МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Обнинский институт атомной энергетики
Отделение интеллектуальных кибернетических систем

Лабораторная работа №3
Вариант №2.

Выполнила студентка
Группы ИС-Б17
Отделения ИКС
Петренко В. Ю.
Проверила:
профессор, д.т.н. Гулина О. М.

Обнинск, 2020

1. Интеграл

Точное значение интеграла: $I=\int_{-1}^{1}(x^4)\,dx=\frac{(x^5)}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$;

Метод существенной выборки: $f_\xi(x)\sim|g(x)|$;

1) Выберем плотность распределения: $f_\xi(x)\sim(x)^2$;

$$\int_{-1}^{1}f_\xi(x)\,dx=1,\ \int_{-1}^{1}c(x)^2\,dx=c\frac{(x)^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}c\Rightarrow c=\frac{3}{2};$$

$$f_\xi(x)=\frac{3}{2}(x)^2;$$

$$\int_a^{\xi}f_\xi(x)\,dx=\gamma\Rightarrow\frac{3}{2}\int_{-1}^{\xi}(x)^2\,dx=\gamma\Rightarrow\xi=\sqrt[3]{\gamma}$$

Интеграл вычисляется по формуле:

$$I=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta(\xi_i);\ \eta(\xi)=\frac{g(\xi)}{f(\xi)};\ I\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{g(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\xi^4)}{\frac{3}{2}(\xi)^2}=\frac{2}{3N}\sum_{i=1}^{N}\xi^2$$

Мат. ожидание вычисляется по формуле:

$$M=\int_a^b\eta(\xi)*f(\xi)\,dx$$

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D\eta=M(\eta^2)-(M(\eta))^2=\int_a^b\eta^2(x)*f_\xi(x)\,dx-I^2=s^2;$$

$$D\eta=\frac{4}{9N}\sum_{i=1}^{N}\xi^4-I^2$$

Ошибка приближения не должна превышать $E=\sqrt{\frac{D\eta}{N}}$

Согласно методу существенной выборки это выражение будет минимальным тогда, когда пропорциональна $g(x)$.

При плотности распределения $f_\xi(x)=1$:

$\xi=\gamma$ $\qquad I\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^4=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^4$ $\qquad D=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2-I^2$

2) Выберем плотность распределения: $f_\xi(x)=const$

Найдем $f_\xi(x)$ из условия нормировки:

$$f_\xi(x)=\int_{-1}^{1}c\,dx=cx|_{-1}^{1}=2c\equiv1\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$F_\xi(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi}dx=\frac{1}{2}x|_{-1}^{\xi}=\frac{1}{2}\xi\equiv\gamma\Leftrightarrow\xi=2\gamma-1$$

Тогда формула для вычисления интеграла будет иметь вид:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1}\times1\times dx\approx M\eta(\xi_i)=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2=\overline{I},$$

Оценку дисперсии получим по формуле:

$$D\eta(\xi_i)=M\eta^2(\xi)-(M\eta(\xi_i))^2=\frac{4}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^4-\overline{I}^2$$

Оценить погрешность вычислений для обоих случаев можно по формуле:

$$P\left\{|M_1-I|<t_{m-1,\beta}\sqrt{s^2/(m-1)}\right\}\approx\beta$$

2. Алгоритм

```
#python 3.6
from math import *
k=500 #число элементов
r=0#кол-во интервалов
p=0#теоретическая вероятность попадания в каждый интервал
array=[] #массив псевдослучайных чисел
newarray=[]#новый массив
secarray=[]
l_aper=0 #длина апериодичности
l_per=0 #длина периода
p_i =[] #количество попаданий в каждый интервал
X2=0 #хи-вквадрат

def fraction(x):
    # функция для расчета дробной части
    return x - int(x)

def fillArray():
    print(k)
    # функция для заполнения массива
    y0=0.45864863#float(input("Введите гамма-нулевое: "))
    accrs=8#int(input("Введите количество знаков после запятой: "))
    for i in range(k):
        array.append(y0)
```

```
        y0=(10 ** -accrs)*int((10 ** accrs)*fraction(float(((1-y0) **
3)*(10 ** accrs)))) #метод середины квадратов
    print("Массив заполнен псевдослучайными числами.")
    for i in range (k):
        newarray.append(((array[i]))**(1/3))#новый массив для
первого интеграла
    for i in range (k):
        secarray.append(2*array[i]-1)#новый массив для второго
интеграла

def calc_pi():
    print("Рассчет количества попаданий в каждый интервал.")
    global r, p
    r = int((1 + 3.3 * log10(k)))
    p = float((1 / r))
    print("Число интервалов", r)
    for i in range(r):
        #обнуляем p_i
        p_i.append(0)
    #print("Распределение по интервалам:")
    for i in range(k):
        for j in range(k):
            if (array[j]>(i*p) and array[j]<((i+1)*p)):
                p_i[i]+=1
    #for i in range(r):
    #    print(p_i[i], end = ', ')

def calcI1():
    I1=0#вычисление интеграла по плотности x^2
    for i in range (k):
        I1+=newarray[i]**2
    I1=I1*2/(3*k)#M1
    print("I1=", I1)
    D1=0#дисперсия 1
    d=0
    for i in range (k):
        d+=newarray[i]**4
    D1=d*4/(9*k)-I1**2
    print("D1=", D1)
    E1=2 * ((D1 / k) ** 0.5)
    print("E1=", E1)
```

```
def calcI2():
    I2=0#вычисление интеграла по плотности 1/2
    for i in range (k):
        I2+=secarray[i]**4
    I2=I2*2/k#M2
    print("I2=", I2)
    D2=0#дисперсия 2
    d=0
    for i in range (k):
        d+=secarray[i]**8
    D2=d*4/k-I2**2
    print("D2=", D2)
    E2=2 * ((D2 / k) ** 0.5)
    print("E2=", E2)

def show():
    n=30#int(input("Вывести последовательность до: "))
    if n>k:
        n=k
    for i in range(n):
        print(array[i], end = ', ')

fillArray()
calc_pi()
calcI1()
calcI2()
```

3. Результаты

Для интеграла I_1 использовалась плотность распределение $f_\xi(x) \sim (x)^2$, для I_2 $f_\xi(x) = \frac{1}{2}$.

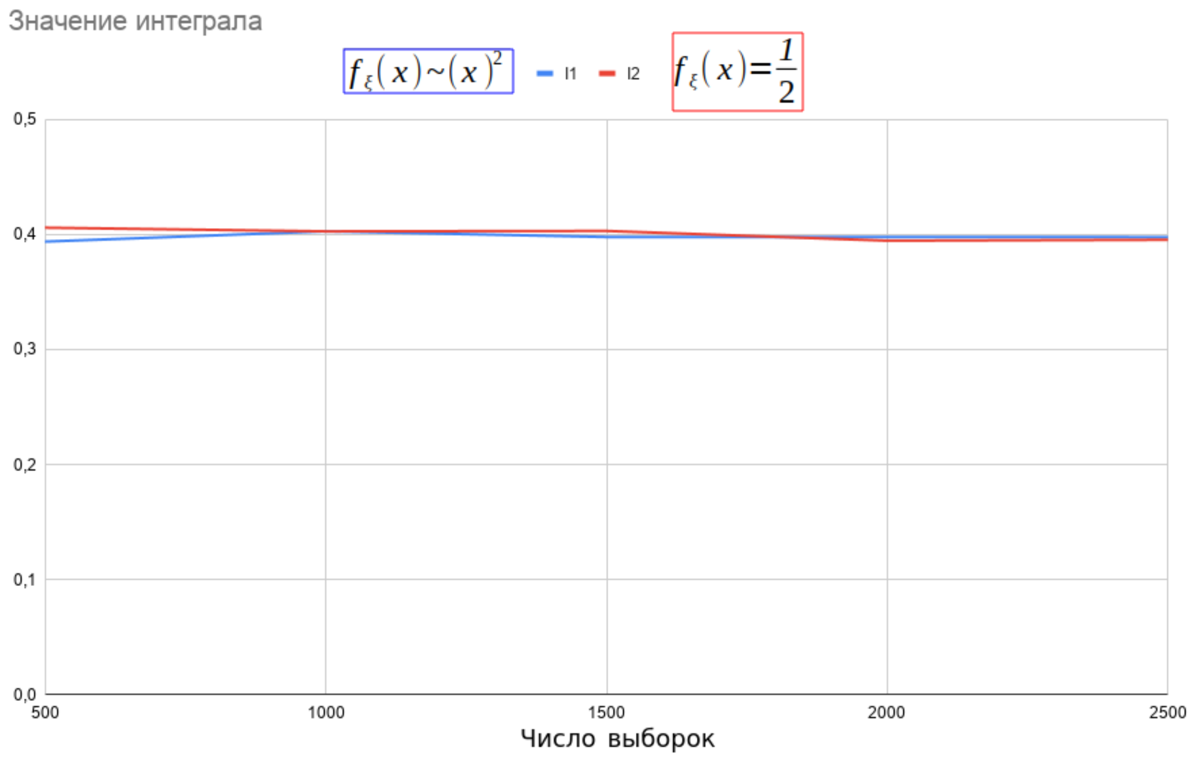
Гамма нулевое 0.45864863, k=8.

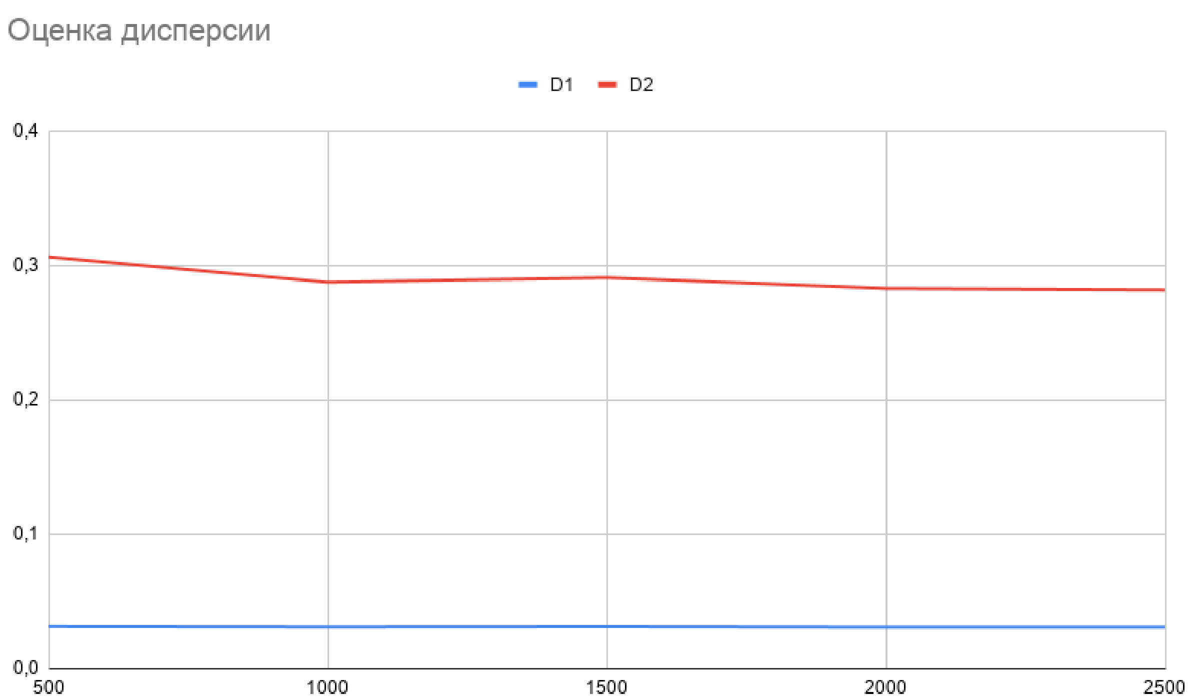
D-дисперсия, E-ошибка.

Число выборок: 500
I1= 0.3936434681646958
D1= 0.030878033715150632
E1= 0.015717005749226062
I2= 0.4057511046646143
D2= 0.30633416527051094

E2= 0.04950427579678434
Число выборок:1000
I1= 0.40260731491300594
D1= 0.030513771382293498
E1= 0.011047854340512187
I2= 0.40257387565032343
D2= 0.2875126076004208
E2= 0.03391239346318221
Число выборок:1500
I1= 0.3976595260807873
D1= 0.030776935050491006
E1= 0.00905935024167348
I2= 0.4029317806762147
D2= 0.290899148588388
E2= 0.02785194899647721
Число выборок:2000
I1= 0.39767905831727596
D1= 0.030335436305691937
E1= 0.00778915095574504
I2= 0.39444097541803225
D2= 0.2829237499416489
E2= 0.023787549261815474
Число выборок:2500
I1= 0.39752265339566245
D1= 0.03028816702891654
E1= 0.006961398368594234
I2= 0.39522744104415175
D2= 0.2817862448830203
E2= 0.02123341686617659

объем выборки	500	1000	1500	2000	2500
I1	0,3936434682	0,4026073149	0,3976595261	0,3976790583	0,3975226534
I2	0,4057511047	0,4025738757	0,4029317807	0,3944409754	0,395227441


Значение интеграла
$f_\xi(x) \sim (x)^2$
I1
I2
$f_\xi(x) = \frac{1}{2}$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
500
1000
1500
2000
2500
Число выборок


Оценка дисперсии
D1
D2
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
500
1000
1500
2000
2500

4. Выводы: В лабораторной работе был вычислен приближенно интеграл вида $I = \int_a^b g(x)dx$, где функция $g(x)$ задана на интервале a<x<b с произвольной плотностью распределения $f_\xi(x)$, определенной на интервале (a,b) и удовлетворяющей условиям $f_\xi(x) > 0$ и $\int_a^b f_\xi(x)dx = 1$.

   Погрешность в вычислении интеграла находится в пределах допустимой.
   Значение интеграла, рассчитанное по заданной плотности, ближе к теоретическому значению, чем значение, полученное для равномерного распределения, хотя оба способа показали результат, близкий к теоретическому.