left(A_t^N(\omega) = A_t^L(\omega) \quad t \le \tau_L(\omega)\right) = 1.$$

よって,

$$P\left(A_t(\omega) = A_t^N(\omega) \quad t \le \tau_N(\omega) \quad \forall t \ge 0, \forall N \in \mathbb{N}\right) = 1$$

となる $A \in \mathcal{A}_+$ が存在する. すなわち, すべての N について

$$P\left(A_t^N = A_{t\wedge\tau_N} \quad t \ge 0\right) = 1.$$

$E[(M_t^{\tau_N})^2 - A_t^N] = 0$ であり $(M_t^{\tau_N})^2 - A_t^N = (M_{\tau_N\wedge t})^2 - A_{\tau_N\wedge t}$ より

$$E[A_{\tau_N\wedge t}] = E[M^2_{t\wedge\tau_N}] \le E[\max_{0\le s\le t} M_s^2].$$

したがって,

$$\lim_{N\to\infty} A_{\tau_N\wedge t} = A_t \quad \text{in } L^1.$$

また,

$$|M_{t\wedge\tau_N}|^2 \le \max_{0\le s\le t} |M_s|^2$$

より, $\{M^2_{\tau_N\wedge t}\}_{N=1}^\infty$ は一様可積分である. これらより,

$$E[M^2_{t\wedge\tau_N} - A_{t\wedge\tau_N}|\mathcal{F}_s] = M^2_{s\wedge\tau_N} - A_{s\wedge\tau_N} \quad (s < t).$$

の式で $N \to \infty$ とし

$$E[M_t^2 - A_t|\mathcal{F}_s] = M_s^2 - A_s.$$

最後に, (2) を示す. 任意の $N \ge 1$ に対して

$$P\left(\langle M^{\tau_N}\rangle_t = A_{\tau_N\wedge t}\right) = 1$$

を用いる. 任意の $\delta > 0$ に対し, N を適当に取れば,

$$P(\tau_N < T) \leq \delta.$$

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(\Delta) - A_t| \geq \varepsilon\right) \\
&\quad = P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(\Delta) - A_t| \geq \varepsilon, \tau_N \geq T\right) \\
&\quad + P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(\Delta) - A_t| \geq \varepsilon, \tau_N < T\right) \\
&\quad \leq P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(M^{\tau_N}, \Delta) - A_{\tau_N\wedge t}| \geq \varepsilon, \tau_N \geq T\right) + \delta \\
&\quad \leq P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(M^{\tau_N}, \Delta) - A_{\tau_N\wedge t}| \geq \varepsilon\right) + \delta.
\end{aligned}$$

よって

$$\limsup_{|\Delta|\to 0} P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(\Delta) - A_t| \geq \varepsilon\right) \leq \delta.$$

最後の statement は今証明したことを用いて示される.

定理 2.24. $M, N \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ とする.

(1) $A \in \mathcal{A}$ が一意に存在し $(M_tN_t - A_t) \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t)$. また, この A_t は

$$A_t = \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\right) \tag{2.20}$$

で具体的に与えられる.

(2) $[0,\infty)$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots\}$ に対して

$$Q_t(M, N; \Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} M_{t_{i-1}\wedge t, t_i\wedge t} N_{t_{i-1}\wedge t, t_i\wedge t} \tag{2.21}$$

とおくと任意の $T > 0$, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{|\Delta|\to 0} P\left(\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(M, N; \Delta) - \langle M, N\rangle_t| > \varepsilon\right) = 0.$$

上記の A_t を $\langle M, N\rangle_t$ と書き, M と N の相互 (交差) 変分過程 (cross variation process, covariation process) という.

Proof. (1) 一意性はこれまでと同様の議論で示せる.

$$(M_t + N_t)^2 - \langle M + N \rangle_t \in \mathcal{M}^c,$$
$$(M_t - N_t)^2 - \langle M - N \rangle_t \in \mathcal{M}^c$$

より, 前半部分も明らかである.
(2)

$$\begin{aligned}
&Q_t(M, N; \Delta) - \langle M, N \rangle_t \\
&= \frac{1}{4}\Big\{Q_t(M + N; \Delta) - Q_t(M - N; \Delta) - (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t)\Big\} \\
&= \frac{1}{4}\Big\{Q_t(M + N; \Delta) - \langle M + N \rangle_t\Big\} \\
&\quad - \frac{1}{4}\Big\{Q_t(M - N; \Delta) - \langle M - N \rangle_t\Big\}
\end{aligned}$$

より定理 2.19 から従う. □

例 2.25. $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする.

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$$

である. Cross variation のみチェックすればよい. すなわち, $i \neq j$,$s < t$ のとき

$$E[B_t^i B_t^j | \mathcal{F}_s] = B_s^i B_s^j$$

を示す.

$$\begin{aligned}
E[B_t^i B_t^j | \mathcal{F}_s] &= E[B_s^i B_s^j | \mathcal{F}_s] + E[B_{s,t}^i B_s^j | \mathcal{F}_s] + E[B_s^i B_{s,t}^j | \mathcal{F}_s] + E[B_{s,t}^i B_{s,t}^j \mid \mathcal{F}_s] \\
&= B_s^i B_s^j + 0 + 0 + 0 \\
&= B_s^i B_s^j.
\end{aligned}$$

ここで $B_{s,t}^i, B_{s,t}^j \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ を用いた.

2.3 局所マルチンゲール

連続局所マルチンゲールの集合を定義する.

定義 2.26. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ を filtered probability space とする. 次の性質を満たす 1 次元連続確率過程を連続局所マルチンゲール (continuous local martingale) といい, 連続局所マルチンゲール全体の集合を $\mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ と書く.

(1) $M_0 = 0$.

(2) $\mathcal{F}_t$-停止時間 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ で以下の性質を満たすものが存在する.

(i) $\tau_n(\omega) \le \tau_{n+1}(\omega)$ $(\forall\omega, \forall n)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \infty$ $(\forall\omega \in \Omega)$

(iii) $M_t^{\tau_n} := M_{\tau_n \wedge t}$ は $\mathcal{F}_t$-martingale.

注意 2.27. (1) $\mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ は線形空間である. また, $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ ならば M は $\mathcal{F}_t$-適合である.

(2) $\tilde{\tau}_n = \tau_n \wedge n$ を考えることにより有界な停止時間の列とすることができる.

(3) $n \in \mathbb{N}$ とする. M_t を $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程で $M_0 = 0$ とする. $\sigma_n(\omega)$ を $[n, \infty)$ への $|M_t|$ の hitting time とする. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ とすべての n について $M^{\sigma_n} \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t)$ は同値.

定理 2.28. (1) $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ とする. $A \in \mathcal{A}_+$ が一意的に存在して (indistinguishable の意味で), $M_t^2 - A_t \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$. さらに, $N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とすると $M_t N_t - B_t \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ となる $B \in \mathcal{A}$ が一意に存在する.

(2) (1) の A_t を $\langle M \rangle_t$, B_t を $\langle M, N \rangle_t$ と書く. 次が成立する.

$$\lim_{|\Delta|\to 0} P\left(\max_{0\le t\le T} |Q_t(M;\Delta) - \langle M \rangle_t| \ge \varepsilon\right) = 0,$$

$$\lim_{|\Delta|\to 0} P\left(\max_{0\le t\le T} |Q_t(M,N;\Delta) - \langle M,N \rangle_t| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Proof. (1) σ_n を $|M_t|$ の $[n,\infty)$ への hitting time とする. $M_t^{\sigma_n}$ は有界マルチンゲールである. したがって, $(M_t^{\sigma_n})^2 - A_t^n$ がマルチンゲールとなる $(A_t^n) \in \mathcal{A}_+$ が一意的に存在する. 一意性から $l < n$ ならば

$$P\left(A_t^n(\omega) = A_t^l(\omega) \quad t \le \sigma_l(\omega)\right) = 1.$$

これから, $A \in \mathcal{A}_+$ が存在して ($A_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} A_t^n(\omega)$ が確率 1 の ω で収束)

$$P\left(A_t^{\sigma_n}(\omega) = A_t^n(\omega) \quad \forall t \ge 0\right) = 1.$$

したがって, $(M_t^{\sigma_n})^2 - A_t^{\sigma_n}$ がマルチンゲールとなる. 一意性は, マルチンゲールの 2 次変分の一意性と同様に示せる.

(2) $Q_t(M;\Delta)$ の確率収束を示せば, 2 乗可積分マルチンゲールの場合と同様, 相互変分についても言える. $\delta > 0$ を取る. (1) で考えた停止時間 σ_n について十分大きな N を取れば

$$P(\sigma_N < T) \le \delta.$$

したがって, 定理 2.19 で有界マルチンゲールの場合に帰着させたのと同様にして示せる. □

定義 2.29. 定理 2.28 の A_t, B_t を $\langle M\rangle_t$, $\langle M,N\rangle_t$ と書く.

補題 2.30. (1) $M,N \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$, τ を $\mathcal{F}_t$-停止時間とすると $M^\tau \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ かつ

$$\langle M^\tau, N^\tau\rangle_t = \langle M^\tau, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_{\tau\wedge t}.$$

(2) $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $\max_{0\le t\le T}|M_t| \in L^1$ ならば $M \in \mathcal{M}^c([0,T])$.

(3) $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $\langle M\rangle_T \in L^1 \iff M \in \mathcal{M}_2^c([0,T])$.

(4) $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする. 次は同値.

(i) $P(M_t = 0 \quad \forall t \ge 0) = 1$

(ii) 任意の $N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ に対し $P(\langle M,N\rangle_t = 0 \quad \forall t\ge 0) = 1$.

Proof. (1) $M^\tau \in \mathcal{M}^{c,loc}$ は自明. 残りの等式は定理 2.28 (2) から従う.
(2) $\tau_n \uparrow \infty$ を増大する $\mathcal{F}_t$ 停止時間の列で $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^c$ とする. $s < t \le T$ ならば

$$E[M_t^{\tau_n}|\mathcal{F}_s] = M_s^{\tau_n}.$$

$|M_t^{\tau_n}| \le \max_{0\le u\le T}|M_u|$ ゆえ $(M_t^{\tau_n})_{n=1}^\infty$ は一様可積分. 上記の式で $n\to\infty$ として $M_t \in L^1$ かつ $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ を得る.
(3) $\Longleftarrow$ は明らか. 逆を示す. σ_n を $|M_t|$ の $[n,\infty)$ への hitting time とする. M^{σ_n} は有界マルチンゲールである. したがって, $t\le T$ に対し

$$E[(M_t^{\sigma_n})^2] = E[\langle M\rangle_{\sigma_n\wedge t}] \le E[\langle M\rangle_T]. \tag{2.22}$$

この式で $n\to\infty$ とし,

$$E[M_t^2] \le E[\langle M\rangle_t].$$

また, (2.22) は $\{M_t^{\sigma_n}\}_{n=1}^\infty$ が一様可積分であることを示している. したがって,

$$E[M_t^{\sigma_n}|\mathcal{F}_s] = M_s^{\sigma_n}$$

の式で $n\to\infty$ として $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$. よって, $(M_t) \in \mathcal{M}_2^c$ である.
(4) (i) から (ii) は明らか. (ii) が成立していれば, $\langle M\rangle_t = 0$ となるので $M_t \equiv 0$. □

補題 2.31. $\{M_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^{c,loc}$ とする. $T>0$ を固定する. 次の (1),(2) は同値.

(1) $\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le T}|M_n(t)| = 0 \quad \text{in prob.}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\langle M_n\rangle_T = 0 \quad \text{in prob.}$

Proof. (1) から (2) を示す．$\varepsilon > 0$ とする．σ^n を $|M_n|$ の $[1,\infty)$ への hitting time とする．(1) の仮定から, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在し $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)| \geq 1\right) \leq \varepsilon.$$

したがって $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$P\left(\sigma^n \leq T\right) = P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)| \geq 1\right) \leq \varepsilon.$$

$M_n^{\sigma^n}$ は $\max_{0\leq t\leq T}|M_n^{\sigma^n}(t)| \leq 1$ を満たす有界マルチンゲールである．よって $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
P\left(\langle M_n\rangle_T \geq \delta\right) &\leq P\left(\langle M_n\rangle_T \geq \delta, \sigma^n \geq T\right) + P\left(\sigma^n < T\right) \\
&\leq P\left(\langle M_n\rangle_{T\wedge\sigma^n} \geq \delta\right) + \varepsilon \\
&\leq \delta^{-1}E\left[\langle M_n\rangle_{T\wedge\sigma^n}\right] + \varepsilon \\
&= \delta^{-1}E\left[\langle M_n^{\sigma^n}\rangle_T\right] + \varepsilon \\
&= \delta^{-1}E\left[\left(M_n^{\sigma^n}\right)_T^2\right] + \varepsilon \\
&\leq \delta^{-1}E\left[\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|^2\right)\wedge 1\right] + \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|^2\right)\wedge 1\right] = 0$$

より

$$\limsup_{n\to\infty} P((\langle M_n\rangle_T \geq \delta)) \leq \varepsilon$$

となり示された.

(2) から (1) を示す．(2) を仮定しているので $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq L_\varepsilon$ ならば

$$P\left(\langle M_n\rangle_T \geq 1\right) \leq \varepsilon.$$

τ^n を $\langle M_n\rangle_t$ の $[1,\infty)$ への hitting time とする．$n \geq L_\varepsilon$ ならば

$$P\left(\tau^n \leq T\right) = P\left(\langle M_n\rangle_T \geq 1\right) \leq \varepsilon.$$

したがって $n \geq L_\varepsilon$ ならば

$$
\begin{aligned}
P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|\geq\delta\right) &\leq P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|\geq\delta,\tau^n\geq T\right)+P\left(\tau^n\leq T\right)\\
&\leq P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n^{\tau^n}(t)|\geq\delta\right)+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\langle M_n^{\tau^n}\rangle_T \leq 1$ ゆえ $M_n^{\tau^n} \in \mathcal{M}_2^c$. したがって, $n \geq L_\varepsilon$ ならば劣マルチンゲール不等式を用い

$$
\begin{aligned}
P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|\geq\delta\right) &\leq \delta^{-2}E\left[|(M_n^{\tau^n})_T|^2\right]+\varepsilon\\
&= \delta^{-2}E\left[\langle M_n^{\tau^n}\rangle_T\right]+\varepsilon\\
&\leq \delta^{-2}E\left[\langle M_n\rangle_T\wedge 1\right]+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

したがって仮定より

$$
\limsup_{n\to\infty}P\left(\max_{0\leq t\leq T}|M_n(t)|\geq\delta\right)\leq\varepsilon
$$

を得るので示された. □

例 2.32. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ かつ ある $p > 1$ に対し $M_t \in L^p$ $(t \geq 0)$ だとしても $M \notin \mathcal{M}^c$ となることがある. 例えば, B_t を 3 次元以上のブラウン運動で $B_0 = x(\neq 0)$ とし

$$
M_t = \frac{1}{|B_t|^{d-2}} - \frac{1}{|x|^{d-2}}
$$

とおけばよい.

3 確率積分

この節で出てくる filtered probability space は usual condition を満たすとする. ブラウン運動の 2 次変分過程は $\langle B\rangle_t = t \quad a.s.$ を満たした. これはほとんどすべての標本路が有界変動ではないということを示している. 積分 $\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$ の f もブラウン運動と同様有界変動な関数であることは期待できないため通常の積分の定義はできない事に注意しよう.

3.1　2 乗可積分連続マルチンゲールに対する積分

$M \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ と $\mathcal{F}_t$ 適合過程 $f(t,\omega)$ に対し確率積分

$$\int_0^t f(s,\omega)dM_s(\omega)$$

を定義する．準備をする．

$A \in \mathcal{A}_+$ に対し $\nu_A(\omega)$ を $([0,\infty),\mathcal{B}([0,\infty)))$ 上の測度で

$$\nu_{A(\omega)}([a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega)$$

を満たすものとする．これは, 一意的に定まる．$[0,\infty)$ 上のボレル可測関数 f に対し (可積分のとき)

$$\int_0^t f(s)dA_s(\omega) = \int_0^t f(s)d\nu_A(\omega)(s) \tag{3.1}$$

と定める．すなわち, 左辺は Lebesugue-Stieltjes 積分である．

補題 3.1. 上記で定義した ν_A を考える．

(1) $E \in \mathcal{B}([0,t])$ ならば $\nu_A(E)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測である．

(2) $(f(t,\omega))_{t\geq 0}$ を $\mathcal{F}_t$ 発展的可測とする．

$$\forall\omega, \forall T, \quad \int_0^T |f(t,\omega)|dA_t(\omega) < \infty$$

とする．このとき,

$$\left(\int_0^t f(s,\omega)dA_s(\omega)\right)_{t\geq 0}$$

は $\mathcal{F}_t$ 適合連続確率過程である．

(3) $(f(t,\omega))_{t\geq 0}$ を 非負値 $\mathcal{F}_t$ 発展的可測とする．このとき,

$$\left(\int_0^t f(s,\omega)dA_s(\omega)\right)_{t\geq 0}$$

は $[0,+\infty]$ 値 $\mathcal{F}_t$ 発展的可測確率過程である．

Proof. (1) $0 \leq a < b \leq t$ とすると

$$\nu_{A(\omega)}([a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega)$$

は $\mathcal{F}_t$ 可測である.

$$\mathcal{I} = \{[a,b] \mid 0 \leq a < b \leq t\}$$

とおく. $\mathcal{I}$ は $\mathcal{B}([0,t])$ を生成する π-system である.

$$\mathcal{D} = \left\{ B \in \mathcal{B}([0,t]) \mid \nu_A(B) \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 可測である} \right\}$$

とおくと $\mathcal{D}$ は Dynkin 族であり, $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$. したがって, Dynkin 族定理により

$$\mathcal{D} \supset d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}([0,t]).$$

(2) $(f(s,\omega))_{t\geq 0}$ が有界の場合に示せば十分である. $(f(s,\omega))_{0\leq s\leq t}$ を 有界 $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可測のとき

$$\int_0^t f(s,\omega) dA_s(\omega) \ \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 可測} \qquad (*)$$

を示せばよい. なぜなら $t \mapsto \int_0^t f(s,\omega)dA_s(\omega)$ は連続だから (我々は A は連続確率過程としている).

$$V = \left\{ f(s,\omega) \;\middle|\; f \text{ は } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t \text{ 可測, 有界で } (*) \text{ が成立する} \right\}$$

とおく.

$$\mathcal{I} = \{E \times F \mid E \in \mathcal{B}([0,t]), F \in \mathcal{F}_t\}$$

とおくと $\mathcal{I}$ は π-system. また, $\{1_A \mid A \in \mathcal{I}\} \subset V$ である. なぜなら

$$\int_0^t 1_E(s) 1_F(\omega) dA_s(\omega) = \nu_{A(\omega)}(E) 1_F(\omega)$$

だから. したがって, Monotone class theorem により,

$$\{\sigma(\mathcal{I}) \text{ 可測有界関数 }\} \subset V.$$

$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ ゆえ (2) が示された.
(3) これは, $f_n(t,\omega) = \min(f(t,\omega), n)$ とおき f_n に対して (2) の結果を適用し, $n \to \infty$ とすればよい. □

注意 3.2. 補題 3.1 では $A \in \mathcal{A}_+$ とし測度に対する積分が対応する積分を考えた. $A \in \mathcal{A}$ の符号付き測度に対する積分の場合も同様な結果が成立する.

確率積分の被積分確率過程を定義する.

定義 3.3. $M \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ とする．

$$\mathcal{L}_2([0,T];M) = \Big\{ f = f(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \;\Big|\; f \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 発展的可測で } \|f\|_{\mathcal{L}_2([0,T];M)} < \infty \Big\}.$$

ここで

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2([0,T];M)} = \left(E\left[\int_0^T f(t,\omega)^2 d\langle M\rangle_t(\omega) \right] \right)^{1/2}.$$

さらに,

$$\mathcal{L}_2(M) = \Big\{ f = f(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R} \;\Big|\; f \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 発展的可測で すべての } T>0 \text{ に対し } \|f\|_{\mathcal{L}_2([0,T],M)} < \infty \Big\}$$

とおく． $f, g \in \mathcal{L}_2(M)$ に対し

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\|f-g\|_{\mathcal{L}_2([0,n];M)} \wedge 1 \right)$$

と定める．

上記定義を少し見直す．

$([0,\infty)\times\Omega, \mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F})$ 上に測度 μ_M を導入し, $\mathcal{L}_2([0,T];M)$ をこの測度に対する L^2 空間と思うことができる．

$$d\mu_M(t,\omega) = \nu_{\langle M\rangle(\omega)}(dt)P(d\omega)$$

と定義される．正確には μ_M は $(a,b] \in \mathcal{B}([0,\infty))$, $A \in \mathcal{F}$ に対し

$$\mu_M((a,b]\times A) = \int_A \left(\langle M\rangle_b(\omega) - \langle M\rangle_a(\omega) \right) dP(\omega)$$

を満たすものとして一意的に定まる測度である．この測度を用いると

$$E\left[\int_0^T f(t,\omega)^2 d\langle M\rangle_t \right] = \int_{[0,T]\times\Omega} f(t,\omega)^2 d\mu_M(t,\omega)$$

と書くこともできる．すなわち,

$$\mathcal{L}_2([0,T];M) = \mathcal{L}_2([0,T]\times\Omega;\mu_M)$$

この空間をヒルベルト空間と考える時は, μ_M-a.e. に等しい関数を同一視して考える. $\mathcal{L}_2(M)$ も同様で, この同一視で $(\mathcal{L}_2(M), d)$ は完備距離空間となる.

$M_t = B_t$ 1 次元ブラウン運動のときは,

$$d\mu_B(t,\omega) = dt \otimes dP(\omega).$$

注意 3.4. 明らかに, $f \in \mathcal{L}_2(M)$ ならば

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \omega \;\middle|\; \int_0^T |f(t,\omega)|^2 d\langle M\rangle_t(\omega) < \infty \quad \forall T > 0 \right\}$$

とおくと $P(\tilde{\Omega}) = 1$ である. $\tilde{f}(t,\omega) = f(t,\omega)1_{\tilde{\Omega}}(\omega)$ とおく. $\tilde{f}$ も発展的可測過程であり f と $\tilde{f}$ は $\mathcal{L}_2(M)$ の同じ同値類に属す. これから示すことだが, 確率積分は同値類のみに依存するので, 任意の ω について $\int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty$ と思っても問題は無い.

定義 3.5 (単過程 (simple process))**.** $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ (単に $\mathcal{L}_0$ と書くこともある) で次のような simple process と呼ばれる $\mathcal{F}_t$ 適合過程 $f(t,\omega)$ 全体の集合を表す.

1. $[0,\infty)$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots \uparrow \infty\}$
2. $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測な f_i $i = 0,1,2,\ldots$ with $\sup_{i,\omega} |f_i(\omega)| < \infty$

を用いて

$$f(t,\omega) = f_0(\omega)1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

と書ける. $[0,T]$ で定義された simple process 全体は $\mathcal{L}_0([0,T])$ などと書く.

$f_i(\omega) = f(t_i + 0, \omega) = f(t_{i+1}, \omega)$ であり, $i \neq 0$ ならば, 一般に $f_i(\omega) \neq f(t_i,\omega)$ に注意せよ.

補題 3.6. (1) $\mathcal{L}_0$ は $\mathbb{R}$ 上の可換代数をなす.

(2) $f \in \mathcal{L}_0$ は左連続 $\mathcal{F}_t$ 適合過程.

定義 3.7. $f \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ と $M \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ に対して $t_n \le t \le t_{n+1}$ の場合

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)\left(M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)\right) + f_n(\omega)\left(M_t(\omega) - M_{t_n}(\omega)\right) \tag{3.2}$$

を $I^M(f)(t,\omega)$, $\int_0^t f(s,\omega)dM_s(\omega)$ などと書いて f の M に対する確率積分という.

注意 3.8.

$$\int_0^t f(s,\omega)dM_s(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\omega)\left(M_{t\wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t\wedge t_i}(\omega)\right)$$

のようにも書ける. 紛れが無ければ, $I^M(f)_t$ を簡単に $I(f)_t$ と書く.

補題 3.9. $f, g \in \mathcal{L}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $I(af+bg)_t = aI(f)_t + bI(g)_t \qquad t \geq 0.$

(2) $I(f) \in \mathcal{M}_c^2(\mathcal{F}_t)$.

(3) $\langle I^M(f), I^N(g)\rangle_t = \displaystyle\int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s(\omega)$. 特に

$$\langle I^M(f)\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_t(\omega). \tag{3.3}$$

(4) 次が成立する.

$$E[I(f)_t^2] = E\left[\int_0^t f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s(\omega)\right]. \tag{3.4}$$

Proof. (1) これは定義から明らかである.

(2) $I(f)_t$ が連続確率過程であることは定義から明らか. $I(f)_t \in L^2$ $(t \geq 0)$ と $s < t$ のとき $E[I(f)_t|\mathcal{F}_s] = I(f)_s$ を示す. $I(f)_t$ は有限和であり, かつ $\{f_i(\omega)\}$ は有界かつ $M_t \in L^2$ から $I(f)_t \in L^2$ は明らか. 必要ならば分点を増やせばよいので後者は $s = t_{l+1} < t_{n+1} = t$ $(l < n)$ の場合に示せば十分.

$$\begin{aligned}
E\left[I(f)_t|\mathcal{F}_s\right] &= \sum_{i=0}^{l} f_i M_{t_i,t_{i+1}} + E\left[\sum_{i=l+1}^{n} f_i M_{t_i,t_{i+1}}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{l} f_i M_{t_i,t_{i+1}} + \sum_{i=l+1}^{n} E\left[E[f_i M_{t_i,t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{l} f_i M_{t_i,t_{i+1}} \\
&= I(f)_s.
\end{aligned}$$

(3) $s < t$ とする.

$$\begin{aligned}
&E\left[I^M(f)_t I^N(g)_t - \int_0^t f(u)g(u)d\langle M,N\rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= I^M(f)_s I^N(g)_s - \int_0^s f(u)g(u)d\langle M,N\rangle_u
\end{aligned}$$

を示す．分割は共通として一般性は失われない．$l<n$ で $s=t_{l+1}<t_{n+1}=t$ とする．

$$
\begin{aligned}
I^M(f)_t &= \sum_{i=0}^{n} f_i M_{t_i,t_{i+1}} \\
I^N(g)_t &= \sum_{i=0}^{n} g_i N_{t_i,t_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

一方

$$
\int_0^t f(s)g(s)d\langle M,N\rangle_s = \sum_{i=0}^{n} f_i g_i \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}.
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&I^M(f)_t I^N(g)_t - \int_0^t f(s)g(s)d\langle M,N\rangle_s \\
&= \sum_{i=0}^{n} f_i g_i \left(M_{t_i,t_{i+1}} N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}\right) \\
&\quad + \sum_{0\le i\ne j\le n} f_i g_j M_{t_i,t_{i+1}} N_{t_j,t_{j+1}} \\
&=: I_t + J_t. \quad (F_{i,j} = f_i g_j M_{t_i,t_{i+1}} N_{t_j,t_{j+1}} \text{ とおく.})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_t &= \sum_{0\le i\ne j\le l} F_{i,j} + \sum_{\substack{i\ne j \\ i\ge l+1 \text{ or } j\ge l+1}} F_{i,j} \\
&=: J_t^1 + J_t^2.
\end{aligned}
$$

J_t^2 を考える．$j>i$ なら必然的に $j\ge l+1$, すなわち $t_j \ge t_{l+1}=s$ となる．このとき,

$$
E[F_{i,j}|\mathcal{F}_s] = E[E[F_{i,j}|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] = 0.
$$

したがって $E[J_t^2|\mathcal{F}_s]=0$. また

$$
E[J_t^1|\mathcal{F}_s] = J_t^1 = \sum_{0\le i\ne j\le l} F_{i,j}.
$$

I_t の条件付き期待値を計算する．

$$
\begin{aligned}
E[I_t|\mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{l} f_i g_i \left(M_{t_i,t_{i+1}} N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}\right) \\
&\quad + E\left[\sum_{l+1\le i\le n} f_i g_i \left(M_{t_i,t_{i+1}} N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}
$$

$$第二項 = \sum_{l+1\le i\le n} E\left[E\left[f_i g_i\left(M_{t_i,t_{i+1}}N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t_i}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right].$$

ここで

$$\begin{aligned}
&E\left[M_{t_i,t_{i+1}}N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}\right]\\
&= E\Big[M_{t_{i+1}}N_{t_{i+1}} - M_{t_i}N_{t_i} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}} - M_{t_i}N_{t_i,t_{i+1}} - M_{t_i,t_{i+1}}N_{t_i}\Big|\mathcal{F}_{t_i}\Big]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

ゆえに 第二項 $= 0$. まとめると

$$\begin{aligned}
E[I_t|\mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{l} f_i g_i\left(M_{t_i,t_{i+1}}N_{t_i,t_{i+1}} - \langle M,N\rangle_{t_i,t_{i+1}}\right) + \sum_{0\le i\ne j\le l} F_{i,j}\\
&= I^M(f)_s I^N(g)_s - \int_0^s f(u)g(u)d\langle M,N\rangle_u.
\end{aligned}$$

(4) これは (3) から従う. □

補題 3.10. $\mathcal{L}_0$ ($\mathcal{L}_0([0,T])$) は $\mathcal{L}_2(M)$ ($\mathcal{L}_2([0,T];M)$) で稠密である.

これの証明はレポート問題とする. 発展的可測を可予測に変えてももちろん同じ稠密性が成立するがその証明はもっと簡単である. また, M がブラウン運動の場合も簡単である.

補題 3.11. $f \in \mathcal{L}_2(M)$ とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_0$ で

$$\lim_{n\to\infty} d(f, f_n) = 0$$

となるものが存在する. この $\{f_n\}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n)_t \text{ converges in } \mathcal{M}_2^c.$$

かつこの極限 G_t は f_n のとり方によらず決まる.

定義 3.12. 補題 3.11 の設定で $(G_t) \in \mathcal{M}_2^c$ を

$$I^M(f)_t \text{ または } \int_0^t f(s,\omega)dM_s(\omega)$$

と書き, f の M に対する確率積分という.

注意 3.13. 任意の $T>0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\max_{0\le t\le T}|I(f_n)_t - G_t|^2\right]=0$$

となる. $I^M(f)_t$ はあくまでも indistinguishable な意味で一意に決まることに注意する.

補題 3.11 の証明. $\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$ ならば任意の $T>0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,T]\times\Omega}|f_n(s,\omega)-f(s,\omega)|^2 d\mu_M(s,\omega)=0$$

任意の n,m について

$$\begin{aligned}
&\left(E\left[|I(f_n)_T - I(f_m)_T|^2\right]\right)^{1/2}\\
&=\|f_n-f_m\|_{L^2([0,T]\times\Omega,\mu_M)}\\
&\le \|f_n-f\|_{L^2([0,T]\times\Omega,\mu_M)}+\|f-f_m\|_{L^2([0,T]\times\Omega,\mu_M)}\\
&\to 0.
\end{aligned}$$

これは, $I(f_n)$ が $\mathcal{M}_2^c$ のコーシー列であることを示しているので極限が存在する. また, 極限が f_n のとり方によらないのも上記計算から明らかである. $\square$

定理 3.14. (1) 任意の $f,g\in\mathcal{L}_2([0,T];M)$, $a,b\in\mathbb{R}$ に対して

$$I(af+bg)_t = aI(f)_t + bI(g)_t.$$

(2) 次の写像 Φ は等張である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_2([0,T];M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}_2^c([0,T]) \\
\uplus & & \uplus \\
f & \longmapsto & (I(f)_t)_{0\le t\le T}.
\end{array}$$

すなわち

$$E\left[I(f)_T^2\right]=\int_{[0,T]\times\Omega}|f(t,\omega)|^2 d\mu_M(t,\omega). \tag{3.5}$$

(3) $M\in\mathcal{M}_2^c([0,T])$, $f\in\mathcal{L}_2([0,T];M)$ とする.

$$\langle I(f)\rangle_t=\int_0^t|f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega). \tag{3.6}$$

Proof. (1) $f_n \to f, g_n \to g$ in $\mathcal{L}_2([0,T];M)$ となる $\mathcal{L}_0$ の元の列を取る．$af_n + bg_n \to af + bg$ in $\mathcal{L}_2([0,T];M)$ なので極限をとればよい．

(2) は (3) から従うので (3) を示す．$f \in \mathcal{L}_0$ のときは (3) が成立することをすでに示した．$f \in \mathcal{L}_2([0,T],M)$ について $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_2([0,T],M)} = 0$ となる $f_n \in \mathcal{L}_0$ を取る．$\left(I^2(f_n)_t - \int_0^t |f_n(s)|^2 d\langle M\rangle_s\right)_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^c([0,T])$ である．$\lim_{n\to\infty} I(f_n)_t^2 = I(f)_t^2$ in L^1 かつ

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left|\int_0^t |f_n(s)|^2 d\langle M\rangle_s - \int_0^t |f(s)|^2 d\langle M\rangle_s\right|\right] \\
&\quad \le E\left[\int_0^t |f_n(s) - f(s)|^2 d\langle M\rangle_s\right]^{1/2} E\left[\int_0^t |f_n(s) + f(s)|^2 d\langle M\rangle_s\right]^{1/2} \to 0.
\end{aligned}
$$

より $\left(I(f)_t^2 - \int_0^t |f(s)|^2 d\langle M\rangle_s\right) \in \mathcal{M}^c([0,T])$ となる． □

注意 3.15. $f, g \in \mathcal{L}_0$ のとき $I^M(f)_t, I^N(g)_t$ の交差変分について

$$
\langle I^M(f), I^N(g)\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega) g(s,\omega) d\langle M, N\rangle_s
$$

を示した．この式は一般の f, g についても成立するが f, g それぞれが $d\langle M\rangle_t$, $d\langle N\rangle_t$ という異なった測度に対応して定義されているため, 自明なことでは無い．これは, 國田・渡辺の不等式と関連して後で示す.

次に局所マルチンゲールに対する積分を定義するがその準備として次の補題を用意する.

補題 3.16. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M})$ とする．任意の $\mathcal{F}_t$ 停止時間 σ に対し次が成立する．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t\wedge\sigma(\omega)} f(s,\omega) dM_s(\omega) &= \int_0^t f(s,\omega) 1_{[0,\sigma(\omega)]}(s) dM_s(\omega) \\
&= \int_0^t f(s,\omega) dM_s^\sigma(\omega). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

注意 3.17. (1) $f \in \mathcal{L}_2(M)$ ならば $\left(f(s,\omega)1_{[0,\sigma(\omega)]}(s)\right) \in \mathcal{L}_2(M)$ なので真ん中の確率積分は意味がつく．3 番目の確率積分も次のように well-defined であることがわかる．$\langle M^\sigma\rangle_t = \langle M\rangle_{\sigma\wedge t}$ より $s < t$ に対し

$$
\langle M^\sigma\rangle(\omega)_{s,t} = \langle M\rangle(\omega)_{\sigma(\omega)\wedge s, \sigma(\omega)\wedge t} \le \langle M\rangle(\omega)_{s,t}
$$

より $f \in \mathcal{L}_2(\langle M^\sigma\rangle)$ である.

(2) $\displaystyle\int_0^{t\wedge\sigma} f(s,\omega)1_{[0,\sigma]}(s)dM_s^\sigma$ も (3.7) の積分と同じである.
(3) 上記の結果は, $\sigma(\omega) \geq t$ となる a.s. な ω について真ん中の積分, 3 番目の積分がともに $\int_0^t f(s)dM_s$ と等しいという直感的に予想できることを意味している.

Proof. まず $f \in \mathcal{L}_0$ の時に示す. さらに $\sigma(\omega) > 0$ $(\forall\omega)$, $1_{[0,\sigma]}(\cdot) \in \mathcal{L}_0$ の場合を考える. これは, 狭義単調増加な正数列 $\{s_i\}_{i=1}^N$ が存在して ($N \in \mathbb{N}$ または $N = \infty$, $s_N = +\infty$ もありえる),

1. $\{\sigma(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{s_i\}_{i=1}^N$,
2. $\{\sigma \leq s_i\} \in \mathcal{F}_{s_i} \qquad i \geq 1$.

となることと同値. 1 ならば

$$1_{[0,\sigma(\omega)]}(t) = 1_{\sigma(\omega)\geq s_1}1_{[0,s_1]}(t) + \sum_{1\leq i\leq N-1} 1_{\sigma(\omega)\geq s_{i+1}}1_{(s_i,s_{i+1}]}(t)$$
$$\forall\omega \in \Omega, \forall t \geq 0.$$

となり (ダミー変数の s_i を増やしても式は成立する), 1 の下で $1_{\sigma\geq s_{i+1}} \in \mathcal{F}_{s_i}$ $i \geq 1$ は 2 と同値であるから十分性は従う. 必要性はレポート問題とする. このことから, $\sigma(\omega) > 0$ $(\forall\omega)$, $1_{[0,\sigma]} \in \mathcal{L}_0$ のときは f の分点もあわせて考えて $[0,\infty)$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ を用いて

$$f(t,\omega) = f_0(\omega)1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^\infty f_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$
$$1_{[0,\sigma(\omega)]}(t) = 1_{\sigma(\omega)\geq t_1}1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^\infty 1_{\sigma(\omega)\geq t_{i+1}}1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

となっている場合を考えることにしても一般性は失われない.

(i) $\sigma(\omega) \geq t, t_n < t \leq t_{n+1}$ のとき $I^M(f)_{t\wedge\sigma}$, $I^M(f1_{[0,\sigma]})_t$, $I^{M^\sigma}(f)_t$ のいずれも定義から

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)M_{t_i,,t_{i+1}} + f_n(\omega)M_{t_n,t}(\omega)$$

に等しいのですべて一致する.

(ii) $\sigma(\omega) = t_n \leq t_m < t < t_{m+1}$ のときやはり $I^M(f)_{t\wedge\sigma}$, $I^M(f1_{[0,\sigma]})_t$, $I^{M^\sigma}(f)_t$ の

いずれも定義から

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) M_{t_i, t_{i+1}}$$

に等しいのですべて一致する.

一般の停止時間 σ の場合を考える. $\Delta_n = \{k2^{-n}\}_{k=0}^{\infty}$ という分割を考え σ_{Δ_n} を取れば正値な停止時間であり, $1_{[0,\sigma_{\Delta_n}]} \in \mathcal{L}_0$ である. $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M})$ に対し $\lim_{m\to\infty} d(f_m, f) = 0$ となる $f_m \in \mathcal{L}_0$ を取る. するとすでに示したことにより

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge\sigma_{\Delta_n}(\omega)} f_m(s,\omega) dM_s(\omega) &= \int_0^t f_m(s,\omega) 1_{[0,\sigma_{\Delta_n}(\omega)]}(s) dM_s(\omega) \\ &= \int_0^t f_m(s,\omega) dM_s^{\sigma_{\Delta_n}}(\omega). \end{aligned} \tag{3.8}$$

任意の ω について $\sigma_{\Delta_n}(\omega) \downarrow \sigma(\omega)$ より $n \to \infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} f_m 1_{[0,\sigma_{\Delta_n}]} = f_m 1_{[0,\sigma]}$ $\forall(t,\omega)$ and in $L^2(\Omega\times[0,t], d\mu_M)$. また, $f = f_0 1_{(t_i,t_{i+1}]} + \sum_{i=1}^{\infty} f_i 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{L}_0$ のとき,

$$\begin{aligned}&\int_0^t f(s,\omega) dM_s^{\sigma_{\Delta_n}} - \int_0^t f(s,\omega) dM_s^{\sigma} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i M_{t\wedge\sigma_{\Delta_n}\wedge t_i, t\wedge\sigma_{\Delta_n}\wedge t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{\infty} f_i M_{t\wedge\sigma\wedge t_i, t\wedge\sigma\wedge t_{i+1}} \to 0 \\ &\quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned}$$

したがって, (3.8) で $n \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge\sigma(\omega)} f_m(s,\omega) dM_s(\omega) &= \int_0^t f_m(s,\omega) 1_{[0,\sigma(\omega)]}(s) dM_s(\omega) \\ &= \int_0^t f_m(s,\omega) dM_s^{\sigma}(\omega). \end{aligned} \tag{3.9}$$

この式で $m \to \infty$ とし目的の等式が示される. □

注意 3.18. $\sigma(\omega) \le \tau(\omega)$ $(\forall\omega)$ を満たす $\mathcal{F}_t$-停止時間を考える. 定理 2.19 (2) により P-a.s. ω について

$$\langle M^\tau - M^\sigma \rangle_t(\omega) = \begin{cases} 0 & t \le \sigma(\omega) \\ \langle M \rangle_{\sigma,t}(\omega) & \sigma(\omega) \le t \le \tau(\omega) \\ \langle M \rangle_{\sigma,\tau}(\omega) & \tau(\omega) \le t \end{cases}$$

ゆえに P-a.s. ω, $s<t$ について

$$\langle M^\tau - M^\sigma\rangle_{s,t}(\omega) = \begin{cases} 0 & s<t\le\sigma(\omega) \\ \langle M\rangle_{\sigma,t}(\omega) & s\le\sigma(\omega)\le t\le\tau(\omega) \\ \langle M\rangle_{s,t}(\omega) & \sigma(\omega)\le s<t\le\tau(\omega) \\ \langle M\rangle_{s,\tau(\omega)}(\omega) & \sigma(\omega)\le s\le\tau(\omega)<t \\ 0 & \tau(\omega)\le s<t \end{cases}$$

よって,

$$d\langle M^\tau - M^\sigma\rangle_t(\omega) \le 1_{[\sigma(\omega),\tau(\omega)]}(t)d\langle M\rangle_t.$$

また, $1_{[\sigma,\tau]}(t)$ は発展的 $\mathcal{F}_t$-可測である. $f\in\mathcal{L}_2(M)$ ならば $f\in\mathcal{L}_2(M^\sigma)$, $f\in\mathcal{L}_2(M^\tau - M^\sigma)$.

ゆえに $f\in\mathcal{L}_2(M)$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\int_0^t f(s,\omega)dM_s^\tau - \int_0^t f(s,\omega)dM_s^{\tau\Delta_n}\right)^2\right] = 0. \tag{3.10}$$

3.2 局所マルチンゲールに対する積分

局所マルチンゲールに対する積分を定義するが被積分関数 (確率過程) のクラスもそれにあわせて拡張する.

定義 3.19. $M\in\mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ とする. M に対して次の確率過程を導入する.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M) &:= \Big\{ f=(f(t,\omega))_{0\le t\le T} \;\Big|\; f \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 発展的可測かつ} \\ &\qquad \int_0^T |f(t,\omega)|^2 d\langle M\rangle_t < \infty \ P\text{-}a.s.\omega \Big\} \\ \mathcal{L}_{2,loc}(M) &:= \Big\{ f=(f(t,\omega))_{t\ge 0} \;\Big|\; f \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ 発展的可測かつ} \\ &\qquad \int_0^T |f(t,\omega)|^2 d\langle M\rangle_t < \infty \ P\text{-}a.s.\omega \ \forall T>0 \Big\}\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$, $\mathcal{L}_{2,loc}(M)$ はそれぞれ線形空間であり, $\mathcal{L}_2([0,T];M)$, $\mathcal{L}_2(M)$ はそれらの線形部分空間である.

定義 3.20. $M\in\mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$, $f\in\mathcal{L}_{2,loc}(M)$ とする. このとき, 次の性質 $(*)$ を満たす $(I_t)\in\mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ が一意的に存在する. これを $I^M(f)(t,\omega)$, $\displaystyle\int_0^t f(s,\omega)dM_s(\omega)$ などと

書く.

$$
(*)\begin{cases}
\text{“}(\star)\ \ \mathcal{F}_t \text{ 停止時間 } \tau \text{ で } M^\tau \in \mathcal{M}_2^c,\ f \in \mathcal{L}_2(M^\tau)\text{”} \\
\qquad \text{を満たすものについて} \\
\quad P\left(I_{t\wedge\tau} = \int_0^t f(s,\omega)dM_s^\tau(\omega) \quad t \geq 0\right) = 1.
\end{cases}
$$

注意 3.21. $(\star)$ が成立しているとき $\left(\int_0^t f(s,\omega)dM_s^\tau(\omega)\right)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ が定まることに注意せよ.

この定義を満たす I_t が一意的に存在することを示す.

まず

$$
\Omega' = \left\{\omega \;\middle|\; \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty \quad \forall t > 0\right\}
$$

とおく. 定義から, $P(\Omega') = 1$ である. $\mathcal{F}_t$ 停止時間 $\sigma_n(\omega)$ を次のように定める.

$$
\sigma_n(\omega) = \begin{cases}
\inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) + |M_t(\omega)| \geq n\right\} & (\omega \in \Omega') \\
n & (\omega \notin \Omega')
\end{cases}
\tag{3.11}
$$

と定める (命題 1.10 の形と若干違うがこれも停止時間になる). また, $\sigma_n(\omega) \uparrow +\infty$ as $n \to \infty$. まず, 一意性を示す. $I, \tilde{I}$ が $(*)$ を満たすとする. σ_n は $(\star)$ を満たすので,

$$
P\left(I_{t\wedge\sigma_n} = \int_0^t f(s,\omega)dM_s^{\sigma_n}(\omega) = \tilde{I}_{t\wedge\sigma_n} \quad t \geq 0\right) = 1.
$$

したがって,

$$
P\left(I_{t\wedge\sigma_n} = \tilde{I}_{t\wedge\sigma_n} \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N}\right) = 1.
$$

すなわち $P(I_t = \tilde{I}_t\ t \geq 0) = 1$. 存在を示す.

$$
I_t^n(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dM_s^{\sigma_n}(\omega)
$$

とおく. $m \leq n$ ならば $\sigma_m(\omega) \leq \sigma_n(\omega)$ $(\forall\omega)$ なので, 補題 3.16 を用いて確率 1 の ω について

$$
\begin{aligned}
I_{t\wedge\sigma_m}^n &= \int_0^{t\wedge\sigma_m} f(s,\omega)dM_s^{\sigma_n}(\omega) \quad \forall t \geq 0, \\
&= \int_0^t f(s,\omega)dM_s^{\sigma_m}(\omega) \quad \forall t \geq 0, \\
&= I_t^m \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}
$$

したがって, 確率 1 の集合を適当に取り直して $\mathcal{F}_t$ 適合連続確率過程 $I_t(\omega)$ で

$$P\left(I_{t\wedge\sigma_n}(\omega) = I_t^n(\omega) \quad \forall t \geq 0\right) = 1$$

を満たすものがある. 定義から $(I_t) \in \mathcal{M}^{c,loc}$ である. この I_t が $(*)$ を満たすことを示す. τ を仮定を満たす停止時刻とする. $t > 0$ を固定する.

$$\begin{aligned}
I_{t\wedge\tau}(\omega) &= \lim_{n\to\infty} I_{t\wedge\tau\wedge\sigma_n}(\omega) \quad P\text{-}a.s.\omega \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{t\wedge\tau} f(s,\omega) dM_s^{\sigma_n}(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{t} f(s,\omega) dM_s^{\sigma_n\wedge\tau} \quad P\text{-}a.s.\omega \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{t\wedge\sigma_n} f(s,\omega) dM_s^{\tau}(\omega) \quad P\text{-}a.s.\omega \\
&= \int_0^{t} f(s,\omega) dM_s^{\tau}(\omega).
\end{aligned}$$

これで示された.

注意 3.22. $f, g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T]; M)$ で

$$P\left(\int_0^T |f(s,\omega) - g(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) = 0\right) = 1$$

を満たす, すなわち,

$$\mu_M\left(\{(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega \mid f(t,\omega) = g(t,\omega)\}\right) = 1$$

とする. $I^M(f)_{t\wedge\sigma_n} = I^{M^{\sigma_n}}(f 1_{[0,\sigma_n]})_t$ なので

$$P\left(I^M(f)_t = I^M(g)_t \quad 0 \leq t \leq T\right) = 1$$

がわかる. この逆も成立することが以下の命題からわかる.

命題 3.23. (1) $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}(M)$ とすると

$$\langle I(f)\rangle_t = \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega).$$

(2) $f, g \in \mathcal{L}_{2,loc}(M)$ とすると

$$I^M(f+g)_t = I^M(f)_t + I^M(g)_t \quad t \geq 0.$$

Proof. (1) (3.11) の σ_n を取る.

$$
\begin{aligned}
&I(f)_{t\wedge\sigma_n}^2 - \int_0^{t\wedge\sigma_n} |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) \\
&= \left(\int_0^t f(s,\omega) dM^{\sigma_n}(\omega)\right)^2 - \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M^{\sigma_n}\rangle_s \\
&= I^{M^{\sigma_n}}(f)_t^2 - \langle I^{M^{\sigma_n}}(f)\rangle_t \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
$$

より $I(f)_t^2 - \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s \in \mathcal{M}^{c,loc}$. したがって, 2 次変分過程の一意性より $\langle I(f)\rangle_t = \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega)$.

(2) (3.11) の停止時間を σ_n^f とおき, g に対して同様に定義したものを σ_n^g とおく. $\tau_n = \sigma_n^f \wedge \sigma_n^g$ とおくと τ_n も停止時間になる. $f, g \in \mathcal{L}_2(M^{\tau_n})$ より定理 3.14 (1) の線型性より

$$
I(f)_{t\wedge\tau_n} + I(g)_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \left(f(s,\omega) + g(s,\omega)\right) dM_s^{\tau_n}(\omega). \tag{3.12}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |f(s,\omega) + g(s,\omega)|^2 \, d\langle M^{\tau_n}\rangle_s(\omega) \\
&\le 2\int_0^t \left(|f(s,\omega)|^2 + |g(s,\omega)|^2\right) 1_{[0,\tau_n]}(s) d\langle M\rangle_s(\omega) \\
&\le 2n.
\end{aligned}
$$

したがって, $f+g \in \mathcal{L}_2(M^{\tau_n})$ となり, (3.12) の右辺 $= I(f+g)_{t\wedge\tau_n}$. よって

$$
I(f)_{t\wedge\tau_n} + I(g)_{t\wedge\tau_n} = I(f+g)_{t\wedge\tau_n}.
$$

したがって $I(f)_t + I(g)_t = I(f+g)_t$. □

次に國田・渡辺の不等式を示す.

定理 3.24. $M, N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とし, $T > 0$ とする. このとき, M, N に依存する確率 1 の集合 Ω'_T が存在して, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T]; M)$, $g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T]; N)$ について

$$
\Omega'_{T,f,g} = \Omega'_T \cap \left\{\omega \mid \int_0^T |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty, \int_0^T |g(s,\omega)|^2 d\langle N\rangle_s(\omega) < \infty\right\}
$$

とおくと任意の $\omega \in \Omega'_{T,f,g}$ について,

$$\begin{aligned}&\int_0^T |f(s,\omega)g(s,\omega)|d\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}}(s,\omega)\\ &\leq \left(\int_0^T |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega)\right)^{1/2}\left(\int_0^T |g(s,\omega)|^2 d\langle N\rangle_s(\omega)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

特に, $\omega \in \Omega'_{T,f,g}$ に対し, $\int_0^T |f(t)|d\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{BV}}(t) < \infty$, $\int_0^T |g(t)|d\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{BV}}(t) < \infty$ となる.

Proof. $A \in \mathcal{B}([0,T])$ に対して不等式

$$\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}(\omega)}(A) \leq \sqrt{\nu_{\langle M\rangle(\omega)}(A)}\sqrt{\nu_{\langle N\rangle(\omega)}(A)} \tag{3.14}$$

を考え

$$\tilde{\Omega} = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \text{任意の } A \in \mathcal{B}([0,T]) \text{ に対し (3.14) が成立する}\right\}$$

とおく. $P(\tilde{\Omega}) = 1$ を示す. $0 \leq s < t$, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_{s,t}(x) = \langle xM+N\rangle_t - \langle xM+N\rangle_s$$

とおくと $f_{s,t}(x) \geq 0$ P-a.s. ω.

$$f_{s,t}(x) = x^2\langle M\rangle_{s,t} + 2x\langle M,N\rangle_{s,t} + \langle N\rangle_{s,t} \geq 0 \quad P\text{-}a.s.\omega.$$

そこで

$$\Omega_0 = \left\{\omega \in \Omega \mid f_{s,t}(x) \geq 0, \forall s, \forall t \in \mathbb{Q}(s<t), \forall x \in \mathbb{Q}\right\}$$

とおくと $P(\Omega_0) = 1$. また, 2 次関数の性質から $\omega \in \Omega_0$ は

$$\langle M,N\rangle_{s,t}(\omega)^2 - \langle M\rangle_{s,t}(\omega)\langle N\rangle_{s,t}(\omega) \leq 0 \quad \forall s, \forall t \in \mathbb{Q}(s<t)$$

と同値である. すなわち

$$|\langle M,N\rangle_{s,t}(\omega)| \leq \sqrt{\langle M\rangle_{s,t}(\omega)}\sqrt{\langle N\rangle_{s,t}(\omega)} \qquad \forall s,t \in \mathbb{Q}(s<t)(*)$$

と同値. 2 次変分過程, 交差変分過程の時刻に関する連続性から $(*)$ はすべての $s<t$ で成立する. したがって, $\omega \in \Omega_0$ とならば

$$\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}(\omega)}([s,t]) \leq \sqrt{\nu_{\langle M\rangle(\omega)}([s,t])}\sqrt{\nu_{\langle N\rangle(\omega)}([s,t])}$$
$$\forall 0 \leq s < t \leq T.$$

これより, 任意の $\omega \in \Omega_0$ に対して $\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}}(\omega)$ は有限測度である. ここで $\mathcal{B}((0,T])$ を生成する有限加法族

$$\begin{aligned}\mathscr{A} := \Big\{ \cup_{0=1}^{n}(s_i,t_i] \,\Big|\, & 0 \le s_i < t_i < s_{i+1} < t_{i+1} \le T \\ & 0 \le i \le n-1, n \in \mathbb{N}, s_0 = 0 \text{ のときは}, [0,t_0] \text{ とする} \Big\} \cup \{\emptyset\}\end{aligned}$$

を考えると $A \in \mathscr{A}$ についても (3.14) が成立する. また, (3.14) が成立する $A \in \mathcal{B}([0,T])$ 全体は単調族をなすので (集合に対する) 単調族定理により, $\omega \in \Omega_0$ のときすべての $A \in \mathcal{B}([0,T])$ について (3.14) が成立する. (実際は, $\Omega_0 = \tilde{\Omega}$ である). $\Omega' = \Omega_0$ として主張を示す.

任意の Borel 可測関数 $f(s), g(s)$ について (3.13) を示せばよい. そのためには, f, g が有界ボレル可測の場合を考えればよい. f, g は単関数 f_n, g_n の各点収束極限で書けるので単関数の場合を考えればよい. すなわち,

$$f_n(s) = \sum_{i=1}^{p_n} a_i^n 1_{E_i^n}(s)$$
$$g_n(s) = \sum_{i=1}^{p_n} b_i^n 1_{E_i^n}(s)$$

とする.

$$\begin{aligned}&\int_0^T |f_n(s)g_n(s)| d\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}}(s,\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} |a_i^n b_i^n| \nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}}(E_i^n) \\ &\le \sum_{i=1}^{p_n} |a_i^n b_i^n| \sqrt{\nu_{\langle M\rangle}(E_i^n)}\sqrt{\nu_{\langle N\rangle}(E_i^n)} \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{p_n} |a_i^n|^2 \nu_{\langle M\rangle}\left(E_i^n\right) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{p_n} |b_i^n|^2 \nu_{\langle N\rangle}\left(E_i^n\right) \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^T |f_n(s)|^2 d\nu_{\langle M\rangle}(s,\omega) \right\} \left\{ \int_0^T |g_n(s)|^2 d\nu_{\langle N\rangle}(s,\omega) \right\}.\end{aligned}$$

この式で $n \to \infty$ として有界収束定理を用いればよい. $\square$

系 3.25. (1) $M, N \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$, $g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];N)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T |f(s,\omega)g(s,\omega)| d\nu_{\|\langle M,N\rangle\|_{\mathrm{BV}}}\right] \\
&\le \left(E\left[\int_0^T |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega)\right]\right)^{1/2} \left(E\left[\int_0^T |g(s,\omega)|^2 d\langle N\rangle_s(\omega)\right]\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

(2) $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, $f \in \mathcal{L}_2([0,T];M)$, $g \in \mathcal{L}_2([0,T];N)$ とする．$I^M(f)_t I^N(g)_t - \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s \in \mathcal{M}^c$ すなわち,

$$
\langle I^M(f), I^N(g)\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s.
$$

(3) (2) は $\mathcal{M}^{c,loc}$, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$, $g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];N)$ の場合, 局所マルチンゲールとして成立する．

(4) 補題 3.16 が $\mathcal{M}^{c,loc}$, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$ の場合にも成立する．

Proof. (1) これは Kunita-Watanabe の不等式と Schwarz の不等式から直ちにわかる．
(2) $f, g \in \mathcal{L}_0$ のときはすでに示した．すなわち, $s < t$, $f, g \in \mathcal{L}_0$ のとき

$$
\begin{aligned}
&E\left[I^M(f)_t I^N(g)_t - \int_0^t f(u,\omega)g(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right] \\
&= I^M(f)_s I^N(g)_s - \int_0^s f(u,\omega)g(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

f, g が一般の場合を考える．$f_n, g_n \in \mathcal{L}_0$ で $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_2([0,T];M)} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\|_{\mathcal{L}_2([0,T];N)} = 0$ とする．まず,

$$
\lim_{n\to\infty} I^M(f_n)_t I^N(g_n)_t = I^M(f)_t I^N(g)_t \quad \text{in } L^1.
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t f(u,\omega)g(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u - \int_0^t f_n(u,\omega)g_n(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u \\
&= \int_0^t \left(f(u,\omega) - f_n(u,\omega)\right) g(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u \\
&\quad + \int_0^T f_n(u,\omega)\left(g(u,\omega) - g_n(u,\omega)\right) d\langle M,N\rangle_u \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

(1) の結果より

$$
\begin{aligned}
E[|I_1|] &\le \|f-f_n\|_{\mathcal{L}_2([0,t];M)}\|g\|_{\mathcal{L}_2([0,t];N)} \to 0 \text{ as } n\to\infty \\
E[|I_2|] &\le \|f_n\|_{\mathcal{L}_2([0,t];M)}\|g-g_n\|_{\mathcal{L}_2([0,t];N)} \text{ as } n\to\infty
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(u,\omega)g_n(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u = \int_0^t f(u,\omega)g(u,\omega)d\langle M,N\rangle_u \text{ in } L^1.
$$

よって (3.15) で極限を取り, (3.15) が $f\in\mathcal{L}_2([0,T];M)$, $g\in\mathcal{L}_2([0,T];N)$ でも成立することがわかる.

(3) 命題 3.23 (2) と同様に定義した停止時間 τ_n を考える. $M^{\tau_n},N^{\tau_n}\in\mathcal{M}_2^c$, $f\in\mathcal{L}_2(M^{\tau_n}), g\in\mathcal{L}_2(N^{\tau_n})$ であり $I^M(f)_{t\wedge\tau_n}=I^{M^{\tau_n}}(f)_t$, $I^N(g)_{t\wedge\tau_n}=I^{N^{\tau_n}}(g)_t$. である. また (2) で証明した結果と補題 2.30(1) より

$$
\begin{aligned}
\langle I^{M^{\tau_n}}(f), I^{N^{\tau_n}}(g)\rangle_t &= \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M^{\tau_n},N^{\tau_n}\rangle_t \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_n} f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s(\omega).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\left(\left(I^M(f)I^N(g)\right)_{t\wedge\tau_n} - \int_0^{t\wedge\tau_n} f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s(\omega)\right)_{t\ge 0}\in\mathcal{M}^c.
$$

交差変分の一意性から

$$
\langle I^M(f), I^N(g)\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s.
$$

(4) τ を定義 3.20 の $(\star)$ を満たす停止時間とする. 考えている確率積分を左から $I_{1,t}$, $I_{2,t}$, $I_{3,t}$ とする. $I_{1,t\wedge\tau}=I^{M^\tau}_{t\wedge\sigma}$ である. $f1_{[0,\sigma]}\in\mathcal{L}_2(M^\tau)$ であり

$$
I_{2,t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} f(s)1_{[0,\sigma]}(s)dM_s = \int_0^t f(s)1_{[0,\sigma]}(s)dM_s^\tau = \int_0^{t\wedge\sigma} f(s)dM_s^\tau = I^{M^\tau}_{t\wedge\sigma}.
$$

また $f\in\mathcal{L}_2(M^{\sigma\wedge\tau})$, $f\in\mathcal{L}_2(M^\tau)$ より

$$
I_{3,t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} f(s)dM_s^\sigma = \int_0^t f(s)dM_s^{\sigma\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\sigma} f(s)dM_s^\tau = I^{M^\tau}_{t\wedge\sigma}.
$$

したがって, $I_{1,t\wedge\tau}=I_{2,t\wedge\tau}=I_{3,t\wedge\tau}$. これより, すべて等しいことがわかる.

$\square$

注意 3.26. Kunita-Watanabe の不等式は, 2 乗可積分マルチンゲールに対して示すことができる. それを示しておけば, 補題 3.16 は以下のように示せる. 補題 3.16 の考えている確率積分を左側から $I_{1,t}, I_{2,t}, I_{3,t}$ と書く. $N \in \mathcal{M}_2^c$ について

$$\langle I_1, N\rangle_t = \int_0^{t\wedge\sigma} f(s)d\langle M, N\rangle_s,\ \langle I_2, N\rangle_t = \int_0^t f(s)I_{[0,\sigma]}(s)d\langle M, N\rangle_s,$$
$$\langle I_3, N\rangle_t = \int_0^t f(s)d\langle M^\sigma, N\rangle_s.$$

$\langle M^\sigma, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge\sigma}$ ゆえ 上記の相互変分過程はすべて等しいとわかる. したがって, 補題 2.30 (4) より $I_1 = I_2 = I_3$ とわかる. この方が, 補題 3.16 を示すには簡単であるが, 前に与えた証明の方が初等的と言える.

定理 3.27. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $f \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$ とする. $N_t = I^M(f)_t$ とおく. $g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];N)$ となることと $fg \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];M)$ となることは同値である. またこのとき,

$$P\left(I^M(f\cdot g)_t = I^N(g)_t \quad 0 \le t \le T\right) = 1.$$

Proof.

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega)$$

なので, $g \in \mathcal{L}_{2,loc}([0,T];N)$ は

$$P\left(\int_0^T |g(s,\omega)|^2 d\langle N\rangle_s(\omega) < \infty\right) = 1$$

と同値. $d\langle N\rangle_s$ は $d\langle M\rangle_s$ に絶対連続なので

$$P\left(\int_0^T |g(s,\omega)|^2 |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty\right) = 1$$

と同値になる. これで前半部分が示された. 後半を示す. $K \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする. 系 3.25 (3) より

$$\langle N, K\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M, K\rangle_s(\omega).$$

したがって

$$\begin{aligned}\langle I^N(g), K\rangle_t &= \int_0^t g(s,\omega)d\langle N, K\rangle_s(\omega)\\ &= \int_0^t g(s,\omega)f(s,\omega)d\langle M, K\rangle_s(\omega).\end{aligned}$$

一方,

$$\langle I^M(fg), K\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)d\langle M,K\rangle_s(\omega).$$

したがって, 補題 2.30(4) より後半も示された. □

補題 3.28. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする. $f_n, f \in \mathcal{L}_{2,loc}(M)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする. 次の (1), (2) は同値である.

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^T |f_n(s,\omega) - f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s(\omega) = 0 \quad \text{in prob. } \forall T > 0.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le T} \left| \int_0^t (f_n(s,\omega) - f(s,\omega))\, dM_s(\omega) \right| = 0 \quad \text{in prob. } \forall T > 0.$$

Proof.

$$N_n(t) = \int_0^t (f_n(s,\omega) - f(s,\omega))\, dM_s(\omega)$$

とおくと

$$\langle N_n\rangle_t = \int_0^t |f_n(s,\omega) - f(s,\omega)|^2\, d\langle M\rangle_s(\omega).$$

したがって, 補題 2.31 から従う. □

系 3.29. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ とする. $(f_t)_{t\ge 0}$ を $\mathcal{F}_t$ 適合連続確率過程とする. $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_k^n < \cdots\}$ を $[0,\infty)$ の分割で $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ とする. このとき, 任意の $T > 0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le T} \left| \sum_{i=1}^{\infty} f(t_{i-1}^n, \omega) M_{t_{i-1}^n\wedge t, t_i^n\wedge t}(\omega) - \int_0^t f(s,\omega) dM_s(\omega) \right| = 0$$
$$\text{in prob.}$$

4 伊藤の公式

すでに述べたように $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ は通常の条件を満たすとする.

4.1 伊藤の公式

定義 4.1. 実数値確率過程 X_t が $\mathcal{F}_t$-セミマルチンゲール (semimartingale) とは $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数 X_0, $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $A \in \mathcal{A}$ が存在し

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

と書けるものをいう.

注意 4.2. (1) X_0, M_t, A_t は一意に決まる.
(2) $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ が $\mathcal{F}_t$ セミマルチンゲールであるとは, 各 X_t^i が $\mathcal{F}_t$ セミマルチンゲールであることを言う.
(3) $B_t = (B_t^i)_{i=1}^d$ を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. さらに

$$f(t,\omega) = \left(f_j^i(t,\omega)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le d}$$

を (n,d) 行列値 $\mathcal{F}_t$ 発展的確率過程とし, $f_j^i \in \mathcal{L}_{2,loc}(B)$ とする. また

$$g(t,\omega) = (g^i(t,\omega))_{1\le i\le n}$$

を $\mathbb{R}^n$ 値 $\mathcal{F}_t$ 発展的確率過程とし,

$$P\left(\int_0^T |g^i(s,\omega)|ds < \infty \quad \forall T > 0\right) = 1 \quad 1 \le i \le n$$

とする. このような $g(t,\omega)$ 全体を $\mathcal{L}_{1,loc}(B)$ (正確には $\mathbb{R}^n$ 値なので, $\mathbb{R}^n$ もどこかに書いた方がよいが). これらを用いて

$$M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j^i(s,\omega)dB_s^j(\omega), \quad A_t^i = \int_0^t g^i(s,\omega)ds$$

と書ける d 次元セミマルチンゲールを Itô 過程ということがある.

定理 4.3 (Itô の公式)**.** $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ とする. $X_t = X_0 + M_t + A_t$ を d 次元セミマルチンゲールとする. このとき

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s)dM_s^k + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s)dA_s^k + \frac{1}{2}\sum_{1\le k,l\le d}\int_0^t (\partial_k\partial_l f)(X_s)d\langle M^k, M^l\rangle_s. \tag{4.1}$$

注意 4.4. (1) Itô の公式より X_t が $\mathcal{F}_t$ セミマルチンゲール, $f \in C^2$ なら $f(X_t)$ もセミマルチンゲールである．このことから, C^∞ 多様体に値を取るセミマルチンゲールという概念が定義できる．
(2) $f \in C^3$ の場合に証明すればよい．$f \in C^2$ の場合は, $f_n \in C^3$ で

$$f_n \to f, \quad \partial_k f_n \to \partial_k f, \quad \partial_k \partial_k f_n \to \partial_k \partial_l f \quad 1 \le k, l \le d \quad \text{広義一様 on } \mathbb{R}^d$$

となるものがある．f_n についての Itô の公式で $n \to \infty$ とし, 補題 3.28 を適用すればよい．

補題 4.5. X_t を $\mathbb{R}^d$ 値セミマルチンゲールとする．$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{|\Delta| \to 0} P\left(\sum_{i=1}^N |X_{t_{i-1},t_i}|^3 \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Proof.

$$\max_i |X_{t_{i-1},t_i}| \to 0 \quad \text{in prob.}$$
$$\sum_i |M_{t_{i-1},t_i}|^2 + \sum_i |A_{t_{i-1},t_i}|^2 \to \langle M \rangle_t \quad \text{in prob.}$$

より

$$\sum_i |X_{t_{i-1},t_i}|^3 \le 2 \max_i |X_{t_{i-1},t_i}| \left\{\sum_i |M_{t_{i-1},t_i}|^2 + \sum_i |A_{t_{i-1},t_i}|^2\right\}$$
$$\to 0 \qquad \text{in prob.}$$

□

Proof. 1. $|X_0|$ が有界のときに示されたとしよう．

$$X_t^R = X_0 1_{[0,R]}(|X_0|) + M_t + A_t$$

について Itô の公式が成立することになる．X^R に対して Itô の公式を適用し $R \uparrow \infty$ とし補題 3.28 を適用すれば一般の場合が示される．したがって, $|X_0|$ は有界とする．
2. $X_t, M_t, \langle M \rangle_t, \|A\|_{\mathrm{BV}}$ が有界の場合に示せばよい．この場合に示されたとしよう．$R > 0$ を取る．

$$\sigma_R(\omega) = \inf\left\{t \ge 0 \;\middle|\; |M_t(\omega)| + \sum_i \langle M^i \rangle_t(\omega) + \sum_i \|A^i\|_{\mathrm{BV},t} \ge R\right\}$$

とおく. X^{σ_R} はセミマルチンゲールであり

$$X_t^{\sigma_R} = X_0 + M_t^{\sigma_R} + A_t^{\sigma_R}.$$

$$|M_t^{\sigma_R}| + \sum_i \langle (M^{\sigma_R})^i \rangle_t + \sum_i \|(A^{\sigma_R})^i\|_{\mathrm{BV},t} \le R$$

ゆえ, 有界の場合が示されれば $X^{\sigma_R} = X^R$, $M^{\sigma_R} = M^R$ などと簡単に書くと

$$\begin{aligned} f(X_t^R) &= f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s^R) d(M^R)_s^k + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s^R) d(A^R)_s^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le d} \int_0^t (\partial_k \partial_l f)(X_s^R) d\langle (M^R)^k, (M^R)^l \rangle_s \qquad (4.2) \\ &= f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^{t \wedge \sigma_R} (\partial_k f)(X_s^R) dM_s^k + \sum_{k=1}^d \int_0^{t\wedge\sigma_R} (\partial_k f)(X_s^R) dA_s^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le d} \int_0^{t\wedge\sigma_R} (\partial_k \partial_l f)(X_s^R) d\langle M^k, M^l \rangle_s. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

この式で $R \uparrow \infty$ とすればよい.

3. $\sup_{t,\omega} |X_0| + |X_t| + |M_t| + |\langle M \rangle_t| + \|A\|_{\mathrm{BV},t} \le R < \infty$ の場合に示す.

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$$

とする.

$$\begin{aligned} &f(X_t) - f(X_0) \\ &= \sum_{i=1}^N \big(f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}}) \big) \\ &= \sum_{i=1}^N \Bigg\{ \sum_{k=1}^d (\partial_k f)(X_{t_{i-1}}) M^k_{t_{i-1},t_i} + \sum_{k=1}^d (\partial_k f)(X_{t_{i-1}}) A^k_{t_{i-1},t_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le d} (\partial_k \partial_l f)(X_{t_{i-1}}) M^k_{t_{i-1},t_i} M^l_{t_{i-1},t_i} \\ &\quad + \sum_{1\le k,l\le d} (\partial_k \partial_l f)(X_{t_{i-1}}) M^k_{t_{i-1},t_i} A^l_{t_{i-1},t_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le d} (\partial_k \partial_l f)(X_{t_{i-1}}) A^k_{t_{i-1},t_i} A^l_{t_{i-1},t_i} \Bigg\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{3!}\sum_{1\le m,l,k\le d}(\partial_m\partial_k\partial_l f)(X_{t_{i-1}}+\theta X_{t_{i-1},t_i})X^m_{t_{i-1},t_i}X^k_{t_{i-1},t_i}X^l_{t_{i-1},t_i}\right\}\\
&\quad =: I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6.
\end{aligned}
$$

$|\Delta_n|\to 0$ という分割列を一つ取る．$4\le i\le 6$ については 2 次変分の性質などと補題 4.5 より

$$\lim_{n\to\infty} I_i = 0 \qquad \text{in prob.}$$

また, 系 3.29 より

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t (\partial_k f)(X_s)dM_s^k \quad \text{in prob.}$$

I_2 に関しては, すべての ω について

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t (\partial_k f)(X_s)dA_s^k.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty} I_3 = \frac{1}{2}\sum_{1\le k,l\le d}\int_0^t (\partial_k\partial_l f)(X_s)d\langle M^k,M^l\rangle_s \qquad \text{in prob.}$$

を示せば証明が終わる．この右辺を J_3 と書くとすべての ω について

$$J_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_i\sum_{1\le k,l\le d}(\partial_k\partial_l f)(X_{t_{i-1}})\langle M^k,M^l\rangle_{t_{i-1},t_i}.$$

したがって, すべての k,l について

$$\lim_{n\to\infty}\sum_i(\partial_k\partial_l f)(X_{t_{i-1}})\left\{M^k_{t_{i-1},t_i}M^l_{t_{i-1},t_i}-\langle M^k,M^l\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}=0 \quad \text{in prob.}$$

を言えばよい．

$$
\begin{aligned}
&M^k_{t_{i-1},t_i}M^l_{t_{i-1},t_i}-\langle M^k,M^l\rangle_{t_{i-1},t_i}\\
&=\frac{1}{4}\left[\left\{(M^k+M^l)^2_{t_{i-1},t_i}-\langle M^k+M^l\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}\right]\\
&\quad-\frac{1}{4}\left[\left\{(M^k-M^l)^2_{t_{i-1},t_i}-\langle M^k-M^l\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Kunita-Watanabe の不等式より

$$\begin{aligned}\langle M^k \pm M^l\rangle_t &= \langle M^k\rangle_t + \langle M^l\rangle_t \pm 2\langle M^k, M^l\rangle_t \\ &\le 2\left(\langle M^k\rangle_t + \langle M^l\rangle_t\right) \\ &\le 4R.\end{aligned}$$

したがって, g が有界, 1 次元マルチンゲールについて $M, \langle M\rangle$ が有界 $(\max(\sup_t |M_t|, \sup_t \langle M\rangle_t) \le R)$ のとき,

$$K_n = \sum_i g(X_{t_{i-1}}) \left\{M^2_{t_{i-1},t_i} - \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}$$

とおいたとき, $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ in prob. を示せばよい.

$$\begin{aligned}&E\left[K_n^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N g(X_{t_{i-1}})^2 \left\{M^2_{t_{i-1},t_i} - \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}^2\right] \\ &\quad + 2\sum_{1\le i<j\le N} E\Big[g(X_{t_{i-1}})g(X_{t_{j-1}}) \left\{M^2_{t_{i-1},t_i} - \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\} \\ &\qquad\qquad \times \left\{M^2_{t_{j-1},t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1},t_j}\right\}\Big] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N g(X_{t_{i-1}})^2 \left\{M^2_{t_{i-1},t_i} - \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right\}^2\right].\end{aligned}$$

ゆえに

$$E\left[K_n^2\right] \le C\left\{E\left[\sum_{i=1}^N M^4_{t_{i-1},t_i}\right] + E\left[\sum_{i=1}^N \langle M\rangle^2_{t_{i-1},t_i}\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{i=1}^N M^4_{t_{i-1},t_i}\right] &\le E\left[\max_i M^2_{t_{i-1},t_i} \sum_{i=1}^N M^2_{t_{i-1},t_i}\right] \\ &\le E\left[\max_i M^4_{t_{i-1},t_i}\right]^{1/2} E\left[Q_t(\Delta_n)^2\right]^{1/2} \\ &\le \left(6R^4\right)^{1/2} E\left[\max_i M^4_{t_{i-1},t_i}\right]^{1/2} \to 0 \text{ as } n\to\infty.\end{aligned}$$

$E[Q_t(\Delta_n)^2]$ の評価は, 補題 2.23(1) の結果である.

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{i=1}^N \langle M\rangle^2_{t_{i-1},t_i}\right] &\le E\left[\langle M\rangle_t \max_i \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right] \\ &\le E\left[\langle M\rangle_t^2\right]^{1/2} E\left[\max_i \langle M\rangle^2_{t_{i-1},t_i}\right]^{1/2} \to 0 \text{ as } n\to\infty.\end{aligned}$$

これで示された. $\square$

4.2 Stratonovich 積分

定義 4.6. X_t, Y_t を $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上の 1 次元セミマルチンゲールとする.

$$X_t = X_0 + M_t^X + A_t^X$$
$$Y_t = Y_0 + M_t^Y + A_t^Y$$

のとき,

$$\int_0^t X_s dY_s := \int_0^t X_s dM_s^Y + \int_0^t X_s dA_s^Y$$
$$\int_0^t X_s \circ dY_s := \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\langle M^X, M^Y \rangle_t$$

と定義する. また,

$$\langle X, Y \rangle_t := \langle M^X, M^Y \rangle_t$$

と定める. $\int_0^t X_s \circ dY_s$ を Stratonovich 積分という.

命題 4.7. X, Y を 1 次元セミマルチンゲールとする.

$$\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{N_n}^n = t\}$$

とし, $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ とする. このとき, 次が成立する. 収束は確率収束である.

(1) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} X_{t_{i-1}^n} Y_{t_{i-1}^n, t_i^n} = \int_0^t X_s dY_s,$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{X_{t_i^n} + X_{t_{i-1}^n}}{2} Y_{t_{i-1}^n, t_i^n} = \int_0^t X_s \circ dY_s,$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} X_{t_{i-1}^n, t_i^n} Y_{t_{i-1}^n, t_i^n} = \langle X, Y \rangle_t.$$

Proof. (1) これは系 3.29 から従う.

(2), (3) を示す. $M, N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} M_{t_{i-1}^n, t_i^n} N_{t_{i-1}^n, t_i^n} = \langle M, N \rangle_t \quad \text{in probab.}$$

を示せばよい. これは既に定理 2.28 で示した.

□

定義 4.6 の書き方を用いると Itô の公式は次のように書ける.

定理 4.8. $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ を d 次元セミマルチンゲールとする.

(1) $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ とすると

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\partial_i f)(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \int_0^t (\partial_j \partial_i f)(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

(2) $f \in C^3(\mathbb{R}^d)$ とする.

(i) $\langle (\partial_i f)(X), X^l \rangle_s = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t (\partial_j \partial_i f)(X_s) d\langle X^j, X^l \rangle_s$

(ii) $f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\partial_i f)(X_s) \circ dX_s^i.$

Proof. (1) は定義に従い書き直しただけである.
(2) (i) は $(\partial_i f) \in C^2$ より伊藤の公式より

$$(\partial_i f)(X_t) = (\partial_i f)(X_0) + \sum_j \int_0^t (\partial_j \partial_i f)(X_s) dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,l} \int_0^t (\partial_l \partial_j \partial_i f)(X_s) d\langle X^j, X^l \rangle_s.$$

したがって求める式が得られる.

(ii) を示す. (1) の式の第 3 項を (i) を用いて書き直すと

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \int_0^t (\partial_j \partial_i f)(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \langle (\partial_i f)(X), X^i \rangle_t.$$

したがって Stratonovich 積分に変えれば求める式を得る. □

5　確率微分方程式

以下, 通常の条件を満たす filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ を考える. 次のような行列値およびベクトル値可測写像を考える.

$$\sigma = \sigma(t,x) = \left(\sigma^i_j(t,x)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le d}, \quad b = b(t,x) = \left(b^i(t,x)\right)_{1\le i\le n}.$$

すなわち,

$$\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to M^{n\times d}$$
$$b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

はボレル可測写像とする. 確率微分方程式 (Stochastic differential equation=SDE)

$$(\mathrm{SDE})_{\sigma,b} \qquad dX_t = \sigma(t,X_t)dB_t + b(t,X_t)dt$$

を考える. これはシンボリックに書かれた方程式でブラウン運動 B_t があらかじめ与えられていると思っているわけではないことに注意しよう.

定義 5.1.　(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ 上の 0 から出発する d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 $B_t(\omega)$, $\mathcal{F}_t$-適合 n 次元連続過程 $X_t(\omega)$ のペア (X,B) が $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解であるとは,

$$\{\sigma(t,X_t)\} \in \mathcal{L}_{2,loc}(B), \quad \{b(t,X_t)\} \in \mathcal{L}_{1,loc}(B)$$

かつ

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(s,X_s(\omega))dB_s(\omega) + \int_0^t b(s,X_s(\omega))ds \quad t \ge 0. \tag{5.1}$$

を満たす時にいう. また, $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数 ξ に対して, $P(X_0 = \xi) = 1$ となるとき, ξ を初期値とする解という.

(2) $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ とする. $X_0 \stackrel{d}{=} \nu$ となる解を初期分布を ν とする解という. 初期分布を ν とする解 (X,B), (X',B') (これらは同じ確率空間上で定義されている必要は無い) について常に $X \stackrel{d}{=} X'$ すなわち, X, X' の $C([0,\infty),\mathbb{R}^n)$ 上の分布が一致するとき, ν を初期分布とする解は法則の意味で一意という. 任意の ν に対して法則の意味で一意の時, 解は法則の意味で一意という.

(3) (X,B), (X',B) を同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ で定義された $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解で $P(X_0 = X'_0)$=1 を満たすならば

$$P(X_t = X'_t) = 1 \quad \forall t \ge 0$$

となるとき, 解は道ごとに一意 (pathwise uniqueness) と言う.

(4) $\nu = \delta_x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ のとき, (X, B) は (もしくは単に X_t は) x から出発する解という.

注意 5.2. (1) 初期値 ξ は $\mathcal{F}_0$-可測なので, $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動 $\{B_t\}_{t\ge 0}$ とは独立である.
(2) 確率微分方程式 $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ と言った時は, 確率空間を特に指定しているわけでは無く, filtered probaility space $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ ブラウン運動 B_t, X_t で (5.1) を満たすものであれば何でもよいわけである. ここでは, このような物を解と呼んだが「弱い解」と言うこともある. 「強い解」という物もあるが, それは後で解説する.

5.1 存在と一意性

定理 5.3. $\sigma(t,x)$, $b(t,x)$ が次の条件を満たすとする.

(i) (線形増大条件) $C > 0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)| \le C(1+|x|), \quad |b(t,x)| \le C(1+|x|) \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

(ii) (リプシッツ条件) $K > 0$ が存在して, すべての $(t,x), (t,y) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対し

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K|x-y|, \quad |b(t,x) - b(t,y)| \le K|x-y|.$$

このとき $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ について以下が成立する.

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ を filtered probability space で通常の条件を満たすとする. $p \ge 2$ とし, $\xi \in L^p$ を $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数, B_t を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. このとき, $\mathcal{F}_t$ 適合連続確率過程 X_t で, $P(X_0 = \xi) = 1$ を満たし, (X, B) が解になるものが存在する.

(2) $p \ge 2$ とする. X_t を $E[|X_0|^p] < \infty$ を満たす解とする. $T > 0$ とする. このとき, $C, p, T, E[|X_0|^p]$ にのみ依存する定数 $C(T)$ で

$$E\left[\max_{0\le t\le T} |X_t|^p\right] \le C(T).$$

補題 5.4. $B_t = (B_t^i)_{1\le i\le d}$ を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動, $f(t,\omega) = \left(f_j^i(t,\omega)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le d} \in \mathcal{L}_{2,loc}(B)$ とする. $p \ge 2$ とし,

$$E\left[\left(\int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds\right)^{p/2}\right] < \infty \qquad t > 0,$$

と仮定する. n 次元確率過程 $Z_t = (Z_t^i)$ を

$$Z_t^i = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f_j^i(s,\omega) dB_s^j(\omega)$$

と定めると

$$E\left[\max_{0\le s\le t} |Z_s|^p\right] \le C_p E\left[\left(\int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds\right)^{p/2}\right]. \qquad (*)$$

が成立する. ここで,

$$C_p = \left(\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

補題 5.5. a, b を非負の定数, $f(t)$ を $[0,T]$ 上の非負値有界ボレル可測関数とする.

$$f(t) \le a + b\int_0^t f(s)ds \qquad 0 \le t \le T.$$

が成立するならば

$$f(t) \le ae^{bt} \qquad 0 \le t \le T.$$

定理 5.3 の証明. すでに導入したバナッハ空間, E_T, E を考える. ($p = 2$ で考える.)
(1) $X_t^0 \equiv \xi(\omega)$ とおく. $(X_t^k)_{t\ge 0} \in E$ が決まったとして

$$X_t^{k+1} = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^k) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^k) ds$$

と定めると $X^{k+1} \in E$ であり, $\{X^k\}$ は E のコーシー列であることを示す. $Y \in E$ とする. このとき, $f = \sigma, b$ に対して, $Z_t = f(t, Y_t(\omega))$ は

$$|Z_t(\omega)| \le C(1 + |Y_t(\omega)|)$$

を満たし, $\mathcal{F}_t$ 適合発展的可測なので $Z \in \mathcal{L}_{2,loc}(B)$ であり確率積分が定義できることに注意する. $b(t, Y_t) \in \mathcal{L}_{1,loc}(B)$ も同様に成立する.
(i) $X^k \in E$ $(k \ge 0)$ を示す. $k = 0$ のとき, $X^0 = \xi$ で $E[|\xi|^2] \le E[|\xi|^p]^{2/p} < \infty$ より $X^0 \in E$. $X^k \in E$ と仮定し, $X^{k+1} \in E$ を示す (実は, $k = 0$ の場合を示せば十分). 以下, 連続確率過程 $(Z_s)_{s\ge 0}$ に対し $|Z|_t = \max_{0\le s\le t} |Z_s|$ という notation を用いる. 仮定と補

題より

$$E\left[\left|\int_0^{\cdot} \sigma(s, X_s^k) dB_s\right|_T^2\right] \le 4E\left[\int_0^T |\sigma(s, X_s^k)|^2 ds\right]$$
$$\le 8C^2 E\left[\int_0^T (1 + |X^k|_s^2) ds\right]$$
$$\le 8C^2 T(1 + E[|X^k|_T^2]) < \infty.$$

ドリフト部分も同様に

$$E\left[\left|\int_0^{\cdot} b(s, X_s^k) ds\right|_T^2\right] \le E\left[\left(\int_0^T |b(s, X_s^k)| ds\right)^2\right]$$
$$\le TE\left[\int_0^T |b(s, X_s^k)|^2 ds\right]$$
$$\le 2C^2 TE\left[\int_0^T (1 + |X^k|_s^2) ds\right]$$
$$\le 2C^2 T^2 (1 + E[|X^k|_T^2]) < \infty,$$

ここで $\mathbb{R}^n$ 値可積分ボレル可測写像 $f(t)$ $(t \in [a, b])$ について

$$\left|\int_a^b f(t) dt\right| \le \int_a^b |f(t)| dt$$

を用いた.

X^{k+1} は $\mathcal{F}_t$ 適合連続確率過程なので $X^{k+1} \in E$.

(ii) $\{X^k\}$ の収束を示す.

$\|X^{k+1} - X^k\|_T$ を評価する.

$$\begin{aligned}
&X_t^{k+1} - X_t^k \\
&= \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s^{k-1})\right) dB_s + \int_0^t \left(b(s, X_s^k) - b(s, X_s^{k-1})\right) ds \\
&:= I_t + J_t
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\|X^{k+1} - X^k\|_T^2 &= E\left[|X^{k+1} - X^k|_T^2\right] \\
&\le E\left[(|I|_T + |J|_T)^2\right] \\
&\le 2\left(E[|I|_T^2] + E[|J|_T^2]\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[|I|_T^2\right] &\le 4E\left[\int_0^T |\sigma(s,X_s^k)-\sigma(s,X_s^{k-1})|^2 ds\right]\\
&\le 4K^2E\left[\int_0^T |X_s^k-X_s^{k-1}|^2 ds\right]\\
&\le 4K^2E\left[\int_0^T |X^k-X^{k-1}|_s^2 ds\right]\\
&= 4K^2\int_0^T \|X^k-X^{k-1}\|_s^2 ds.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[|J|_T^2] &\le E\left[\left(\int_0^T |b(s,X_s^k)-b(s,X_s^{k-1})|ds\right)^2\right]\\
&\le TE\left[\int_0^T |b(s,X_s^k)-b(s,X_s^{k-1})|^2 ds\right]\\
&\le TK^2E\left[\int_0^T |X^k-X^{k-1}|_s^2 ds\right]\\
&= TK^2\int_0^T \|X^k-X^{k-1}\|_s^2 ds.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\|X^{k+1}-X^k\|_T^2 &\le 2(T+4)K^2\int_0^T \|X^k-X^{k-1}\|_s^2 ds\\
&\le \left\{2(T+4)K^2\right\}^k\int_0^T\int_0^{t_{k-1}}\cdots\int_0^{t_1}\|X^1-\xi\|_s^2 ds\\
&\le \frac{\left\{2(T+4)K^2T\right\}^k}{k!}\|X^1-\xi\|_T^2.
\end{aligned}
$$

これは $\{X^k\}_{k=1}^\infty \subset E$ はコーシー列であることを示している．$X := \lim_{k\to\infty} X^k$ in E とおく．実際は

$$
P\left(X^k \to X \text{ 広義一様 on } [0,\infty)\right)=1
$$

である．理由は以下の通り．上記の評価より

$$
E\left[\sum_{k=0}^\infty \max_{0\le t\le N}|X_t^{k+1}-X_t^k|\right] \le \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\left\{2(N+4)K^2N\right\}^k}{k!}\right)^{1/2}\|X^1-\xi\|_N<\infty,
$$

より, $\Omega_N = \{\sum_{k=0}^{\infty} \max_{0\le t\le N} |X_t^{k+1} - X_t^k| < \infty\}$ とおくと $P(\Omega_N) = 1$ なので, $\omega \in \cap_{N=1}^{\infty}\Omega_N$ の元に対しては広義一様収束する.

$$X_t^{k+1} = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^k)dB_s + \int_0^t b(s, X_s^k)ds$$

において $k \to \infty$ とすれば

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

(2) $R > 0$ に対し, $\tau_R = \inf\{t > 0 \mid |X_t - X_0| \ge R\}$ とおく. τ_R は $\mathcal{F}_t$-停止時間であり, $\max_{0\le s\le t} |X_{\tau_R\wedge s}|(\le |X_0| + R) \in L^p$ である.

$$\begin{aligned}
|X_t|^p &\le 3^{p-1}\left(|X_0|^p + \left|\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\right|^p + \left|\int_0^t b(s, X_s)ds\right|^p\right) \\
&=: 3^{p-1}(|X_0|^p + I_t^1 + I_t^2)
\end{aligned}$$

とおく.

$$\begin{aligned}
E[\max_{0\le s\le t} I^1_{s\wedge\tau_R}] &\le C_pE\left[\left(\int_0^{\tau_R\wedge t} |\sigma(s, X_s)|^2ds\right)^{p/2}\right] \\
&\le C_pE\left[\left(\int_0^t |\sigma(s, X_{s\wedge\tau_R})|^2ds\right)^{p/2}\right] \\
&\le C_pt^{(p/2)-1}E\left[\int_0^t |\sigma(s, X_{s\wedge\tau_R})|^pds\right] \\
&\le C_pt^{(p/2)-1}E\left[\int_0^t 2^{p-1}C^p(1 + |X_{s\wedge\tau_R}|^p)ds\right] \\
&\le 2^{p-1}C^pt^{p/2}C_p + t^{(p/2)-1}2^{p-1}C^pC_p\int_0^t E\left[\max_{0\le u\le s} |X_{u\wedge\tau_R}|^p\right]ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\max_{0\le s\le t} I^2_{s\wedge\tau_R}\right] &\le E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_R} |b(s, X_s)|ds\right)^p\right] \\
&\le E\left[\left(\int_0^t |b(s, X_{s\wedge\tau_R})|ds\right)^p\right] \\
&\le t^{p-1}E\left[\int_0^t |b(s, X_{s\wedge\tau_R})|^pds\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le t^{p-1}E\left[\int_0^t 2^{p-1}C^p(1+|X_{s\wedge\tau_R}|^p)ds\right]\\
&\le (2t)^{p-1}tC^p+(2t)^{p-1}C^p\int_0^t E\left[\max_{0\le u\le s}|X_{u\wedge\tau_R}|^p\right]ds.
\end{aligned}
$$

$\phi_R(t) = E[\max_{0\le u\le t}|X_{u\wedge\tau_R}|^p]$ とおく. $T>0$ を固定する. 以上の計算により, C, C_p, T, p に依存する定数 C_1, C_2 が存在して,

$$
\phi_R(t)\le C_1+3^{p-1}\|X_0\|_{L^p}^p+C_2\int_0^t\phi_R(u)du,\quad 0\le t\le T.
$$

したがって, Gronwall の不等式より,

$$
\phi_R(t)\le (C_1+3^{p-1}\|X_0\|_{L^p}^p)e^{C_2t},\quad 0\le t\le T.
$$

$R\to\infty$ として, 目的の評価を得る.

□

注意 5.6. 線形増大条件を満たし, 解が存在すれば上記定理の (2) の評価が成立する.

補題 5.7. σ, b は定理 5.3 の線形増大条件を満たすとする. 解 X_t について次の評価が成立する. $T>0$ とする. 任意の $p\ge 2$, $0\le s\le t\le T$ について

$$
E\left[|X_t-X_s|^p\right]\le C(p,T,E[|X_0|^p])\left(|t-s|^{p/2}+|t-s|^p\right).
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
E\left[|X_t-X_s|^p\right]&\le 2^{p-1}\left(C_pE\left[\left(\int_s^t|\sigma(u,X_u)|^2du\right)^{p/2}\right]\right.\\
&\quad\left.+(t-s)^{p-1}E\left[\int_s^t|b(u,X_u)|^pdu\right]\right)\\
&\le 2^{p-1}\left(C_p(t-s)^{(p/2)-1}E\left[\int_s^t|\sigma(u,X_u)|^pdu\right]\right.\\
&\quad\left.+(t-s)^{p-1}E\left[\int_s^t|b(u,X_u)|^pdu\right]\right)\\
&\le 2^{p-1}C_p(t-s)^{(p/2)-1}C^p2^{p-1}\int_s^tE\left[(1+|X_u|^p)\right]du\\
&\quad+4^{p-1}C^p(t-s)^{p-1}\int_s^tE[1+|X_u|^p]du\\
&\le C(p,T,E[|X_0|^p])\left(|t-s|^{p/2}+|t-s|^p\right).
\end{aligned}
$$

□

定理 5.8. σ, b について, 定理 5.3 のリプシッツ条件を仮定する. $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解について道ごとの一意性が成立する.

Proof. $X_t, \tilde{X}_t$ を $P(X_0 = \tilde{X}_0) = 1$ を満たす $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解とする. $R > 0$ とする.

$$\tau_R = \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; |X_t(\omega) - X_0(\omega)| + |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_0(\omega)| \geq R \right\}$$

と停止時間を定める.

$$\begin{aligned} |X_{t\wedge\tau_R} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_R}| &= |X_{t\wedge\tau_R} - X_0 + \tilde{X}_0 - \tilde{X}_{t\wedge\tau_R}| \quad a.s. \\ &\leq 2R \quad a.s. \end{aligned}$$

に注意する. したがって

$$\begin{aligned} & E\left[|X_{t\wedge\tau_R} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_R}|^2 \right] \\ & \leq 2E\left[\left| \int_0^{t\wedge\tau_R} \sigma(s, X_s) dB_s - \int_0^{t\wedge\tau_R} \sigma(s, \tilde{X}_s) dB_s \right|^2 \right] \\ & \quad + 2E\left[\left| \int_0^{t\wedge\tau_R} b(s, X_s) ds - \int_0^{t\wedge\tau_R} b(s, \tilde{X}_s) ds \right|^2 \right] \\ & \leq 2E\left[\int_0^t |\sigma(s, X_{s\wedge\tau_R}) - \sigma(s, \tilde{X}_{s\wedge\tau_R}))|^2 ds \right] \\ & \quad + 2E\left[t \int_0^t |b(s, X_{s\wedge\tau_R}) - b(s, \tilde{X}_{s\wedge\tau_R})|^2 ds \right] \\ & \leq 2K^2 E\left[\int_0^t |X_{s\wedge\tau_R} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_R}|^2 ds \right] \\ & \quad + 2tK^2 E\left[\int_0^t |X_{s\wedge\tau_R} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_R}|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\phi_R(t) = E\left[|X_{t\wedge\tau_R} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_R}|^2 \right]$$

とおくと

$$\phi_R(t) \leq 2K^2(1+t) \int_0^t \phi_R(s) ds.$$

したがって Gronwall の不等式より $\phi_R(t) = 0$ $(\forall t \geq 0)$. $R \uparrow \infty$ として Fatou's lemma により任意の $t > 0$ に対して $E[|X_t - \tilde{X}_t|^2] = 0$. □

道ごとの一意性と法則の意味での一意性の関係は次の通り.

定理 5.9 (Yamada-Watanabe)**.** $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解について道ごとの一意性が成立すれば解は法則の意味で一意である.

Proof. $W^n = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^n; w_0 = 0)$, $W_0^d = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^d; w_0 = 0)$ とおく. $(X(\omega), B(\omega))$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の初期分布を ν とする解, $(\tilde{X}(\tilde{\omega}), \tilde{B}(\tilde{\omega}))$ が $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}, \tilde{P})$ 上の初期分布を ν とする解とする. $\mu_{X-X_0,X_0,B}$, $\tilde{\mu}_{\tilde{X}-\tilde{X}_0,\tilde{X}_0,\tilde{B}}$ をそれぞれ $(X - X_0, X_0, B)$, $(\tilde{X} - \tilde{X}_0, \tilde{X}_0, \tilde{B})$ の $W_0^n \times \mathbb{R}^n \times W_0^d$ 上の分布とする. $W_0^n \times \mathbb{R}^n \times W_0^d$ は標準可測空間なので正則条件付き確率 $\mu_{X-X_0,X_0,B}(d\eta \mid X_0 = x, B = w), \tilde{\mu}_{\tilde{X}-\tilde{X}_0,\tilde{X}_0,\tilde{B}}(d\tilde{\eta} \mid \tilde{X}_0 = x, \tilde{B} = w) \in \mathcal{P}(W_0^n)$ が定まる. ここで, $\eta = (\eta_t), \tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_t) \in W_0^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ である. $\hat{\Omega} = W_0^n \times W_0^n \times \mathbb{R}^n \times W_0^d$ 上 (σ-field は直積 σ 加法族) の確率 Q を

$$
\begin{aligned}
&Q\left(d\eta, d\tilde{\eta}, dx, dw\right) \\
&= \mu_{X-X_0,X_0,B}(d\eta \mid X_0 = x, B = w)\tilde{\mu}_{\tilde{X}-\tilde{X}_0,\tilde{X}_0,\tilde{B}}(d\tilde{\eta} \mid \tilde{X}_0 = x, \tilde{B} = w) \\
&\quad \nu(dx)\mu(dw)
\end{aligned}
$$

と定める. ここで, μ は W_0^d 上の Wiener 測度である. $\bar{Q}$ を Q の完備化とし, $\bar{Q}$ 測度 0 の集合全体を $\mathcal{N}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}_t &= \sigma\left(\sigma\left(\{\eta_s, \tilde{\eta}_s, x, w_s; s \le t\}\right) \cup \mathcal{N}\right) \\
\mathfrak{F}_t &= \cap_{t'>t}\mathfrak{G}_{t'} \\
\mathfrak{F} &= \sigma\left(\cup_{t\ge 0}\mathfrak{F}_t\right)
\end{aligned}
$$

とおくと $(\hat{\Omega}, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}, Q)$ は通常の条件を満たし, かつ $\{w_t\}$ は d 次元 $\mathfrak{F}_t$ ブラウン運動である. さらに, $(\eta_t + x, w_t)$, $(\tilde{\eta}_t + x, w_t)$ はこの確率空間上の $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の初期値が x の場合の解である. 道ごとの一意性より, $Q\left(\eta_t + x = \tilde{\eta}_t + x \quad t \ge 0\right) = 1$ となる. Q の下で, $\{\eta_t + x\}$, $\{\tilde{\eta}_t + x\}$ の分布はそれぞれ $\{X_t\}$, $\{\tilde{X}_t\}$ の分布であるので, これは法則の意味での解の一意性を表している. □

5.2 強い解

$(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ について (線形増大条件), (リプシッツ条件) の下で考える. この場合の解についてさらに論ずる. $\xi = x \in \mathbb{R}^n$ の場合を考える. さらに, $W_0^d := C([0,\infty), \mathbb{R}^d; w_0 = 0)$ とし, W_0^d 上の Wiener 測度 μ が与えられた確率空間 (Wiener space) $(W_0^d, \mathcal{B}(W_0^d), \mu)$

を考え canonical な実現 $B_t(w)=w_t$ のブラウン運動を考える．$\mathcal{N}$ を W_0^d 上の測度 0 の集合全体 (完備化した意味で) とする．$\mathcal{F}_t=\sigma\left(\sigma(B_s(w);s\le t)\cup\mathcal{N}\right)$ と定めると $\mathcal{F}_t$ は右連続な filtration で $(W_0^d,\overline{\mathcal{B}(W_0^d)}^{\mu},\mathcal{F}_t,\mu)$ は通常の条件を満たす確率空間になることが示せる．

また, μ 測度 0 のボレル集合全体を $\mathcal{N}_B$ とし $\mathcal{G}_t=\sigma(\sigma(B_s(w);s\le t)\cup\mathcal{N}_B)$ とおく．$\mathcal{G}_t\subsetneq\mathcal{F}_t$ である．

ここで, 前セクションで得られた初期値を x とする確率微分方程式の解を $X(t,x,w)$ と書くことにする．この解は 2 つのパラメータ (t,x) を持つが, $X(t,x,w)$ の修正で以下の性質を持つものが存在することがわかる．

定理 5.10. 定理 5.3 の設定で考える．以下の性質を満たす $X(t,x,w)$ が存在する．

(1) $(X(t,x,w),B_t(w))$ は (W_0^d,μ) 上で定義された初期値を x とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解である．

(2) 任意の x と $t>0$ に対して, 写像

$$w(\in W_0^d)\mapsto X(\cdot,x,w)\in W^n$$

$\mathcal{G}_t/\mathcal{B}(W^n)_t$-可測．ここで, $\mathcal{B}(W^n)_t=\sigma\left(\{w_s\mid s\le t,w\in W^n\}\right)$.

(3) 任意の w に対し, 写像

$$(t,x)(\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\mapsto X(t,x,w)$$

は連続.

(4) $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ を通常の条件を満たす filtered probability space とする．$B_t(\omega)$ を Ω 上で定義された 0 から出発する d 次元ブラウン運動で $\mathcal{F}_t$ に適合しているとする．$\xi(\omega)$ を $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数とする．$(X(t,\xi(\omega),B(\omega)),B(\omega))$ は $\xi(\omega)$ を初期値とする解である．

注意 5.11. (i) (2) のようなボレル可測なバージョンがあるというのは, 近似解 $X^k(t,x,w)$ にボレル可測なバージョンがあり, $X(t,x,w)$ はその極限として得られるということからわかる．(t,x) に関する連続な修正が存在することに関しては, レポート問題を参照せよ．(2), (3) の結果から,

$$w\mapsto\{(t,x)\mapsto X(t,x,w)\}\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n)$$
$$w\mapsto\{t\mapsto\{x\mapsto X(t,x,w)\}\}\in C([0,\infty)\to C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$

はボレル可測写像であることがわかる．

(ii) (4) における ξ に対しては, $E[|\xi|^p] < \infty$ などの可積分性に関する仮定は必要無いことに注意する. 道ごとの一意性も成立するので, 確率空間上にブラウン運動 B_t と初期値の確率変数 ξ があると解 X_t は (4) のように B と ξ の関数 で与えられることがわかる. このような解を強い解という. 一般的な定義の強い解はボレル可測写像ではなくより一般な普遍可測写像を用いて定義される.

(iii) (4) における, x, w に ξ, $B_\cdot(\omega)$ を代入する操作に関しては, レポート問題を参照せよ.

強い解の定義を与える. まず, 普遍可測写像 (universally measurable mapping) を定義する.

定義 5.12. $F : \mathbb{R}^n \times W_0^d \to W^m$ が universally measurable mapping $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
通常の条件を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上で定義された d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 B_t と $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数 ξ に対し $F(\xi(\omega), B(\omega))$ は $\mathcal{F}/\mathcal{B}(W^m)$ 可測.

注意 5.13. $F : \mathbb{R}^n \times W_0^d \to W^m$ が universally measurable mapping.
$\Longleftrightarrow$ F は $\left(\cap_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(W_0^d)}^{\nu\times\mu}\right) / \mathcal{B}(W^m)$ 可測
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(W_0^d)/\mathcal{B}(W^m)$ 可測な $\tilde{F}$ が存在して,

$$\tilde{F} = F \quad \nu \times \mu - a.s.$$

$\overline{\cdots}^{\nu\times\mu}$ は直積測度 $\nu \times \mu$ に関して完備化した確率空間の σ field を表す.

定義 5.14. $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ が強い解を持つとは以下が成立する写像 $F : \mathbb{R}^n \times W_0^d \to W^n$ が存在することと定義する.

(1) $F : \mathbb{R}^n \times W_0^d \to W^n$ は普遍可測.
(2) $x \in \mathbb{R}^n$ を固定する. 任意の $T > 0$ に対し $w \mapsto F(x, w)$ は $\sigma\left(\mathcal{B}(W_0^d)_T \cup \mathcal{N}\right)/\mathcal{B}(W^n)_T$ 可測. ここで

$$\mathcal{B}(W^n)_T := \sigma\{w_s \mid s \le T\}$$

(3) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上の $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数 $\xi(\omega)$, $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 $B_t(\omega)$ が与えられたとき, $(F(\xi(\omega), B(\omega)), B(\omega))$ は $X_0(\omega) = \xi(\omega)$ $P-a.s.\omega$ となる $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解となる.

さらに (X, B) が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上の $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解とするとき, $X(\omega) = F(X_0(\omega), B(\omega))$ P-$a.s.\omega$ となるとき, 一意的な強い解を持つという.

道ごとの一意性と強い解の一意存在の関係は次のようになる.

定理 5.15 (Yamada-Watanabe)**.** $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ に一意的な強い解が存在するということと次の (1), (2) が成立することは同値.

(1) 任意の $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対し, ν を初期分布とする解が存在する.
(2) 道ごとの一意性が成立する.

なお, (1) については, コンパクトな台を持つ確率分布について存在が言えれば十分である. この定理の証明には, 前に述べた Yamada-Watanabe の定理の証明のアイデアと独立確率変数に関するある簡単な結果を使えばよい.

解の存在に関しては連続性のみがあればよい. すなわち, 以下が成立する.

定理 5.16. σ, b は連続である. すなわち,

$$\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$$
$$b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

は連続である. さらに $K > 0$ が存在して,

$$|\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \le K(1+|x|) \qquad \forall t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

このとき以下が成立する:
任意のコンパクトな台を持つ分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解が存在する.

系 5.17. $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ において, σ, b が連続で線形増大条件を満たすとする. さらに道ごとの一意性が成立するとする. このとき, 以下が成立する.

(1) 任意の分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を初期分布とする解が存在する.
(2) 一意的な強い解が存在する.

上記の定理を適用して一意的な強い解の存在が言える例として次の定理をあげる.

定理 5.18. $n = d = 1$ とする.

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$$

において次を仮定する.

(1) $\exists K > 0$ s.t. $|\sigma(x)| + |b(t,x)| \le K(1+|x|))$

(2) 狭義単調増加連続関数 $\rho(x)$ $(x \geq 0)$ で次を満たすものが存在する.

(i) $\rho(0) = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\rho(x)^2} = \infty \quad \forall\varepsilon > 0.$

(iii) $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x-y|)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

(3) $\exists\kappa(x)$ $(x \geq 0)$: 狭義単調増加連続な concave function, s.t.

(i) $\kappa(0) = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{du}{\kappa(u)} = \infty$ $(\forall\varepsilon > 0)$.

(iii) $|b(t,x) - b(t,y)| \leq \kappa(|x-y|)$ $\forall x, y, t$.

このとき, 道ごとの一意性が成立する.

注意 5.19. (1)

- $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K\sqrt{|x-y|}$ $(\rho(x) = K\sqrt{x})$
- $|b(t,x) - b(t,y)| \leq \kappa|x-y|$ $(\kappa(x) = \kappa x)$

は上記の (1), (2), (3) を満たす. この条件の下で, 定理を証明しよう. $(X, B), (X', B)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上の解で $P(X_0 = X'_0) = 1$ とする. $\varepsilon > 0$ に対し, $f_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ とおく.

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{(x^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

である. Itô の公式より

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(X_t - X'_t) &= \int_0^t f'_\varepsilon(X_s - X'_s)\,(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))\,dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''_\varepsilon(X_s - X'_s)\,(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))^2\,ds \\ &\quad + \int_0^t f'_\varepsilon(X_s - X'_s)\,(b(s, X_s) - b(s, X'_s))\,ds. \end{aligned}$$

$\tau_R = \inf\{t > 0 \mid |X_t - X'_t| \geq R\}$ とおく. τ_R で止めると第一項はマルチンゲールになることなどから

$$\begin{aligned} E\left[f_\varepsilon(X_{t\wedge\tau_R} - X'_{t\wedge\tau_R})\right] &\leq \frac{1}{2}E\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} \frac{\varepsilon^2K^2|X_s - X'_s|}{(|X_s - X'_s|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}ds\right] \\ &\quad + \kappa E\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} |X_s - X'_s|ds\right] \\ &\leq \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \frac{\varepsilon^2K^2|X_{s\wedge\tau_R} - X'_{s\wedge\tau_R}|}{(|X_{s\wedge\tau_R} - X'_{s\wedge\tau_R}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}ds\right] \end{aligned}$$

$$+\kappa E\left[\int_0^t |X_{s\wedge\tau_R} - X'_{s\wedge\tau_R}|ds\right]. \tag{5.2}$$

$$\frac{\varepsilon^2|X_s - X'_s|}{(|X_s - X'_s|^2+\varepsilon^2)^{3/2}} \le \frac{1}{2} \quad \forall\varepsilon>0, \forall s, \forall\omega$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon^2|X_s - X'_s|}{(|X_s - X'_s|^2+\varepsilon^2)^{3/2}} = 0 \quad \forall\varepsilon>0, \forall s, \forall\omega$$

より, (5.2) において $\varepsilon\downarrow 0$ としルベーグの優収束定理を用い,

$$E[|X_{t\wedge\tau_R} - X'_{t\wedge\tau_R}|] \le \kappa\int_0^t E[|X_{s\wedge\tau_R} - X'_{s\wedge\tau_R}|]ds.$$

したがって, $E[|X_{t\wedge\tau_R} - X'_{t\wedge\tau_R}|]=0$ $(t\ge 0)$ となるので $P(X_t = X'_t \quad t\ge 0)=1$.
(2)(Girsanov 1962)

1 次元 SDE $X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha dB_s$ を考える. $1/2\le\alpha\le 1$ ならば道ごとに一意な解が存在することになるが明らかに $X_t\equiv 0$ が解である. $\alpha<1/2$ ならば Yamada-Watanabe の定理が適用できないが道ごとに一意で無いことがわかる. 実は, それよりも強く法則の意味で一意では無いことがわかる.
(3) 常微分方程式

$$\dot{X}_t = \sqrt{|X_t|} \quad t\ge 0$$
$$X_0 = 0$$

には一意性は無いことに注意せよ. 実際 $s\ge 0$ に対し,

$$X_t^s = \begin{cases} 0 & t\le s \\ \frac{1}{4}(t-s)^2 & t>s \end{cases}$$

はすべて解である.

法則の意味で一意だが道ごとの一意性が成立しない簡単な例をあげる.

例 5.20. (1)(田中洋の例)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x\ge 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

と定める. SDE

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

の解について考える．解が存在すればこれはマルチンゲールであり $\langle X\rangle_t = t$ を満たす．後で示すが, 2 次変分過程が t になるマルチンゲールはブラウン運動であることがわかる．したがって, 解の法則は初期分布が X_0 の分布となるブラウン運動であり一意に定まる．

さらに解の存在も言える．X_t を $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする．$B_t = \int_0^t \sigma(X_s)^{-1} dX_s$ とおくと

$$\langle B\rangle_t = \int_0^t \sigma(X_s)^{-2} ds = t$$

となるので, B は $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である．また, 定理 3.27 より

$$\int_0^t \sigma(X_s) dB_s = \int_0^t \sigma(X_s)\frac{1}{\sigma(X_s)} dX_s = X_t$$

したがって, (X, B) は初期値を 0 とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解である．

道ごとの一意性が成立しないことを示す．(X_t, B_t) が $X_0 = 0$ となる解とする．このとき, $(-X_t, B_t)$ も $-X_0 = 0$ を満たす解である．

$\because$

$Y_t = -X_t$ とおく．$Y_0 = 0$ である．

$$-\sigma(X_t) = \begin{cases} -1 = \sigma(Y_t) & X_t > 0 \text{ のとき} \\ -1 = \sigma(Y_t) - 2 & X_t = 0 \text{ のとき} \\ 1 = \sigma(Y_t) & X_t < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．したがって

$$Y_t = -X_t = -\int_0^t \sigma(X_s) dB_s = \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s - 2\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s) dB_s.$$

ここで

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s) dB_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)^2 ds\right] \\ &= \int_0^t P\left(X_s = 0\right) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s) dB_s = 0 \quad t \geq 0 \ a.s.$ よって Y_t も解である．

(2) M.T. Barlow (J. London. Math. Soc. 26 (1982) 335–345) による次のような例がある．1 次元 SDE $dX_t = \sigma(X_t) dB_t, X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ で

- σ は連続

- $0 < c_1 < c_2 < \infty$ が存在し $c_1 \le \sigma(x) \le c_2 \quad \forall x$

を満たしかつ道ごとの一意性が成立しない例が存在する．係数が有界連続かつ一様楕円性 $\inf \sigma(x) > 0$ があれば法則の意味では一意となることが知られている (Stroock-Varadhan の結果) ので, 法則の意味での一意存在は成立するが, 道ごとの一意性は成立しない例になっている.

5.3 マルチンゲール問題

(X_t, B_t) が $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解であるとする．$f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ とすると Itô の公式より

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t (\partial_i f)(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le n} \int_0^t (\partial_k \partial_l f)(X_s) d\langle X^k, X^l \rangle_s \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^t (\partial_i f)(X_s) \sigma_j^i(s, X_s) dB_s^j + \sum_{i=1}^n \int_0^t (\partial_i f)(X_s) b^i(s, X_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le n} \sum_{j=1}^d \int_0^t (\partial_k \partial_l f)(X_s) \sigma_j^k(s, X_s) \sigma_j^l(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

したがって, $a^{k,l}(s,x) = \sum_{i=1}^d \sigma_i^k(s,x) \sigma_i^l(s,x)$ とおき,

$$(Lf)(s,x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le n} a^{k,l}(s,x)(\partial_k \partial_l f)(x) + \sum_{i=1}^n b^i(s,x)(\partial_i f)(x)$$

と定めると

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(s, X_s) ds \in \mathcal{M}^{c,loc}$$

である．逆に, すべての ノンランダムな初期値 $\xi = x$ に対して $W_x^n = C([0,\infty), \mathbb{R}^n; w_0 = x)$ 上の確率 P_x で任意の $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$M_t^f = f(w_t) - f(x) - \int_0^t (Lf)(s, w_s) ds$$

が local martingale になるになるような物の存在が言えれば, 確率微分方程式の解を構成できる．このようなマルチンゲールになるような測度の構成の問題を (Stroock-Varadhan の) マルチンゲール問題と言う.

5.4 例

1. 線形 SDE

(1) Gauss-Markov 型 SDE

$a:[0,T]\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $b:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $c:[0,T]\to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$ を有界ボレル写像とし, 次の SDE を考える. B_t は d 次元ブラウン運動, ξ は $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数である.

$$dX_t = a_t X_t dt + b_t dt + c_t dB_t, \quad X_0 = \xi.$$

これは定理 5.3 の条件を満たすので解が存在することになるが, 次のように具体的に書けることがわかる. $A=(A_t):[0,T]\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ を

$$\frac{d}{dt}A_t = a_t A_t, \quad A_0 = I$$

の解とすると

$$X_t = A_t\left(\xi + \int_0^t A_s^{-1} b_s ds + \int_0^t A_s^{-1} c_s dB_s\right)$$

が解になる. ξ が non-random のとき (すなわち, 定数ベクトル), X_t はガウス過程であり, Gauss-Markov 過程と言われることが多い. ここで, $\mathbb{R}^n$ 値確率過程がガウス過程であるとは, 任意の $0\le t_0<\cdots<t_n\le T$ に対し, $(X_{t_0},\cdots,X_{t_n})$ の分布がガウス分布になるものを言う.

$a_t\equiv a$ のように一定のとき, $A_t = e^{ta}$ なので

$$X_t = e^{ta}\left(\xi + \int_0^t e^{-sa} b_s ds + \int_0^t e^{-sa} c_s dB_s\right)$$

となる. 特に

$$dX_t = aX_t dt + c dB_t$$

の解を Ornstein-Uhlenbeck 過程という.

a,b,c が $a_t(\omega),b_t(\omega),c_t(\omega)$ のように有界 $\mathcal{F}_t$-発展的可測過程の場合も解 X_t は同様の表示を持つ.

(2)

$$\sigma_t(\omega) = (\sigma_t^1(\omega),\ldots,\sigma_t^d(\omega)) \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$$
$$b_t(\omega)\in\mathbb{R}$$

は $\mathcal{F}_t$-発展的可測で

$$P\left(\int_0^t |\sigma(s,\omega)|^2 ds + \int_0^t |b(s,\omega)| ds < \infty\right) = 1 \quad \forall t > 0$$

とする．SDE

$$dX_t = X_t\left(\sigma_t dB_t + b_t dt\right), \quad X_0 = \xi \in \mathbb{R}$$

を考える． X_t は 1 次元確率過程である． ここで, B_t は d 次元ブラウン運動であり, $\sigma_t dB_t = \sum_i \sigma_t^i dB_t^i$ である．この SDE は, σ_t, b_t は ω に依存し, かつ有界とは限らないので, 定理 5.3 の仮定を満たしていない．しかし次のように具体的な表示の解を持つ．

$$X_t = \xi \exp\left(\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_s|^2 ds + \int_0^t b_s ds\right).$$

この右辺を Y_t と書く． Y_t が解であることを示す．$Y_0 = \xi$ は OK. $Z_t = (Z_t^1, \ldots, Z_t^d)$ が semimartingale のとき, Itô の公式は確率微分の形で書くと $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ のとき

$$df(Z_t) = \sum_{i=1}^d (\partial_i f)(Z_t) dZ_t^i + \frac{1}{2}\sum_{k,l}(\partial_k \partial_l f)(Z_t) d\langle Z^k, Z^l\rangle_t.$$

したがって

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t \sigma_t dB_t + Y_t\left(b_t dt - \frac{1}{2}|\sigma_t|^2 dt\right) + \frac{Y_t}{2}|\sigma_t|^2 dt \\ &= Y_t \sigma_t dB_t + Y_t b_t dt. \end{aligned}$$

一意性を示す．$\xi \neq 0$ の場合に示す．$\tilde{Y}_t$ も解であるとする．Itô の公式より

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{\tilde{Y}_t}{Y_t}\right) \\ & = \frac{1}{Y_t} d\tilde{Y}_t + \tilde{Y}_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + d\langle \tilde{Y}, \frac{1}{Y}\rangle_t \\ & = \frac{\tilde{Y}_t}{Y_t}(\sigma_t dB_t + b_t dt) - \tilde{Y}_t \frac{1}{Y_t^2} dY_t + \tilde{Y}_t Y_t^{-3} d\langle Y, Y\rangle_t - Y_t^{-2} d\langle \tilde{Y}, Y\rangle_t \\ & = \frac{\tilde{Y}_t}{Y_t}(\sigma_t dB_t + b_t dt) - \frac{\tilde{Y}_t}{Y_t}(\sigma_t dB_t + b_t dt) + \tilde{Y}_t Y_t^{-1}|\sigma_t|^2 dt - \tilde{Y}_t Y_t^{-1}|\sigma_t|^2 dt \\ & = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\tilde{Y}_t}{Y_t} = 1 + \int_0^t d\left(\frac{\tilde{Y}_s}{Y_s}\right) = 1.$$

注 (1) $b_t \equiv 0$ のとき, X_t は局所マルチンゲールになる．すなわち

$$\exp\left(\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_s|^2 ds\right)$$

は局所マルチンゲールである．これがいつマルチンゲールになるかは後で論ずる．

(2) 債券 S_t^0 と株券 S_t^i $(1 \le i \le N)$ が以下の確率微分方程式に従うとき, 標準マーケットモデルと言われる．

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= r_t dt \\ dS_t^i &= S_t^i\left(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_j^i(t) dB_t^j\right) \end{aligned}$$

2．2 乗ベッセル過程, ベッセル過程

B_t を 1 次元ブラウン運動, $d > 0$ とし次の 1 次元 SDE を考える．

$$\begin{aligned} dX_t &= 2\sqrt{|X_t|}dB_t + ddt \\ X_0 &= \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Yamada-Watanabe の定理より, これには強い解が存在する．これを d 次元 2 乗 Bessel 過程という．

$d \in \mathbb{N}$, $\xi \ge 0$ のときは, 強い解にこだわらなければ次のように解を作ることができる．

$Z_t = (Z_t^1, \dots, Z_t^d)$ を 0 からスタートする d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする．$\xi = \sum_{i=1}^d x_i^2$ となるように $x = (x_i) \in \mathbb{R}^d$ を取る．

$$Q_t = \sum_{i=1}^d (x_i + Z_t^i)^2$$

とおく．P-a.s. ω に対し, $Q_t(\omega) = 0$ となる t の集合のルベーグ測度は 0 である．なぜなら

$$E\left[\int_0^\infty 1_{\{Q_t=0\}} dt\right] = \int_0^\infty E[1_{\{Q_t=0\}}]dt = \int_0^\infty P(Z_t = -x)dt = 0.$$

Itô の公式より

$$\begin{aligned} Q_t &= \xi + 2\int_0^t \sum_{i=1}^d (x^i + Z_s^i)dZ_s^i + \int_0^t \sum_{i=1}^d ds \\ &= \xi + 2\int_0^t \sqrt{Q_s}\sum_{i=1}^d \frac{x^i + Z_s^i}{\sqrt{Q_s}} 1_{\{Q_s>0\}} dZ_s^i + d \cdot t \\ &= \xi + 2\int_0^t \sqrt{Q_s} dW_t + d \cdot t. \end{aligned}$$

ここで

$$W_t = \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{x^i + Z_u^i}{\sqrt{Q_u}} 1_{\{Q_u>0\}} dZ_u^i.$$

W_t は $\mathcal{F}_t$ 連続マルチンゲールで $\langle W\rangle_t = t$ なので $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であり, $Q_0 = \xi$ である. したがって, (Q_t, W_t) は上記の確率微分方程式の解である.

2 乗ベッセル過程の性質を述べる.

定理 5.21. $d > 0, \xi \geq 0$ とする.

(1) $0 < d < 2$ のとき

$$P\left(\{X_t \geq 0, \quad \forall t > 0\} \cap \{X_t \text{ は } 0 \text{ を hit する }\}\right) = 1.$$

(2) $d \geq 2$ ならば

$$P\left(X_t > 0 \quad \forall t > 0\right) = 1.$$

(3) $R_t = \sqrt{X_t}$ とおく. $\xi > 0$ とする. また σ_0 を X_t の 0 への first hitting time とする. R_t は以下の確率微分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} R_t &= \sqrt{\xi} + B_t + \int_0^t \frac{d-1}{2R_u} du \qquad 0 \leq t < \sigma_0. \\ R_0 &= \sqrt{\xi}. \end{aligned}$$

Proof. (1), (2) は例えば, 1 次元拡散過程の理論による. 証明は省略. [2], [7] を参照. (3) は Itô の公式による.

$0 < \varepsilon < \xi$ とし, σ_ε を X_t の ε への first hitting time とする. $t \leq \sigma_\varepsilon$ の範囲で, $d\langle X\rangle_t = 4X_s ds$ を用い,

$$\begin{aligned} \sqrt{X_t} &= \sqrt{\xi} + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{X_s}} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{(X_s)^{3/2}} d\langle X\rangle_s \\ &= \xi + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{X_s}} 2\sqrt{X_s} dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{X_s}} d\cdot ds - \frac{1}{8}\int_0^t \frac{4X_s}{(X_s)^{3/2}} ds \\ &= \xi + B_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{X_s}} ds. \end{aligned}$$

したがって示された. □

注意 5.22. (1) R_t を d 次元ベッセル過程という. $d \in \mathbb{N}$ のとき, d 次元ブラウン運動 B_t を用いると

$$R_t \stackrel{d}{=} |x + B_t| \quad (\xi = |x|).$$

(2) $g \in L^2([0,T], dt)$ とする．$a > 0$ に対し, 次の ODE を考える．

$$x'_t = g_t + \frac{a}{x_t},$$
$$x_0 = \xi > 0.$$

任意の $0 \le t \le T$ に対し $x_t > 0$ となる．

6 ブラウン運動の特徴づけ

定理 6.1 (Lévy)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を通常の条件を満たす filtered probability space とする．$M_t = (M_t^1, \ldots, M_t^d)$ を $\mathcal{F}_t$-局所連続マルチンゲールで $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{i,j} t \quad \forall t \ge 0$ を満たすとする．このとき, M_t は $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である．

Proof. $\xi = (\xi^i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ に対して $X_t = \exp\left(\sqrt{-1}\,(\xi, M_t) + \frac{|\xi|^2}{2} t\right)$ と定める．ただし, $(\xi, M_t) = \sum_{i=1}^d \xi^i M_t^i$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^d (\xi^i)^2$ である．Itô の公式より

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left(\sqrt{-1}\,(\xi, dM_t) + \frac{|\xi|^2}{2} dt \right) - \frac{X_t}{2} \sum_{1 \le k,l \le d} \xi^k \xi^l d\langle M^k, M^l \rangle_t \\ &= \sqrt{-1} X_t \sum_{i=1}^d \xi^i dM_t^i. \end{aligned}$$

したがって, X_t は $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールである．ゆえに

$$E\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s \quad a.s.$$

すなわち

$$E\left[e^{\sqrt{-1}(\xi, M_t - M_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 (t-s)}. \tag{6.1}$$

これより,

$$E\left[e^{\sqrt{-1}(\xi, M_t - M_s)}\right] = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 (t-s)}.$$

これは, $M_t - M_s \overset{d}{=} N(0, (t-s) I_d)$ を示している．また, 任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して,

$$E\left[e^{\sqrt{-1}(\xi, M_t - M_s)} 1_A\right] = E[e^{\sqrt{-1}(\xi, M_t - M_s)}] P(A). \tag{6.2}$$

両辺に $(\mathfrak{F}f)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\sqrt{-1}(x,\xi)}f(x)dx$ (f は急減少な滑らかな関数) をかけて積分するとフーリエ変換の性質を用い,

$$E[f(M_t-M_s);A]=E[f(M_t-M_s)]P(A).$$

これは, M_t-M_s は $\mathcal{F}_s$ と独立であることを示している. 以上より, M_t は $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である. □

定理 6.2. 通常の条件を満たすとする. $B_t=(B_t^1,\ldots,B_t^d)$ を d-次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動, τ を a.s. に有限な $\mathcal{F}_t$ 停止時間とする.

$$B_t^\tau=B_{\tau+t}-B_\tau,\quad \mathcal{F}_t^\tau=\mathcal{F}_{\tau+t}\qquad t\geq 0$$

とおくと B_t^τ は 0 からスタートする $\mathcal{F}_t^\tau$ ブラウン運動である.

Proof. まず τ が有限な停止時間な場合に示す. $\tau+t$ は $\mathcal{F}_t$ 停止時間であるので, Doob の任意抽出定理より

$$E[B_{\tau+t}^i\mid\mathcal{F}_{\tau+s}]=B_{\tau+s}^i.$$

よって $E[B_{\tau+t}^i-B_\tau^i\mid\mathcal{F}_{\tau+s}]=B_{\tau+s}^i-B_\tau^i$. ゆえに B_t^τ は $\mathcal{F}_t^\tau$-適合 2 乗可積分連続マルチンゲール.

$B_t^iB_t^j-\delta_{i,j}t$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールゆえ、やはり任意抽出定理より、$s<t$ ならば

$$E[B_{\tau+t}^iB_{\tau+t}^j-\delta_{i,j}(\tau+t)|\mathcal{F}_{\tau+s}]=B_{\tau+s}^iB_{\tau+s}^j-\delta_{i,j}(\tau+s).$$

これを用いると

$$E\left[(B_{\tau+t}^i-B_\tau^i)(B_{\tau+t}^j-B_\tau^j)-\delta_{i,j}t\mid\mathcal{F}_{\tau+s}\right]=(B_{\tau+s}^i-B_\tau^i)(B_{\tau+s}^j-B_\tau^j)-\delta_{i,j}s.$$

したがって, $\langle B_{\tau+\cdot}^i-B_\tau^i,B_{\tau+\cdot}^j-B_\tau^j\rangle_t=\delta_{i,j}t$. よって, Lévy の定理により B^τ は $\mathcal{F}^\tau$-ブラウン運動である.

次に一般の場合を示す. $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\tau_n=\tau\wedge n$ とおく. 以下しばらく B_t^i を B_t と書く. $E[(B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n})^2]=t$ $(\forall t,n)$ より $\{B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n}\}_{n=1}^\infty$ は一様可積分である. $\lim_{n\to\infty}B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n}=B_{\tau+t}-B_\tau$ *a.s.* より

$$\lim_{n\to\infty}\|(B_{\tau_n+t}-B_{\tau_n})-(B_{\tau+t}-B_\tau)\|_{L^1}=0$$

$$E[(B_{\tau+t}-B_\tau)^2]\leq t.$$

$0 \le s < t$ とする. $A \in \mathcal{F}_{\tau+s}$ とする. $A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n+s}$ であることを示す.

$$
\begin{aligned}
&A \cap \{\tau \le n\} \cap \{\tau_n + s \le t\} \\
&= A \cap \{\tau + s \le t\} \cap \{\tau \le n\} \cap \{\tau_n + s \le t\} \\
&= A \cap \{\tau + s \le t\} \cap \{\tau_n + s \le t\} \setminus (A \cap \{\tau + s \le t\} \cap \{\tau_n + s \le t\} \cap \{\tau > n\}).
\end{aligned}
$$

$n + s \le t$ ならば $n \le t$ なので $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_t$ となるので、$A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n+s}$ が示された. これを用い, $A \in \mathcal{F}_{\tau+s}$ とすると

$$
\begin{aligned}
E[B_{\tau+t} - B_\tau; A] &= \lim_{n\to\infty} E\left[B_{\tau+t} - B_\tau; A \cap \{\tau \le n\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n}; A \cap \{\tau \le n\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[E[B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_n+s}]; A \cap \{\tau \le n\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E[B_{\tau_n+s} - B_{\tau_n}; A \cap \{\tau \le n\}] \\
&= E[B_{\tau+s} - B_\tau; A].
\end{aligned}
$$

したがって, $B_{\tau+t} - B_\tau$ は 2 乗可積分連続 $\mathcal{F}^\tau$-マルチンゲールである. ここから, 添字 j, j を書くことにする. $\tau \le n$ 上で $B_{\tau+t} - B_\tau = B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n}$ なので、$\langle B^i_{\tau_n+\cdot} - B^i_{\tau_n}, B^j_{\tau_n+\cdot} - B^j_{\tau_n}\rangle_t = \delta_{i,j} t$ を用い, $\langle B^i_{\tau+\cdot} - B^i_\tau, B^j_{\tau+\cdot} - B^j_\tau\rangle_t = \delta_{i,j} t$. したがって, Lévy の定理により, B^τ は $\mathcal{F}^\tau$-ブラウン運動であると結論づけられる.

$\square$

定理 6.3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を通常の条件を満たす filtered probability space とする. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ が $P\left(\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = +\infty\right) = 1$ を満たすとする.

$$\tau_t(\omega) = \inf\{s > 0 \mid \langle M\rangle_s > t\}$$

と定める. 以下が成立する.

(1) $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ とおくと $\hat{\mathcal{F}}_t$ は右連続な filtration であり $B_t := M_{\tau_t}$ は $\hat{\mathcal{F}}_t$-ブラウン運動である.

(2) 任意の u について $\langle M\rangle_u$ は $\hat{\mathcal{F}}_t$-停止時間であり $M_u = B_{\langle M\rangle_u}$.

τ_t は (t, ∞) への first hitting time なので $\mathcal{F}_t$ 停止時間である.

Proof. (1) $\langle M\rangle^{-1}(t) = [l_t, r_t]$ とおく.

1. $\tau_t = r_t$
2. $l_t = \inf\{s \ge 0 \mid \langle M\rangle_s \ge t\}$. すなわち, $\langle M\rangle$ の $[t, \infty)$ への first hitting time である

3. $\lim_{u \to t+0} \tau_u = r_t$
4. $\lim_{u \to t-0} \tau_u = l_t$
5. $\langle M \rangle_{\tau_t} = t$
6. $P\left(M_u = M_{l_t} \quad l_t \le u \le r_t \quad \forall t \ge 0\right) = 1$

が示せる．6 を示す．$\mathcal{F}_t^u = \mathcal{F}_{u+t}$ $(t \ge 0)$ とおくと $\{M_{t+u} - M_u\}_{t \ge 0}$ は 連続 $\mathcal{F}_t^u$ 局所マルチンゲールである．また, $\langle M_{\cdot+u} - M_u \rangle_t = \langle M \rangle_{t+u} - \langle M \rangle_u$.

$$\sigma_u(\omega) = \inf\{t > 0 \mid \langle M_{\cdot+u} - M_u \rangle_t > 0\}$$

とおくと σ_u は $\mathcal{F}_t^u$ 停止時間である．すべての t について

$$P\left(\langle M_{\cdot+u} - M_u \rangle_{\sigma_u \wedge t} = 0 \quad \forall t \ge 0\right) = 1$$

なので

$$P\left(M_{(\sigma_u \wedge t)+u} - M_u = 0 \quad \forall t \ge 0\right) = 1.$$

$\langle M \rangle_u, M_u$ の連続性から

$$P\left(M_{(\sigma_u \wedge t)+u} - M_u = 0 \quad \forall t \ge 0, \forall u \ge 0\right) = 1.$$

これは, 6 を示している．1〜5 は単調増加連続関数に対する性質であり, 証明は簡単である．$B_t = M_{\tau_t}$ の連続性は, 3,4,6 から従う．

次に B_t が $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であることを示す．まず, $\hat{\mathcal{F}}_t$ の右連続性を示す．3 の結果と 停止時間が $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ $(\forall \omega)$ を満たしているなら $\mathcal{F}_t$ が右連続より

$$\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_{\tau}$$

から従う ($\tau_n = \tau_{t_n}, t_n \downarrow t$ に適用する).

有界な $\mathcal{F}_t$-停止時間の列 $\sigma_n \uparrow \infty$ で M^{σ_n} が有界 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール, $\langle M^{\sigma_n} \rangle$ が有界となるものを取る．Doob's optional sampling theorem より (τ_t, τ_s は有界な停止時間では無いが, M^{σ_n}, $\langle M^{\sigma_n} \rangle_t$ が有界なので適用可能)

$$E[M_{\sigma_n \wedge \tau_t} \mid \mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\sigma_n \wedge \tau_s} \tag{6.3}$$

$$E\left[M_{\sigma_n \wedge \tau_t}^2 - \langle M \rangle_{\sigma_n \wedge \tau_t} \mid \mathcal{F}_{\tau_s}\right] = M_{\sigma_n \wedge \tau_s}^2 - \langle M \rangle_{\sigma_n \wedge \tau_s}. \tag{6.4}$$

$m < n$ とすると $E[M_{\sigma_n \wedge \tau_t} \mid \mathcal{F}_{\sigma_m}] = M_{\sigma_m \wedge \tau_t}$, $\langle M \rangle_{\tau_t} = t$ より

$$E\left[\left(M_{\sigma_n \wedge \tau_t} - M_{\sigma_m \wedge \tau_t}\right)^2\right] = E[M_{\sigma_n \wedge \tau_t}^2 - M_{\sigma_m \wedge \tau_t}^2] = E[\langle M \rangle_{\sigma_n \wedge \tau_t} - \langle M \rangle_{\sigma_m \wedge \tau_t}] \to 0$$
$$\text{as } m, n \to \infty.$$

したがって, $\lim_{n\to\infty} M_{\sigma_n\wedge\tau_t} = M_{\tau_t}$ は, L^2 収束. (6.3), (6.4) で $n\to\infty$ とし, $E[M_{\tau_t} \mid \mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\tau_s}$, $E[M_{\tau_t}^2 - t \mid \mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\tau_s}^2 - s$ を得る. したがって, Lévy の判定条件により, B_t は $\hat{F}_t$ ブラウン運動である.
(2) 任意の $u, t \geq 0$, ω に対し

$$\langle M\rangle_u(\omega) \leq t \Longleftrightarrow \tau_t(\omega) \geq u.$$

$\because$ $\langle M\rangle_u \leq t \Longrightarrow \tau_t \geq u$ を示す. $\tau_t < u$ なら, $\langle M\rangle_{u-\varepsilon} > t$ となる $\varepsilon > 0$ が存在することになるが, そうすると $\langle M\rangle$ の非減少性から $\langle M\rangle_u > t$ となり矛盾. ゆえに $\tau_t \geq u$.

$\tau_t \geq u$ ならば $\langle M\rangle_u \leq t$ を示す. 仮に $\langle M\rangle_u > t$ ならば $\langle M\rangle$ の左連続性から $\varepsilon > 0$ で $\langle M\rangle_{u-\varepsilon} > t$. したがって, $\tau_t \leq u - \varepsilon$. これは仮定に反するので, $\langle M\rangle_u \leq t$ となる.

τ_t は $\mathcal{F}_{\tau_t}$ 可測なので $\{\langle M\rangle_u \leq t\} = \{\tau_t \geq u\} \in \mathcal{F}_{\tau_t}$. ゆえに $\langle M\rangle_u$ は $\hat{\mathcal{F}}_t$ 停止時間.
最後に, $B_{\langle M\rangle_u} = M_u$ を示す. $l_{\langle M\rangle_u} \leq u \leq r_{\langle M\rangle_u}$ より 6 を用いて

$$B_{\langle M\rangle_u} = M_{\tau_{\langle M\rangle_u}} = M_{r_{\langle M\rangle_u}} = M_u.$$

$\square$

定理 6.4 (Knight)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を通常の条件を満たす filtered probability space とする. $M^i \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ $(i = 1, \ldots, d)$ について, 次を仮定する.

(i) $\langle M^i, M^j\rangle_t = 0 \quad a.s.\ \forall i \neq j$
(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \langle M^i\rangle_t = +\infty \quad a.s. \forall i$

$\tau_t^i = \inf\{s > 0 \mid \langle M^i\rangle_s > t\}$ とおき, $B_t^i = M_{\tau_t^i}^i$ と定めると $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ は d 次元ブラウン運動である.

証明は [6], [1] を参照.

7 指数マルチンゲールと drift の変換

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$$

は解を持つとする.

$$\gamma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$$

が与えられた時,

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + (\sigma(t, X_t)\gamma(t, X_t) + b(t, X_t))\, dt$$

の解を確率測度を変換して構成できることを示す.

定理 7.1. $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする.

(1) $X_t = e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$ は

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s dM_s \quad t \geq 0$$

を満たす. 特に X_t は非負局所マルチンゲール.

(2) $T > 0$ とする. 定数 $C_T > 0$ が存在し $\langle M\rangle_T \leq C_T$ $a.s.\omega$. ならば $(X_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}_2^c([0,T])$.

Proof. (1) $Y_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$ とおくと, Itô の公式より

$$\begin{aligned} e^{Y_t} &= e^{Y_0} + \int_0^t e^{Y_s} dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{Y_s} d\langle Y\rangle_s \\ &= 1 + \int_0^t e^{Y_s} dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t e^{Y_s} d\langle M\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{Y_s} d\langle M\rangle_s \\ &= 1 + \int_0^t X_s dM_s. \end{aligned}$$

(2) $R > 0$ とし, $\tau_R = \inf\{t > 0 \mid |M_t| \geq R\}$ とおく. $M_t^R := M_{t\wedge\tau_R}$ は $\max_{0\leq t\leq T} |M_t^R| \leq R$ を満たす. したがって,

$$X_t^R := e^{M_t^R - \frac{1}{2}\langle M^R\rangle_t} \leq e^R$$

より, X^R は有界マルチンゲール. また, $0 \leq t \leq T$ に対し

$$\begin{aligned} (X_t^R)^2 &= e^{2M_t^R - \langle M^R\rangle_t} \\ &= e^{2M_t^R - \frac{1}{2}\langle 2M^R\rangle_t + \langle M^R\rangle_t} \\ &\leq e^{2M_t^R - \frac{1}{2}\langle 2M^R\rangle_t} e^{C_T}. \end{aligned}$$

したがって,

$$E\left[(X_t^R)^2\right] \leq e^{C_t} E\left[e^{2M_t^R - \frac{1}{2}\langle 2M^R\rangle_t}\right] = e^{C_T} \quad 0 \leq t \leq T.$$

ここで, $e^{2M_t^R - \frac{1}{2}\langle 2M^R\rangle_t}$ がマルチンゲールであることを用いた. Doob の不等式から

$$E\left[\max_{0\leq t\leq T} (X_t^R)^2\right] \leq 4E\left[(X_T^R)^2\right] \leq 4e^{C_T}.$$

ここで, $R\uparrow\infty$ として Fatou's lemma を用いて

$$E\left[\max_{0\le t\le T} X_t^2\right]\le 4e^{C_T}.$$

従って, $X\in\mathcal{M}_2^c$. $\square$

注意 7.2. $E\left[e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T}\right]<\infty$ ならば, $(X_t)_{0\le t\le T}\in\mathcal{M}^c([0,T])$. これを Novikov の判定条件という.

命題 7.3. $M\in\mathcal{M}^{c,loc}$ とする. $X_t=\mathcal{E}(M)_t:=\exp(M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ $(0\le t\le T)$ とおく.

(1) $E[X_t]\le 1$ かつ X_t は supermartingale.
(2) $(X_t)_{0\le t\le T}\in\mathcal{M}^c\Longleftrightarrow E[X_t]=1$ $(0\le t\le T)$.

補題 7.4 (Scheffe's lemma)**.** $f_n,f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $f_n\ge 0, f\ge 0$ $a.s.$, $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ $a.s.$ とする. さらに $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)d\mu(\omega)=\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)$ ならば $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}=0$.

Proof.
$$|f(\omega)-f_n(\omega)|=(f(\omega)-f_n(\omega))^+ +(f(\omega)-f_n(\omega))^-$$

である. $(f(\omega)-f_n(\omega))^+\le f(\omega)$ ゆえルベーグの優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f(\omega)-f_n(\omega))^+d\mu(\omega)=0. \tag{7.1}$$

また仮定と
$$f(\omega)-f_n(\omega)=(f(\omega)-f_n(\omega))^+ -(f(\omega)-f_n(\omega))^-$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f(\omega)-f_n(\omega))^-d\mu(\omega)=0. \tag{7.2}$$

(7.1), (7.2) より $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f(\omega)-f_n(\omega)|d\mu(\omega)=0$. $\square$

Proof of Proposition 7.3. $\tau_R=\inf\{t>0\mid |M_t|\ge R\}$ とおき, $X_t^R=\mathcal{E}(M^R)_t=\exp\left(M_{\tau_R\wedge t}-\frac{1}{2}\langle M\rangle_{\tau_R\wedge t}\right)$ とおく. X^R は有界マルチンゲールである.
(1) $E[X_t^R|\mathcal{F}_s]=X_s^R$ $(s\le t)$ である. よって $E[X_t^R]=1$ $(0\le y\le T)$. $R\to\infty$ として Fatou's lemma を用いると $E[X_t]\le 1$ $(0\le t\le T)$. したがって, $X_t\in L^1$ $(0\le t\le T)$.

ゆえに 条件付き平均に対する Fatou's lemma により

$$
\begin{aligned}
E\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[\lim_{R\to\infty} X_t^R|\mathcal{F}_s\right] \\
&\le \liminf_{R\to\infty} E\left[X_t^R|\mathcal{F}_s\right] \\
&\le \liminf_{R\to\infty} X_s^R = X_s.
\end{aligned}
$$

(2) $\Longrightarrow$ は $X_0 = 1$ とマルチンゲール性から従う．逆を示す．$\lim_{R\to\infty} X_t^R(\omega) = X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ $E[X_t^R] = E[X_t] = 1$ ゆえ Scheffe's lemma から $\lim_{R\to\infty} X_t^R = X_t$ in L^1．よって $E[X_t^R|\mathcal{F}_s] = X_s^R$ において $R \to \infty$ とすればよい． □

補題 7.5. $\{X_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする．次は同値.

(1) $\{X_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^c$.
(2) $\{X_\sigma; \sigma \le T, \sigma$ は $\mathcal{F}_t$ 停止時間 $\}$ は一様可積分.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．$\sigma \le T$ なので Doob's optional sampling theorem より $X_\sigma = E[X_T|\mathcal{F}_\sigma]$．$\{E[X_T|\mathcal{G}]; \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sub σ field$\}$ は一様可積分より (2) が従う．逆を示す.$X \in \mathcal{M}^{c,loc}$ より $\tau_n \to \infty$ という停止時間の列で $X^{\tau_n} \in \mathcal{M}^c$ なるものが取れる．一様可積分性から $\lim_{n\to\infty} X_t^{\tau_n} = X_t$ in L^1 となるので $X_t \in L^1$ で $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$. □

定理 7.6 (Cameron-Martin-Maruyama-Girsanov)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ を filtered probability space とする．$\{M_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ $(0 < T < \infty)$ とし，$\{\mathcal{E}(M)_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^c([0,T], \mathcal{F}_t)$ を仮定する．$(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の P と同値な確率を

$$dQ = \mathcal{E}(M)_T dP$$

で定める.

(1) $\{X_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t, P)$ ならば

$$\hat{X}_t := X_t - \langle X, M\rangle_t \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t, Q).$$

(2) $\{X_t^i\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t, P)$ $(i = 1, 2)$ に対して，

$$\hat{X}_t^i := X_t^i - \langle X^i, M\rangle_t$$

とおくと

$$Q\left(\langle X^1, X^2\rangle_t = \langle \hat{X}^1, \hat{X}^2\rangle_t \quad 0 \le t \le T\right) = 1.$$

確率 P で考えても同様である.

証明のため, 準備をする.

補題 7.7. $A \in \mathcal{F}_t$ $(0 \le t \le T)$ に対し

$$Q(A) = E[1_A \mathcal{E}(M)_t].$$

すなわち,

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(M)_t.$$

Proof.

$$\begin{aligned} Q(A) &= E\left[1_A \mathcal{E}(M)_T\right] \\ &= E\left[E[1_A \mathcal{E}(M)_T | \mathcal{F}_t]\right] \\ &= E\left[1_A E[\mathcal{E}(M)_T | \mathcal{F}_t]\right] \\ &= E\left[1_A \mathcal{E}(M)_t\right]. \end{aligned}$$

□

補題 7.8. $\{Y_t\}_{0 \le t \le T}$ を $\mathcal{F}_t$ 適合有界連続確率過程とする. 次の (1), (2) は同値.

(1) $\{Y_t\}_{0 \le t \le T} \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t, Q)$.
(2) $\{Y_t \mathcal{E}(M)_t\}_{0 \le t \le T} \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t, P)$.

Proof.

$$\begin{aligned} (1) &\iff E^Q[Y_t; A] = E^Q[Y_s; A] \quad 0 \le \forall s \le \forall t \le T,\ \forall A \in \mathcal{F}_s \\ &\iff E^P[Y_t \mathcal{E}(M)_t; A] = E^P[Y_s \mathcal{E}(M)_s; A]\, 0 \le \forall s \le \forall t \le T,\ \forall A \in \mathcal{F}_s \\ &\iff (2) \end{aligned}$$

□

定理 7.6 の証明. (1)

$$\tau_n = \inf\{t > 0 \mid |X_t| + |\langle X, M\rangle_t| \ge n\}$$

とおくと τ_n は $\mathcal{F}_t$-停止時間.

$$\hat{X}_t^{\tau_n} = X_{\tau_n \wedge t} - \langle X, M\rangle_{\tau_n \wedge t} \, (= X_t^{\tau_n} - \langle X^{\tau_n}, M\rangle_t))$$

とおく. $\{\hat{X}^{\tau_n}\}_{0 \le t \le T} \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t, Q)$ を示す.

$$|\hat{X}_t^{\tau_n}| \le n \quad 0 \le t \le T \qquad (*)$$

なので補題 7.8 より $\{\hat{X}_t^{\tau_n}\mathcal{E}(M)_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^c(\mathcal{F}_t, P)$ を示せば良い. $(*)$ と $\{\mathcal{E}(M)_\sigma\}_{0\le\sigma\le T}$ は一様可積分より

$$\{\hat{X}_\sigma^{\tau_n}\mathcal{E}(M)_\sigma; \sigma \text{ は } \sigma \le T \text{ を満たす } \mathcal{F}_t \text{ 停止時間 }\}$$

は一様可積分. したがって, $\{\hat{X}_t^{\tau_n}\mathcal{E}(M)_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t, P)$ を示せば良い. Itô の公式より

$$\begin{aligned}
&d\left((X^{\tau_n} - \langle X^{\tau_n}, M\rangle)\mathcal{E}(M)\right)_t \\
&= (X_t^{\tau_n} - \langle X^{\tau_n}, M\rangle_t)d\mathcal{E}(M)_t + \mathcal{E}(M)_t dX_t^{\tau_n} - \mathcal{E}(M)_t d\langle X^{\tau_n}, M\rangle_t \\
&\quad + d\langle X^{\tau_n}, \mathcal{E}(M)\rangle_t \\
&= (X_t^{\tau_n} - \langle X^{\tau_n}, M\rangle_t)\mathcal{E}(M)_t dM_t + \mathcal{E}(M)_t dX_t^{\tau_n} - \mathcal{E}(M)_t d\langle X^{\tau_n}, M\rangle_t \\
&\quad + \mathcal{E}(M)_t d\langle X^{\tau_n}, M\rangle_t \\
&= (X_t^{\tau_n} - \langle X^{\tau_n}, M\rangle_t)\mathcal{E}(M)_t dM_t + \mathcal{E}(M)_t dX_t^{\tau_n}.
\end{aligned}$$

$X^{\tau_n}, M \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t, P)$ ゆえ $\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールであることが示された.
(2) $\Delta_n = \{t_i^n\}_{i=0}^{N_n}$ を $[0,t]$ の分割とし, $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n| = 0$ とする.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N_n}\hat{X}^1_{t_{i-1}^n,t_i^n}\hat{X}^2_{t_{i-1}^n,t_i^n} - \sum_{i=1}^{N_n}X^1_{t_{i-1}^n,t_i^n}X^2_{t_{i-1}^n,t_i^n}\right) = 0 \quad \forall\omega \\
&\sum_{i=1}^{N_n}\hat{X}^1_{t_{i-1}^n,t_i^n}\hat{X}^2_{t_{i-1}^n,t_i^n} \to \langle\hat{X}^1, \hat{X}^2\rangle_t \quad \text{in prob.} \\
&\sum_{i=1}^{N_n}X^1_{t_{i-1}^n,t_i^n}X^2_{t_{i-1}^n,t_i^n} \to \langle X^1, X^2\rangle_t \quad \text{in prob.}
\end{aligned}$$

より従う. □

系 7.9. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ を filtered probability space とする. $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ $(B_0 = 0)$ を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. $(\gamma_t)_{0\le t\le T}$ を $\mathbb{R}^d$ 値 $\mathcal{F}_t$ 発展的可測過程で有界 $\sup_{0\le t\le T}|\gamma(t,\omega)| < \infty$ とする.

$$\begin{aligned}
M_t &:= \int_0^t (\gamma(s,\omega), dB_s(\omega)) \\
dQ &:= \mathcal{E}(M)_T dP \quad \text{on } \mathcal{F}_T
\end{aligned}$$

と定める. このとき, $\hat{B}_t = B_t - \int_0^t \gamma(s,\omega)ds$ $(0 \le t \le T)$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$ 上の $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である.

Proof. 定理 7.6 より, 各 $1 \le i \le d$ に対し

$$\hat{B}_t^i = B_t^i - \langle B^i, M\rangle_t = B_t^i - \int_0^t \gamma^i(s,\omega)ds \in \mathcal{M}^{c,loc}(Q,\mathcal{F}_t)$$

であり,

$$\langle \hat{B}^i, \hat{B}^j\rangle_t = \langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{i,j}t.$$

したがって, Lévy の定理より $\hat{B}_t$ は Q の下で $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である. □

定理 7.10. (X,B) が $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$ 上の初期分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の

$$(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}: \quad dX_t = \sigma(t,X_t)dB_t + b(t,X_t)dt$$

の解とする.

$$\gamma = (\gamma(t,x)) : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$$

を有界ボレル可測写像とする. $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上で

$$dQ = \exp\left(\int_0^T (\gamma(s,X_s), dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma(s,X_s)|^2 ds\right) dP$$

$$\hat{B}_t(\omega) = B_t(\omega) - \int_0^t \gamma(s,X_s(\omega))ds$$

と定める.

(1) $(X_t,\hat{B}_t)$ は $(\Omega,\mathcal{F}_T,Q,(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T})$ 上の ν を初期分布とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b+\sigma\gamma}$ の解である.

(2) $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解が法則の意味で一意ならば $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b+\sigma\gamma}$ の解も法則の意味で一意である.

Proof. (1) まず

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_0} = \mathcal{E}(M)_0 = 1$$

ゆえ, X_0 の分布は P,Q どちらでも同じ, すなわち ν である. また, X_t の満たす方程式は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma(t,X_t)dB_t + b(t,X_t)dt \\ &= \sigma(t,X_t)d\hat{B}_t + b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)\gamma(t,X_t)dt. \end{aligned}$$

$\hat{B}_t$ は Q の下で $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動なので, $(X,\hat{B})$ が解となっていることがわかる.

(2) $(\tilde{X},\tilde{B})$ が $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b+\sigma\gamma}$ の初期分布を ν とする $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$ 上の解とする．すなわち

$$d\tilde{X}_t=\sigma(t,\tilde{X}_t)d\tilde{B}_t+b(t,\tilde{X}_t)dt+\sigma(t,\tilde{X}_t)\gamma(t,\tilde{X}_t)dt,\quad X_0=\xi(\overset{d}{=}\nu).$$

$(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上

$$dQ=\exp\left(-\int_0^T(\gamma(t,\tilde{X}_t),d\tilde{B}_t)-\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma(t,\tilde{X}_t)|^2dt\right)dP$$

という確率を考える．Q の下

$$\bar{B}_t=\tilde{B}_t+\int_0^t\gamma(s,\tilde{X}_s)ds\quad 0\le t\le T$$

は $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であり，$(\tilde{X},\bar{B})$ は $(\Omega,\mathcal{F}_T,Q,\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$ 上の初期分布を ν とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解である．この解から drift の変換により得られる解を求めてみよう．

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\int_0^T(\gamma(t,\tilde{X}_t),d\bar{B}_t)-\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma(t,\tilde{X}_t)|^2dt\right)dQ\\
&=\exp\Big(\int_0^T(\gamma(t,\tilde{X}_t),d\tilde{B}_t)+\int_0^T(\gamma(t,\tilde{X}_t),\gamma(t,\tilde{X}_t))dt\\
&\qquad-\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma(t,\tilde{X}_t)|^2dt\Big)\\
&\quad\times\exp\left(-\int_0^T(\gamma(t,\tilde{X}_t),d\tilde{B}_t)-\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma(t,\tilde{X}_t)|^2dt\right)dP\\
&=dP.
\end{aligned}$$

一方，$\bar{B}$ は $\bar{B}_t-\int_0^t\gamma(s,\tilde{X}_s)ds=\tilde{B}_t$ に変換される．したがって，$(\tilde{X},\bar{B})$ on $(\Omega,\mathcal{F}_T,Q)$ から drift の変換で得られる解は最初に与えられた解 $(\tilde{X},\tilde{B})$ である．これは, 解の一意性を示している．これをもう少し正確に述べる．$\sigma^*(t,x)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ を $\sigma(t,x)$ の転置行列とする．$\sigma(t,x)\sigma^*(t,x)$ は $\mathrm{Im}\sigma(t,x)$ から $\mathrm{Im}\sigma(t,x)$ への全単射な線形写像である．

$$\eta(t,x):=(\sigma(t,x)\sigma^*(t,x))^{-1}\Big|_{\mathrm{Im}\sigma(t,x)}(\sigma(t,x)\gamma(t,x))$$

とおくと $\eta(t,x)$ はボレル可測であり，

$$\eta(t,x)=\sigma^*(t,x)^{-1}\mathrm{Proj}_{[\mathrm{Ker}\sigma(t,x)]^{\perp}}\gamma(t,x).$$

さらに，

$$\tilde{\gamma}(t,x)=\sigma^*(t,x)\eta(t,x)(=\mathrm{Proj}_{[\mathrm{Ker}\sigma(t,x)]^{\perp}}\gamma(t,x))$$

とおくと $\sup_{t,x}|\tilde{\gamma}(t,x)| \le \sup_{t,x}|\gamma(t,x)|$ であり

$$\sigma(t,x)\tilde{\gamma}(t,x) = \sigma(t,x)\gamma(t,x).$$

この $\tilde{\gamma}$ を用いると $\frac{dQ}{dP}$ は

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\int_0^T (\tilde{\gamma}(s,X_s), dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\tilde{\gamma}(s,X_s)|^2 ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^T (\eta(s,X_s), \sigma(s,X_s)dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\tilde{\gamma}(s,X_s)|^2 ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^T (\eta(s,X_s), dM_s^X) - \frac{1}{2}\int_0^T |\tilde{\gamma}(s,X_s)|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

ここで

$$M_t^X = X_t - X_0 - \int_0^t b(s,X_s)ds \left(= \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\right).$$

従って密度関数が X の汎関数で書けていることから X の法則が一意ならば $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b+\sigma\gamma}$ の解の法則も一意になることがわかる. □

系 7.11. $b:[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を有界ボレル可測写像とする. 次の SDE $(\mathrm{SDE})_{I,b}$ に法則の意味で一意な解が存在する.

$$\begin{aligned}
dX_t &= dB_t + b(t,X_t)dt \qquad 0 \le t \le T. \\
X_0 &\overset{d}{=} \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

解は次のように具体的に与えられる. $\{B_t\}_{0\le t\le T}$ を $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$ 上の 0 から出発する d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. ξ を $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数で $\xi \overset{d}{=} \nu$ とする.

$$\begin{aligned}
X_t &= \xi + B_t \\
M_t &= \int_0^t (b(s,X_s), dB_s) \\
dQ &= \mathcal{E}(M)_T dP \quad \text{on } (\Omega,\mathcal{F}_T)) \\
\hat{B}_t &= B_t - \int_0^t b(s,X_s)ds
\end{aligned}$$

とおくと $(X_t,\hat{B}_t)$ は $(\Omega,\mathcal{F}_T,Q,\{\mathcal{F}_t\})$ 上の $(\mathrm{SDE})_{I,b}$ の解である. 更に, 任意の有界ボレ

ル可測関数 $F : C([0,T] \to \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&E[F(X)] \\
&= E\left[F(\xi + B)\exp\left(\int_0^T (b(s,\xi+B_s), dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |b(s,\xi+B_s)|^2 ds\right)\right].
\end{aligned}
$$

注意 7.12. $b = b(t,w) : [0,T] \times W^d([0,T]) \to \mathbb{R}^d$ が有界ボレル可測で, $b(t,w)$ は $\sigma(\{w_s\}; s \le t)$ 可測とする.

$$
\begin{aligned}
dX_t &= dB_t + b(t,X)dt \qquad 0 \le t \le T \\
X_0 &\overset{d}{=} \nu
\end{aligned}
$$

のような経路依存の方程式についても同様に解が構成できる. ($\sigma(t,w)$ のように拡散係数が経路依存でも同様だが、簡単のため $\sigma = I$ とする). 系 7.11 の仮定を満たす経路依存ではないマルコフ型の方程式では, 1 次元の場合 Zvonkin(1974), 多次元の場合, Veretennikov(1979, 1981, 1982) により強い一意解の存在が証明されている.

しかし, 一般の経路依存の方程式の場合, 強い解が存在しない例が Boris Tsirelson(1975) により得られている.

注意 7.13. $b(t,x) = \varphi_t$ $X_0 = 0$ の場合,

$$
X_t = B_t + \int_0^t \varphi_s ds.
$$

よって $h_t = \int_0^t \varphi_s ds$ とおくと

$$
E\left[F(B+h)\right] = E\left[F(B)\exp\left(\int_0^T (\dot{h}_s, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{h}_s|^2 ds\right)\right]. \tag{7.3}
$$

この式は, $\varphi \in L^2([0,T] \to \mathbb{R}^d)$, すなわち,

$$
\begin{aligned}
&h \in H^1([0,T] \to \mathbb{R}^d; h_0 = 0) \\
&\quad \Big(= \Big\{ \text{絶対連続で導関数が } L^2 \text{ に属す } [0,T] \text{ 上の関数で } h_0 = 0 \text{ となる} \\
&\qquad\qquad \text{関数全体} \Big\}\Big)
\end{aligned}
$$

の元に対して成立する. なぜなら, $\varphi \in L^2$ なら確率積分 (この場合は Wiener integral ということが多い) $\int_0^T (\varphi_s, dB_s)$ が well-defined であるため、極限論法で示される. これは, $W_0^d([0,T])$ 上の Wiener measure μ の平行移動 $T_h = B + h$ に関する像測度が μ に対

して同値でその密度関数が指数マルチンゲールで与えられることを意味している．実は, $h \in W_0^d([0,T]) \setminus H^1([0,T] \to \mathbb{R}^d; h_0 = 0)$ ならば $T_h B$ の測度は μ に関して特異ということもわかる．これも込にして, Cammeron-Martin の定理という．

注意 7.14 (Wiener 測度の線形変換について)**.**

$$
\begin{aligned}
W &= W_0^d([0,T]), \\
H &= H_0^1([0,T] \to \mathbb{R}^d; h(0) = 0)
\end{aligned}
$$

と書く．H は

$$
(h,k)_H = \int_0^T (\dot{h}_t, \dot{k}_t) dt
$$

を内積とする Hilbert 空間である．(7.3) は $\mathbb{R}^N$ with $\mu(dx) = (2\pi)^{-N/2} \exp(-\frac{|x|^2}{2}) dx$ という空間上の変数変換公式

$$
\int_{\mathbb{R}^N} F(x+v) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x) \exp\left((v,x) - \frac{1}{2}|v|^2 \right) d\mu(x) \tag{7.4}
$$

の無限次元版である．ここで, $v \in \mathbb{R}^N$, $(v,x), |v|^2$ はユークリッド内積である．

$A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ を対称行列かつ全単射な線形写像とする．

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(Ax) d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(Ax) \frac{\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right))}{\sqrt{2\pi}^N} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} F(x) |(\det A)^{-1}| \frac{\exp\left(-\frac{|A^{-1}x|^2}{2}\right))}{(\sqrt{2\pi})^N} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} F(x) |(\det A)^{-1}| \exp\left\{ \frac{((I - A^{-2})x, x)}{2} \right\} d\mu(x). \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

W 上でも成立するようにこの式を書き直す．$S = I - A^{-2}$ とおくと A^{-2} のスペクトルの下限は正なので, S のスペクトルの上限は 1 未満. $|(\det A)^{-1}| = \det(I-S)^{1/2}$ となる．

$$
\begin{aligned}
&|(\det A)^{-1}| \exp\left\{ \frac{((I - A^{-2})x, x)}{2} \right\} \\
&= |\det A^{-1}| \exp\left\{ \frac{((I - A^{-2})x, x)}{2} \right\} \\
&= \det(I-S)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \mathrm{tr} S \right) \exp\left\{ \frac{1}{2}(Sx, x) - \frac{1}{2} \mathrm{tr} S \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \{\det(I-S)\exp(\mathrm{tr}S)\}^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}(Sx,x)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}S\right\}. \tag{7.6}$$

と書き直せる．

$$:(Sx,x) := (Sx,x) - \mathrm{tr}S$$

と書くことにする．$A = I+T$ と書けているとする．(7.6) を用いると (7.5) は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F((I+T)x)\,d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(x)\{\det(I-S)\exp(\mathrm{tr}S)\}^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}:(Sx,x):\right)d\mu(x).\end{aligned} \tag{7.7}$$

この式は, W 上に拡張可能である．ただし,

$$A = I+T,\quad T\in HS(H)$$

のように制限がつく．ここで $HS(H)$ は H 上の対称 Hilbert-Schmidt 作用素全体の集合を表す．これは T が対称な有界線形作用素で固有値 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$ を満たすことを意味する．A は可逆なので, $\lambda_n\neq -1$ である．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を対応する固有関数系 (すなわち, $Te_n=\lambda_n e_n$, 必然的に c.o.n.s of H になる) とする．Ito-Nisio の定理により

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (e_n'(t), dB_t)\,e_n(t)$$

と展開できる．収束は $C([0,1])$ の一様収束の位相に関してである．これを用いると次の右辺の H に値を取る無限級数は a.s. に収束する (独立確率変数の和の話) ので, 右辺で左辺を定義する．

$$(TB)_t = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\int_0^1 (e_n'(t), dB_t)\,e_n(t).$$

これで, $B+TB$ に意味がつく．$(TB,B)_H$ は一般には意味が付かないが $(TB,B)_H-\mathrm{tr}T$ にあたる

$$:(TB,B) := \lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}\lambda_n\left\{\left(\int_0^1 (e_n'(t), dB_t)\right)^2-1\right\}$$

は収束する．これも独立確率変数の和の性質から従う．H 上の作用素の場合, $\mathrm{tr}S$ はトレースクラスの作用素にしか意味がつかないが, $\det(I-S)\exp(\mathrm{tr}S)$ は Hilbert-Schmidt class の作用素にまで連続的に拡張できる．実際, T が Hilbert-Schmidt operator なら $S = I - A^{-2}$ も Hilbert-Schmidt operator になる．それは,

$$\begin{aligned} S &= I - (I+T)^{-2} \\ &= \left\{(I+T)^2 - I\right\}(I+T)^{-2} \\ &= (2T + T^2)(I+T)^{-2}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

から従う．さて, S の固有値を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ とすると

$$\det(I-S)\exp(\mathrm{tr}S) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n}$$

として $HS(H)$ の元 S にまで定義可能である． この行列式は Carleman-Fredholm determinant と呼ばれるものであり, $\det{}_2(I-S)$ と書かれる．これらを用い, 次の結果が予想でき実際に証明できる．

$$\begin{aligned} &\int_W F\left((I+T)B\right)d\mu(B) \\ &= \int_W F(B)\left(\det{}_2(I-S)\right)^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2} : (SB, B) :\right)d\mu(B). \end{aligned} \tag{7.9}$$

すなわち $(I+T)_*\mu$ は μ と同値な測度でその密度函数が

$$\left(\det{}_2(I-S)\right)^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2} : (SB, B) :\right)$$

で与えられることを意味する．$\varepsilon > 0$ が存在して, $\exp\left(\frac{1}{2} : (SB,B) :\right) \in L^{1+\varepsilon}(\mu)$ である．これは, $\sup\sigma(S) < 1$ から従う．この評価は, A が可逆であることから従う．

注意 7.15 (系 7.11 と非線形変換)**.** $b(t,x)$ が線形増大条件とリプシッツ条件 (定理 5.3 の条件) を満たすとする．$\Psi : W_0^d([0,T]) \to W_0^d([0,T])$ を

$$\Psi(w)_t = w_t - \int_0^t b(s, w_s)ds$$

と定める．Ψ は

$$\|\Psi(w) - \Psi(\eta)\|_\infty \le (1+KT)\|w-\eta\|_\infty.$$

を満たす全単射な連続写像である．

$$X_t = B_t + \int_0^t b(s, X_s)ds \qquad 0 \le t \le T$$

の強い解は $X_t = \Psi^{-1}(B)_t$ で与えられる．したがって, 系 7.11 の結果より 0 スタートの d 次元ブラウン運動 B_t に対して

$$\begin{aligned}
&E[F(\Psi^{-1}(B))] \\
&= E\left[F(B)\exp\left(\int_0^T (b(s,B_s),dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |b(s,B_s)|^2 ds\right)\right]. \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

F を $F \circ \Psi$ とおくと

$$\begin{aligned}
E[F(B)] = E\Bigg[&F\left(B - \int_0^{\cdot} b(s,B_s)ds\right) \\
&\times \exp\left(\int_0^T (b(s,B_s),dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |b(s,B_s)|^2 ds\right)\Bigg] \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

の成立がわかる．この式自体は, 次のような形式的な計算から理解できる (また, 有限次元近似で考えれば正当化できる).

$$\begin{aligned}
&E[F(B)] \\
&= \int_{W_0^d([0,T])} F(w)d\mu(w) \\
&= \int_{W_0^d([0,T])} F(w) Z_T^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{w}(t)|^2 dt\right) dw \\
&= \int_{W_0^d([0,T])} F(\Psi(w)) Z_T^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T |\Psi(w)'(t)|^2 dt\right) |\det D\Psi(w)| dw.
\end{aligned}$$

2 番目の等式は, Wiener 測度の形式的な経路積分表示であり, Z_T は正規化定数, dw は $W_0^d([0,T])$ (より正確には H) 上の無限次元ルベーグ測度である．3 番目の等式は, 形式的に $W_0^d([0,T])$ 上で変数変換の公式を適用して得ている．

$$(D\Psi)(w)[h] = h - \int_0^{\cdot} (\partial_x b)(s,w_s)[h_s]ds$$

であり, 有界線形作用素 $h \mapsto \int_0^{\cdot} (\partial_x b)(s,w_s)[h_s]ds$ は Volterra 型積分作用素であり, このことから $\det D\Psi(w) = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \left|\Psi(w)'(t)\right|^2 dt &= \frac{1}{2}\int_0^T (\dot{w}_t - b(t,w_t), \dot{w}_t - b(t,w_t))\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{w}_t|^2 dt - \int_0^T (b(t,w_t), dw_t) + \int_0^T |b(t,w_t)|^2 dt
\end{aligned}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&E[F] \\
&= \int_{W_0^d([0,T])} F(\Psi(w)) \\
&\qquad \times \exp\left(\int_0^T (b(s,w_s), dw_s) - \frac{1}{2}\int_0^T |b(s,w_s)|^2 ds\right) d\mu(w).
\end{aligned}
$$

8 マルコフ性と Feynman-Kac の公式

8.1 強い解 revisited とマルコフ性

この subsection では, σ, b は t に依存せずかつリプシッツ条件, すなわち, $K > 0$ が存在して,

$$
|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x-y|, \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n
$$

を満たす場合を考える. このとき, 線形増大条件は自動的に成り立つので強い解が存在する. ここでは, 定理 5.10 で与えた強い解 $X(t,x,w)$ $(w \in W_0^d)$ を考える. この節の目標は, ブラウン運動の (強) マルコフ性と $X(t,x,w)$ の性質を用いて, SDE の解の (強) マルコフ性を示すことである.

定理 8.1. τ を $\mathcal{F}_t$ 停止時間で $P(\tau < \infty) = 1$ とする. $B^\tau(\omega) = B_{t+\tau(\omega)}(\omega) - B_{\tau(\omega)}(\omega)$ とおく. (B_t^τ は 0 出発の $\mathcal{F}_t^\tau (= \mathcal{F}_{\tau+t})$ ブラウン運動である.) 任意の x に対して, 以下が成立する.

$$
P\Big(X(t+\tau, x, B) = X(t, X(\tau, x, B), B^\tau) \quad \forall t \geq 0\Big) = 1.
$$

Proof. $Z(t,\omega) = X(t+\tau(\omega), x, B(\omega))$ とおく. $Z(t)$ は $\mathcal{F}_t^\tau$ 可測であり, $Z(0) = X(\tau, x, B)$ である.

$$
\begin{aligned}
Z(t,\omega) &= Z(0,\omega) + \int_\tau^{t+\tau} \sigma(X(u,x,B(\omega)))\, dB_u(\omega) \\
&\quad + \int_\tau^{t+\tau} b(X(u,x,B(\omega)))\, du \\
&= Z(0,\omega) + \int_0^t \sigma(X(u+\tau,x,B(\omega)))\, dB_u^\tau(\omega) \\
&\quad + \int_0^t b(X(u+\tau,x,B(\omega)))\, du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= X(\tau, x, B(\omega)) + \int_0^t \sigma\left(Z(u,\omega)\right) dB_u^\tau \\
&\quad + \int_0^t b(Z(u,\omega))du.
\end{aligned}
$$

従って, $Z(t)$ は $\mathcal{F}_t^\tau$ ブラウン運動 B^τ で定まる初期値を $X(\tau, x, B)$ とする確率微分方程式の解であるので, 解の道ごとの一意性から

$$
P\left(Z(t,\omega) = X(t, X(\tau, x, B), B^\tau) \quad t \geq 0\right) = 1.
$$

□

系 8.2. f を $\mathbb{R}^n$ 上の有界ボレル可測関数とする.

$$
(P_t f)(x) = E\left[f(X(t, x, B))\right]
$$

と定める.

(1) $P_t f$ は有界ボレル可測関数である.
(2) (半群性) $(P_{t+s} f)(x) = P_s\left(P_t f\right)(x) \quad \forall t, \forall s \geq 0, \forall x$.
(3) $0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq (P_t f)(x) \leq 1$.
(4) (強マルコフ性) τ を $\mathcal{F}_t$ 停止時間で $P(\tau < \infty) = 1$ とする.

$$
E[f(X(t+\tau, x, B)) | \mathcal{F}_\tau] = (P_t f)(X(\tau, x, B)).
$$

Proof. (1) Monotone class theorem から従う.

(2)

$$
\begin{aligned}
(P_{t+s} f)(x) &= E\left[f(X(t+s, x, B))\right] \\
&= E\Big[E\left[f(X(t, X(s, x, B), B^s)) | \mathcal{F}_s\right]\Big] \\
&= E\Big[(P_t f)(X(s, x, B))\Big] \\
&= P_s\left(P_t f\right)(x).
\end{aligned}
$$

(3) 自明.

(4) $X(\tau, x, B)$ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測であり B_t^τ $(t \geq 0)$ と $\mathcal{F}_0^\tau = \mathcal{F}_\tau$ は独立なので

$$
\begin{aligned}
E[f(X(t+\tau, x, B)) | \mathcal{F}_\tau] &= E\Big[f(X(t, X(\tau, x, B), B^\tau)) \Big| \mathcal{F}_\tau\Big] \\
&= (P_t f)(X(\tau, x, B)).
\end{aligned}
$$

(1) では, $\tau = s$ の場合で同様な計算をしている. □

$$p(t,x,dy) = P\left(X(t,x,B) \in dy\right)$$

と確率 (推移確率 (transition probability) と呼ばれる) を定める.

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,dy) f(y)$$

と書けることになる. (2) の半群性は,

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(s,x,dy)p(t,y,dz) = p(t+s,x,dz) \qquad \text{(Chapman-Kolmogorov の関係式)}$$

と同値である.

$0 = t_1 < \ldots < t_m < \infty$ とする.

$$(X(t_1,x,B)),\ldots,X(t_m,x,B))$$

の分布は, $p(t,x,dy)$ で書ける.

命題 8.3. (1) $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ とする. 以下が成立する. ただし, $t_0 = 0$, $x_0 = x$ とする.

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1,x,B) \in A_1,\ldots,X(t_m,x,B) \in A_m\right) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} 1_{A_1}(x_1)\cdots 1_{A_m}(x_m) \prod_{i=1}^m p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, dx_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1,x) \in A_1,\ldots,X(t_m,x) \in A_m\right) \\
&= P_{t_1}\left(1_{A_1}P_{t_2-t_1}1_{A_2}\left(\cdots 1_{A_{m-2}}P_{t_{m-1}-t_{m-2}}\left(1_{A_{m-1}}P_{t_m-t_{m-1}}1_{A_m}\right)\right)\right)(x)
\end{aligned}$$

のようにも書ける.

(2) (強マルコフ性) τ を $\mathcal{F}_t$ 停止時間とする.

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1+\tau,x,B) \in A_1,\ldots,X(t_m+\tau,x,B) \in A_m \mid \mathcal{F}_\tau\right) \\
&= P\left(X(t_1+\tau,x,B) \in A_1,\ldots,X(t_m+\tau,x,B) \in A_m \mid X(\tau,x,B)\right) \quad (*)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1+\tau,x,B) \in A_1,\ldots,X(t_m+\tau,x,B) \in A_m \mid X(\tau,x,B) = y\right) \\
&= P\left(X(t_1,y,B) \in A_1,\ldots,X(t_m,y,B) \in A_m\right), \quad (\star),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1+\tau,x,B) \in A_1,\ldots,X(t_m+\tau,x,B) \in A_m\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(X(t_1,y,B) \in A_1,\ldots,X(t_m,y,B) \in A_m\right) P(X(\tau,x,B) \in dy) \quad (\diamond).
\end{aligned}$$

Proof. (1)

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(t_1,x,B)\in A_1,\ldots,X(t_m,x,B)\in A_m\right)\\
&=E\left[1_{A_1}(X(t_1,x,B))\cdots 1_{A_m}(X(t_m,x,B))\right]\\
&=E\left[E\left[1_{A_1}(X(t_1,x,B))\cdots 1_{A_m}(X(t_m,x,B))\mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}\right]\right]\\
&=E\left[1_{A_1}(X(t_1,x,B))\cdots 1_{A_{m-1}}(X(t_{m-1},x,B)(P_{t_m-t_{m-1}}1_{A_m})(X(t_{m-1},x,B))\right]\\
&=E[1_{A_1}(X(t_1,x,B))\cdots 1_{A_{m-2}}(X(t_{m-2},x,B))\\
&\qquad P_{t_{m-1}-t_{m-2}}\left(1_{A_{m-1}}(P_{t_m-t_{m-1}}1_{A_m})\right)(X(t_{m-2},x,B)]\\
&=....\\
&=P_{t_1}\left(1_{A_1}P_{t_2-t_1}1_{A_2}\left(\cdots 1_{A_{m-1}}P_{t_m-t_{m-1}}1_{A_m}\right)\right)(x).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(t_1+\tau,x,B)\in A_1,\ldots,X(t_m+\tau,x,B)\in A_m\mid \mathcal{F}_\tau\right)\\
&=P\left(X(t_1,X(\tau,x,B),B^\tau)\in A_1,\ldots,X(t_m,X(\tau,x,B),B^\tau)\in A_m\mid \mathcal{F}_\tau\right)\\
&=E\left[(1_{A_1}\left(X(t_1,X(\tau,x,B),B^\tau)\right)\cdots 1_{A_m}\left(X(t_m,X(\tau,x,B),B^\tau)\right)\mid \mathcal{F}_\tau\right]\\
&=E\left[1_{A_1}\left(X(t_1,y,B)\right)\cdots 1_{A_m}\left(X(t_m,y,B)\right)\right]|_{y=X(\tau,x,B)}\\
&=E\left[(1_{A_1}\left(X(t_1,X(\tau,x,B),B^\tau)\right)\cdots 1_{A_m}\left(X(t_m,X(\tau,x,B),B^\tau)\right)\mid X(\tau,x,B)\right].
\end{aligned}
$$

3 番目の等号では, B_t^τ が $\mathcal{F}_\tau(=\mathcal{F}_0^\tau)$ と独立であることと $X(\tau,x,B)$ が $\mathcal{F}_\tau$ 可測であることを用いた. またこの結果は, $(\star)$ を意味する. また, $(\star)$ は $(\diamond)$ を意味する. □

注意 8.4. 上記の命題により $X(t,x,w)$ が

$$L=\frac{1}{2}\sum_{1\le k,l\le n}a^{k,l}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x_l}+\sum_{i=1}^n b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

を生成作用素とする拡散過程 (連続な見本路を持つ強マルコフ過程) であることがわかる。ここでの論法では、確率微分方程式の強い解を用いて、ブラウン運動の強マルコフ性に帰着させることで示したことになる。

8.2 $\sigma,b\in C_b^\infty$ の場合

$$
\begin{aligned}
\sigma(=\sigma(x))&\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n\to M^{n\times d})\\
b(=b(x))&\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

の場合の確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^n.$$

を考える．C_b^∞ は C^∞ 級であり, 関数自身およびすべての導関数が有界な関数全体を表す．ここでは, ブラウン運動は Wiener 空間上で canonical に実現されているものを考える．すなわち,

$$\begin{aligned}\Omega &= W_0^d = C([0,\infty), \mathbb{R}^d)\\ P &= \text{Wiener measure on } \Omega\\ B_t(w) &= w_t \qquad w \in \Omega\\ \mathcal{F}_t &= \sigma\left(\{w_s\}_{s\le t}\right) \vee \mathcal{N}.\end{aligned}$$

$\mathcal{N}$ は W_0^d 上の null set 全体を表す．$\mathcal{F}_t$ は右連続な filtration になる．初期値を $x \in \mathbb{R}^n$ とする解を $X(t,x,w)$ と書く．すなわち, $X(t,x,w)$ は次の確率微分方程式を満たす一意的な強い解である．

$$X(t,x,w) = x + \int_0^t \sigma\left(X(s,x,w)\right) dw_s + \int_0^t b\left(X(s,x,w)\right) ds.$$

$t \mapsto X(t,\cdot,w)$ は C^∞ 微分同相に値を取る連続確率過程とみることができる．そのため, $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 上に以下のような semi-norm の族を導入する．$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ とする．Multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$ に対し, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ とおく．α, $R > 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$ に対し, セミノルムを

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha,R} &= \max_{|x|\le R} |\partial_x^\alpha f(x)|\\ \|f\|_{m,R} &= \sum_{|\alpha|\le m} \|f\|_{\alpha,R}\end{aligned}$$

と定め, $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 上の距離を

$$d(f,g) = \sum_{m,m} 2^{-m}(\|f-g\|_{m,m} \wedge 1)$$

と定める．$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ はこの距離で完備距離空間である．

定理 8.5. t, x を固定すると $X(t,x,w)$ は P-a.s. な w に対して定義されるが, そのバージョンを適当に取ると次が成立するようにできる．

(1) 任意の w に対して

$$(t,x) \mapsto X(t,x,w) \in \mathbb{R}^n$$

は連続かつ任意の x に対して $X(t,x,w)$ は $\mathcal{G}_t$-可測.

(2) 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times W_0^d & \longrightarrow & W^n \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (x,w) & \longmapsto & X(\cdot,x,w) \end{array}$$

はボレル可測.

(3) 任意の t,w に対し, $x \mapsto X(t,x,w)$ は C^∞ 微分同相である. かつ任意の w に対し,

$$t(\in [0,\infty)) \mapsto X(t,\cdot,w), X^{-1}(t,\cdot,w)$$

は $(C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),d)$ 値連続写像である.

(4) 任意の $T>0$ $p \geq 1$ α に対し,

$$\sup_{0\leq t\leq T,x} E\left[|\partial_x^\alpha X(t,x,w)|^p + |\partial_x^\alpha X^{-1}(t,x,w)|^p\right] < \infty.$$

任意の $T>0$, $p\geq 1$, $m\in\mathbb{Z}^+$, $R>0$ に対し, 正数 $C(T,p,m,R)$ が存在して

$$E\left[\max_{0\leq t\leq T}\left(\|X(t,\cdot,w)\|_{m,R}^p + \|X^{-1}(t,\cdot,w)\|_{m,R}^p\right)\right] \leq C(T,p,\alpha,R).$$

系 8.6. $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$u_f(t,x) = E[f(X(t,x,B))]$$

とおく. 任意の t に対し, $u_f(t,\cdot) \in C^\infty$ でありかつ任意の α に対し $\partial_x^\alpha u_f(t,x)$ は $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数である.

8.3 Feynman-Kac の公式

σ, b は Section 8.2 の仮定を満たすとする. $X(t,x,w)$ を Section 8.2 で与えた強い解とする. $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$ を通常の条件を満たす filtered probability space とし $B_t(\omega)$ を $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動, ξ を $\mathbb{R}^n$ 値 $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数とする. $X(t,\xi(\omega),B(\omega))$ は初期値を ξ とする $(\mathrm{SDE})_{\sigma,b}$ の解となることを思い出そう.

定理 8.7. $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする.

(1) $u(t,x) = E\left[f(X(t,x,B))\right]$ とおく. $u(t,x)$ は次の偏微分方程式の解である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= (Lu)(t,x) \quad t>0, x\in\mathbb{R}^n (*) \\ \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) &= f(x) \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

ここで

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_k b^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k},\quad a^{i,j}(x)=\sum_k\sigma_k^i(x)\sigma_k^j(x).$$

(2) $V\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$v(t,x)=E\left[\exp\left(-\int_0^t V(X(s,x,B))ds\right)f(X(t,x,B))\right]$$

とおく. v は次の偏微分方程式の解になる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)&=Lv(t,x)-V(x)v(t,x),\quad(\star)\\ \lim_{t\downarrow 0}v(t,x)&=f(x).\end{aligned}$$

Proof. (I) $(*)$, $(\star)$ に解 $u,v\in C_b^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ が存在することを前提にした証明

$u\in C_b^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ とはここでは, 以下を意味する.

(i) u は, (t,x) の有界連続関数,

(ii) $\forall x$, $t\mapsto u(t,x)$ は t に関して C^1 級. $\partial_t u(t,x)$ は (t,x) の有界連続関数,

(iii) $\forall t$, $x\mapsto u(t,x)$ は C^2 級かつ $\nabla_x u(t,x),\nabla_x^2 u(t,x)$ は (t,x) の有界連続関数.

(1) $M_t=u(T-t,X_t)$ $(0\le t\le T)$ とおく. M_t はマルチンゲールであることを示す.

$$\begin{aligned}dM_t&=-\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,X_t)dt+\sum_{i,j}(\partial_i u)(T-t,X_t)\sigma_j^i(X_t)dB_t^j\\&\quad+\sum_k(\partial_k u)(T-t,X_t)b^k(X_t)dt\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{k,l}(\partial_i\partial_j u)(T-t,X_t)\sigma_k^i(X_t)\sigma_l^j(X_t)d\langle B^k,B^l\rangle_t\\&=-\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,X_t)dt+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{i,j}(X_t)(\partial_i\partial_j u)(T-t,X_t)dt\\&\quad+\sum_k(\partial_k u)(T-t,X_t)b^k(X_t)dt+\sum_{i,j}(\partial_i u)(T-t,X_t)\sigma_j^i(X_t)dB_t^j\\&=\sum_{i,j}(\partial_i u)(T-t,X_t)\sigma_j^i(X_t)dB_t^j.\end{aligned}$$

これは, M_t がマルチンゲールであることを示している. ゆえに $E[M_T]=E[M_0]=M_0=u(T,x)$. 一方 $E[M_T]=E[u(0,X_T)]=E[f(X_T)]$. したがって $u(T,x)=E[f(X_T)]$.

(2) $M_t = v(T-t, X_t)\exp\left(-\int_0^t V(X_s)ds\right)$ とおくと M_t はマルチンゲールである．これは, (1) と同様な計算で示すことができる．

$$
\begin{aligned}
E[M_T] &= E[M_0] = v(T,x) \\
E[M_T] &= E\left[v(0, X_T)\exp(-\int_0^T V(X_s)ds)\right] \\
&= E\left[f(X_T)\exp(-\int_0^T V(X_s)ds)\right]
\end{aligned}
$$

となるので示された．

(II) $X(t,x,w)$ の x に関する微分可能性を用いた証明 (Self-contained な証明)

(1) $\tilde{u}(t,x) = E[f(X(t,x,B))]$ とおく．

1. $\tilde{u} \in C_b^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$
2. $\tilde{u}$ は $(*)$ を満たす

を示す．

$\tilde{u}(t,x)$ は, 有界連続, t に関して連続, $\tilde{u}(t,x)$ が x に関し, C^∞ 級であることは, 定理 8.5 (3), (4) から従う．t に関する微分可能性と $(*)$ を満たすことを示す．P_t の半群性より

$$\tilde{u}(t+s,x) = E\left[\tilde{u}(t, X(s,x,B))\right].$$

Itô の公式より

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(t, X(s,x,B)) = \tilde{u}(t,x) &+ \int_0^s ((\nabla\tilde{u})(t, X(r,x,B)), \sigma(X(r,x,B))dB_r) \\
&+ \int_0^s (L\tilde{u})(t, X(r,x,B))dr.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$\tilde{u}(t+s,x) = \tilde{u}(t,x) + \int_0^s E\left[(L\tilde{u})(t, X(r,x,B))\right]dr.$$

系 8.6 より

$$\lim_{r\to 0} E\left[(L\tilde{u})(t, X(r,x,B))\right] = (L\tilde{u})(t,x).$$

従って

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(t,x) = (L\tilde{u})(t,x).$$

(2) $\tilde{v}(t,x)=E\left[\exp\left(-\int_0^t V(X(s,x,B))ds\right)f\left(X(t,x,B)\right)\right]$ とおく．以下を示す.

1. $\tilde{v}\in C_b^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$
2. $\tilde{v}$ は $(\star)$ を満たす.

1 は, 定理 8.5 (3), (4) から従う．2 を示すため, まず, 半群性にあたる次を示す.

$$\tilde{v}(t+s,x)=E\left[\exp\left(-\int_0^s V(X(u,x,B))du\right)\tilde{v}(t,X(s,x,B))\right]. \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}&=E\left[\exp\left(-\int_0^{t+s}V(X(u,x,B))du\right)f(X(t+s,x,B))\right]\\&=E\Bigg[\exp\left(-\int_0^s V(X(u,x,B))du\right)\\&\qquad\exp\left(-\int_0^t V(X(u+s,x,B))du\right)f\left(X(t+s,x,B)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{8.2}$$

$\exp\left(-\int_0^s V(X(u,x,B))du\right)$ は $\mathcal{F}_s$ 可測. また $X(s,x,B)$ は $\mathcal{F}_s$ 可測, B^s は $\mathcal{F}_s$ と独立なので

$$\begin{aligned}&E\left[\exp\left(-\int_0^t V(X(u+s,x,B))du\right)f\left(X(t+s,x,B)\right)\Big|\mathcal{F}_s\right]\\&=E\left[\exp\left(-\int_0^t V(X(u,X(s,x,B),B^s))du\right)f\left(X(t,X(s,x,B),B^s)\right)\Big|\mathcal{F}_s\right]\\&=\tilde{v}\left(t,X(s,x,B)\right).\end{aligned}$$

したがって, (8.2) において条件付き平均を取れば, (8.1) を得る.

$$Y_s=\exp\left(-\int_0^s V(X(s,x,B))ds\right)\tilde{v}(t,X(s,x,B))$$

とおく.

$$\begin{aligned}dY_s=&-\exp\left(-\int_0^s V(X(s,x,B))ds\right)V(X(s,x,B))\tilde{v}(t,X(s,x,B))ds\\&+\exp\left(-\int_0^s V\left(X(u,x,B)\right)du\right)\left((\nabla\tilde{v})(t,X(s,x,B)),\sigma\left(X(s,x,B)\right)dB_s\right)\\&+\exp\left(-\int_0^s V\left(X(u,x,B)\right)du\right)(L\tilde{v})(t,X(s,x,B))ds\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
Y_s &= \tilde{v}(t,x) + \text{マルチンゲール} \\
&\quad + \int_0^s \exp\left(-\int_0^u V\left(X(r,x,B)\right)dr\right) \\
&\qquad \Big\{(L\tilde{v})(t,X(u,x,B)) - V(X(u,x,B))\tilde{v}(t,X(u,x,B))\Big\}du.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{v}(t+s,x) - \tilde{v}(t,x) \\
&\quad = \int_0^s E\Bigg[\exp\left(-\int_0^u V\left(X(r,x,B)\right)dr\right) \\
&\qquad \Big\{(L\tilde{v})(t,X(u,x,B)) - V(X(u,x,B))\tilde{v}(t,X(u,x,B))\Big\}\Bigg]du.
\end{aligned}
$$

両辺を s で割って, $s \to 0$ とすればよい. □

CMMG の定理と Feynman-Kac の公式を合わせると以下の定理を得る.

定理 8.8. $\sigma \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, M^{n\times d})$, $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. $X(t,x,B)$ を次の確率微分方程式の解とする.

$$
dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^n.
$$

$u(t,x)$ を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) \\
&= E\left[\exp\left(\int_0^t (\gamma(X_s), dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\gamma(X_s)|^2 ds - \int_0^t c(X_s)ds\right) f\left(X_t\right)\right] \\
&\qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

$u(t,x)$ は次の偏微分方程式の初期値問題の解になる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} a^{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{k=1}^n b^k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(t,x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d \sigma_i^k(x)\gamma^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(t,x) - c(x)u(t,x).
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x)
$$

$\sigma = I_d$, $b = 0$ の場合は偏微分方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_x u(t,x) + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) - c(x)u(t,x).$$

解の表示は

$$\begin{aligned} &u(t,x) \\ &= E\Bigg[\exp\left(\int_0^t (\gamma(x+B_s), dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\gamma(x+B_s)|^2 ds - \int_0^t c(x+B_s)ds\right) \\ &\qquad\qquad f\left(x+B_t\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

9 Appendix

ここまでの話を用いて, 次のような 2 次の Wiener 汎関数の特性関数を計算してみよう.

$$S_t = \frac{1}{2}\int_0^t \left(B_s^1 dB_s^2 - B_s^2 dB_s^1\right)$$

$B_t = (B_t^1, B_t^2)$ は 0 から出発する 2 次元ブラウン運動である. S_t は Lévy の stochastic area (確率面積) と呼ばれるものである. $\vec{u}_t = \overrightarrow{B_0 B_t}$ と $\vec{v}_t = \overrightarrow{B_0 B_{t+\Delta t}}$ のなす微小三角形の符号付き面積 ($(\vec{v}_t/\|\vec{v}_t\|$ が $\vec{u}_t/\|\vec{u}_t\|$ を正の方向に回転して得られるとき正とする) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_t^1 & B_{t+\Delta t}^1 \\ B_t^2 & B_{t+\Delta t}^2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\left(B_t^1 B_{t+\Delta t}^2 - B_t^2 B_{t+\Delta t}^1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(B_t^1(B_{t+\Delta t}^2 - B_t^2) - B_t^2(B_{t+\Delta t}^1 - B_t^1)\right) \end{aligned}$$

であることから (積分を確率積分で解釈すれば) S_t は 弦 $\overrightarrow{B_0 B_s}$ $(0 \le s \le t)$ の描く '符号付き面積 ' を表す.

定理 9.1.

$$E\left[\exp\left(i\xi S_t\right)\right] = \left(\cosh\frac{\xi t}{2}\right)^{-1} \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Proof. $X_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$ とおく.

$$\langle S\rangle_t = \frac{1}{4}\int_0^t X_s ds$$

であるので 1 次元ブラウン運動 W_t が存在して

$$S_t = W\left(\int_0^t \frac{X_s}{4} ds\right).$$

一方

$$\begin{aligned} X_t &= 2\int_0^t \left(B_s^1 dB_s^1 + B_s^2 dB_s^2\right) + 2t \\ &= 2\int_0^t \sqrt{X_s} d\tilde{W}_s + 2t \qquad (*) \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \frac{B_s^1 dB_s^1 + B_s^2 dB_s^2}{\sqrt{X_s}}$$

としたが, $\tilde{W}_t$ も 1 次元ブラウン運動である. $\langle S, \tilde{W}\rangle_t = 0 \quad t \geq 0$ ゆえ Knight の定理により $(W_t, \tilde{W}_t)$ は 2 次元ブラウン運動になりしたがって, W_t と $\tilde{W}_t$ は独立である. X_t は $(*)$ の解だが, 一意的な強い解なので X_t は $\tilde{W}_t$ の汎関数として書ける. したがって, X_t は W_t と独立となる. ゆえに

$$\begin{aligned} E\left[e^{i\xi S_t}\right] &= E\left[\exp\left(i\xi W\left(\int_0^t \frac{X_s}{4} ds\right)\right)\right] \\ &= E\left[E\left[\exp\left(i\xi W\left(\int_0^t \frac{X_s}{4} ds\right)\right) \Big| \sigma(X)\right]\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\int_0^t X_s ds\right)\right] \\ &= \left(E\left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\int_0^t B_s^2 ds\right)\right]\right)^2 \\ &= \left(E\left[\exp\left(-\frac{t^2\xi^2}{8}\int_0^1 \left(\frac{B_{tu}}{\sqrt{t}}\right)^2 du\right)\right]\right)^2 \end{aligned}$$

ここで, $\{B_s\}_{s\geq 0}$ は 1 次元ブラウン運動である. $t > 0$ に対して, ブラウン運動の scale invariance $\{B_u; u \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{B_{ut}/\sqrt{t}; u \geq 0\}$ より

$$E\left[e^{i\xi S_t}\right] = \left(E\left[\exp\left(-\frac{(t\xi)^2}{8}\int_0^1 B_u^2 du\right)\right]\right)^2 \qquad (\star).$$

$\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ を $N(0,1)$ に従う i.i.d. とする. $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ を $L^2([0,1], dx)$ の正規直交基底とする. 1 次元ブラウン運動 B_t は

$$B_t = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \int_0^t e_i(s) ds$$

と表されることが知られている (Itô-Nisio の定理). 右辺の収束は, $C([0,1])$ の位相での収束である. ここで, 正規直交基底として次のものを取る.

$$e_n(t) = \sqrt{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\right) \quad n = 0, 1, \ldots.$$

これが正規直交基底になるのは例えば, $L^2([-\pi,\pi], dt)$ において

$$\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

が c.o.n.s. であるという Fourier 級数論でよく知られたことから示される. さらに言うと, $\{e_n; n = 0, 1, \ldots\}$ は Dirichlet-Neumann 境界条件

$$u'(0) = u(1) = 0$$

を満たす Δ の固有値 $\left\{\lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2; n = 0, 1, \ldots\right\}$ の固有関数系である.

$$f_n(t) = \int_0^t e_n(s)ds = \sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)$$

とおくと

$$\|f_n\|^2_{L^2([0,1])} = \frac{1}{\lambda_n}, \quad (f_n, f_m)_{L^2([0,1])} = 0 \quad (n \neq m).$$

したがって,

$$\int_0^1 B_t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n^2}{\lambda_n}.$$

よって

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(-\lambda\int_0^1 B_s^2 ds\right)\right] &= \prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_n}X_n^2\right)\right] \\
&= \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+2\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1/2} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{8\lambda}{(2n+1)^2\pi^2}\right)^{-1/2} \\
&= \left(\cosh\sqrt{2\lambda}\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\cos x = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

を用いた. これと $(\star)$ において $\lambda = \frac{(\xi t)^2}{8}$ として証明が終わる. □

参考文献

[1] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes. Second edition. North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.

[2] I. Karatzas and S.E. Shreve, Brownian motion and Stochastic calculus, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 113. Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 293. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] 楠岡成雄, 確率解析, 数理経済学叢書, 知泉書館, 2018.

[5] 谷口説男, 確率微分方程式, 共立講座数学の輝き, 共立出版, 2016.

[6] 長井英生, 確率微分方程式, 共立講座 21 世紀の数学, 1999.

[7] 松本裕行, 応用のための確率論・確率過程, サイエンス社, 2004.