場の理論のスペクトル解析入門

担当教員：佐々木格
東京大学・集中講義・数理科学研究科棟 １２３講義室

2023 年 5 月

授業の概要

概要（シラバスから）

光のように粒子が生成・消滅するような量子論の体系が場の量子論です。量子場の状態のヒルベルト空間はフォック空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間です。そして，その上のハミルトニアンが定義されると時間発展が定まり，量子系の性質がハミルトニアンのスペクトル解析に帰着されるという基本的設定は通常の量子力学と変わりません。シュレディンガー作用素の解析と異なる点は，量子場においては粒子の生成・消滅を記述する作用素が主役となる点です。これらは無限次元の正準交換関係 (CCR) を満たすものとして定義されますが，そのような作用素の組は無数にあることが知られています。生成・消滅作用素をそれらの和に移し，かつ CCR を保つような変換は Bogoliubov 変換と呼ばれ，量子場を解析するための基本的な技術として知られています。ここでは対模型（または対相互作用模型）と呼ばれる量子場の模型を Bogoliubov 変換によって対角化することを目標として講義を行います。

授業内容

内容

- 作用素論の基礎の復習，コンパクト作用素の標準形，テンソル積，フォック空間，生成消滅作用素
- 第二量子化作用素，様々な物理的模型，Bogoliubov 変換とシンプレクティック群の一般論
- 対模型の自己共役性
- 量子場の模型における対角化の一般論
- 対模型の対角化，双極近似の Pauli-Fierz 模型の対角化

教科書

- 量子場の数学的解析に関する基本事項は・新井朝雄，フォック空間と量子場（上・下）［増補改訂版］，日本評論社，2017

文献

- Bogoliubov 変換の解説と散乱理論を使った構成：
F. Hiroshima, I. Sasaki, H. Spohn and A. Suzuki, Enhanced Binding in Quantum Field Theory, Volume 38, COE lecture note - Kyushu University，2012
- 一般的な Bogoliubov 変換の構成：
S.N.M. Ruijsenaars, On Bogoliubov transformations. II, The general case, Ann. Phys, 116 (1978)
- Bogoliubov 変換を用いた対模型の対角化：
Y. Matsuzawa, I. Sasaki and K. Usami, Explicit Diagonalization of Pair Interaction Models, Anal. Math. Phys. 11, 48 (2021)

Hilbert 空間と作用素の話題

記号の説明と注意

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- ONB = orthonormal basis = 正規直交基底 (= 完全正規直交系=CONS)
- ONS = orthonormal system = 正規直交系
- $z \in \mathbb{C}$ に対して $\overline{z}$ は z の複素共役
- 作用素 A について $\overline{A}$ は A の閉包
- $\mathcal{L}\{\cdots\}$: $\cdots$ の線型包
- $\mathsf{X}_{n=1}^{\infty} A_n$: A_n の直積集合
- 自己共役作用素 T に対して

$$\begin{aligned} T \geq 0 &\iff \sigma(T) \subset [0, \infty) \\ T > 0 &\iff \langle u, Tu \rangle > 0 \text{ for all } u \in \mathrm{dom}(T) \setminus \{0\} \\ &\iff T \geq 0 \text{ かつ } T \text{ は単射} \end{aligned}$$

- $T > 0$ でも $\inf \sigma(T) > 0$ とは限らない。例 : $\mathbb{R}^d$ 上のラプラシアンは $-\Delta > 0$

Hilbert 空間とブラ・ケット記号

- ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$：複素&可分，内積 $\langle u, v \rangle$ は u について反線型
- $u, v \in \mathscr{H}$ に対して，階数 1 の作用素 $|u\rangle \langle v|$ を

$$|u\rangle \langle v| \; w := \langle v, w \rangle \, u$$

で定義する。$\|u\| = 1$ のとき，$|u\rangle \langle u|$ は u 方向への正射影作用素。

- $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ のとき，縦ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_n)^\intercal \in \mathbb{C}^n$ を $n \times 1$ 行列とみなし，$|u\rangle := u$ と表す。$\langle u| := (|u\rangle)^* = (\overline{u_1}, \cdots, \overline{u_n})$ とすると

$$\langle u, v \rangle = u^* v = (\overline{u_1}, \cdots, \overline{u_n}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$|u\rangle \langle v| = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_n}) = (u_i \overline{v_j})$$

- $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ に対し，$A\,|u\rangle \langle v|\,B = |Au\rangle \langle B^* v|$

スペクトル分解

自己共役作用素 T のスペクトル分解を次のように表す：

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_T(\lambda) \qquad (E_T(\cdot) \text{ は } T \text{ のスペクトル測度})$$

$\dim \mathscr{H} = n < \infty$ の場合，T の固有値を λ_j とすると，$\mathscr{H}$ の ONB$\{u_j\}_{j=1}^n$ が存在して

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left|u_j\right\rangle \left\langle u_j\right|$$

をみたす。

共役子

写像 f が反線形であるとは，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(\alpha u + \beta v) = \overline{\alpha} f(u) + \overline{\beta} f(v)$$

となること。

定義 1

$\mathscr{H}$ 上の反線形な作用素 J で，次の条件 (i)(ii) を満たすものを共役子という。

(i) J は全単射で $J^2 = \mathbf{1}$

(ii) $\|u\| = \|Ju\|, (u \in \mathscr{H})$

例 2

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $(Jf)(x) := \overline{f(x)}$ とすれば，この J は共役子である。共役子は唯一つではない，J' を $(J'f)(x) := \overline{f(-x)}$ とすると，J' も $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の共役子である。

定義 3

共役子 J を一つ固定する。A を $\mathscr{H}$ 上の線型作用素とする。A の共役作用素 A^* が定義可能なとき，A の転置を $A^\intercal := JA^*J$ で定義する。

例 4

$\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ で $A = (a_{ij})$ を複素数値正方行列とする。J を各成分の複素共役をとる共役子とすると，$A^\intercal$ は A の転置行列である。つまり $A^\intercal = (a_{ji})$

命題 5

J を $\mathscr{H}$ 上の共役子とするとき，以下の性質が成り立つ：

(1) 任意の $u, v \in \mathscr{H}$ について $\langle u, v\rangle = \langle Jv, Ju\rangle$

(2) $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ に対して $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$

(3) $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ が可逆 *(bounded invertible)* であるとき，$(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$

(4) $u, v \in \mathscr{H}$ に対して $(|u\rangle\langle v|)^\intercal = |Jv\rangle\langle Ju|$

証明. (1) は偏極恒等式を使えばよい。(2)，(3) も簡単なので略。 □

注意 6

$f \in \mathscr{H}$ の複素共役を $\overline{f} := Jf$，作用素 A の複素共役を $JAJ = \overline{A}$ と表記する文献も多いが，このスライドでは記号 $\overline{A}$ は作用素 A の閉包を表すものとする。

定理 7

K を $\mathscr{H}$ 上のコンパクト作用素，$N := \mathrm{rank}(K) \leq \infty$ とする。このとき，N 個の正数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ および $\mathscr{H}$ の ONS $\{\psi_n\}_{n=1}^N, \{\phi_n\}_{n=1}^N$ が存在して

$$K = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left|\phi_n\right\rangle \left\langle\psi_n\right| . \tag{1}$$

$N = \infty$ のとき $\lambda_n \to 0(n \to \infty)$ であり，(1) は作用素ノルムの位相で収束する。

定理 8 (Kristensen, Mejlbo and Poulsen(1967))

$\mathscr{H}$ 上のコンパクト作用素 K は $K = K^\intercal$ を満たすとする。このとき，N 個の正数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ およびおよび，$\mathscr{H}$ の ONS $\{g_n\}_{n=1}^N, (N \leq \infty)$ が存在して

$$K = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left|g_n\right\rangle \left\langle Jg_n\right| \tag{2}$$

$N = \infty$ のとき $\lambda_n \to 0(n \to \infty)$ である。

※ $(\left|g_n\right\rangle \left\langle Jg_n\right|)^\intercal = \left|g_n\right\rangle \left\langle Jg_n\right|$ なので (2) の右辺は転置で不変。

定理 8 の証明

定理 7 より，$K = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \ket{\phi_n}\bra{\psi_n}$ と表すことができる。$\{\lambda_n\}$ の重複を除き，大きい順に並べたものを $\{\alpha_l\}$ とする：

$$\{\lambda_n \mid n = 1, \cdots, N\} = \{\alpha_l \mid l = 1, \cdots, L\}, \qquad L \leq N$$
$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots .$$

作用素 U_l を

$$U_l := \sum_{\substack{n=1 \\ (\lambda_n = \alpha_l)}}^{N} \ket{\phi_n}\bra{\psi_n}$$

で定義すると

$$K = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l U_l \tag{3}$$

となる。U_l は部分等長作用素であり始集合・終集合はそれぞれ有限次元空間

$$\mathscr{H}_{il} := \mathcal{L}\{\psi_n \mid \lambda_n = \alpha_l, n = 1, 2, \cdots\}, \qquad \mathscr{H}_{fl} := \mathcal{L}\{\phi_n \mid \lambda_n = \alpha_l, n = 1, 2, \cdots\}$$

である。

始集合・終集合への正射影作用素はそれぞれ

$$P_{il} := U_l^* U_l = \sum_{\substack{n=1 \\ (\lambda_n=\alpha_l)}}^{N} |\psi_n\rangle \langle\psi_n|, \qquad P_{fl} := U_l U_l^* = \sum_{\substack{n=1 \\ (\lambda_n=\alpha_l)}}^{N} |\phi_n\rangle \langle\phi_n| \tag{4}$$

である。$\{\psi_n\}_n$，$\{\phi_n\}_n$ の正規直交性から U_l の直交性が従う：

$$U_l^* U_m = \delta_{lm} P_{im}, \qquad U_l U_m^* = \delta_{lm} P_{fm} \tag{5}$$

以下，$U_l = U_l^\intercal \ (l = 1, 2, \cdots)$ を示す。

(3), (4) と (5) から $KK^* = \sum_l \alpha_l^2 P_{fl}$ となる。また，同様の計算で

$$(KK^*)^n K = \Big(\sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n} P_{il}\Big) K = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n+1} U_l \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{6}$$

仮定 $K = K^\intercal$ から $(K^*K)^\intercal = K^\intercal (K^*)^\intercal = KK^*$ となり，次がいえる

$$((KK^*)^n K)^\intercal = K(K^*K)^n = (KK^*)^n K$$

したがって，(6) は転置で不変である。

したがって，任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n+1} U_l = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n+1} U_l^{\intercal} \tag{7}$$

$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > 0$ なので

$$U_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n+1} U_l}{\alpha_1^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{L} \alpha_l^{2n+1} U_l^{\intercal}}{\alpha_1^{2n+1}} = U_1^{\intercal}$$

(7) から $l = 1$ の項を除いて同様ことを行えば $U_2 = U_2^{\intercal}$ が導かれる。同様にして $U_l = U_l^{\intercal}$ $(l = 1, \cdots)$ が示される。

定理を示すためには $l = 1, \cdots$ に対して $\mathscr{H}_{fl}$ の ONB $\{g_j\}$ が存在して

$$U_l = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_{fl}} |g_j\rangle \langle Jg_j| \tag{8}$$

となることがいえればよい。

(8) を示す。$l = 1, 2, \cdots$ を固定し，$U := U_l$ と略記する。$\phi \in \mathscr{H}_{fl} \setminus \{0\}$ を任意にとり

$$\chi_+ := \phi + UJ\phi, \qquad \chi_- := i(\phi - UJ\phi)$$

とおく。$U = U^\intercal$ から $JUJ = U^*$ である。したがって，

$$\begin{aligned} UJ\chi_+ &= UJ(\phi + UJ\phi) = UJ\phi + UU^*\phi = UJ\phi + P_{fl}\phi = \chi_+ \\ UJ\chi_- &= UJi(\phi - UJ\phi) = -i(UJ\phi - \phi) = \chi_- \end{aligned}$$

また，$\chi_+ - i\chi_- = 2\phi \neq 0$ なので $\chi_\pm$ の一方は零ではない。$\chi_\pm$ のうち，零でない方を実数倍して規格化したものを g とする。このとき

$$g = UJg \in \mathrm{ran}(U) = \mathscr{H}_{fl}, \qquad Jg = U^*g \in \mathrm{ran}(U^*) = \mathscr{H}_{il}$$

に注意し，

$$U' := U - |g\rangle\langle Jg|$$

とおく。$U' = (U')^\intercal$ であり，

$$\begin{aligned} U'(U')^* &= (U - |g\rangle\langle Jg|)(U^* - |Jg\rangle\langle g|) \\ &= UU^* - |UJg\rangle\langle g| - |g\rangle\langle Jg| U^* + |g\rangle\langle Jg|Jg\rangle\langle g| \\ &= P_{fl} - |g\rangle\langle g| \qquad (9) \\ (U')^*U' &= (U^* - |Jg\rangle\langle g|)(U - |g\rangle\langle Jg|) \\ &= P_{il} - |Jg\rangle\langle Jg| \end{aligned}$$

以上より，U' も部分等長であり，$\dim \operatorname{ran}(U') = \dim \operatorname{ran}(U) - 1$ である。

$U' = (U')^{\intercal}$ だから，同様の方法で，単位ベクトル $g' \in \operatorname{ran}(U')$ で

$$U'' := U' - |g'\rangle \langle Jg'|$$

が部分等長で，$\dim \operatorname{ran}(U'') = \dim \operatorname{ran}(U) - 2$ となるものを作ることができる。(9) から $\operatorname{ran}(U') \perp g$ もわかるので，特に $g' \perp g$ が成り立つ。

以上の操作を $\dim \mathscr{H}_{fl}$ 回行うことにより，$\mathscr{H}_{fl}$ の正規直交基底 $\{g_j\}$ で

$$U = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_{fl}} |g_j\rangle \langle Jg_j|$$

となるものを構成することができる。 $\square$

トレース型作用素と Hilbert-Schmidt 型作用素

$\{e_n\}_n$ を $\mathscr{H}$ の ONB とする。

定義 9 (トレース型作用素)

$\mathscr{H}$ 上のコンパクト作用素 K がトレース型であるとは

$$\mathrm{tr}(K^*K)^{1/2} = \sum_n \left\langle e_n, (K^*K)^{1/2} e_n \right\rangle = \sum_j \lambda_j < \infty$$

となることである（ただし，$\{\lambda_j\}_j$ は $(K^*K)^{1/2}$ の重複度も含めた固有値）。トレース型作用素の集合を $\mathscr{I}_1(\mathscr{H})$ と表す。K が Hilbert-Schmidt であるとは，K^*K がトレース型であることである。すなわち

$$\mathrm{tr}(K^*K) = \sum_j \lambda_j^2 < \infty$$

Hilbert-Schmidt 型作用素の集合を $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ と表す。

$\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ は内積 $\langle A, B \rangle_{HS} := \mathrm{tr}(A^*B)$ によって Hilbert 空間となる。
$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の ONB とするとき

$$\{ |e_n\rangle \langle f_m| \mid n, m \in \mathbb{N} \}$$

は $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ の ONB である。

Hilbert 空間のテンソル積

$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ を Hilbert 空間とする。$\psi_i \in \mathscr{H}_i$ $(i=1,2)$ に対して，共役双線型写像 $\psi_1 \otimes \psi_2 : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ を

$$(\psi_1 \otimes \psi_2)(\phi_1, \phi_2) := \langle \phi_1, \psi_1 \rangle \langle \phi_2, \psi_2 \rangle, \qquad ((\phi_1, \phi_2) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$$

で定義する。$\psi_1 \otimes \psi_2$ を ψ_1 と ψ_2 の純テンソルという。明らかに

$$\begin{aligned} (\psi_1 + \alpha \psi_1') \otimes \psi_2 &= \psi_1 \otimes \psi_2 + \alpha \psi_1' \otimes \psi_2 \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ \psi_i' \in \mathscr{H}_i \\ \psi_1 \otimes (\psi_2 + \alpha \psi_2') &= \psi_1 \otimes \psi_2 + \alpha \psi_1 \otimes \psi_2' \end{aligned}$$

部分空間 $\mathscr{D}_i \subset \mathscr{H}_i$ $(i=1,2)$ に対して，それらの元の純テンソルによって張られる空間

$$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2 := \mathcal{L}\{\psi_1 \otimes \psi_2 \mid \psi_i \in \mathscr{D}_i, i = 1, 2\}$$

を $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ の代数的テンソル積という。

純テンソル同士の内積を

$$\langle \psi_1 \otimes \psi_2, \psi_1' \otimes \psi_2' \rangle := \langle \psi_1, \psi_1' \rangle \langle \psi_2, \psi_2' \rangle$$

で定義し，線形性によって $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ 全体に拡張する（これは well-defined）。特に $\|\psi_1 \otimes \psi_2\| = \|\psi_1\| \|\psi_2\|$ である。

内積空間 $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ を完備化した空間を，$\mathscr{H}_1$ と $\mathscr{H}_2$ のテンソル積といい $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ で表す。

次の性質が成り立つ。

命題 10

(i) 部分空間 $\mathscr{D}_i \subset \mathscr{H}_i$ が稠密なら $\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ も $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ で稠密
(ii) $\{e_n\}_{n=1}^N, \{f_m\}_{m=1}^M$ をそれぞれ $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ の ONB とするとき

$$\{e_n \otimes f_m \mid n = 1, \cdots, N, m = 1, \cdots, M\}$$

は $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ の ONB

$(X_i, d\mu_i)$ $(i = 1, 2)$ を測度空間とする。$L^2(X_i, d\mu_i)$ $(i = 1, 2)$ は可分とする。

命題 11

ユニタリ作用素 $U : L^2(X_1, d\mu_1) \otimes L^2(X_2, d\mu_2) \to L^2(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ で

$$(U(f_1 \otimes f_2))(x, y) = f_1(x) f_2(y), \qquad f_i \in L^2(X_i, d\mu_i)\ (i = 1, 2) \tag{10}$$

を満たすものが唯一つ存在する。

証明. $\{f_n\}_n, \{g_m\}_m$ をそれぞれ $L^2(X_1, d\mu_1), L^2(X_2, d\mu_2)$ の ONB とする。
$\{f_n \otimes g_m\}_{n,m}$ は $L^2(X_1, d\mu_1) \otimes L^2(X_2, d\mu_2)$ の ONB，$\{f_n(x) g_m(y)\}_{n,m}$ は $L^2(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ の ONB なので，それらを全単射で移すユニタリ作用素がただ一つ存在する。それを U とすれば，(10) を満たす。一意性は構成法から明らか。 □

以上，簡単のため 2 つのテンソル積だけ解説したが，n 個のヒルベルト空間のテンソル積 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_n$ も同様に定義される。

多重テンソル積と対称化作用素

$\mathscr{H}$ の n 重テンソル積を $\otimes^n \mathscr{H}$ とかく。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$(置換) に対して

$$U_\sigma(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}, \qquad (\psi_i \in \mathscr{H},\ i = 1, \cdots, n)$$

を満たす $\otimes^n \mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素がただ一つ存在する。n 次の対称化作用素を

$$S_n := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} U_\sigma$$

で定義する。

命題 12

$S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$

証明. 簡単なので略。 □

定義 13

$\mathscr{H}$ の n 重対称テンソル積を

$$\bigotimes_{\mathrm{sym}}^n \mathscr{H} := S_n(\bigotimes^n \mathscr{H})$$

で定義する。

※ $\mathscr{H}$ を 1 個のボソンの状態空間とするとき，n ボソン状態の空間は $\otimes_{\mathrm{sym}}^n \mathscr{H}$ である。

テンソル積空間と Hilbert-Schmidt 作用素

J を $\mathscr{H}$ 上の共役子とする。Hilbert-Schmidt 作用素 $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ から $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ へのユニタリ作用素 Θ で

$$\Theta(|u\rangle \langle Jv|) = u \otimes v \qquad (u, v \in \mathscr{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する。また，$\mathscr{I}_{\mathrm{fin}}$ を $\mathscr{H}$ 上の有限階作用素の集合とするとき，$\Theta \mathscr{I}_{\mathrm{fin}} = \mathscr{H} \hat{\otimes} \mathscr{H}$ である。同型 Θ によって，$K = K^\intercal$ を満たす Hilbert-Schmidt 作用素を 2 ボソン状態とみなすことができる：

命題 14

$K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ に対して

$$K = K^\intercal \iff \Theta(K) \in \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{2} \mathscr{H}$$

証明. $K = K^\intercal$ とする。定理 8 から ONS$\{g_n\}_n$ をつかって $K = \sum_n \lambda_n |g_n\rangle \langle J g_n|$ と表せるので

$$\Theta(K) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (g_n \otimes g_n) \in \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{2} \mathscr{H}$$

である。逆を示す。

$\{e_n\}_n$ を $\mathscr{H}$ の ONB とするとき，

$$\Theta^*(e_n \otimes e_m + e_m \otimes e_n) = |e_n\rangle \langle Je_m| + |e_m\rangle \langle Je_n|$$

なので，明らかにこれは転置で不変。$\{e_n \otimes e_m + e_m \otimes e_n \mid n \geq m\}$ は $\otimes^2_{\mathrm{sym}} \mathscr{H}$ の直交基底を成すので，任意の $\Psi \in \otimes^2_{\mathrm{sym}} \mathscr{H}$ に対して $\Theta^*\Psi$ は転置で不変である。 $\square$

A, B をそれぞれヒルベルト空間 $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の稠密に定義された閉作用素とするとき，$A\hat{\otimes}B$ を

$$(A\hat{\otimes}B)(\psi\otimes\phi) = A\psi\otimes B\phi, \qquad \psi\in\mathrm{dom}(A), \phi\in\mathrm{dom}(B)$$

で定義し，一般の $\mathrm{dom}(A)\hat{\otimes}\,\mathrm{dom}(B)$ の元に対しては線形性で拡張する。このとき，$A\hat{\otimes}B$ は可閉となることが示される。そこで A と B のテンソル積をその閉包によって定義する：

$$A\otimes B := \overline{A\hat{\otimes}B}$$

命題 15

(1) $A\in\mathcal{B}(\mathscr{H}), B\in\mathcal{B}(\mathscr{K})$ のとき $A\otimes B\in\mathcal{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ であり

$$A\otimes B = (A\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes B) = (\mathbf{1}\otimes B)(A\otimes\mathbf{1})$$
$$\|A\otimes B\| = \|A\|\|B\|$$

(2) A, B がユニタリなら $A\otimes B$ もユニタリ

(3) A, B が自己共役ならば $\overline{A\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes B}$ も自己共役。さらに，A, B が下に有界なら $\overline{A\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes B} = A\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes B$ で，これも下に有界。

T を $\mathscr{H}$ 上で稠密に定義された閉作用素とする。$n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$T^{(n)} := \overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \overbrace{T}^{j\text{-th}} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}}$$

は $\otimes^n \mathscr{H}$ 上の閉作用素である。明らかに対称化作用素 S_n は $T^{(n)}$ を簡約する

$$S_n T^{(n)} \subset T^{(n)} S_n$$

したがって，簡約部分 $T^{(n)} \lceil_{\otimes^n_{\mathrm{sym}} \mathscr{H}}$ が自然に定義される。簡約部分も同じ記号 $T^{(n)}$ で表す。T が自己共役なら $T^{(n)}$ も自己共役である。

T を 1 ボソンのハミルトニアンとするとき，互いに相互作用しない n ボソンのハミルトニアンは $T^{(n)}$ で与えられる。

例 16

$-\Delta_3$ を $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の 3 次元ラプラシアンとする。$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \cong L^2(\mathbb{R}^6)$ と同一視すれば $-\Delta_3 \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \Delta_3 \cong -\Delta_6$ であり，対称化された空間に作用素してもラプラシアンはラプラシアンである。

フォック空間と量子場

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の直和ヒルベルト空間を

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n = \left\{ (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \bigtimes_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n \middle| \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{H}_n}^2 < \infty \right\}$$

で定義する。ここでは，これを $\mathscr{H}$ で表すことにする。ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ は

$$\Psi = (\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots)$$

のようにも表される。$\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ の内積は

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \right\rangle_{\mathscr{H}_n}$$

で定義される。$\mathscr{H}_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ の代数的直和を

$$\hat{\bigoplus_{n=0}^{\infty}} \mathscr{H}_n := \{(\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{H} \mid \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \Psi^{(n)} = 0\}$$

で定義する。これは $\mathscr{H}$ で稠密である。

$\mathscr{H}_n, \mathscr{K}_n$ をヒルベルト空間とする。有界作用素 $X_n : \mathscr{H}_n \to \mathscr{K}_n$ に対して作用素 $X : \oplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n \to \oplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{K}_n$ を次で定義する：

$$\mathrm{dom}(X) := \{\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \mid \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \|X_n \Psi^{(n)}\|^2 < \infty\}$$
$$(X\Psi)^{(n)} := X_n \Psi^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

この作用素を $X = \oplus_{n=0}^{\infty} X_n = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots$ などと書く。

命題 17

作用素 X は稠密に定義された閉作用素である。$\sup_n \|X_n\| = \infty$ なら X は非有界である。稠密な部分空間 $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{H}_n$ に対して，$\hat{\oplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ は X の芯である。

証明. ほぼ定義どおりに確かめればよい。

$\mathscr{H}$ を 1 ボソンの状態空間とする。
フォック空間は任意個のボソン状態を記述する空間であり，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{H} \right]$$

によって定義される。ただし，$\otimes_{\mathrm{sym}}^{0} \mathscr{H} := \mathbb{C}$ とする。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ を粒子数ごとに

$$\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty}, \qquad \Psi^{(n)} \in \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{H}$$

と表すとき，$\Psi, \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の内積は

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \right\rangle_{\otimes^n \mathscr{H}}$$

で定義される。この内積で $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ もヒルベルト空間となる。
粒子数が 0 の状態

$$\Omega := (1, 0, 0, \cdots)$$

を（フォック）真空という。

生成・消滅作用素

定義 18

1 粒子状態 $f \in \mathscr{H}$ を生成する生成作用素 $A^*(f)$ を次で定義する：

$$\mathrm{dom}(A^*(f)) := \left\{ \Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} n \| S_n f \otimes \Psi^{(n)} \|^2 < \infty \right\}$$

$$(A^*(f)\Psi)^{(n)} := \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \sqrt{n} S_n (f \otimes \Psi^{(n-1)}), & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$A^*(f)$ の共役作用素 $A(f) := [A^*(f)]^*$ を消滅作用素という。

※作用だけ考えれば，f に関して $A^*(f)$ は線形，$A(f)$ は反線形
※ $A(f), A^*(f), (f \neq 0)$ は非有界作用素

例 19

$f, g \in \mathscr{H}$ に対して

- $A(f)\Omega = 0$
- $A^*(f)\Omega = (0, f, 0, 0, \cdots)$
- $A^*(f)A^*(g)\Omega = (0, 0, \sqrt{2} S_2 (f \otimes g), 0, 0, \cdots) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(f \otimes g + g \otimes f), 0, \cdots)$

定義 20

$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H}) := \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{H}$ を有限粒子部分空間 (finite particle subspace) という。

容易にわかるように $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H}) \subset \mathrm{dom}(A(f)) \cap \mathrm{dom}(A(f)^*)$ であり

$$A(f)\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H}), \qquad A^*(f)\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H})$$

命題 21

$A(f), A^*(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり，$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}(\mathscr{H})$ はそれらの芯である。

証明. 命題 17 を次のように適用すればよい：

$$\mathscr{H}_0 = \{0\} \ (\mathbb{C} \text{ ではない！}), \qquad \mathscr{K}_0 = \mathbb{C},\ X_0 = 0$$

$$\mathscr{H}_n = \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n-1} \mathscr{H}, \qquad \mathscr{K}_n = \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{H}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$X_n \Psi^{(n)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間とし，$U : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ をユニタリ作用素とする。n 個のテンソル積 $U^{\otimes n} := U \otimes \cdots \otimes U$ は $\otimes^n_{\mathrm{sym}} \mathscr{H}$ から $\otimes^n_{\mathrm{sym}} \mathscr{K}$ へのユニタリ作用素である。そこで

$$\Gamma(U) = 1 \oplus U \oplus (U \otimes U) \oplus \cdots \oplus U^{\otimes n} \oplus \cdots$$

とおけば，これは $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ へのユニタリ作用素である。

命題 22

$f \in \mathscr{H}$ に対して

$$\Gamma(U)A(f)\Gamma(U)^* = A(Uf), \qquad \Gamma(U)A^*(f)\Gamma(U)^* = A^*(Uf)$$

証明. $\Psi \in \mathrm{dom}(A^*(f)\Gamma(U)^*)$ に対して

$$\begin{aligned}(\Gamma(U)A^*(f)\Gamma(U)^*\Psi)^{(n)} &= \sqrt{n}U^{\otimes n} S_n(f \otimes (\Gamma(U^*)\Psi)^{(n-1)}) \\ &= \sqrt{n}U^{\otimes n} S_n(f \otimes (U^*)^{\otimes(n-1)}\Psi^{(n-1)}) \\ &= \sqrt{n}S_n(Uf) \otimes U^{\otimes(n-1)}(U^*)^{\otimes(n-1)}\Psi^{(n-1)}) \\ &= \sqrt{n}S_n(Uf) \otimes \Psi^{(n-1)}) \\ &= (A^*(Uf)\Psi)^{(n)} \quad \square\end{aligned}$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M,dk))$ 上で消滅作用素 $A(f)$ の具体的な作用

(M,μ) を測度空間とし，$L^2(M) := L^2(M,d\mu)$ は可分であるとする。$\otimes_{\mathrm{sym}}^n L^2(M)$ は二乗可積分な対称関数の空間と同一視することができる。

$$L^2_{\mathrm{sym}}(M^n) := \{\Psi \in L^2(M^n) \mid \Psi(k_1,\cdots,k_n) = \Psi(k_{\sigma(1)},\cdots,k_{\sigma(n)}), \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

このとき，$A^*(f)$ の定義から

$$\langle \Psi, A(f)\Phi\rangle = \langle A^*(f)\Psi,\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left\langle S_{n+1}(f\otimes\Psi^{(n)}),\Phi^{(n+1)}\right\rangle$$

以下 $d\mu(k)$ を dk と略記する。ここで

$$\begin{aligned}
&\left\langle S_{n+1}(f\otimes\Psi^{(n)}),\Phi^{(n+1)}\right\rangle = \left\langle f\otimes\Psi^{(n)}, S_{n+1}\Phi^{(n+1)}\right\rangle = \left\langle f\otimes\Psi^{(n)},\Phi^{(n+1)}\right\rangle\\
&= \int_{M^{n+1}} \overline{f(k_1)\Psi^{(n)}(k_2,\cdots,k_{n+1})}\Phi^{(n+1)}(k_1,\cdots,k_{n+1})dk_1\cdots dk_{n+1}\\
&= \int_{M^n}\overline{\Psi^{(n)}(k_2,\cdots,k_{n+1})}\left[\int_M \overline{f(k_1)}\Phi^{(n+1)}(k_1,\cdots,k_{n+1})dk_1\right]dk_2\cdots dk_{n+1}
\end{aligned}$$

となることから，$A(f)$ の作用は

$$(A(f)\Phi)^{(n)}(\cdot) = \sqrt{n+1}\int_M \overline{f(k)}\Phi^{(n+1)}(k,\cdot)dk \tag{11}$$

となる。上では第 1 変数について積分したが，$\Phi^{(n+1)}$ は対称関数なので，どの変数で積分しても同じである。

命題 23 (正準交換関係 (CCR))

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}(\mathscr{H})$ 上で次の交換関係が成立する。

$$[A(f), A^*(g)] = \langle f, g \rangle, \qquad f, g \in \mathscr{H}$$
$$[A(f), A(g)] = 0 = [A^*(f), A^*(g)]$$

証明. 命題 22 から $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M))$ 上で証明を行えば十分。以下，a.e. は略。まず (11) から

$$\begin{aligned}(A(f)A(g)\Psi)^{(n)}(\cdot) &= \sqrt{n+1}\int_M dk\overline{f(k)}(A(g)\Psi)^{(n+1)}(k, \cdot) \\ &= \sqrt{(n+1)(n+2)}\int_{M^2} dkdk'\overline{f(k)g(k')}\Psi^{(n+2)}(k, k', \cdot) \\ &= (A(g)A(f)\Psi)^{(n)}(\cdot)\end{aligned}$$

から $[A(f), A(g)] = 0 = [A^*(f), A^*(g)]$ がしたがう。

以下，$[A(f), A^*(g)] = \langle f, g \rangle$ を示す。(11) から

$$(A(f)A^*(g)\Psi)^{(n)}(k_1, \cdots, k_n) = \sqrt{n+1}\int_M \overline{f(k_{n+1})}(A^*(g)\Psi)^{(n+1)}(k_1, \cdots, k_n, k_{n+1})dk_{n+1}$$

である。次に $A^*(g)$ の定義から

$$(A^*(g)\Psi)^{(n+1)}(k_1, \cdots, k_{n+1}) = \sqrt{n+1}S_{n+1}(g \otimes \Psi^{(n)})(k_1, \cdots, k_{n+1})$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} g(k_{\sigma(1)})\Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)}, \cdots, k_{\sigma(n+1)}) \qquad (12)$$

となるが，

関係式

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} g(k_{\sigma(1)})(\cdots) = \sum_{j=1}^{n+1} g(k_j) \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}\\(\sigma(1)=j)}} (\cdots)$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
&(A(f)A^*(g)\Psi)^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)\\
&= \frac{1}{n!}\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\sum_{j=1}^{n+1} g(k_j) \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}\\(\sigma(1)=j)}} \Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n+1)})
\end{aligned}$$

ここの j に関する和を $1\sim n$ までの和と $j=n+1$ とに分けると,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} g(k_j)\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}\\(\sigma(1)=j)}} \Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n+1)})\\
&\quad + \langle f,g\rangle \frac{1}{n!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}\\(\sigma(1)=n+1)}} \Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n+1)})\\
&= \sum_{j=1}^{n} g(k_j)\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_{n+1})\\
&\quad + \langle f,g\rangle\,\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)
\end{aligned} \tag{13}$$

一方，(12) より

$$(A^*(g)A(f)\Psi)^{(n)}(k_1,\cdots,k_n) = \frac{\sqrt{n}}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} g(k_{\sigma(1)})(A(f)\Psi)^{(n-1)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n)})$$

(11) を $n \to n-1$ にして使うと

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} g(k_{\sigma(1)})\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n)},k_{n+1})$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n} g(k_j)\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\(\sigma(1)=j)}}\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n)},k_{n+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g(k_j)\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\(\sigma(1)=j)}}\Psi^{(n)}(k_{\sigma(2)},\cdots,k_{\sigma(n)},k_{n+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g(k_j)\int_M dk_{n+1}\overline{f(k_{n+1})}\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_{n+1})$$

これと (13) から

$$([A(f),A^*(g)]\Psi)^{(n)}(k_1,\cdots,k_n) = \langle f,g\rangle\,\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)$$

となる（$n=0$ の場合は簡単なので略)。したがって，$[A(f),A^*(g)] = \langle f,g\rangle$ が成立する。 $\square$

命題 24

任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して $\mathrm{dom}(A(f)) = \mathrm{dom}(A^*(f))$ である。

証明. CCR から $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ に対して

$$\begin{aligned} \|A^*(f)\Psi\|^2 &= \langle \Psi, A(f)A^*(f)\Psi \rangle \\ &= \left\langle \Psi, (A^*(f)A(f) + \|f\|^2)\Psi \right\rangle \\ &= \|A(f)\Psi\|^2 + \|f\|^2\|\Psi\|^2 \end{aligned} \tag{14}$$

である。したがって，$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ は $A^*(f), A(f)$ の芯であることに注意して，極限操作を行えば，$A^*(f)$，$A(f)$ の定義域は等しいことがわかる。 □

定義 25

$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ とする。真空に生成作用素を作用させてできるベクトルの張る空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) := \mathcal{L}\{\Omega, A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega \mid f_j \in \mathscr{D}, j = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

を $\mathscr{D}$ によって生成される有限粒子部分空間という。

※有限粒子部分空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ もあったので注意が必要（こちらは粒子数が有限の意味）

命題 26

$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) = \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \hat{\bigotimes}_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{D}$ である。したがって，$\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密なら $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で稠密。

証明. $A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega = (0, \cdots, 0, \underbrace{\sqrt{n!}S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)}_{n\text{ 番目}}, 0, 0, \cdots)$ なので，n を固定したとき，このようなベクトルの張る空間は

$$0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus S_n(\hat{\otimes}^n \mathscr{D}) \oplus 0 \cdots = 0 \oplus \cdots 0 \oplus \hat{\otimes}_{\mathrm{sym}}^{n} \mathscr{D} \oplus 0 \cdots$$

に等しい。 □

$T^{(n)}$ は以前定義した（$n = 1, 2, \cdots$）。$T^{(0)} := 0$ とする。

定義 27

T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素とする。このとき $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の作用素

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) := \oplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)}$$

を T の第二量子化作用素という。

以下のことは直ちにわかる。

- $T \neq 0$ なら T は非有界
- T が自己共役なら $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ も自己共役である。さらに $T \geq 0$ なら $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \geq 0$
- T のスペクトルがわかれば，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ のスペクトルもわかる
- $\mathscr{D}$ を T の芯とするとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯である
- $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Omega = 0$

例 28

1 光子の状態空間は $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}, dk)$ である（運動量空間）。1 光子のハミルトニアンは Planck の関係式より掛け算作用素 $|k|$ であるから，光子全体（量子輻射場，光子場ともいう）のハミルトニアンは $d\Gamma_{\mathrm{b}}(|k|)$ で与えられる。

$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間とする。ユニタリ変換 $U : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ に対して，フォック空間の間のユニタリ変換

$$\Gamma(U) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (U^{\otimes n}) \qquad : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$$

が定義されたことを思い出そう。

命題 29

T を $\mathscr{H}$ 上の閉作用素とする。このとき，

$$\Gamma(U) d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \Gamma(U)^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(UTU^*)$$

証明. もちろん $\Gamma(U)^* = \Gamma(U^*)$ である。上式の 2 粒子部分への作用は

$$(U \otimes U)(\overline{T \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T})(U \otimes U)^* = \overline{(UTU^*) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (UTU^*)}$$

となる。n 粒子部分への作用も同様である。 □

例 30

1 光子の状態空間は運動量表示では $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}, dk)$ であった。1 光子状態は逆フーリエ変換 $F^* : L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}, dk) \to L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}, dx)$ によって位置座標表示へ移る。このとき，$\Gamma(F^*)$ によって電磁場全体が位置座標の表示になり，このとき $\Gamma(F^*) d\Gamma_{\mathrm{b}}(|k|) \Gamma(F) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\sqrt{-\Delta})$ が成り立つ。

命題 31

T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき，

$$e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} = \Gamma(e^{-itT})$$

証明. 2 粒子部分に注目すると

$$\begin{aligned}
\exp(-itT^{(2)}) &= \exp(-it\overline{(T \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T)}) \\
&= \exp(-itT \otimes \mathbf{1}) \exp(-it\mathbf{1} \otimes T) \\
&= (\exp(-itT) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \exp(-itT)) \\
&= e^{-itT} \otimes e^{-itT}
\end{aligned}$$

3 粒子以上の成分でも同様である。 □

消滅作用素の核

$\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ の場合を考える。以下，$\otimes_{\mathrm{sym}}^n L^2(M)$ は二乗可積分な対称関数の空間 $L^2_{\mathrm{sym}}(M^n)$ と同一視する。これらの直積集合

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^\times &:= \bigtimes_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(M^n) \\ &= \{\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \mid \Psi^{(n)} \in L^2_{\mathrm{sym}}(M^n)\} \end{aligned}$$

を考える。ただし $\mathbb{C} := L^2_{\mathrm{sym}}(M^0)$ とする。フォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M))$ を $\mathscr{F}^\times$ の部分集合とみなし，$\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}^\times$ に対して，形式的なノルムを

$$\|\Psi\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|^2_{L^2(M^n)} \in [0, \infty]$$

を導入する。$\Psi, \Phi \in \mathscr{F}^\times$ の内積を

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \right\rangle$$

によって定義する（ただし，その和が収束するとき）。

定義 32

$\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}^{\times}$ と $k \in M$ に対して $A(k)\Psi \in \mathscr{F}^{\times}$ を

$$(A(k)\Psi)^{(n)}(\cdot) := \sqrt{n+1}\Psi^{(n+1)}(k, \cdot) \in L^2_{\mathrm{sym}}(M^n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

によって定義する。$A(k)$ を消滅作用素の核（超関数核）という。

ここで，$A(k)\Psi$ は μ-a.e. $k \in M$ で定義されている。

命題 33

有限粒子状態 $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ に対して，$\langle \Phi, A(k)\Psi \rangle$ は有限和であり

$$\langle \Phi, A(f)\Psi \rangle = \int_M dk\, \overline{f(k)}\, \langle \Phi, A(k)\Psi \rangle\,, \qquad \Psi \in \mathrm{dom}(A(f)).$$

証明. Φ の最大の粒子数を N とすると

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, A(f)\Psi \rangle &= \sum_{n=0}^{N} \left\langle \Phi^{(n)}, (A(f)\Psi)^{(n)} \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1} \int_M \overline{f(k)} \left\langle \Phi^{(n)}, \Psi^{(n+1)}(k, \cdot) \right\rangle dk \qquad \because (11) \\
&= \int_M \overline{f(k)} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1} \left\langle \Phi^{(n)}, \Psi^{(n+1)}(k, \cdot) \right\rangle dk \quad \square
\end{aligned}$$

命題 33 より消滅作用素は，形式的に

$$A(f) = \int_M dk \overline{f(k)} A(k)$$

と表される。$A^*(f)$ に対しても同様の作用素値超関数核 $A^*(k)$ を定義し $A^*(f) = \int_M dk f(k) A^*(k)$ と考えるのもできなくはないが，こちらはデルタ関数が現れるため，厳密な取り扱いが難しい。生成・消滅作用素の作用素値超関数核 $A^*(k), A(k)$ は形式的に CCR

$$[A(k), A^*(k')] = \delta(k - k'), \qquad [A(k), A(k')] = 0 = [A^*(k), A^*(k')]$$

を満たすこととなるだろう。

$A^*(k), A(k)$ のほうが素の生成・消滅作用素であると考え，$A^*(f), A(f)$ を関数 $f(k)$ によって均された生成・消滅作用素と呼ぶこともある。

デルタ関数を含む $A^*(k)$ の取り扱いには特に慎重になる必要がある。

$L^2(M)$ 上の非負値関数 $Q(k)$ による掛け算作用素を Q とあらわす。

命題 34

$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M))$ に対して，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2})$ と

$$\int_M Q(k)\|A(k)\Psi\|^2 dk < \infty \tag{15}$$

は同値であり，このとき，次の等式が成り立つ：

$$\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2}\Psi\|^2 = \int_M dk Q(k)\|A(k)\Psi\|^2 \tag{16}$$

証明． $A(k)\Psi$ の定義から

$$\int_M dk_1 Q(k_1)\|A(k_1)\Psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\int_M dk_1 Q(k_1) n\|\Psi^{(n)}(k_1,\cdot)\|^2_{L^2(M^{n-1})}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{M^n} dk_1\cdots dk_n Q(k) n|\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)|^2$$

ここで $\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)$ の対称性を用いると

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^n} dk_1 \cdots dk_n (Q(k_1) + \cdots + Q(k_n)) |\Psi^{(n)}(k_1, \cdots, k_n)|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|(Q^{(n)})^{1/2} \Psi^{(n)}\|^2_{L^2(M^n)} \\
&= \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2}\Psi\|^2
\end{aligned}
$$

となる。これらの等式は左辺・右辺のどちらかが有限ならもう一方も有限であるから (15) であることと $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2})$ は同値であり，等式 (16) が成立する。 $\square$

(16) から，任意の $\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q))$ に対し

$$
\langle \Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)\Phi \rangle = \int_M dk Q(k) \langle A(k)\Psi, A(k)\Phi \rangle
$$

と書ける。したがって，もし $A^*(k)$ が定義されれば形式的に次を満たすだろう：

$$
d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q) = \int_M dk Q(k) A^*(k) A(k) \tag{17}
$$

これは自由場のハミルトニアンとして，物理の教科書に現れる形である。しかし，$A(k)$ は可閉作用素ではなく，したがってその共役作用素の扱いは微妙である。数学的に厳密な立場からは，(17) は避けることが多い。

命題 35

$T > 0$ を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする。$f \in \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ に対し，
$\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(A(f))$ であり，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対し

$$\|A(f)\Psi\| \le \|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|, \tag{18}$$

$$\|A^*(f)\Psi\|^2 \le \|T^{-1/2}f\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + \|f\|^2\|\Psi\|^2 \tag{19}$$

証明. ユニタリ変換 $U : \mathscr{H} \to L^2(M)$ によって T を掛け算作用素 Q にすることができるので，$\mathscr{H} = L^2(M), T = Q$ の場合を示せば十分である。$\mathscr{D} = \mathrm{dom}(Q)$ とする。
$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ とする。命題 33 から

$$\begin{aligned}\|A(f)\Psi\| &= \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle \Phi, A(f)\Psi\rangle| \le \int_M dk|f(k)|\|A(k)\Psi\| \\ &= \int_M dk Q(k)^{-1/2}|f(k)|Q(k)^{1/2}\|A(k)\Psi\|\end{aligned}$$

となる。そこで Schwarz の不等式を使い，命題 34 に注意すれば

$$\|A(f)\Psi\| \le \|Q^{-1/2}f\| \left(\int_M dk Q(k)\|A(k)\Psi\|^2\right)^{1/2} = \|Q^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2}\Psi\|$$

となる。

$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $A(f), d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)$ の芯なので，極限操作により，
$\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(A(f))$ かつ (18) が成り立つ。CCR（または (14)）から

$$\|A^*(f)\Psi\|^2 = \|A(f)\Psi\|^2 + \|f\|^2\|\Psi\|^2$$

である。そこで (18) を使えば (19) を得る。 $\square$

$N_{\mathrm{b}} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(\mathbf{1}_{\mathscr{H}})$ を個数作用素という。規格化された状態 $\Psi \in \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}})$ に対して

$$\langle \Psi, N_{\mathrm{b}}\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\|\Psi^{(n)}\|^2$$

は粒子数の期待値を表す。$\mathscr{H} = L^2(M)$ の場合は，これは

$$\langle \Psi, N_{\mathrm{b}}\Psi\rangle = \int_M dk\|A(k)\Psi\|^2$$

である。したがって，$\|A(k)\Psi\|^2$ は k 座標系における粒子の密度分布を表す。

命題 35 で $T = \mathbf{1}$ とすれば次を得る。

Corollary 36

任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して $\mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(A(f))$ であり $\Psi \in \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して

$$\|A(f)\Psi\| \le \|f\|\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\|$$
$$\|A^*(f)\Psi\| \le \|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Psi\|$$

命題 37

$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を稠密な部分空間とする。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ とする。任意の $f \in \mathscr{D}$ に対して $\Psi \in \mathrm{dom}(A(f))$ かつ $A(f)\Psi = 0$ なら Ψ は真空 Ω の定数倍である。

証明. $\{u_j\}_j$ を $\mathscr{D}$ に含まれるような ONB とする。$\ell^2(\mathbb{N})$ の標準基底を $\{e_j\}_j$ とするとき，ユニタリ作用素 $U : \mathscr{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$ で $Uu_j = e_j$ を満たすものが存在する。変換 $\Gamma(U) : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\ell^2(\mathbb{N}))$ を考えれば，$\Gamma(U)N_{\mathrm{b}}\Gamma(U)^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(U\mathbf{1}U^*) = N_{\mathrm{b}}$ だから，はじめから $\mathscr{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ で，$\mathscr{D}$ は $\ell^2(\mathbb{N})$ の標準基底を含む場合を考えればよい。

すべての j ついて $A(e_j)\Psi = 0$ ならば，$\Psi = c\Omega$ となることを示す。$\ell^2(\mathbb{N})$ は L^2 空間の特別な場合であることに注意すれば

$$\begin{aligned}(A(e_j)\Psi)^{(n)}(\cdot) &= \sqrt{n+1}\sum_{k=1}^{\infty} e_j(k)\Psi^{(n+1)}(k,\cdot) \\ &= \sqrt{n+1}\Psi^{(n+1)}(j,\cdot) \qquad \because)\ e_j(k) = \delta_{jk}\end{aligned}$$

である。仮定から $\Psi^{(n+1)}(j,\cdot) = 0$ がすべての j について成り立つ。よって，$\Psi^{(n+1)} = 0,\ n = 0,1,2,\cdots$。したがって

$$\Psi = (\Psi^{(0)}, 0, 0, \cdots) = \Psi^{(0)}\Omega \qquad \square$$

第二量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係

命題 38

T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素とする。$f \in \mathrm{dom}(T)$ または $f \in \mathrm{dom}(T^*)$ とする。このとき，それぞれ

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A^*(f)]\Psi = A^*(Tf)\Psi \tag{20}$$

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)]\Psi = -A(T^*f)\Psi \tag{21}$$

が作用素が定義されるような Ψ に対して成り立つ。

証明. まず，

$$T^{(n)} := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \overbrace{T}^{j\text{-th}} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}$$

は S_n で簡約される。また，これは $f \otimes \Psi^{(n-1)}$ に対しては

$$T^{(n)}(f \otimes \Psi^{(n-1)}) = (Tf) \otimes \Psi^{(n-1)} + f \otimes (T^{(n-1)}\Psi^{(n-1)})$$

と作用する。したがって

$$\begin{aligned} (d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A^*(f)\Psi)^{(n)} &= T^{(n)}\sqrt{n}S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}) \\ &= \sqrt{n}S_n(Tf \otimes \Psi^{(n-1)} + f \otimes (T^{(n-1)}\Psi^{(n-1)}) \\ &= (A^*(Tf)\Psi)^{(n)} + (A^*(f)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi)^{(n)} \end{aligned}$$

よって (20) が成り立つ。(21) は (20) で $T \to T^*$ として全体の共役を取ればよい。 □

生成消滅作用素と第二量子化作用素の関係

命題 39

$u, v \in \mathscr{H}$ とする。このとき，$\Psi \in \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}})$ 上で

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(|u\rangle\langle v|) = A^*(u)A(v)$$

証明． まず，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で示す。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ は

$$\Psi = A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega, \qquad (f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H})$$

の形のベクトルの有限個の線型結合である。(20) を使うと

$$\begin{aligned}
& d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega \\
&= ([d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A^*(f_1)] + A^*(f_1)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))A^*(f_2)\cdots A^*(f_n)\Omega \\
&= A^*(Tf_1)A^*(f_2)\cdots A^*(f_n)\Omega + A^*(f_1)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A^*(f_2)\cdots A^*(f_n)\Omega \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{n} A^*(f_1)\cdots A^*(Tf_j)\cdots A^*(f_n)\Omega + 0
\end{aligned}$$

最後の等式を得るために $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = 0$ を使った。

一方，$T = |u\rangle\langle v|$ とおけば，CCR から

$$[A^*(u)A(v), A^*(f)] = A^*(u)[A(v), A^*(f)] = A^*(\langle v, f\rangle u) = A^*(Tu)$$

となり，これは $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ と全く同じ交換関係 (20) を満たす。$A^*(u)A(v)\Omega = 0$ であることも同じなので，上と全く同様に計算することができ，

$$A^*(u)A(v)A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega = \sum_{j=1}^{n} A^*(f_1)\cdots A^*(Tf_j)\cdots A^*(f_n)\Omega$$

となる。したがって，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で $A^*(u)A(v) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(|u\rangle\langle v|)$ が成り立つ。

次に，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ に対して，これは $A^*(u)A(v), d\Gamma_{\mathrm{b}}(|u\rangle\langle v|)$ の定義域に入り，任意の $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\Phi, A^*(u)A(v)\Psi\rangle &= \langle A^*(v)A(u)\Phi, \Psi\rangle = \langle d\Gamma_{\mathrm{b}}(|v\rangle\langle u|)\Phi, \Psi\rangle \\ &= \langle\Phi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(|u\rangle\langle v|)\Psi\rangle\end{aligned}$$

となる。$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ は稠密なので，

$$A^*(u)A(v) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(|u\rangle\langle v|)$$

となることがわかる。 □

$\{e_j\}_j$ を適当な ONB とするとき，作用素 S, T に対して，形式的に次の計算を行うことができる：

$$\begin{aligned} d\Gamma_{\mathrm{b}}(ST^*) &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(S \sum_j |e_j\rangle \langle e_j| \, T^*) = \sum_j d\Gamma_{\mathrm{b}}(|Se_j\rangle \langle Te_j|) \\ &= \sum_j A^*(Se_j) A(Te_j) \end{aligned}$$

この式は作用素 S, T の種類によって定義域や収束に注意を払う必要があるが，必要に応じて個別に示せばよい。例えば，次の命題を示すことができる。

命題 40

$T \geq 0$ を自己共役作用素とする。$\mathscr{D}$ を $T^{1/2}$ の芯とする。$\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の *ONB* とする。このとき，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ であれば

$$\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A(T^{1/2}e_j)\Psi\|^2 < \infty$$

定義 41

$f \in \mathscr{H}$ に対して Segal の場の作用素を次で定義する：

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{A(f) + A^*(f)}$$

次のことは容易にわかる：

- $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は対称作用素，これの作用は f について実線型
- $\mathrm{dom}(\Phi_{\mathrm{S}}(f)) \supset \mathrm{dom}(A(f)) \supset \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \supset \mathscr{F}_{\mathrm{b0}} \supset \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$
- $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}, \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ を不変にする。

命題 42

$f, g \in \mathscr{H}$ とする。$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle$$

証明. $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上では $\Phi_{\mathrm{S}}(f) = 2^{-1/2}(A(f) + A^*(f))$ なので

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = 2^{-1}[A(f) + A^*(f), A(g) + A^*(g)] = 2^{-1}(\langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle) \qquad \square$$

Segal の場の作用素の性質

次は $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の自己共役性や後の計算のために使う：

命題 43

$f \in \mathscr{H}$ とする。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の全解析ベクトルである。つまり

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \Psi\| < \infty \qquad (\forall t > 0)$$

証明. $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ を任意にとる。命題 35 より

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi\| &\leq 2^{-1/2}\big(\|A(f)\Psi\| + \|A^*(f)\Psi\|\big) \\ &\leq 2^{-1/2}\|f\|\big(\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\| + \|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Psi\|\big) \\ &\leq \sqrt{2}\|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Psi\| \end{aligned}$$

となる。Ψ の最大粒子数を N とする。つまり

$$\Psi = (\Psi^{(0)}, \cdots, \Psi^{(N)}, 0, 0, \cdots)$$

である。$\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Psi$ は $N+n$ 粒子以下の成分しかないので

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Psi\| &\leq \sqrt{2}\sqrt{N+n}\|f\|\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^{n-1}\Psi\| \\ &\leq 2^{n/2}\|f\|^n\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\|\Psi\| \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \Psi\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n 2^{n/2}}{n!} \|f\|^n \sqrt{(N+n)!/N!} \|\Psi\| < \infty$$

である。 □

定理 44

$f \in \mathscr{H}$ とする。$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を任意の稠密な部分空間とする。このとき，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は自己共役であり，$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ や $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ 上で本質的に自己共役である。

証明. $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ は

(1) $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で稠密　(2) $\mathrm{dom}(\Phi_{\mathrm{S}}(f))$ に含まれる　(3) $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の作用で不変。

である。命題 43 から $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の解析ベクトルである。したがって，解析ベクトル定理より $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で本質的に自己共役である。

$\Phi'_{\mathrm{S}}(f) := \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}}$ とする。定義から $\Phi'_{\mathrm{S}}(f) \subset \Phi_{\mathrm{S}}(f)$ である。$\Psi \in \mathrm{dom}(\Phi_{\mathrm{S}}(f))$ とする。定義から $\Psi_n \in \mathrm{dom}(A(f))$ で $\Psi_n \to \Psi$, $\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi_n \to \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi$ となる列がとれる。任意の $\Xi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ に対して

$$\langle \Xi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi_n \rangle \overset{\text{対称性}}{=} \langle \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Xi, \Psi_n \rangle \overset{\text{拡大の定義}}{=} \langle \Phi'_{\mathrm{S}}(f)\Xi, \Psi_n \rangle$$

となり，両辺で $n \to \infty$ とすると，$\langle \Xi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi \rangle = \langle \Phi'_{\mathrm{S}}(f)\Xi, \Psi \rangle$

となるので，$\Psi \in \mathrm{dom}(\Phi'_{\mathrm{S}}(f))$ である。したがって，$\Phi'_{\mathrm{S}}(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(f)$。よって $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は自己共役。

次に，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ なので

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) \subset \Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{b0}} \subset \Phi_{\mathrm{S}}(f)$$

だが，簡単な極限の議論によって $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})} \subset \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}}$ が示せるので，

$$\color{red}{\Phi_{\mathrm{S}}(f)} = \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}} \subset \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})} \subset \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)\lceil\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}} = \color{blue}{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$$

したがって，上の作用素は全て等しいので，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ 上で本質的に自己共役である。 □

定理 45

$f, g \in \mathscr{H}$ に対して

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(g)} = \Phi_{\mathrm{S}}(f) + \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \tag{22}$$

が成り立つ。

証明. $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ とする。$U(t) := e^{-it\Phi_{\mathrm{S}}(g)}$ とおく。前に解析ベクトルであることを示したのと同様に $U(t)\Psi_i \in \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}})$ であることも示せるので
$U(t)\Psi_i \in \mathrm{dom}(\Phi_{\mathrm{S}}(f))$ である。

$$F(t) := \langle U(t)\Psi_1, \Phi_{\mathrm{S}}(f)U(t)\Psi_2\rangle, \qquad t \in \mathbb{R}$$

とおく。これは t について微分可能であり

$$\begin{aligned} F'(t) &= \langle -i\Phi_{\mathrm{S}}(g)U(t)\Psi_1, \Phi_{\mathrm{S}}(f)U(t)\Psi_2\rangle + \langle U(t)\Psi_1, \Phi_{\mathrm{S}}(f)(-i)\Phi_{\mathrm{S}}(g)U(t)\Psi_2\rangle \\ &= -i\,\langle U(t)\Psi_1, [\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)]U(t)\Psi_2\rangle \\ &= \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \langle U(t)\Psi_1, U(t)\Psi_2\rangle \\ &= \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \langle \Psi_1, \Psi_2\rangle \end{aligned}$$

この両辺を t について積分すれば $F(1) = F(0) + \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \langle \Psi_1, \Psi_2\rangle$ となるので

$$\langle \Psi_1, U(1)^*\Phi_{\mathrm{S}}(f)U(1)\Psi_2\rangle = \langle \Psi_1, (\Phi_{\mathrm{S}}(f) - i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle)\Psi_2\rangle$$

である。これが任意の $\Psi_1 \in \mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ に対して成り立つので

$$U(1)^*\Phi_{\mathrm{S}}(f)U(1)\Psi_2 = (\Phi_{\mathrm{S}}(f) + \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle)\Psi_2, \qquad (\Psi_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{b0}})$$

$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で本質的に自己共役なので作用素の等式 (22) が成り立つ。 $\square$

定理 46 (Weyl 型交換関係)

任意の $f, g \in \mathscr{H}$ に対して

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)} = e^{-i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle} e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)} e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$$

証明. $U = e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)}$ とおく。作用素の関数のユニタリの共変性と定理 45 から

$$U^* \exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(f))U = \exp(iU^*\Phi_{\mathrm{S}}(f)U) = \exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(f) + i\mathrm{Im}\langle f, -g\rangle)$$

となる。 □

Corollary 47

$\mathrm{Im}\langle f, g\rangle = 0$ なら $\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)$ は強可換である。特に，$\mathscr{H}$ のある共役子 J に対して $Jf = f, Jg = g$ であれば $\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)$ は強可換である。

※ $\langle f, g\rangle = \langle Jg, Jf\rangle = \langle g, f\rangle$ に注意。
※ 2 つの自己共役作用素 S, T が強可換であるとは S, T のスペクトル測度がすべて可換であることと定義される。

無限自由度の CCR

まず，有限自由度 N の量子力学系での位置と運動量 $\{x_n, p_n\}_{n=1}^N$ に対する CCR は

$$[x_n, p_m] = i\delta_{nm}, \quad [x_n, x_m] = [p_n, p_m] = 0$$

であることを思い出そう。$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は f について実線形であることに注意し

$$\Pi_{\mathrm{S}}(f) := \Phi_{\mathrm{S}}(if) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(A(if) + A^*(if))}$$

を定義する。$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の ONS で $Je_n = e_n$ を満たすものとしよう。このとき

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(e_n), \Pi_{\mathrm{S}}(e_m)] = i\mathrm{Im}\,\langle e_n, ie_m\rangle = i\delta_{nm}$$

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(e_n), \Phi_{\mathrm{S}}(e_m)] = i\mathrm{Im}\,\langle e_n, e_m\rangle = 0$$

$$[\Pi_{\mathrm{S}}(e_n), \Pi_{\mathrm{S}}(e_m)] = i\mathrm{Im}\,\langle ie_n, ie_m\rangle = 0$$

となる（$n, m \in \mathbb{N}$)。実ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_r := \{f \in \mathscr{H} \mid Jf = f\}$ の元 $f \in \mathscr{H}_r$ に対して $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は位置，$\Pi_{\mathrm{S}}(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(if)$ は運動量の役割を果たす。この意味で，$\{\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Pi_{\mathrm{S}}(f) \mid f \in \mathscr{H}_r\}$ は無限自由度の CCR であるといえる。

$\Pi_{\mathrm{S}}(f)$ の定義から，$\mathrm{dom}(A(f))$ 上で

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + i\Pi_{\mathrm{S}}(f)), \qquad A^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) - i\Pi_{\mathrm{S}}(f)),$$

となる。つまり生成・消滅作用素は Segal の場の作用素を用いて表すことができる。

量子場のハミルトニアンや物理量はすべて生成・消滅作用素または $\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Pi_{\mathrm{S}}(f)$ を使って定義される。その意味で，量子場は自由度 $N \to \infty$ の量子力学とみなすことができる。

上式から

$$\begin{aligned} A^*(f)A(f) &= \frac{1}{2}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) - i\Pi_{\mathrm{S}}(f))(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + i\Pi_{\mathrm{S}}(f)) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 + \Pi_{\mathrm{S}}(f)^2 + i[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Pi_{\mathrm{S}}(f)]) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 + \Pi_{\mathrm{S}}(f)^2 + i \times i\mathrm{Im}\,\langle f, if\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 + \Pi_{\mathrm{S}}(f)^2 - \|f\|^2) \end{aligned}$$

である。自由場のハミルトニアン $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は $T \geq 0$ の場合，ONB $\{e_j\}_j$ を用いて

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = \sum_{j=1}^{\infty} A^*(T^{1/2}e_j)A(T^{1/2}e_j)$$

と書ける（これがどの位相で収束するかいまは気にしない）。

これを位置 Φ_{S} と Π_{S} を使って表すと，形式的に

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\Phi_{\mathrm{S}}(T^{1/2}e_j)^2 + \Pi_{\mathrm{S}}(T^{1/2}e_j)^2 - \|T^{1/2}e_j\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\Phi_{\mathrm{S}}(T^{1/2}e_j)^2 + \Pi_{\mathrm{S}}(T^{1/2}e_j)^2) \qquad (23) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\|T^{1/2}e_j\|^2 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる。 (23) は無限個の調和振動子のエネルギーの形をしている。(24) は定数項だが，これは T がコンパクトでない限り発散する。T は 1 粒子ハミルトニアンを表すので普通は非有界作用素であり，コンパクト作用素からは程遠い。

もともとは，場を無限個の調和振動子の集まりと考えて量子化し，エネルギーを書き下したのだが，発散項がでてきたので，これを除去した結果，自由場のハミルトニアン $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ が得られる，というのが通常の正準量子化の方法である。

作用素の既約性

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の閉部分空間 M 上への正射影を P_M とあらわす。

定義 48

$\mathscr{H}$ 上の作用素 A が M によって簡約されるとは次が成立することである：

$$P_M A \subset A P_M$$

このとき，$A_M := A\lceil(M \cap \mathrm{dom}(A))$ を A の M による簡約部分という。

A が M によって簡約されるとき，A は $M^\perp$ によっても簡約され

$$A = A_M \oplus A_{M^\perp}$$

となる。

定義 49

作用素の集合 $\mathfrak{A}$ のすべての元を簡約する閉部分空間が $\{0\}$ と $\mathscr{H}$ だけのとき，$\mathfrak{A}$ は既約であるという。

例 50

$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ において x, p をそれぞれ位置，運動量作用素とする。$\{x\}$ は既約ではないが $\{x, p\}$ は既約である。

証明． $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0, x \geq 0\}$ は作用素 x を簡約するので $\{x\}$ は既約ではない。次に $\{x, p\}$ を簡約する非自明な閉部分空間 M があるとする。

$$H_M := \frac{x_M^2 + p_M^2}{2}, \qquad H_{M^\perp} := \frac{x_{M^\perp}^2 + p_{M^\perp}^2}{2}$$

とおけば，$H = (p^2 + x^2)/2 = H_M \oplus H_{M^\perp}$ である。M 上では $[x_M, p_M] = i$ となり，x_M, p_M は CCR を満たす。したがって，$H_M, H_{M^\perp}$ もそれぞれ調和振動子なので，

$$\sigma(H_M) = \{n + \tfrac{1}{2} \mid n = 0, 1, \cdots\} = \sigma(H_{M^\perp})$$

となるが，1 次元調和振動子 H の固有状態の重複度が 1 なのはわかっているので矛盾。

命題 51

$L^2(\mathbb{R})$ において $\{e^{itx}, e^{itp} \mid t \in \mathbb{R}\}$ は既約

証明． これを簡約する空間 M があるとすると，$e^{itx}P_M = P_M e^{itx}$ だが，t について強微分すると M が x を簡約することがわかる。p についても同様。したがって，上の例から M は自明な空間以外にない。 □

定理 52 (生成・消滅作用素の既約性)

$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を稠密な部分空間とする。このとき，$\{A(f), A^*(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ は既約である。

証明． $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の閉部分空間 M が $A(f), A^*(f)$ $(f \in \mathscr{D})$ を簡約するとする。
$\Omega \in \mathrm{dom}(A(f))$ なので，簡約の定義から $P_M\Omega \in \mathrm{dom}(A(f))$ であり

$$A(f)P_M\Omega = P_M A(f)\Omega = 0$$

である。これが $f \in \mathscr{D}$ に対して成り立つので，命題 37 から

$$P_M\Omega = c\Omega$$

を満たす定数がある。P_M は正射影なので c は 0 または 1 のどちらかである。$c = 1$ のとき，$\Omega \in M$ である。M は $A^*(f)$ を簡約するので $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{D}$ に対して

$$P_M A^*(f_1) \cdots A^*(f_n)\Omega = A^*(f_1) \cdots A^*(f_n)P_M\Omega = A^*(f_1) \cdots A^*(f_n)\Omega$$

となる。したがって，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) \in M$ となるが，$\mathscr{D}$ は稠密なので $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ である。したがって，$M = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ である。$c = 0$ の場合は $\Omega \in M^\perp$ となる。この場合，$M^\perp$ は $A^*(f)$ 達を簡約することから $M^\perp = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ となる。つまり $M = \{0\}$ である。$\{A(f), A^*(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ を簡約する空間は自明なものしかないのだから，これは既約である。 □

定理 53

$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を任意の稠密な部分空間とする。このとき，$\{\Phi_{\mathrm{S}}(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ は既約である。

証明. $\mathfrak{A} := \{\Phi_{\mathrm{S}}(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ とおく。生成・消滅作用素は Segal の場の作用素を用いて表すことできるので，閉部分空間 M が $\mathfrak{A}$ を簡約するとすると，それは $\{A(f), A^*(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ も簡約する。したがって，定理 63 から M は自明な部分空間である。よって，$\mathfrak{A}$ は既約である。 $\square$

定理 54

$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を任意の稠密な部分空間とする。このとき，$\{e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$ は既約である。

証明. 閉部分空間 M が $\{e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$ を簡約するとすると，M は $\{\Phi_{\mathrm{S}}(f) \mid f \in \mathscr{D}\}$ も簡約する。したがって，M は自明な部分空間となり，既約性が導かれる。 $\square$

さまざまな量子場の模型

これは固定された粒子とボソンの相互作用を記述する模型で，相互作用する量子場の模型としては最も簡単なものである。「フォック空間と量子場」では van-Hove 模型と呼ばれているが，新井先生の新しい本では van-Hove Miyatake model となっている。

van-Hove 模型の状態のヒルベルト空間は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ であり，ハミルトニアンは

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \lambda \Phi_{\mathrm{S}}(g)$$

である。ここに $T > 0$ は 1 粒子ハミルトニアン，$\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数，$g \in \mathscr{H}$ は結合関数と呼ばれる。

物理的な状況では $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3, dk)$, $T = \omega(k)$, $g = \hat{\rho}(k)/\sqrt{\omega}$ のようにに取られることが多い。$\omega(k)$ は運動量 k の粒子のエネルギーで分散関係と呼ばれ，光の場合は $\omega(k) = |k|$。質量を持つ粒子なら $\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + m^2}$ などが代表例である。空洞（cavity）中の光や，結晶中の音子（phonon）はより複雑な分散関係をもつ。g に含まれる $\hat{\rho}(k)$ はそのフーリエ逆変換 $\rho(x)$ が，ボソンと相互作用する固定された粒子の形（位置の分布）を表すものと解釈される。

$\hat{\rho}(k)$ の代表例に

$$\hat{\rho}(k) = \chi(|k| < \Lambda)$$

がある。ここに，$\Lambda > 0$ は定数で，高エネルギーの相互作用をカットするため，紫外切断と呼ばれる。$\Lambda \to \infty$ のとき，$\rho(x)$ はデルタ関数に収束する。これは，固定された粒子が点粒子となることを意味している。しかし，物理的に点粒子を考えたい場合でも，この極限における $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ はフォック空間上の作用素として定義できないので，上のように何らかの正則化が必要となる。

定理 55

$T > 0$，$g \in \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。このとき，すべての結合定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ について H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役で下に有界，かつすべての $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯上で本質的に自己共役である。

証明. Kato-Rellich の定理を応用する。$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ とする。命題 35 から，

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\| &\le \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\|A^*(g)\Psi\| + \|A(g)\Psi\|\Big)\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\|T^{-1/2}g\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\| + \|g\|\|\Psi\|\Big)\end{aligned}$$

任意の $x \ge 0$ と $\epsilon > 0$ に対して，$x \le \epsilon x^2 + \frac{1}{4\epsilon}$ となることを使えば

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\| \le \sqrt{2}\epsilon\|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| + C\|\Psi\|$$

となる。ここに C は適当な定数。ϵ を小さく取り $\sqrt{2}\epsilon\|T^{-1/2}g\| < 1$ とすることができる。Kato-Rellich の定理から結論が導かれる。 □

van-Hove 模型の対角化

定数 λ は g に含まれれると考え $\lambda = 1$ とおく。$\mathscr{H} = L^2(M)$, $T = \omega(k)$ の場合を考えてみる。ハミルトニアンは形式的に

$$H = \int_M dk(\omega(k)A^*(k)A(k)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_M dk(g(k)A^*(k) + \overline{g(k)}A(k))$$

となるのだが，この積分を一つにし，$A(k), A^*(k)$ について平方完成（？）してみる

$$\begin{aligned}
H &= \int_M dk\omega\Big(A^*A + \frac{g}{\sqrt{2}\omega}A^* + \frac{\bar{g}}{\sqrt{2}\omega}A\Big) \\
&= \int_M dk\omega\Big((A^* + \frac{\bar{g}}{\sqrt{2}\omega})(A + \frac{g}{\sqrt{2}\omega}) - \frac{|g|^2}{2\omega^2}\Big) \\
&= \int_M dk\omega(k)B^*(k)B(k) - \frac{1}{2}\int_M dk\frac{|g(k)|^2}{\omega(k)}
\end{aligned}$$

となる。ここに

$$B^*(k) = A^*(k) + \frac{\overline{g(k)}}{\sqrt{2}\omega(k)}, \qquad B(k) = A(k) + \frac{g(k)}{\sqrt{2}\omega(k)}$$

である。$B^*(k), B(k)$ は $A^*(k), A(k)$ から各 k ごとに定数加えただけなので，これも CCR を満たす。

そこで，$B^\sharp(k)$ を $B^\sharp(k)$ に移すユニタリ変換 U があれば，U によって $\int \omega B^* B dk$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ に変換され，そのスペクトルはよく知っているものとなるはずである。

これを正当化するため，均された消滅作用素を

$$B(f) := A(f) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f, \omega^{-1} g \right\rangle, \qquad f \in \mathscr{H}$$

$$B^*(f) := A^*(f) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \omega^{-1} g, f \right\rangle$$

で定義する。$B^\sharp(f)$ を $A^\sharp(f)$ に移す変換を見つける。

次に，少しそのための準備をする。

定理 56 (Bogoliubov 並進)

すべての $f, g \in \mathscr{H}$ に対して次の作用素の等式が成り立つ

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(ig)} A(f) e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(ig)} = A(f) + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle f, g \rangle$$
$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(ig)} A^*(f) e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(ig)} = A^*(f) + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle g, f \rangle$$

証明. まず，$A(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + i\Phi_{\mathrm{S}}(if))$$

と書ける。$U = \exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(ig))$ とおき，定理 45 を用いると $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で

$$UA(f)U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + \mathrm{Im}\,\langle f, ig \rangle + i\Phi_{\mathrm{S}}(if) + i\mathrm{Im}\,\langle if, ig \rangle\Big)$$

となり $U^*\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で第 1 式を得る。$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ が $A(f)$ の芯であることに注意し，定義域の議論を適切に行えば作用素の等式としての第 1 式を得る。第 2 式は共役を取ればよい。 □

van-Hove 模型の話に戻る。ハミルトニアンは

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \lambda\Phi_{\mathrm{S}}(g)$$

であった。

定理 57

$T > 0$ かつ $g \in \mathrm{dom}(T^{-1})$ (自己共役性より強い条件！) とする。

$$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)} H e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) - \frac{\lambda}{2}\left\langle g, T^{-1}g\right\rangle$$

が成り立つ。特に H は基底状態 $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}\Omega$ を持つ。

証明. $\lambda = 1$ とする。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ に対して計算する。命題 40 と偏極恒等式より $\mathrm{dom}(T)$ の ONB $\{e_j\}_j$ に対して,

$$\langle \Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\left\langle A(T^{1/2}e_j)\Psi, A(T^{1/2}e_j)\Phi\right\rangle$$

である。$U = e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}$ とおくと

$$UA(T^{1/2}e_j)U^* = A(T^{1/2}e_j) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle T^{1/2}e_j, T^{-1}g\right\rangle$$

である。

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle T^{1/2}e_j, T^{-1}g\right\rangle$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle (A(T^{1/2}e_j) - c_j)U\Psi, (A(T^{1/2}e_j) - c_j)U\Phi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle A(T^{1/2}e_j)U\Psi, A(T^{1/2}e_j)U\Phi \right\rangle \qquad (25) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle U\Psi, \Big(A(c_jT^{1/2}e_j) + A^*(c_jT^{1/2}e_j)\Big)U\Phi \right\rangle \qquad (26) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \langle \Psi, \Phi\rangle
\end{aligned}
$$

となる。まず，(25) $= \langle U\Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U\Phi\rangle$ である。つぎに，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} c_jT^{1/2}e_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle T^{1/2}e_j, T^{-1}g \right\rangle T^{1/2}e_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} T^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle e_j, T^{-1/2}g \right\rangle e_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} g
\end{aligned}
$$

である。

したがって，(26) $= \langle U\Psi, \Phi_{\mathrm{S}}(g)U\Phi\rangle$ である。最後に

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \frac{1}{2}\|T^{-1/2}g\|^2 = \frac{1}{2}\left\langle g, T^{-1}g\right\rangle$$

である。以上をまとめると

$$\langle \Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle = \langle U\Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U\Phi\rangle + \langle U\Psi, \Phi_{\mathrm{S}}(g)U\Phi\rangle + \frac{1}{2}\left\langle g, T^{-1}g\right\rangle \langle U\Psi, U\Phi\rangle$$

である。したがって $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ 上で

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = U^* H U + \frac{1}{2}\left\langle g, T^{-1}g\right\rangle$$

が成り立つ。$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), H$ の芯であることに注意し，自己共役作用素の拡大の一意性を使えば作用素の等式を得る。 □

- $g \notin \mathrm{dom}(T^{-1})$ の場合，$\exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g))$ はフォック空間内のユニタリ作用素として定義されない。また，この場合，H の基底状態は存在しないことが知られている。物理的には最低エネルギーのボソンの量がヒルベルト空間を超えてしまうことに対応している。
- $g \in \mathrm{dom}(T^{-1})$ は赤外正則条件と呼ばれる。
- 赤外正則条件を課さないと，基底状態が存在しなくなるような模型は赤外特異と呼ばれる。

Pauli-Fierz 模型

非相対論的量子電磁力学とも呼ばれる。荷電粒子と光（量子電磁場）の相互作用を記述する模型である。

1 光子の状態のヒルベルト空間は $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ である。Pauli-Fierz 模型の全系のヒルベルト空間は

$$L^2(\mathbb{R}^3, dx) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}))$$

であり，ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(p \otimes \mathbf{1} + eA(x))^2 + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + V(x) \otimes \mathbf{1}$$

と定義される。ここで，$x \in \mathbb{R}^3$ は荷電粒子の座標，$p = -i\nabla_x$ は運動量を表す。$e \in \mathbb{R}$ は粒子の電荷を表す。$\omega = |k|$ は 1 光子のハミルトニアンである。$k \in \mathbb{R}^3$ に直交する 2 つの単位ベクトルを $e(k,1), e(k,2)$ と表す。$g \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ とする。各 $x \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$G_j(x,k,\lambda) := g(k)e_j(k,\lambda)e^{-ikx}, \qquad j = 1,2,3 \quad \lambda = 1,2$$

で定義する。このとき，位置 x における量子化されたベクトル・ポテンシャル $A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ は

$$A_j(x) := \Phi_{\mathrm{S}}(G_j(x,\cdot))$$

と定義される。$V(x)$ はポテンシャルエネルギーである。

$g \in \mathrm{dom}(\omega^{-1/2})$ であり，$V(x)$ が Kato クラスなら Pauli-Fierz ハミルトニアン H は自己共役であることが示されている。技術的な制限は少しつくが，$V(x) \to 0(|x| \to \infty)$ のとき，

$$-\frac{1}{2}\Delta + V(x)$$

が負エネルギーの固有値を持つという条件のもとで H は基底状態を持つことが示されている。

この模型では赤外正則条件 $g \in \mathrm{dom}(\omega^{-1})$ がなくても基底状態が存在する（もちろん $V(x)$ の形に依存するが)。

H において $A(x)$ のかわりに $A(0)$ を用いて定義されるハミルトニアンを双極近似の Pauli-Fierz 模型という。この模型は，V が調和振動子ポテンシャルや $V = 0$ の場合には後で説明する（抽象的な）対相互作用模型の特別な場合になっている。

Pauli-Fierz 模型は複雑なため，散乱理論や共鳴極などの研究が少しあるが，完全には解析されていないように思われる。

$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ とする。P をフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の 0,1 光子空間への正射影作用素とする：

$$P(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots) = (\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, 0, 0, \cdots)$$

Pauli-Fierz 模型を 0,1 光子に制限したハミルトニアン PHP はヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}) \cong L^2(\mathbb{R}^3) \oplus (L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathscr{H})$$

上の作用素である。

この模型について解析した論文は見たことが無いが，誰かやっているかもしれない。この模型に対して，Schödinger 作用素の観点から散乱理論などを議論するのは現実的な問題のように思われる。

実は双極近似の Pauli-Fierz 模型の特別な場合は，このハミルトニアンで表すことができる。ここでは抽象的な対相互作用模型を導入する。

対相互作用模型の状態のヒルベルト空間は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ であり，ハミルトニアンは

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2$$

によって定義される。ここに，T は 1 ボソンのハミルトニアン，$\lambda_n \in \mathbb{R}$ は結合定数，$g_n \in \mathscr{H}$ である。

次の目標はこの模型を Bogoliubov 変換によって対角化することである。

Bogoliubov 変換とシンプレクティック群

Bogoliubov 変換は，生成・消滅作用素 $\{A(f), A^*(f) \mid f \in \mathscr{H}\}$ を CCR を保ちながらそれらの線型結合に移す変換である。

以下，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ とその上の共役子 J を一つ固定する。$X, Y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ に対し

$$B(f) := \overline{A(Xf) + A^*(JYf)}, \qquad f \in \mathscr{H}$$

を考える。$B(f)$ は f に関して反線型である。

B, B^* 達が CCR を満たすために必要な条件を考えよう。$f, g \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ 上で

$$\begin{aligned}
[B(f), B^*(g)] &= [A(Xf) + A^*(JYf), A^*(Xg) + A(JYg)] \\
&= [A(Xf), A^*(Xg)] + [A^*(JYf), A(JYg)] \\
&= \langle Xf, Xg\rangle - \langle JYg, JYf\rangle \\
&= \langle Xf, Xg\rangle - \langle Yf, Yg\rangle \\
&= \langle f, (X^*X - Y^*Y)g\rangle
\end{aligned}$$

したがって，$[B(f), B^*(g)] = \langle f, g\rangle$ であるための必要十分条件は $X^*X - Y^*Y = \mathbf{1}$ である。

同様にして

$$\begin{aligned}
[B(f), B(g)] &= [A(Xf) + A^*(JYf), A(Xg) + A^*(JYg)] \\
&= [A(Xf), A^*(JYg)] + [A^*(JYf), A(Xg)] \\
&= \langle Xf, JYg\rangle - \langle Xg, JYf\rangle = \langle Xf, JYg\rangle - \langle Yf, JXg\rangle \\
&= \langle f, (X^*JY - Y^*JX)g\rangle
\end{aligned}$$

なので $[B(f), B(g)] = 0$ であるための条件は $X^*JY - Y^*JX = 0$ である。したがって，

補題 58

$\{B(f), B^*(f) \mid f \in \mathscr{H}\}$ が $\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で CCR を満たすための必要十分条件は

$$X^*X - Y^*Y = \mathbf{1} \tag{27}$$

$$JX^*JY - JY^*JX = 0 \tag{28}$$

である。

※第 2 式左辺を線形作用素にするために J をつけた。

$\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ 上のブロック作用素を

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}(X,Y) := \begin{pmatrix} X & JYJ \\ Y & JXJ \end{pmatrix}$$

で定義すると，条件 (27), (28) は

$$\mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S} = \mathcal{J} \tag{29}$$

と同値である。実際

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S} &= \begin{pmatrix} X^* & Y^* \\ JY^*J & JX^*J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & JYJ \\ Y & JXJ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^* & Y^* \\ JY^*J & JX^*J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & JYJ \\ -Y & -JXJ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^*X - Y^*Y & X^*JYJ - Y^*JXJ \\ JY^*JX - JX^*JY & J(Y^*Y - X^*X)J \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

他の $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(X',Y')$ で (29) を満たすものがあれば，$\mathcal{S}'' = \mathcal{S}\mathcal{S}'$ も (29) を満たす：

$$(\mathcal{S}'')^*\mathcal{J}\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')^*\mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S}\mathcal{S}' = (\mathcal{S}')^*\mathcal{J}\mathcal{S}' = \mathcal{J}$$

したがって，$\mathcal{S}(X,Y)^*\mathcal{J}\mathcal{S}(X,Y) = \mathcal{J}$ を満たす $\mathcal{S}(X,Y)$ 達は半群をなす。

$\mathcal{S}$ の可逆性

上では X, Y から CCR を保つように $A(f) \mapsto B(f)$ を構成したが，以下では，逆に $B(f)$ から $A(f)$ を求めるための条件を明らかにする。

命題 59

$X, Y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ とし，$\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, Y)$ は $\mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S} = \mathcal{J}$ を満たすとする。このとき，$\mathcal{S}$ が可逆であるための必要十分条件は $\mathcal{S}\mathcal{J}\mathcal{S}^* = \mathcal{J}$ であり，このとき，

$$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J} = \begin{pmatrix} X^* & -Y^* \\ -JY^*J & JX^*J \end{pmatrix} \tag{30}$$

証明. (必要性) $\mathcal{S}$ は逆作用素 $\mathcal{S}^{-1}$ を持つとする。このとき，$\mathcal{J}^2 = \mathbf{1}$ に注意すると

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S} = \mathcal{J} &\Longrightarrow \mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S} = \mathcal{J}^2 = \mathbf{1} \\ &\Longrightarrow \mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J} = \mathcal{S}^{-1} \\ &\Longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J} = \mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} = \mathbf{1} \\ &\Longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{J}\mathcal{S}^* = \mathcal{J}. \end{aligned}$$

（十分性） $\mathcal{R} = \mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J}$ とおくと，$\mathcal{R}\mathcal{S} = \mathcal{J}\underbrace{\mathcal{S}^*\mathcal{J}\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} = \mathcal{J}^2 = \mathbf{1}$, $\mathcal{S}\mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{S}\mathcal{J}\mathcal{S}^*}_{\mathcal{J}}\mathcal{J} = \mathbf{1}$ となるので $\mathcal{S}$ は可逆。このとき，$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R} = \mathcal{J}\mathcal{S}^*\mathcal{J}$。 $\square$

次で定義される群をシンプレクティック群という。

$$\mathfrak{Sp} := \left\{ \mathcal{S} = \begin{pmatrix} X & JYJ \\ Y & JXJ \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \middle| \mathcal{S}^* \mathcal{J} \mathcal{S} = \mathcal{J},\ \mathcal{S} \mathcal{J} \mathcal{S}^* = \mathcal{J} \right\}$$

CCR の条件 $\mathcal{S}^* \mathcal{J} \mathcal{S} = \mathcal{J}$ と可逆性の条件 $\mathcal{S} \mathcal{J} \mathcal{S}^* = \mathcal{J}$ をそれぞれ具体的に書くと

$$X^* X - Y^* Y = \mathbf{1} \tag{31}$$

$$JX^* JY - JY^* JX = 0 \tag{32}$$

$$XX^* - JYY^* J = \mathbf{1} \tag{33}$$

$$XY^* - JYX^* J = 0 \tag{34}$$

である。実は，これらのうち 3 つが独立。

さて，$\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ のとき，逆元の式 (30) に注意すれば

$$A(f) = B(X^* f) - B^*(Y^* Jf), \qquad A^*(f) = B^*(X^* f) - B(Y^* Jf) \tag{35}$$

となる。

• 練習問題：(35) の右辺の B を $B(f) = A(Xf) + A^*(JYf)$ を使って表し，(35) を具体的に示してみよう。

命題 60

$\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ とする。このとき，X は $\mathscr{H}$ 上で全単射であり，

$$\begin{aligned} &\|X^{-1}\| \leq 1, \quad \|YX^{-1}\| < 1, \quad 1 \leq \|X^{-1}\|^2 + \|YX^{-1}\|^2 \\ &\|X^{-1}JYJ\| < 1 \end{aligned} \tag{36}$$

さらに，YX^{-1} と $X^{-1}JYJ$ は転置で不変である:

$$(YX^{-1})^{\intercal} = YX^{-1}, \qquad (X^{-1}JYJ)^{\intercal} = X^{-1}JYJ$$

証明. (31) より $X^*X - Y^*Y = \mathbf{1}$ なので，任意の $u \in \mathscr{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \|Xu\|^2 &= \|u\|^2 + \|Yu\|^2 \\ &\geq \|u\|^2 \end{aligned} \tag{37}$$

となる。したがって，X は単射かつ $\operatorname{ran}(X)$ は閉集合である。同様に (33) から

$$\|X^*u\|^2 = \|u\|^2 + \|Y^*Ju\|^2$$

なので $\ker X^* = \{0\}$ である。したがって，一般論を使えば

$$\mathscr{H} = \ker(X^*) \oplus \overline{\operatorname{ran}(X)} = \operatorname{ran}(X)$$

となるので X は全射。したがって，X は全単射である。

任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，$Xu = f$ となる $u \in \mathscr{H}$ が存在するので，(37) から

$$\|f\|^2 = \|X^{-1}f\|^2 + \|YX^{-1}f\|^2 \tag{38}$$

したがって，$\|X^{-1}\| \leq 1$ かつ $\|YX^{-1}\| \leq 1$ となる。(38) の両辺で $\|f\| = 1$ となる f の上限をとると

$$1 \leq \|X^{-1}\|^2 + \|YX^{-1}\|^2$$

を得る。次に $\|YX^{-1}\| < 1$ を示す。仮に $\|YX^{-1}\| = 1$ とすると

$$1 = \sup_{\|f\|=1} \|YX^{-1}f\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \left(\|f\|^2 - \|X^{-1}f\|^2\right) = 1 - \sup_{\|f\|=1} \|X^{-1}f\|^2$$

から $\sup_{\|f\|=1} \|X^{-1}f\| = 0$ となるが，これは X が有界作用素であることに矛盾する。つまり，$\|f_n\| = 1$ となる f_n で $\|X^{-1}f_n\| \to 0 (n \to \infty)$ となるものがあるとすると

$$1 = \|f_n\| \leq \|X\| \|X^{-1}f_n\| \to 0 (n \to \infty) \qquad \text{（矛盾）}$$

したがって，$\|YX^{-1}\| < 1$ でなければならない。

次に，(36):$\|X^{-1}JYJ\| < 1$ を示す。関係式 (33) は (31) において置き換え

$$X \to X^*, \qquad Y \to Y^\intercal = JY^*J$$

をしたものなので，上の議論がそのまま使える。$\|YX^{-1}\| < 1$ でこの置き換えをすれば

$$1 > \|Y^\intercal(X^*)^{-1}\| = \|X^{-1}(Y^\intercal)^*\| = \|X^{-1}JYJ\|$$

となり (36) が得られる。

最後に転置による不変性を示す。(32) は転置を用いて表すと $X^\intercal Y = Y^\intercal X$ なので

$$\begin{aligned} &X^\intercal Y = Y^\intercal X \iff X^\intercal YX^{-1} = Y^\intercal \iff YX^{-1} = (X^\intercal)^{-1}Y^\intercal \\ &\therefore YX^{-1} = (YX^{-1})^\intercal \end{aligned}$$

次に $\tilde{Y} := JYJ$ とおけば，(34) は $XY^* = \tilde{Y}X^\intercal$ と書ける。少し変形して，
$Y^*(X^\intercal)^{-1} = X^{-1}\tilde{Y}$ を得る。これと

$$(X^{-1}\tilde{Y})^\intercal = \tilde{Y}^\intercal(X^{-1})^\intercal = Y^*(X^\intercal)^{-1}$$

から $(X^{-1}\tilde{Y})^\intercal = X^{-1}\tilde{Y}$ となる。 □

次の定理は Shale の定理として知られている。

定理 61

$\mathcal{S}(X,Y) \in \mathfrak{Sp}$ とする。$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で

$$U^*B(f)U = A(f), \qquad (f \in \mathscr{H})$$

となるものが存在するための必要十分条件は Y が *Hilbert-Schmidt* であることである。

※ Shale(1962) の論文は私には理解できない。Ruijsenaars(1978) が証明を与えている。
※十分性の証明は大変だが，必要性はそれほど難しくない。

必要性の証明. P_n を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ における n 粒子部分空間への正射影作用素とする：

$$P_n(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \cdots) = (0, \cdots, 0, \Psi^{(n)}, 0, \cdots)$$

仮定から任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して

$$U^*B(f)U\Omega = A(f)\Omega = 0$$

である。$\Omega' := U\Omega$ とおき，$\Omega'^{(0)} \neq 0$ を示す。$B(f) = A(Xf) + A^*(JYf)$ より

$$A(Xf)\Omega' = -A^*(JYf)\Omega'$$

となる。A^*, A はそれぞれ粒子数を一つ上げ下げする働きがあるので

$$A(Xf)P_n\Omega' = P_{n-1}A(Xf)\Omega' = -P_{n-1}A^*(JYf)\Omega' = -A^*(JYf)P_{n-2}\Omega' \tag{39}$$

が $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して成り立つ。ただし $P_{-1} = P_{-2} = 0$ と約束する。

(39) で $n=1$ の場合を考えると，$A(Xf)P_1\Omega'=0$ $(f\in\mathscr{H})$ となるが，命題 60 から X は全射なので，すべての $g\in\mathscr{H}$ に対して $A(g)P_1\Omega'=0$ となる。消滅作用素の共通のカーネルは真空だけなので，$P_1\Omega'\propto\Omega$ でなければならないが，$P_1\Omega'$ は真空の成分がないので $P_1\Omega'=0$ である。

次に，仮に $P_n\Omega'=0$ とすると，(39) から $A(Xf)P_{n+2}\Omega'=0$ $(f\in\mathscr{H})$ となるが，上と同様に $P_{n+2}\Omega'=0$ がいえる。

$P_1\Omega'=0$ だったので，すべての奇数 n について $P_n\Omega'$ となる。次に，もし $P_0\Omega'=0$ とすると，すべての偶数 n について $P_n\Omega'=0$ となってしまうが，Ω' は単位ベクトルなので矛盾。したがって，$P_0\Omega'\neq 0$ でなければならない。

さて，$P_0\Omega'=c\Omega(c\neq 0)$, $\Phi:=P_2\Omega'$ とおく。(39) で $n=2$ とすると

$$A(Xf)\Phi=-cA^*(JYf)\Omega=(0,-cJYf,0,0,\cdots),\qquad f\in\mathscr{H}$$

両辺のノルムを取ると $|c|^2\|Yf\|^2=\|A(Xf)\Phi\|^2$. $\{e_n\}_n$ を $\mathscr{H}$ の ONB とすると，

$$|c|^2\sum_n\|Ye_n\|^2=\sum_n\|A(Xe_n)\Phi\|^2=\langle\Phi,d\Gamma_{\mathrm{b}}(X^*X)\Phi\rangle$$

最後の右辺は $=\left\langle\Phi^{(2)},(X^*X\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes X^*X)\Phi^{(2)}\right\rangle<\infty$ である。$c\neq 0$ だから $\sum_n\|Ye_n\|^2<\infty$. したがって，Y は Hilbert-Schmidt である。 □

定理 61（Shale の定理）の十分性の証明

2 粒子状態の生成・消滅

Hilbert-Schmidt 作用素 $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ は $\otimes^2 \mathscr{H}$ と Θ によって同型であることを思い出す。

定義 62 (2 粒子状態の生成・消滅)

$K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ に対して，作用素 $\Delta^*(K)$ を次で定義する：

$$\mathrm{dom}(\Delta^*(K)) := \left\{\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \middle| \sum_{n\geq 2} n(n-1)\|S_n(\Theta(K) \otimes \Psi^{(n-2)})\|^2 < \infty\right\}$$

$$(\Delta^*(K)\Psi)^{(n)} := \begin{cases} 0, & n = 0, 1 \\ \sqrt{n(n-1)} S_n(\Theta(K) \otimes \Psi^{(n-2)}), & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Delta(K) := (\Delta^*(K))^*$$

$\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{H}$ のとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}, \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $\Delta^*(K), \Delta(K)$ の芯である（命題 17 の応用）。

$K = |u\rangle \langle Jv|$ のとき，$\Theta(K) = u \otimes v$ であり，$\mathscr{F}_{\mathrm{b0}}$ 上で

$$\begin{aligned} (\Delta^*(K)\Psi)^{(n)} &= \sqrt{n(n-1)} S_n(u \otimes v \otimes \Psi^{(n-2)}) \\ &= \sqrt{n} S_n((u \otimes \sqrt{n-1} S_{n-1}(v \otimes \Psi^{(n-2)})) \\ &= (A^*(u)A^*(v)\Psi)^{(n)}, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

となる。$n = 0, 1$ 粒子部分は 0。したがって

$$\Delta^*(|u\rangle \langle Jv|) = A^*(u)A^*(v), \quad \Delta(|u\rangle \langle Jv|) = A(u)A(v). \tag{40}$$

また，$\Theta(|v_1\rangle\langle v_2| + |Jv_2\rangle\langle Jv_1|) = v_1 \otimes Jv_2 + Jv_2 \otimes v_1$ だから，
$\Theta(K + K^\intercal) = 2S_2\Theta(K)$ が成り立つ。したがって

$$\Delta^*(K) = \frac{1}{2}\Delta^*(K + K^\intercal).$$

以下，$\Delta^\sharp$ は Δ^* と Δ を表すものとする。

補題 63

$K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ とする。このとき，$\mathrm{dom}(\Delta^\sharp(K)) \subset \mathrm{dom}(N_\mathrm{b})$ であり，$\Psi \in \mathrm{dom}(N_\mathrm{b})$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$\|\Delta^*(K)\Psi\| \leq \|K\|_{\mathrm{HS}}\|(N_\mathrm{b}^2 + 3N_\mathrm{b} + 2)^{1/2}\Psi\| \tag{41}$$

$$\|\Delta(K)\Psi\| \leq \|K\|_{\mathrm{HS}}\|(N_\mathrm{b}^2 - N_\mathrm{b})^{1/2}\Psi\| \tag{42}$$

証明． ここでは，$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}} = \|\cdot\|$ と略記する。Θ はユニタリなので $\|\Theta(K)\| = \|K\|$ である。定義から

$$\begin{aligned}
\|\Delta^*(K)\Psi\|^2 &= \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)\|S_{n+2}(\Theta(K)\otimes\Psi^{(n)})\|^2 \\
&\leq \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)\|\Theta(K)\|^2\|\Psi^{(n)}\|^2 \\
&= \|K\|^2\|(N_\mathrm{b} + 3N_\mathrm{b} + 2)^{1/2}\Psi\|^2
\end{aligned}$$

となり，(41) が成り立つ。

次に不等式 (42) を示す。Schwarz の不等式より

$$
\begin{aligned}
\|\Delta(K)\Psi\| &= \sup_{\|\Phi\|=1, \Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}} \langle \Delta^*(K)\Phi, \Psi\rangle \\
&\le \sup_{\|\Phi\|=1, \Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+2)(n+1)} \left| \left\langle S_{n+2}(\Theta(K)\otimes\Phi^{(n)}), \Psi^{(n+2)} \right\rangle \right| \\
&\le \|\Theta(K)\| \sup_{\|\Phi\|=1, \Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}} \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\| \sqrt{(n+2)(n+1)} \|\Psi^{(n+2)}\| \\
&\le \|\Theta(K)\| \sup_{\|\Phi\|=1, \Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}} \|\Phi\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \|\Psi^{(n+2)}\|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|\Theta(K)\| \|(N_{\mathrm{b}}^2 - N_{\mathrm{b}})^{1/2}\Psi\|.
\end{aligned}
$$

最後の等式を得るために $N_{\mathrm{b}}^2 - N_{\mathrm{b}}$ は真空と 1 粒子空間では 0 であることを使った。故に，(42) が成り立つ。 $\square$

命題 64

$f \in \mathscr{H}$, $S \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ とする。$K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ は $K = K^\intercal$ を満たすとする。このとき，$\mathrm{dom}(N_\mathrm{b}^{3/2})$ 上で次の交換関係が成り立つ：

$$[\Delta^*(K), A(f)] = -2A^*(KJf) \tag{43}$$

$$[\Delta(K), A^*(f)] = 2A(KJf) \tag{44}$$

$$[d\Gamma_\mathrm{b}(S), A(f)] = -A(S^*f) \tag{45}$$

$$[d\Gamma_\mathrm{b}(S), A^*(f)] = A^*(Sf) \tag{46}$$

証明. まず (43)–(46) の両辺はすべて $\mathrm{dom}(N_\mathrm{b}^{3/2})$ 上で well-defined である。$\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ の元との内積をとり，作用素の交換子は $\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ 上で計算することができるので，これらの関係式は $\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ 上で示せば十分である。

転置で不変な有限階作用素 K_N をとり $\|K - K_N\|_\mathrm{HS} \to 0\,(N \to \infty)$ と近似する。このとき，$\|\Theta(K_N) - \Theta(K)\|_{\otimes^2\mathscr{H}} \to 0\,(N \to \infty)$ であるから，$\Psi \in \mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ に対して

$$[\Delta^*(K), A(f)]\Psi = \lim_{N\to\infty}[\Delta^*(K_N), A(f)]\Psi$$

が成り立つ。したがって，(43) は $K = |v\rangle\langle Jv|$ $(v \in \mathscr{H})$ の場合に示せば十分。

この場合，$\Delta^*(K) = \Delta^*(|v\rangle\langle Jv|) = A^*(v)A^*(v)$ である。また $\langle f, v\rangle = \langle Jv, Jf\rangle$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
[\Delta^*(K), A(f)] &= [A^*(v)A^*(v), A(f)] = 2[A^*(v), A(f)]A^*(v) \\
&= -2\langle f, v\rangle A^*(v) = -2A^*(\langle Jv, Jf\rangle v) \\
&= -2A^*(|v\rangle\langle Jv| Jf) = -2A^*(KJf).
\end{aligned}
$$

したがって，となり (43) が成り立つ。(43) の共役作用素を取れば，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$
[\Delta(K), A^*(f)] = [A(f), \Delta^*(K)]^* = 2A^*(KJf)
$$

となり，(44) を得る。(45) と (46) はよく知られた第二量子化作用素と生成消滅作用素の交換関係である。 $\square$

Hilbert-Schmidt 作用素と無限行列式

複素数列 $\{z_n\}_n$ の無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} z_n$$

は $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - z_n| < \infty$ のときに収束する。このとき，$\prod_n z_n$ は絶対収束するという。

これを示すためには，有限個の複素数 $w_1, w_2, \cdots, w_N$ について不等式

$$\left| \prod_{j=1}^{N} (1 + w_j) \right| \le \exp\left(\sum_{j=1}^{N} |w_j| \right) \tag{47}$$

$$\left| 1 - \prod_{j=N}^{M} (1 + w_j) \right| \le \left(\sum_{j=N}^{M} |w_j| \right) \exp\left(1 + \sum_{j=N}^{M} |w_j| \right) \tag{48}$$

が成り立つことを用いればよい（$N < M$）。

Hilbert-Schmidt 作用素 K に対して K^*K の正の固有値（重複度も含める）$\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{N}$ は $\sum_j \lambda_j^2 < \infty$ を満たすので，

$$\det(1 - K^*K) := \prod_{j=1}^{N} (1 - \lambda_j^2)$$

を定義することができる。

$\Delta^*(K)$ の指数関数

Hilbert-Schmidt クラス $\mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ の部分集合 $\overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ を次で定義する。

$$\overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H}) := \{K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H}) \mid K = K^\intercal,\ \|K\|_{\mathrm{op}} < 1\}$$

定義 65

$K \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ に対して，$-\frac{1}{2}\Delta^*(K)$ の指数関数の作用素を

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta^*(K)\right)\Phi := \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\Delta^*(K)\right)^n\Phi$$

によって定義する。この作用素の定義域は右辺が収束するような Φ の集合とする。

どのようなベクトルがこの作用素の定義域に入るかはこの時点では全然明らかではない。

命題 66

$K \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ とする。このとき，$\Omega \in \mathrm{dom}(e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)})$ であり

$$\|e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}\Omega\|^2 = \frac{1}{\det(1 - K^*K)^{1/2}}$$

ここでの作用素の determinant について次ページで解説する。

$K \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ の定理 8 の意味での標準形を $K = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \left| g_n \right\rangle \left\langle J g_n \right|$ $(M \leq \infty)$ とする。$\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{M}$ は K^*K の正の固有値であり，仮定から $\|K\|_{\mathrm{op}} = \lambda_1 < 1$ である。したがって，$1 - \lambda_j^2 > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, M)$ なので

$$(\det(1 - K^*K))^{1/2} = \det((1 - K^*K)^{1/2}) = \prod_{j=1}^{M} (1 - \lambda_j^2)^{1/2}$$

となる。つまり，この場合，平方根はどちらにかかっていると思っても同じである。

以下，命題 66 を示してゆくが，$M = \infty$ の場合を考える。M が有限ならより簡単。

まず，次が成立する：

補題 67

$$\|e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}\Omega\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} \|\Delta^*(K)^n \Omega\|^2 \tag{49}$$

ただし，これは，右辺が有限ならば $\Omega \in \mathrm{dom}(e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)})$ であり，(49) の等号が成立するという意味である。

証明. $\Delta^*(K)^n \Omega$ は $2n$ 粒子成分のみを持つので，異なる n について，これらは互いに直交する。$\text{s-lim}_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (-1/2)^n (n!)^{-1} \Delta^*(K)^n \Omega$ は互いに直交するベクトルの和であるから補題の主張が成立する。 □

$K \in \overline{\mathscr{I}_2}$ の標準形を $K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |g_n\rangle \langle Jg_n|$ とし，有限階作用素 K_N を

$$K_N := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |g_n\rangle \langle Jg_n| , \qquad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義すると Hilbert-Schmidt ノルムで $K_N \to K$ $(N \to \infty)$ だから

$$\|(\Delta^*(K))^n \Omega\| = \lim_{N\to\infty} \|(\Delta^*(K_N))^n \Omega\| \tag{50}$$

一方，$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ から定まる量（有限和）

$$a_{n,N} := \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \frac{(2k_1-1)!!\cdots(2k_N-1)!!}{(2^{k_1}\cdots 2^{k_N})(k_1!\cdots k_N!)} \lambda_1^{2k_1} \cdots k_N^{2k_N} \tag{51}$$

を定義する。ただし $a_{0,N} := 1$ とする。

補題 68

$$(2^n n!)^{-2} \|(\Delta^*(K_N))^n \Omega\|^2 = a_{n,N} \tag{52}$$

補題 68 の証明. (40) から $\Delta^*(K_M) = \sum_{n=1}^N \lambda_n A^*(g_n)^2$ となることに注意する。一般に可換な作用素 $\{b_j\}$ に対し

$$(b_1 + \cdots + b_N)^n = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_N!} b_1^{k_1} \cdots b_N^{k_N}$$

であることに注意すれば,

$$\|(\Delta^*(K_N))^n\Omega\|^2 = \left\| \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_N!} (\lambda_1 A^*(g_1)^2)^{k_1} \cdots (\lambda_N A^*(g_N)^2)^{k_N} \Omega \right\|^2$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_N=0 \\ (j_1+\cdots+j_N=n)}}^{n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_N!} \cdot \frac{n!}{j_1!\cdots j_N!} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_N^{k_N} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_N^{j_N}$$

$$\times \left\langle A^*(g_1)^{2k_1} \cdots A^*(g_N)^{2k_N}\Omega, A^*(g_1)^{2j_1} \cdots A^*(g_N)^{2j_N}\Omega \right\rangle$$

ここで, $\{g_k\}_k$ は ONS であることから, 最後の内積は $(k_1, \cdots, k_N) = (j_1, \cdots, j_N)$ のとき以外はゼロである。$(k_1, \cdots, k_N) = (j_1, \cdots, j_N)$ の場合は

$$\left\langle A^*(g_1)^{2k_1} \cdots A^*(g_N)^{2k_N}\Omega, A^*(g_1)^{2j_1} \cdots A^*(g_N)^{2j_N}\Omega \right\rangle$$
$$= \|A^*(g_1)^{2k_1}\Omega\|^2 \cdots \|A^*(g_N)^{2k_N}\Omega\|^2 = (2k_1)! \cdots (2k_N)!$$

となる。

したがって

$$\|(\Delta^*(K_N))^n\Omega\|^2 = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \left(\frac{n!}{k_1!\cdots k_N!}\right)^2 (\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_N^{k_N})^2 (2k_1)!\cdots(2k_N)!$$

となるが

$$(2k)! = 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2^k k!(2k-1)!!$$

に注意すれば，上式は

$$= (n!)^2 \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \frac{(2k_1-1)!!\cdots(2k_N-1)!!}{k_1!\cdots k_N!} 2^{k_1}\cdots 2^{k_N} (\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_N^{k_N})^2$$

$$= (2^n n!)^2 \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0 \\ (k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n} \frac{(2k_1-1)!!\cdots(2k_N-1)!!}{2^{k_1}\cdots 2^{k_N} k_1!\cdots k_N!} (\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_N^{k_N})^2$$

となる。よって (52) が成立する。 □

複素数 $z = re^{i\theta}(-\pi < \theta \leq \pi)$ の平方根を $z^{1/2} := r^{1/2}e^{i\theta/2}$ で定める。必ずしも $z^{1/2}w^{1/2} = (zw)^{1/2}$ とは限らないので注意。ただし，$|z| < 1$ に対して次が成り立つ：

$$(1-z)^{-1/2} := \frac{1}{(1-z)^{1/2}} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{1/2}$$

補題 69

N を自然数とする。正の減少列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0$ と複素数 α に対して

$$F_N(\alpha) := \prod_{j=1}^{N}(1-\alpha\lambda_j^2)^{-1/2}$$

とおく。$F_N(\alpha)$ は α について $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \lambda_1^{-2}\}$ で収束するべき級数

$$F_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,N}\alpha^n \tag{53}$$

に展開できる。ここに $a_{n,N}$ は (51) で定義される量である。

証明は次ページ

証明. $f(z)=(1-z)^{-1/2}$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ で絶対収束する級数に展開できる。

$$f'(z)=\frac{1}{2}(1-z)^{-\frac{3}{2}},\quad f''(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-z)^{-\frac{5}{2}},\quad \cdots\ , f^{(n)}(z)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-z)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

だから

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}z^n$$

したがって，次のように $F_N(z)$ は $|z|<\lambda_1^{-2}$ で絶対収束するべき級数に展開できる：

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{N}(1-\alpha\lambda_j^2)^{-1/2} &= \prod_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}(\alpha\lambda_j^2)^k\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\frac{(2k_1-1)!!}{2^{k_1}k_1!}\cdots\frac{(2k_N-1)!!}{2^{k_N}k_N!}(\alpha\lambda_1^2)^{k_1}\cdots(\alpha\lambda_N^2)^{k_N}\\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\frac{(2k_1-1)!!}{2^{k_1}k_1!}\cdots\frac{(2k_N-1)!!}{2^{k_N}k_N!}(\alpha\lambda_1^2)^{k_1}\cdots(\alpha\lambda_N^2)^{k_N}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}[k_1+\cdots+k_N=n]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_N=0\\(k_1+\cdots+k_N=n)}}^{n}\frac{(2k_1-1)!!}{2^{k_1}k_1!}\cdots\frac{(2k_N-1)!!}{2^{k_N}k_N!}(\alpha\lambda_1^2)^{k_1}\cdots(\alpha\lambda_N^2)^{k_N}.
\end{aligned}$$

したがって，(53) が成り立つ。 □

補題 70

減少列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ が $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$ を満たしている。このとき

$$F(\alpha) := \lim_{N\to\infty} F_N(\alpha) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha\lambda_j^2)^{-1/2} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\lambda_j^2)^{1/2}}$$

は領域 $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \lambda_1^{-2}\}$ で広義一様収束する。したがって，$F(\alpha)$ はこの領域 Q で正則である。

証明. まず $|z| < 1$ に対して

$$\begin{aligned} |(1-z)^{-1/2} - 1| &= \frac{|1-(1-z)^{1/2}|}{|1-z|^{1/2}} = \frac{|z|}{|1-z|^{1/2} \cdot |1+(1-z)^{1/2}|} \\ &\leq \frac{|z|}{|1-z|^{1/2}} \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^{1/2}} \leq \frac{|z|}{1-|z|} \end{aligned}$$

である。m を十分大きくとれば $\lambda_1^{-2}\lambda_m^2 < 1/2$ となるので，$j \geq m$ に対して

$$\left|(1-\alpha\lambda_j)^{-1/2} - 1\right| \leq \frac{|\alpha\lambda_j^2|}{1-|\alpha\lambda_j^2|} < 2|\alpha\lambda_j^2| \qquad (\alpha \in Q)$$

となる。最後の不等式を得るために $|\alpha| < \lambda_1^{-2}$ を使った。

$a<b$ を満たす自然数 a,b に対して

$$G_{a,b} = \prod_{j=a}^{b} (1-\alpha\lambda_j^2)^{-1/2}$$

とおけば，$F_N(\alpha) = G_{1,N}$ であり，$m < N' < N$ に対して

$$|F_N(\alpha) - F_{N'}(\alpha)| = |G_{1,m-1}| \cdot |G_{m,N'}| \cdot |1 - G_{N'+1,N}|$$

である。$w_j = (1-\alpha\lambda_j^2)^{-1/2} - 1$ として (47), (48) を適用すれば

$$|G_{m,N'}| = \left| \prod_{j=m}^{N'} (1+w_j) \right| \leq \exp\left(2 \sum_{j=m}^{N'} |\alpha\lambda_j^2| \right) \leq \exp\left(2\lambda_1^{-2} \sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j^2 \right)$$

$$|1 - G_{N'+1,N}| \leq \exp\left(2\lambda_1^{-2} \sum_{j=N'+1}^{N} \lambda_j^2 \right) \exp\left(1 + 2\lambda_1^{-2} \sum_{j=N'+1}^{N} \lambda_j^2 \right)$$

仮定より，$\sum_{j=N'+1}^{N} \lambda_j^2 \to 0\ (N, N' \to \infty)$ なので，任意の $0 < \epsilon < \lambda_1^{-2}$ に対して

$$\sup_{|\alpha| < \lambda_1^{-2} - \epsilon} |F_N(\alpha) - F_{N'}(\alpha)| \to 0\ (N, N' \to \infty)$$

となる。したがって，$F_N(\alpha)$ は $N \to \infty$ のとき Q で広義一様収束する。$F(\alpha)$ は正則関数の広義一様収束極限なので正則である。 □

$Q := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \lambda_1^{-2}\}$

補題 71

減少列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ が $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$ を満たすとする。$a_{n,N}$ を (51) で定義されるものとする。このとき，極限 $a_n := \lim_{N\to\infty} a_{n,N}$ が存在し

$$F(\alpha) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\lambda_j^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n, \qquad \alpha \in Q \tag{54}$$

証明. C を原点を中心とする半径 $(1/2)\lambda_1^{-2}$ の円周とする。$F_N(\alpha)$ は Q で正則なので

$$F_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_N(z)}{z^{n+1}}dz$$

が成り立つ。展開係数の一意性および補題 69 から

$$a_{n,N} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_N(z)}{z^{n+1}}dz$$

である。補題 70 から F_N は F に C 上で一様収束するので，

$$a_n = \lim_{N\to\infty} a_{n,N} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z^{n+1}}dz$$

である。これは $F(\alpha)$ の展開係数が a_n であることも意味するので (54) が成り立つ。 □

命題 66 の証明.　補題 67 から

$$\|e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}\Omega\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} \|\Delta^*(K)^n \Omega\|^2$$

（まだこれが有限かどうかわからない。）ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} \|\Delta^*(K)^n \Omega\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} \lim_{N\to\infty} \|\Delta^*(K_N)^n \Omega\|^2 && \because (50) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{N\to\infty} a_{n,N} && \because \text{補題 } 68 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n && \because a_n \text{ の定義} \\
&= F(1) && \because \text{補題 } 71 \\
&= \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-\lambda_j^2)^{1/2}} && \because \text{補題 } 71
\end{aligned}$$

これは有限だから $\Omega \in \mathrm{dom}(e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)})$ であり,

$$\|e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}\Omega\|^2 = \frac{1}{\det(1-K^*K)^{1/2}}$$

がしたがう。 $\square$

次は $e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}$ の真空以外の状態への作用に関するものである：

命題 72

$K \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ とする。$\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して，

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta^*(K)\right)\Phi := \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\Delta^*(K)\right)^n \Phi \tag{55}$$

が存在し，$\mathscr{D}_\infty := \cap_{k=0}^\infty \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}}^k)$ に属する。

命題 72 の証明.　まず $\Phi = \Omega$ の場合に (55) の極限が存在することは命題 66 で保証されている。一般の $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ は，$\Phi = A^*(f_1)\cdots A^*(f_L)\Omega$ の形のベクトルの有限個の線型結合なので (55) の収束を示すためには

$$\Phi = A^*(f_1)\cdots A^*(f_L)\Omega \tag{56}$$

の場合だけを示せば十分である。この場合，$\Delta^*(K)^n\Phi$ は $2n+L$ 粒子の成分のみをもつので，異なる n の項は直交する。したがって，(55) の収束を示すためには

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2}\|\Delta^*(K)^n\Phi\|^2 < \infty$$

をいえばよい。不等式 $\|A^*(f)\Psi\| \le \|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Psi\|$ を使うと

$$
\begin{aligned}
\|\Delta^*(K)^n\Phi\|^2 &= \|\Delta^*(K)^n A^*(f_1)\cdots A^*(f_L)\Omega\|^2 \\
&= \|A^*(f_1)\cdots A^*(f_L)\Delta^*(K)^n\Omega\|^2 \\
&\leq \|f_1\|^2 \cdot \|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}A^*(f_2)\cdots A^*(f_L)(\Delta^*(K))^n\Omega\|^2 \\
&= \|f_1\|^2(2n+L)\|A^*(f_2)\cdots A^*(f_L)(\Delta^*(K))^n\Omega\|^2 \\
&\leq \|f_1\|^2\cdots\|f_L\|^2(2n+L)(2n+L-1)\cdots(2n+1)\|(\Delta^*(K))^n\Omega\|^2
\end{aligned}
$$

となるので，$a_n = \|\Delta^*(K)^n\Omega\|^2/(2^n n!)^2$ を用いて

$$
\left\|\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\Delta^*(K)\right)^n\Phi\right\|^2 \leq \|f_1\|^2\cdots\|f_L\|^2(2n+L)(2n+L-1)\cdots(2n+1)a_n
$$

したがって，(55) が収束することを示すためには，

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(2n+L)\cdots(2n+1)a_n < \infty \tag{57}
$$

がいえればよい。級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+L)\cdots(2n+1)a_n z^n$ の収束半径 R' は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R'} &= \limsup_{n\to\infty}\big((2n+L)\cdots(2n+1)a_n\big)^{1/n} \\
&= \limsup_{n\to\infty}\big((2n+L)\cdots(2n+1)\big)^{1/n}a_n^{1/n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

であるから，$R' = R > 1$ である。よって (57) が成り立つ。したがって，(55) は $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ に対して収束する。

次に，$\exp(-(1/2)\Delta^*(K))\Phi \in \mathrm{dom}(N_{\mathrm{b}}^k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を示す。上の議論と同様にして，(56) の形の Φ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} \|N_{\mathrm{b}}^k (\Delta^*(K))^n \Phi\|^2 < \infty \tag{58}$$

示せばよい。$\Delta^*(K)^n\Phi$ の粒子数は $L + 2n$ なので

$$\frac{1}{(2^n n!)^2} \|N_{\mathrm{b}}^k (\Delta^*(K))^n \Phi\|^2 = (2n + L)^{2k} a_n$$

である。上と同様に $\sum_n (2n + L)^{2k} a_n z^n$ の収束半径は 1 より大きい（実際は $1/\lambda_1^2$）ので (58) が成り立つ。 $\square$

定義 73

$S \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, $K \in \mathscr{I}_2(\mathscr{H})$ とする。$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して

$$e^{\frac{1}{2}\Delta(K)}\Psi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\Delta(K)\right)^n \Psi \tag{59}$$

$$:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}:\Psi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} :d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^n:\Psi \tag{60}$$

と定義する。ここに $:\cdots:$ は Wick 順序化といわれるもので

$$:d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^n:\Psi = \operatorname*{s-lim}_{M\to\infty} \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{M} A^*(e_{j_1})\cdots A^*(e_{j_n})A(S^*e_{j_1})\cdots A(S^*e_{j_n})\Psi \tag{61}$$

によって定義される。ここに $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{H}$ の ONB である。

まず，(44) から $e^{\frac{1}{2}\Delta(K)}$, $:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}:$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ への線形写像である。そして定義式 (59), (60) の右辺の和は $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して有限和となる。したがって，先程の $\Delta^*(K)$ の場合と異なり収束の問題は生じない。

自明とはいえないが，(61) は $\mathscr{H}$ の ONB $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方に依存しない。

命題 74

$S \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$，$K \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ とする。$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で次の交換関係が成り立つ。

$$[e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}, A(f)] = A^*(KJf)e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)} \tag{62}$$

$$[e^{-\frac{1}{2}\Delta(K)}, A^*(f)] = -A(KJf)e^{-\frac{1}{2}\Delta(K)} \tag{63}$$

$$[\boldsymbol{:}\, e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)} \,\boldsymbol{:}, A(f)] = \boldsymbol{:}\, e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)} \,\boldsymbol{:}\, A(S^* f) \tag{64}$$

$$[\boldsymbol{:}\, e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)} \,\boldsymbol{:}, A^*(f)] = -A^*(Sf) \,\boldsymbol{:}\, e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)} \,\boldsymbol{:} \tag{65}$$

証明． $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で計算する。(43) より $[\Delta^*(K), A(f)] = -2A^*(KJf)$ で，これは $\Delta^*(K)$ と可換であるから

$$\begin{aligned}
[e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}, A(f)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}[\Delta^*(K)^n, A(f)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \times n[\Delta^*(K), A(f)]\Delta^*(K)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{(n-1)!}(-2A^*(KJf))\Delta^*(K)^{n-1} \\
&= A^*(KJf)e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K)}
\end{aligned}$$

よって (62) が示された。(63) は (62) の共役を取ればよい。

(64) を示す。まず

$$
\begin{aligned}
&[A^*(e_{j_1})\cdots A^*(e_{j_n})A(S^*e_{j_1})\cdots A(S^*e_{j_n}), A(f)] \\
&= [A^*(e_{j_1})\cdots A^*(e_{j_n}), A(f)]A(S^*e_{j_1})\cdots A(S^*e_{j_n}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}(-\langle f, e_{j_\ell}\rangle)A^*(e_{j_1}) \overset{\overset{\ell}{\smile}}{\cdots} A^*(e_{j_n})A(S^*e_{j_1})\cdots A(S^*e_{j_n}) \\
&= -\sum_{\ell=1}^{n} A^*(e_{j_1}) \overset{\overset{\ell}{\smile}}{\cdots} A^*(e_{j_n})A(S^*e_{j_1}) \overset{\overset{\ell}{\smile}}{\cdots} A(S^*e_{j_n})A(\langle e_{j_\ell}, f\rangle S^*e_{j_\ell})
\end{aligned}
$$

である。$\sum_{j_\ell=1}^{\infty}\langle e_{j_\ell}, f\rangle S^*e_{j_\ell} = S^*f$ なので

$$
[:d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^n:, A(f)] = -:d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{n-1}:nA(S^*f), \qquad n = 1, 2, \cdots
$$

となる。したがって

$$
\begin{aligned}
[:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}:, A(f)] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[:d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^n:, A(f))] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}:d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{n-1}:A(S^*f) \\
&=:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}:A(S^*f)
\end{aligned}
$$

となり (64) が示される。(65) は $:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}:$ の共役作用素が $:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*)}:$ であることに注意すれば (64) から直ちに導かれる。

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, Y) = \begin{pmatrix} X & JYJ \\ Y & JXJ \end{pmatrix} \in \mathfrak{Sp}$ で Y が Hilbert-Schmidt とする。このとき，
$UA^*(f)U^* = B^*(f)$ $(f \in \mathscr{H})$ となる $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U を構成する。

定義 75

$\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ かつ $Y \in \mathscr{I}_2$ とする。$K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ を次で定義する。

$$K_1 := JYX^{-1}J, \qquad K_2 := \mathbf{1} - (X^{-1})^* \qquad K_3 := -JX^{-1}JY$$

さらに，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上の作用素 U を次で定義する：

$$U := \det(1 - K_1^* K_1)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K_1)} \mathbf{:} e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(K_2)} \mathbf{:} e^{-\frac{1}{2}\Delta(K_3^*)}$$

上の定義について，注意を少し述べる。
命題 60 から X は全単射で $X^{-1} \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ である。したがって，K_1, K_2, K_3 は有界作用素である。仮定から Y は Hilbert-Schmidt なので K_1 と K_3 も Hilbert-Schmidt である。命題 60 により，$K_j = K_j^{\intercal}$ かつ $\|K_j\|_{\mathrm{op}} < 1$ $(j = 1, 3)$ である。したがって，
$K_1, K_3 \in \overline{\mathscr{I}_2}(\mathscr{H})$ である。

$K_1 \in \overline{\mathscr{I}_2}$ なので，$\det(1 - K_1^* K_1) > 0$ は正しく定義される（命題 66 の下の注意）。

作用素 U の定義域について考える。定義 73 の下の注意を思い出せば，$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して

$$:e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(K_2)}:e^{-\frac{1}{2}\Delta(K_3^*)}\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$$

となることがわかる。命題 72 から $e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K_1)}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で定義されているので，U は確かに $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で well-defined である。

補題 76

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(X,Y) \in \mathfrak{Sp}$, $Y \in \mathscr{I}_2$ に対して，$\Omega_{\mathcal{S}} := U\Omega$ と定義する。$\Omega_{\mathcal{S}}$ は単位ベクトルであり

$$B(f)\Omega_{\mathcal{S}} = 0, \qquad (f \in \mathscr{H}) \tag{66}$$

となる。さらに，次の等式が成り立つ：

$$\|B^*(f_1)\cdots B^*(f_n)\Omega_{\mathcal{S}}\|^2 = \|A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega\|^2 \tag{67}$$

証明. $\mathscr{U}_1 := e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K_1)}$, $\mathscr{U}_2 :=: e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(K_2)}$:, $\mathscr{U}_3 := e^{-\frac{1}{2}\Delta(K_3^*)}$ とする。まず，$\mathscr{U}_3\Omega = \Omega$ かつ $\mathscr{U}_2\Omega = \Omega$ なので

$$\Omega_{\mathcal{S}} = U\Omega = \det(1 - K_1^*K_1)^{1/4}\mathscr{U}_1\Omega$$

である。したがって，命題 66 より

$$\|\Omega_{\mathcal{S}}\|^2 = \det(1 - K_1^*K_1)^{1/2}\|\mathscr{U}_1\Omega\|^2 = \det(1 - K_1^*K_1)^{1/2}\frac{1}{\det(1 - K_1^*K_1)^{1/2}} = 1$$

となる。すなわち，$\Omega_{\mathcal{S}}$ は単位ベクトルである。

次に (66) を示す。$B(f)\mathscr{U}_1\Omega = 0$ を示せばよい。まず $B(f)$ の定義から

$$\begin{aligned} B(f)\mathscr{U}_1\Omega &= \big(A(Xf) + A^*(JYf)\big)\mathscr{U}_1\Omega \\ &= [A(Xf), \mathscr{U}_1]\Omega + A^*(JYf)\mathscr{U}_1\Omega. \end{aligned}$$

とする。

命題 74 によれば，上式の交換子は $[A(Xf), \mathscr{U}_1] = -A^*(K_1 JXf)\mathscr{U}_1$ となるので

$$\begin{aligned} B(f)\mathscr{U}_1\Omega &= -A^*(K_1 JXf)\mathscr{U}_1\Omega + A^*(Yf)\mathscr{U}_1\Omega \\ &= -A^*(JYX^{-1}JJXf)\mathscr{U}_1\Omega + A^*(Yf)\mathscr{U}_1\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって (66) が成り立つ。

次に (67) を示す。その前に，命題 72 によって $\Omega_{\mathcal{S}} \in \mathscr{D}_\infty$ なので $\Omega_{\mathcal{S}}$ には $B(f_j)$ を何回でも作用させせることができることに注意する。任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して $A(f)\Omega = 0 = B(f)\Omega_{\mathcal{S}}$ が成り立つこと，$\Omega_{\mathcal{S}}$ が単位ベクトルであること，及び $\{B^*(f), B(f) \mid f \in \mathscr{H}\}$ が CCR を満たすことから直ちにしたがう。つまり，純粋に代数的な計算により

$$\begin{aligned} \|A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega\|^2 &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \langle f_1, f_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle f_n, f_{\sigma(n)}\rangle \\ &= \|B^*(f_1)\cdots B^*(f_n)\Omega_{\mathcal{S}}\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

定理 77

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$, $Y \in \mathscr{I}_2$ とする。このとき，定義 75 で定義された作用素 U は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素に拡大でき，すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して

$$U^* B^\sharp(f) U = A^\sharp(f)$$

が成り立つ。

証明． 以下，前半の計算は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で行い，最後に極限操作を議論する。
$\mathscr{U}_1 := e^{-\frac{1}{2}\Delta^*(K_1)}$, $\mathscr{U}_2 :=\mathbf{:}e^{-d\Gamma_{\mathrm{b}}(K_2)}\mathbf{:}$, $\mathscr{U}_3 := e^{-\frac{1}{2}\Delta(K_3^*)}$ とし，
$U = \det(1 - K_1^* K_1)^{1/4} \mathscr{U}_1 \mathscr{U}_2 \mathscr{U}_3$ とおく。まず，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$\mathscr{U}_1 \mathscr{U}_2 \mathscr{U}_3 A^*(f) = B^*(f) \mathscr{U}_1 \mathscr{U}_2 \mathscr{U}_3$$

が成り立つことを示す。命題 74 より，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$\mathscr{U}_3 A^*(f) = A^*(f)\mathscr{U}_3 - A(K_3^* J f)\mathscr{U}_3 \tag{68}$$

$$\mathscr{U}_2 A^*(f) = A^*(f)\mathscr{U}_2 - A^*(K_2 f)\mathscr{U}_2 = A^*((\mathbf{1} - K_2) f)\mathscr{U}_2 \tag{69}$$

$$\mathscr{U}_2 A(f) = A(f)\mathscr{U}_2 + \mathscr{U}_2 A(K_2^* f) \implies \mathscr{U}_2 A(g) = A((\mathbf{1} - K_2^*)^{-1} g)\mathscr{U}_2 \tag{70}$$

$$\mathscr{U}_1 A(f) = A(f)\mathscr{U}_1 + A^*(K_1 J f)\mathscr{U}_1 \tag{71}$$

が成り立つ。

(68) を使うと

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3A^*(f) &= \mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\big(A^*(f)\mathscr{U}_3 - A(K_3^*Jf))\mathscr{U}_3\big)\\ &= \mathscr{U}_1\mathscr{U}_2A^*(f)\mathscr{U}_3 - \mathscr{U}_1\mathscr{U}_2A(K_3^*Jf)\mathscr{U}_3\end{aligned}$$

が成り立つ。次に (69), (70) を使うと，上式は

$$\begin{aligned}&= \mathscr{U}_1A^*((\mathbf{1}-K_2)f)\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 - \mathscr{U}_1A((\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}K_3^*Jf)\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3\\ &= \mathscr{U}_1A^*((\mathbf{1}-K_2)f)\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 - \mathscr{U}_1A((\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}K_3^*Jf)\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3\end{aligned}$$

となる。$A^*(f)$ と $\mathscr{U}_1$ が可換であること，及び (71) を使うと

$$\begin{aligned}&= A^*((\mathbf{1}-K_2)f)\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3\\ &\quad - A((\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}K_3^*Jf)\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 - A^*(K_1J(\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}K_3^*Jf)\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3\end{aligned}$$

となる。以上から，$JL^*J = L^\intercal$ に注意すると

$$\begin{aligned}UA^*(f) &= A^*\Big((\mathbf{1}-K_2-K_1(\mathbf{1}-K_2^\intercal)^{-1}K_3^\intercal)f\Big)U - A(J(\mathbf{1}-K_2^\intercal)^{-1}K_3^\intercal f)U\\ &= A^*\Big((\mathbf{1}-K_2-K_1(\mathbf{1}-K_2^\intercal)^{-1}K_3)f\Big)U - A(J(\mathbf{1}-K_2^\intercal)^{-1}K_3 f)U \qquad (72)\end{aligned}$$

となる。最後の等式を得るために $K_3 = K_3^\intercal$ を使った。ここで，K_2 の定義より

$$\mathbf{1}-K_2 = \mathbf{1}-(\mathbf{1}-(X^{-1})^*) = (X^*)^{-1} \qquad \therefore (\mathbf{1}-K_2^\intercal)^{-1} = JXJ$$

そして $K_3 = -JX^{-1}JY$ だったので

$$(\mathbf{1} - K_2^{\intercal})^{-1}K_3 = JXJ(-JX^{-1}JY) = -Y$$

となる。定義 $K_1 = JYX^{-1}J$ から

$$K_1(\mathbf{1} - K_2^{\intercal})^{-1}K_3 = -JYX^{-1}JY$$

となる。したがって，これらの結果を (72) に適用すると

$$UA^*(f) = \Big[A^*(((X^*)^{-1} + JYX^{-1}JY)f) + A(JYf)\Big]U$$

を得る。また，X, Y の満たす条件 (31), (32) を思い出すと，それぞれ

$$1 + Y^*Y = X^*X, \qquad X^*JY = Y^*JX$$

である。これより

$$\begin{aligned} 1 + Y^*Y = X^*X &\Longrightarrow 1 + \underbrace{Y^*JX}_{=X^*JY} X^{-1}JY = X^*X \\ &\Longrightarrow 1 + X^*JYX^{-1}JY = X^*X \\ &\Longrightarrow (X^*)^{-1} + JYX^{-1}JY = X \end{aligned}$$

である。

以上から

$$A^*(((X^*)^{-1}+JYX^{-1}JY)f)+A(JYf)=A^*(Xf)+A(JYf)=B^*(f)$$

となる。したがって，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$UA^*(f)=B^*(f)U \tag{73}$$

が成り立つ。次に，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$UA(f)=B(f)U \tag{74}$$

が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3A(f)&=\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2A(f)\mathscr{U}_3 && \because)\ [\mathscr{U}_3,A(f)=0]\\&=\mathscr{U}_1A((\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}f)\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 && \because\ (70)\\&=A((\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}f)\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3\\&\qquad+A^*(K_1J(\mathbf{1}-K_2^*)^{-1}f)\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 && (\because\ (71))\end{aligned}$$

となる。

ここで，上で計算したことを使って

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{1}-K_2^{\intercal})^{-1} = JXJ \Longrightarrow (\mathbf{1}-K_2^{*})^{-1} = X \\
&K_1 J(\mathbf{1}-K_2^{*})^{-1} = K_1 JX = (JYX^{-1}J)JX = JY
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$
\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3 A(f) = (A(Xf) + A^*(JYf))\mathscr{U}_1\mathscr{U}_2\mathscr{U}_3
$$

となり，(74) が成り立つことがわかった。

補題 76 と (73) を使えば，任意の $f_i, g_i \in \mathscr{H}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle UA^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega, UA^*(g_1)\cdots A^*(g_n)\Omega\rangle \\
&= \langle B^*(f_1)\cdots B^*(f_n)U\Omega, B^*(g_1)\cdots B^*(g_n)U\Omega\rangle \\
&= \langle A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega, A^*(g_1)\cdots A^*(g_n)\Omega\rangle
\end{aligned}
$$

となる。内積の線形性から，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ に対して

$$
\langle U\Psi, U\Phi\rangle = \langle \Psi, \Phi\rangle
$$

となる。これは U が $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ から

$$
\mathscr{E} := \mathrm{L.h.}\{B^*(f_1)\cdots B^*(f_n)U\Omega, U\Omega \mid f_j \in \mathscr{H}, j = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}\}
$$

への等長作用素であることを意味する。

最後に，U が $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上へのユニタリ作用素に拡大できることを示す。そのために，Sigal の場の作用素の既約性を使う。定義から $\mathscr{E}$ は $B^*(f)$ の作用で不変なのは明らか。CCR と $B(f)U\Omega = 0$ に注意すれば，$\mathscr{E}$ は $B(f)$ でも不変である。したがって，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して $B^\sharp(f)$ は $\mathscr{E}$ を不変にする。

一方，Symplectic 群の可逆性から，$A^\sharp(f)$ は $B^\sharp(f)$ を用いて表すことができる。具体的に式 (35) を使うと

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) = 2^{-1/2}\big(B(X^*f - Y^*Jf) + B^*(X^*f - Y^*Jf)\big)$$

となる。$G(f) = X^*f - Y^*Jf$(実線型) とおけば，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) = 2^{-1/2}(B(G(f)) + B^*(G(f))) \tag{75}$$

である。特に

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\mathscr{E} \subset \mathscr{E}, \qquad f \in \mathscr{H}, n \in \mathbb{N}$$

であることもわかる。

さて，任意に $\mathscr{E}$ の元は $U\Omega$ や

$$\Psi = B^*(f_1)\cdots B^*(f_m)U\Omega \tag{76}$$

の形のベクトルの線型結合である。(75) と (73) に注意すれば，(76) の Ψ に対して，

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Psi\| &= \|U\Phi_{\mathrm{S}}(G(f))^n A^*(f_1)\cdots A^*(f_m)\Omega\| \\ &= \|\Phi_{\mathrm{S}}(G(f))^n A^*(f_1)\cdots A^*(f_m)\Omega\| \\ &\le 2^{n/2}\|G(f)\|^n\sqrt{n+m}\sqrt{n+m-1}\cdots\sqrt{m+1}\|A^*(f_1)\cdots A^*(f_m)\Omega\| \\ &\le 2^{n/2}\|G(f)\|^n\sqrt{n+m}\sqrt{n+m-1}\cdots\sqrt{m+1}\|\Psi\|\end{aligned}$$

したがって，任意の $t>0$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Psi\| < \infty$$

が成り立つ。したがって，Ψ は $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の全解析ベクトルである。このとき，$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Psi$ はテイラー展開できるので

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Psi = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\Phi_{\mathrm{S}}(f))^n}{n!}\Psi \in \overline{\mathscr{E}}$$

したがって，任意の $f\in\mathscr{H}$ に対して

$$\exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(f))\mathscr{E} \subset \overline{\mathscr{E}}$$

が成り立つ。よって $\exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(f))\overline{\mathscr{E}} \subset \overline{\mathscr{E}}$。$\{\exp(i\Phi_{\mathrm{S}}(f)) \mid f\in\mathscr{H}\}$ の規約性（不変な閉部分空間は全体しかない）から $\overline{\mathscr{E}} = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ が従う。 □

対相互作用模型の対角化

対相互作用模型の解析について

ここから解説する対相互作用模型は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ に作用するハミルトニアン

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2$$

として定義される。以下の目的はハミルトニアンを Bogoliubov 変換 U によって対角化することである。

ここで，量子場のハミルトニアン H が U によって対角化されるとは，ある 1 粒子ハミルトニアン S と定数 E が存在して

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$$

となることとしよう。したがって，上のように変換できれば，H のスペクトルを解析は S のそれに帰着される。

対相互作用模型のこれまでの研究の流れを簡単に紹介する。

- 物理の文献：対相互作用模型は “解ける” 模型とされている
- 数学的証明：A. Arai (1981–1983) は調和振動子と量子場の結合系，双極近似の Pauli-Fierz 模型に対して，物理の文献にある手続きを正当化した。
- 手法：対角化するユニタリ変換の構成に用いられたのは，古典場の漸近解（散乱理論？）と Bogoliubov 変換である。

A. Arai の方法を抽象化し $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)+\frac{1}{2}\lambda\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2$ の対角化を行ったのが次の論文

- K. Asahara, D. Funakawa: Spectral analysis of an abstract pair interaction model, Hokkaido Math. J. (2021)

である。

場の相互作用が 2 次のハミルトニアンの対角化についての研究に以下がある。

- P.T. Nam, M. Napiórkowskia, J.P. Solovej: Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations. J. Funct. Anal. (2016)
- J. Dereziński: Bosonic quadratic Hamiltonians. J. Math. Phys. (2017)

これらの論文の目的は講義と似ているが，上の論文では S と E が具体的に表されていないため，その先の解析をすることは困難であると思われる。

この講義では代数的に対相互作用模型の対角化を行った結果を紹介する。対角化後のハミルトニアン $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)+E$ も模型もある程度具体的に表される。

以下の内容は（結構丁寧に書かれた）論文

- Y. Matsuzawa, I. Sasaki and K. Usami, Explicit diagonalization of pair interaction models, Analysis and Mathematical Physics (2021)

にもとづく。

対相互作用模型の定義と条件

対相互作用模型の状態のヒルベルト空間は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ であり，ハミルトニアンは

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2$$

で定義される。

対角化のためには以下の条件のみを仮定する：

(B1) T は単射で非負な自己共役作用素

(B2) $g_n \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2}),\ n = 1, 2, \cdots$

(B3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B5) $\exists \epsilon > 0$ s.t. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |T^{-1/2} g_n\rangle\langle T^{-1/2} g_n| \geq \epsilon$

(B6) $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在して，$JTJ = T, Jg_n = g_n$

注意点：

- (B5) の確認は一見難しそうだが，$\lambda_n \geq 0$ なら常に成立する。
- (B6) は相互作用場 $\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)$ が互いに可換であることを意味する。
- 赤外正則条件 $g \in \mathrm{dom}(T^{-1})$ は仮定しない。

ハミルトニアンの自己共役性

定理 78 (H の自己共役性)

条件 *(B1)-(B6)* もとで H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。

※ 相互作用項 $(1/2)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2$ は非摂動項 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ に対して，相対的に有界だが，一般的には relative bound は 1 より大きい。

※ この定理は後で解説する。

H の対角化のために Bogoliubov 変換 U を次のように構成する。

条件 (B1)〜(B6) を仮定する。$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素

$$S := \left(T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| T^{1/2} g_n \right\rangle \left\langle T^{1/2} g_n \right| \right)^{1/2}$$

を定義し，

$$X := \frac{1}{2} \left(\overline{T^{-1/2} S^{1/2}} + \overline{T^{1/2} S^{-1/2}} \right), \quad Y := \frac{1}{2} \left(\overline{T^{-1/2} S^{1/2}} - \overline{T^{1/2} S^{-1/2}} \right)$$

とおく。後に解説するように

(i) X, Y は $\mathscr{H}$ 全体で定義された有界作用素

(ii) $\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$

(iii) Y は Hilbert-Schmidt

特に $B(f) := \overline{A(Xf) + A^*(JYf)}$ は CCR を満たし，$UB(f)U^* = A(f)$, $f \in \mathscr{H}$ を満たすユニタリ作用素が存在する。

ハミルトニアンの対角化

定理 79 (2021)

(B1)–(B6) を仮定する。このとき，ハミルトニアン H は

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E, \qquad E = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\overline{(S-T)}$$

と対角化される。特に，H の基底状態は $U^*\Omega$ で与えられる。

※ ここでの対角化とは，ある全ハミルトニアンが 1 粒子ハミルトニアンの第二量子化＋定数にユニタリ同値であるということであり，いわゆる具体的な掛け算作用素に変換されるわけではないことに注意。

※ H のスペクトル解析は S のそれに帰着される。S のスペクトル解析は非自明だが，場の作用素の解析よりは知られている。実際，非有界作用素の摂動よりトレース型作用素の摂動のほうがやさしい。

※ T, S は一般に非有界だが $\overline{S-T}$ はトレース型作用素である。

※ 前節で構成した U は今の場合 U^* なので注意。特に深い理由はない。

対相互作用模型の対角化の応用例

単純な対相互作用模型

対相互作用の個数が 1 個の場合を考える：

$$H := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{\lambda}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2$$

定理 80

$T > 0$，$g \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。結合定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ は

$$1 + \lambda \|T^{-1/2} g\|^2 > 0$$

を満たすものとする。このとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ変換 U が存在して

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\overline{(S-T)}$$

となる。ただし，

$$S = \left(T^2 + \lambda\, |T^{1/2} g\rangle \langle T^{1/2} g|\right)^{1/2}$$

証明.　定理 78, 79 を適用する。条件 (B1)–(B6) を確認すればよい。また，$\mathscr{H} = L^2(M, dk)$ で T が掛け算作用素の場合を考えれば十分。

条件 (B1)(B2)(B3)(B4) は仮定から明らか。(B5) は今は

$$\exists\epsilon > 0, \qquad 1 + \lambda \left|T^{-1/2}g\right\rangle \left\langle T^{-1/2}g\right| \geq \epsilon$$

である。これを示す。

$$\epsilon := \min\{1, 1 + \lambda\|T^{-1/2}g\|^2\}$$

とおけば，仮定から $\epsilon > 0$ である。$\mathbb{C}T^{-1/2}g$ への正射影を P とすると

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \left|T^{-1/2}g\right\rangle \left\langle T^{-1/2}g\right| &= 1 + \lambda\|T^{-1/2}g\|^2 P \\ &= (1 + \lambda\|T^{-1/2}g\|^2)P + P^{\perp} \\ &\geq \epsilon P + \epsilon P^{\perp} = \epsilon > 0 \end{aligned}$$

したがって，(B5) が成り立つ。

次に条件 (B6) を示す。つまり

$$JTJ = T, \qquad Jg = g$$

となる $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在することを示す。
・・・(練習問題)・・・したがって，(B6) が成り立つ。

命題 81

$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間とする。このとき，ユニタリ作用素

$$U : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K})$$

で任意の $f \in \mathscr{H}, g \in \mathscr{K}$ に対して

$$\begin{aligned} &U\Omega \otimes \Omega = \Omega \\ &U(A^*(f) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes A^*(g))U^* = A^*(f,g) \qquad \mathit{on}\ \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}) \end{aligned} \tag{77}$$

を満たすものが唯一つ存在する。

証明. $\tilde{A}^*(f,g) := A^*(f) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes A^*(g)$ とおくと，これらは CCR を満たす：

$$\begin{aligned} [\tilde{A}(f_1,g_1), \tilde{A}^*(f_2,g_2)] &= [A(f_1), A^*(f_2)] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [A(g_1), A^*(g_2)] \\ &= \langle f_1, f_2\rangle + \langle g_1, g_2\rangle = \langle (f_1,f_2), (g_1,g_2)\rangle \end{aligned}$$

$\tilde{A}$ 同士の可換性は明らか。$\{h_j\}$ を $\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ の ONB とするとき

$$\tilde{A}^*(h_{j_1}) \cdots \tilde{A}^*(h_{j_n})\Omega \otimes \Omega, \quad n = 0, 1, \cdots$$

達を集めれば $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ の ONB となる。

したがって，その ONB を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K})$ の ONB $A^*(h_{j_1}) \cdots A^*(h_{j_n})\Omega$ に移すユニタリ作用素がただ一つ存在する。そのユニタリ作用素は (77) を満たすことも容易にわかる。 □

次の関係式も成立する。

命題 82

U を命題 *81* のユニタリ作用素とする。このとき，作用素の等式

$$U\overline{(\Phi_{\mathrm{S}}(f) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g))}U^* = \Phi_{\mathrm{S}}(f, g)$$

$$U\overline{(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))}U^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S \oplus T)$$

が成り立つ。

証明. 略（定義域や芯に注意すればよく，本質的な困難な部分はない）

$L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ に作用するハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \lambda x \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g)$$

を考える。ただし，$\omega \in (0, \infty)$，$\lambda \in \mathbb{R}$，$g \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。

定理 83

$|\lambda| < \omega \|T^{-1/2} g\|^{-1}$ とする。H は自己共役であり，ユニタリ作用素
$U : L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C} \oplus \mathscr{H})$ が存在して

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}\left(\begin{pmatrix} \omega^2 & \lambda \left|1\right\rangle \left\langle T^{1/2} g\right| \\ \lambda \left|T^{1/2} g\right\rangle \left\langle 1\right| & T^2 \end{pmatrix}^{1/2}\right) + E$$

ここで

$$E = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \overline{\left(\begin{pmatrix} \omega^2 & \lambda \left|1\right\rangle \left\langle T^{1/2} g\right| \\ \lambda \left|T^{1/2} g\right\rangle \left\langle 1\right| & T^2 \end{pmatrix}^{1/2} - \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\right)} + \frac{\omega}{2}$$

この模型の相互作用の形が物理的な意味を持つのかは不明である。調和振動子の方をフーリエ変換して $x \leftrightarrow p$ とすれば，相互作用は双極近似の Pauli-Fierz の電磁相互作用に似ている。

定理 83 の証明． まず，ハミルトニアンを対相互作用模型の形に変換する。1 次元調和振動子は $\mathbb{C}$ 上の量子場とみなすことができることを説明する。学部の量子力学で習う $L^2(\mathbb{R})$ 上の生成，消滅作用素 a, a^* をもちいて

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) = \omega a^* a + \frac{\omega}{2}$$

とし，この調和振動子の基底状態を $\Omega_0 \in L^2(\mathbb{R})$ とする。このとき，ユニタリ作用素 $u : L^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ で

$$u\Omega_0 = \Omega, \quad uau^* = A(1),$$

を満たすものが存在する。このとき，

$$\begin{aligned} &u\left[\tfrac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)\right]u^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \frac{\omega}{2} \quad \curvearrowright \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \\ &uxu^* = \omega^{-1/2}\Phi_{\mathrm{S}}(1) \end{aligned}$$

となる。したがって，H は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の作用素に変換される：

$$(u \otimes 1)H(u \otimes 1)^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \omega^{-1/2}\lambda\Phi_{\mathrm{S}}(1) \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g) + \frac{\omega}{2}.$$

次に $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C} \oplus \mathscr{H})$ と自然に同一視すれば

$$
\begin{aligned}
(u \otimes 1) H (u \otimes 1)^* &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus T) + \omega^{-1/2} \lambda \Phi_{\mathrm{S}}(1,0) \Phi_{\mathrm{S}}(0,g) + \frac{\omega}{2} \\
&= d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega \oplus T) + \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{4} \left\{ \Phi_{\mathrm{S}}(1,g)^2 - \Phi_{\mathrm{S}}(1,-g)^2 \right\} + \frac{\omega}{2} \\
&=: \tilde{H} + \frac{\omega}{2}.
\end{aligned}
$$

とユニタリ同値であることが示される。これで，H を対相互作用模型のハミルトニアン H に変換することができた。対応は

$$
T \to \omega \oplus T, \qquad \lambda_1 = \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{2} = -\lambda_2 \qquad g_1 = (1, g), \qquad g_2 = (1, -g)
$$

である。これに対して定理 78, 79 を適用する。条件 (B1)–(B4) は明らかである。(B6) の共役子の存在も前の例と同様である。(B5) だけ調べればよい。

$$
\begin{aligned}
K := 1 &+ \lambda_1 \left| (\omega \oplus T)^{-1/2} g_1 \right\rangle \left\langle (\omega \oplus T)^{-1/2} g_1 \right| \\
&+ \lambda_2 \left| (\omega \oplus T)^{-1/2} g_2 \right\rangle \left\langle (\omega \oplus T)^{-1/2} g_2 \right| \\
= 1 &+ \omega^{-1} \lambda \Big(\left| (1,0) \right\rangle \left\langle (0, T^{-1/2} g) \right| + \left| (0, T^{-1/2} g) \right\rangle \left\langle (1,0) \right| \Big)
\end{aligned}
$$

とおく。K が単射な非負の自己共役作用素であれば $K \geq \epsilon \mathbf{1} > 0$ が示される。

$\mathscr{K} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}T^{-1/2}g$ と置こう。このとき，$\mathscr{K}$ は K を簡約する。そして，K の $\mathscr{K}$ による簡約部分は直交基底 $\{(1,0),\ (0, T^{-1/2}g/\|T^{-1/2}g\|)\}$ による行列表示を持つ：

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1}\lambda\|T^{-1/2}g\| \\ \omega^{-1}\lambda\|T^{-1/2}g\| & 1 \end{pmatrix}$$

これは 2 次の行列なので，この固有値がすべて正であることと
$1 - \omega^{-2}\lambda^2\|T^{-1/2}g\|^2 > 0$ は必要十分。一方，K の $\mathscr{K}^\perp = \{0\} \oplus (\mathbb{C}T^{-1/2}g)^\perp$ への簡約部分は恒等作用素である。したがって，K のカーネルは自明である。したがって，K は非負かつ単射となり，したがって $\tilde{H}$ に対する条件 (B5) が成り立つ。

以上から，$\tilde{H}$ に対して (B1)–(B6) が成り立つので定理 78, 79 より，自己共役性および対角化の主張が成り立つ。 $\square$

x^2 ポテンシャルをもつ双極近似の Pauli-Fierz 模型

これは荷電粒子が原点にバネで繋がれており，さらに量子電磁場と相互作用する模型である。ハミルトニアンは

$$H := \frac{1}{2}(p_j \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g_j))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \omega_j^2 x_j^2 \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$$

で与えられる。これが作用する空間は $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ である。

- 通常の Pauli-Fierz 模型で $A(x) \to A(0)$ と置き換えたとすると，g_j 達は偏極ベクトルを含む特別な関数であるが，とりあえず最初の解析では対角化の解析にはそのような条件は使わないので，上の一般的な形のハミルトニアンを解析する。

H を次のように展開しよう：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(p_j^2 + \omega_j^2 x_j^2) \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} 1 \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g_j)^2 + \sum_{j=1}^{d} p_j \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(g_j)$$

これは調和振動子とボース場の結合系と同じ形をしているので，すべて生成・消滅作用素で表すことができる。

定理 84

$g_j \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。$\mathscr{H}$ 上の共役子 J で $JTJ = T, Tg_j = g_j$ を満たすものが存在するとする。このとき，H は自己共役である。また，ユニタリ作用素 $U : L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^d \oplus \mathscr{H})$ が存在して，

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\sqrt{\mathrm{diag}(\omega_1^2, \cdots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W}) + E$$

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S - T) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\omega_j}{2}$$

ここに，W は有限階作用素

$$W := \sum_{j=1}^{d} \begin{pmatrix} 0 & \omega_j \left|e_j\right\rangle \left\langle T^{1/2} g_j\right| \\ \omega_j \left|e_j\right\rangle \left\langle T^{1/2} g_j\right| & \left|T^{1/2} g_j\right\rangle \left\langle T^{1/2} g_j\right| \end{pmatrix},$$

e_j は $\mathbb{C}^d$ の標準基底，$S = (\mathrm{diag}(\omega_1^2, \cdots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W)^{1/2}$ である。

証明. (B1)–(B4) と (B6) はほとんど明らかである。(B5) だけが非自明だが，前例のように基底を取り有限次元行列の性質に帰着させればよい。詳細は省略。

外部ポテンシャルが 0 の場合を考える。外部ポテンシャルを持たない Pauli-Fierz 模型は並進対称性を持ち，全運動量

$$p \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(k)$$

が保存する。しかし，双極近似を行った場合，全運動量は保存せず，代わりに粒子の運動量 p が保存する。そこで，双極近似の Pauli-Fierz ハミルトニアンで荷電粒子の運動量を $P = (P_1, \cdots, P_d) \in \mathbb{R}^d$ に固定して定義されるハミルトニアン

$$\begin{aligned} H(P) &:= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(P_j + \Phi_{\mathrm{S}}(g_j))^2 + d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \qquad \curvearrowright \quad \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \\ &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)^2 + \sum_{j=1}^{d} P_j \Phi_{\mathrm{S}}(g_j) + \sum_{j=1}^{d}\frac{P_j^2}{2} \end{aligned}$$

を考えよう。物理的には $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d \times \{1, \cdots, d-1\})$ である。

以下，$g_j \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ かつ $JTJ = T, Jg_j = g_j$ を満たす共役子 J が存在すると仮定する。

まず，$H(P)$ の 2 次の相互作用の部分

$$H_0 := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \Phi_{\mathrm{S}}(g_j)^2$$

を考える。これは対相互作用模型の例になっており，仮定から (B1)–(B6) がすべて満たされる。したがって，定理 78 より H_0 は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役である。また，定理 79 より $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U（もちろんこれは P に無関係）で

$$UH_0U^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E, \qquad S := \sqrt{T^2 + \sum_{j=1}^{d} |T^{1/2}g_j\rangle\langle T^{1/2}g_j|}$$

を満たすものがある。ここに $E := \mathrm{tr}(\overline{S-T})/2$。また，今の場合 $JY = YJ, JX = XJ$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} U\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)U^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A(X^*g_j) - A^*(JYg_j)A^*(X^*g_j) - A(JYg_j)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A((X^*-Y^*)g_j) + A^*((X^*-Y^*)g_j)) \\ &= \Phi_{\mathrm{S}}(S^{-1/2}T^{1/2}g_j) \end{aligned}$$

である。したがって，上のユニタリ変換によって

$$UH(P)U^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + \Phi_{\mathrm{S}}\left(S^{-1/2}T^{1/2}\sum_{j=1}^{d} P_j g_j\right) + \sum_{j=1}^{d} \frac{P_j^2}{2} + E.$$

となる。

上式の右辺は van-Hove 模型なのですでに解析されている。すなわち，$S^{-1/2}T^{1/2}g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ のとき，$UH(P)U^*$ は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S))$ 上で自己共役かつ下に有界である。条件 $S^{-1/2}T^{1/2}g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ は $T^{1/2}g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1})$ と同じであるが，後で示すように $\overline{S^{-1/2}T^{1/2}}$ は $\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ を不変にするので，$g_j \in \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ からこの条件は成立する。$UH(P)U^*$ が基底状態を持つための必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^{d} S^{-1/2}T^{1/2}P_j g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1})$$

だが，これは追加の仮定なしには一般には成立しない。もちろん $P_j = 0 (j = 1, \cdots, d)$ なら成立するが。

さて，van-Hove 模型の解析から $H(P)$ のスペクトルの下限は

$$\begin{aligned} E(P) &:= \inf \sigma(H(P)) \\ &= -\frac{1}{2}\left\| S^{-1}T^{1/2}\sum_{j=1}^{d} P_j g_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{d} \frac{P_j^2}{2} + E. \end{aligned}$$

である。

より物理的な設定では，g_j は偏極ベクトルから作られることを思い出そう。例えば $d=3$ では $T=|k|$, $g_j(k,\lambda)=|k|^{-1/2}\hat{\rho}(k)e_j(k,\lambda)$, $\lambda=1,2$

$$e(k,1):=\frac{(k_2,-k_1)}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}},\quad e(k,2):=\frac{k}{|k|}\times e(k,1)$$

で $\hat{\rho}(k)$ が球対称関数であるのが普通である。そのような設定では，条件

$$\langle T^{-1/2}g_j,T^{-1/2}g_\ell\rangle=\|T^{-1/2}g_1\|^2\delta_{j\ell},\qquad j,\ell=1,\cdots,d \tag{78}$$

が成り立つことが確かめられる。そこで，いまはこの条件 (78) を仮定しよう。

定理 85

(78) を仮定する。任意の $P\in\mathbb{R}^d$ に対して $H(P)$ の最低エネルギーは

$$E(P)=\frac{1}{2(1+\|T^{-1/2}g_1\|^2)}\sum_{j=1}^d P_j^2+E.$$

となる。さらに次が同値である：

(1) $H(P)$ は基底状態を持つ

(2) $\sum_{j=1}^d P_jg_j\in\mathrm{dom}(T^{-1})$

証明． $A := 1 + \sum_{j=1}^{d} |T^{-1/2} g_j\rangle \langle T^{-1/2} g_j|$ とおく。仮定 (78) から

$$A^{-1} = 1 - \frac{1}{1 + \|T^{-1/2} g_1\|^2} \sum_{j=1}^{d} |T^{-1/2} g_j\rangle \langle T^{-1/2} g_j| \, .$$

である。また，S の定義から $S^2 = TAT$ なので $S^{-2} = T^{-1} A^{-1} T^{-1}$ が成り立つ。
$g := \sum_{j=1}^{d} P_j g_j$ とおくと仮定 (78) から

$$\begin{aligned}
\|S^{-1} T^{1/2} g\|^2 &= \left\langle T^{-1} T^{1/2} g, T^{-1} T^{1/2} g \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{1 + \|T^{-1/2} g_1\|^2} \sum_{j=1}^{d} \left\langle T^{-1} T^{1/2} g, T^{-1/2} g_j \right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_j, T^{-1} T^{1/2} g \right\rangle \\
&= \left\langle T^{-1/2} g, T^{-1/2} g \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{1 + \|T^{-1/2} g_1\|^2} \sum_{j=1}^{d} \left\langle T^{-1/2} g, T^{-1/2} g_j \right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_j, T^{-1/2} g \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} P_j^2 \|T^{-1/2} g_1\|^2 - \frac{1}{1 + \|T^{-1/2} g_1\|^2} \sum_{j=1}^{d} P_j^2 \|T^{-1/2} g_1\|^4 \\
&= \sum_{j=1}^{d} P_j^2 \frac{\|T^{-1/2} g_1\|^2}{1 + \|T^{-1/2} g_1\|^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(P) &= -\frac{1}{2}\left\|S^{-1}T^{1/2}g\right\|^2 + \sum_{j=1}^{d}\frac{P_j^2}{2} + E \\
&= -\frac{\|T^{-1/2}g\|^2}{2(1+\|T^{-1/2}g_1\|^2)}\sum_{j=1}^{d}P_j^2 + \sum_{j=1}^{d}\frac{P_j^2}{2} + E \\
&= \frac{1}{2(1+\|T^{-1/2}g_1\|^2)}\sum_{j=1}^{d}P_j^2 + E.
\end{aligned}
$$

基底状態の存在に関する証明はより技術的なので省略。 □

上のエネルギーの結果は，荷電粒子が電磁場と相互作用することによって，質量が $1 \to 1 + \|T^{-1/2}g_1\|^2$ と増加することを表している。これについては Hiroshima-Spohn による先行研究がある。

数学的準備・自己共役性の証明

まず，２次の生成・消滅作用素を自由場のエネルギーで評価する。

補題 86

$T>0$ とし，$f_1,\cdots,f_n\in\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。このとき，

$$\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{n/2})\subset\mathrm{dom}(A(f_1)\cdots A(f_n)),$$

であり，$\Psi\in\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{n/2})$ に対して評価

$$\|A(f_1)\cdots A(f_n)\Psi\|\le\|T^{-1/2}f_1\|\cdots\|T^{-1/2}f_n\|\cdot\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{n/2}\Psi\|$$

が成り立つ。

証明. T が掛け算作用素になるように L^2 空間へユニタリ変換すれば $\mathscr{H}=L^2(M)$,
$T=Q$ の場合を示せばよいことがわかる。消滅作用素の核の定義から，
$\Psi\in\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{n/2})$ と $\Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ に対して次が成り立つ：

$$\langle A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Phi,\Psi\rangle=\int_{M^n}\overline{f_1(k_1)}\cdots\overline{f_n(k_n)}\,\langle\Phi,A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\rangle\,dk_1\cdots dk_n$$

以下，$\|\Phi\|=1$, $f_j:=f_j(k_j)$, $Q_j^{1/2}:=Q(k_j)^{1/2},dk:=dk_1\cdots dk_n$ とする。

Schwarz の不等式より

$$
\begin{aligned}
&|\langle A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Phi, \Psi\rangle| \\
&\le \int_{M^n} |f_1\cdots f_n|\cdot \|A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\|\,dk \\
&\le \left(\int_{M^n}\prod_{j=1}^n |Q_j^{-1/2} f_j|^2\,dk\right)^{1/2}\left(\int_{M^n} Q_1\cdots Q_n\|A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\|^2\,dk\right)^{1/2} \\
&\le \|Q^{-1/2}f_1\|\cdots\|Q^{-1/2}f_n\|\left(\int_{M^n} Q_1\cdots Q_n\|A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\|^2\,dk\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

一方，消滅作用素の核 $A(k)$ の定義から次を得る：

$$
\begin{aligned}
&\|A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\|^2 \\
&= \sum_{N=0}^\infty (N+1)\|(A(k_2)\cdots A(k_n)\Psi)^{(N+1)}(k_1,\cdot)\|^2 \\
&= \sum_{N=0}^\infty (N+1)(N+2)\|(A(k_3)\cdots A(k_n)\Psi)^{(N+2)}(k_1,k_2,\cdot)\|^2 \\
&= \sum_{N=0}^\infty (N+1)\cdots(N+n)\|\Psi^{(N+n)}(k_1,\cdots,k_n,\cdot)\|^2 \\
&= \sum_{N=0}^\infty (N+1)\cdots(N+n)\int_{M^N} dk_{n+1}\cdots dk_{n+N}\,|\Psi^{(N+n)}(k_1,\cdots,k_{N+n})|^2.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_{M^n} Q_1 \cdots Q_n \|A(k_1)\cdots A(k_n)\Psi\|^2\, dk \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \int_{M^{N+n}} dk_1 \cdots dk_{n+N}\, \frac{(N+n)!}{N!} Q_1 \cdots Q_n |\Psi^{(N+n)}(k_1, \cdots, k_{N+n})|^2 \\
&= \sum_{N=n}^{\infty} \int_{M^N} dk_1 \cdots dk_N\, \frac{N!}{(N-n)!} Q_1 \cdots Q_n |\Psi^{(N)}(k_1, \cdots, k_N)|^2 \\
&= \sum_{N=n}^{\infty} \int_{M^N} dk_1 \cdots dk_N \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_n=1 \\ \sharp\{j_1,\cdots,j_n\}=n}}^{N} Q_{j_1} \cdots Q_{j_n} |\Psi^{(N)}(k_1, \cdots, k_N)|^2, \qquad (79)
\end{aligned}
$$

ここで，最後のステップで $\Psi^{(N)}$ の対称性を使った。$n \geq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
(79) &\leq \sum_{N=n}^{\infty} \int_{M^N} dk_1 \cdots dk_N \left(\sum_{j=1}^{N} Q(k_j) \right)^n |\Psi^{(N)}(k_1, \cdots, k_N)|^2 \\
&= \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{n/2}\Psi\|^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

したがって，すべての $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ と $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{n/2})$ に対して

$$
|\langle A^*(f_1) \cdots A^*(f_j)\Phi, \Psi \rangle| \leq \prod_{\ell=1}^{j} \|Q^{-1/2} f_\ell\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{j/2}\Psi\|, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.
$$

が成り立つ。

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}$ は $A(f)$ の芯なので，上で $j=1$ とおけば $\Psi \in \mathrm{dom}(A(f_1))$ を得る。次の，$j=2$ とすれば $A(f_1)\Psi \in \mathrm{dom}(A(f_2))$ を得る。したがって，帰納的に $\Psi \in \mathrm{dom}(A(f_n)\cdots A(f_1))$ がしたがう。したがって，

$$\begin{aligned}\|A(f_n)\cdots A(f_1)\Psi\| &= \sup_{\substack{\Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}0}\\ \|\Phi\|=1}} |\langle A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Phi, \Psi\rangle| \\ &\leq \prod_{\ell=1}^{n} \|Q^{-1/2}f_\ell\| \cdot \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(Q)^{n/2}\Psi\|.\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

補題 87

$T > 0$ とし $g \in \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ を仮定する。このとき，$\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \subset \mathrm{dom}(\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2)$ であり，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対して次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2\Psi\| \leq \|T^{-1/2}g\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| + \|g\|^2\|\Psi\| \tag{80}$$

証明． この証明中では次のように略記する：

$$a := A(g), \quad a^* := A^*(g), \quad c := \|g\|^2, \quad d := \|T^{-1/2}g\|^2, \quad H_0 := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$$

最初に $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ の場合を考える。三角不等式より

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2\Psi\|^2 &= \frac{1}{4}\|(a^2 + a^*a + aa^* + a^{*2})\Psi\|^2 \\ &\leq \|a^2\Psi\|^2 + \|a^*a\Psi\|^2 + \|aa^*\Psi\|^2 + \|a^{*2}\Psi\|^2.\end{aligned}$$

CCRs と補題 86 から

$$\begin{aligned}\|a^2\Psi\|^2 &\leq d^2\|H_0\Psi\|^2, \\ \|a^*a\Psi\|^2 &= \|a^2\Psi\|^2 + c\|a\Psi\|^2 \leq d^2\|H_0\Psi\|^2 + cd\|H_0^{1/2}\Psi\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|aa^*\Psi\|^2 &= \|(a^*a+c)\Psi\|^2 = \|a^*a\Psi\|^2 + 2c\|a\Psi\|^2 + c^2\|\Psi\|^2 \\
&\le d^2\|H_0\Psi\|^2 + 3cd\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + c^2\|\Psi\|^2, \\
\|(a^*)^2\Psi\|^2 &= \|aa^*\Psi\|^2 + c\|a^*\Psi\|^2 \\
&\le d^2\|H_0\Psi\|^2 + 3cd\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + c^2\|\Psi\|^2 + c(d\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + c\|\Psi\|^2) \\
&= d^2\|H_0\Psi\|^2 + 4cd\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + 2c^2\|\Psi\|^2.
\end{aligned}
$$

こうして，

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2\Psi\|^2 &\le 4d^2\|H_0\Psi\|^2 + 8cd\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + 3c^2\|\Psi\|^2 \\
&\le \|(2dH_0 + 2c)\Psi\|^2,
\end{aligned}
$$

をえる。不等式 (80) がすべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ に対して成り立つので，極限操作により補題がしたがう。 □

Heinz の不等式の復習

$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 A, B に対して

$$A \leq B \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{dom}(B) \subset \mathrm{dom}(A) \;\; \text{かつ} \;\; \langle f, Af \rangle \leq \langle f, Bf \rangle, \;\; f \in \mathrm{dom}(B)$$

非負の自己共役作用素 A, B に対して

$$A \preceq B \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{dom}(B^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(A^{1/2}) \;\; \text{かつ} \;\; \|A^{1/2} f\| \leq \|B^{1/2} f\|, \;\; f \in \mathrm{dom}(B^{1/2})$$

- $A \leq B$ なら $A \preceq B$ は簡単に示せるが逆は一般にはいえない。
- $A \preceq B$ なら $A^p \preceq B^p$ が $0 < p \leq 1$ に対して成り立つ (Heinz の不等式)。さらに，A, B が単射であるとき，$A \preceq B$ は $B^{-1} \preceq A^{-1}$ と同値である。

次の条件を定義する：

(A1) A, B は単射かつ非負な自己共役作用素
(A2) 定数 $c_1 > 0, c_2 > 0$ があって $c_1^2 A^2 \leq B^2 \leq c_2^2 A^2$.

補題 88

(A1) と *(A2)* を仮定する。このとき，任意の $0 < p \leq 1$ に対して，以下が成立する：

(1) $\mathrm{dom}(A^p) = \mathrm{dom}(B^p)$ かつ $\mathrm{dom}(A^{-p}) = \mathrm{dom}(B^{-p})$,
(2) $\mathrm{dom}(B^p A^{-p}) = \mathrm{dom}(A^{-p})$, $B^p A^{-p}$ は有界で，$c_1^p \leq \|B^p A^{-p}\| \leq c_2^p$,
(3) $\mathrm{dom}(B^{-p} A^p) = \mathrm{dom}(A^p)$, $B^{-p} A^p$ は有界で，$c_2^{-p} \leq \|B^{-p} A^p\| \leq c_1^{-p}$,
(4) $\mathrm{dom}(A^p B^{-p}) = \mathrm{dom}(B^{-p})$, $A^p B^{-p}$ は有界で，$\overline{A^p B^{-p}} = \left(B^{-p} A^p\right)^*$,
(5) $\mathrm{dom}(A^{-p} B^p) = \mathrm{dom}(B^p)$, $A^{-p} B^p$ は有界で，$\overline{A^{-p} B^p} = \left(B^p A^{-p}\right)^*$.

定数 D_1, D_2, D_3 を

$$D_j := \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot \|T^{(j-2)/2} g_n\|^2, \qquad j = 1, 2, 3$$

とおくと，(B3),(B4) から $D_j < \infty$ $(j = 1, 2, 3)$ である。さらに補題 87 から，すべての $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対して

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot \left\| \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 \Psi \right\| \le D_1 \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| + D_2 \|\Psi\| \tag{81}$$

である。こうしてハミルトニアン H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で well-defined である（つまり $\sum_n$ も収束する）。

命題 89

条件 *(B1)–(B4)* を仮定する。$D_1 < 1$ のとき，H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役かつ下に有界であり，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。

証明. (81) と Kato-Rellich の定理からしたがう。 □

次に制限 $D_1 < 1$ を除去し，結合定数が正の場合の自己共役性を証明する。後の応用のために，文字を少し変える。

補題 90

$R > 0$ を $\mathscr{H}$ 上の非負かつ単射な自己共役作用素，$f_n \in \mathrm{dom}(R^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(R^{-1/2})$，$n \in \mathbb{N}$ とする。このとき，任意の定数 $c > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ および $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ に対して，不等式

$$\begin{aligned} &\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)\Psi\|^2 + \|c\sum_{n=1}^{N} \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2\Psi\|^2 \\ &\leq \left\|\left(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R) + c\sum_{n=1}^{N} \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2\right)\Psi\right\|^2 + c\sum_{n=1}^{N} \|R^{1/2}f_n\|^2\|\Psi\|^2 \end{aligned} \tag{82}$$

が成り立つ。さらに，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(R) + \sum_{n=1}^{N} \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2$ は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ 上で自己共役であり，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。

※不等式 (82) は，調和振動子のハミルトニアン $p^2 + x^2$ が $\mathrm{dom}(p^2) \cap \mathrm{dom}(x^2)$ で閉作用素であることを示すために用いられた関係式の量子場版である。

補題 90 の証明. $H_I := \sum_{n=1}^{N} \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2$ とおく。不等式 (82) は次と同値である。

$$-2\mathrm{Re}\,\langle d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)\Psi, H_I\Psi\rangle \leq \sum_{n=1}^{N} \|R^{1/2}f_n\|^2\|\Psi\|^2 \tag{83}$$

さて，一般に，

$$\begin{aligned} AB^2 + B^2A &= [A,B]B + BAB + B[A,B] + BAB \\ &= 2BAB + [[A,B],B] \end{aligned}$$

であるから，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(R))$ 上で

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)\Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 + \Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 d\Gamma_{\mathrm{b}}(R) = 2\Phi_{\mathrm{S}}(f)d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)\Phi_{\mathrm{S}}(f) + [[d\Gamma_{\mathrm{b}}(R),\Phi_{\mathrm{S}}(f)],\Phi_{\mathrm{S}}(f)]$$

ここで

$$\begin{aligned} [d\Gamma_{\mathrm{b}}(R),\Phi_{\mathrm{S}}(f)] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-A(Rf) + A^*(Rf)) \\ [[d\Gamma_{\mathrm{b}}(R),\Phi_{\mathrm{S}}(f)],\Phi_{\mathrm{S}}(f)] &= \frac{1}{2}[-A(Rf)+A^*(Rf), A(f)+A^*(f)] = -\langle f, Rf\rangle \\ &= -\|R^{1/2}f\|^2 \end{aligned}$$

となる。上の交換子の計算では $f \in \mathrm{dom}(R)$ が仮定されているが，最終的な式には $R^{1/2}f$ しか現れないので，適切な極限操作によって，これは $f \in \mathrm{dom}(R^{1/2})$ に対して正当化される。

$f \to f_n$ としてこれを使い，次を得る。

$$-2\mathrm{Re}\left\langle d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)\Psi, \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2\Psi\right\rangle = -2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)^{1/2}\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)\Psi\|^2 + \|R^{1/2}f_n\|^2\|\Psi\|^2 \quad (84)$$

が示される。上式を得るための交換子の計算は，はじめ $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(R))$ 上の内積で計算しておき，のちに $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(R))$ が $d\Gamma_{\mathrm{b}}(R), \Phi_{\mathrm{S}}(f_n)^2$ の芯であることを使って $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ の内積まで拡張する。

さて，等式 (84) で n についての和を取り，負の項を落とせば (83) が得られる。したがって，不等式 (82) が成立する。

次に自己共役性を示す。$k \in \mathbb{N}$ に対して $H_k := d\Gamma_{\mathrm{b}}(R) + (2/3)^k H_I$ とおく。命題 89 と同様にして，十分大きい $k \in \mathbb{N}$ に対して，H_k は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。式 (82) で $c = (2/3)^k$ と置けば，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ に対し

$$\left\|\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k H_I\Psi\right\|^2 \leq \frac{1}{4}\|H_k\Psi\|^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k \sum_{n=1}^{N} \|R^{1/2}f_n\|^2\|\Psi\|^2$$

となる。したがって，Kato-Rellich の定理により

$$H_k + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k H_I = H_{k-1}$$

は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(R))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_{\mathrm{b}}(R)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。これを k 回繰り返すと $H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(R) + H_I$ に対する自己共役性が示される。 □

定理 78（自己共役性）の証明.　まず，$0 < \varepsilon < 1$ を条件 (B5) のものとする。条件 (B3) により，$N \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot \|T^{-1/2} g_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{4} \tag{85}$$

となる。そのような N を固定する。条件 (B5) から

$$\varepsilon \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{-1/2} g_n\right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_n\right| \leq 1 + \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left|T^{-1/2} g_n\right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_n\right| + \frac{\varepsilon}{4}$$

なので

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left|T^{-1/2} g_n\right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_n\right| \geq 0 \tag{86}$$

を得る。まず，ハミルトニアンの相互作用項が有限個の場合の自己共役性を証明する。

部分空間 $\mathscr{M} := \mathcal{L}\{T^{-1/2} g_1, \cdots, T^{-1/2} g_N\}$ の次元を M とする。
$\{T^{-1/2} g_1, \cdots, T^{-1/2} g_N\}$ に Gram-Schmidt を適用してできる正規直交系を $\{e_j\}_{j=1}^{M}$ で表す。$P_{\mathscr{M}}$ を $\mathscr{M}$ 上への正射影作用素とする。このとき，$P_{\mathscr{M}}$ は $\left|T^{-1/2} g_m\right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_n\right|$ $(m, n = 1, \cdots, N)$ の線型結合だから，作用素 $T^{1/2} P_{\mathscr{M}} T^{1/2}$ は $\mathrm{dom}(T^{1/2})$ 上で well-defined かつ有界である。

そこで，次を定義する。

$$T_{\mathscr{M}} := \overline{T^{1/2} P_{\mathscr{M}} T^{1/2}} = \sum_{j=1}^{M} |T^{1/2} e_j\rangle \langle T^{1/2} e_j| , \qquad T_\varepsilon := T - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) T_{\mathscr{M}}.$$

すると $T_{\mathscr{M}}$ は有界かつ自己共役であり，T_ε は $\mathrm{dom}(T)$ 上で自己共役。さらに

$$0 \leq T_{\mathscr{M}} \leq T, \qquad \frac{\varepsilon}{2} \cdot T \leq T_\varepsilon \leq T.$$

とくに，T_ε は単射で非負な自己共役作用素である。

一般に，B が有界であっても，作用素の等式 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(A+B) \neq d\Gamma_{\mathrm{b}}(A) + d\Gamma_{\mathrm{b}}(B)$ は成り立たない（両辺の定義域が異なるかもしれない）。（以下の部分は 5 月 26 日に訂正）
しかし，次が成り立つことを示そう：

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon) + (1 - \varepsilon/2) d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_{\mathscr{M}}) \quad \text{作用素の等式} \tag{87}$$

まず，これは $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ 上では成立する。次に，$\Phi_j := \Phi_{\mathrm{S}}(T^{1/2} e_j)$，
$\Pi_j := \Phi_{\mathrm{S}}(i T^{1/2} e_j)$ とおこう。すると $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_{\mathscr{M}}) = \sum_{j=1}^{M} A^*(T^{1/2} e_j) A(T^{1/2} e_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \left(\Phi_j^2 + \Pi_j^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \|T^{1/2} e_j\|^2 \tag{88}$$

が成り立つ。

次に $T^{1/2}e_j$ は g_j 達の線型結合だったことに注意すれば

$$T^{1/2}e_j = \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2}) = \mathrm{dom}(T_\epsilon^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T_\epsilon^{-1/2}) \tag{89}$$

である。これと補題 87 から $\mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon)) \subset \mathrm{dom}(\Phi_j^2) \cap \mathrm{dom}(\Pi_j^2)$。これから，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ と $\Xi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon))$ に対して

$$\langle d\Gamma_\mathrm{b}(T_\mathscr{M})\Psi, \Xi\rangle = \left\langle \Psi, \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left(\Phi_j^2 + \Pi_j^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\|T^{1/2}e_j\|^2\right]\Xi\right\rangle.$$

となる。$\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathscr{H})$ は $d\Gamma_\mathrm{b}(T_\mathscr{M})$ の芯だったので，$\mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon)) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\mathscr{M}))$ であり，(88) が $\mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon))$ 上で成り立つ。(89) と補題 90 によって，作用素

$$\begin{aligned} &d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left(\Phi_j^2 + \Pi_j^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\|T^{1/2}e_j\|^2\right] \\ &= d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) d\Gamma_\mathrm{b}(T_\mathscr{M}) \end{aligned}$$

は $\mathrm{dom}(d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。$\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(T_\varepsilon)$ だったので $\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathrm{dom}(T))$ は $d\Gamma_\mathrm{b}(T)$ と $d\Gamma_\mathrm{b}(T_\varepsilon)$ の共通の芯である。そして，(87) が $\mathscr{F}_\mathrm{fin}(\mathrm{dom}(T))$ じょうで成り立つことから作用素の等式 (87) が得られる。

次に

$$H_{\mathrm{fin}} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}\|T^{1/2}e_j\|^2.$$

の自己共役性を示す。

条件 (B6) から T, g_n は J 不変なので，e_j は $T^{-1/2}g_1, \cdots, T^{-1/2}g_N$ の実線型結合である。したがって，$Je_j = e_j$ かつ $\langle e_j, T^{-1/2}g_n\rangle \in \mathbb{R}$. こうして $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の実線形性から

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n\sum_{j,\ell=1}^{M}\left\langle e_j, T^{-1/2}g_n\right\rangle\left\langle e_\ell, T^{-1/2}g_n\right\rangle\Phi_j\Phi_\ell = \sum_{j,\ell=1}^{M}G_{j\ell}\Phi_j\Phi_\ell$$

ここに $G := \sum_{n=1}^{N}\lambda_n\,|T^{-1/2}g_n\rangle\langle T^{-1/2}g_n|$ かつ $G_{j\ell} := \langle e_j, Ge_\ell\rangle$.

これと (88) から

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_{\mathscr{M}}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}\|T^{1/2}e_j\|^2\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{M}\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\delta_{j\ell} + G_{j\ell}\right]\Phi_j\Phi_\ell + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}\Pi_j^2 \qquad (90)\end{aligned}$$

が $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{H})$ 上で成り立つ。

(86) から，行列 $((1-\varepsilon/2)\delta_{j\ell}+G_{j\ell})_{j,\ell}$ は非負な実対称行列である。したがって，これを直交行列で対角化することで，(90) の右辺を

$$\frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{M}\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\delta_{j\ell}+G_{j\ell}\right]\Phi_j\Phi_\ell+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}\Pi_j^2=\sum_{j=1}^{2M}\Phi_{\mathrm{S}}(f_j)^2$$

と書き表すことができる，ここに f_j は $T^{1/2}e_1,\cdots,T^{1/2}e_M$ の複素線型結合である。Heinz の不等式から，g_n，f_j は $\mathrm{dom}(T_\varepsilon^{1/2})\cap\mathrm{dom}(T_\varepsilon^{-1/2})$ の元でもあり，

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_{\mathscr{M}})+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M}\|T^{1/2}e_j\|^2=\sum_{j=1}^{2M}\Phi_{\mathrm{S}}(f_j)^2$$

が $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon))$ 上で成り立つ。

こうして，補題 90 から

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{fin}} &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_{\mathscr{M}}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{M} \|T^{1/2} e_j\|^2 \\
&= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon) + \sum_{j=1}^{2M} \Phi_{\mathrm{S}}(f_j)^2
\end{aligned}
$$

は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon)) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で s.a. かつ下に有界となる。さらに，任意の $\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon))$ に対し

$$
\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon)\Psi\|^2 \leq \|H_{\mathrm{fin}}\Psi\|^2 + \sum_{j=1}^{2M} \|T_\varepsilon^{1/2} f_j\|^2 \|\Psi\|^2. \tag{91}
$$

最後に H の自己共役性を示す。Heinz の不等式と補題 88 より

$$\|T_\varepsilon^{-1/2}T^{1/2}\|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}. \tag{92}$$

がいえる。

(85), (92), (91) と補題 87 から，$\Psi \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon))$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}|\lambda_n|\cdot\|\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2\Psi\| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|\lambda_n|\cdot\|T_\varepsilon^{-1/2}g_n\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T_\varepsilon)\Psi\| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\|g_n\|^2\|\Psi\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|H_{\mathrm{fin}}\Psi\| + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{2M}\|T_\varepsilon^{1/2}f_j\|^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\|g_n\|^2\right)\|\Psi\|.
\end{aligned}$$

こうして，Kato-Rellich の定理を適用することで H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役かつ下に有界，さらに $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的となる。 □（証明終）

定理 79 の証明のための準備：Part 1

Bogoliubov 変換による対角化の一般論

$S(X,Y) \in \mathfrak{Sp}$ は次を満たす作用素であった

$$X^*X - Y^*Y = 1, \qquad X^*JYJ - Y^*JXJ = 0$$
$$XX^* - JYY^*J = 1, \qquad -XY^* + JYX^*J = 0$$

ここから定義される消滅作用素

$$B(f) := \overline{A(Xf) + A^*(JYf)}.$$

に対応する場の作用素

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(B(f) + B^*(f))}, \qquad f \in \mathscr{H},$$

で定義すると，これらは Weyl 型 CCR

$$e^{i\phi(f)}e^{i\phi(h)} = e^{-i\mathrm{Im}\langle f,h\rangle/2}e^{i\phi(f+h)}, \qquad f,h \in \mathscr{H}.$$

を満たす。実線形作用素 F を

$$F(f) := Xf + JYf, \qquad f \in \mathscr{H}.$$

で定義すると，$\phi(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(Xf + JYf) = \Phi_{\mathrm{S}}(F(f))$ と表すこともできる。

補題 91

写像 $\mathscr{H} \ni f \mapsto F(f) = Xf + JYf \in \mathscr{H}$ は全単射，連続，実線形。

証明. F が連続，実線形であることは明らかなので全単射であることを示す。
$G(f) := X^*f - Y^*Jf$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
(G \circ F)(f) &= X^*F(f) - Y^*JF(f) = X^*(Xf + JYf) - Y^*J(Xf + JYf) \\
&= (X^*X - Y^*Y)f + (X^*JYJ - Y^*JXJ)Jf = f,
\end{aligned}
$$

逆に，

$$
\begin{aligned}
(F \circ G)(f) &= XG(f) + JYG(f) = X(X^*f - Y^*Jf) + JY(X^*f - Y^*Jf) \\
&= (XX^* - JYY^*J)f + (-XY^* + JYX^*J)Jf = f.
\end{aligned}
$$

したがって，F は全単射。 □

補題 92

$\mathscr{D}$ を任意の $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間とする。このとき，$\{e^{i\phi(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$ は既約。

証明. 補題 91 から $\{Xf + JYf \mid f \in \mathscr{D}\}$ は $\mathscr{H}$ で稠密。したがって，

$$
\{e^{i\phi(f)} \mid f \in \mathscr{D}\} = \{e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(Xf+JYf)} \mid f \in \mathscr{D}\}
$$

は既約。 □

Bogoliubov 変換による対角化の条件

次に Y は Hilbert-Schmidt であると仮定する。このとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で

$$UB(f)U^* = A(f), \qquad f \in \mathscr{H}.$$

となるものが存在する。したがって，

$$U\phi(f)U^* = \Phi_{\mathrm{S}}(f), \qquad f \in \mathscr{H}.$$

も成立する。

定理 93

H を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の自己共役作用素，S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする。$\mathscr{H}$ のある稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ 上で

$$e^{itH}\phi(f)e^{-itH} = \phi(e^{itS}f), \qquad t \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{D}. \tag{93}$$

が成り立つとする。このとき，ある実定数 E が存在して $UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$.

証明は次ページ

証明． $t \in \mathbb{R}$ を固定する。まず，$e^{-itH}U^*\Omega$ と $U^*\Omega$ が一次従属であることを示す。$\mathcal{A}$ を $\{e^{i\phi(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$ の線形包とする。$f \in \mathscr{D}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle e^{-itH}U^*\Omega, e^{i\phi(f)}e^{-itH}U^*\Omega\rangle = \langle U^*\Omega, e^{itH}e^{i\phi(f)}e^{-itH}U^*\Omega\rangle \\
&= \langle U^*\Omega, e^{i\phi(e^{itS}f)}U^*\Omega\rangle = \langle \Omega, Ue^{i\phi(e^{itS}f)}U^*\Omega\rangle = \langle \Omega, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(e^{itS}f)}\Omega\rangle \\
&= e^{-\|f\|^2/4} = \langle \Omega, e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega\rangle = \langle \Omega, Ue^{i\phi(f)}U^*\Omega\rangle = \langle U^*\Omega, e^{i\phi(f)}U^*\Omega\rangle.
\end{aligned}
$$

線形性からすべての $x \in \mathcal{A}$ に対して

$$
\langle e^{-itH}U^*\Omega, xe^{-itH}U^*\Omega\rangle = \langle U^*\Omega, xU^*\Omega\rangle. \tag{94}
$$

CCR によって $\mathcal{A}$ は単位的 $*$ 代数である。補題 92 から $\{e^{i\phi(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$ は規約なので，フォン・ノイマンの bicommutant theorem より $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}))$ で弱稠密である。こうして等式 (94) は任意の $x \in \mathcal{B}(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}))$ に拡張される。そこで $x = |U^*\Omega\rangle\langle U^*\Omega|$ とおけば $|\langle e^{-itH}U^*\Omega, U^*\Omega\rangle| = 1$ を得る。Schwarz の不等式の等号成立条件から単位ベクトル $e^{-itH}U^*\Omega$ と $U^*\Omega$ は線形従属である。したがって，線形従属性から複素数 $c(t)$ で $e^{-itH}U^*\Omega = c(t)U^*\Omega$ となるものが存在する。このとき $|c(t)| = 1$ である。

写像 $t \mapsto e^{-itH}$ は連続で群準同型なので $t \mapsto c(t)$ も同様である。したがって，実定数 E が存在して

$$c(t) = e^{-itE}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

次に $UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$ を示す。$t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathscr{D}$ を任意に取る。このとき

$$\begin{aligned} &Ue^{itH}e^{i\phi(f)}U^*\Omega = Ue^{itH}e^{i\phi(f)}e^{-itH} \cdot e^{itH}U^*\Omega = Ue^{i\phi(e^{itS}f)} \cdot e^{itE}U^*\Omega \\ &= e^{itE}e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(e^{itS}f)}\Omega = e^{itE}e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega = e^{it(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)+E)}e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega. \end{aligned}$$

一方

$$Ue^{itH}e^{i\phi(f)}U^*\Omega = Ue^{itH}U^* \cdot Ue^{i\phi(f)}U^*\Omega = e^{itUHU^*}e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega.$$

である。$\{e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega \mid f \in \mathscr{D}\}$ の線形包は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で稠密なので $UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$ が成り立つ。 $\square$

定理 93 と同じ設定のもとで H の基底状態エネルギー E に関して次が成り立つ。

命題 94 (基底状態エネルギーの表現)

S は非負かつ $\Omega \in \mathrm{dom}(H)$ と仮定する。このとき，$\overline{YS^{1/2}}$ は *Hilbert-Schmidt* であり

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

証明. 定理 93 から $H = U^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U + E$ である。また，$\Omega \in \mathrm{dom}(H)$ から $U\Omega \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S))$ であり，

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \langle U\Omega, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U\Omega \rangle .$$

S は非負なので，任意の ONB $\{e_n\}_n \subset \mathrm{dom}(S)$ に対して

$$\langle U\Omega, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U\Omega \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(S^{1/2}e_n)U\Omega\|^2. \tag{95}$$

U で $A(f)$ を $B(f)$ に変えると

$$\begin{aligned}\|A(S^{1/2}e_n)U\Omega\| &= \|B(S^{1/2}e_n)\Omega\| = \|A^*(JYS^{1/2}e_n)\Omega\| = \|JYS^{1/2}e_n\| \\ &= \|YS^{1/2}e_n\|\end{aligned}$$

となる。(95) の右辺は収束することから $\sum_n \|YS^{1/2}e_n\|^2 < \infty$ である。したがって，$\overline{YS^{1/2}}$ は Hilbert-Schmidt であり

$$\langle U\Omega, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U\Omega \rangle = \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \qquad \square$$

次に定理 93 の仮定 (93) が成り立つための十分条件を与える。稠密に定義された閉作用素 A, B に対して，2 次形式を次で定義する：

$$\langle \Phi, [A, B]_{\mathrm{w}} \Psi \rangle := \langle A^* \Phi, B\Psi \rangle - \langle B^* \Phi, A\Psi \rangle ,$$
$$\Phi \in \mathrm{dom}(A^*) \cap \mathrm{dom}(B^*), \qquad \Psi \in \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$$

定理 95

H を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の自己共役作用素，S を $\mathscr{H}$ 上の非負かつ単射な自己共役作用素とする。以下の条件を仮定する：

(i) 稠密な部分空間 $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{H}$ があって $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_1) \subset \mathrm{dom}(H)$.

(ii) $\mathrm{dom}(H) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$

(iii) 稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(S)$ があって，$e^{itS}\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ $(t \in \mathbb{R})$ かつ $F(f), F(Sf) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ がすべての $f \in \mathscr{D}$ に対して成り立つ。

(iv) すべての $f \in \mathscr{D}$ に対して $\lim_{\varepsilon \to 0} \| S^{-1/2} F\left(\left(\frac{e^{i\varepsilon S} - 1}{\varepsilon} - iS\right) f\right) \| = 0.$

(v) *For all* $f \in \mathscr{D}$ *and* $\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(H)$,

$$\langle \Phi, [H, B(f)]_{\mathrm{w}} \Psi \rangle = - \langle \Phi, B(Sf)\Psi \rangle , \tag{96}$$
$$\langle \Phi, [H, B^*(f)]_{\mathrm{w}} \Psi \rangle = \langle \Phi, B^*(Sf)\Psi \rangle . \tag{97}$$

このとき,

$$e^{itH} \phi(f) e^{-itH} = \phi(e^{itS} f), \quad t \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{D}. \tag{98}$$

証明. $f \in \mathscr{D}$ とする。条件 (iii) から $F(f), F(if) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ だから

$$\mathrm{dom}(H) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(B(f)) \cap \mathrm{dom}(B^*(f)) \tag{99}$$

が成り立つ。同様に，条件 (iii) から $F(Sf) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ であり，

$$\mathrm{dom}(H) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(B(Sf)) \cap \mathrm{dom}(B^*(Sf)) \tag{100}$$

が成り立つ。したがって，式 (96)，(97) の両辺は $\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(H)$ に対してちゃんと定義されている。

$\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(H)$ とし，$f_t := e^{-itS} f$ and $\Psi_t := e^{-itH}\Psi$, $\Phi_t := e^{-itH}\Phi$ とおく。このとき，条件 (iii) から $f_t \in \mathscr{D}$，また e^{itH} は H の定義域を変えないので
$\Psi_t, \Phi_t \in \mathrm{dom}(H)$ である。次に関数

$$X(t) := \langle \Phi_t, \phi(f_t)\Psi_t \rangle$$

が t について微分可能であり

$$X'(t) = i \langle \Phi_t, [H, \phi(f_t)]_{\mathrm{w}} \Psi_t \rangle - \langle \Phi_t, \phi(iSf_t)\Psi_t \rangle . \tag{101}$$

であることを示す。そのために，差分を取らないといけないので次を定義する：

$$\Delta_\varepsilon \Psi := \varepsilon^{-1}(\Psi_{t+\varepsilon} - \Psi_t), \quad \Delta_\varepsilon \Phi := \varepsilon^{-1}(\Phi_{t+\varepsilon} - \Phi_t), \quad \Delta_\varepsilon f := \varepsilon^{-1}(f_{t+\varepsilon} - f_t).$$

このとき，

$$\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}=\langle \Delta_\varepsilon \Phi, \phi(f_{t+\varepsilon})\Psi_{t+\varepsilon}\rangle+\langle \phi(\Delta_\varepsilon f)\Phi_t, \Psi_{t+\varepsilon}\rangle+\langle \phi(f_t)\Phi_t, \Delta_\varepsilon \Psi\rangle .$$

$\Psi_t \in \mathrm{dom}(H)$ なので強収束 $\Delta_\varepsilon \Psi \to -iH\Psi_t\ (\varepsilon \to 0)$ がいえる。まず

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \phi(f_t)\Phi_t, \Delta_\varepsilon \Psi\rangle=\langle \phi(f_t)\Phi_t, -iH\Psi_t\rangle \tag{102}$$

を得る。次に，標準的な評価式

$$\|\phi(g)\Xi\| \le 2\|S^{-1/2}F(g)\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}\Xi\|+\|F(g)\|\|\Xi\|, \\ g\in\mathscr{D},\ \Xi\in\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}). \tag{103}$$

を使う。条件 (ii) と閉グラフ定理から，定数 $C_1, C_2>0$ で次を満たすものが存在する

$$\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}\Xi\| \le C_1\|H\Xi\|+C_2\|\Xi\|, \qquad \Xi\in\mathrm{dom}(H). \tag{104}$$

(103) と (104) から

$$\begin{aligned}
&\|\phi(f_{t+\varepsilon})\Psi_{t+\varepsilon}-\phi(f_t)\Psi_t\| \\
&\le \|\phi(f_{t+\varepsilon}-f_t)\Psi_{t+\varepsilon}\|+\|\phi(f_t)(\Psi_{t+\varepsilon}-\Psi_t)\| \\
&\le C\|S^{-1/2}F(f_{t+\varepsilon}-f_t)\|(\|H\Psi_{t+\varepsilon}\|+\|\Psi_{t+\varepsilon}\|)+C\|F(f_{t+\varepsilon}-f_t)\|\|\Psi_{t+\varepsilon}\| \\
&\quad +C\|S^{-1/2}F(f_t)\|(\|H(\Psi_{t+\varepsilon}-\Psi_t)\|+\|\Psi_{t+\varepsilon}-\Psi_t\|)+C\|F(f_t)\|\|\Psi_{t+\varepsilon}-\Psi_t\| \\
&= C\|S^{-1/2}F(f_{t+\varepsilon}-f_t)\|(\|H\Psi\|+\|\Psi\|)+C\|F(f_{t+\varepsilon}-f_t)\|\|\Psi\| \\
&\quad +C\|S^{-1/2}F(f_t)\|(\|H(\Psi_\varepsilon-\Psi)\|+\|\Psi_\varepsilon-\Psi\|)+C\|F(f_t)\|\|\Psi_\varepsilon-\Psi\|
\end{aligned}$$

が，適当な定数 $C>0$ に対して成り立つ。

条件 (iv) から $\|S^{-1/2}F(f_{t+\varepsilon}-f_t)\|$ $(\varepsilon\to 0)$ なのだから，
$\|\phi(f_{t+\varepsilon})\Psi_{t+\varepsilon}-\phi(f_t)\Psi_t\|\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ がいえる。こうして

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\Delta_\varepsilon\Phi,\phi(f_{t+\varepsilon})\Psi_{t+\varepsilon}\rangle=\langle -iH\Phi_t,\phi(f_t)\Psi_t\rangle\,. \tag{105}$$

条件 (iv) から $S^{-1/2}F(\Delta_\varepsilon f+iSf_t)\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ であり，これと (103) から

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\phi(\Delta_\varepsilon f)\Phi_t,\Psi_{t+\varepsilon}\rangle=-\langle\phi(iSf_t)\Phi_t,\Psi_t\rangle=-\langle\Phi_t,\phi(iSf_t)\Psi_t\rangle \tag{106}$$

が示される。以上，(102)，(105)，(106) から $X(t)$ は t について微分可能で (101) が成り立つことが示される。

条件 (96) and (97) から

$$\begin{aligned}X'(t)&=\frac{i}{\sqrt{2}}\langle\Phi_t,[H,B(f_t)+B^*(f_t)]_{\mathrm{w}}\Psi_t\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\Phi_t,(B(iSf_t)+B^*(iSf_t))\Psi_t\rangle\\&=\frac{i}{\sqrt{2}}\langle\Phi_t,(B(-Sf_t)+B^*(Sf_t))\Psi_t\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\Phi_t,(B(iSf_t)+B^*(iSf_t))\Psi_t\rangle\\&=0.\end{aligned}$$

である。こうして，すべての t で $X(t)=X(0)$ となる。つまり

$$\left\langle e^{-itH}\Phi,\phi(e^{-itS}f)e^{-itH}\Psi\right\rangle=\langle\Phi,\phi(f)\Psi\rangle$$

がすべての $f\in\mathscr{D}$, $\Psi,\Phi\in\mathrm{dom}(H)$ に対して成り立ちたつ。

このことは

$$e^{itH}\phi(f)e^{-itH}\Big|_{\mathrm{dom}(H)} = \phi(e^{itS}f)\Big|_{\mathrm{dom}(H)} \tag{107}$$

を意味する。

$\mathscr{D}_1$ は稠密だったので，$\phi(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_1)$ 上で本質的に自己共役である。
$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_1) \subset \mathrm{dom}(H)$ だから，$\mathrm{dom}(H)$ は $\phi(f)$ $(f \in \mathscr{D})$ の芯であることがわかる。

したがって，(107) の両辺の平方をとることで (98) を得る。 $\square$

定理 79 の証明のための準備：Part ２

以下のような一般的な条件を考える：

(A1) S, T は $\mathscr{H}$ 上の単射で非負な自己共役作用素。

(A2) 正定数 $c_1 > 0, c_2 > 0$ があって $c_1^2 S^2 \le T^2 \le c_2^2 S^2$.

Heinz の不等式の帰結を再度述べる：

補題 96

(A1), (A2) を仮定する。このとき，任意の $0 < p \le 1$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{dom}(S^p) = \mathrm{dom}(T^p)$ かつ $\mathrm{dom}(S^{-p}) = \mathrm{dom}(T^{-p})$,

(2) $\mathrm{dom}(T^p S^{-p}) = \mathrm{dom}(S^{-p})$ であり，$T^p S^{-p}$ は有界で $c_1^p \le \|T^p S^{-p}\| \le c_2^p$

(3) $\mathrm{dom}(T^{-p} S^p) = \mathrm{dom}(S^p)$ であり，$T^{-p} S^p$ は有界で $c_2^{-p} \le \|T^{-p} S^p\| \le c_1^{-p}$

(4) $\mathrm{dom}(S^p T^{-p}) = \mathrm{dom}(T^{-p})$ であり，$S^p T^{-p}$ は有界で $\overline{S^p T^{-p}} = \left(T^{-p} S^p\right)^*$

(5) $\mathrm{dom}(S^{-p} T^p) = \mathrm{dom}(T^p)$ であり，$S^{-p} T^p$ は有界で $\overline{S^{-p} T^p} = \left(T^p S^{-p}\right)^*$.

さらに，上の補題や Heinz の不等式から次を確認することができる：

補題 97

(A1) と *(A2)* を仮定する。このとき，作用素

$$T^{-1/2}S^{1/2}, \quad T^{1/2}S^{-1/2}, \quad S^{-1/2}T^{1/2}, \quad S^{1/2}T^{-1/2}$$

の定義域は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ を含み，そして $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ はそれらの作用素で不変である。

※ $\mathrm{dom}(S^{1/2}) = \mathrm{dom}(T^{1/2})$，$\mathrm{dom}(T^{-1/2}) = \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ に注意。

補題 98

(A1), (A2) を仮定する。$X, Y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ を

$$X := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} + \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right), \qquad Y := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} - \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right).$$

で定義すると

$$X^* = \frac{1}{2}\left(\overline{S^{1/2}T^{-1/2}} + \overline{S^{-1/2}T^{1/2}}\right), \qquad Y^* = \frac{1}{2}\left(\overline{S^{1/2}T^{-1/2}} - \overline{S^{-1/2}T^{1/2}}\right).$$

である。また X, Y, X^*, Y^* は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ を不変にする。さらに次の等式が成り立つ。

$$X^*X - Y^*Y = 1, \qquad X^*Y - Y^*X = 0,$$
$$XX^* - YY^* = 1, \qquad -XY^* + YX^* = 0.$$

証明. X, Y が有界作用素であること，及び X^*, Y^* 形は補題 96 の帰結である。定義域の不変性は補題 97 から直ちにわかる。最後の代数的関係を示す。
$f \in \mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ とする。補題 97 から，閉包を外して計算してよいので

$$\begin{aligned}(X^*X - Y^*Y)f &= \frac{1}{4}\left(S^{1/2}T^{-1}S^{1/2}f + f + f + S^{-1/2}TS^{-1/2}f\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(S^{1/2}T^{-1}S^{1/2}f - f - f + S^{-1/2}TS^{-1/2}f\right) \\ &= f.\end{aligned}$$

極限操作で定義域を拡張すれば $X^*X - Y^*Y = 1$ を得る。他の式も同様 □

次の条件を仮定する：

(A3) $\left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1$ はトレース型作用素

補題 99

(A1)–(A3) を仮定する。X, Y を補題 98 で定義されたものとする。このとき，Y は Hilbert-Schmidt 作用素である。

証明. $\{f_m\}_m$ を $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ に含まれる $\mathscr{H}$ の ONB とする。補題 97 と補題 98 から

$$4\langle f_m, Y^*Y f_m\rangle = \langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m\rangle + \langle f_m, S^{-1/2}(T - S)S^{-1/2} f_m\rangle.$$

である。Y が Hilbert-Schmidt であることを示すためには

$$\sum_m \left| \left\langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m \right\rangle \right| + \sum_m \left| \langle f_m, S^{-1/2}(T - S)S^{-1/2} f_m\rangle \right| < \infty.$$

を示せばよい。上式左辺の第 1 式を評価する。公式 $T^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}_{>0}} (T^2 + t^2)^{-1}\, dt$ から

$$\begin{aligned}
&\langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m\rangle = \langle S^{1/2} f_m, (T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}_{>0}} \langle S^{1/2} f_m, (T^2 + t^2)^{-1} S^{1/2} f_m - (S^2 + t^2)^{-1} S^{1/2} f_m\rangle\, dt
\end{aligned}$$

となる。

任意の $h \in \mathscr{H}$ に対して，定義域に注意しながら式変形する：

$$\begin{aligned}
&\langle h, (T^2+t^2)^{-1}h - (S^2+t^2)^{-1}h \rangle \\
&= \left\langle h, T(T^2+t^2)^{-1} \cdot \left\{ \left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1 \right\} \cdot T(S^2+t^2)^{-1}h \right\rangle
\end{aligned}$$

次に，仮定から $\mathscr{H}$ の ONB $\{e_n\}_n$ と実数列 $\{\lambda_n\}_n$ があって

$$\left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1 = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|.$$

とできる。また $\sum_n |\lambda_n| < \infty$ である。これを使えば，上式は

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \lambda_n \langle h, T(T^2+t^2)^{-1}e_n \rangle \langle e_n, T(S^2+t^2)^{-1}h \rangle \\
&= \sum_n \lambda_n \langle h, T(T^2+t^2)^{-1}e_n \rangle \langle S(S^2+t^2)^{-1}\overline{S^{-1}T}e_n, h \rangle.
\end{aligned}$$

以上合わせると

$$\begin{aligned}
&\left\langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2}f_m \right\rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n \lambda_n \langle S^{1/2}f_m, T(T^2+t^2)^{-1}e_n \rangle \langle S(S^2+t^2)^{-1}\overline{S^{-1}T}e_n, S^{1/2}f_m \rangle \, dt
\end{aligned}$$

Schwarz の不等式を使い

$$
\begin{aligned}
&\sum_m \left| \left\langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m \right\rangle \right| \\
&\leq \frac{2}{\pi} \sum_m \int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n \left| \lambda_n \langle S^{1/2} f_m, T(T^2+t^2)^{-1} e_n \rangle \langle S(S^2+t^2)^{-1} \overline{S^{-1}T} e_n, S^{1/2} f_m \rangle \right| dt \\
&\leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_m \int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n |\lambda_n| \cdot \left| \langle S^{1/2} f_m, T(T^2+t^2)^{-1} e_n \rangle \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\qquad \times \left(\sum_m \int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n |\lambda_n| \cdot \left| \langle S(S^2+t^2)^{-1} \overline{S^{-1}T} e_n, S^{1/2} f_m \rangle \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n |\lambda_n| \cdot \left\| S^{1/2} T^{-1/2} \cdot T^{3/2} (T^2+t^2)^{-1} e_n \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}_{>0}} \sum_n |\lambda_n| \cdot \left\| S^{3/2}(S^2+t^2)^{-1} \cdot \overline{S^{-1}T} e_n \right\|^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

任意の $h \in \mathscr{H}$ に対し，公式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_{>0}} \left\| T^{3/2}(T^2+t^2)^{-1}h \right\|^2 \, dt &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \frac{\lambda^3}{(\lambda^2+t^2)^2} \, d\|E_T(\lambda)h\|^2 \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \frac{\lambda^3}{(\lambda^2+t^2)^2} \, dt \, d\|E_T(\lambda)h\|^2 \\ &= \frac{\pi}{4}\|h\|^2\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する（$T \to S$ とした式も成立）。

したがって

$$\sum_m \left| \langle f_m, S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} f_m \rangle \right| \le \frac{1}{2}\|S^{1/2}T^{-1/2}\| \cdot \|S^{-1}T\| \sum_n |\lambda_n| < \infty.$$

同様にして

$$\sum_m \left| \left\langle f_m, S^{-1/2}(T-S)S^{-1/2} f_m \right\rangle \right| < \infty$$

も示すことができる。 $\square$

条件 (A4) を次で定義する。

(A4) $\mathscr{H}$ 上の共役子 J で $SJ = JS$ と $TJ = JT$ を満たすものが存在する。

上の補題から次の結果が直ちに示される：

定理 100

(A1)–(A4) を仮定する。補題 *98* によって定義される X と Y は $\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ であり Y は *Hilbert-Schmidt*

定理 **79** の証明のための準備：**Part 3**

ここからは定理 79 の証明に向けてより具体的な解析を行う。

まずは条件 (B1)–(B5) を仮定する。$\mathscr{H}$ 上の作用素

$$W := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{1/2} g_n\right\rangle\left\langle T^{1/2} g_n\right| .$$
$$h_{\mathrm{p}} := T^2 + W.$$

を定義する。条件から W はトレース型作用素である。

補題 101

(B1)–(B5) を仮定し，定数 $\varepsilon > 0$ を *(B5)* のものとする。このとき，作用素の不等式

$$c_1^2 h_{\mathrm{p}} \leq T^2 \leq c_2^2 h_{\mathrm{p}}$$

が成り立つ。ここに $c_1 := (1 + D_1)^{-1/2}$，$c_2 := \varepsilon^{-1/2}$ である。

証明. $v \in \mathrm{dom}(T^2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle v, h_{\mathrm{p}} v\rangle &= \left\langle v, T^2 v\right\rangle + \left\langle Tv, T^{-1} W T^{-1} T v\right\rangle \\
&\leq \left\langle v, T^2 v\right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 \|Tv\|^2 \\
&= (1 + D_1) \left\langle v, T^2 v\right\rangle ,
\end{aligned}$$

これは $c_1^2 h_{\mathrm{p}} \leq T^2$ を意味する。

(B5) から $T^{-1}WT^{-1} \geq \varepsilon - 1$ である。したがって

$$\langle v, h_{\mathrm{p}} v \rangle \geq \left\langle v, T^2 v \right\rangle + \langle Tv, (\varepsilon - 1)Tv \rangle = \left\langle v, \varepsilon T^2 v \right\rangle,$$

これは $c_2^2 h_{\mathrm{p}} \geq T^2$ を意味する。 □

上の補題から $h_p > 0$ となり

$$S := h_{\mathrm{p}}^{1/2} = \left(T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| T^{1/2} g_n \right\rangle \left\langle T^{1/2} g_n \right| \right)^{1/2}.$$

が定義できる。

補題 102

(B1)–(B6) を仮定する。このとき，S と T は条件 *(A1)–(A4)* を満たす。したがって，補題 *98* によって定義される X，Y は $\mathcal{S}(X, Y) \in \mathfrak{S}\mathfrak{p}$ であり Y は *Hilbert-Schmidt* である。

証明. $T > 0$ なので補題 101 から (A1) と (A2) が従う。条件 (B6) から $JWJ = W$ である。したがって，S も J と可換となり (A4) がしたがう。あとは (A3) を確認すればよい。$L := \left(\overline{ST^{-1}} \right)^* \left(\overline{ST^{-1}} \right) - 1$ と置こう。このとき

$$L \supset T^{-1} S^2 T^{-1} - 1 = T^{-1}(T^2 + W)T^{-1} - 1 = T^{-1}WT^{-1}\big|_{\mathrm{dom}(T) \cap \mathrm{dom}(T^{-1})}.$$

この右辺の閉包はトレース型作用素なので L もそうである。したがって，(A3) が成り立つ。 □

(B3) と (B4) から次の作用素は有界である

$$W_0 := \overline{T^{-1/2}WT^{-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, |g_n\rangle\langle g_n| \, ,$$

次の補題が後に交換関係を計算する際の鍵になる。

補題 103

(B1)–(B6) を仮定する。このとき，$X \, \mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T)$ かつ $Y \, \mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T)$ であり，$\mathrm{dom}(T)$ 上で次が成立する

$$TX = XS - \frac{1}{2} W_0 (X - Y),$$

$$TY = -YS + \frac{1}{2} W_0 (X - Y)$$

証明． $\mathrm{dom}(T^2) = \mathrm{dom}(S^2)$ であり，Heinz の不等式 (補題 96) から
$\mathrm{dom}(T^p) = \mathrm{dom}(S^p)$ がすべての $|p| \leq 1$ について成り立つ。
$v \in \mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ に対して $S^{-1/2} v \in \mathrm{dom}(S) = \mathrm{dom}(T)$ である。補題 98 から $Xv \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ である。

すべての $u \in \mathrm{dom}(T^2) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ と $v \in \mathrm{dom}(T) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ に対して

$$
\begin{aligned}
2\langle Tu, Xv\rangle &= \left\langle Tu, (T^{-1/2}S^{1/2} + T^{1/2}S^{-1/2})v \right\rangle \\
&= \left\langle T^{1/2}u, S^{1/2}v \right\rangle + \left\langle T^2 T^{-1/2}u, S^{-1/2}v \right\rangle \\
&= \left\langle T^{1/2}u, S^{1/2}v \right\rangle + \left\langle (S^2 - W)T^{-1/2}u, S^{-1/2}v \right\rangle \\
&= \left\langle u, T^{1/2}S^{-1/2}Sv \right\rangle + \left\langle S^{1/2}T^{-1/2}u, Sv \right\rangle - \left\langle WT^{-1/2}u, S^{-1/2}v \right\rangle \\
&= \left\langle u, \left(T^{1/2}S^{-1/2} + \overline{T^{-1/2}S^{1/2}}\right) Sv \right\rangle - \left\langle WT^{-1/2}u, S^{-1/2}v \right\rangle \\
&= \langle u, 2XSv\rangle - \left\langle u, W_0 T^{1/2}S^{-1/2}v \right\rangle \\
&= \langle u, 2XSv\rangle - \langle u, W_0(X - Y)v\rangle .
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{dom}(T^2) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ は T の芯なので，$Xv \in \mathrm{dom}(T)$ かつ

$$
TXv = XSv - \frac{1}{2}W_0(X - Y)v. \tag{108}
$$

が成り立つ。任意の $v \in \mathrm{dom}(T)$ に対して，列 $v_n \in \mathrm{dom}(T) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ が存在して，$v_n \to v$ かつ $Tv_n \to Tv$ $(n \to \infty)$ である。このとき，$Sv_n \to Sv$ なので，したがって，(108) から Xv_n は Cauchy 列である。こうして，$Xv_n \to Xv \in \mathrm{dom}(T)$ かつ (108) がすべての $v \in \mathrm{dom}(T)$ に対して成り立つ。同様にして $Yv \in \mathrm{dom}(T)$ であり $TYv = -YSv + (1/2)W_0(X - Y)$ となることも示される。 □

定理 79 の証明

まずは，対角化の証明をし，その後，基底状態の表示を示す。

定理 79 の証明（対角化パート）
対角化を証明するためには，定理 95 の条件 (i)–(v) を確認すればよい。そうすれば，定理 93 から H が対角化されることが示される。

次を定義する：

$$\mathscr{D}_1 := \mathrm{dom}(T).$$

このとき，$\mathscr{D}_1$ は稠密である。自己共役性（定理 78）から，$\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，$\mathrm{dom}(H)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T))$ を含む。したがって，条件 (i) が成り立つ。

補題 101 から $c_1^2 S^2 \preceq T^2 \preceq c_2^2 S^2$ となるので，$c_1^2 \left(S^{(n)}\right)^2 \preceq \left(T^{(n)}\right)^2 \preceq c_2^2 \left(S^{(n)}\right)^2$，これは $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S))$ を導く。こうして，$\mathrm{dom}(H) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$ となり (ii) が成り立つことがわかった。

次に (iii) を示す。そのためにまず

$$\mathscr{D} := \mathrm{dom}(S^2) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$$

と定義する。明らかに $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(S)$ かつ $e^{itS}\mathscr{D} = \mathscr{D}$ $(t \in \mathbb{R})$. 任意の $f \in \mathscr{D}$ に対して $f, Sf \in \mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ である。補題 98 から，X, Y は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ を不変にするので，$F(f) = Xf + JYf$ に注意すれば $F(f), F(Sf) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$。こうして (iii) が成り立つ。

次に (iv) を示す。$f \in \mathscr{D}$ に対して

$$\|S^{-1/2}X(\varepsilon^{-1}(e^{i\varepsilon S}-1)-iS)f\| \leq \|S^{-1/2}XS^{1/2}\| \cdot \|(\varepsilon^{-1}(e^{i\varepsilon S}-1)-iS)S^{-1/2}f\|.$$

$S^{-1/2}f \in \mathrm{dom}(S)$ だったので，右辺は $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束する。同様に

$$\begin{aligned}\|S^{-1/2}JY(\varepsilon^{-1}(e^{i\varepsilon S}-1)-iS)f\| &\leq \|S^{-1/2}YS^{1/2}\| \cdot \|(\varepsilon^{-1}(e^{i\varepsilon S}-1)-iS)S^{-1/2}f\| \\ &\to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)\end{aligned}$$

がいえる。したがって，(iv) が成り立つ。

最後に，残る条件 (v) を確認する。$f \in \mathscr{D}$ とする。補題 103 から $Xf, Yf \in \mathrm{dom}(T)$ がいえるので，$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ に対して

$$B(f)\Psi,\ B^*(f)\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T)) \subset \mathrm{dom}(H)$$

である。このことに注意しながら，交換子を計算し，次を示す：

$$\langle \Phi, [H, B(f)]\Psi \rangle = \langle \Phi, -B(Sf)\Psi \rangle, \qquad \Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2)).$$

まず，

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), B(f)] = [d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(Xf) + A^*(JYf)] = A(-TXf) + A^*(TJYf)$$

が $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で成り立つ。

補題 103 から

$$
\begin{aligned}
&A(-TXf) = -A(XSf) + \tfrac{1}{2}A(W_0(X-Y)f), \\
&A^*(TJYf) = A^*(TYJf) = -A^*(YSJf) + \tfrac{1}{2}A^*(W_0(X-Y)Jf)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), B(f)] = -B(Sf) + \frac{1}{2}A(W_0(X-Y)f) + \tfrac{1}{2}A^*(W_0(X-Y)Jf)
$$

が $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で成り立つ。一方，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で次のように計算できる：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n[\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2, B(f)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n[\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2, A(Xf) + A^*(JYf)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\Big(-\langle Xf, g_n\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n) + \langle g_n, JYf\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\Big(-\langle Xf, g_n\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n) + \langle Yf, Jg_n\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\langle (X-Y)f, g_n \right\rangle (A(g_n) + A^*(g_n)) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(A(\langle g_n, (X-Y)f\rangle g_n) + A^*(\langle g_n, (X-Y)Jf\rangle g_n) \Big) \\
&= -\frac{1}{2} A(W_0(X-Y)f) - \frac{1}{2} A^*(W_0(X-Y)Jf)
\end{aligned}
$$

こうして,

$$
\langle \Phi, [H, B(f)]\Psi \rangle = -\langle \Phi, B(Sf)\Psi \rangle, \qquad \Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2)).
$$

を得ることができた。同様にして

$$
\langle \Phi, [H, B^*(f)]\Psi \rangle = \langle \Phi, B^*(Sf)\Psi \rangle, \qquad \Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2)).
$$

も示せる。定義域に関する事実 (99), (100) と閉グラフ定理に注意して適当に極限を取れば簡単な極限の議論を行えば,上の 2 つの式は(交換子を弱交換子にしたいみで) $\mathrm{dom}(H)$ まで拡張できる。つまり,条件 (v) が成り立つ。

ここまでで定理 95 のすべての条件 (i)–(v) を確認することができたので,定理の結果として,定理 93 の条件が成り立つ。したがって,ある定数 E が存在して $UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$ となる。 □

補題 104

(B1)–(B6) を仮定する。このとき，任意の $-1/2 \le p, q \le 1/2$ を満たす p, q に対して $T^p(S-T)T^q$ は稠密に定義された有界作用素であり，$\overline{T^p(S-T)T^q}$ はトレース型作用素である。

証明. $p = q = 1$ の場合だけ示す。他も同様である。公式 $S = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (S^2+t^2)^{-1}t^2 dt$ を使う。$u, v \in \mathrm{dom}(T^2) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\langle u, (S-T)v\rangle| \\
&\le \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\left\langle u, ((T^2+t^2)^{-1} - (S^2+t^2)^{-1})v\right\rangle\right| t^2 dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\left\langle u, (T^2+t^2)^{-1} W (S^2+t^2)^{-1} v\right\rangle\right| t^2 dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\left\langle T^{1/2}(T^2+t^2)^{-1}u, T^{-1/2}WS^{-1/2}S^{1/2}(S^2+t^2)^{-1}v\right\rangle\right| t^2 dt \\
&\le \frac{2}{\pi}\|T^{-1/2}WS^{-1/2}\| \int_0^\infty \|T^{1/2}(T^2+t^2)^{-1}u\|\|S^{1/2}(S^2+t^2)^{-1}v\| t^2 dt \\
&\le \frac{1}{2}\|T^{-1/2}WS^{-1/2}\|\|u\|\|v\|,
\end{aligned}
$$

ここで，$\int_0^\infty \|T^{1/2}(T^2+t^2)^{-1}u\|^2 t^2 dt = (\pi/4)\|u\|^2$ を使った。

条件 (B3) と (B4) から

$$\begin{aligned}\|T^{-1/2}WS^{-1/2}\| &\le \|T^{-1/2}WT^{-1/2}\|\|T^{1/2}S^{-1/2}\| \\ &\le \|T^{1/2}S^{-1/2}\|\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\|g_n\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

こうして，まず $T^p(S-T)T^q$ が有界作用素であることがわかった。次に，この閉包がトレース型であることを示す。

任意の ONB$\{e_n\}_n, \{f_n\}_n$ に対して

$$\sum_n \left|\left\langle e_n, \overline{(S-T)}f_n\right\rangle\right| \le C \tag{109}$$

を示せばよい。ここに C は $\{e_n\}_n$ や $\{f_n\}_n$ に依存しない定数である。

上の式変形と同様に

$$\begin{aligned}&\sum_n \left|\left\langle e_n, \overline{(S-T)}f_n\right\rangle\right| \\ &\le \frac{2}{\pi}\sum_m |\lambda_m| \int_0^\infty \sum_n \left|\left\langle e_n, (T^2+t^2)^{-1}T^{1/2}g_m\right\rangle\left\langle T^{1/2}g_m, (S^2+t^2)^{-1}f_n\right\rangle\right| t^2 dt \\ &\le \frac{2}{\pi}\sum_m |\lambda_m| \int_0^\infty \|T^{+1/2}(T^2+t^2)^{-1}g_m\|\|(S^2+t^2)^{-1}T^{1/2}g_m\| t^2 dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{2}{\pi} \sum_m |\lambda_m| \left(\int_0^\infty \|T^{1/2}(T^2+t^2)^{-1} g_m\|^2 t^2 dt \right)^{1/2} \\
&\qquad \times \left(\int_0^\infty \|(S^2+t^2)^{-1} T^{1/2} g_m\|^2 t^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_m |\lambda_m| \left(\frac{\pi}{4} \|g_m\|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{4} \|S^{-1/2} T^{1/2} g_m\|^2 \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2} \|S^{-1/2} T^{1/2}\| \sum_m |\lambda_m| \|g_m\|^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

こうして，(109) が成り立つ。したがって $\overline{(S-T)}$ はトレース型作用素である。 □

定理 79 の証明（基底状態のエネルギーのパート）

最後の最後に，H の基底状態エネルギー E が

$$E = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\overline{S - T})$$

であることを示す。命題 94 から $\overline{YS^{1/2}}$ は Hilbert-Schmidt であり

$$\begin{aligned} E &= \langle \Omega, H\Omega \rangle - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &= \langle \Omega, H\Omega \rangle - \operatorname{tr}(\overline{YSY^*}) \end{aligned}$$

が成り立つ。さて，Y の定義にしたがって，$\overline{YSY^*}$ を変形しよう。
$\mathrm{dom}(T^k) = \mathrm{dom}(S^k)$ $(k = 1, 2)$ に注意すると，$\mathrm{dom}(T^2) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ 上で

$$\begin{aligned} \overline{YSY^*} = YSY^* &= \frac{1}{4}\big(T^{-1/2}S^{1/2} - T^{1/2}S^{-1/2}\big)S\big(S^{1/2}T^{-1/2} - S^{-1/2}T^{1/2}\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(T^{-1/2}S^2T^{-1/2} - T^{-1/2}ST^{1/2} - T^{1/2}ST^{-1/2} + T\big) \\ &= \frac{1}{4}\Big\{T^{-1/2}WT^{-1/2} + T^{-1/2}(T - S)T^{1/2} + T^{1/2}(T - S)T^{-1/2}\Big\} \end{aligned}$$

となる。最後の等式で $W := \sum_{n=1}^{\infty} |T^{1/2}g_n\rangle \langle T^{1/2}g_n|$ として $S^2 = T^2 + W$ となることを使った。

$\overline{T^{-1/2}WT^{-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|g_n\right\rangle \left\langle g_n\right|$ のトレースは $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2$ なので，基底状態エネルギーは

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 + \mathrm{tr}\left(\overline{T^{-1/2}(T-S)T^{1/2}} + \overline{T^{1/2}(T-S)T^{-1/2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\left(\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}\right) + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\left(\overline{T^{1/2}(S-T)T^{-1/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}\right)
\end{aligned}
$$

となる。上式の変形で $\overline{T^{\pm 1/2}(S-T)T^{\mp 1/2}}$ がトレース型であることを使っているが，それは補題 104 で保証されている。

ここで，上のトレースを

$$
\mathrm{tr}\left(T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}\right) = \mathrm{tr}\left((S-T)T^{1/2}T^{-1/2}\right) = \mathrm{tr}(S-T)
$$

と計算するのは論理的に不十分。なぜなら $T^{1/2}$ は一般には非有界作用素だから。

補題 104 で $p = 0, -1/2$ とすれば $\overline{(S-T)T^{1/2}}$ の値域は $\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ に含まれ，

$$\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}} = T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}$$

が成り立つ。なぜなら $h \in \mathscr{H}$ に対して，$h_n \in \mathrm{dom}(T^{3/2})$ で $h_n \to h$, $(S-T)T^{1/2}h_n \to \overline{(S-T)T^{1/2}}h$ となるものを取れば，$T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}h_n$ は Cauchy 列。したがって，$T^{-1/2}$ の閉性より $\overline{(S-T)T^{1/2}}h \in \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ かつ $\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}h = T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}h$ となるから。
同様に

$$\overline{T^{1/2}(S-T)} = T^{1/2}\overline{(S-T)}.$$

補題 104 より $\overline{(S-T)T^{1/2}}$ もトレース型なので，この標準形を

$$\overline{(S-T)T^{1/2}} = \sum_m \mu_m \left|e_m\right\rangle \left\langle f_m\right|$$

とする。ただし，$\mu_m > 0$，$\{e_m\}_m, \{f_m\}_m$ は ONS。ここから，

$$\overline{(S-T)T^{1/2}}f_m = \mu_m e_m, \qquad \left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^* e_m = \mu_m f_m,$$
$$(\{f_m\}_m)^\perp \subset \ker(\overline{(S-T)T^{1/2}}),$$
$$(\{e_m\}_m)^\perp \subset \ker\left(\left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^*\right) = \ker(T^{1/2}(\overline{S-T})) = \ker(\overline{S-T}).$$

以上から基底状態エネルギーを次のように変形できる：

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}} f_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2}\mu_m e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \mu_m f_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^* e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \overline{T^{1/2}(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle T^{1/2}\overline{(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{S-T}).
\end{aligned}
$$

したがって，$E = (1/2)\,\mathrm{tr}(\overline{S-T})$ である。 $\square$

練習問題

練習問題は集中講義の期間中は随時更新されると思います。

問題 105

S_n を対称化作用素とする。次を示せ

(1) $\tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して $U_\tau S_n = S_n$

(2) $S_n^2 = S_n$

(3) $S_n^* = S_n$

問題 106

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{H}$ とする。CCR を使い

$$\langle A^*(f_1)A^*(f_2)\Omega, A^*(g_1)A^*(g_2)\Omega\rangle$$

を計算せよ。

問題 107

$f_j, g_j \in \mathscr{H}$ とする。このとき

$$\langle A^*(f_1)\cdots A^*(f_n)\Omega, A^*(g_1)\cdots A^*(g_n)\Omega\rangle = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left\langle f_1, g_{\sigma(1)}\right\rangle \cdots \left\langle f_n, g_{\sigma(n)}\right\rangle$$

であることを示せ。

問題 108

$f \in \mathscr{H}$ とする。

$$\exp f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^*(f)^n}{n!}\Omega$$

をコヒーレント・ベクトルという。$g \in \mathscr{H}$ とする。

(1) $\langle \exp f, \exp g \rangle$ を計算せよ。

(2) $A(g) \exp f = \langle g, f \rangle \exp f$ を示せ。

問題 109

$z \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathscr{H}$ とする。

$$e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega$$

は $A(g)$ の固有ベクトルであることを示せ。また固有値はいくつか？

van-Hove 模型の基底状態は $e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(T^{-1}g)}\Omega$ である。これをもう少し調べよう。

問題 110

$z \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}$ とする。

$$F(z) := e^{cz^2} e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega$$

とおく。ただし，$c \in \mathbb{R}$

(1) $F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} A^*(f)F(z)$ を満たすように定数 c を定めよ。

(2) $F^{(n)}(0)$ を計算せよ。

(3) $e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega$ をコヒーレント・ベクトルの形で表示せよ。つまり $e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega = C \exp g$ となる定数 C と g を求めよ。

問題 111

$f, g \in \mathscr{H}$ とする。このとき，ある定数 c を用いて

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(g)} = c e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)}$$

となることを示せ。定数 c はいくつか？

問題 112

部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ に対して次は $*$ 代数であることを示せ：

$$\mathfrak{A} := \mathcal{L}\{e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \mid f \in \mathscr{D}\}$$

問題 113

$L^2(\mathbb{R})$ 上の運動量作用素 $p = -id/dx$ を考える。$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ に対して作用素 e^{iap} に対してテイラー展開

$$(e^{iap} f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} (p^n f)(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

が成り立たないことを示せ（ただし $a \in \mathbb{R}$)。

問題 114

$\mathscr{H}$ 上の任意の自己共役作用素 T と任意の $g \in \mathscr{H}$ に対して $\mathscr{H}$ 上の共役子 J で

$$JTJ = T, \qquad Jg = g$$

となるものが存在することを示せ。

問題 115

補題 *97* を証明せよ。ただし，非有界作用素 AB の定義域は

$$\mathrm{dom}(AB) = \{u \in \mathrm{dom}(B) \mid Bu \in \mathrm{dom}(A)\}$$

であることに注意しよう。

参考文献

順不同

1. 新井朝雄，フォック空間と量子場（上・下），日本評論社
2. A. Arai, Analysis on Fock Spaces and Mathematical Theory of Quantum Fields: An Introduction to Mathematical Analysis of Quantum Fields, World Scientific
3. M. Reed and B. Simon, I∼IV
4. P.T. Nam, M. Napiórkowskia, J.P. Solovej: Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations. J. Funct. Anal. (2016)
5. J. Dereziński: Bosonic quadratic Hamiltonians. J. Math. Phys. (2017)
6. K. Asahara, D. Funakawa: Spectral analysis of an abstract pair interaction model, Hokkaido Math. J. (2021)
7. Y. Matsuzawa, I. Sasaki and K. Usami, Explicit diagonalization of pair interaction models, Analysis and Mathematical Physics (2021)