0. Introduction.

歴史

1940's　Hopf による alg top の研究に登場.

1960's ～ 1970's　Kac による Kac 代数の考察.

Woronowicz さん.

群上の関数環由来くらいしかない…?

1980's.　Drinfeld, Jimbo deformation で例がたくさん手に入った!

非可換幾何.　結び目理論.　自由確率論.
量子可積分系　subfactor理論　など.

- op alg の立場から quantum gp を扱いたい.

可換	$\longleftrightarrow$	非可換.
G: cpt sp. $C(G)$	$\longleftrightarrow$	C^* alg.
cpt gp.	$\longleftrightarrow$	quantum gp.

- 扱いやすい cpt quantum gp について, その例や性質をみる.
- 圏論的な視点によるお話をする.

Notation

- C^*-alg 同士の tensor $\otimes$ では minimal tensor product をとるものとする.
- ι : identity map とする.
- cpt gp とは cpt Hdf gp のこととする.

1.1. Definition and first examples.

非可換幾何学の考え方により、unital C^* alg は
"非可換"ないし"量子化された" cpt sp 上の
conti ftns の alg とみれるのだった。
このような sp 上に群構造を入れたい。

Def 1.1.1 (Woronowicz)

cpt quantum gp とは、

A = unital C^*-alg.

$\Delta : A \to A \otimes A$. unital $*$-hom

の組 (A, Δ) であって、次をみたすものをいう。

(i). $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$ が
$A \longrightarrow A \otimes A \otimes A$. が unital $*$-hom としてなりたつ。
(余結合則)

(ii). $(A \otimes 1)\Delta(A) = \mathrm{span}\{(a \otimes 1)\Delta(b) : a, b \in A\}$.
$(1 \otimes A)\Delta(A) = \mathrm{span}\{(1 \otimes a)\Delta(b) : a, b \in A\}$
は $A \otimes A$ で dense である。(簡約律)

Example

G = cpt gp. $A = C(G)$ とする。

- $A \otimes A \simeq C(G \times G)$ に気をつけて
  $\Delta : A \to C(G \times G)$ を
  $\Delta(f)(g, h) = f(gh) \quad (g, h \in G)$ と定めると、
  Δ は余結合則をみたす unital $*$-hom である。

∵). ・ $A\otimes A = C(G\times G)$ であること.

(i) $\varphi : A\times A \to C(G\times G)$ を

$\varphi(f_1, f_2)(g, h) = f_1(g) f_2(h)$ と定めると,

これは bilinear であるので

$\exists!\ \varphi' : A\otimes A \to C(G\times G)$. よ

s.t. $\varphi'(f_1\otimes f_2)(g, h) = f_1(g) f_2(h)$ ($g, h\in G$).

このとき

$\varphi'((f_1\otimes f_2)(f_3\otimes f_4))(g, h) = (f_1f_3)(g)(f_2f_4)(h)$

$= f_1(g) f_3(g) f_2(h) f_4(h) = f_1(g) f_2(h) f_3(g) f_4(h)$

$= \varphi'(f_1\otimes f_2)(g, h)\varphi'(f_3\otimes f_4)(g, h)$

$= (\varphi'(f_1\otimes f_2)\varphi'(f_3\otimes f_4))(g, h)$.

$\varphi'((f_1\otimes f_2)^*)(g, h) = f_1^*(g) f_2^*(h)$

$= (\varphi'(f_1\otimes f_2))^*(g, h)$ より. φ' : $*$-hom である.

(ii). $(g, h) \mapsto f_1(g) f_2(h)$ という形の fun's は

$C(G\times G)$ で dense な $*$-subalg であるので

φ は surj である.

∵). $(g, h)\neq(g', h')$ とするとき,

・$g\neq g'$ なる $f_2\equiv 1$, $f_1(g)=1$, $f_1(h)=0$

となる f_1 を Urysohn よりとれば

$f_1(g) f_2(h) \neq f_1(g') f_2(h')$.

・$h\neq h'$ なる $f_1\equiv 1$, $f_2(h)=1$, $f_2(h)=0$

となる $f_2\in A$ をとれば ok.

よって I の形の fun は const を含み,

$G\times G$ の 2 点をわけるので Stone-Weierstrass

より $C(G\times G)$ で dense.

(iii). φ : inj より φ' の単射性は明らか.

ゆえに φ' は等長で, $A\otimes A = C(G\times G)$ である.

・$(A\otimes 1)\Delta(A)$ は $g, h \in G$, $f_1, f_2 \in A$ として
$(g, h) \mapsto f_1(g) f_2(gh)$ の形の ftns で
生成される unital *-subalg である.
$(g, h) \neq (g', h') \in G \times G$ とする.
・$g = g'$ のとき, $gh = g'h'$ とすると $h = h'$ となるので
$gh \neq g'h'$ である.
$f_1 \equiv 1$ とし f_2 として Urysohn's lem より
$f_2(gh) = 1$, $f_2(g'h') = 0$ なる $f_2 \in A$ をとれば
$f_1(g) f_2(gh) \neq f_1(g') f_2(g'h')$ となる.
・$g \neq g'$ のとき, $f_2 \equiv 1$, $f_1 \in A$ を
$f_1(g) = 1$, $f_1(g') = 0$ となるようとればok.

よって $(A\otimes 1)\Delta(A)$ は const を含み, $G \times G$ の2点を引き離す
*-subalg なので, Stone-Weierstrass thm より
$(A\otimes 1)\Delta(A) \overset{\text{dense}}{\subset} C(G\times G)$ である.
$(1\otimes A)\Delta(A) \overset{\text{dense}}{\subset} C(G\times G)$ も同様.

よって (A, Δ) は CQG である.

<u>Def</u>
・S : set, $\cdot : S \times S \to S$ の組 $(S, \cdot)$ が
$\forall a, b, c \in S$, $(ab)c = a(bc)$ (結合律)
をみたすとき semigp であるという.
・$A \subset S$ に対して,
A が S の(両側)イデアルである
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $AS (= \{as : a \in A, s \in S\})$, $SA \subset A$.

Prop.

$(A, \Delta) = $ CQG. A = commutative.

$\Rightarrow$ $\exists G =$ cpt gp s.t. (A, Δ) は

G に対して前の example で定まる CQG と一致する.

∵).

①. Gelfand thm より, $\exists G =$ cpt sp s.t. $A = C(G)$.

$A \otimes A = C(G \times G)$ より, Δ: unital $*$-hom による

$G \times G \to G$ なる conti map を次のように定める:

$(g, h) \in G \times G$ に対し

$C(G) \ni f \mapsto \Delta(f) \mapsto \Delta(f)(g, h) \in \mathbb{C}$: unital $*$-hom

より, $\exists k \in G = \Omega(C(G))$ が1つの unital $*$-hom に

対応する. これにより $(g, h) \mapsto k$ と定め,

k を gh と书くことにすると, $\Delta(f)(g, h) = f(gh)$.

$(g_\lambda, h_\lambda) \in G \times G = \Omega(C(G \times G))$, $(g_\lambda, h_\lambda) \xrightarrow{w^*} (g, h)$

とすると,

$\forall f \in C(G)$, $f(g_\lambda h_\lambda) = \Delta(f)(g_\lambda, h_\lambda)$

$\to \Delta(f)(g, h) = f(gh)$ より

$g_\lambda h_\lambda \xrightarrow{w^*} gh$ in $\Omega(C(G)) = G$ なので

$(g, h) \mapsto gh$ は conti である.

②. G は semi gp である.

∵). $\forall g, h, k \in G$, $\forall f \in C(G)$:

$f((gh)k) = (\Delta \otimes \iota)\Delta(f)(g, h, k)$

$= (\iota \otimes \Delta)\Delta(f)(g, h, k) = f(g(hk))$ より

$(gh)k = g(hk)$.

③. G は cancellation をもつ.

∵). $gh = gk$ ($g, h, k \in G$) とするとき,

$\forall f_1, f_2 \in C(G)$, $f_1(g) f_2(gh) = f_1(g) f_2(gk)$.

(A, Δ) の cancellation より.

$(g', h') \mapsto f_1(g') f_2(g'h')$ の形の fcns は

$C(G \times G)$ で dense より,

$\forall f \in C(G \times G)$, $f(g, h) = f(g, k)$

つまり $(g, h) \sim (g, k)$ より $h = k$ を言える.

$hg = kg \Rightarrow h = k$ も同様.

④. cancellation をもつ cpt semigp は gp である.

∵). (i). G は (一意的な) unit をもつ

∵). $h \in G$ を fix し, H: h の生成する G の closed subsemigp

とする. H = commutative である.

$I_1, I_2, \cdots, I_n \subset H$, ideals とすると,

$I_1 \cdots I_n \subset I_1 \cap \cdots \cap I_n$ ideals より.

{H の closed ideals} は有限交叉性をもつ.

H = cpt より, $I_0 = \bigcap$ (closed ideal of H) $\neq \phi$ で

これも closed ideal になる.

$\forall k \in H$, $\underbrace{kI_0}_{\text{closed ideal}} \subset I_0$. より $kI_0 = I_0$.

とくに $k \in I_0$ とすると, $\exists e \in I_0$ s.t. $ke = k$.

$\forall g \in G$, $keg = kg$ と cancellation より

$eg = g$ を言える.

同様に $ge = g$ なので e: G の unit を言える.

(ii). G の任意の元が可逆であること.

Iの補題により. $e \in I_h = hI_h$ なので

$\exists k \in I_h$ s.t. $kh = hk = e$ より OK.

(iii). $g \mapsto g^{-1}$: conti なこと.

$G \times G \to G \times G$, $(g, h) \mapsto (g, gh)$ を考えると

これは conti であり, $(g, h) \mapsto (g, g^{-1}h)$ を

逆写像にもつ bijection である.

$G \times G$: cpt & Hdf より, 逆写像も conti なので

$g \mapsto ((g, e) \mapsto (g, g^{-1}) \mapsto) g^{-1}$ も conti

でなければいけない. ∎

Def

Iの Prp の設定における $G = (A, \Delta)$: CQG に対し

(A が commutative でなくても) A を $C(G)$ と書く.

Rem

Iの Prp の逆元の存在証明で

$f \mapsto \check{f}$, $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ ではなく簡約律を

用いたのは, あとで見るように $\check{f}$ の量子的な

類似物はほとんどの面白い例で非有界に

なってしまうからである.

群環

Rem

G: loc cpt Hdf gp とするとき、G は

・本質的に一意な left inv complex regular meas μ (Haar meas)

をもつ。Haar meas によって

$$C_c(G) = \{ f : G \to \mathbb{C}, \text{ conti}, \operatorname{supp} f : \text{cpt} \}$$

の上に たたみこみを定義できる：

$\forall f, g \in C_c(G)$,

$$(f * g)(t) = \int_G f(s) g(s^{-1}t) \, d\mu(s). \quad (t \in G).$$

このとき $f * g \in C_c(G)$ がいえる。

($f * g$: conti はルベーグの優収束定理より etc
$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f \cdot \operatorname{supp} g$)

・$g \in G$ に対し g による右移動 R_g で μ をうつすと
$R_g \mu$ はやはり左不変測度なので、
Haar meas の一意性から
$$R_g \mu = \Delta_G(g) \mu$$ となる $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ をとれる。
これを G の modular function という。

・$C_c(G)$ 上、
$$f^*(s) = \overline{f(s^{-1})} \Delta(s^{-1})$$
により対合を定められる。

これらにより $C_c(G)$ は $*$-alg となる。

・$C_c(G)$ は L^1 ノルムについて、$L^1(G)$ で dense である。
(meas. theory の一般論)

- $C_c(G)$ の
$$\|f\|_{c*} = \sup\{\|\pi(f)\| ;\ \underline{\pi \text{ は } L^1(G) \text{ の non-degenerate }*\text{-repr}}\}.$$
$$\pi : L^1(G) \to B(H),\ *\text{-hom}$$
$$H: \text{Hilb. sp}$$
$$\text{s.t. } \overline{\pi(L^1(G))H} = H.$$
による完備化を ~~gp~~ C^*-alg という。$C^*(G)$ と書く。

- $C_c(G)$ の
$$\|f\|_{c,r} = \sup\{\|f * g\|_2 : \|g\|_2 = 1\}.$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_G |f|^2 d\mu}$$
による完備化を reduced gp C^*-alg という。$C_r^*(G)$ と書く。

Rem.

Γ = discrete とするとき、

- $\|\pi(f)\| \le \|f\|_1 < \infty$ より $C^*(\Gamma)$ は well-defined である。
- $C_r^*(\Gamma)$ は $\ell^2(\Gamma)$ 上の left reg. repr λ により
$$(\gamma \in \Gamma \mapsto (\lambda_\gamma : \delta_{\gamma'} \mapsto \delta_{\gamma\gamma'}))$$
$\overline{\text{span}}\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ となる。

Example

Γ : discrete grp に対し

$C(G) = C_r^*(\Gamma)$. $\Delta(\lambda_\gamma) = \lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma$ により

CQG $\hat{\Gamma}$ を定める。

$\Sigma = C_r^*(\Gamma) \otimes C_r^*(\Gamma) \to C_r^*(\Gamma) \otimes C_r^*(\Gamma)$, flip.

$\Delta^{op} = \Sigma\Delta$ とするとき $\Delta = \Delta^{op}$ の意味で

Δ は余可換であるという。

Rem.

$C^*_r(\Gamma)$ のかわりに $C^*(\Gamma)$ を考えても同様に CQG を定めることができる。

任意の CQG で余可換なものについて、ある discrete gp Γ が存在して CQG は $C^*_r(\Gamma)$ と $C^*(\Gamma)$ の間にとれることが知られているが、証明は難しいので、かわりに $(C^*_r(\Gamma), \Delta)$ から Γ が復元されることをみよう。

$\{\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = \{a \in C^*_r(\Gamma) ; \Delta(a) = a \otimes a,\ a \neq 0\}$ である。

∵) $a \in C^*_r(\Gamma)$, $a \neq 0$, $\Delta(a) = a \otimes a$ とする。

τ : $C^*_r(\Gamma)$ 上の canonical trace とすると、

$\gamma \neq e \Rightarrow \tau(\lambda_\gamma) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} \langle \lambda_\gamma \delta_{\gamma'}, \delta_{\gamma'} \rangle = 0$.

τ : faithful (i.e. $b \in C^*_r(\Gamma)$, $\tau(b^* b) = 0 \Rightarrow b = 0$) より、

$\forall \gamma$: $\tau(\lambda_\gamma a) = 0$ ならば $a^* \in \overline{\mathrm{span}}\{\lambda_\gamma\}$ より $\tau(a^* a) = 0$

となり、$a \neq 0$ に矛盾するから、必要なら a を $\lambda_\gamma a$ でおきかえて $\tau(a) \neq 0$ としてよい。

E : $C^*_r(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$ を $E = (\iota \otimes \tau)\Delta$ で定めると、

$E(a) = \tau(a) a$, $E(\lambda_\gamma) = 0$ $(\gamma \neq e)$ である。

a は λ_γ たちの lin. combi で norm 近似できるので $\tau(a) a$ もそんなかんじだから、$\tau(a) a$ は λ_e の定数倍で a はスカラーであるとわかる。

$\Delta(a) = a \otimes a$ より、$a = 1 = \lambda_e$ となる。 ▯

Prop

A = unital C^*-alg で

$\{(u_{ij})\}_{i,j} \in M_n(A)$ で $(u_{ij}), (u_{ij}^*)$ は可逆である列

生成される

$\Delta : A \to A\otimes A$, $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik}\otimes u_{kj}$: unital $*$-hom

$\Rightarrow (A, \Delta)$ = CQG.

∵)

① Δ の余結合則:

$(\Delta\otimes\iota)\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n u_{il}\otimes u_{lk}\right)\otimes u_{kj}$

$= \sum_{l=1}^n u_{il}\otimes \sum_{k=1}^n u_{lk}\otimes u_{kj} = (\iota\otimes\Delta)\Delta(u_{ij})$ よりOK.

② cancellation:

$(1\otimes A)\Delta(A) \overset{dense}{\subset} A\otimes A$ をいうには、$*$ をとって

$B = \{a\in A : a\otimes 1 = \sum_i \Delta(x_i)(1\otimes y_i),\ ^\exists x_i, y_i\in A\} \overset{dense}{\subset} A$

をいえば十分である. B = 線型 sp は明らか.

$a\otimes 1 = \sum_i \Delta(x_i)(1\otimes y_i)$, $b\otimes 1 = \sum_j \Delta(x_j')(1\otimes y_j')$

とするとき、

$ab\otimes 1 = \sum_i \Delta(x_i)(1\otimes y_i)(b\otimes 1)$

$= \sum_i \Delta(x_i)(b\otimes 1)(1\otimes y_i) = \sum_{i,j}\Delta(x_i x_j')(1\otimes y_j' y_i)$

より B = alg である.

$v = (u_{ij})^{-1} = (v_{ij})$ とするとき、

$\sum_{j=1}^n \Delta(u_{ij})(1\otimes v_{jk}) = \sum_{j,l}^n u_{il}\otimes u_{lj}v_{jk} = u_{ik}\otimes 1$

より $u_{ij}\in B$ である. $u_{ij}^*\in B$ も同様.

したがって $B \overset{dense}{\subset} A$ となる. $(A\otimes 1)\Delta(A) \overset{dense}{\subset} A$ も同様. □

Def

CQG で上の Prop の仮定をみたすものを compact matrix pseudogp という.

Def.

$\mathcal{G} = \{x_i : i \in \Omega\}$: 生成元.

$\mathcal{R}$ = $\mathcal{G}$ 上の関係式

生成元の間の代数的な式や
$\|R(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}, x_{i_1}^*, \cdots, x_{i_n}^*)\| \leq \eta$
≥ 0.
2n 変数の複素係数多項式 . . .

などで、Hilb. sp 上の op としてかけるもので、生成元を Hilb. sp 上の op としてかいたときには $\|\cdot\|$ について上に有界であるとする.

・$(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ の repr とは. Hilb. sp H 上の bdd ops $\{T_i : i \in \Omega\}$ で上の relation をみたすものをいう.

・$(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ の repr は $\mathcal{G}$ による free $*$-alg A の $*$-repr を定める.

$x \in A$ に対し
・$\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi$ は $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ の repr$\}$ とすると、
$\forall x \in A$. $\|x\| < \infty$ のときこれは A 上の C^* seminorm を定める.
seminorm が 0 になるものでわってえられる完備化を $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ の universal C^* alg といい, $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ とかく.

Rem.

∴ 任意の $*$-alg に対して. univ. C^* alg がとれるとは限らないことに気をつけよう.

∴ 今からみていく例では matrix alg の unitary の成分を生成元にとることがある. (生成元の $\|\cdot\| \leq 1$ となり univ. C^* alg は well-defined である.

Lem.

A = $*$-alg. $u \in M_n(A)$ = unitary

$\Rightarrow$ $\Delta_n(u) := \left(\sum_k u_{ik} \otimes u_{kj} \right)_{ij} \in M_n(A \otimes A)$

も unitary.

:) $u = (u_{ij})$ = unitary より.

$$(u^* u)_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij}.$$

$$(u u^*)_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{jk}^* = \delta_{ij} \quad \text{である.}$$

$$(\Delta_n(u)^* \Delta_n(u))_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_l u_{kl}^* \otimes u_{li}^* \right) \left(\sum_m u_{km} \otimes u_{mj} \right)$$

$$= \sum_{k,l,m} u_{kl}^* u_{km} \otimes u_{li}^* u_{mj}$$

$$= \sum_{l,m} \delta_{lm} (1 \otimes u_{li}^* u_{mj}).$$

$$= \sum_l 1 \otimes u_{li}^* u_{lj} = \delta_{ij}.$$

$$(\Delta_n(u) \Delta_n(u)^*)_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_l u_{il} \otimes u_{lk} \right) \left(\sum_m u_{jm}^* \otimes u_{mk}^* \right)$$

$$= \sum_{k,l,m} u_{il} u_{jm}^* \otimes u_{lk} u_{mk}^*$$

$$= \sum_{l,m} (u_{il} u_{jm}^* \otimes 1) \delta_{lm}$$

$$= \sum_l u_{il} u_{jl}^* \otimes 1 = \delta_{ij} \quad \text{より, 示せた.}$$

■.

__Example__ (Quantum $SU(2)$ gp)

$\mu \in [-1, 1]$, $\neq 0$ とする.

- $C(SU_\mu(2))$ を,

$$U = (u_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$$ が unitary となる

ような α, γ で生成される univ. C^*-alg とする.

つまり, α, γ は次の5つの関係式

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1, \quad \alpha\alpha^* + \mu^2\gamma^*\gamma = 1,$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\gamma = \mu\gamma\alpha, \quad \alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha$$

をみたすとする.

- $\Delta : A \to A \otimes A$ を $*$-hom を

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$$ で定める.

(well-definedness :

$\Delta(\alpha^*) = \Delta(\alpha)^*$, $\Delta(-\mu\gamma^*) = -\mu\Delta(\gamma)^*$ より,

$\alpha' = \Delta(\alpha)$, $\gamma' = \Delta(\gamma)$ とおくとき

Lem より $\begin{pmatrix} \alpha' & -\mu\gamma'^* \\ \gamma' & \alpha'^* \end{pmatrix}$ も unitary である.

よって universality より Δ は well-defined である.)

- $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\lambda^2 = \mu$ なるものとすると,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -\mu\gamma \\ \gamma^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda\gamma^* & -\lambda\alpha \\ \lambda^{-1}\alpha^* & -\lambda\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$$

なので $(u_{ij}^*)_{i,j}$ は可逆である.

よって, $(C(SU_\mu(2)), \Delta)$ は CQG であり, これを $SU_\mu(2)$ とかく.

・ $q=1$ のとき、$C(SU_1(2)) \cong C(SU(2))$ である。

∵) (i). $\widehat{u_{ij}}(V) = (V_{ij})$ $(V\in SU(2))$ という

関数 $\widehat{u_{ij}} : SU(2) \to \mathbb{C}$ を考えると、

$\widehat{u_{ij}}$ は u_{ij} と同じ関係式をみたすので

$\pi(u_{ij}) = \widehat{u_{ij}}$ なる unital *-hom.

$\pi : C(SU_1(2)) \to C(SU(2))$ をとる。

$V, W \in SU(2)$, $V\neq W \Rightarrow {}^\exists i,j$ s.t. $V_{ij}\neq W_{ij}$ より

$\pi(C(SU_1(2)))$ は $SU(2)$ の2点をみわけるので

Stone-Weierstrass thm よりこれは全射である。

(ii). $\chi \in \Omega(C(SU_1(2)))$ をとると、

$$\chi(U) = \begin{pmatrix}\chi(u_{11}) & \chi(u_{12})\\ \chi(u_{21}) & \chi(u_{22})\end{pmatrix} \in SU(2) \text{ なので}$$

$\chi = (C(SU(2))$ 上の char. $f\mapsto f(\chi(U)))\circ\pi$

とかけるが、

$g\in C(SU_1(2))$, $\pi(g)=0$ とすると、

${}^\forall \chi\in\Omega(C(SU_1(2)))$, $\chi(g)=0$ であり、

$C(SU_1(2))$: abelian より g: normal なので

$$\|g\| = \sup_{\chi\in\Omega} \|\chi(g)\| = 0 \quad \therefore g=0.$$

したがって π: 単射 である。

よって π は 全単射で、とくに同型である。

(iii). π は $C(SU(2))$ において

$$\Delta(\widehat{u_{ij}}) = \sum_p \widehat{u_{ip}} \otimes \widehat{u_{pj}} \quad (\text{行列の積})$$

について余積を保つ。

・ この意味で、$q=1$ での $SU_q(2)$ は $SU(2)$ の"変形"とみれる。

Example

$F \in GL_n(\mathbb{C})$. $(n \geq 2)$.

- $A_u(F)$ を u_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ であって
  $U = (u_{ij})$ と $U^c = (u_{ij}^*)$ について
  U, FU^cF^{-1} : unitary となるもので
  生成される universal C^*-alg とする.
- $\Delta : A_u(F) \to A_u(F) \otimes A_u(F)$ は $*$-hom を
  $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$ で定める.

  (well-definedness :
  $(\Delta(u_{ij}))$, $F(\Delta(u_{ij})^c)F^{-1}$ = unitary を
  言えばよい.
  Lem より $(\Delta(u_{ij}))$, $(\Delta(FU^cF^{-1}))$ = unitary が
  わかっている.

  $$\Delta((FU^cF^{-1})_{ij}) = \sum_{k,l,m,p,q} (F_{ik} u^*_{kl} F^{-1}_{lm}) \otimes (F_{mp} u^*_{pq} F^{-1}_{qj})$$
  $$= \sum_{k,l,q} F_{ik}(u^*_{kl} \otimes u^*_{lq})F^{-1}_{qj}$$
  $$= F(\Delta(u_{ij}^c))F^{-1}$$ より, Δ = well-defined.)

- U^c = 可逆 より, $(A_u(F), \Delta)$ は CQG である.
  $A_u(F)$ でこの CQG そのもののことも表すことにする.
- $F = 1$ のとき, $A_u(F)$ を $A_u(n)$ とかく.
- $C(U(n))$ は $A_u(n)$ の関係式 (+可換性) を
  みたすので, $A_u(F)$ は $C(U(n))$ の一般化と
  みることができる.

Example (Free orthogonal quantum grp)

$F \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ を $\bar{F} = (\bar{F_{ij}})$ とするとき

$F\bar{F} = c1$ をみたすものとする.

- $A_o(F)$ を, u_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ で

  $U = (u_{ij})$, $U = F U^c F^{-1}$: unitary

  となるものによる univ. C*-alg とする.

- $\Delta : A_o(F) \to A_o(F) \otimes A_o(F)$: *-hom を

  $\Delta(u_{ij}) = \sum_p u_{ip} \otimes u_{pj}$ で定める.

  (well-definedness:

  Lem より $(\Delta(u_{ij}))$, $(\Delta(FU^cF^{-1}))$: unitary で,

  $A_u(F)$ のときと同様に $F\Delta(U^c)F^{-1}$ も unitary

  なので, universality より Δ: well-defined.)

- U^c: 可逆 より $(A_o(F), \Delta)$: CQG で,

  CQG そのものも $A_o(F)$ と書くことにする.

- $SU_q(2)$ は $F = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda^2 = q)$ とした

  $A_o(F)$ である.

- $F = 1$ のとき $A_o(F)$ を $A_o(n)$ と書く.

- $C(O(n;\mathbb{R}))$ は $A_o(F)$ の条件(+可換性)を

  みたすので, $A_o(F)$ は $C(O(n;\mathbb{R}))$ の

  一般化といえる.

__Example__ (Quantum permutation gp).

$n\in\mathbb{N}$ とする.

・ $A_s(n)$ を u_{ij} $(1\le i,j\le n)$ であって
$U=(u_{ij})$ が "magic unitary" であるもの.
つまり ・U = unitary. ・$^\forall u_{ij}$ = prj
・各列, 各行の射影の和 = 1 をみたすもの
による univ. C^*-alg とする.

・ $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik}\otimes u_{kj}$ により
$A_s(n)\to A_s(n)\otimes A_s(n)$. $*$-hom を定める.

(well-definedness:
Lem より $(\Delta(u_{ij}))$ = unitary は ok.
また, $^\forall u_{ij}$ = prj より, $^\forall\Delta(u_{ij})$ も prj である.

$$\sum_{i=1}^n (\Delta(u_{ij})) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n u_{ik}\otimes u_{kj}$$
$$=\sum_{k=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n u_{ik}\Big)\otimes u_{kj} = \sum_{k=1}^n 1\otimes u_{kj} = 1\otimes 1.$$
$$\sum_{j=1}^n (\Delta(u_{ij})) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n u_{ik}\otimes u_{kj}$$
$$=\sum_{k=1}^n u_{ik}\otimes\Big(\sum_{j=1}^n u_{kj}\Big) = \sum_{k=1}^n u_{ik}\otimes 1 = 1\otimes 1$$

よって $(\Delta(u_{ij}))$ も u_{ij} と同じ関係式をみたすので
Δ は well-defined.)

・ $U^c = U$ より $(A_s(n), \Delta)$ は CQG となる.

・ S_n = 対称群 とするとき,
$C(A_s(n)) \to C(S_n)$, 余積を保つ unital $*$-hom
$u_{ij}\mapsto \chi_{\{\sigma\in S_n : \sigma(j)=i\}}$ をとる.

(well-definedness は $\chi_{\{\sigma\in S_n:\sigma(j)=i\}}$ が
u_{ij} の関係式をみたすことより明らか.)

余積を保つこと：

$$\Delta\left(\chi_{\{\sigma\in S_n : \sigma(i)=j\}}\right)(\sigma',\sigma'') = \chi_{\{\sigma(i)=j\}}(\sigma'\sigma'').$$

$$\left(\sum_k \chi_{\{\sigma(i)=k\}} \otimes \chi_{\{\sigma(k)=j\}}\right)(\sigma',\sigma'')$$

$$= \sum_k \chi_{\{\sigma(i)=k\}}(\sigma')\,\chi_{\{\sigma(k)=j\}}(\sigma'')$$

$$= \chi_{\{\sigma(i)=j\}}(\sigma'\sigma'')$$

よりOK.

- $n=1,2,3$ のとき $A_s(n)=C(S_n)$ だが
$n\geq 4$ のとき $A_s(n)$ = 非可換，無限次元で
$A_s(n)\neq C(S_n)$ となる.
$A_s(n)$ は $C(S_n)$ の一般になっているとみれる.

∵)

$C(S_n)$ は $A_s(n)$ の条件 + 可換性をみたすので
$$C(S_n) = A_s(n)/\langle ab=ba\rangle$$
になっていることに気をつける.

- $N=1$ のとき.
$A_s(n) = C(S_n) = \mathbb{C}$ よりOK.

- $N=2$ のとき.
magic matrices は $p=p^*$ として
$$U = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$
の形になるので
$A_s(2)$ = 可換である.
よって $A_s(2) = C(S_2)$ となる.

・$N=3$ のとき.

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & 1-u_{11}-u_{21} \\ u_{12} & u_{22} & 1-u_{21}-u_{22} \\ 1-u_{11}-u_{12} & 1-u_{21}-u_{22} & u_{11}+u_{12}+u_{21}+u_{22}-1 \end{pmatrix}$$ とおける.

$U^*U=UU^*=1$ より u_{11} と u_{12}, u_{21}, u_{22} と u_{21}, u_{12} は可換である ことが わかる.

したがって, u_{11}, u_{22} が可換なことをみればよい.

$$u_{11}u_{22} = u_{11}u_{22}(u_{11}+u_{12}+u_{13})$$
$$= u_{11}u_{22}u_{11} + u_{11}u_{22}u_{13}$$
$$= u_{11}u_{22}u_{11} + u_{11}(1-u_{21}-u_{23})u_{13}$$
$$= u_{11}u_{22}u_{11}.$$

involution より $u_{22}=u_{11}u_{22}u_{11}$ を言えるので $u_{11}u_{22}=u_{22}u_{11}$ である.

・$N=4$ のとき.

$$U=\begin{pmatrix} p & 1-p & & 0 \\ 1-p & p & & \\ & & f & 1-f \\ 0 & & 1-f & f \end{pmatrix}$$, p, f: proj. 非可換

$C^*(p,f)$: 無限次元 でとれる.

・$N\geq 5$ のとき.

$A_s(4)\subset A_s(N)$ を

$$u \longrightarrow \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{N-4} \end{pmatrix}$$ によりとるので.

$N=4$ で非可換・無限次元 より OK. 終.

1.2. Haar state

Def.

G: CQG, $\omega_1, \omega_2 \in C(G)^*$ に対し convolution $*$ を

$$\omega_1 * \omega_2 = (\omega_1 \otimes \omega_2)\Delta$$

と定める.

これは $C(G)^*$ の元となる.

Rem

G: cpt grp のとき, 上で定めた convolution は
G 上の meas についての convolution と一致する.

i.e. $M(G) = \{\nu : G$ 上の complex reg Borel meas$\}$

(i.e. $\nu \in M(G)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ \forall K \subset G \text{ cpt},\ \nu(G) < \infty \\ \cdot\ \forall A \in B(G),\ \nu(A) = \inf\{\nu(U) : A \subset U \text{ open}\} \\ \cdot\ \forall U \overset{\text{open}}{\subset} G,\ \nu(U) = \sup\{\nu(K) : K \subset U \text{ cpt}\} \end{cases}$)

とするとき, $M(G)$ での convolution が

$$(\mu * \nu)(A) = \int \nu(x^{-1}A)\mu(dx) = \int \mu(Ay^{-1})\nu(dy)$$

で定まるのだった.

また, Riesz–Markov の定理により

$$M(G) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} B(C(G))$$
$$\mu \longleftrightarrow \left(f \mapsto \varphi_\mu(f) = \int_G f(s)\,d\mu(s)\right)$$

が成り立つのだった.

このとき, $f \in C(G)$ とすると

$$\varphi_{\mu*\nu}(f) = \int f\, d(\mu*\nu) = \iint f(xy)\mu(dx)\nu(dy)$$
$$= \iint f(xy)\nu(dy)\mu(dx) = (\varphi_\mu \otimes \varphi_\nu)\Delta(f)$$

により $M(G)$ での convolution と上での $*$ は
一致する.

とくに ν: G の Haar meas とするとき,

$$\mu * \nu = \nu * \mu = \mu(G)\nu, \quad \forall \mu \in M(G)$$

をみたすのだった.

次の定理は規格化された Haar meas の存在と一意性を quantum のときに拡張できることを主張している。

Thm 1.2.1

$^\forall G$ = cpt quantum grp. $\exists ! h$: $C(G)$ 上の state

s.t. $\omega * h = h * \omega = \omega(1) h$. $^\forall \omega \in C(G)^*$ ···★.

::)

① 一意性.

h' も ★をみたしたとすると,

$h' * h = h * h' = h(1) h' = h'(1) h$ より $h = h'$.

② 存在.

(1). $^\forall \omega \in S(C(G))$, $\exists h \in S(C(G))$.

s.t. $\omega * h = h * \omega = h$.

::). $h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega^{*k}$ $\quad (\omega^{*k} = \underbrace{\omega * \cdots * \omega}_{k\text{コ}})$

とおくと, $\varphi, \psi \in S(C(G))$ に対して

$\varphi * \psi = (\varphi \otimes \psi)\Delta$: positive,

$\varphi * \psi (1) = 1$ より $\varphi * \psi \in S(C(G))$.

よって, その convex lin combi の h_n についても

$h_n \in S(C(G))$ である.

また, $h_n * \omega = h_n + \underbrace{\frac{1}{n}(\underbrace{\omega * \cdots * \omega}_{n+1\text{コ}} - \omega)}_{\|\cdot\| \le \frac{2}{n} \to 0}$ より

$S(C(G))$ = convex w^* cpt なので $\{h_n\}$ は収束する subnet をもつ. その収束先を h とすると

$h * \omega = \omega * h = h$ をみたす.

(ii). $0 \le v \le w$. $w * h = h * w = w(1)h$.

$\Rightarrow v * h = h * v = v(1)h$.

∵). $w(1) = 1$ としてよい.

$a \in C(G)$ を fix し $b = (\iota\otimes h)\Delta(a)$ とおくと.

$(\iota\otimes w)\Delta(b) = (\iota\otimes w\otimes\iota)(\Delta\otimes\iota)((\iota\otimes h)\Delta(a))$

$= (\iota\otimes w\otimes h)(\Delta\otimes\iota)\Delta(a)$

$= (\iota\otimes w\otimes h)(\iota\otimes\Delta)\Delta(a)$

$= (\iota\otimes((w\otimes h)\Delta))\Delta(a)$

$= (\iota\otimes w*h)\Delta(a) = (\iota\otimes h)\Delta(a) = b$.

よって. $(\iota\otimes w)((b^*\otimes 1)\Delta(b))$

$= (b^*\otimes 1)(\iota\otimes w\Delta(b)) = b^*b$ から.

$(\iota\otimes w)((\Delta(b) - b\otimes 1)^*(\Delta(b) - (b\otimes 1)))$

$= (\iota\otimes w)\Delta(b^*b) - (\iota\otimes w)((b^*\otimes 1)\Delta(b))$

$- (\iota\otimes w)(\Delta(b^*)(b\otimes 1)) + (\iota\otimes w)(b^*b\otimes 1)$

$= (\iota\otimes w)\Delta(b^*b) - b^*b$.

左から $(h\otimes 1)$ を施して.

$(h\otimes w)((\Delta(b) - b\otimes 1)^*(\Delta(b) - (b\otimes 1))) = 0$ を得る.

よって. Cauchy-Schwarz ineq より.

$(h\otimes v)((c\otimes 1)(\Delta(b) - b\otimes 1)) = 0$. ${}^\forall c \in C(G)$.

これを用いると

$(h\otimes v*h)((c\otimes 1)\Delta(a))$

$= (h\otimes((v\otimes h)\Delta))((c\otimes 1)\Delta(a))$

$= (h\otimes v\otimes h)(\iota\otimes\Delta)((c\otimes 1)\Delta(a))$

$= (h\otimes v\otimes h)((c\otimes 1\otimes 1)(\iota\otimes\Delta)\Delta(a))$

$= (h\otimes v\otimes h)((c\otimes 1\otimes 1)(\Delta\otimes\iota)\Delta(a))$

$= (h\otimes v)(c\otimes 1)(\Delta\otimes\iota)(\iota\otimes h)\Delta(a)$

$= (h\otimes v)((c\otimes 1)(\Delta(b)))$.

$= (h \otimes v)(cb \otimes 1) = h(cb)v(1)$

$= v(1)(h \otimes h)((c \otimes 1)\Delta(a))$

$(C(G) \otimes 1)\Delta(C(G)) \overset{\text{dense}}{\subset} C(G) \otimes C(G)$ より

$v * h = v(1)\, h$ となる.

$h * v = v(1)\, h$ も同様.

(iii). $\omega \in C(G)^*_+$ に対し

$K_\omega = \{ h \in S(C(G)) : h*\omega = \omega * h = \omega(1) h \}$

とおくと. (ii) より $K_\omega \neq \phi$ である.

また, K_ω は closed である.

$F = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\} \subset C(G)$ の states に対し

$\omega_F = \frac{1}{n}(\omega_1 + \cdots + \omega_n)$ とおくと,

(i), (ii) より $\exists h_F \in S(C(G))$ s.t. $\omega_F * h_F = h_F * \omega_F = h_F$

よって, $\omega_i * h_F = h_F * \omega_i = h_F$

より, $\phi \neq \bigcap_{i=1}^{n} K_{\omega_i}$ なので. $\{K_\omega\}_{\omega \in S(C(G))}$ は

有限交叉性をもつ.

よって $S(C(G))$ は cpt より, $\exists h \in \bigcap_{\omega \in S(C(G))} K_\omega$ で

$S(C(G))$ が $C(G)^*$ を張るのでこれが求める h である. ⊠

Def.

In thm のこの h を Haar state という

h が定まる GNS repr で与えられる Hilbert sp を

$L^2(G)$ とかく.

Rem.

h の def として.

$(\iota \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \iota)\Delta(a) = h(a)1 \quad \forall a \in C(G)$

を用いても同じである.

1.3. REPRESENTATION THEORY.

☆. CQG G の有限次元ベクトル空間上の repr を扱う.

<u>Notation</u>

A = unital alg. $n, m \in \mathbb{N}$. $n \le m$.
$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$: inj が与えられているとする.
このとき、$A^{\otimes n} \hookrightarrow A^{\otimes m}$ のうめこみを定義できる.
$x \in A^{\otimes n}$ のこのうめこみによる像を $\gamma_i = \sigma(i)$ として
$x_{\gamma_1 \cdots \gamma_n}$ とする.

e.g.). $n = 2$, $m = 4$ のとき,

$$(a \otimes b)_{31} = b \otimes 1 \otimes a \otimes 1.$$

これは $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \hookrightarrow B_1 \otimes \cdots \otimes B_m$. ($B_{\sigma(i)} = A_i$)
に一般化できる.
m や $j \notin \operatorname{Im}\sigma$ での B_j に何をとるかは文脈による.
これを leg-numbering notation という.

<u>Recall</u>

G = cpt gp について. G の有限次元空間 H 上への repr は
$G \to GL(H)$, $g \mapsto U_g$ なる conti hom であった.
$C(G, B(H))$ を $B(H) \otimes C(G)$ と同一視して
$g \mapsto U_g$ を $U \in B(H) \otimes C(G)$ とみることができる.

($f \in C(G)$, $a \in B(H)$ に対し
$T : (a, f) \mapsto (fa : x \mapsto f(x)a)$ より
$B(H) \otimes C(G) \to C(G, B(H))$ iso を与える)

よくに．

i) $U_s U_t = U_{st}$ $(\forall s,t \in G)$． $\Leftrightarrow$ $(\iota\otimes\Delta)(U) = U_{12}U_{13}$

とかける．

ii)． $U = T\otimes f$ $\in B(H)\otimes C(G)$ とかけるとき，

$(\iota\otimes\Delta)(T\otimes f)(s,t)(\xi) = f(st)T(\xi) = U_{st}(\xi)$.

$(U_{12}U_{13})(s,t)(\xi)$

$= ((T\otimes f\otimes 1)(T\otimes 1\otimes f)(s,t))(\xi)$

$= f(s)f(t)T(T\xi) = U_s U_t(\xi)$．

$(\forall T\in B(H)．\forall f\in C(G)．\forall \xi\in H．\forall s,t\in G)$ //

これをもとに，CQG の repr を次のように定める．

<u>Def</u>

G：CQG；H：vec sp．$\dim H<\infty$ とするとき，

G の H 上での repr とは

$U\in B(H)\otimes C(G)$，可逆

s.t．$(\iota\otimes\Delta)(U) = U_{12}U_{13}$ in $B(H)\otimes C(G)\otimes C(G)$

のことをいう．

H：Hilb. sp．U：unitary のとき．repr は unitary

であるという．

しばしば repr U に対応する vec sp を H_U とかく．

Rem

$\xi_1 \cdots \xi_n$: H の basis.
$m_{ij} \in B(H)$ s.t. $m_{ij}\xi_k = \delta_{jk}\xi_i$ とするとき,
$(\iota\otimes\Delta)(U) = U_{12}U_{13}$ が $U = \sum_{i,j} m_{ij}\otimes u_{ij} \in B(H)\otimes C(G)$
で成り立つためには
$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\otimes u_{kj} \quad \text{でなければいけない.}$$

$\because$). $(\iota\otimes\Delta)(U) = \sum_{i,j} m_{ij}\otimes\Delta(u_{ij})$.
$$U_{12}U_{13} = \Big(\sum_{i,j} m_{ij}\otimes u_{ij}\otimes 1\Big)\Big(\sum_{k,l} m_{kl}\otimes 1\otimes u_{kl}\Big)$$
$$= \sum_{i,j,k,l} \underbrace{m_{ij}m_{kl}}_{=\begin{cases} m_{il} & (j=k) \\ 0 & (j\neq k)\end{cases}} \otimes u_{ij}\otimes u_{kl}$$
$$= \sum_{i,k,l} m_{il}\otimes u_{ik}\otimes u_{kl} = \sum_{i,k,j} m_{ij}\otimes u_{ik}\otimes u_{kj}. \quad /\!/$$

Ex. 1.1.5〜8 の $U = (u_{ij})_{i,j}$: unitary は対応する CQG で
unitary repr を定めていることがわかる.
これらを fundamental repr という.

・明らかに repr の直和やテンソル積をとることができる.

Def
U, V : finite dim repr に対しそのテンソル積を
$H_U\otimes H_V$ 上への repr $U\times V := U_{13}V_{23}$ で定める.
これを $U \textcircled{T} V$ とかく.

・repr の直和・テンソル積の well-definedness.

G = CQG. U, V = G の finite-dim repr. とする.

①. 直和.

$U \oplus V \in (B(H_U) \otimes C(G)) \oplus (B(H_V) \otimes C(G))$

$= (B(H_U) \oplus B(H_V)) \otimes C(G)$ を

$B(H_U \oplus H_V) \otimes C(G)$ の元とみて定める.

$(U \oplus V)^{-1} = U^{-1} \oplus V^{-1}$ よりこれは可逆で

$(U \oplus V)_{13} (U \oplus V)_{23}$

$= (U_{13} \oplus V_{13})(U_{23} \oplus V_{23})$

$= U_{13} U_{23} \oplus V_{13} V_{23}$

$= ((\iota \otimes \Delta)(U)) \oplus ((\iota \otimes \Delta)(V)) = (\iota \otimes \Delta)(U \oplus V)$.

②. テンソル積.

$U \times V := U_{13} V_{23} \in B(H_U) \otimes B(H_V) \otimes C(G)$

$\subset B(H_U \otimes H_V) \otimes C(G)$ とする.

と定めると, $(U \times V)^{-1} = V_{23}^{-1} U_{13}^{-1}$ よりこれは可逆.

$B(H_U \otimes H_V) = B(H_U) \otimes B(H_V)$ とみての

leg-numbering notation であることに

気をつけると,

$(\iota \otimes \Delta)(U \times V) = (\iota \otimes \Delta)(U_{13} V_{23})$.

$= U_{13} V_{23} U_{14} V_{24}$

$= U_{13} U_{14} . V_{23} V_{24}$

$= (U_{13} V_{23})_{123} . (U_{13} V_{23})_{124}$. ◻

よって. これらは well-defined である.

とくに $U \times V$ と $U \oplus V$ と書くことである.

• cpt matrix pseudogp の $U=(u_{ij})$ は unitary repr を定める.

∵) $U = \sum_{i,j} m_{ij} \otimes u_{ij}$ とするとき,

$$U^* = \sum_{i,j} m_{ji} \otimes u_{ij}^* \quad \text{で,}$$

$$UU^* = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \underbrace{m_{ij} m_{kl}}_{=\begin{cases} m_{il} & (j=k) \\ 0 & (j\neq k)\end{cases}} \otimes u_{ij} u_{lk}^* .$$

$$= \sum_{i,l} m_{il} \otimes \underbrace{\sum_j u_{ij} u_{lj}^*}_{=\begin{cases} 1 & (i=l) \\ 0 & (i\neq l)\end{cases}}$$

$$= \sum_i m_{ii} = 1 .$$

$$U^*U = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \underbrace{m_{kl} m_{ij}}_{=\begin{cases} m_{kj} & (l=i) \\ 0 & (l\neq i)\end{cases}} \otimes u_{lk}^* u_{ij}$$

$$= \sum_{k,j} m_{kj} \otimes \underbrace{\left(\sum_i u_{ik}^* u_{ij}\right)}_{=\begin{cases} 1 & (k=j) \\ 0 & (k\neq j)\end{cases}} = \sum_j m_{jj} = 1 .$$

より U は unitary となる.

Def

U, V: finite-dim rep. とする.

- $T: H_U \to H_V$ op が U, V を intertwine するとは,

$$(T \otimes 1) U = V (T \otimes 1)$$

が成り立つことをいう. T を繋絡作用素ともいう.

- $\mathrm{Mor}(U, V)$ で intertwiners 全体を表す.
- U, V: equiv $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Mor}(U, V)$ に可逆元が存在する. --- ☆
- U, V: unitarily equiv $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ unitary $\in \mathrm{Mor}(U, V)$.
- $\mathrm{End}(U) = \mathrm{Mor}(U, U)$.
- U: irreducible $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{End}(U) = \mathbb{C}$.

∵) ☆ の well-definedness:

- $U \sim U$: $T = id_{H_U}$ とすれば ok.
- $U \sim V \Rightarrow V \sim U$.

  $(T \otimes 1) U = V (T \otimes 1)$. T: 可逆とすると,

$$(T^{-1} \otimes 1)(T \otimes 1) U (T^{-1} \otimes 1)$$
$$= (T^{-1} \otimes 1) V (T \otimes 1)(T^{-1} \otimes 1)$$

  i.e. $U (T^{-1} \otimes 1) = (T^{-1} \otimes 1) V$.

- $U \sim V$, $V \sim W \Rightarrow U \sim W$.

  $(T \otimes 1) U = V (T \otimes 1)$. $(T' \otimes 1) V = W (T' \otimes 1)$ とすると,

$$(T' \otimes 1)(T \otimes 1) U = (T' T \otimes 1) U \quad //.$$

Rem.

U: unitary repr のとき、$End(U)$: C^* alg である。
一般に、$T \in Mor(U, V)$, U, V: unitary のとき
$T^* \in Mor(V, U)$ である。

∵)
①. U, V: unitary, $T \in Mor(U, V)$ とするとき、
$(T \otimes 1)U = V(T \otimes 1)$ から
$V^*(T \otimes 1)\cancel{U}U^* = \cancel{V^*}V(T \otimes 1)U^*$
両辺の $*$ をとって $(T^* \otimes 1)V = U(T^* \otimes 1)$ よりOK.

②. ①より $End(U)$ は $*$ で閉じている。
$End(U)$ = $\mathbb{C}$ sp は明らか。$T, T' \in End(U)$ とするとき、
$(T'T \otimes 1)U = (T' \otimes 1)(T \otimes 1)U$.
$= U(T' \otimes 1)(T \otimes 1) = U(T'T \otimes 1)$ より
$End(U)$: $*$-alg である。
$\{T_n\} \in End(U)$, $T_n \xrightarrow{\text{norm}} T \in B(H_U)$ とするとき、
$(T \otimes 1)U = \lim_{n\to\infty} (T_n \otimes 1)U$
$= \lim_{n\to\infty} U(T_n \otimes 1) = U(T \otimes 1)$ より
$End(U) \overset{\text{closed}}{\subset} B(H_U)$ なのでこれは C^* alg である //

Prop (Schur's lem)
U, V: irr. unitary repr とすると、
(1). U, V: unitarily equiv & $\dim Mor(U, V) = 1$
(2). $Mor(U, V) = 0$
のいずれかが成り立つ。

ii). $0 \neq T \in \mathrm{Mor}(U, V)$ とすると，

$$(T^*T \otimes 1)U = (T^* \otimes 1)V(T \otimes 1) = U(T^* \otimes 1)(T \otimes 1)$$
$$(TT^* \otimes 1)V = (T \otimes 1)U(T^* \otimes 1) = V(T \otimes 1)(T^* \otimes 1)$$

により $T^*T \in \mathrm{End}(U)$, $TT^* \in \mathrm{End}(V)$.

すなわち T^*T, TT^* : nonzero scalars となる．

よって T は unitary の定数倍であるとわかる．

$T \neq S \in \mathrm{Mor}(U, V)$ とすると，

$$(T^*S \otimes 1)U = (T^* \otimes 1)(S \otimes 1)U$$
$$= (T^* \otimes 1)V(S \otimes 1) = U(T^* \otimes 1)(S \otimes 1)$$

より $T^*S \in \mathrm{End}(U) = \mathbb{C}$ なので，

$\mathrm{Mor}(U, V) = \mathbb{C}T$ となる． ■.

次の Prop により，finite-dim repr のことを知るには unitary を調べればよいことがわかる．

<u>Prop</u>.

$G = \mathrm{CQG}$. $U = G$ の finite-dim repr

$\Rightarrow \exists V = G$ の finite-dim unitary repr s.t. U, V は equiv.

ii). U: finite dim repr とし H_U に任意の Hilb. sp としての構造を入れる.

$Q = (\iota\otimes h)(U^* U) \in B(H_U)$ を考える.

$C(G)$ の Haar state. $\in B(H_U)\otimes C(G)$.

U: 可逆より, $\exists \varepsilon>0$ s.t. $U^* U \geq \varepsilon 1$ なので $Q \geq \varepsilon 1$ である.

$(\iota\otimes\Delta)(U^* U) = U_{13}^* U_{12}^* U_{12} U_{13}$ である.

$\iota\otimes h\otimes\iota$ を施し $(h\otimes\iota)\Delta(\cdot) = h(\cdot)1$ を用いると,

$$(\iota\otimes h\otimes\iota)(\iota\otimes\Delta)(U^* U) = (\iota\otimes(h\otimes\iota)\Delta)U^* U = (\iota\otimes h)U^* U = Q.$$

$$(\iota\otimes h\otimes\iota)(U_{13}^* U_{12}^* U_{12} U_{13}) = U^*(Q\otimes 1)U$$ より

$Q\otimes 1 = U^*(Q\otimes 1)U$ となる.

したがって, $V = (Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)U(Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)$ とおくと,

$$V^* V = (Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)U^*(Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)(Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)U(Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)$$
$$= (Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)(Q\otimes 1)(Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1) = 1.$$

$$VV^* = (Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)U\underbrace{(Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)(Q^{-\frac{1}{2}}\otimes 1)}_{=U^{-1}(Q^{-1}\otimes 1)(U^*)^{-1}}U^*(Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)$$
$$= (Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1)(Q^{-1}\otimes 1)(Q^{\frac{1}{2}}\otimes 1) = 1.$$

より V: unitary であり, $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{Mor}(U, V)$ である. ∎

Rem.

$U \in B(H_U) \otimes C(G)$, $V \in B(H_V) \otimes C(G)$.
$(\iota \otimes \Delta)(U) = U_{12} U_{13}$, $(\iota \otimes \Delta)(V) = V_{12} V_{13}$.
$S : H_U \to H_V$. $\in$ op とするとき,
(1). $T = (\iota \otimes h)(V^*(S \otimes 1)U) \in B(H_U, H_V)$
と定めると, $V^*(T \otimes 1)U = T \otimes 1$ である.
とくに U, V : unitary のとき $T \in \mathrm{Mor}(U, V)$ である.
(2) 同様に $T = (\iota \otimes h)(V(S \otimes 1)U^*)$ とすると,
$V(T \otimes 1)U^* = T \otimes 1$ が成り立つ.

:).
(1). $(\iota \otimes \Delta)(V^*(S \otimes 1)U) = V_{13}^* V_{12}^* (S \otimes 1 \otimes 1) U_{12} U_{13}$.
$(\iota \otimes h \otimes \iota)(\iota \otimes \Delta)(V^*(S \otimes 1)U)$
$= (\iota \otimes h)(V^*(S \otimes 1)U) = T$.
$(\iota \otimes h \otimes \iota)(V_{13}^* V_{12}^* (S \otimes 1 \otimes 1) U_{12} U_{13})$
$= V^*_{13}((\iota \otimes h)(V^*(S \otimes 1)U) \otimes 1) U_{13}$.
$= V^*_{13}(T \otimes 1) U_{13} = V^*(T \otimes 1)U$.
U, V = unitary のとき, $(T \otimes 1)U = V(T \otimes 1)$ より
$T \in \mathrm{Mor}(U, V)$.
(2). $(\iota \otimes \Delta)(V(S \otimes 1)U^*) = V_{12} V_{13} (S \otimes 1 \otimes 1) U_{13}^* U_{12}^*$
$(\iota \otimes h \otimes \iota)(\iota \otimes \Delta)(V(S \otimes 1)U^*)$.
$= (\iota \otimes h)(V(S \otimes 1)U^*) = T$
$(\iota \otimes h \otimes \iota)(V_{12} V_{13} (S \otimes 1 \otimes 1) U_{13}^* U_{12}^*)$.
$= V_{13}(((\iota \otimes h)(V(S \otimes 1)U^*)) \otimes 1) U_{13}^*$
$= V(T \otimes 1)U^*$
((1) で V^*をVに, UをU^*にとりかえればよい)

e_i : proj's
i.e. $e_i A e_i = \mathbb{C} e_i$.

Lem.

A = finite-dim C^*-alg.

$\Rightarrow \exists\, e_1, \dots, e_n$: minimal proj's s.t. $\sum e_i = 1$, $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$.

∵). $A \underset{*\text{-isom}}{\cong} M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ とかける.

よって はじめから $A = \underset{\text{simple}}{\underline{M_n(\mathbb{C})}}$ としてよい.

①. $aAb \neq \{0\}$ $\forall a, b \neq 0 \in A$.

∵). $AaA = \{\sum_{i=1}^{n} x_i a y_i : x_i, y_i \in A\}$

: Aのideal より $\{0\} \neq AaA = A$ なので

$aAb = \{0\}$ とすると $AaAb = Ab = \{0\}$ だが $1 \in A$ より矛盾.

②. B = A の max. ab. s.a. subalg とする.

∵) $S = \{B : A$ の ab. s.a. subalg$\}$ とする.

⊂ による順序を入れる.

Λ : S の chain とするとき.

$B' = \bigcup_{B \in \Lambda} B$ とすると,

$b, b' \in B'$ について, $\exists B$: 十分大

s.t. $b, b' \in B$ より $b + b'$, bb', bの定数倍, $b^* \in B'$.

よって B' は Λ の上界なので Zorn's lem より

maximal をとれる.

$\dim B < \infty$ より, P : Bの spectrum は有限集合で

$P = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ とかける.

e_i を δ_{γ_i} に対応する B の proj とすると,

$\{e_i\}$ は互いに直交し $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ で,

$B \cong \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ である.

$e_i A e_i$ は任意のe_jと可換で, Bは$\{e_i\}$で生成される

max. ab より $e_i A e_i \subset B$ であり,

$e_i A e_i = \mathbb{C} e_i$ である.

Thm

G = CQG. U = finite dim rep of G. とするとき

U は ireps の直和で表せる。

∵).

① U = unitary としてよい。

∵). U はある V = unitary に equiv なので、

$\exists T \in B(H_U, H_V)$. 可逆

s.t. $(T \otimes 1)U = V(T \otimes 1)$.

i.e. $U = (T^{-1} \otimes 1)V(T \otimes 1)$.

V = irr $\Rightarrow$ U = irr を示せばよい。

$T' \in \mathrm{End}(U)$ とするとき

$(T' \otimes 1)(T^{-1} \otimes 1)V(T \otimes 1)$

$= (T^{-1} \otimes 1)V(T \otimes 1)(T' \otimes 1)$ より

$(T \otimes 1)(T' \otimes 1)(T^{-1} \otimes 1) \in \mathrm{End}(V) = \mathbb{C}1_{H_V}$

なので $T' \otimes 1 \in \mathbb{C}1_{H_U}$. i.e. $\mathrm{End}(U) = \mathbb{C}1_{H_U}$ //

② $\mathrm{End}(U)$ = finite-dim C^*-alg より、

$\exists e_1, \dots, e_n$: minimal projs of $\mathrm{End}(U)$.

s.t. $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$. $\sum e_i = 1$.

このとき、$(e_i \otimes 1)U$ は G の $e_i H$ 上への irrep であり

$(e_i \otimes 1)U$ の直和は U である。

∵). $T \in \mathrm{End}((e_i \otimes 1)U)$ とするとき

$(e_i \otimes 1)U = U_{e_i H}$ より、

$T' = \begin{cases} T & \text{on } e_i H \\ 0 & \text{on } (e_i H)^\perp \end{cases}$ $\in \mathrm{End}(U)$ で、

T は $e_i T' e_i \in \mathbb{C} e_i = \mathbb{C}1_{e_i H}$ に対応する。

よって、$(e_i \otimes 1)U$ = irrep である。 Q.E.D.

次に、反傾表現 (contragradient repr) を定義する.

Rem

- G = grp. $g \mapsto U_g$: G の $\mathcal{H}$ 上への repr とするとき,
  $\mathcal{H}^*$: dual sp 上への U^c = contragradient repr を
  $$(U_g^c f)(\xi) = f(U_{g^{-1}}\xi) \quad (f \in \mathcal{H}^*, \xi \in \mathcal{H})$$
  で定める.

(well-definedness : $U^c : G \to GL(\mathcal{H}^*)$: hom であること.
$g_1, g_2 \in G$ とするとき,
$$(U_{g_1g_2}^c f)(\xi) = f(U_{g_1g_2}^{-1}\xi) = f(U_{g_2}^{-1}U_{g_1}^{-1}\xi)$$
$$= (U_{g_2}^c f)(U_{g_1}^{-1}\xi) = (U_{g_1}^c U_{g_2}^c f)(\xi) \text{ より}$$
$U_{g_1g_2}^c = U_{g_1}^c U_{g_2}^c$ なのでこれは hom である.
$(U_g^c)^{-1} = U_{g^{-1}}^c$ より, $U^c(G) \subset GL(\mathcal{H}^*)$ もOK.)

- $\mathcal{H}$: Hilb. sp のとき. $\mathcal{H}^*$ は complex conj Hilb. sp $\bar{\mathcal{H}}$ と同一視できるのだった. (Riesz repr thm).
このとき U : unitary repr $\Rightarrow$. U^c : unitary repr である.
(∵). U : unitary repr とするとき,
$\forall g \in G$. $U_g^* U_g = UU_g^* = 1$ で,
$U^{c*} : G \to GL(V)$ は
$$(U_g^{c*} f)(\xi) = (U_g^c f)^*(\xi) = f(U_g^{-1}\xi)^*$$
$$= f((U_g^{-1})^*\xi) = f((U_g^*)^{-1}\xi) = ((U_g^*)^c f)(\xi) \text{ より}$$
$$(U_g^c)^* = (U_g^*)^c \text{ なので}$$
$$(U_g^c)^*(U_g^c) = (U_g^* U_g)^c = 1$$
$$(U_g^c)(U_g^c)^* = (U_g U_g^*)^c = 1 \quad \text{よりOK.}$$
但しこれの quantum 版は成り立たない. (あとでみる).

Notation

H = finite-dim vec sp. とする.

H^* = dual sp にかく.

$j : B(H) \to B(H^*)$ で op を dual op に対応する map とする.

ここですべての空間に対して自然な等号を用いることで

j^2 = well-defined とし, $j^2 = \mathrm{id}$ とみれるようにする.

H = Hilb. sp のとき $H^* = \bar{H}$ とみれるので

$$j(T)\bar{\xi} = \overline{T^*\xi}$$ となり, ($T \in B(H)$, $\bar{\xi} \in \bar{H}$).

j : $*$-anti hom となることに気をつけよう.

$$\left(\begin{array}{l} j(TT')\bar{\xi} = \overline{(TT')^*\xi} = \overline{T'^*T^*\xi} = j(T')j(T)\bar{\xi} \\ \bar{\xi} : x \mapsto \langle x, \xi \rangle . \ (j(T)\bar{\xi})(x) = \langle Tx, \xi \rangle = \langle x, T^*\xi \rangle \end{array} \right)$$

Def.

G = CQG. U = G の repr に対し その dual sp 上の contragradient repr U^c を

$$U^c = (j \otimes \iota)(U^{-1}) \in B(H^*) \otimes C(G)$$

で定める.

※ U^c が invertible かどうかは明らかでないので

まだこの定義でうまくいっているかはわからない.

これから確かめていこう.

Dem

G = grp. U = G の finite-dim rep.
$H = H_U$. $f \in H^*$, $\xi \in H$ とするとき,
$(U_g^c f)(\xi) = f(U_{g^{-1}}\xi)$ $(f \in H^*, \xi \in H)$
による U^c は $U^c = (j \otimes \iota)(U^{-1}) \in B(H^*) \otimes C(G)$
をみたす.

∵) $(U_g^c f)(\xi) = f(U_{g^{-1}}(\xi)) = ((U_{g^{-1}})^*(f))(\xi)$.
より, $U_g^c = (U_{g^{-1}})^*$ である.
したがって, $U^{-1} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes a_i$ とおいておくとき,
$(U_{g^{-1}})^* = \sum_i a_i(g)\, \varphi_i^*$ なので
$U^c = (j \otimes \iota)\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes a_i\right)$
$= (j \otimes \iota)(U^{-1})$. であるから, ok.
∎

Note.

U が ある H の基底に対し (u_{ij}) という表現をもつとすると，U^c は $\bar{H}$ での双対基底について (u_{ij}^*) という行列表示でかける．

∵). $U = \sum_{ij} m_{ij} \otimes u_{ij}$ とかけるとき，

$$U^{-1} = U^* = \sum_{ij} m_{ji} \otimes u_{ij}^* \quad \text{なので}$$

$$U^c = (j \otimes \iota)(U^{-1}) = \sum_{ij} m_{ij} \otimes u_{ij}^*$$

となる．

とくに Prop 1.1.4 の仮定はここからくる．

Rem.

$(\iota \otimes \Delta)(U^{-1}) = U_{13}^{-1} U_{12}^{-1}$ と

j = anti-hom より，

$(\iota \otimes \Delta)(U^c) = U_{12}^c U_{13}^c$ となる．

∵). $(\iota \otimes \Delta)(U^c) = (\iota \otimes \Delta)(j \otimes \iota)(U^{-1})$

$= (j \otimes \iota \otimes \iota)(\iota \otimes \Delta)(U^{-1})$

$= (j \otimes \iota \otimes \iota)(U_{13}^{-1} U_{12}^{-1}) = U_{12}^c U_{13}^c$.

しかし U^c = 可逆を示すにはまだ準備が必要である．

Prop

$U \in B(H) \otimes C(G)$: finite-dim unitary repr

$B = \{(\iota\otimes h)(U(1\otimes a)) : a \in C(G)\} \subset B(H)$

とすると、 B は $B(H)$ の unit を含む $*$-subalg で

$U \in B \otimes C(G)$ である。 　　　　↑ とくに closed.

証) ① $a \in C(G)$ に対し

$L(a) = (\iota\otimes h)(U(1\otimes a)) \in B(H)$ と定める。

$U_{12}^* (\iota\otimes\Delta)(U(1\otimes a))$

$= U_{12}^* \underbrace{((\iota\otimes\Delta)U)}_{=U_{12}U_{13}}((\iota\otimes\Delta)(1\otimes a))$

$= U_{13}(1\otimes\Delta(a))$ である。

両辺に $(\iota\otimes\iota\otimes h)$ を施して

$(\iota\otimes\iota\otimes h)\, U_{12}^* (\iota\otimes\Delta)(U(1\otimes a))$

$= U^* \underbrace{(\iota\otimes\iota\otimes h)(\iota\otimes\Delta)}_{=\iota\otimes\underbrace{((\iota\otimes h)\Delta)}_{=h}}(U(1\otimes a))$

$= U^*(L(a)\otimes 1)$ より

$U^*(L(a)\otimes 1) = (\iota\otimes\iota\otimes h)(U_{13}(1\otimes\Delta(a)))$ ⋯ ※

となる。

$L(b^*) = (\iota\otimes h)((1\otimes b^*)U^*)$ より。

前の式 を $(1\otimes b^*)$ 倍して $(\iota\otimes h)$ を施すと、

$L(b)^* L(a) = (\iota\otimes h)(1\otimes b^*)U^*(L(a)\otimes 1)$

$= (\iota\otimes h\otimes\iota)(1\otimes b^*\otimes 1)(\iota\otimes\iota\otimes h)(U_{13}(1\otimes\Delta(a)))$

$= (\iota\otimes h\otimes h)(U_{13}(1\otimes(b^*\otimes 1)\Delta(a)))$

$= (\iota\otimes\iota\otimes h)(U_{13}(\underbrace{(\iota\otimes h\otimes\iota)(1\otimes\underbrace{(b^*\otimes 1)\Delta(a)}_{\in C(G)\otimes C(G)})}_{\in C(G)}))$

したがって、$\forall a, b \in C(G)$, $L(b)^* L(a) \in B$ であり、
$(C(G) \otimes 1) \cap (C(G)) \overset{\text{dense}}{\subset} C(G) \otimes C(G)$ より、
B は $L(b)^* L(a)$ の形の元で生成される。
よって $B = $ s.a. であり、B は $L(b)^*$ の形の元で
生成される $*$-alg である。

② $U(B(H) \otimes C(G)) = B(H) \otimes C(G)$ より $a \in C(G)$, $T \in B(H)$ とり
$(\iota \otimes h)(U(1 \otimes a))(T \otimes 1) = (\iota \otimes h)(U(T \otimes a))$ の形の元は
$B(H)$ で dense なので $BB(H) = B(H)$.
i.e. $B \curvearrowright B(H)$. non-degen. B = s-closed より $\mathrm{id}_{B(H)} \in B$.

③ ☆より $L(a) = \mathrm{id}_{B(H)}$ となる a をとると
$U^* \in B \otimes C(G)$ がわかるので、
$U \in B \otimes C(G)$ をえる。 ∎

Rem.
B の定義より $\mathrm{End}(U) = B' \cap B(H)$ である。
したがって、
U = irrep $\Leftrightarrow$ $B = B(H)$ である。

Cor.
$U \in B(H) \otimes C(G)$: fin-dim unitary repr
$\Rightarrow \forall X, Y \in B(H) \setminus \{0\}$, $(X \otimes 1) U (Y \otimes 1) \neq 0$.

∵) $(X \otimes 1) U (Y \otimes 1) = 0$ とすると、
$X (\iota \otimes h)(U(1 \otimes a)) Y$
$= (\iota \otimes h)((X \otimes 1) U (Y \otimes 1)(1 \otimes a)) = 0$ より
$XBY = 0$ である。$B = B(H)$ より、
これが可能になるのは $X = 0 \vee Y = 0$ のときのみ。∎

Prop.

$\forall U$ = finite dim repr on H.

$U^c \in B(\bar{H}) \otimes C(G)$ は可逆.

∵).

① 必要なら unitarize し, ireps に分解することで

U: unitary rep としてよい.

$$Q_\ell = (\iota\otimes h)(U^c U^{c*}), \quad Q_r = (\iota\otimes h)(U^{c*}U^c) \in B(\bar{H})_+ \text{ をとる.}$$

Rem より

$$☆☆.\ \begin{cases} Q_\ell \otimes 1 = U^c(Q_\ell\otimes 1)U^{c*} \\ Q_r\otimes 1 = U^{c*}(Q_r\otimes 1)U^c \end{cases} \text{ である.}$$

U^c: 可逆 を示すには, Q_ℓ, Q_r: 可逆 が言えれば十分.

② $Q_\ell \neq 0$ である.

∵). $\mathrm{Tr}(Q_\ell) = (\mathrm{Tr}\otimes h)(U^c U^{c*})$

$= (\mathrm{Tr}\otimes h)((j\otimes\iota)(U^*)(j\otimes\iota)(U))$

$\left[\begin{array}{l}\mathrm{Tr}(j(X)j(Y)) = \mathrm{Tr}(j(YX)) \\ = \mathrm{Tr}(YX) = \mathrm{Tr}(XY) \text{ より}\end{array}\right]$

$= (\mathrm{Tr}\otimes h)(U^*U) = \dim H.$

③ $p \in B(\bar{H})$: $\ker(Q_\ell)$ への proj とする.

☆☆ より,

$$(p\otimes 1)U^c(Q_\ell\otimes 1)U^{c*}(p\otimes 1) = 0$$

したがって $(Q_\ell^{\frac{1}{2}}\otimes 1)U^{c*}(p\otimes 1) = 0$ をえる.

すなわち $(Q_\ell^{\frac{1}{2}}\otimes 1)(j\otimes\iota)(U)(p\otimes 1) = 0$.

よって $(j(p)\otimes 1)U(j(Q_\ell^{\frac{1}{2}})\otimes 1) = 0$. を

得られる $(j\otimes\iota)$ を施すことで.

$Q_\ell \neq 0$ と Cor 1.3.10 より, $p = 0$ をえる.

よって Q_ℓ: 単射で有限次元定理より surj でもあるので, 可逆. ∎

Q_r についても同様.

①' U: unitary rep としてよい。

∵) (i) $\underbrace{U}_{\text{unitary}} = \oplus \underbrace{U_i}_{\text{ireps}}$ と分けているとき、

$U^{-1} = \oplus_i U_i^{-1}$ なので

$U^c = (j\otimes\iota)(U^{-1}) = (j\otimes\iota)(\oplus_i U_i^{-1})$

$= \oplus_i (j\otimes\iota)(U_i^{-1}) = \oplus_i \underbrace{U_i^c}_{\text{可逆}}$ だから。

U^c も可逆である。 $((U^c)^{-1} = \oplus_i (U_i^c)^{-1})$.

(ii). $(\underbrace{T}_{\text{可逆}}\otimes 1)U = \underbrace{V}_{\text{unitary}}(T\otimes 1)$. とすると、

$U = (T^{-1}\otimes 1)\, V\, (T\otimes 1)$. より。

$U^c = (j\otimes\iota)((T^{-1}\otimes 1) V^* (T\otimes 1))$.

$= (\underbrace{j(T)\otimes 1}_{\text{可逆}})\, V^c\, (\underbrace{j(T^{-1})\otimes 1}_{\text{可逆}})$. であるから。

$U^{c\,-1} = (j(T)\otimes 1)(V^c)^{-1}(j(T^{-1})\otimes 1)$.

となり、U^c も可逆とわかる。

(Qr について).

②'. $Q_r \neq 0$.

∵). $\mathrm{Tr}(Q_r) = (\mathrm{Tr}\otimes h)(U^{c*}U^{c})$

$= (\mathrm{Tr}\otimes h)((j\otimes\iota)(U^{c})(j\otimes\iota)(U^{*}))$

$= (\mathrm{Tr}\otimes h)(U^{c}U^{*}) = \dim H$.

③'. $q \in B(\bar{H})$: $\ker(Q_r)$ 上への proj とする.

☆☆ より

$(q\otimes 1)U^{c*}(Q_r\otimes 1)U^{c}(q\otimes 1) = 0$.

∴ $(Q_r^{\frac{1}{2}}\otimes 1)U^{c}(q\otimes 1) = 0$.

i.e. $(Q_r^{\frac{1}{2}}\otimes 1)(j\otimes\iota)(U^{*})(q\otimes 1) = 0$.

$(j\otimes\iota)$ を左から施して

$(j(q)\otimes 1)U^{*}(j(Q_r^{\frac{1}{2}})\otimes 1) = 0$.

$Q_r \neq 0$ と cor 1.3.10 より $j(q) = 0$ i.e. $q = 0$.

よって Q_r は inj より surj でもあるので可逆. //

★. $U \in B(H)\otimes C(G)$: irr finite-dim unitary repr とする.

前の prf で定めた $Q_\ell, Q_r \in B(\bar{H})$

$$Q_\ell = (\iota\otimes h)(U^c U^{c*})$$

$$Q_r = (\iota\otimes h)(U^{c*} U^c)$$

の性質について調べよう.

<u>Lem</u>.

(i). $j(Q_\ell) \in \mathrm{Mor}(U^{cc}, U)$, $j(Q_r) \in \mathrm{Mor}(U, U^{cc})$

(ii). $Q_\ell Q_r$: scalar

(iii) $\mathrm{Tr}(Q_\ell) = \mathrm{Tr}(Q_r) = \dim H_U$.

∵).

(i). Rem 1.3.6 より.

$U^c(Q_\ell\otimes 1)U^{c*} = Q_\ell\otimes 1$, $U^{c*}(Q_r\otimes 1)U^c = Q_r\otimes 1$.

1つ目の式を $(U^c)^{-1}$ 倍して $(j\otimes\iota)$ を施すと,

$$(j\otimes\iota)((Q_\ell\otimes 1)U^{c*}) = (j\otimes\iota)((Q_\ell\otimes 1))(j\otimes\iota)\underbrace{((U^c)^{-1})}_{=U}$$

$$= U(j(Q_\ell)\otimes 1) = (j(Q_\ell)\otimes 1)U^{cc}$$

したがって $j(Q_\ell) \in \mathrm{Mor}(U^{cc}, U)$ である.

$j(Q_r) \in \mathrm{Mor}(U, U^{cc})$ も同様.

(ii). U: irrep, $j(Q_\ell)j(Q_r) \in \mathrm{End}(U)$ by (i) より

$j(Q_\ell)j(Q_r)$ = scalar.

(iii). 前の Prp より ok. □

Rem.

Lem の (i) の prf より、

U: finite-dim unitary repr. $Q \in B(H_U)$ に対し

$Q \in \mathrm{Mor}(U^{cc}, U) \Leftrightarrow U^c(j(Q)\otimes 1)U^{c*} = j(Q)\otimes 1$

$Q \in \mathrm{Mor}(U, U^{cc}) \Leftrightarrow U^{c*}(j(Q)\otimes 1)U^c = j(Q)\otimes 1$

が成り立つ。

∵) (⇐) はすでにみた。

(⇒) $Q \in \mathrm{Mor}(U^{cc}, U) \Rightarrow \underset{\sim}{U^{cc}}(Q\otimes 1) = (Q\otimes 1)U.$
$\quad = (j\otimes\iota)((U^c)^{-1})$

⇒ (両辺に左から $(j\otimes\iota)$ を施し)

$$(j(Q)\otimes 1)(U^c)^{-1} = \underbrace{(j\otimes\iota)(U)}_{(U^*)^c}(j(Q)\otimes 1).$$

右から U^c をかけて

$$j(Q)\otimes 1 = U^{c*}(j(Q)\otimes 1)U^c.$$

$Q \in \mathrm{Mor}(U, U^{cc})$ でも同様.

Prop.

U: finite-dim repr とするとき、以下が成り立つ。

(i). U^{cc} は U に equiv.　(ii). U^c: irrep ⇔ U: irrep.

(iii). $\Sigma: H_U^*\otimes H_V^* \to H_V^*\otimes H_U^*$: flip は $(U\times V)^c$ と $V^c\times U^c$ を equiv にする.

∵). (i). U: irrep のときはすでにみた。
U: irrep でないときは irrep に分解すればOK.

(ii). $T\in \mathrm{End}(U) \Leftrightarrow (T\otimes 1)U = U(T\otimes 1)$

$\Leftrightarrow (j\otimes\iota)((T\otimes 1)U) = (U^{-1})^c(j(T)\otimes 1) = (j(T)\otimes 1)(U^{-1})^c$

$\Leftrightarrow U^c(j(T)\otimes 1) = (j(T)\otimes 1)U^c \Leftrightarrow j(T)\in \mathrm{End}(U^c).$

(iii). $(\Sigma\otimes 1)(U\times V)^c = (\Sigma\otimes 1)(j\otimes\iota)(V_{23}^{-1}U_{23}^{-1}).$

$= (\Sigma\otimes 1)((j\otimes\iota)(U_{13}^{-1})(j\otimes\iota)(V_{23}^{-1})).$

$= (j\otimes\iota)(V_{23}^{-1})(j\otimes\iota)(U_{13}^{-1})$

$= ((j\otimes\iota)(V^{-1}))_{13}((j\otimes\iota)(U^{-1}))_{23}(\Sigma\otimes 1) = (V^c\times U^c)(\Sigma\otimes 1).$