可縮なファイバーを持つファイバーバンドルの切断の存在

定理 3.8 の証明で 2 度用いた次の定理の証明を与える.

定理 3.9 パラコンパクトな Hausdorff 空間 B を底空間とし, 可縮な空間 C をファイバーとする C-バンドル $\zeta = (C \to E \xrightarrow{\pi} B)$ について, 閉集合 A を含む開集合 N で定義された任意の切断 $s\colon N \to Y$ に対して

$$S|_A = s|_A$$

を満たす切断 $S\colon B \to E$ が存在する. とくに $A = N = \emptyset$ とすれば, 切断 $S\colon B \to E$ が存在する.

<u>**証明**</u> B はパラコンパクトな Hausdorff 空間なので 1 の分割 $\{v'_{\lambda'}\colon B \to [0,1]\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ を $\{{v'_{\lambda'}}^{-1}(0,1]\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ が局所有限な B の開被覆で, かつ各 ${v'_{\lambda'}}^{-1}(0,1]$ 上で ζ が自明であるように選ぶことができる. また B は正規空間 (normal space) であるから, Urysohn の補題より A 上で 1, $B - N$ 上で 0 の値をとる連続関数 $f\colon B \to [0,1]$ が存在する.

簡単のため Λ' が 0 という元を含まないとし, $\Lambda = \Lambda' \sqcup \{0\}$ とおく. ここで

$$\begin{aligned}
&V_0 = N, \qquad v_0 = f, \\
&V_{\lambda'} = {v'_{\lambda'}}^{-1}(0,1], \qquad v_{\lambda'} = (1 - v_0)v'_{\lambda'} \qquad (\lambda' \in \Lambda')
\end{aligned}$$

とおくと, $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限な開被覆であり, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $v_\lambda^{-1}(0,1] \subset V_\lambda$ が成り立つ. Λ の任意の部分集合 Γ に対し

$$v_\Gamma := \sum_{\lambda \in \Gamma} v_\lambda\colon B \longrightarrow [0,1]$$

とおく. 上記の開被覆の局所有限性より, この和は B の各点において有限和であることに注意しよう. また, 定義より

$$v_\Lambda = v_0 + \sum_{\lambda' \in \Lambda'} v_{\lambda'} = v_0 + \sum_{\lambda' \in \Lambda'} (1 - v_0)v'_{\lambda'} = 1$$

である.

いま $A \subset v_0^{-1}(1) \subset V_0 = N$ であることに注意して

$$\chi = \left\{ (\Gamma, S_\Gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \in \Gamma \subset \Lambda, \\ S_\Gamma\colon v_\Gamma^{-1}(0,1] \to E \text{ は } S_\Gamma|_{v_0^{-1}(1)} = s|_{v_0^{-1}(1)} \text{ を満たす } \zeta \text{ の局所切断} \end{array} \right\}$$

という集合を考えると, $(\{0\}, s) \in \chi$ より $\chi \neq \emptyset$ である. ここで,

$$(\Gamma, S_\Gamma) \succeq (\Gamma', S_{\Gamma'}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \Gamma \supset \Gamma' \text{ かつ「} v_\Gamma(b) = v_{\Gamma'}(b) > 0 \text{ ならば } S_\Gamma(b) = S_{\Gamma'}(b) \text{」}$$

と定めると $\succeq$ は χ の半順序となる (等しくないことを強調するときは記号 $\succ$ を用いることとする). $\Gamma \supset \Gamma'$ のとき $v_\Gamma \geq v_{\Gamma'}$ であるから, S_Γ の定義域 $v_\Gamma^{-1}(0,1]$ は $S_{\Gamma'}$ の定義域

$v_{\Gamma'}^{-1}(0,1]$ を含むことに注意しよう. いま, Zorn の補題を用いて χ に極大元が存在することを示そう.

半順序 $\succeq$ に関する χ の全順序部分集合 $\mathcal{S} = \{(\Gamma^\sigma, S_{\Gamma^\sigma})\}_{\sigma\in\Sigma}$ を任意にとる. このとき

$$\widetilde{\Gamma} := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \Gamma^\sigma$$

とし, 切断 $S_{\widetilde{\Gamma}}\colon v_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}(0,1] \to E$ を

「$b \in v_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}(0,1]$ に対して, $\mathcal{S}$ の中で全順序 $\succeq$ に関して十分に大きな $(\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ を選び, $S_{\widetilde{\Gamma}}(b) := S_{\Gamma^\rho}(b)$ とする」

という形で定めたい. これが切断を定めていることを示すには,

(i) 十分大きな $(\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ について $S_{\Gamma^\rho}(b) \in E$ は定義され, 一定である,

(ii) $S_{\widetilde{\Gamma}}$ は連続,

の 2 つを確かめる必要がある.

$b \in v_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}(0,1]$ の近傍 W をうまく選ぶと $v_\gamma^{-1}(0,1] \cap W \neq \emptyset$ となるような $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$ たちは有限個となる. それらを $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ とする. 必要なら W を小さく選び直して, 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して $W \subset v_{\gamma_i}^{-1}(0,1]$ であるとしてよい. $\gamma_i \in \Gamma^{\sigma_i}$ となる $\sigma_i \in \Sigma$ を 1 つ選び, $\{(\Gamma^{\sigma_i}, S_{\Gamma^{\sigma_i}})\}_{i=1}^r$ の最大元を $(\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ とする. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \Gamma^\rho$ なので,

$$W \subset \bigcap_{i=1}^r v_{\gamma_i}^{-1}(0,1] \subset \bigcup_{\lambda\in\Gamma^\rho} v_\lambda^{-1}(0,1] = v_{\Gamma^\rho}^{-1}(0,1]$$

であり, $S_{\Gamma^\rho}(b)$ が定まる. この $(\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ が W の**任意の**点 b' において「十分大きい」ことを確かめよう. そこで, $(\Gamma^\sigma, S_{\Gamma^\sigma}) \in \mathcal{S}$ が $(\Gamma^\sigma, S_{\Gamma^\sigma}) \succeq (\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ を満たしているとする. W の選び方より, $\Gamma^\sigma - \Gamma^\rho$ の任意の元 μ に対して $v_\mu(b') = 0$ となる. よって $v_{\Gamma^\sigma}(b') = v_{\Gamma^\rho}(b') > 0$ となるので, 半順序 $\succeq$ の定義より $S_{\Gamma^\sigma}(b') = S_{\Gamma^\rho}(b')$ となる. 以上より $S_{\widetilde{\Gamma}}$ が写像として定まり (i) が確認できた. また, $S_{\widetilde{\Gamma}}|_W := S_{\Gamma^\rho}|_W$ となることより (ii) の連続性も確かめられた.

次に, $(\widetilde{\Gamma}, S_{\widetilde{\Gamma}})$ が $\mathcal{S}$ の上界にあることを示そう. $(\Gamma^{\sigma'}, S_{\Gamma^{\sigma'}}) \in \mathcal{S}$ を任意にとる. 定義より $\widetilde{\Gamma} \supset \Gamma^{\sigma'}$ は明らかである. いま $b \in v_{\Gamma^{\sigma'}}^{-1}(0,1] \subset v_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}(0,1]$ に対して $S_{\widetilde{\Gamma}}(b) \neq S_{\Gamma^{\sigma'}}(b)$ であったとする. この b に対し $S_{\widetilde{\Gamma}}$ の構成で用いた $\rho \in \Sigma$ を用いると $S_{\widetilde{\Gamma}}(b) = S_{\Gamma^\rho}(b)$ であり, $S_{\Gamma^\rho}(b) \neq S_{\Gamma^{\sigma'}}(b)$ となる. いま, 全順序集合 $\mathcal{S}$ において $(\Gamma^{\sigma'}, S_{\Gamma^{\sigma'}}) \succeq (\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho})$ とすると, 上で見たように $S_{\Gamma^\rho}(b) = S_{\Gamma^{\sigma'}}(b)$ となってしまうため不適であり, $(\Gamma^\rho, S_{\Gamma^\rho}) \succ (\Gamma^{\sigma'}, S_{\Gamma^{\sigma'}})$ が成り立つ. よって, ある $\mu \in \Gamma^\rho - \Gamma^{\sigma'}$ に対し $v_\mu(b) \neq 0$ となる. これより

$$v_{\widetilde{\Gamma}}(b) \geq v_{\Gamma^\rho}(b) \geq v_{\Gamma^{\sigma'}}(b) + v_\mu(b) > v_{\Gamma^{\sigma'}}(b)$$

であることが従い, $(\widetilde{\Gamma}, S_{\widetilde{\Gamma}}) \succeq (\Gamma^{\sigma'}, S_{\Gamma^{\sigma'}})$ であることが示された.

以上より Zorn の補題を用いることができ, χ に極大元 (Γ, S_Γ) が存在することが示された. あとは, $\Gamma = \Lambda$ であることを示せば $v_\Lambda^{-1}(0,1] = B$ より証明が完了する.

$\Gamma \neq \Lambda$ であると仮定する. このとき $\mu \in \Lambda - \Gamma$ が存在する. $\Gamma' := \Gamma \cup \{\mu\}$ とおく. $v_{\Gamma'} = v_\Gamma + v_\mu$ となることに注意して連続関数 $\eta\colon v_{\Gamma'}^{-1}(0,1] \to [0,1]$ を

$$\eta(b) = \begin{cases} 1 & (v_\mu(b) \leq v_\Gamma(b) \neq 0) \\ \dfrac{v_\Gamma(b)}{v_\mu(b)} & (v_\Gamma(b) \leq v_\mu(b) \neq 0) \end{cases}$$

と定めると, $\eta^{-1}(0,1] = v_\Gamma^{-1}(0,1]$ となるので, S_Γ は $\eta^{-1}(0,1]$ 上で定義されている.

$v_\mu^{-1}(0,1]$ 上の切断 $S_\mu\colon v_\mu^{-1}(0,1] \to E$ を

$$S_\mu(b) = \begin{cases} \varphi_\mu^{-1}(b, r(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\mu(S_\Gamma(b)), \psi \circ \eta(b))) & (b \in \eta^{-1}(0,1]) \\ \varphi_\mu^{-1}(b, x) & (b \in \eta^{-1}(0)) \end{cases}$$

で定める. ここで

$$\varphi_\mu\colon \pi^{-1}(v_\mu^{-1}(0,1]) \xrightarrow{\approx} v_\mu^{-1}(0,1] \times C$$

は局所自明化写像であり, $\mathrm{pr}_2\colon v_\mu^{-1}(0,1] \times C \to C$ は第 2 成分への射影, $r\colon C \times [0,1] \to C$ は任意の $c \in C$ に対して $r(c,0) = x \in C$, $r(c,1) = c$ となる連続写像である (C の可縮性より存在する). また $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ は

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 1/2) \\ 2t - 1 & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定まる連続関数であり, これにより S_μ の連続性が従う. さらに, $S_{\Gamma'}\colon v_{\Gamma'}^{-1}(0,1] \to E$ を

$$S_{\Gamma'}(b) = \begin{cases} S_\Gamma(b) & (v_\mu(b) \leq v_\Gamma(b)) \\ S_\mu(b) & (v_\Gamma(b) \leq v_\mu(b)) \end{cases}$$

と定めると, $v_\mu(b) = v_\Gamma(b)$ のとき $b \in \eta^{-1}(1) \cap v_\mu^{-1}(0,1]$ であるから

$$\begin{aligned} S_\mu(b) &= \varphi_\mu^{-1}(b, r(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\mu(S_\Gamma(b)), \psi \circ \eta(b))) = \varphi_\mu^{-1}(b, r(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\mu(S_\Gamma(b)), 1)) \\ &= \varphi_\mu^{-1}(b, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\mu(S_\Gamma(b))) = S_\Gamma(b) \end{aligned}$$

となり, $S_{\Gamma'}$ は well-defined な切断となる. $1 = v_\Lambda \geq v_\mu + v_0$ であるから $v_0^{-1}(1) \cap v_\mu^{-1}(0,1] = \emptyset$ となり, $S_{\Gamma'}|_{v_0^{-1}(1)} = S_\Gamma|_{v_0^{-1}(1)} = s|_{v_0^{-1}(1)}$ が成り立つ. よって $(\Gamma', S_{\Gamma'}) \in \chi$ である.

もし $v_\Gamma^{-1}(0,1]$ のある点 b において $S_\Gamma(b) \neq S_{\Gamma'}(b)$ であったとすると, $S_{\Gamma'}$ の定義より $v_\mu(b) > v_\Gamma(b) > 0$ となる. これより $(\Gamma', S_{\Gamma'}) \succ (\Gamma, S_\Gamma)$ となり, Γ の極大性に矛盾する.

以上より $\Gamma = \Lambda$ であることが従い, 定理の証明が完了した. $\square$