Линейная алгебра
II семестр

Практик:

Мария Александровна Москаленко

весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov** **AberKadaber**

Оглавление

1. Тензоры 2
- 1.1. Свёртка индексов: 2
- 1.2. Транспонирование тензора: 2
- 1.3. Проверка тензора на симметричность и антисимметричность 2
- 1.4. Симметризация и антисимметризация тензоров 2
  - 1.4.1. Симметризация 2
  - 1.4.2. Антисимметризация 2
- 1.5. Разложение на тензорное произведение одновалентных форм 2
- 1.6. Смена базиса ПЛФ 3

2. Определитель матрицы 3
- 2.1. Метод приведения матрицы к треугольному виду 3
- 2.2. Метод выделения множителей 3
- 2.3. Метод разложения на линейные множители 3
- 2.4. Метод рекуррентных соотношений 3

1. Тензоры

Тензор - значение ПЛФ на всех наборах базисных векторов

Зачем нам тензоры?
Тензоры инвариантны *(константны)*
Фактически, тензор — матричное представление полилинейной формы

Пример тензора:

$$\mathrm{E} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг тензора *определён строго* – он равен 3
Валентность тензора *однозначно определить нельзя*: (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) — возможные её значения

Обозначение $\varepsilon_{ijk} : i$ — строка, j — столбец k — слой

$(3,\ 0) \longleftrightarrow \varepsilon_{ijk}$

$(2,\ 1) \longleftrightarrow \varepsilon_{ij}^{k}$

$(1,\ 2) \longleftrightarrow \varepsilon_{i}^{jk}$

$(0,\ 3) \longleftrightarrow \varepsilon^{ijk}$

$\sqsupset a = (0\ 1\ 1)^T$

$b_{jk} = \varepsilon_{ijk} a^i$ – внутри происходит немое суммирование Эйнштейна

$b_{11} = \varepsilon_{111} a^1 + \varepsilon_{211} a^2 + \varepsilon_{311} a^3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Свёртка индексов:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) = \|a_{kl}^{ij}\|$$

i — локальная строка, j — локальный столбец, k — глобальная строка, l — глобальный стобец

Будем считать что это тензор четвертого ранга, валентности (2, 2)

$a_{hl}^{hj} = b_l^j$

$b_l^j = \sum\limits_h a_{hl}^{hj} = a_{1l}^{1j} + a_{2l}^{2j}$

$b_1^1 = a_{11}^{11} + a_{21}^{21} = 6$

$b_1^2 = a_{11}^{12} + a_{21}^{22} = 10$

...

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Тензорное произведение:

A — ПЛФ валентности $(1, 0) \longleftrightarrow a = (1, -1, 0)$

B — ПЛФ валентности $(2, 0) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\overset{\alpha}{a} \otimes \overset{\beta}{b} = \overset{\gamma}{c}$

$(\alpha_i) \otimes (\beta_{jk}) = \gamma_{ijk}$

$\gamma_{231} = \alpha_2 \cdot \beta_{31}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Следующий пример:

$A(2, 0) \longleftrightarrow a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(1, 1) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c = a \otimes b$

$$(\alpha_{ij}) \otimes (\beta_l^k) = \gamma_{ijl}^k$$

Нумерация сверху вниз, слева направо:
k — локальная строка, i — локальный столбец, j — глобальная строка, l — глобальный стобец

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Следующий пример:

Индекс сферху = форма = горизонтальные координаты

Индекс снизу = вектор = вертикальные координаты

$a^1 = (1, 0, 0)$
$a_2 = (0, 1, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_3 = (0, 0, 1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b = a^1 \otimes a_2 \otimes a_3$

$\beta_{ik}^j = (\psi^j) \otimes (\zeta_i) \otimes (\eta_k)$

$$b = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1.2. Транспонирование тензора:

Двумерное сечение — двумерная матрица, в которой зафиксированы все индексы, кроме 2 конкретных

Транспонирование тензора — операция, результатом которой

$A_{ikl}^{T(kl)} = A_{ilk}$

A — валентность $(3, 0) \longleftrightarrow a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right)$

$b_{ijk} = a_{ikl}$

$\sqsupset i = 1 \Rightarrow b_{jk} = a_{1jk} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{1kj} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\sqsupset i = 2 \Rightarrow b_{jk} = \dots$

$$B_{ijk} = A_{ikj} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

1.3. Проверка тензора на симметричность и антисимметричность

$$a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Является ли он симметричным или антисимметричным?

$a_{223} = 2$ — не антисимметричный по $[ijk]$

$a_{123} = -2,\ a_{213} = -1 \Rightarrow$ не симметрично по (ijk), по (ij), не антисиметрично по $[ij]$

$a_{133} = 1$ не антисимметрично по $[jk]$

$a_{221} = -2,\ a_{212} = 0 \Rightarrow$ не симметрично по (jk)

$a_{221} = -2,\ a_{122} = 2 \Rightarrow$ не симметрично по $(i|j|k)$, но симметрично по $[i|j|k]$

Квадратные скобки - наличие свойства антисимметричности по данному набору

Круглые скобки - наличие свойства симметричности по данному набору индексов

1.4. Симметризация и антисимметризация тензоров

1.4.1. Симметризация

$W \in \Omega_0^p(\mathbb{K})$

$U(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_\sigma W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right), \quad U \in \Sigma^p(\mathbb{K}), \quad U = \mathrm{Sym}(W)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \mathrm{Sym}(A) \quad b_{i,j} = a_{ij}^s = \frac{1}{2!}(a_{ij} + a_{ji})$

$b_{11} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad b_{13} = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$

$b_{12} = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2 \quad b_{23} = \frac{1}{2}(4 + 1) = \frac{5}{2}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Sym} A$$

1.4.2. Антисимметризация

$V(x_1, ...x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_\sigma (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right), V \in \Lambda^p(\mathbb{K})$

$V = \mathrm{ASym}(W) = \mathrm{Alt}(W)$

$v_{ij} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\{ij\}} a_{ij} + (-1)^{\{ji\}} a_{ji}\right)$

$v_{13} = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) = 1$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{ASym} A$$

1.5. Разложение на тензорное произведение одновалентных форм

$a_k^{ij} = \alpha f^i \otimes f^j \otimes e_k$

$$\begin{aligned} \left(a_k^{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) &= 1 \cdot f^1 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^1 \otimes f^2 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^2 \otimes e_1 + \\ &+ 2(f^1 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^1 \otimes f^2 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2) = \\ &= (f^1 \otimes f^1 + f^1 \otimes f^2 + f^2 \otimes f^1 + f^2 \otimes f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) = \\ &= (f^1 + f^2) \otimes (f^1 + f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) \end{aligned}$$

1.6. Смена базиса ПЛФ

Хочется понимать, что будет при смене базиса
X — ЛП (пространство контрвекторов)
$\{e_i\}$ — базис X
$x \in X,\ x_e = \sum \xi^i e_i$
$\{\tilde{e}_i\}$ — новый базис X
Базис e связан с базисом $\tilde{e}$ матрицей перехода T:

$$\tilde{E} = T_{e \to \tilde{e}} E$$

$$E - \text{матрица базиса } e,\ \tilde{E} - \text{матрица базиса } \tilde{e}$$

$$\tilde{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_i^k e_k$$

$$x_{\tilde{e}} = S_{\tilde{e} \to e} x_e, \quad S_{\tilde{e} \to e} = T^{-1}_{e \to \tilde{e}}$$

X^*:
$\{f^j\},\ \left\{\tilde{f}^j\right\}$ — базисы, сопряжённые $\{e_i\}$ и $\{\tilde{e}_i\}$ соответственно

$$y_f = \sum g_j f^j$$

$$\tilde{f}^j = f^j S$$

$$y_{\tilde{f}} = y_f T$$

$T = \left\|\tau_j^i\right\|$ *(верхний индекс отвечает за строку, нижний за столбец)*
$S = \left\|\sigma_j^i\right\|$

$\tau_i^k \cdot \sigma_k^j = \delta_i^j \Leftrightarrow TS = I$ - единичная матрица

$\omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$: $\{e\},\ \{f\}$ — *p раз контрвариантен и q раз ковариантен (p векторов из X, q векторов из X^*)*

$\tilde{\omega}_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$: $\{\tilde{e}\},\ \left\{\tilde{f}\right\}$

$$\tilde{\omega}_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot \underbrace{\sigma_{i'_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i'_p}^{i_p}}_{p \text{ раз}} \cdot \underbrace{\tau_{j_1}^{j'_1} \cdot \ldots \cdot \tau_{j_q}^{j'_q}}_{q \text{ раз}}$$

p раз контрвариантен $\Rightarrow$ p раз преобразовывается по контрвариантному закону (домножение на σ)
q раз ковариантен $\Rightarrow$ q раз преобразовывается по ковариантному закону (домножение на τ)

Пример:
Тензор валентности (2, 1), задан стандартный базис $\{e\} : e_1 = (1, 0, 0)\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$
$\tilde{e}_1 = e_1$
$\tilde{e}_2 = e_3$
$\tilde{e}_3 = e_2$

$$A_e = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

$$\tilde{a}_{j'k'}^{i'} = a_{jk}^i \cdot \sigma_{j'}^j \cdot \sigma_{k'}^k \cdot \tau_i^{i'} \underset{\text{свертка индексов по } i}{=} \sigma_{j'}^j \cdot \sigma_{k'}^k \cdot \left(a_{jk}^1 \cdot \tau_1^{j'} + a_{jk}^2 \cdot \tau_2^{j'} + a_{jk}^3 \cdot \tau_3^{i'}\right)$$

$$\underset{\text{свертка индексов по } j}{=} \sigma_{k'}^k (\sigma_{j'}^1 \left(a_{1k}^1 \tau_1^{i'} + a_{1k}^2 \tau_2^{i'} + a_{1k}^3 \tau_3^{i'}\right) + \sigma_{j'}^2 \left(a_{2k}^1 \tau_1^{i'} + a_{2k}^2 \tau_2^{i'} + a_{2k}^3 \tau_3^{i'}\right) + \sigma_{j'}^3 \left(a_{3k}^1 \tau_1^{j'} + a_{3k}^2 \tau_2^{j'} + a_{3k}^3 \tau_3^{j'}\right)$$

$$\underset{\text{свертка индексов по } k}{=} \text{предлагается оставить непосчитанным}$$

Вместо расписывания свёртки, можно использовать ~~голову~~ матричные произведения

2. Определитель матрицы

По честному, определитель матрицы не умеет считать никто. Не существует *нормального* алгоритма, позволяющего посчитать определитель матрицы произвольного порядка

(запись матрицы внутри | | подразумевает определитель матрицы)

2.1. Метод приведения матрицы к треугольному виду

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \begin{vmatrix} A & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \left(1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \ldots + \frac{x}{a_n - x}\right) \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} -x \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

В (1) равенстве мы вычли из всех строчек первую.

В (2) равенстве поделили каждый столбец на $(a_i - x)$.

В (3) равенстве мы прибавили к первому столбцу все остальные столбцы

В (4) равенстве мы сказали что определитель равен произведению элементов на главной диагонали (т.к. есть треугольник из нулей), а также расписали A

В (5) равенстве вынесли x за скобку

2.2. Метод выделения множителей

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x + 1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x + 1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x + 1 \end{vmatrix} = P_{n-1}(x)$$

$$D = P_{n-1}(x) = (x - 1) P_{n-2}(x) = (x - 1)(x - 2) P_{n-3}(x) = \ldots = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n + 1) P_0(x)$$

$x = 1 : P_{n-1}(1) = 0$
$x = 2 : P_{n-2}(2) = 0$

$P_0(x) = 1$ (*приведённый многочлен*) т.к. наибольшая степень достигается только при перемножении $n - 1$ скобки стоящей на главной диагонали. У всех них коэффициент 1, поэтому и итоговый коэффициент будет 1
$\Rightarrow$ *(для этой конкретной матрицы)* $D = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n + 1)$

2.3. Метод разложения на линейные множители

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x - y - z & x & y & z \\ x - y - z & 0 & z & y \\ y + z - x & z & 0 & x \\ z + y - x & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(x - y - z), \quad (x + z - y), \quad (x + y + z) \quad (x + y - z)$$

$$D = \alpha (x - y - z)(x + z - y)(x + y + z)(x + y - z), \quad \alpha = \pm 1$$

При z^4 должен быть +, поэтому $\alpha = +1$

В (1) равенстве прибавим к первом столбцу второй и вычтем 3-ий и 4-ый
Аналогично можем:

1. Прибавить 3-ий, вычесть 2-ой и 4-ый
2. Прибавить 4-ый, вычесть 2-ой и 3-ий
3. Прибавить 2-ой, 3-ий и 4-ый

При каждом из действий из первого столбца будет выделяться скобка, причем все они взаимнопросты, а т.к. суммарная степень многочлена 4, больше скобок не будет

> Вроде определитель всего лишь 4x4, а уже душно
>
> — Москаленко Мария Александровна

2.4. Метод рекуррентных соотношений

Пример:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix} = x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) + (a_n - x) D_{n-1} =$$

$$= x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) + x \prod_{i=1}^{n-2} (a_i - x)(a_n - x) + (a_n - x)(a_{n-1} - x) D_{n-2}$$

$$D_1 = x + (a_1 - x)$$

В (1) равенстве мы разложили последний столбец по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ a_n + x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n - x \end{pmatrix}$$

Пример:

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 7 D_{n-1} - 5 \cdot 2 \cdot D_{n-2}$$

$$D_n = 7 \cdot D_{n-1} - 10 D_{n-2} \overset{(3)}{\leftrightarrow} x^2 - 7x + 10 = 0 - \text{характеристическое уравнение}$$

$$D_n = C_1 (x_1)^n + C_2 (x_2)^n, \quad C_1 = \frac{D_2 - x_2 D_1}{x_1 (x_1 - x_2)}, \quad C_2 = -\frac{D_2 - x_1 D_1}{x_2 (x_1 - x_2)}$$

В равенстве (1) найдем определитель при помощи разложения по первой строке
В равенстве (2) найдем вторую матрицу при помощи разложения по первому столбцу