複素解析学I演習2023年

問1 (フックス群としてのモジュラー群)．複素数体 $\mathbb{C}$ の部分環 A に対して、成分 a,b,c,d が A の元で $ad-bc=1$ を満たす一次分数変換 $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ の集合を $\mathrm{PSL}(2,A)$ と書く．特に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ を**モジュラー群**と呼ぶ．上半平面 $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$ の部分集合 $D:=\{z\in\mathbb{H}:|z|>1,\ |\mathrm{Re}\,z|<\frac{1}{2}\}$ を定義する．

(1) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の元 f は全単射写像 $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ を定義することを示せ．

(2) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は $S(z):=-1/z$ と $T(z):=z+1$ によって生成されることを示せ．つまり、全ての元が $S^{\pm1}$ と $T^{\pm1}$ の有限回の合成として表されることを示せ．

(3) 集合 D は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ の**基本領域**であることを示せ．つまり、次の二つが成り立つことを示せ：

  (a) 任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して $f(z)\in\overline{D}$ を満たす $f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が少なくとも一つ存在する．

  (b) 任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して $f(z)\in D$ を満たす $f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ が多くとも一つ存在する．

(4) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}$ に**真性不連続に作用**することを示せ．つまり、任意の点 $z\in\mathbb{H}$ に対して軌道 $\{f(z):f\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\}$ が離散集合であることを示せ．

問2 (カラテオドリ級関数集合の極点)．開単位円板上で定義された正則関数 f が $f(0)=1$ を満たすとする．もし任意の $|z|<1$ を満たす複素数 z に対して $\mathrm{Re}\,f(z)>0$ ならば、f を**カラテオドリ級**の関数という．関数 f が冪級数展開 $f(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$ を持つとする．

(1) 正の整数 k と実数 $0<r<1$ に対して次の式を示せ：

$$c_kr^k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta.$$

(2) 次の二つの条件が同値であることを示せ：

  (a) 関数 f がカラテオドリ級である．

  (b) 任意の正の整数 n に対して点 $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{C}^n$ は $\theta\in[0,2\pi)$ によって媒介変数表示された曲線 $(e^{-i\theta},\cdots,e^{-in\theta})\in\mathbb{C}^n$ の凸包絡の元である．

問3 (ネヴァンリンナ個数関数の評価)．複素平面全体上で定義された正則関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ がある $\lambda>0$ に対して不等式 $|f(z)|\le e^{|z|^{\lambda}}$, $(z\in\mathbb{C})$ を満たすとする．半径 $r>0$ の円板 $B(0,r)$ にある f の零点の数 $N(r)$ はある定数 $C>0$ が存在して評価 $N(r)\le Cr^{\lambda}$ を持つことを示せ．

問4.

問5 (四分円上のディィリクレ問題)．領域 $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}$ 上に定義された調和関数 $u\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ が次の境界値条件を満たすとする：各点 $(x_0,y_0)\in\partial\Omega$ に対して

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } y_0>0,\\ 1 & \text{if } y_0=0 \text{ and } 0<x_0<1.\end{cases}$$

(1) 反射原理を用いて u は領域 $\widetilde{\Omega}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1,\ x>0\}$ 上の調和関数 $\widetilde{u}\in C^2(\widetilde{\Omega},\mathbb{R})$ に拡張されることを示せ．

(2) 実平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ とみなす．領域 $\widetilde{\Omega}$ を上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ に移し、$1, -i, 0$ を $1, 0, -1$ へ送る共形変換 φ を求めよ．

(3) ポアソン積分と共形変換 φ を用いて u を求めよ．

Solution of 1. (3) Let $z_0 \in \mathbb{H}$. We may assume $\operatorname{Re} z_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. For $z \in \mathbb{H}$ satisfying $\operatorname{Re} z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, if we define $f_z := T^{-\lfloor \operatorname{Re} Sz + \frac{1}{2} \rfloor} S$, then $\operatorname{Re} f_z(z) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Define a sequence z_n inductively by $z_n := f_{z_{n-1}}(z_{n-1})$ for $n \geq 1$. Then, $\operatorname{Re} z_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ for all n. Since

$$\operatorname{Im} z_n = \frac{\operatorname{Im} z_{n-1}}{(\operatorname{Re} z_{n-1})^2 + (\operatorname{Im} z_{n-1})^2} \geq g(\operatorname{Im} z_{n-1}),$$

where $g(y) := 4y/(1+4y^2)$, since $g^n(y) \uparrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ for $0 < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$, so there is n such that

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z_n < \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Im} z_n > \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

If $|z_n| \geq 1$, then we are done, so assume $|z_n| < 1$. Now we have three possibilities: $|z_n - 1| < 1$, $|z_n + 1| < 1$, or $\min\{|z_n - 1|, |z_n + 1|\} \geq 1$. For each case, we can check that $T^{-1}Sz_n$, TSz_n, Sz_n is contained in D, respectively.

For injectivity, let $w = (az+b)/(cz+d)$. It suffices to show $c = 0$. Suppose $c \neq 0$. Let n be an integer such that $|n - \frac{a}{c}| \leq \frac{1}{2}$. Note that $|z - m| > 1$ and $|w - m| > 1$ for every integer m. Write

$$1 < |w - n| = \left| \frac{az+b}{cz+d} - n \right| \leq \left| \frac{1}{c(cz+d)} \right| + \left| n - \frac{a}{c} \right|.$$

If $|c| \geq 2$, then $|c(cz+d)| \geq 4 \operatorname{Im} z > 2\sqrt{3}$ leads a contradiction. If $|c| = 1$, say $c = 1$, then $|n - a| \leq \frac{1}{2}$ implies $|n - \frac{a}{c}| = 0$ and $|c(cz+d)| = |z + d| > 1$ leads a contradiction. Thus, $c = 0$, and we are done.

(4) Clear from (3). □

Solution of 5. (1) $(x_0, y_0) \in \partial\widetilde{\Omega}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \widetilde{u}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y_0 > 0, \\ 2 & \text{if } y_0 < 0. \end{cases}$$

(2) $\widetilde{\Omega}$ is conformally mapped onto the upper half plane by

$$\varphi : z \mapsto \left(\frac{z+i}{iz+1} \right)^2.$$

(3) We can compute

$$|\varphi(x+iy)|^2 = \left(\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \right)^2, \qquad \operatorname{Im} \varphi(x+iy) = \frac{4x(1-x^2-y^2)}{(x^2+(y-1)^2)^2}.$$

For $x^2 + y^2 > 1$ the Poisson kernel gives that

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{1-x}{y} + \tan^{-1} \frac{1+x}{y} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{2y}{x^2+y^2-1}. \end{aligned}$$

$$u(x,y) = U(\operatorname{Re} \varphi(x+iy), \operatorname{Im} \varphi(x+iy)).$$

Thus we have

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{x(1-x^2-y^2)}{y(1+x^2+y^2)}.$$

□