(コ) ホモロジー群の積演算について

以下, (コ) ホモロジー群の係数として用いる環 R は単項イデアル整域 ($\mathbb{Z}$ や体など) であるとする.

Alexander-Whitney の写像

- (復習) 位相空間 X に対し, 標準 n-単体

  $$\Delta^n := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1 \text{ かつ各 } i \text{ に対し } t_i \geq 0\}$$

  から X への連続写像を X の**特異 n-単体**と呼び, それらを基底とする自由加群 $S_n(X)$ の元を**特異 n-チェイン**と呼んだ. それらの直和加群 $S_*(X) = \bigoplus_{n\geq 0} S_n(X)$ には境界写像と呼ばれる準同型写像 $\partial_n\colon S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ が定まり, チェイン複体 $(S_*(X), \partial)$ が構成された. そのホモロジー群が X の**特異ホモロジー群** $H_*(X)$ であった. R-係数の特異ホモロジー群 $H_*(X; R)$ は $(S_*(X) \otimes R, \partial \otimes 1)$ のホモロジー群として与えられる.

- コチェイン複体 $S^*(X; R)$ やそのコホモロジー群 $H^*(X; R)$, 空間対版 ($S_*(X, A; R)$ など) の記法も同様に定める.

- 位相空間 X, Y に対し, その直積空間からそれぞれの成分への射影を

  $$p_1\colon X \times Y \longrightarrow X, \qquad p_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$$

  と書くことにする. このとき **Alexander-Whitney 写像** と呼ばれる準同型写像

  $$\rho\colon S_n(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (S_p(X) \otimes S_q(Y))$$

  が, $X \times Y$ の各 n-単体 $\sigma\colon \Delta^n \to X \times Y$ に対して

  $$\rho(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} \left(\partial_n^{i+1}\partial_n^{i+2}\cdots\partial_n^{n}(p_1 \circ \sigma) \otimes \partial_n^0\partial_n^1\cdots\partial_n^{i-1}(p_2 \circ \sigma)\right)$$

  を対応させ, 一般の n-チェインに対しては線型に拡張することで定まる. ここで ∂_n^j は境界写像 $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_n^i$ を定めるときに用いた写像 (大雑把には写像の定義域を標準 n 単体の j 番目の面に制限するもの) であるが詳細は割愛する.

- ρ がチェイン写像となることは直接確かめられるが, 実はチェインホモトピー同値写像となっている (Eilenberg-Zilber の定理). よって κ を ρ のチェインホモトピー逆写像とすると (κ を Eilenberg-Zilber 写像ということがある), 同型写像

  $$\rho_* = (\kappa_*)^{-1}\colon H_*(X \times Y; R) \xrightarrow{\cong} H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y) \otimes R) = H_*(S_*(X; R) \otimes_R S_*(Y; R))$$

  が誘導される. ここで, 複体のテンソル積 $S_*(X) \otimes S_*(Y)$ は $\partial(c \otimes c') = (\partial_X c) \otimes c' + (-1)^{\deg c} c \otimes (\partial_Y c')$ を境界写像とするチェイン複体とみなしている.

ホモロジー群のクロス積

- 次の写像により, ホモロジー群の**クロス積** $\times$ を定めることができる:

  $$\times\colon H_p(X;R)\otimes_R H_q(Y;R)\longrightarrow H_{p+q}(S_*(X;R)\otimes_R S_*(Y;R))\xrightarrow[\cong]{\kappa_*} H_{p+q}(X\times Y;R).$$

  ここで最初の写像は $[z_1]\otimes[z_2]$ (z_1 は $S_p(X;R)$ のサイクル, z_2 は $S_q(Y;R)$ のサイクル) に対して $[z_1\otimes z_2]$ を対応させるものである.

- 空間対 (X,A), (Y,B) について, 上記のクロス積は空間対版のクロス積

  $$\times\colon H_p(X,A;R)\otimes_R H_q(Y,B;R)\longrightarrow H_{p+q}(X\times Y,(A\times Y)\cup(X\times B);R)$$

  を誘導する (κ_* は同型とは限らないがそのまま用いる). 以下, 空間対 $(X\times Y,(A\times Y)\cup(X\times B))$ を $(X,A)\times(Y,B)$ と記す.

- $\{A\times Y, X\times B\}$ が $X\times Y$ における切除対であれば,

  $$\kappa_*\colon H_{p+q}(S_*(X,A)\otimes S_*(Y,B)\otimes R)\longrightarrow H_{p+q}((X,A)\times(Y,B);R)$$

  は同型写像となる. このことは次に述べる Kunneth の定理の証明で用いられる.

ホモロジー群に対する Künneth の定理

- 積空間のホモロジー群については次の定理が基本的である. ホモロジー群の係数環 R は単項イデアル整域であることを思い出しておく.

  <u>**定理**</u> (Künneth の定理)　空間対 (X,A), (Y,B) について, $\{A\times Y, X\times B\}$ が切除対であれば, 分裂する完全列

  $$\begin{aligned}0\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n}(H_p(X,A;R)\otimes_R H_q(Y,B;R))&\xrightarrow{\times} H_n((X,A)\times(Y,B);R)\\ \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}^R(H_p(X,A;R),H_q(Y,B;R))&\longrightarrow 0\end{aligned}$$

  が存在する. とくに, $H_*(X,A;R)$, $H_*(Y,B;R)$ のいずれかが R-自由加群ならば, Tor^R の部分が 0 となるので, クロス積

  $$\times\colon H_*(X,A;R)\otimes_R H_*(Y,B;R)\longrightarrow H_*((X,A)\times(Y,B);R)$$

  は同型写像となる.

- $A=\emptyset$ または $B=\emptyset$ であれば定理にある切除対に関する仮定は満たされる. $A=B=\emptyset$ のときの完全列

  $$\begin{aligned}0\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n}(H_p(X;R)\otimes_R H_q(Y;R))&\xrightarrow{\times} H_n(X\times Y;R)\\ \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}^R(H_p(X;R),H_q(Y;R))&\longrightarrow 0\end{aligned}$$

  はしばしば用いられる.

コホモロジー群のクロス積

- 空間対 $(X, A), (Y, B)$ について, $\{A \times Y, X \times B\}$ が切除対であれば, コホモロジー群のクロス積

$$\times\colon H^p(X, A; R) \otimes_R H^q(Y, B; R) \longrightarrow H^{p+q}((X, A) \times (Y, B); R)$$

  が定義される.

コホモロジー群に対する Künneth の定理 (弱型)

- 積空間のホモロジー群についても, Künneth の定理は存在するが, ホモロジー群の場合と異なり, 幾つか注意しなければならない点があるため, ここでは以下の形で述べるにとどめておく:

  定理 (Künneth の定理の弱型)　空間対 $(X, A), (Y, B)$ について, $\{A \times Y, X \times B\}$ が切除対であるとする. さらに $H_*(X, A; R), H_*(Y, B; R)$ のいずれかが「各次数において有限生成 R-自由加群」を満たすならば,

$$\times\colon H^p(X, A; R) \otimes_R H^q(Y, B; R) \longrightarrow H^{p+q}((X, A) \times (Y, B); R)$$

  は同型写像である.

カップ積

- 位相空間 X の 2 つの部分空間 $A, B \subset X$ について, $\{A \times X, X \times B\}$ が切除対のとき, 合成写像

$$\begin{aligned}\cup\colon H^p(X, A; R) \otimes_R H^q(X, B; R) &\xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times X, (A \times X) \cup (X \times B); R)\\ &\xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X, A \cup B; R)\end{aligned}$$

  を定めることができる. ここで $\Delta\colon X \to X \times X$ は X の対角線写像 $\Delta(x) = (x, x)$ である. この合成写像 $\cup$ を**カップ積**という.

- $\{A, B\}$ が切除対のときも少しの工夫でカップ積が定義できる (詳しくは割愛).

- $A = B = \emptyset$ のときは常にカップ積

$$\cup\colon H^p(X; R) \otimes_R H^q(X; R) \longrightarrow H^{p+q}(X; R)$$

  が定義される. これにより $H^*(X; R)$ は次数つき環の構造を持つ. とくに, $u \in H^p(X; R), v \in H^q(Y; R)$ に対して

$$u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u \in H^{p+q}(X; R)$$

  が成り立つ.

- 連続写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき任意の $v_1, v_2 \in H^*(Y;R)$ に対して

$$f^*(v_1 \cup v_2) = f^*(v_1) \cup f^*(v_2) \in H^*(X;R)$$

  が成り立つ.

- $u \in H^p(X;R), v \in H^q(Y;R)$ に対し,

$$p_1^*(u) \cup p_2^*(v) = u \times v \in H^{p+q}(X \times Y;R)$$

  が成り立つ. ここで $p_1\colon X \times Y \to X, p_2\colon X \times Y \to Y$ はそれぞれの成分への射影である.

以上.