分裂原理について

複素ベクトルバンドルの特性類に関しては, 以下の**分裂原理**と呼ばれる手法がしばしば有用である.

定理 Hausdorff 空間 B 上の階数 n の複素ベクトルバンドル

$$\xi = (\mathbb{C}^n \longrightarrow E \xrightarrow{p} B)$$

に対し, パラコンパクト空間 X からの連続写像

$$f\colon X \longrightarrow B$$

であって, 次の (1), (2) を満たすものが存在する:

(1) X 上の複素直線バンドルたち $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ であって

$$f^*\xi \cong \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n$$

となるものが存在する.

(2) コホモロジーの間の準同型写像 $f^*\colon H^*(B) \to H^*(X)$ が単射である.

定理の (1) の性質より, 引き戻したベクトルバンドル $f^*\xi$ の全 Chern 類は Whitney 和の公式より

$$\begin{aligned} f^*(c(\xi)) &= c(f^*\xi) = c(\ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n) \\ &= (1 + c_1(\ell_1)) \cup (1 + c_1(\ell_2)) \cup \cdots \cup (1 + c_1(\ell_n)) \end{aligned}$$

となる. いま $c_1(\ell_i) \in H^2(X)$ たちはカップ積に関して可換なので, 通常の多項式のように積を扱うことができる. そのため $\cup$ の記号を省略して積を表すことにすると, 上の式より

$$c_i(\ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n) = \sigma_i(c_1(\ell_1), c_1(\ell_2), \ldots, c_1(\ell_n))$$

が成り立つ. ここで $\sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は n 変数の第 i 基本対称多項式 σ_i であり,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

で与えられるものである.

定理の (2) を考えると, 次の**分裂原理 (splitting principle)** と呼ばれる手法が成り立つ:

複素ベクトルバンドルの特性類に関する恒等式 (与えられた特性類を Chern 類たちの多項式で表すなど) を示す際に, 考えるベクトルバンドルは直線バンドルの Whitney 和であると仮定してよい.

コホモロジー類と対称多項式の関係は Grassmann 多様体における自然な胞体分割 (Schubert 分割) と交叉数の関係などの観点からも重要なものである.

定理の証明の概略を述べる. ξ の全空間 E から 0-切断の像を除いた部分空間を E_0 とすると, $(\mathbb{C}^n - \{\boldsymbol{o}\})$-バンドル

$$\mathbb{C}^n - \{\boldsymbol{o}\} \longrightarrow E_0 \xrightarrow{p|_{E_0}} B$$

が得られる. このバンドルの各ファイバーを射影化することで複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ をファイバーとするバンドル

$$\mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow P(E) \xrightarrow{q} B$$

が得られる. ここで q は p から自然に誘導される写像である. 複素ベクトルバンドル ξ の引き戻し $q^*\xi$ を考えると, その全空間

$$q^*E = \{(\ell_x, v) \in P(E) \times E \mid q(\ell_x) = p(v) = x \in B\}$$

の中に部分複素直線バンドル

$$S := \{(\ell_x, v) \in P(E) \times E \mid v \in \ell_x\}$$

を見出すことができる. これより

$$q^*E \cong S \oplus (q^*E/S)$$

と $q^*\xi$ を Whitney 和の形に分解することができる. コホモロジーの間の準同型写像

$$q^*\colon H^*(B) \to H^*(P(E))$$

については Leray-Hirsch の定理 (講義では説明していない) を用いると

$$H^*(P(E)) \cong H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{C}P^{n-1})$$

となっており, この同型を通じて, 任意の $a \in H^*(B)$ に対して

$$q^*(a) = a \otimes 1 \in H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{C}P^{n-1})$$

となることから単射であることが従う. 以下, この構成を続けると, 求める位相空間 X と連続写像 $f\colon X \to B$ が得られる.

注意　同様の構成を実ベクトルバンドルに対して行うことで, Stiefel-Whitney 類に関する分裂原理を得ることができる.