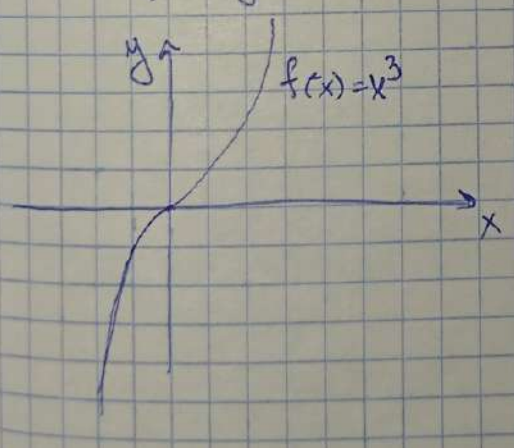
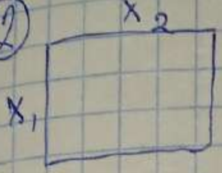
2 - задание к П-2 Петренко В. ИС-Б17

(1) Теорема Ферма: пусть ф-я f определена на интервале (a,b) и в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$ принимает наибольшее/наименьшее значение на этом интервале. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Однако в случае с кубической параболой $f(x)=x^3$ в точке $x=0$ $f'(x)=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума.



(2)



$S_{max} = x_1 \cdot x_2$

$P = 2(x_1 + x_2)$, $p = x_1 + x_2$

Ф-я Лагранжа: $L(x, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - p) \xrightarrow[max]{}$

$\frac{dL}{dx_1} = x_2 + \lambda = 0 \qquad x_2 = -\lambda$

$\frac{dL}{dx_2} = x_1 + \lambda = 0 \qquad x_1 = -\lambda$

$\frac{dL}{d\lambda} = x_1 + p_2 - p = 0 \qquad x_1 + x_2 = p \qquad -2\lambda = p \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{p}{2}$

$x_1 = x_2 = -\lambda = \frac{p}{2}$ - ответ

(3) 3.1

$A(2;5)$

$y = 3x + 4$

$3x + 4 - y = 0$

Ф-я Лагранжа: $L(x, \lambda) = (x-2)^2 + (y-5)^2 + \lambda(3x + 4 - y)$

$\frac{dL}{dx_1} = 2x - 4 + 2\lambda = 0 \qquad x = \frac{4 - 3 \cdot \lambda}{2}$

$\frac{dL}{dy} = 2y - 10 - \lambda = 0 \qquad y = \frac{\lambda + 10}{2}$

$3x - y + 4 = 0 \qquad \frac{3}{2}(4 - 3\lambda) - \frac{1}{2}(\lambda + 10) + 4 = 0$

$$\frac{12-9\lambda-\lambda-10}{2}=-4$$

$$1-5\lambda=-4$$

$$\lambda=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{11}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$$

Расстояние: $d=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(5-\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

3.2

$A(2;5)$

$y=-2x+9$

$y+2x-9=0$

$L(x,\lambda)=(x-2)^2+(y-5)^2+\lambda(y+2x-9)$

$\frac{dL}{dx}=2x-4+2\lambda=0 \quad x=2-\lambda$

$\frac{dL}{dy}=2y-10+\lambda=0 \quad y=5-\frac{\lambda}{2}$

$y+2x-9=0 \quad 5-\frac{\lambda}{2}+4-2\lambda-9=0$

$-\frac{5\lambda}{2}=0 \quad \lambda=0 \quad B(2;5)$

Расстояние $d = 0$.

(4) $A(7;8)$

$O(1;2)$

$r = 1$

Ур-ние окружности:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

$L(x,\lambda) = (x-7)^2 + (y-8)^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1))$

$\frac{dL}{dx} = 2x - 14 + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \qquad x = \frac{\lambda+7}{\lambda+1}$

$\frac{dL}{dy} = 2y - 16 + 2\lambda y - 4\lambda = 0 \qquad y = \frac{8+2\lambda}{\lambda+1}$

$\left(\frac{\lambda+7}{\lambda+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{2\lambda+8}{\lambda+1} - 2\right)^2 = 1$

$\frac{\lambda^2 + 14\lambda + 49}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} - \frac{2\lambda + 14}{\lambda+1} + 1 + \frac{4\lambda^2 + 32\lambda + 64}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} -$

$- \frac{8\lambda + 32}{\lambda+1} + 4 - 1 = 0$

$\frac{5\lambda^2 + 46\lambda + 113}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} - \frac{10\lambda + 46}{\lambda+1} + 4 = 0$

$$\frac{5\lambda^2 + 46\lambda + 113 - 10\lambda^2 - 56\lambda - 46 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} = 0$$

$$\frac{-\lambda^2 - 2\lambda + 71}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} = 0$$

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 71 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 71 = 288$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{288}}{-2} = -1 \pm \sqrt{\frac{288}{4}} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2} = -1 \pm 6\sqrt{2} \approx -1 \pm 6 \cdot 1{,}4 = 7{,}4; -9{,}4$$

$$x_1 = \frac{7{,}4 + 7}{7{,}4 + 1} = \frac{14{,}4}{8{,}4} = 1{,}7$$

$$x_2 = \frac{-9{,}4 + 7}{-9{,}4 + 1} = \frac{-2{,}4}{-8{,}4} = 0{,}3$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 7{,}4 + 8}{7{,}4 + 1} = \frac{14{,}8 + 8}{8{,}4 \cancel{+1}} = 2{,}7$$

$$y_2 = \frac{-2 \cdot 9{,}4 + 8}{-9{,}4 + 1} = \frac{-18{,}8 + 8}{-8{,}4} = 1{,}3$$

Расстояние $d = \sqrt{(7 - 1{,}7)^2 + (8 - 2{,}7)^2} \approx \sqrt{56}$

5. Ур-ние эллипса: $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$

Аналогично с предыдущими задачами считается и находится ответ.