1 2  9 0 UNIVERSIDADE D COIMBRA

Trabalho prático Nº 1

Entropia, redundância e informação mútua

Trabalho realizado por:

- Pedro Afonso Ferreira Lopes Martins n.º 2019216826
- João Carlos Borges Silva n.º 2019216753

Índice

Introdução:

Este trabalho consiste na utilização de Python e de diversas bibliotecas do mesmo (Ex: matplotlib, numpy, sounddevice) para realizar uma introdução à cadeira da Teoria da Informação e assim solidificar conhecimentos necessários para o nosso futuro.

Recorrendo às bibliotecas acima mencionadas conseguimos realizar o estudo e tratamento de dados de diversos ficheiros de texto, imagem e som, usando o conceito da entropia (limite mínimo teórico para o número médio de bits por símbolo), a qual pode ser obtida através da seguinte fórmula:

$$H(K) = -\sum_{i}^{n} P(K_i) \log_2 P(K_i)$$

Onde:

- K_i é um símbolo do alfabeto a analisar.
- $H(K)$ é a entropia que queremos calcular.
- n é o tamanho do nosso alfabeto.
- $P(K_i)$ é a probabilidade de num dado alfabeto, o símbolo aparecer.

Ao longo do trabalho também recorremos à codificação de Huffman e ao agrupamento de símbolos 2 a 2 de forma a estudar e a comparar os ganhos ou perdas relativamente à entropia e incerteza.

Por fim, também trabalhámos com a informação mútua de forma a estudar e a comparar a variação da mesma entre vários ficheiros de som.

Exercício 1:

Neste exercício iremos proceder à criação de uma função com o intuito de, dada uma fonte de informação (iremos proceder aos testes no exercício 3), cujos símbolos pertencem a um alfabeto A={a1,…,an}, criar um histograma de ocorrências para cada um dos seus símbolos.

```
def histograma(fonte, alfabeto):
    Ocorr=ocorrencias(fonte, alfabeto)
    y=np.arange(len(alfabeto))

    plt.bar(y, Ocorr, align='center', color='orange')
    plt.xticks(y, alfabeto)
    plt.xlabel('Alfabeto')
    plt.ylabel('Ocorrencias')
    plt.title('Sinal')
    plt.show()
```

A função acima é responsável pela criação do histograma. Recebe uma fonte de símbolos e o respetivo alfabeto, recorrendo ao numpy para organizar o nosso alfabeto e ao matplotlib para criar o histograma. Também criámos uma função **ocorrências**, apresentada abaixo.

```
def ocorrencias(fonte, alfabeto):
    nrOcor = [0] * len(alfabeto)
    f=fonte.tolist()

    for i in range(len(alfabeto)):
        nrOcor[i]=f.count(alfabeto[i])

    return nrOcor
```

Esta função recebe a nossa fonte e o respetivo alfabeto e devolve uma lista com o número de vezes que um símbolo aparece na fonte.

Exercício 2:

Neste exercício vamos criar uma função cujo objetivo é o cálculo da entropia de uma fonte.

```
def entropia(fonte):
    H=0
    Alfabeto, Ocorr= np.unique(fonte, axis=0,return_counts=True)
    for i in range(len(Ocorr)):
        if(Ocorr[i]!=0):
            probabilidade=Ocorr[i]/len(fonte)
            H+=probabilidade*math.log2(probabilidade)

    return round(-H,3)
```

A função **entropia** recebe como parâmetros a fonte de informação. Depois irá recorrer ao np.unique para obter a lista de ocorrências de cada símbolo diferente na fonte e o seu respetivo alfabeto (colocando o parâmetro return_counts = True) e por fim irá realizar um ciclo para calcular a probabilidade e, usando a fórmula citada na introdução, descobrir a entropia. O valor final de H é negativo logo, quando fazemos o retorno do resultado, usamos -H para passar a entropia para um valor positivo e arredondamos o valor final a 3 casas decimais.

Exercício 3:

Neste exercício iremos recorrer às duas funções que criámos acima para obter o histograma e a entropia para cada uma das fontes.

```
def LerFich(nome):
    extensao = nome.split('.')[1]
    alfabeto=[]
    P=[]

    if (extensao == "wav"):
        data = wavfile.read(nome)
        if (len(data[1].shape) == 2):
            P = data[1][:, 1]
        elif (len(data[1].shape) == 1):
            P = data[1]
        else:
            print("Ficheiro WAV inválido")
            return -1
        alfabeto = np.arange(256)

    elif (extensao == "bmp"):
        img = mpimg.imread(nome)
        if (len(img.shape) == 2):
            P = img.flatten()
        elif (len(img.shape) == 3):
            P = (img[:, :, 0].flatten())
        alfabeto = np.arange(256)

    elif (extensao == "txt"):
        P = [ch for ch in open(nome, 'r').read() if
             ((ord(ch) >= 65 and ord(ch) <= 90) or (ord(ch) >= 97 and ord(ch) <= 122))]
        alfabeto = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I', 'J', 'K', 'L', 'M', 'N', 'O', 'P', 'Q', 'R', 'S', 'T',
                    'U', 'V', 'W', 'X', 'Y', 'Z', 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h', 'i', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n',
                    'o', 'p', 'q', 'r', 's', 't', 'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z']
        alfabeto=np.array(alfabeto)

    return np.array(P), alfabeto
```

Para isso recorremos à função **LerFich** que recebe o nome do ficheiro a ler. Dentro dela, é feita uma verificação da sua extensão. Se for do tipo **.wav** sabemos que se trata de um ficheiro de áudio, se for **.bmp** é um ficheiro de imagem e se for **.txt** é um ficheiro de texto, sendo que cada um tem uma maneira diferente de ser aberto. Por fim a função devolve dois arrays, um P que corresponde à nossa fonte e um alfabeto que apresenta todos os símbolos possíveis para o tipo de fonte que temos.

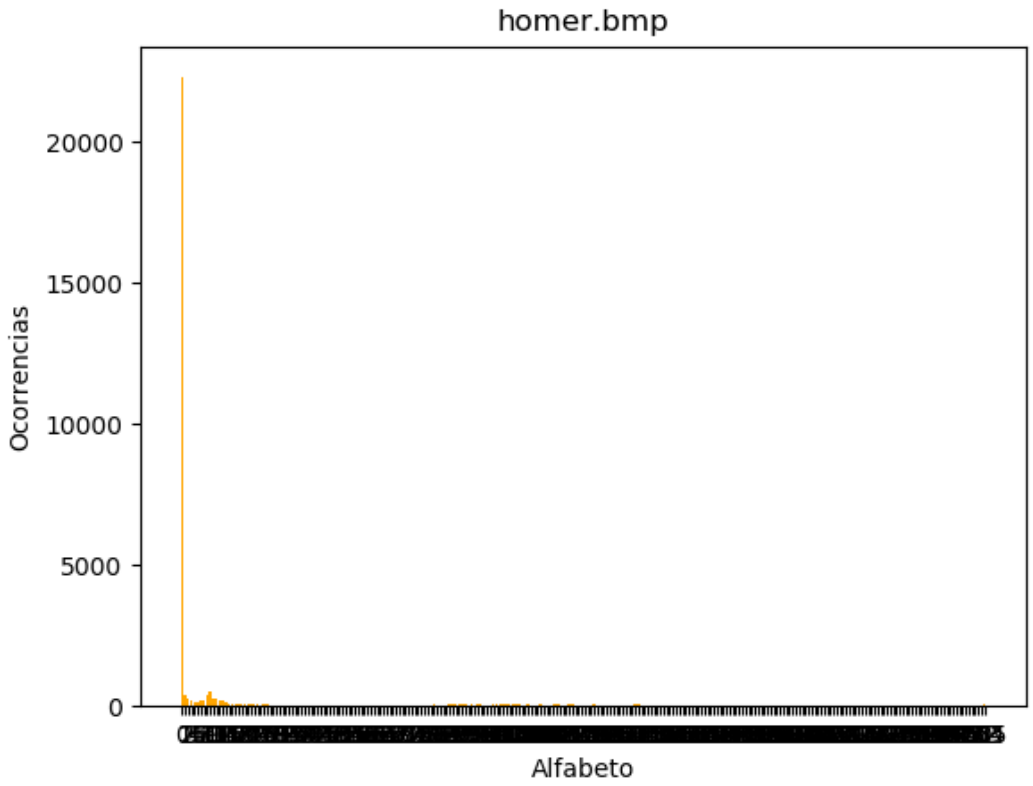
Por fim vamos executar a nossa função no main e analisar os resultados:

```
Fontes=["homer.bmp","homerBin.bmp","kid.bmp","guitarSolo.wav","english.txt"]

#3), 4) e 5)
print("EXERCICIO 3, 4 e 5 JUNTOS")
for i in range(5):
    nome = Fontes[i]
    fonte, alfabeto = LerFich(nome)
    Bs, var = huffman_variancia(fonte)

    print(nome + ":")
    print("H(x)= ", entropia(fonte),)
    print("Bits por simbolo= ", Bs, "e Variância= ", var)
    print("H(x) (modelização usando Agrupamento 2 a 2)= ", entropiaMelhorada(fonte), "\n")
    histograma(fonte, alfabeto, nome)
```

A variável nome corresponde ao nome do ficheiro. De seguida obtemos a fonte e o alfabeto recorrendo à função **LerFich** usamos as funções **histograma** e **entropia** para obter os resultados pretendidos.

De seguida iremos obter o histograma e a entropia associados a cada um dos ficheiros, seguidos de uma análise e comparação relativos aos resultados obtidos.

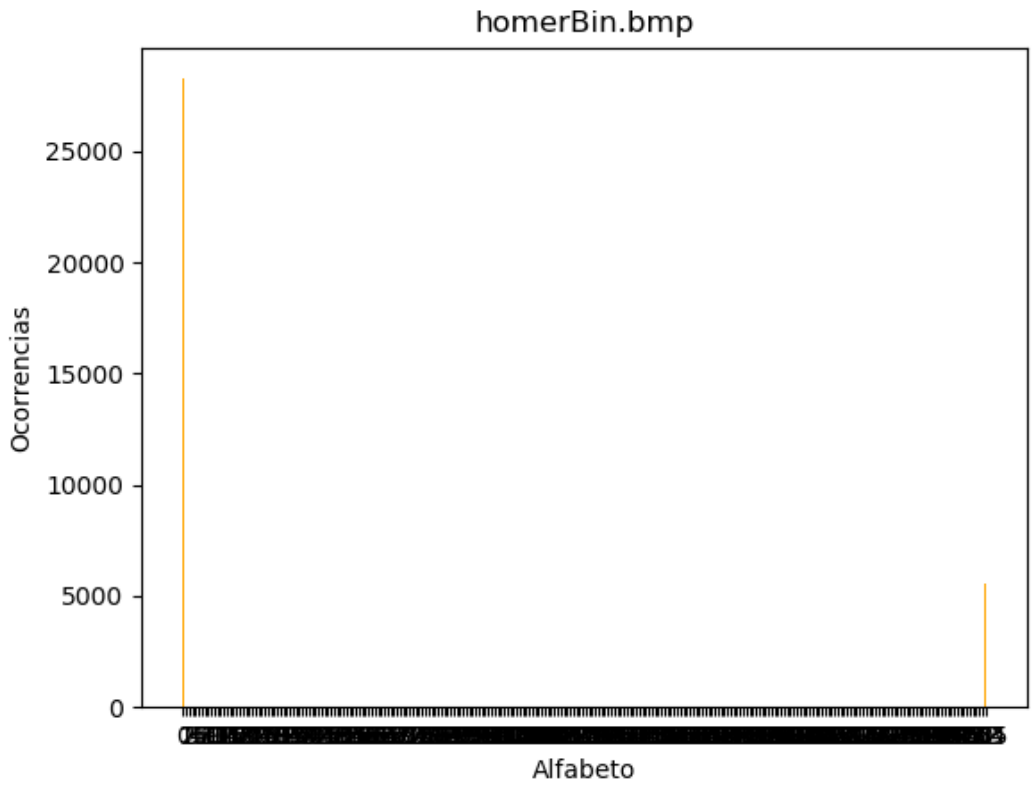
- Homer.bmp:




```
A entropia da fonte de informação é 3.4659 bits/simbolo
```

O nosso alfabeto está compreendido entre 0 e 255 uma vez que se trata de uma imagem. Uma vez que as ocorrências estão bastante dispersas, o valor da entropia é elevado.

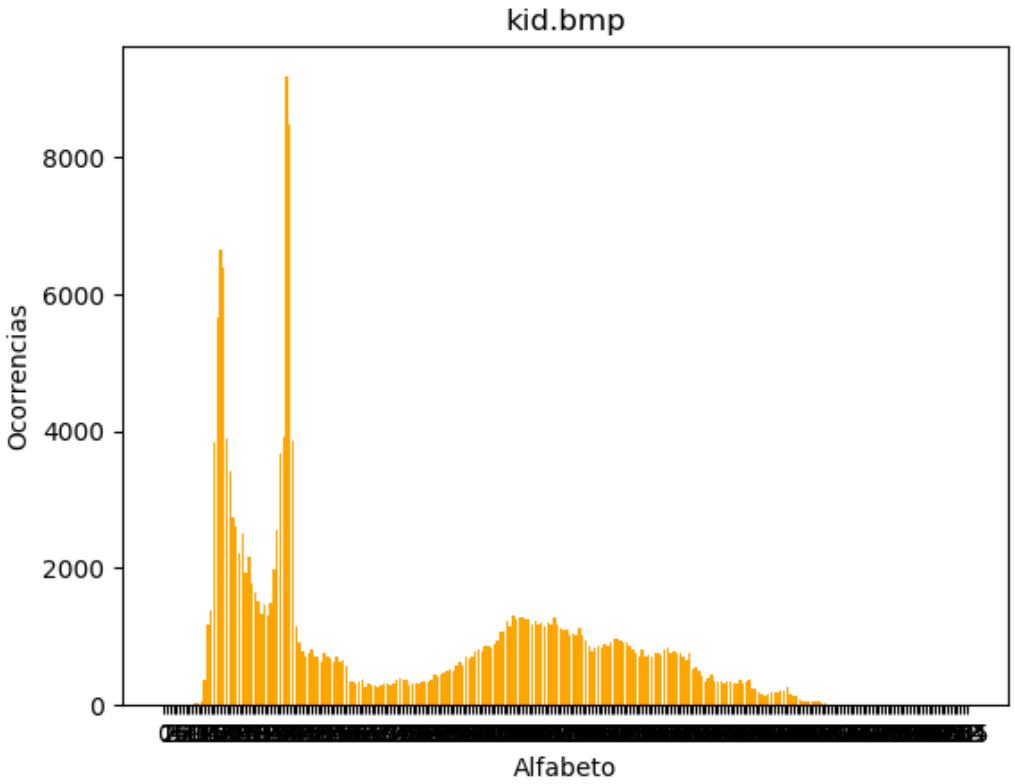
- HomerBin.bmp:




```
A entropia da fonte de informação é 0.6448 bits/simbolo
```

Como também se trata de uma imagem o alfabeto está compreendido entre 0 e 255. Contudo, face à imagem anterior, a nossa entropia é inferior, o que denota uma diminuição de incerteza. É possível observar dois picos de ocorrências em pontos distintos.

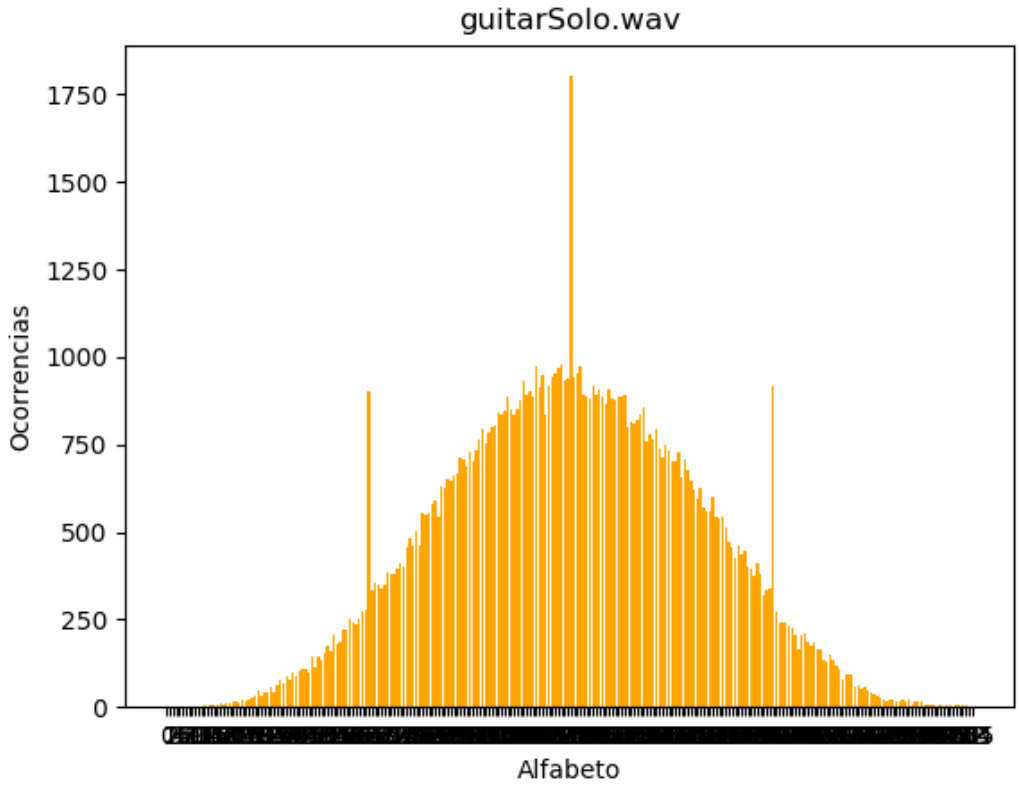
- Kid.bmp:




```
A entropia da fonte de informação é 6.9541 bits/simbolo
```

À semelhança dos dois ficheiros anteriores, este também é uma imagem e, como tal, tem um alfabeto compreendido entre 0 e 255. Contudo, como a imagem é binária, apenas são registadas ocorrências de dois símbolos (branco e preto), o que leva a um decréscimo bastante elevado da entropia (incerteza baixa).

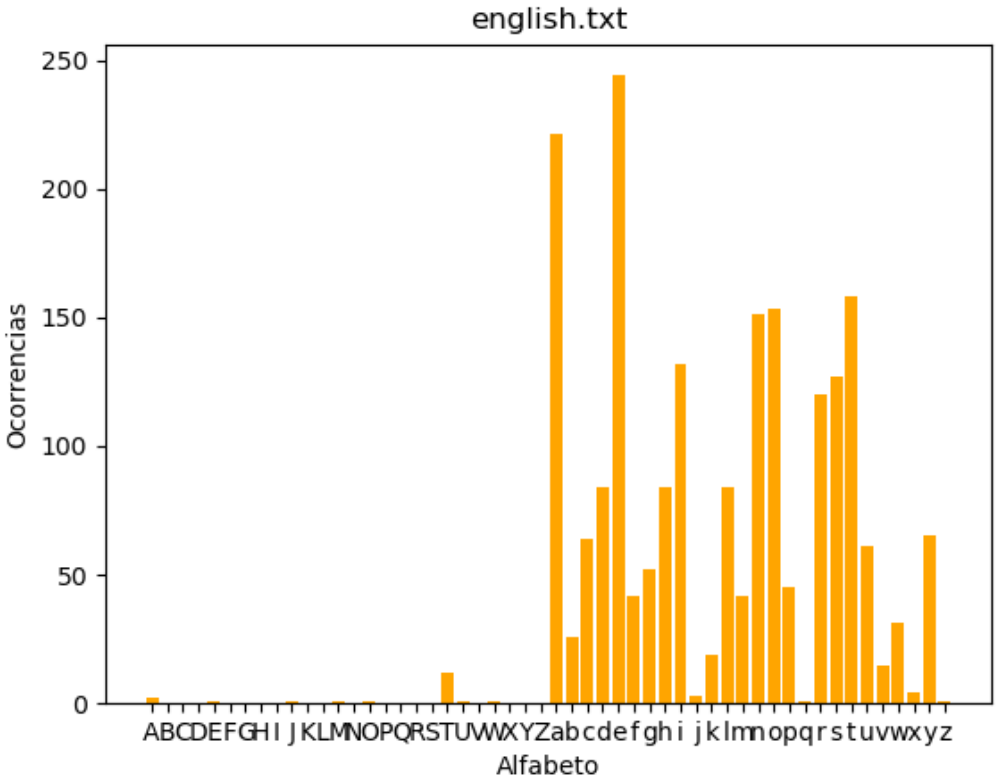
- GuitarSolo.wav:




```
A entropia da fonte de informação é 7.3292 bits/simbolo
```

Este é o primeiro ficheiro de áudio que analisamos o seu alfabeto vai ser semelhante (0 a 255). Relativamente à entropia, a maioria das ocorrências está concentrada num ponto do alfabeto, o que origina uma entropia baixa.

- English.txt:




```
A entropia da fonte de informação é 4.228 bits/simbolo
```

Este é também o primeiro ficheiro de texto que analisamos e, como tal, o alfabeto é constituído pelas letras maiúsculas e minúsculas de A a Z, com acentos e caracteres especiais não incluídos. Verifica-se uma maior concentração das ocorrências nas letras minúsculas e uma entropia mais baixa que os dois primeiros ficheiros.

Será possível comprimir cada uma das fontes de forma não destrutiva? Se Sim, qual a compressão máxima que se consegue alcançar? Justifique.

Sim, uma vez que para cada uma das fontes, a sua entropia é inferior ao número de bits que é usado para as representar (8 bits no caso de ser um ficheiro de áudio ou imagem e $log_2(52)$ no caso de um ficheiro de texto, já que o alfabeto 26 letras que podem ser maiúsculas ou minusculas). Como tal, podemos calcular a sua compressão máxima através da seguinte fórmula:

$$CompressãoMáxima(X) = \frac{Hmax(X) - H(X)}{Hmax(X)} \times 100$$

Onde:

- $Hmax(X)$ corresponde à entropia máxima da fonte.
- $H(X)$ corresponde à entropia calculada

A tabela seguinte apresenta a compressão máxima, em percentagem, para cada uma das nossas fontes:

Fonte	Entropia	Entropia Max	Compressão
Homer.bmp	3.4659	8	56.676%
HomerBin.bmp	0.6448	8	91.94%
Kid.bmp	6.9541	8	13.073%
GuitarSolo.wav	7.3292	8	8.385%
English.txt	4.228	$log_2(52) \approx 5.7$	25.824%

Exercício 4:

Neste exercício iremos recorrer à codificação de Huffman para obter a entropia de cada uma das fontes. Como tal utilizaremos o ficheiro Python fornecido para proceder ao cálculo da entropia.

```
def huffman(fonte):
    codec = HuffmanCodec.from_data(fonte)
    symbols, lenghts = codec.get_code_len()
    Ocorr=ocorrenciasU(np.unique(fonte))
    BS=Ef=Ef_2=0

    for i in range(len(lenghts)):
        for j in fonte:
            if(j==symbols[i]):
                BS+=lenghts[i]

        Ef_2+=lenghts[i]**2 * Ocorr[i]/len(fonte)
        Ef+=lenghts[i] * Ocorr[i]/len(fonte)

    V = round(Ef_2 - Ef ** 2, 4)


    return round(BS/len(fonte),3), V
```

Vamos executar a função **get_code_len** fornecida para obter dois arrays, um com os símbolos diferentes e outro com o número de bits para codificar cada um dos símbolos. De seguida iremos proceder ao cálculo da média, adicionando a uma variável o número de bits cada vez que, ao percorrer a fonte, encontramos um símbolo igual ao símbolo do alfabeto a analisar, fazendo uma iteração pelo alfabeto completo. Por fim iremos dividir este valor pelo comprimento da fonte, de forma a obter assim o número médio de bits. Esta função também é responsável por calcular a variância, obedecendo à seguinte fórmula:

$$V = E(X^2) - E(X)^2$$

Na tabela seguinte procede-se à comparação da entropia calculada no exercício 3 com a entropia usando codificação de Huffman, também apresentando a variância relativa a cada ficheiro:

	Entropia normal	Entropia de Huffman	Variância
Homer.bmp	3.4659	3.548	13.1968
HomerBin.bmp	0.6448	1.000	0
Kid.bmp	6.9541	6.983	2.0993
GuitarSolo.wav	7.3292	7.35	0.7274
English.txt	4.228	4.252	1.1909

Como é possível observar na tabela, a entropia calculada através da codificação de Huffman é ligeiramente superior à entropia obtida sem o recurso a esta codificação.

Será possível reduzir-se a variância? Se sim, como pode ser feito em que circunstância será útil?

Sim, uma vez que, de forma a obter uma variação mínima usando a codificação de Huffman, podemos dar preferência aos símbolos de menor comprimento, aquando da formação da árvore de Huffman. De forma a podermos efetuar uma redução da variância de forma útil, criamos árvores de Huffman onde os resultados da associação de símbolos são priorizados no topo da nossa árvore. Como tal, iremos ter uma distribuição mais uniforme e regular dos bits e nota-se um aumento da otimização do código.

Exercício 5:

Neste exercício iremos proceder ao cálculo da entropia e à apresentação dos histogramas, usando o agrupamento de símbolos dois a dois.

```
def entropiaMelhorada(fonte):
    P_novo, alfabeto2 = Agrupamento2(fonte)
    H = entropia(P_novo)

    return round(H / 2, 3)
```

Na função **entropiaMelhorada** recebemos a fonte de informação, que já vem do exercício 3, e, com ajuda da função **Agrupamento2,** convertemos a nossa fonte num array bidimensional, cujos símbolos já se encontram agrupados 2 a 2. De seguida chamamos a função **entropia** para calcular a entropia da nossa fonte já agrupada 2 a 2 que depois é dividida por 2.

```
def Agrupamento2(fonte):
    if (len(fonte) % 2 != 0):
        fonte = fonte[:len(fonte) - 1]
        P_novo = np.reshape(fonte, ((int)((len(fonte) + 1) / 2), 2))
    else:
        P_novo = np.reshape(fonte, ((int)((len(fonte)) / 2), 2))

    alf=np.unique(P_novo, axis=0)

    return P_novo, alf
```

Acima temos a função já referida no texto anterior que, ao receber a nossa fonte, devolve dois arrays bidimensionais com a nova fonte e alfabeto organizados com símbolos 2 a 2. Para tal verificamos se o array da fonte é par ou ímpar e, recorrendo ao método **reshape** do numpy iremos transformar este array unidimensional em array bidimensional.

	Entropia normal	Entropia 2 a 2
Homer.bmp	3.4659	2.413
HomerBin.bmp	0.6448	0.398
Kid.bmp	6.9541	4.909
GuitarSolo.wav	7.3292	5.754
English.txt	4.228	3.652

Como é possível observar pela tabela acima, a entropia calculada neste exercício é significativamente inferior àquela que é obtida normalmente (exercício 3), o que nos leva a concluir que há uma redução do número médio de bits necessários para codificar os símbolos e, como tal, uma otimização do código.

Exercício 6 a)

Neste exercício iremos proceder ao cálculo da informação mútua entre dois sinais de som. Para tal temos o sinal a pesquisar (query) e o sinal a ser pesquisado (target).

```
def InforMutua(query, target, passo):
    if(len(query)>len(target)):
        print('ERRO: impossivel executar esta função visto que a "len" da query é maior que a "len" do target')
        return -1

    passo=(int)(passo)
    infMutua=[0.0]*math.ceil((len(target)-len(query)+1)/passo)
    target=np.array(target)
    query=np.array(query)

    entropia_query=entropia(np.array(query))

    for i in range(len(infMutua)):
        lista=target[passo*i:passo*i+len(query)]
        query_lista=[[query[i],lista[i]] for i in range(len(lista))]

        infMutua[i]=round((entropia_query - entropia(np.array(query_lista)) + entropia(np.array(lista))),4)

    return infMutua
```

Para proceder a esse cálculo criamos a função **InforMutua** que recebe a query, o target e o passo (salto que iremos dar quando analisamos o target). Para tal iremos analisar o nosso target, passo a passo, e realizando um ciclo para obter a informação mútua relativa à nossa query e a cada porção do target, usando a função seguinte:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X,Y) + H(Y)$$

Onde:

- X corresponde à query
- Y corresponde ao target
- H(X) corresponde à entropia da query

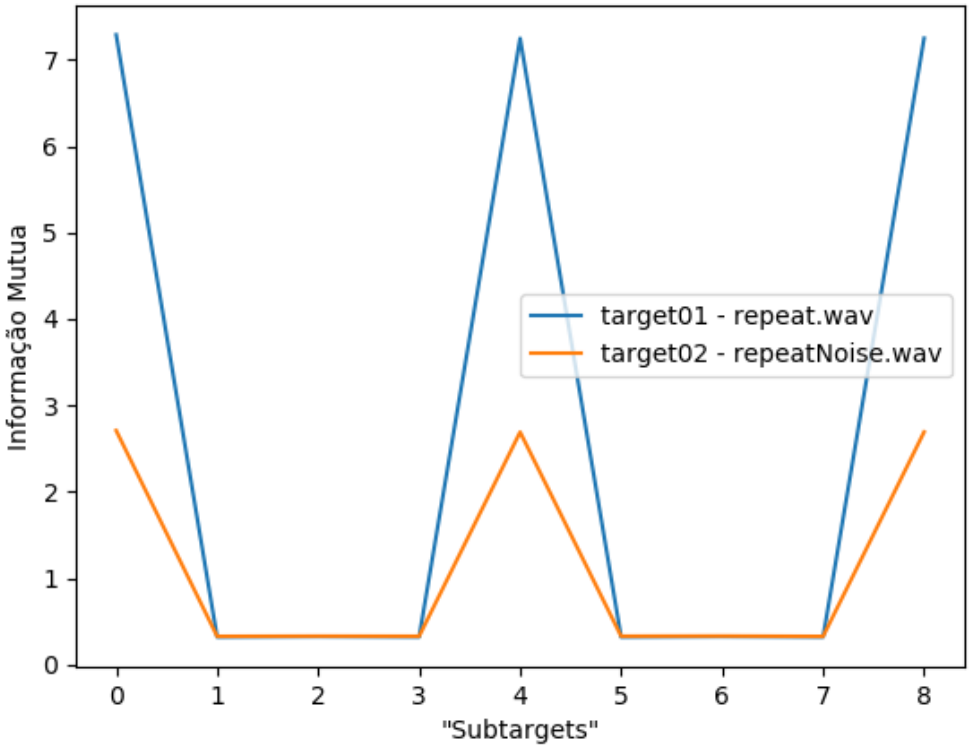
- H(Y) corresponde à entropia do target
- H(X,Y) corresponde à entropia conjunta de X e Y.

Exercício 6 b)

Neste exercício iremos usar a função **InforMutua** criada anteriormente para calcular a informação mútua de um ficheiro de som (guitarSolo.wav) com dois ficheiros de som target, um normal (target02 – repeat) e outro com ruído adicionado (target02 -repeatNoise) e estudar a sua variação. Como indicado no enunciado, o passo definido para este exercício corresponde a ¼ do comprimento arredondado da fonte da nossa query.

```
def Targets(query, target, target2, passo):
    plt.plot(InforMutua(query,target,passo), label="target01 - repeat.wav")
    plt.plot(InforMutua(query, target2, passo), label="target02 - repeatNoise.wav")

    plt.xlabel('"Subtargets"')
    plt.ylabel('Informação Mutua')

    plt.legend()
    plt.show()
```

A função **Targets** irá receber a nossa query (fonte do som a analisar) e os nossos dois targets (fontes dos sons a ser analisado) e o passo já estabelecido acima. De seguida irá criar o nosso plot que irá usar a função **InforMutua** para calcular a informação mútua de cada target com a query e apresentá-la num gráfico. Os parâmetros das fontes são obtidos com recurso à função **LerFich** criada no exercício 3.



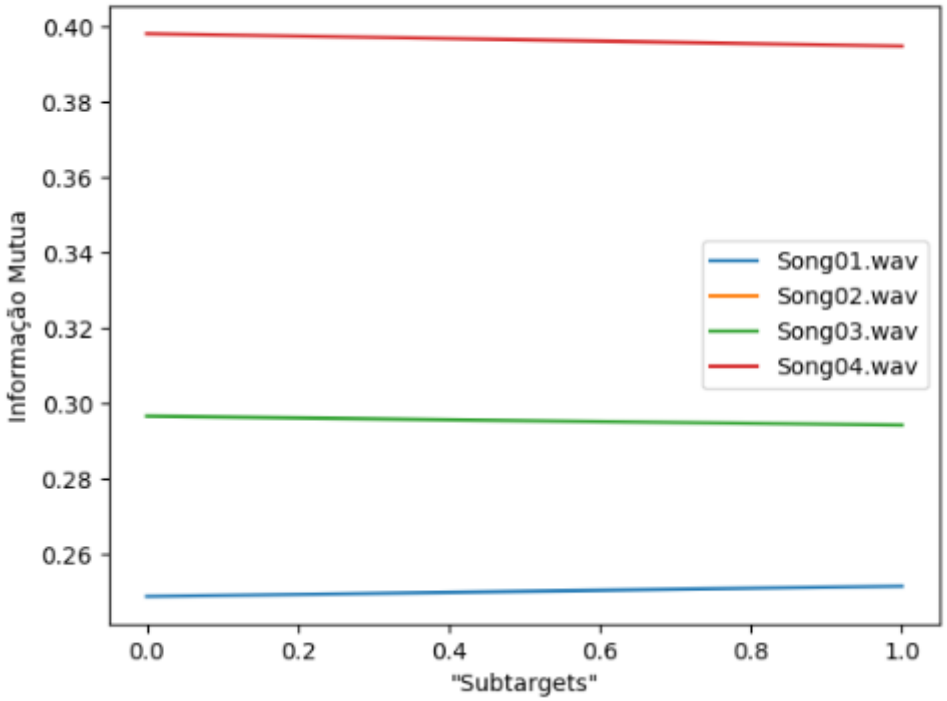
Como é possível observar, a informação mútua é superior quando o nosso target não tem adicionado o ruído, ruído esse que irá causar uma diminuição da informação mútua obtida entre os dois ficheiros de som. Também é notório um aumento significativo da informação mútua no “subtarget” 0, 4 e 8.

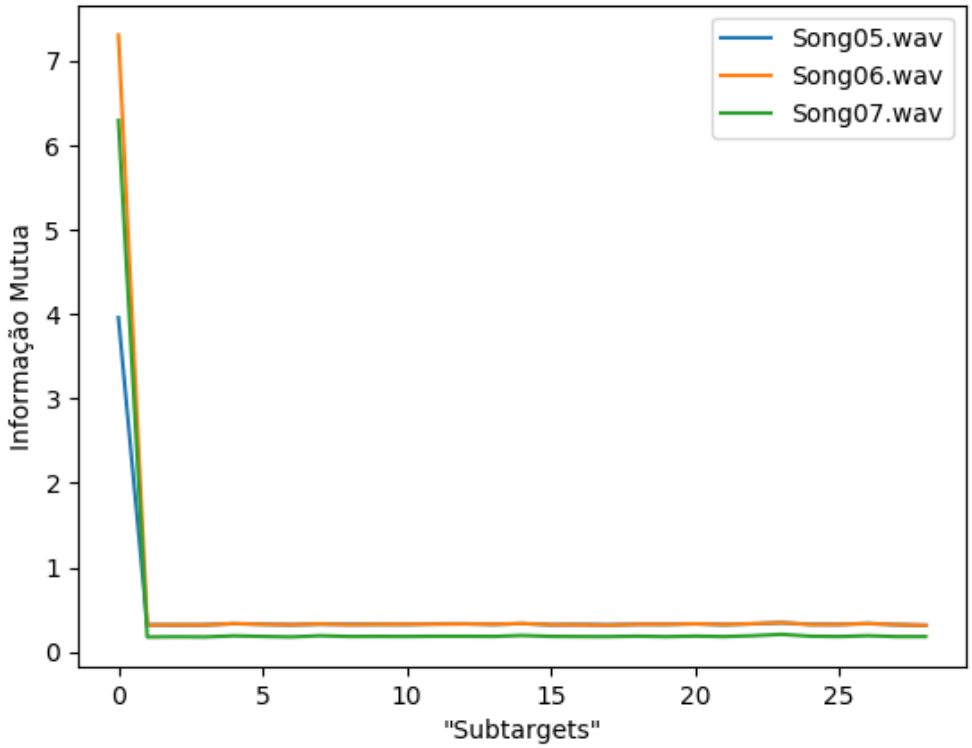
Exercício 6 c)

Neste exercício iremos também utilizar a função **InforMutua** criada na alínea a) para comparar a informação mútua de uma query (guitarSolo.wav) e vários ficheiros de som (targets) e estabelecer uma ordem decrescente de informação mútua entre si.

```
def Shazam(query, passo):
    Targets=["Song01.wav","Song02.wav","Song03.wav","Song04.wav","Song05.wav","Song06.wav","Song07.wav"]

    for i in range(7):
        fonteT2, alfabetoT2 = LerFich(Targets[i])
        inf = InforMutua(query, fonteT2, passo)

        print("A informação mutua máxima do ficheiro '" + Targets[i] + "' é", max(inf))
        if(i<4):
            plt.plot(inf, label=Targets[i])
        else:
            print('Não é possivel representar o gráfico pois o tamanho da "query" é igual ao do "target", logo só haverá um ponto onde é calculada a informação mutua')

    plt.xlabel('"Subtargets"')
    plt.ylabel('Informação Mutua')

    plt.legend()
    plt.show()
```

Para isso criámos a função **Shazam** que recebe como parâmetros a nossa query e o passo (também ¼ do comprimento arredondado da fonte da nossa query). Já tendo os targets num array irá realizar um ciclo de forma a poder calcular a informação mútua para cada um deles e adicionar essa informação ao nosso plot. Caso o tamanho da query seja igual ao tamanho do target em questão, não será possível analisar a evolução da informação mútua e, como tal, irá apresentar uma mensagem de aviso no ecrã do utilizador.





Nos gráficos acima representado temos a representação gráfica da informação mútua ao longo de cada “subtarget” para cada um dos targets.

Apesar de a análise ser feita a 7 ficheiros de som, apenas 6 deles estão presentes uma vez que o Song02.wav tem comprimento semelhante ao da query gerando assim apenas um ponto de informação mútua.

Informação mútua máxima ordenada
Song07.wav : 6.2968
Song06.wav : 7.3095
Song05.wav : 3.9599
Song04.wav : 0.3981
Song02.wav : 0.2967
Song03.wav : 0.3673
Song01.wav : 0.2516

Conclusão:

Este trabalho serviu como uma base de conhecimentos muito importante para nós. Ficámos a conhecer muito melhor diversos conceitos como a entropia e a informação mútua, assim como formas de os colocar em prática. Com recurso ao Python, linguagem de programação onde já possuímos algumas bases, e às diversas bibliotecas como o numpy, que nos ajudou a tratar os arrays de fontes, e o matplotlib, responsável pela criação e exposição de gráficos e histogramas, conseguimos mostrar o nosso conhecimento e tratar a informação que nos era fornecida.

Concluímos também que, das várias entropias calculadas, o melhor método é o agrupamento de símbolos 2 a 2, o que resulta numa melhor otimização do código e como funcionam aplicações como o Shazam, responsáveis por analisar e comparar ficheiros de som, e como recorrem à informação mútua.