ホモトピー群に関する基礎事項

ホモトピー群

- 位相空間 X に対し, 基点 $x_0 \in X$ を 1 つ固定する. 整数 $n \geq 1$ に対してホモトピー集合
$$\pi_n(X, x_0) := [(S^n, b), (X, x_0)]$$
を考える. ここで S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球面で, $b = (1, 0, \dots, 0)$ を基点としている.

- I^n を単位区間 $I = [0, 1]$ の n 個の直積空間とする. I^n は閉単位球体 D^n と同相である. よって I^n の境界 ∂I^n を 1 点につぶした商空間 $I^n/\partial I^n$ は球面 S^n と同相となる. ここで ∂I^n の境界については, たとえば $n = 3$ のとき
$$\partial I^3 = (\{0, 1\} \times I \times I) \cup (I \times \{0, 1\} \times I) \cup (I \times I \times \{0, 1\})$$
となるように, n 個の I のうち, どれか 1 つの成分について境界 $\partial I = \{0, 1\}$ をとり, それらの和集合をとったものとなる. 以下, 同相写像 $I^n/\partial I^n \xrightarrow{\approx} S^n$ を 1 つ固定し, この 2 つの位相空間を同一視する.

- 連続写像 $f\colon (S^n, b) \to (X, x_0)$ と連続写像 $f'\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ は同相 $I^n/\partial I^n \approx S^n$ を通じて自然に 1 対 1 に対応する (両者のホモトピーについても同様). よって,
$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$
と書くこともできる.

- I^n の標準座標を $t_1, t_2, \dots, t_n$ としたとき, 連続写像 $f, g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ に対して, 新しい連続写像 $f \cdot g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ を
$$(f \cdot g)(t_1, t_2, \dots, t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq 1/2) \\ g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & (1/2 \leq x_1 \leq 1) \end{cases}$$
で定めることができる. この操作により $\pi_n(X, x_0)$ 上に群構造を与えることができる. 単位元は x_0 への定値写像 C_{x_0} である. 群 $\pi_n(X, x_0)$ を位相空間 X の x_0 **を基点とする** n **次ホモトピー群**という. $n = 1$ のときは x_0 を基点とする基本群にほかならない.

- $n \geq 2$ のとき $\pi_n(X, x_0)$ は可換群となることが確かめられる. また, X の 2 点 x_0, x_1 が同じ弧状連結成分にあるとき, $\pi_n(X, x_0)$ と $\pi_n(X, x_1)$ は同型な群となる. ただし, 基本群の場合と同様に, その間の同型写像については x_0 と x_1 をつなぐ道の端点を固定したホモトピー類ごとに定まり, X が単連結な場合を除いて自然な同型写像は存在しない. 以上を踏まえ, X が弧状連結のとき, 群の同型類として $\pi_n(X, x_0)$ を単に $\pi_n(X)$ と書く.

- X の弧状連結成分のなす集合を $\pi_0(X)$ と記していた. 一般に, $\pi_0(X)$ に自然な群構造を定めることはできないが, 便宜上 0 次ホモトピー群と呼ぶ.

- $[f] \in \pi_n(X)$ に対して $[f] = 0$ であることは, 定義より連続写像 $f\colon S^n = \partial D^{n+1} \to X$ が連続写像 $F\colon D^{n+1} \to X$, $F|_{S^n} = f$ に拡張することにほかならない. このように, 写像の拡張の可否を代数的対象として捉えることは重要であり, この考え方は障害理論と呼ばれる理論につながる.

- 基本群やホモロジー群と同様に, $\pi_n(X)$ はホモトピー不変性や関手性をもつ. しかしながら一般には計算が難しい. たとえば 1 点和 $S^2 \vee S^1$ のホモロジー群は容易に計算できるが
$$\pi_2(S^2 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \quad \text{(可算無限個の直和)}$$
となっており, その振る舞いは複雑である.

相対ホモトピー群とホモトピー完全列

- I^{n-1} は t_n 座標を 0 とすることで I^n の部分空間とみなすことができる. このとき $I^{n-1} \subset \partial I^n$ であり $J^{n-1} := \overline{\partial I^n - I^{n-1}}$ とおく.

- 位相空間対 (X, A) に対し, 基点 $x_0 \in A \subset X$ を 1 つ固定する. 整数 $n \geq 1$ に対してホモトピー集合
$$\pi_n(X, A, x_0) := \big[(I^n; I^{n-1}, J^{n-1}), (X; A, x_0)\big]$$
を考えると, $\pi_n(X, x_0)$ のときと同様にして, $n \geq 2$ のときに群構造を定めることができる. さらに $n \geq 3$ のときは可換群となる. この群 $\pi_n(X, A, x_0)$ を (X, A) の x_0 **を基点とする** n **次相対ホモトピー群**という.

- 一般に, $\pi_1(X, A, x_0)$ に自然な群構造を定めることはできないが, 便宜上 1 次相対ホモトピー群と呼ぶ. また, $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ が成り立つ.

- 以下のような**ホモトピー完全列**と呼ばれる完全列が存在する:
$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)\end{aligned}$$
ここで $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ は包含写像から誘導される準同型写像, $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ は $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ に対し, そのまま $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ を対応させる準同型写像, $\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ は $[g] \in \pi_n(X, A, x_0)$ に対して $[g|_{I^{n-1}}] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ を対応させる準同型写像である. ただし, $\pi_1(X, A, x_0)$ 以降は群ではないため, 写像の像や逆像などを使って, 完全性の意味を適宜修正する必要がある (詳しくは割愛).

ファイバーバンドルのホモトピー完全列

- F-バンドル $\xi = (F \to E \xrightarrow{p} B)$ と基点 $x_0 \in F \subset E$ に対して

  $$\pi_n(E, F, x_0) \cong \pi_n(B, p(x_0))$$

  が成り立つ. よって空間対 (E, F) に対するホモトピー完全列の $\pi_n(E, F, x_0)$ の部分を置き換えることにより, ファイバーバンドル ξ に対するホモトピー完全列

  $$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, p(x_0)) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, p(x_0)) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E)\end{aligned}$$

  が得られる. ここで準同型写像 $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, p(x_0))$ は p が誘導する準同型写像で与えられる.

- 被覆写像 $p\colon E \to B$ に対してホモトピー完全列を適用すると, ファイバー F は離散空間であるから $n \geq 1$ に対して $\pi_n(F, x_0) = 0$ である. これより $n \geq 2$ のとき $\pi_*\colon \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, p(x_0))$ は同型写像となることが従う.

- 被覆写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi t\sqrt{-1}}$ を考えれば,

  $$\pi_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases}$$

  となることが従う. 一方 S^2 に対してさえ, 現在に至ってもホモトピー群の完全決定には至っていない.

Hurewicz の定理

- 空間対 (X, A) とその基点 $x_0 \in A \subset X$ が与えられたとき, 整数 $n \geq 2$ に対して **Hurewicz 準同型写像**と呼ばれる準同型写像

  $$h_*\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A), \qquad [f] \longmapsto f_*([D^n, S^{n-1}])$$

  が定まる. ここで $[D^n, S^{n-1}] \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ は D^n の向きから定まる生成元である. なお, $A = \{x_0\}$ のときは $n \geq 1$ で考えることができ, さらに X が弧状連結であれば, $h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ は基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の可換化を与える準同型写像となる.

- ホモトピー群とホモロジー群をつなぐ定理として, 次の **Hurewicz の定理**は, 理論上, 応用上ともに重要である:

定理 (Hurewicz)　空間対 (X, A) において A も X も単連結であるとする. このとき, 2 次における Hurewicz 準同型写像

$$h_*\colon \pi_2(X, A) \longrightarrow H_2(X, A)$$

は同型写像である. さらに $n \geq 3$ について

$$\pi_2(X, A) \cong \pi_3(X, A) \cong \cdots \cong \pi_{n-1}(X, A) \cong 0$$

となるための必要十分条件は

$$H_2(X, A) \cong H_3(X, A) \cong \cdots \cong H_{n-1}(X, A) \cong 0$$

となることであり, これが成り立つとき, n 次における Hurewicz 準同型写像

$$h_*\colon \pi_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$$

は同型写像である.

この定理を大雑把にいうと「A も X も単連結のとき, 次数の低いところから見ていったとき, 最初に現れる非自明なホモトピー群とホモロジー群は同じであり, それらは Hurewicz 準同型写像を通じて対応する」ということである.

- $n \geq 2$ とし, 球面 S^n について Hurewicz の定理を適用すると, $1 \leq i \leq n-1$ に対して $\pi_i(S^n) = 0$ であり, また $\pi_n(S^n) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ となることが確かめられる (Hurewicz の定理の証明において胞体近似定理などを用いることもあり, 循環論法に陥らないように注意する).

- Hopf ファイブレーション $(S^1 \to S^3 \xrightarrow{p} S^2)$ にホモトピー完全列を適用し, $\pi_n(S^1)$ の計算結果と合わせれば, $n \geq 3$ に対して $p\colon \pi_n(S^3) \xrightarrow{\cong} \pi_n(S^2)$ となることが従う. とくに $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ という非自明な結果が得られる. その生成元は Hopf ファイブレーションの射影 $p\colon S^3 \to S^2$ で与えられる.

- 以上の結果を組み合わせると, 先に述べた同型

$$\pi_2(S^2 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots$$

を示すことができる. 証明を試みよ (レポート問題としてよい).

以上.