代数学 XC・代数構造論 II　レポート問題

問 1. n が素数の冪ではない 2 以上の整数ならば，射影的な $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 加群で自由加群でないものが存在することを示せ．

問 2. n が素数の冪ならば，射影的な $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 加群はすべて自由加群であることを示せ．

問 3. p を素数とする．$f\colon M_1 \to M_2$, $g\colon M_2 \to M_3$ を $g \circ f = 0$ をみたす加群の準同型とし，p 倍写像 $M_i \to M_i; x \mapsto px$ $(i = 1, 2, 3)$ は単射であるとする．このとき，次は同値であることを示せ．f_n, g_n は f, g より自然に誘導される準同型とする．
(i) ある正の整数 $n \geq 1$ に対し，$0 \to M_1/p^n M_1 \xrightarrow{f_n} M_2/p^n M_2 \xrightarrow{g_n} M_3/p^n M_3 \to 0$ は完全．
(ii) 任意の正整数 $n \geq 1$ に対し，$0 \to M_1/p^n M_1 \xrightarrow{f_n} M_2/p^n M_2 \xrightarrow{g_n} M_3/p^n M_3 \to 0$ は完全．

問 4. n を 2 以上の整数とし，$R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ とおく．
(1) R 加群 M が単射的であるためには，次の条件が成り立つことが必要十分であることを示せ．
「$\forall a \in M\backslash\{0\}, \exists b \in M, \exists m|n$ s.t. a の位数は $\dfrac{n}{m}$，かつ $a = mb$.」
(2) m, l を n の約数とする．$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ の R 加群としての単射的分解を用いて，$\mathrm{Ext}^i_R(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ を計算せよ．

問 5. $R = \mathbf{C}[X, Y]$ とおく．
(1) $\mathrm{Ext}^i_R(R/(X, Y), R)$ を計算せよ．
(2) $\mathbf{C}(X, Y)$, $\mathbf{C}(X, Y)/\mathbf{C}[X, Y]$ は単射的 R 加群か？

問 6. p を素数とする．環 $\mathbf{Z}[X]$ のイデアル (p, X) は $\mathbf{Z}[X]$ 加群として平坦か？

問 7. A を可換環とし，B を可換な A 代数とする．d を正の整数とし，A 加群 M が $\mathrm{Tor}^A_n(B, M) = 0$ $(0 < \forall n \leq d)$ をみたすとする．このとき，任意の B 加群 N に対して，次の同型があることを示せ．$\mathrm{Ext}^m_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Ext}^m_A(M, N)$ $(0 \leq m \leq d)$

問 8. $L_\bullet$ を有限生成自由加群からなる鎖複体であるとする．($L_n = 0$ $(n < 0)$ は仮定しない．) 素数 p と整数 n に対し，$r_{n,p} = \dim_{\mathbf{F}_p} H_n(L_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p)$ とおく．このとき次は同値であることを示せ．
(i) すべての n に対し，$r_{n,p}$ は p によらない．
(ii) すべての n に対し，$H_n(L_\bullet)$ は自由加群．

問 9. 圏 $\mathcal{C}$ を次のように定義する．
対象：加群 M_0, M_1 とその間の準同型 $f_i\colon M_0 \to M_1$ $(i = 0, 1)$ の組 $\mathscr{M} = (M_0, M_1, f_0, f_1)$.
射：対象 $\mathscr{M} = (M_0, M_1, f_0, f_1)$ から対象 $\mathscr{M}' = (M_0', M_1', f_0', f_1')$ への射は，加群の準同型 $\varphi_i\colon M_i \to M_i'$ $(i = 0, 1)$ の組 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ で $\varphi_1 \circ f_j = f_j' \circ \varphi_0$ $(j = 0, 1)$ をみたすもの．
(1) $\mathcal{C}$ はアーベル圏であることを示せ．
(2) 加群 N に対して，圏 $\mathcal{C}$ の対象 $r_0(N)$, $r_1(N)$ を次のように定める．$r_0(N) = (N, 0, 0, 0)$, $r_1(N) = (N \oplus N, N, \mathrm{pr}_0, \mathrm{pr}_1)$. ただし $\mathrm{pr}_0(a, b) = a$, $\mathrm{pr}_1(a, b) = b$ $(a, b \in N)$ とする．このとき，圏 $\mathcal{C}$ の対象 $\mathscr{M} = (M_0, M_1, f_0, f_1)$ に対し，次の自然な同型があることを示せ．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathscr{M}, r_0(N)) \cong \mathrm{Hom}(M_0, N), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathscr{M}, r_1(N)) \cong \mathrm{Hom}(M_1, N)$$

(3) 圏 $\mathcal{C}$ は十分多くの単射的対象をもつことを示せ．
(4) 圏 $\mathcal{C}$ から加群の圏 $\mathcal{A}b$ への関手 F を $F(\mathscr{M}) = \{m \in M_0 | f_0(m) = f_1(m)\}$ で定義する．関手 F の右導来関手を R^iF $(i \in \mathbf{Z}, i \geq 0)$ とする．$R^1F(\mathscr{M}) = \mathrm{Cok}(f_0 - f_1)$, $R^iF = 0$ $(i \geq 2)$ を示せ．

問 10. $\mathcal{A}$ を十分多くの単射的対象をもつアーベル圏とし，次数が負の成分が 0 の $\mathcal{A}$ における複体 $K^\bullet$, $K^n = 0$ $(\forall n < 0)$ 全体のなすアーベル圏を $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ とする．
(1) 非負整数 n に対して，関手 $e_n^*\colon C^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}; K^\bullet \mapsto K^n$ の右随伴関手を求めよ．
(2) $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ は十分多くの単射的対象を持つことを示せ．
(3) 左完全関手 $H^0\colon C^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}; K^\bullet \mapsto H^0(K^\bullet)$ の右導来関手は $H^n\colon C^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}; K^\bullet \mapsto H^n(K^\bullet)$ $(n \in \mathbf{N})$ で与えられることを示せ．

問 11. アーベル群全体のなす圏 $\mathcal{A}b$ では直積は右完全列を保つ．すなわち，アーベル群の完全列の族 $L_\lambda \to M_\lambda \to N_\lambda \to 0$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して，$\prod_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \to 0$ は完全列である．直積が存在するアーベル圏において，一般にこの主張は成り立たない．成り立たないアーベル圏の例を一つ挙げ，成り立たないことの証明を与えよ．

問 12. 射の核と余核が存在する加法圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ における射 $f\colon A \to B$ で，f より誘導される射 $\mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im} f$ が epimorphism でない，すなわち $\mathcal{C}$ における相異なる二つの射 $g_1, g_2\colon \mathrm{Im} f \to C$ で $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ となるものが存在する例を一つ挙げよ．

2023.7.13　辻　雄