Линейная алгебра
II семестр

Лектор:
Трифанов Александр Игоревич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

1. Полилинейная и тензорная алгебра

1.1. Перестановки

см. курс дискретной математики первого семестра

1.2. Пространство полилинейных форм (пространство ПЛФ)

$\sqsupset X(K)$ — ЛП над K, $\dim_K X = n$,
$\sqsupset X^*(K)$ — пр-во ЛФ над $X(K)$

Определение: полилинейная форма
ПЛФ называется отображение
$u : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times X^* \times ... \times X^*}_{q} \to K$
Обладающее следующщими свойствами (полилинейность - *линейность по всем агрументам*):
1. $u(...\ x_1 + x_2\ ...) = u(...\ x_1\ ...) + u(...\ x_2\ ...)$
2. $u(..., \lambda x, ...) = \lambda u(..., x, ...)$

Замечание:

пара (p, q) — валентность ПЛФ

Примеры:

1. $f \in X^*(k)$ — ПЛФ $(1, 0)$
2. $\hat{x} \in X^{**}$ — ПЛФ $(0, 1)$
3. $E_3 \quad g(x,\ y) = \langle x, y \rangle$ — ПФЛ $(2, 0)$
4. $E_3 \quad \omega(x,\ y,\ z)$ — ПЛФ $(3, 0)$

Замечание:

$\sqsupset \Omega_p^q$ — мн-во ПЛФ (p, q)

1. Равенство линейных форм

$$u, v \in \Omega_p^q : u = v \Leftrightarrow u(x_1,\ x_2,\ ...,\ y^1,\ y^2,\ ...,\ y^q) = v(x_1,\ x_2,\ ...,\ y^1,\ y^2,\ ...,\ y^q)$$
$$\forall x_1,\ ..., x_p \in X,\ y^1,\ ...,\ y^q \in X^*$$

2. Сумма линейных форм

$$\omega = u + v \Leftrightarrow \omega\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) = (u+v)\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) =$$
$$u\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) + v\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right)$$

$\forall u,\ v,\ \omega \quad u + (v + \omega) = (u + v) + \omega$ — *ассоциативность*
$\exists \theta \in \Omega_p^q \quad \theta\left(x_1, ..., x_p, y^1 ... y^q\right) = 0, \quad \forall u \quad u + \theta = u = \theta + u$ – *существование нейтрального*
$\forall u \quad \exists(-u) : u + (-u) = \theta$ — *существование обратного*

3. Произведение ПЛФ на скаляр

$$w = \lambda u \Leftrightarrow w\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) = (\lambda u)\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) = \lambda u\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right)$$

Теорема:
$\Omega_p^q = \Omega_p^q(K)$ — ЛП

Доказательство:
Проверка аксиом ЛП ■

1.3. Тензор ПЛФ

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(K)$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ — базис $X^*(K)$
$\sphericalangle \quad \left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right)$ ⊜

$x_1 = \sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad ... \quad x_p = \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_1^{i_p} e_{i_p}$

$y_1 = \sum\limits_{i_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} \quad ... y^q = \sum\limits_{i_p=1}^n \mu_{j_1}^q f^{j_q}$

⊜ $u\left(\sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} ... = \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_1^{i_p} e_{i_p}; \sum\limits_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} ... \sum\limits_{j_q=1}^n \mu_{j_q}^1 f^{j_q}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^n ... \sum\limits_{i_p=1}^n \sum\limits_{j_1=1}^n ... \sum\limits_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q \quad u\left(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} ... f^{j_q}\right) ... f^{j_q} = u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ — *тензор линейной формы (сумма произведений координат)*

$= \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Лемма:

Знание тензора $u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ в паре базисов пр-в X и X^* эквивалентно заданию самой ПЛФ u:

$$u \underset{\{f^j\}}{\overset{\{e_i\}}{\leftrightarrow}} u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$$

Доказательство:
см. выше. ■

1.4. Базис пространства ПЛФ

$\Omega_p^q(K)$ — пространство ПЛФ над полем K

Замечание:

$\mathrm{Mat}_K(2) \quad \underset{=e_{11}}{\overset{=e^1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{12}}{\overset{=e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{21}}{\overset{=e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{22}}{\overset{=e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$
$(e_{11})_{ij} = {}_{11}e^{ij}$

${}_{\alpha\beta}e^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j = \begin{cases} 1, i=\alpha, j=\beta \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$\sphericalangle \quad \left\{{}_{t_1 t_2 ... t_q}^{s_1 s_2 ... s_p} W\right\}$ — набор ПЛФ в $\Omega_p^q(K)$

${}_{t_1 t_2 ... t_q}^{s_1 s_2 ... s_p} W\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p} \xi_p^{s_p} \mu_{t_1}^1 ... \mu_{t_q^q}$

Замечание:

${}_{t_1 ... t_q}^{s_1 ... s_p} W_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = \delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q}$

Теорема:

Набор $\left\{{}_{t_1 t_2 ... t_q}^{s_1 s_2 ... s_p} W\right\}$ — базис в $\Omega_p^q(K)$

Доказательство:
Докажем полноту
$\exists u \in \Omega_p^q(K)$
$\sphericalangle \quad u(x_1 ... x_p, y^1 ... y^q = \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = {}_{j_1 ... j_q}^{i_1 ... i_p} W\left(x_1 ... x_p y^1 ... y^q\right) u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$
$\Rightarrow u = {}_{j_1 ... j_q}^{i_1 ... i_p} W u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Докажем ЛНЗ
$\sphericalangle \quad {}_{t_1 t_2 ... t_q}^{s_1 s_2 ... s_p} W \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = \theta \mid \left(e_{i_1} ... e_{i_p}, f^{j_1} ... f^{j_q}\right)$

${}_{t_1 t_2 ... t_q}^{s_1 s_2 ... s_p} W\left(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} f^{j_q}\right) \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$

$\delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$
$\alpha_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ■

Замечание:

$\dim_K \Omega_p^q = n^{p+q}$

2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\sphericalangle \quad \Omega_p^0(K)$
Определение: симметрическая форма
Форма $u \in \Omega_p^0(K)$ — симметрическая, если ее значения не зависят от порядка аргументов

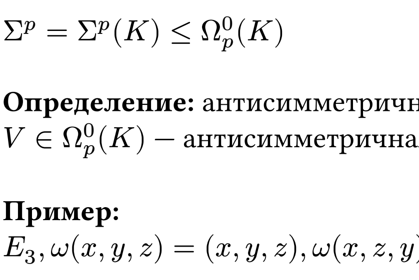
$$u\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_1\ x_2\ ...\ x_p\right)$$
$$\forall \sigma \in S_P \ (\textit{симметрическая группа перестановок})$$

Пример:
$E_3(\mathbb{R}) \ g(x, y) = \langle x, y \rangle \quad g(x, y) = g(y, x)$

Лемма:

$\sqsupset u$ — симметричная $\Rightarrow u_{i_1 ... i_p} = u_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}}$

$\sqsupset \Sigma^p$ — множество симметричных форм



Лемма:

$\Sigma^p = \Sigma^p(K) \leq \Omega_p^0(K)$

Определение: антисимметричная форма
$V \in \Omega_p^0(K)$ — антисимметричная, если $\forall \sigma \in S_p \quad v\left(x_{\sigma(1) ... \sigma(2)}\right) = (-1)^{[\sigma] - \text{ чётность}} v\left(x_1\ x_2 ... x_p\right)$

Пример:
$E_3, \omega(x, y, z) = (x, y, z), \omega(x, z, y) = -\omega(x, y, z)$

Лемма:

Тензор антисимметричной формы антисимметричен по индексам

$$v_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}} = (-1)^{[\sigma]} v_{i_1 ... i_p}$$

$\sqsupset \Lambda$ — мн-во антисимм форм

Лемма:

$\Lambda^P = \Lambda^P(K) \leq \Omega_p^0(K)$

Замечание:

$\Lambda^p \cap \Sigma^p = \theta$

Лемма:

$v \in \Lambda^p \Leftrightarrow v$ обнуляется на паре одинаковых аргументов

Доказательство:
$\Leftarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i ... x_i ...) = -v(... x_i ... x_i ...) \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow$: $\sphericalangle \quad v\left(... x_1' + x_i'' ... x_j' + x_j'' ...\right) = 0$
$v(... x_1' ... x_1' ...) + v(... x_1' ... x_1'' ... + v(... x_1'' ... x_1' ...) + v(... x_1'' ... x_1'' ...) = 0$
$v(... x_1' ... x_i'' ...) = -v(... x_1'' ... x_1' ...)$ ■

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\Rightarrow \forall v \in \Lambda^P(K) \quad v\left(x_1 ... x_p\right) = 0$

2.1. Симметризация и антисимметризация

$\sqsupset W \in \Omega_p^0(K), \quad K : \mathrm{char}\ K = 0 \quad$ ($\mathbb{Q}$ и “больше”)

Лемма:

Следующая форма является симметричной

$$u\left(x_1 \ldots x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in s_p} W\left(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)}\right)$$

Доказательство:
$\lessdot \quad u\left(x_{\chi(1)} \ldots x_{\chi(p)}\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in s_p} W\left(x_{\sigma\chi(1)} \ldots x_{\sigma\xi(p)}\right) =$
$\langle \sigma \circ \chi = \varphi, \quad \sigma = \varphi \circ \chi^{-1} \rangle$
$= \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\varphi \circ \chi^{-1} \\ \varphi \in s_p}} W\left(x_{\varphi(1)} \ldots x_{\varphi(p)}\right) = u\left(x_1 \ldots x_p\right) \blacksquare$

Определение: симметризация
Процесс изготовления симметрической формы из произвольной

$$(\mathrm{Sym}\ W)\left(x_1 \ldots x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_P} W\left(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
Коэффициент $\frac{1}{p!}$ – нормировка: $W \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\ W = W$

Замечание:
$\mathrm{Sym}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$
$\mathrm{Sym}\ (u + v) = \mathrm{Sym}\ u + \mathrm{Sym}\ v$
$\mathrm{Sym}\ (\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Sym}(u)$

Лемма:
Следующая форма является антисимметричной

$$v\left(x_1 \ldots x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)}\right)$$

Определение: антисимметризация (альтернирование)
Процесс изготовления антисимметричной формы из произвольной

$$(\mathrm{Alt}\ W)\left(x_1 \ldots x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$
$\mathrm{Alt}(u + v) = \mathrm{Alt}\ u + \mathrm{Alt}\ v$
$\mathrm{Alt}(\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Alt}(u)$
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}\ \mathrm{Alt} = 0$

Замечание:
$\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt} \neq \mathrm{id}$
$v(p = 2)$
$A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2}$
$A^{(a)} = \frac{A - A^T}{2}$

2.2. Базис Λ^P

$\dim_k \Lambda^p = \ ?$
$\sqsupset \left\{{}^{s_1 \ldots s_p} W\right\}$ – базис в $\Omega_p^0(K)$
$\lessdot \quad {}^{s_1 \ldots s_p}F = p!\mathrm{Alt}({}^{s_1 \ldots s_p}W)$
$\left\{{}^{s_1 \ldots s_p}F\right\}$ – набор в Λ^P – ПН, но не ЛНЗ

Лемма:
Форма ${}^{s_1 \ldots s_p}F$ – антисимметрична по своим индексам
${}^{\ldots s_i \ldots s_j \ldots}F = -{}^{\ldots s_j \ldots s_i \ldots}F$

Доказательство:
$D^{\ldots s_i \ldots s_j \ldots}F\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = p!\mathrm{Alt}\ {}^{\ldots s_i \ldots s_j \ldots}W\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = p!(\mathrm{Alt}\ {}^{\ldots s_i \ldots s_j \ldots}W)\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) =$
$= -p!(\mathrm{Alt}\ {}^{\ldots s_j \ldots s_i \ldots}W)\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = -{}^{\ldots s_j \ldots s_i \ldots}F\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right)$