レポート問題

以下の中から 5 題以上問題を選んで解答し、レポートとして提出せよ.

1. $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ を平均ベクトル 0, 共分散行列 I(単位行列) の正規分布に従う $\mathbb{R}^d$ 値独立確率変数列とする. $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $L^2([0,1],\mathbb{R})$ の完全正規直交系とし,
$$X_n(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \int_0^t e_i(u)du$$
と定める. 各 t に対して, $\lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega)$ が概収束することを示せ. その極限の確率過程を $X(t)$ とおくと $X(t)$ の連続修正は 0 から出発する標準ブラウン運動であることを示せ.

2. 講義ノートの系 1.22 を証明せよ.

3. $\mathcal{F}_t$-停止時間 σ_n, σ, τ $(n = 1, 2, \ldots)$ について次を示せ.
   (1) $\sigma \vee \tau (= \max(\sigma, \tau)), \sigma \wedge \tau (= \min(\sigma, \tau))$ は停止時間である.
   (2) 任意の ω について $\sigma(\omega) \le \tau(\omega)$ ならば $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
   (3) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.
   (4) $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \le \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.
   (5) $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続とする. $\sigma_{n+1}(\omega) \le \sigma_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots, \forall\omega \in \Omega)$ とし、 $\sigma(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\omega)$ とおく. σ は $\mathcal{F}_t$-停止時間であり, $\mathcal{F}_\sigma = \cap_n \mathcal{F}_{\sigma_n}$ となることを示せ.

4. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ を非負マルチンゲールとする. マルチンゲールの収束定理により, $M_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} M_n(\omega)$ は概収束することに注意する. $P\left(\{\inf_{n\ge1} M_n > 0\} \triangle \{M_\infty > 0\}\right) = 0$ を示せ. ただし, 集合 A, B に対し $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ である.

5. X_t を $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとする. τ を $\mathcal{F}_t$-停止時間とする時, $X_t^\tau (= X_{\tau\wedge t})$ は $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとなる. これを以下に従って示せ.
   (1) $\tau \wedge t$ は $\mathcal{F}_t$-停止時間であることを示せ.
   (2) $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ のとき, $E[X_{\tau\wedge t}; A] \ge E[X_{\tau\wedge s}; A]$ を示せばよい.
   $$E[X_{\tau\wedge t}; A] = E[X_{\tau\wedge t}; A \cap \{\tau \le s\}] + E[X_{\tau\wedge t}; A \cap \{\tau > s\}] =: I_1 + I_2.$$
   $I_1 = E[X_{\tau\wedge s}; A \cap \{\tau \le s\}]$ なので, $I_2 \ge E[X_{\tau\wedge s}; A \cap \{\tau > s\}]$ を示せばよい. Doob の Optional sampling theorem を用いて, これを証明し, 当初の主張を示せ.

6. (後ろ向きマルチンゲールの一様可積分性と収束定理) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ を後ろ向き劣マルチンゲールとする. すなわち,
   (a) $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_{n+1}$ $\quad (n \ge 1)$,
   (b) X_n は $\mathcal{F}_n$-適合かつ $X_n \in L^1$,
   (c) $E[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n+1}] \ge X_{n+1}$ $\quad (n \ge 1)$.

さらに, $\inf_n E[X_n] > -\infty$ を仮定する. このとき, $\{X_n\}$ は一様可積分であり, $P(\lim_{n\to\infty} X_n$ は収束する$) = 1$ が示せる. これを以下に従い示せ. 以下 $\varepsilon > 0$, $c > 0$ とする.

(1) $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq N$ に対して, $0 \leq E[X_N] - E[X_n] \leq \varepsilon$ を示せ.

(2) N を (1) のものとし, $n \geq N$ とする.

$$\begin{aligned} E[|X_n|; |X_n| \geq c] &= E[X_n; X_n \geq c] + E[-X_n; X_n \leq -c] \\ &= E[X_n; X_n \geq c] + E[X_n; X_n > -c] - E[X_n] \\ &\leq E[X_N; X_n \geq c] + E[X_N; X_n > -c] - E[X_n] \end{aligned}$$

が成り立つことを確かめよ. さらに, この式を利用して

$$E[|X_n|; |X_n| \geq c] \leq E[|X_N|; |X_n| \geq c] + \varepsilon.$$

を示せ.

(3) $(X_n^+, \{\mathcal{F}_n\}_n)$ も後ろ向き劣マルチンゲールであることを示せ. ただし, $X_n^+ = \max(X_n, 0)$.

(4)

$$P(|X_n| \geq c) \leq \frac{1}{c} E[|X_n|] = \frac{1}{c} E[2X_n^+ - X_n]$$

を確かめ

$$P(|X_n| \geq c) \leq \frac{1}{c}\left(2E[X_0^+] - \inf_n E[X_n]\right)$$

を示せ.

(5) 以上を用いて, $\{X_n\}$ は一様可積分であることを示せ.

(6) Doob の横断数の評価定理を用いて $\lim_{n\to\infty} X_n$ は概収束することを示せ.

7. $\{M_t\}_{t\geq 0}$ は $M_0 = 0$ となる $\mathcal{F}_t$-有界連続マルチンゲールで $\sup_{t\geq 0,\omega} |M_t(\omega)| \leq C_0 < \infty$ とする. $[0,\infty)$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots \uparrow \infty\}$ に対し, $|\Delta| = \sup_{i\geq 1} |t_i - t_{i-1}|$, $Q_t(\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t})^2$ とおく.

(1) $\{Q_t(\Delta) - M_t^2\} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ および $E[Q_t(\Delta)^2] \leq 6C_0^4$ $(t \geq 0)$ を示せ.

(2) Δ' を Δ の細分とする. 任意の $T > 0$ に対して

$$\begin{aligned} E\left[\max_{0\leq t\leq T} |Q_t(\Delta) - Q_t(\Delta')|^2\right] &\leq 4E\left[\max_{|u-v|\leq|\Delta|, 0\leq u,v\leq T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2} E\left[Q_T(\Delta')^2\right]^{1/2} \\ &\leq 4\sqrt{6}C_0^2 E\left[\max_{|u-v|\leq|\Delta|, 0\leq u,v\leq T} |M_u - M_v|^4\right]^{1/2} \end{aligned}$$

を示せ.

8. $M = (M_t), N = (N_t)$ をそれぞれ 2 乗可積分 $\mathcal{F}_t$- 連続マルチンゲールで $M_0 = N_0 = 0$ とする. さらに $\{M_t; t \geq 0\}$ と $\{N_t; t \geq 0\}$ は独立とする. このとき $\langle M, N\rangle_t = 0$ を示せ.

9. (B_t^1, B_t^2) $(0 \le t \le 1)$ を 2 次元ブラウン運動とする. $\mathcal{P}_m = \{\tau_k^m\}_{k=0}^{2^m}$ $\tau_k^m = k2^{-m}$ という $[0,1]$ の分割を考える.

(1) $I^m = \sum_{k=1}^{2^m} B^1_{\tau^m_{k-1}}(B^1_{\tau^m_k} - B^1_{\tau^m_{k-1}})$ とおく. $\sum_{m=1}^{\infty} \|I^{m+1} - I^m\|_{L^2} < \infty$ を示すことにより $\lim_{m\to\infty} I^m$ は L^2 収束および概収束することを示せ.

(2) $J_l^{m,i,j} = \sum_{k=1}^{l} \left\{(B^i_{\tau^m_k} - B^i_{\tau^m_{k-1}})(B^j_{\tau^m_k} - B^j_{\tau^m_{k-1}}) - \delta_{i,j}2^{-m}\right\}$ $(i,j = 1,2)$ とおく. Doob の不等式を用いて $E[\max_{1\le l\le 2^m} |J_l^{i,j,n}|^2]$ を評価し L^2 収束, 概収束の意味で

$$\max_{t\in[0,1]} \left| \left(\sum_{k=1}^{\lfloor 2^m t \rfloor} (B^i_{\tau^m_k} - B^i_{\tau^m_{k-1}})(B^j_{\tau^m_k} - B^j_{\tau^m_{k-1}}) \right) - \delta_{i,j} t \right| \to 0$$

を示せ. ただし, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$.

10. $A(t)$ $(t \ge 0)$ は教義単調増加連続関数で $A(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty$ とする. $A^{-1}(t)$ を $A(t)$ の逆関数とする. μ_A を 写像 $A^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ によるルベーグ測度 m_L の像測度とする.

(1) 区間 $[a,b], (a,b], [a,b)$ について $\mu_A([a,b]) = \mu_A((a,b]) = \mu_A([a,b)) = A(b) - A(a)$ を示せ.

(2) $[0,\infty)$ 上の任意の有界ボレル可測関数 φ と $t \ge 0$ について,

$$\int_{[0,t]} \varphi(s) d\mu_A(s) = \int_{[0,A(t)]} \varphi(A^{-1}(u)) dm_L(u)$$

を示せ.

(3) $t > 0$, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\psi_n(t) = \frac{\int_{(t-1/n)^+}^{t} \varphi(s) d\mu_A(s)}{A(t) - A((t-1/n)^+)}$$

$\psi_n(0) = 0$, とおく. ただし, $(t-1/n)^+ = t - 1/n$ $(t \ge 1/n)$, $(t-1/n)^+ = 0$ $(t < 1/n)$ である. $\mu_A(N) = 0$ となるボレル集合 N が存在し, 任意の $t \in N^c$ に対し

$$\text{任意の } t \in N^c \text{ に対し, } \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \varphi(t) \qquad (*)$$

となることを次に従い示せ.

(i) 任意の $u \ge 0$ に対し,

$$\psi_n(A^{-1}(u)) = \frac{\int_{A\left((A^{-1}(u)-\frac{1}{n})^+\right)}^{u} \varphi(A^{-1}(v)) dm_L(v)}{u - A\left((A^{-1}(u) - \frac{1}{n})^+\right)}$$

を示せ.

(ii) $m_L(N) = 0$ となるボレル集合 N_L が存在して, 任意の $u \in N_L^c$ に対して $\lim_{n\to\infty} \psi_n(A^{-1}(u)) = \varphi(A^{-1}(u))$ となることを示せ. また, このことから $(*)$ を証明せよ.

11. 上記問題の結果を連続マルチンゲール $M_t(\omega)$ の 2 次変分過程 $A_t(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega)$ の場合に適用し, 単過程が $\mathcal{L}^2(\mu_A)$ で dense であることを証明しよう.

(1) $f \in \mathcal{L}_2([0,T];M)$ に対して, $f_n(t,\omega) = (-n) \vee f(t,\omega) \wedge n$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_2(M)} = 0$ を示せ. これにより, f が有界確率過程の場合 $\mathcal{L}_0$ の元で近似できることが示せれば十分.

(2) $f \in \mathcal{L}_2(M)$ が有界とする. $A_t(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega) + t$ とおき, $f_n(t,\omega)$ を $f_n(0,\omega) = 0$,

$$f_n(t,\omega) = \frac{\int_{(t-1/n)^+}^{t} f(s,\omega) dA_s(\omega)}{A_t(\omega) - A_{(t-1/n)^+}} \qquad t > 0$$

と定める. f_n は $\mathcal{F}_t$-適合有界発展的可測過程であることを示せ.

(3) $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}_2(M)$ で稠密であることを示せ.

12. σ を $\mathcal{F}_t$-停止時間とする. $1_{[0,\sigma]}(t)$ が $\mathcal{L}_0$ に属すためには, 次が成立することと同値であることを示せ：発散する教義単調増加な正数列 $\{s_i\}_{i=1}^N$ が存在して ($N \in \mathbb{N}$ または $N = \infty$),

(a) $\{\sigma(\omega) \mid \omega \in \Omega, \sigma(\omega) > 0\} = \{s_i\}_{i=1}^N$,

(b) $\{\sigma \le s_{i+1}\} \in \mathcal{F}_{s_i}$.

また, $\mathcal{F}_t$-停止時間 σ と $[0,\infty)$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots \uparrow \infty\}$ に対して $\sigma_\Delta(\omega) = \inf\{t \ge 0 \,|\, \sigma(\omega) < t, t \in \Delta\}$ と定めると $\{1_{[0,\sigma_\Delta]}(t)\}_{t\ge 0} \in \mathcal{L}_0$ となることを示せ.

13. 実数値確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がガウス型確率変数系であるとは, 次が成立する時に言う.

$m = (m_\lambda)$, $(m_\lambda \in \mathbb{R})$, $C = (C_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ $(C_{\lambda,\mu} \in \mathbb{R}, C_{\lambda,\mu} = C_{\mu,\lambda},\ \mu,\lambda \in \Lambda)$ が存在して任意の $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ $(\lambda_i \ne \lambda_j \text{ if } i \ne j)$ と $(t_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$E\left[e^{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n t_i X_{\lambda_i}}\right] = \exp\left(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n t_i m_{\lambda_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n C_{\lambda_1,\lambda_j} t_i t_j\right). \tag{1}$$

このとき, 以下を示せ.

(1) X_λ は平均 m_λ, 分散 $C_{\lambda,\lambda}$ の正規分布に従う. したがって, 特に, $C_{\lambda,\lambda} \ge 0$. ただし, ここでは, 定数も 分散 0 の正規分布と考えることにする. また, $\mathrm{C}(X_\lambda, X_\mu) = C_{\lambda,\mu}$ ここで, $\mathrm{C}(X_\lambda, X_\mu)$ は X_λ, X_μ の共分散を表す.

(2) $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ $(\lambda_i \ne \lambda_j \text{ if } i \ne j)$ に対して, n 次対称行列 $C_\lambda = (C_{\lambda_i,\lambda_j})_{i,j}$ は非負値であることを示せ. また, この行列が正定値の時, 確率変数 $X_\lambda = {}^t(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n})$ の分布の密度関数を求めよ.

(3) $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda$ とし, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ とする. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ と $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ が独立であることと $\mathrm{C}_{\lambda,\mu} = 0$ $(\lambda \in \Lambda_1, \mu \in \Lambda_2)$ となることは同値であることを示せ.

14. 実数値確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次の性質を満たすとする.

任意の $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ $(\lambda_i \ne \lambda_j \text{ if } i \ne j)$ と $(t_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\sum_{i=1}^n t_i X_{\lambda_i}$ は 1 次元正規分布に従う. ただし, 定数も 分散 0 の正規分布と考えることにする.

この性質は, $\{X_\lambda\}_\lambda$ がガウス型確率変数系であることと同値であることを示せ.

15. $B(t,\omega)$ $(t \ge 0)$ を 1 次元ブラウン運動で $B(0,\omega) = 0$ とする. ほとんどすべての ω について $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t,\omega)}{t} = 0$ となることを大数の強法則を用いて示せ.

16. $B(t,\omega)$ を 0 から出発する 1 次元ブラウン運動とする．任意の $a < \frac{1}{2}$ について $E[e^{a\|B\|^2}] < \infty$ である．ただし $\|B\| = \max_{0\le t\le 1} |B(t,\omega)|$. これをマルチンゲール不等式 $(p > 1)$

$$E\left[\left(\max_{0\le s\le t} |B_t|\right)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|B_t|^p]$$

を用いて示せ．

(注) $M_t(\omega) = \max_{0\le s\le t} B_s(\omega)$ とおくと任意の t について M_t の分布と $|B_t|$ の分布は等しい．これは Paul Lévy による．このことを用いれば上記の指数可積分性は簡単にわかる．

17. $M_t = (M_t^1, \ldots, M_t^n)$ を n 次元 $\mathcal{F}_t$-局所連続マルチンゲールとする．すなわち，$M^i \in \mathcal{M}^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ $(1 \le i \le n)$ とする. $\langle M\rangle_t = \sum_{i=1}^n \langle M^i\rangle_t$ と書く. $p \ge 2$ に対し $C_p = \left\{\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2}\right\}^{\frac{p}{2}}$ とおくと

$$E\left[\max_{0\le s\le t} |M_s|^p\right] \le C_p E[\langle M\rangle_t^{p/2}] \qquad (*)$$

となることを次にしたがって示せ. ただし, $|M_s| = \left(\sum_{i=1}^n (M_s^i)^2\right)^{1/2}$ である.

(1) $\tau_N = \inf\{t > 0 \mid |M_t| + \langle M\rangle_t \ge N\}$ とおく. $X_t^{N,\varepsilon} = \left(\varepsilon + |M_t^{\tau_N}|^2\right)^{1/2}$, $X_t^N = |M_t^{\tau_N}|$ とおく. $X_t^{N,\varepsilon}$ は非負劣マルチンゲールであることを示せ. また

$$E\left[\max_{0\le s\le t} |X_s^N|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_t^N|^p\right]$$

を示せ.

(2) X_t^N に対し Itô の公式を用い,

$$\begin{aligned}(X_t^N)^p = p\sum_{i=1}^n \int_0^{t\wedge\tau_N} |M_s|^{p-2} M_s^i dM_s^i + \frac{p}{2}\int_0^{t\wedge\tau_N} |M_s|^{p-2} d\langle M\rangle_s \\ \frac{p(p-2)}{2} \sum_{1\le i,j\le n} \int_0^{t\wedge\tau_N} |M_s|^{p-4} M_s^i M_s^j d\langle M^i, M^j\rangle_s\end{aligned}$$

を示せ. またこの有界変動部分を A_t と書くと

$$A_t \le \frac{p(p-1)}{2} \int_0^{t\wedge\tau_N} |M_s|^{p-2} d\langle M\rangle_s$$

を示せ.

(3) $(*)$ を示せ.

18. B_t を d 次元標準ブラウン運動とする. $f(s,\omega) = \left(f_j^i(s,\omega)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le d} \in \mathcal{L}_{2,loc}(B)$ とする.

$$M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j^i(s,\omega) dB_s^j(\omega) \quad 1 \le i \le n.$$

とおく. $p \ge 2$ に対して, f に依存しない定数 C_p が存在して

$$E\left[\max_{0\le s\le t} |M_s|^p\right] \le C_p E\left[\left(\int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds\right)^{p/2}\right]$$

となることを示せ.

19. $B_t = (B_t^j)_{1\le j\le d}$ を d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする．$\tau_k^m = k2^{-m}$ $(m\in\mathbb{N}, 0\le k\le 2^m)$ とする．C を正定数とする．d 次正方行列に値を取る確率変数 $f_j^{m,k}$, $g^{m,k}$ を次を満たすように取る．以下, I は d 次正方行列の単位行列行列とし $A=(a_{i,j})$ について $|A| = \{\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2\}^{1/2}$ とおく．

- $f_j^{m,k}, g^{m,k}$ は $\mathcal{F}_{\tau_k^m}$ 可測.
- すべての m,k,j について $P\left(|f_j^{m,k}|\le C, |g^{m,k}|\le C\right) = 1$.

さらに d 次正方行列 $Y^m_{\tau^m_{k-1},t}$ $(\tau^m_{k-1}\le t\le\tau^m_k)$, X_t^m $(0\le t\le 1)$ を次で定める．積は行列の関である.

$$Y^m_{\tau^m_{k-1},t} = I + \sum_{j=1}^d f_j^{m,k-1} B^j_{\tau^m_{k-1},t} + g^{m,k-1}(t-\tau^m_{k-1}) \quad (\tau^m_{k-1}\le t\le \tau^m_k)$$

$$X_t^m = Y^m_{\tau^m_{k-1},t} Y^m_{\tau^m_{k-2},\tau^m_{k-1}} \cdots Y^m_{0,\tau_1^m} \quad (\tau^m_{k-1}\le t\le\tau^m_k).$$

$p\ge 1$ とする．C,d,p にのみ依存する定数 C' が存在して

$$E\left[\max_{0\le t\le 1}|X_t^m|^p\right]\le C'$$

となることを示せ.

20. B_t を 0 から出発する 1 次元ブラウン運動とする．$a\neq 0$ に対して a への first hitting time $\sigma_a(\omega) = \inf\{t\ge 0 \mid B_t(\omega)=a\}$ とする．ただし，$\{t\ge 0\mid B_t(\omega)=a\}=\emptyset$ ならば $\sigma_a(\omega)=\infty$ と定める．

(1) $f(t,x) = e^{-\lambda t+\sqrt{2\lambda}x}$ $(\lambda\ge 0)$ とおく．$f(t,B_t)$ に Itô の公式を適用し，$\lambda>0$ に対して $E[e^{-\lambda\sigma_a}] = e^{-\sqrt{2\lambda}a}$ を示せ.

(2) $P(\sigma_a<\infty)=1$ を示せ.

(3) $E[\sigma_a]=\infty$ を示せ.

21. B_t を 0 から出発する 1 次元ブラウン運動とする．$a>0$ とし $B_t - t$ の $-a$ への first hitting time $\tau_a(\omega) = \inf\{t\ge 0\mid B_t(\omega)-t\le -a\}$ を考える．

(1) $P(\tau_a<\infty)=1$ を示せ.

(2) $g(t,x) = e^{-\lambda t - \left(\sqrt{1+2\lambda}-1\right)x}$ $(\lambda\ge -\frac{1}{2})$ とおく．$g(t,B_t-t)$ に Itô の公式を適用して

$$E\left[e^{-\lambda(t\wedge\tau_a)-\left(\sqrt{1+2\lambda}-1\right)(B_{t\wedge\tau_a}-(t\wedge\tau_a))}\right] = 1$$

を示せ.

(3) (2) の式を用いて $\lambda\ge -\frac{1}{2}$ のとき

$$E[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-\left(\sqrt{1+2\lambda}-1\right)a}$$

を示せ．また任意の $\varepsilon>0$ に対して $E[e^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\tau_a}]=\infty$ を示せ.

22. $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$, $n=0,1,\dots,$ に対して

$$H_n(t,x) = \frac{(-t)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2t}}\right)$$

とおく. 以下を示せ.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial t}H_n(t,x)+\dfrac{1}{2}\Delta H_n(t,x)=0$. ただし $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ である.

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}H_n(t,x)=H_{n-1}(t,x)$

(3) $H_1(t,x)=x, H_0(t,x)=1$.

(4) $\displaystyle\int_0^t H_{n-1}(s,B_s)dB_s=H_n(t,B_t)$. ただし B_t は 1 次元 Brown 運動である.

(5) 以上の結果を用いて $n,m\geq 0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t,x)H_m(t,x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=\delta_{n,m}\frac{t^n}{n!}$$

を示せ. ただし $\delta_{n,m}=1$ ($n=m$ のとき), $\delta_{n,m}=0$ ($n\neq m$ のとき) である.

23. $a\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ ($c\neq 0$) に対して 1 次元確率微分方程式

$$dX_t=-aX_tdt+cdB_t,\ X_0=\xi$$

を考える. ただし ξ は実数の定数である. X_t の期待値, 分散および $E[X_tX_s]$ を計算せよ.

24. B_t を 1 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする. $f(t,\omega),g(t,\omega)$ を $\mathcal{F}_t$-連続確率過程とし, ある正数 K が存在し $\sup_{t,\omega}(|f(t,\omega)|+|g(t,\omega)|)\leq K$ とする.

$$X_t=\int_0^t f(s,w)dB_s(w),\quad Y_t=\int_0^t g(s,w)dB_s(w)$$

とおく. $\Delta_n=\{0=t_0^n<t_1^n<\ldots t_{N_n}^n=t\}$ を $[0,t]$ の分割で $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$ とする.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{N_n-1}X_{\frac{t_i^n+t_{i+1}^n}{2}}\left(Y_{t_{i+1}^n}-Y_{t_i^n}\right)=\int_0^t X_s\circ dY_s$$

が確率収束の意味で成立することを示せ.

25. B_t を d-次元ブラウン運動とする. $\sigma\in C_b^1(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n))$, $b\in C_b^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ とする. 確率微分方程式

$$X_t=x+\int_0^t\sigma(X_s)dB_s+\int_0^t b(X_s)ds\quad x\in\mathbb{R}^n,0\leq t\leq T$$

の解を考える. 積分は Itô 積分である. X_t^N ($N\in\mathbb{N}$) を次のように定める (これを X の Euler-Maruyama 近似解と言う). まず $X_0^N=x$ とおき,

$$\begin{aligned}X_t^N&=X_{2^{-N}kT}^N+\sigma\left(X_{2^{-N}kT}^N\right)(B_t-B_{2^{-N}kT})+b\left(X_{2^{-N}kT}^N\right)(t-2^{-N}kT)\\&2^{-N}kT<t\leq 2^{-N}(k+1)T\quad(0\leq k\leq 2^N-1).\end{aligned}$$

(1) $2^{-N}kT\leq t<2^{-N}(k+1)T$ のとき, $\varphi_N(t)=2^{-N}kT$ と定める. X^N は

$$X_t^N=x+\int_0^t\sigma\left(X_{\varphi_N(s)}^N\right)dB_s+\int_0^t b(X_{\varphi_N(s)}^N)ds\quad x\in\mathbb{R}^n,0\leq t\leq T$$

を満たすことを示せ.

(2) $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ に対して $|x|_t = \max_{0\le t\le t}|x_s|$ とおく.

$$E\left[\left|\int_0^{\cdot}\left(\sigma\left(X^N_{\varphi_N(s)}\right)-\sigma\left(X^N_{\varphi_{N-1}(s)}\right)\right)dB_s\right|_T^2\right] \le \frac{C_T}{2^N}$$

を示せ.

(3)

$$E[|X^N - X^{N-1}|_t^2] \le C\int_0^t E[|X^N - X^{N-1}|_s]ds + \frac{C'_T}{2^N} \qquad 0 \le t \le T$$

を示すことにより

$$E[|X^N - X^{N-1}|_t^2] \le C''_T 2^{-N}$$

を示せ.

(4) $\lim_{N\to\infty} X^N_t$ は確率 1 の ω に対して一様収束の位相で収束することを示せ. 極限 X_t は, 冒頭にあげた確率微分方程式の解となることを示せ. また

$$E\left[|X^N - X|_T^2\right] \le C'''_T 2^{-N}$$

を示せ.

26. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 上の $\mathcal{F}_t$-ブラウン $B_t(\omega) = (B^1_t(\omega),\cdots,B^d_t(\omega))$ $(0 \le t \le T)$ を考える. $f^i_j(t,\omega), g^i(t,\omega)$ を $\mathcal{F}_t$-有界発展的可測過程とし semimartingale を

$$X^i_t(\omega) = \sum_{j=1}^d \int_0^t f^i_j(s,\omega)dB^j_s(\omega) + \int_0^t g^i(s,\omega)ds, \qquad 1 \le i \le n.$$

と定める. $X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n X^i_t(\omega)e_i$ ($\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底) とおき, 帰納的に

$$\mathbb{X}^1_{s,t}(\omega) = X_t(\omega) - X_s(\omega)$$
$$\mathbb{X}^{k+1}_{st}(\omega) = \int_s^t \mathbb{X}^k_{su}(\omega)\otimes \circ dX_u(\omega)$$

と定める.

P-$a.s.$ ω に対して, $\mathbb{X}^k_{st}(\omega)$ は s,t の連続関数であり, 任意の $k, 0<\alpha<1/2$ に対して

$$P\left(\left\{\omega \;\middle|\; \exists C_k(\omega), 0 \le \forall s \le \forall t \le T, |\mathbb{X}^k_{st}(\omega)| \le C_k(\omega)(t-s)^{\alpha k}\right\}\right) = 1.$$

となることを示せ.

27. (右連続な filtration に適合したマルチンゲールのサンプルパスが càdlàg であること)

実数列 $\{x_n\}_{n=1}^N$ と 2 つの実数 $a<b$ を考える. $\{1,\dots,N\}$ の元の増大列

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots < n_k < m_k$$

で $x_{n_i} < a, x_{m_i} > b$ $(1 \le i \le k)$ を満たすもののうち, 最大の k を $\{x_n\}_{n=1}^N$ の $[a,b]$ の上向き横断回数と言い $U\left(\{x_n\}_{n=1}^N;[a,b]\right)$ と書く. $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P)$ を通常の条件を満たす確率空間とする. $\{M_t; 0 \le t \le 1\}$ を $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールとする. $\{M_t\}_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ に対して,

$$U\left(\{M_t\}_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}};[a,b]\right) = \sup\left\{U\left(\{M_t\}_{t\in A};[a,b]\right) \mid A \text{ は } \mathbb{Q} \text{ のすべての有限集合を動く}\right\}$$

と定める. ただし, $\{M_t\}_{t\in A}$ は t が小さい順番に並んでいるものとする.

(1)

$$E\left[U\left(\{M_t\}_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}};[a,b]\right)\right]\leq\frac{E[(M_1-a)^-]}{b-a}$$

を示せ. ただし, $x^-=\max(-x,0)$ である. また,

$$\Omega'=\cap_{a<b,a,b\in\mathbb{Q}}\{U\left(\{M_t\}_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}};[a,b]\right)<\infty\}$$

とおくと, $P(\Omega')=1$ となることを示せ.

(2) $\omega\in\Omega'$ とする. 任意の $t\in[0,1]$ について

$$M_{t+}(\omega):=\lim_{s(\in[0,1]\cap\mathbb{Q})\downarrow t}M_s(\omega)$$
$$M_{t-}(\omega):=\lim_{s(\in[0,1]\cap\mathbb{Q})\uparrow t}M_s(\omega)$$

が存在することを示せ. さらに, $M_{t+}(\omega)$ は ($\omega\notin\Omega'$ については, 0 などと定義する) $\{M_t\}$ の右連続かつ左極限を持つ修正であることを示せ.

28. (多次元版連続修正定理)

$I=[0,1]^d$ $(d\in\mathbb{N})$ とおく. 実数値確率変数の族 $X(x,\omega)$ を考える. $C>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ が存在して

$$E\left[|X(x)-X(y)|^{\alpha}\right]\leq C|x-y|^{d+\beta}\qquad x,y\in I$$

を満たすとする. このとき, $X(x,\omega)$ は連続な修正を持つ. これを以下に従って示せ.

(1) $I_n=\{\left(\frac{k_1}{2^n},\dots,\frac{k_d}{2^n}\right)\mid k_i=0,\dots,2^n,1\leq i\leq d\}$ とおく. $x=(\frac{k_1}{2^n},\dots,\frac{k_d}{2^n}),x'=(\frac{k_1'}{2^n},\dots,\frac{k_d'}{2^n})\in I_n$ について, $k_i\neq k_i'$ となる i が 1 個のみで, かつ $|k_i-k_i'|=1$ のとき, x,x' は隣接していると言い, $x\sim x'$ と書くことにする. $0<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$ とする.

$$A_n=\left\{\ x\sim y\ \text{となるある}\ x,y\in I_n\ \text{に対して}\ |X(x,\omega)-X(y,\omega)|>\frac{1}{2^{n\gamma}}\ \right\}$$

とおく. $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ を示せ.

(2) 格子点上の値 $X(x,\omega)$ $(x\in I_n)$ を用いて「区分的線形」に I 上の関数に以下のように拡張する. $x=(x_1,\dots,x_d)$ が, $\frac{k_i}{2^n}\leq x_i\leq\frac{k_i+1}{2^n}$ $(1\leq i\leq d)$ を満たすとする. 簡単のため, $x_i^-=\frac{k_i}{2^n}$, $x_i^+=\frac{k_i+1}{2^n}$ と書くことにする.

$$X_n(x,\omega)=\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_d=\pm}\left\{\prod_{i=1}^{d}2^n\left(\frac{1}{2^n}-|x_i-x_i^{\sigma_i}|\right)\right\}X((x_1^{\sigma_1},\dots,x_d^{\sigma_d}),\omega)$$

と定めると $X_n(x,\omega)$ は I 上の連続関数であり, 任意の $\omega\in\Omega'(:=\liminf_{n\to\infty}A_n^c)$ に対して, $\tilde{X}(x,\omega):=\lim_{n\to\infty}X_n(x,\omega)$ は I 上一様収束し, $\tilde{X}(x,\omega)$ は $X(x,\omega)$ の連続修正であることを示せ.

(3) 講義ノートの定理 5.3 の条件の下での初期値を x とする解を $X(t,x,\omega)$ とする.

$$E\left[|X(t,x)-X(s,x)|^p+|X(t,x)-X(t,y)|^p\right]\leq C(p,T,R)\left(|t-s|^{\frac{p}{2}}+|x-y|^p\right)$$
$$0\leq\forall s,\forall t\leq T,\quad\forall x,\forall y\ \text{with}\ |x|,|y|\leq R$$

を示し, 上記の結果を用いて, $X(t,x,\omega)$ は $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に関して, 連続な修正を持つことを示せ. $C(p,T,R)$ は 定数である.

29. 問題 28 で確率過程 $X = X(t,\omega)$ に対して定数 $\alpha > 0, \beta > 0, C > 0$ が存在して $E[|X(t) - X(s)|^{\alpha}] \leq C|t-s|^{1+\beta}$ $0 \leq s \leq t \leq T$ が成立するならば連続修正 $\tilde{X}(t,\omega)$ が存在することを示した. 次に述べる Garsia-Rodemich-Rumsey の定理を用いて, この連続修正 $\tilde{X}(t,\omega)$ について、任意の $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha}$ に対して

$$P\left(\left\{\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|\tilde{X}(t,\omega) - \tilde{X}(s,\omega)|}{|t-s|^{\gamma}} < \infty\right\}\right) = 1$$

となることを証明せよ.

定理 (Garsia-Rodemich-Rumsey) $p = p(\xi)$, $\Phi = \Phi(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ は狭義単調増加で $p(0) = \Phi(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$ とする. $T > 0$ とする. $x \in C([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ について

$$B := \iint_{[0,T]^2} \Phi\left(\frac{|x(t) - x(s)|}{p(|t-s|)}\right) dsdt$$

を仮定する. このとき

$$|x(t) - x(s)| \leq 8 \int_0^{t-s} \Phi^{-1}\left(\frac{4B}{u^2}\right) dp(u).$$

(注) 上記定理の証明については, 例えば, D.Stroock, Probability Theory, An analytic view, Cambridge University Press を参照.

30. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数の族 $X(x,\omega)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ が連続な修正を持つとする.

$$\Omega' = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \text{すべての } x \in \mathbb{R}^n \text{ について極限 } \lim_{y(\in \mathbb{R}^n \cap \mathbb{Q}^n) \to x} X(y,\omega) \text{ が存在する}\right\}$$

とおくと, $P(\Omega') = 1$ であり,

$$\tilde{X}(x,\omega) = \begin{cases} \lim_{y(\in\mathbb{R}^n\cap\mathbb{Q}^n)\to x} X(y,\omega) & \omega \in \Omega' \\ 0 & \omega \notin \Omega' \end{cases}$$

とおくと $\tilde{X}(x,\omega)$ は $X(x,\omega)$ の連続修正であることを示せ.

31. (Wiener functional へのブラウン運動の代入)

講義ノートの Wiener 空間 $(W_0^d, \overline{\mathcal{B}(W_0^d)}^{\mu}, \sigma(\{w_s; s \leq t\} \cup \mathcal{N}), \mu)$ を考える. W_0^d の元を w と書いている. $f(t,w)$ は $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 値 $\sigma(\{w_s; s \leq t\})$ 発展的可測過程とする.

$$I(t,w) = \int_0^t f(s,w) dw_s$$

と定める. $I(t,w)$ は μ-a.s. な w にのみ意味があることに注意せよ. $B_t(\omega)$ を通常の条件を満たす確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. $I(t, B(\omega))$ は well-defined であること, $f(s, B(\omega))$ は $\mathcal{F}_t$ 発展的可測過程であることを示せ. また

$$I(t, B(\omega)) = \int_0^t f(s, B(\omega)) dB_s(\omega) \quad P\text{-}a.s.\omega$$

を示せ.

32. (確率積分のパラメータへの確率変数の代入)

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ は通常の条件を満たすとし, $B_t(\omega)$ は d 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする. (n,d) 行列値確率過程 $\{f(t,x,\omega)\}_{t\in[0,T], 0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^m}$ は 次を満たすとする.

(i) 任意の x に対し, $\{f(t,x,\omega)\}_{t\in[0,T]}$ は $\mathcal{F}_t$ 発展的可測過程である.

(ii) 任意の (t,ω) について, $x \mapsto f(t,x,\omega)$ は連続.

(iii) 任意の x に対して, $P\left(\int_0^T |f(t,x,\omega)|^2 dt < \infty\right) = 1$.

n 次元確率過程を $I(t,x,\omega) = \int_0^t f(s,x,\omega)dB_s(\omega)$ $(0 \le t \le T)$ と定める. t を固定する. $I(t,x,\omega)$ は x に関する連続修正 $\tilde{I}(t,x,\omega)$ が存在するとする. $\xi(\omega)$ を $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数とする. 以下を示せ.

(1) $\{f(t,\xi(\omega),\omega)\}_{0\le t\le T}$ は $\mathcal{F}_t$-発展的可測であること, および

$$P\left(\int_0^T |f(t,\xi(\omega),\omega)|^2 dt < \infty\right) = 1$$

を示せ.

(2) $\hat{I}(t,x,\omega)$ も $I(t,x,\omega)$ の x に関する連続修正とする. $P\left(\tilde{I}(t,\xi(\omega),\omega) = \hat{I}(t,\xi(\omega),\omega)\right) = 1$ を示せ.

(3)

$$P\left(\tilde{I}(t,\xi(\omega),\omega) = \int_0^t f(s,\xi(\omega),\omega))dB_s(\omega)\right) = 1$$

を示せ.

(4) 定理 5.3 の条件の下での初期値 x の解 $X(t,x,\omega)$ で (t,x) に関して連続な物を考える. $\xi(\omega)$ を $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数とすると $X(t,\xi(\omega),\omega)$ は初期値を $\xi(\omega)$ とする解となることを示せ.

ヒント: $\mathbb{R}^n = \cup_{k=1}^\infty V_{k,N}$ のように互いに交わりの無いボレル可測集合に分割し, おのおの一つの要素 $v_{k,N} \in V_{k,N}$ を取る. ただし, すべての, k,N について $\sup\{|x-y| \mid x,y \in V_{k,N}\} \le \frac{1}{N}$ とする. $f_N(t,\xi(\omega),\omega) = \sum_{k=1}^\infty f(t,v_{k,N},\omega)1_{V_{k,N}}(\xi(\omega))$ と定めると $\lim_{N\to\infty} f_N(t,\xi(\omega),\omega) = f(t,\xi(\omega),\omega)$ となることに注意せよ.