Линейная алгебра
II семестр

Лектор:
Трифанов Александр Игоревич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

1. Полилинейная и тензорная алгебра

1.1. Перестановки

см. курс дискретной математики первого семестра

1.2. Пространство полилинейных форм (пространство ПЛФ)

$\sqsupset X(\mathbb{K})$ — ЛП над $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} X = n$,
$\sqsupset X^*(\mathbb{K})$ — пр-во ЛФ над $X(\mathbb{K})$

Определение: полилинейная форма
ПЛФ называется отображение
$u : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times X^* \times ... \times X^*}_{q} \to \mathbb{K}$
Обладающее следующщими свойствами (полилинейность - *линейность по всем агрументам*):
1. $u(...\ x_1 + x_2\ ...) = u(...\ x_1\ ...) + u(...\ x_2\ ...)$
2. $u(..., \lambda x, ...) = \lambda u(..., x, ...)$

Замечание:
пара (p, q) — валентность ПЛФ

Примеры:

1. $f \in X^*(\mathbb{K})$ — ПЛФ $(1, 0)$
2. $\hat{x} \in X^{**}$ — ПЛФ $(0, 1)$
3. $E_3 \quad g(x,\ y) = \langle x, y \rangle$ — ПЛФ $(2, 0)$
4. $E_3 \quad \omega(x,\ y,\ z)$ — ПЛФ $(3, 0)$

Замечание:
$\sqsupset \Omega_p^q$ — мн-во ПЛФ (p, q)

1. Равенство линейных форм

$$u, v \in \Omega_p^q : u = v \Leftrightarrow u\left(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q\right) = v\left(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q\right)$$
$$\forall x_1,\ ..., x_p \in X,\ y^1,\ ...,\ y^q \in X^*$$

2. Сумма линейных форм

$$\omega = u + v \Leftrightarrow \omega\left(x_1, ..., x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) = (u + v)\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) =$$
$$u\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) + v\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right)$$
$$\forall x_1, ..., x_p \in X,\ y^1, ...,\ y^q \in X^*$$

$\forall u, v, \omega \in \Omega_p^q \quad u + (v + \omega) = (u + v) + \omega$ — *ассоциативность*
$\exists \Theta \in \Omega_p^q \quad \Theta\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = 0, \quad \forall u \in \Omega_p^q \quad u + \Theta = u = \Theta + u$ – *существование нейтрального*
$\forall u \in \Omega_p^q \quad \exists(-u) : u + (-u) = \Theta$ — *существование обратного*

3. Произведение ПЛФ на скаляр

$$w = \lambda u \Leftrightarrow w\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = (\lambda u)\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = \lambda u\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right)$$

Теорема:
$\Omega_p^q = \Omega_p^q(\mathbb{K})$ — ЛП

Доказательство:
Проверка аксиом ЛП ■

1.3. Тензор ПЛФ

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(\mathbb{K})$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ — базис $X^*(\mathbb{K})$
$\sphericalangle \quad u\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) \ominus$

$x_1 = \sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad ... \quad x_p = \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}$

$y_1 = \sum\limits_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} \quad ... \quad y^q = \sum\limits_{j_p=1}^n \mu_{j_1}^q f^{j_q}$

$\ominus u\left(\sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} ... \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \sum\limits_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} ... \sum\limits_{j_q=1}^n \mu_{j_q}^q f^{j_q}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^n ... \sum\limits_{i_p=1}^n \sum\limits_{j_1=1}^n ... \sum\limits_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u\left(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} ... f^{j_q}\right) = \sum\limits_{i_1=1}^n ... \sum\limits_{i_p=1}^n \sum\limits_{j_1=1}^n ... \sum\limits_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}.$

$u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ — *тензор линейной формы*

Лемма:
Задание тензора $u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ в паре базисов пр-в X и X^* эквивалентно заданию самой ПЛФ u:

$$u \underset{\{e^i\}}{\overset{\{f_j\}}{\leftrightarrow}} u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$$

Доказательство:
см. выше. ■

1.4. Базис пространства ПЛФ

$\Omega_p^q(\mathbb{K})$ — пространство ПЛФ над полем $\mathbb{K}$

Замечание:
$\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(2) \quad \underset{=e_{11}}{\overset{=e^1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{12}}{\overset{=e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{21}}{\overset{=e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{22}}{\overset{=e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$(e_{11})_{ij} = {}_{11}e^{ij}$

${}_{\alpha\beta}e^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j = \begin{cases} 1, i=\alpha, j=\beta \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$\sphericalangle \quad \left\{{}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\right\}$ — набор ПЛФ в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$, такой, что:

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p} \mu_{t_1}^1 ... \mu_{t_q}^q$

Замечание:
${}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q} W^{j_1 ... j_q}_{i_1 ... i_p} = \delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q}$

Теорема:
Набор $\left\{{}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\right\}$ — базис в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$

Доказательство:
Докажем полноту
$\sqsupset u \in \Omega_p^q(\mathbb{K})$
$\sphericalangle \quad u\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$
$\Rightarrow u = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Докажем ЛНЗ
$\sphericalangle \quad {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = \theta$. Рассмотрим на поднаборе базисов $\left(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q}\right)$

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\left(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q}\right) \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$

$\delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0 \Rightarrow \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$ ■

Замечание:
$\dim_{\mathbb{K}} \Omega_p^q = n^{p+q}$

2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

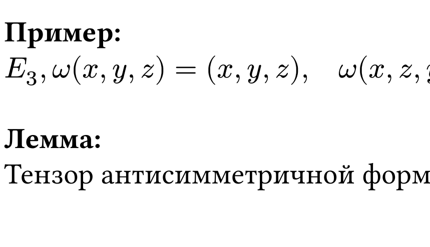
$\sphericalangle \quad \Omega_p^0(\mathbb{K})$
Определение: симметрическая форма
Форма $u \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — симметрическая, если ее значения не зависят от порядка аргументов

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$$
$$\forall \sigma \in S_p \ (\textit{группа перестановок})$$

Пример:
$E_3(\mathbb{R})\ g(x, y) = \langle x, y \rangle \quad g(x, y) = g(y, x)$

Лемма:
$\sqsupset u$ — симметричная $\Rightarrow u_{i_1 ... i_p} = u_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}}$

$\sqsupset \Sigma^p$ — множество симметричных форм



Лемма:
$\Sigma^p = \Sigma^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Определение: антисимметричная форма
$V \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — антисимметричная, если $\forall \sigma \in S_p \quad v\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{[\sigma] - \text{ чётность}} v\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Пример:
$E_3, \omega(x, y, z) = (x, y, z), \quad \omega(x, z, y) = -\omega(x, y, z)$

Лемма:
Тензор антисимметричной формы антисимметричен по индексам

$$v_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}} = (-1)^{[\sigma]} v_{i_1 ... i_p}$$

$\sqsupset \Lambda$ — мн-во антисимметричных форм

Лемма:
$\Lambda^p = \Lambda^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Замечание:
$\Lambda^p \cap \Sigma^p = \Theta$

Лемма:
$v \in \Lambda^p \Leftrightarrow v$ обнуляется на паре одинаковых аргументов

Доказательство:
$\Leftarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i ... x_i ...) = -v(... x_i ... x_i ...) \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i' + x_i'' ... x_i' + x_i'' ...) = 0$
$v(... x_i' ... x_i' ...) + v(... x_i' ... x_i'' ...) + v(... x_i'' ... x_i' ...) + v(... x_i'' ... x_i'' ...) = 0$
$v(... x_i' ... x_i'' ...) = -v(... x_i'' ... x_i' ...)$ ■

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\Rightarrow \forall v \in \Lambda^p(\mathbb{K}) \quad v\left(x_1, ..., x_p\right) = 0$

2.1. Симметризация и антисимметризация

$\sqsupset W \in \Omega_p^0(\mathbb{K}), \quad \mathbb{K} : \mathrm{char}\ \mathbb{K} = 0 \quad$ ($\mathbb{Q}$ и "больше")

Лемма:
Следующая форма является симметричной

$$u\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Доказательство:
$\sphericalangle \quad u\left(x_{\chi(1)}, ..., x_{\chi(p)}\right) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma\chi(1)}, ..., x_{\sigma\chi(p)}\right) =$
$\langle \sigma \circ \chi = \varphi, \quad \sigma = \varphi \circ \chi^{-1} \rangle$
$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\substack{\varphi \circ \chi^{-1} \\ \varphi \in S_p}} W\left(x_{\varphi(1)}, ..., x_{\varphi(p)}\right) = u\left(x_1, ..., x_p\right)$ ■

Определение: симметризация
Процесс изготовления симметрической формы из произвольной

$$(\mathrm{Sym}\ W)\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
Коэффициент $\frac{1}{p!}$ — нормировка: $W \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\ W = W$

Замечание:
$\mathrm{Sym}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$
$\mathrm{Sym}\ (u + v) = \mathrm{Sym}\ u + \mathrm{Sym}\ v$
$\mathrm{Sym}\ (\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Sym}(u)$

Лемма:
Следующая форма является антисимметричной

$$v\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Определение: антисимметризация (альтернирование)
Процесс изготовления антисимметричной формы из произвольной

$$(\mathrm{Alt}\ W)\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$
$\mathrm{Alt}(u + v) = \mathrm{Alt}\ u + \mathrm{Alt}\ v$
$\mathrm{Alt}(\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Alt}(u)$
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}\ \mathrm{Alt} = 0$

Замечание:
$\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt} \neq \mathrm{id}$
$v(p = 2)$
$A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2}$
$A^{(a)} = \frac{A - A^T}{2}$

2.2. Базис Λ^p

$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^p = \ ?$
$\sqsupset \left\{{}^{s_1 ... s_p} W\right\}$ — базис в $\Omega_p^0(\mathbb{K})$

$\sphericalangle \quad {}^{s_1 ... s_p} F = p! \mathrm{Alt}\left({}^{s_1 ... s_p} W\right)$

$\left\{{}^{s_1 ... s_p} F\right\}$ — набор в Λ^p — ПН, но не ЛНЗ

Лемма:
Форма ${}^{s_1 ... s_p} F$ — антисимметрична по своим индексам
${}^{... s_i ... s_j ...} F = -{}^{... s_j ... s_i ...} F$

Доказательство:
$D^{... s_i ... s_j ...} F\left(... x_i ... x_j ...\right) = p! \mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...} W\left(... x_i ... x_j ...\right) = p! (\mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...} W)\left(... x_i ... x_j ...\right) =$
$= -p! (\mathrm{Alt}\ {}^{... s_j ... s_i ...} W)\left(... x_i ... x_j ...\right) = -{}^{... s_j ... s_i ...} F\left(... x_i ... x_j ...\right)$

Замечание:

1. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F,\ {}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$ — ЛЗ
2. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F = -{}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$

$\sphericalangle \quad \left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid \underbrace{1 \le s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_p \le n}_{\vec{s}} \right\}$

Теорема: $\left\{ {}^{\vec{s}}F \right\}$ — базис в Λ^p

Доказательство:
ПН: $\sqsupset U \in \Lambda^p$

$U = {}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p}$

$\text{Alt } U = U = \text{Alt } \left({}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p} \right)$

$= (\text{Alt } {}^{s_1 \dots s_p}W) u_{s_1 \dots s_p}$

$= \frac{1}{p!} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_1 \dots s_p} = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\vec{s}} \sum\limits_{\sigma \in S_p} {}^{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$

$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\vec{s}} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} {}^{s_1 \dots s_p}F (-1)^{[\sigma]} u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}} = \frac{1}{p!} p! \sum\limits_{\vec{s}} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$

ЛНЗ: $\sphericalangle \quad {}^{\vec{s}}F \alpha_{\vec{s}} = \theta \quad \mid \left(e_{i_1} \dots e_{i_p} \right)$

$F\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{\vec{s}} = 0$

$p! \text{ Alt } {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$

$p! \sum\limits_{\sigma \in S_p} {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(1)}} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p}$

$p! \sum\limits_{\sigma \in S_p} \delta^{s_1}_{i_{\sigma(1)}} \delta^{s_2}_{i_{\sigma(2)}} \dots \delta^{s_p}_{i_{\sigma(p)}} \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$

$\sum\limits_{\sigma \in S_p} \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = 0 \quad (\vec{s})$

$\alpha_{i_{\varphi(1)} \dots i_{\varphi(p)}} = 0$

Пример:
$\text{char } K = 2 \quad \{0, 1\}$

Замечание:
$!V(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -V(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$
$\text{char } K = 0 \quad K \supset \mathbb{Q}$

Базис:
$\left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid 1 \le s_1 < s_2 \dots < s_p \le n \right\}$

Замечание:
$\dim_K \Lambda^p = C^p_n$

Замечание:

$$\begin{array}{lll} \Lambda^0 & \dim_K \Lambda^0 = 1 & K \\ \Lambda^1 & \dim_K \Lambda^1 = n & X^*(K) \\ \Lambda^2 & \dim_K \Lambda^1 = \frac{n(n-1)}{2} & \text{Mat}^{\text{alt}}_n(2) \\ \vdots & & \\ \Lambda^n & \dim_k \Lambda^n = 1 & \end{array}$$

Базис $\Lambda^n \quad \left\{ {}^{123 \dots n}F \right\} \Rightarrow \forall U \in \Lambda^n \quad U = \alpha \cdot {}^{123 \dots n}F \}, \alpha \in K$

Замечание:
$\sqsupset p > n \Rightarrow \Lambda^p = \{\theta\}$

Определение: определитель
$\sphericalangle \quad {}^{123 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = n! \text{ Alt } {}^{123 \dots n}W(x_1 \dots x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} {}^{\sigma(1) \dots \sigma(n)}W(x_1 \dots x_n)(-1)^{[\sigma]}$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^{\sigma(1)}_1 \xi^{\sigma(2)}_2 \dots \xi^{\sigma(n)}_p \triangleq \det\{x_1 \dots x_n\}$ — *определитель*

Замечание:
$x_i \leftrightarrow \xi_i$

$\sphericalangle \quad A = \begin{pmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \dots & \xi^1_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \dots & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \dots & \xi^n_n \end{pmatrix} \quad \det\{x_1 \dots x_n\} \equiv \det A$

- Понятно?
- *молчание*
- Понятно. Всем понятно?
- *нервный смешок*
- Нет, не всем...
- *смех погромче*
- Ну ладно. На экзамене станет понятно.

3. Произведение ПЛФ

3.1. Определения

$\sqsupset U \in \Omega^{q_1}_{p_1}(K) \quad V \in \Omega^{q_2}_{p_2}(K)$
Определение: произведение ПЛФ
U и V — ПЛФ форма $W = U \cdot V$ — *произведение ПЛФ*:
$W\left(x_1, ..., x_p, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^q, ...y^{q_1+q_2}\right)$
$= U\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^{p_1}\right) \cdot V(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}; y^{q_1}, ..., y^{q_1+q_2}$

Замечание:
W — ПЛФ (p_1+p_2, q_1+q_2)
Лемма:
$U \leftrightarrow u^{j_1,...j_{q_1}}_{i_1,...,i_{p_1}}, \quad V \leftrightarrow v^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}$

$UV \leftrightarrow u^{j_1,...j_{q_1}}_{i_1,...,i_{p_1}} v^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}} = w^{j_1,...,j_{q_1+q_2}}_{i_1,...,i_{p_1+p_2}} \leftrightarrow W$

Свойства:
1. $U \cdot V \neq V \cdot U$
   Пример:
   $f, g \in X^*(K)$
   $x, y \in X(K)$
   $(f \cdot g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \neq (g \cdot f)(x, y) = g(x) \cdot f(y)$

2. $U \in \Omega^{q_1}_{p_1}(K) \quad V \in \Omega^{q_2}_{p_2}(K) \quad U \cdot V \in \Omega^{q_1+q_2}_{p_1+p_2} \leftrightarrow$ внешнее произведение

3. $U \in \Omega^{q_1}_{p_1}(K) \quad \theta \in \Omega^{q_2}_{p_2}(K) \quad U \cdot \theta = \theta \cdot U = \theta \in \Omega^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}(K)$

4. $\forall U, V, W : (U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$

5. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$

6. $\forall \alpha \in K \quad U \cdot (\alpha V) = (\alpha U) \cdot V = \alpha \cdot (U \cdot V)$

7. $\sqsupset \{{}^{s_1...s_p}W\}$ — базис $\Omega^0_p(K)$

   $\sqsupset \{f^j\}$ — базис $X^*(K) \Rightarrow$

   ${}^{s_1...s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}$

   $\sphericalangle \quad {}^{s_1...s_p}W\left(x_1...x_p\right) = \xi^{s_1}_1 \xi^{s_2}_2 ... \xi^{s_p}_p$

   $=< \{e_i\}$ - базис, сопр. $\{f^j\} >= f^{s_1}(x_1) \cdot ... f^{s_p}\left(x_p\right)$

   $= (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Замечание:

$\left\{{}^{s_1...s_p}_{t_1...t_q}W\right\}$ — базис $\Omega^q_p(K) \qquad \left\{{}^{s_1...s_p}_{t_1...t_q}W\right\}\left(x_1...x_p y^1...y^q\right) = \xi^{s_1}_1...\xi^{s_p}_p \eta^1_{t_1}...\eta^q_{t_q}$

$\left\{f_j\right\}$ — базис $X^*(K)$,

$\{\hat{e}_m\}$ — базис $X^{**}(K) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{s_1...s_p}_{t_1...t_q}W = f^{s_1} \cdot ... \cdot f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \cdot ... \cdot \hat{e}_{t_q}$

Пространство, в котором эта операция является внутренней:
Определение: внешняя алгебра полилинейных форм
$\sphericalangle \quad \Omega = \Omega^0_0 \dotplus \Omega^1_0 \dotplus \Omega^0_1 \dotplus \Omega^1_1 \dotplus ... = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \bigoplus\limits_{j=0}^{\infty} \Omega^j_i$
$\omega \in \Omega \qquad \omega_1 = V_1 + W_1$
$\qquad \omega_2 = V_2 + W_2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = (V_1 + V_2) \cdot (W_1 + W_2)$
$(\Omega, +, \cdot)$ — *внешняя алгебра ПЛФ*

3.2. Алгебра Грассмана

Вступление:
$\sqsupset U \in \Lambda^p, \quad V \in \Lambda^q$
$?\, U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$ неправда.
$\sqsupset U \cdot V = W$
$W\left(x_1, ..., x_p, \quad x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = U\left(x_1, ..., x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Определение: антисимметричное произведение ПЛФ
$U \wedge V = \mathrm{Alt}(U \cdot V) \cdot \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$ — *антисимметричное произведение ПЛФ*

Лемма:
$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\ U \cdot V) = \mathrm{Sym}(U \cdot \mathrm{Sym}\ V) = \mathrm{Sym}(U \cdot V)$
$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V) = \mathrm{Alt}(U \cdot \mathrm{Alt}\ V) = \mathrm{Alt}(U \cdot V)$

Доказательство *(для альтернирования)***:**
$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \mathrm{Alt}\ \left[\frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} U \cdot V\right] \left(x_{\sigma_{(1)}} x_{\sigma_{(p)}} x_{p+1} ... x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)] \left(x_{\sigma_{(1)}}, x_{\sigma_{(p)}}, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)] \left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \cdot p! (\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Свойства внешнего произведения:
$\sqsupset U \in \Omega^0_p \quad V \in \Omega^0_q$

1. Суперкоммутативность:
   $U \wedge V = (-1)^{p \cdot q}\ V \wedge U$

   Доказательство:
   $(U \wedge V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \frac{(p+q)!}{p!q!}\ \mathrm{Alt}\ (U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$
   $= (-1)^{p \cdot q} \frac{(p+q)!}{p!q!}\ \mathrm{Alt}\ (V \cdot U)\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q},\ x_1, ..., x_p\right)$

   Замечание:
   $f \wedge g = -g \wedge f \quad \forall f, g \in X^*(K)$
   $v \wedge \omega^{(2m)} = \omega^{(2m)} \wedge v$

2. Ассоциативность:
   $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W$

   Доказательство:
   очевидно (доказательство оставлено читателям в качестве простого, но обязательного упражнения)

3. $U \wedge (\alpha V) = (\alpha U) \wedge V = \alpha(U \wedge V) \qquad \forall \alpha \in K$

4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$

5. $\{{}^{s_1...s_p}F\}$ — базис $\Lambda^p \Rightarrow {}^{s_1...s_p}F = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... \wedge f^{s_p}$

   Доказательство:
   ${}^{s_1...s_p}F = p!\ \mathrm{Alt}({}^{s_1...s_p}W) = p!\ \mathrm{Alt}\ (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})$
   $= p! \frac{1(p-1)!}{p!} \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... f^{s_p}) = (p-1)! \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}) = ...$
   $= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... f^{s_p}$

6. $U \in \Lambda^p,\ v \in \Lambda^q$

   $u \wedge v = 0 \qquad p + q > n$

   $\sphericalangle \quad \Lambda \in \bigoplus\limits_{j=0}^{n} \Lambda^j \quad \dim_K \Lambda^j = C^j_n$

   $\dim_K \Lambda = 2^n$

> Всё, что было до этого — детский сад. Ну может начальная школа
>
> — Трифанов Александр Игоревич

$(\Lambda, +, \wedge)$ — алгебра Грассмана

Определение: градуированная алгебра
Λ — *градуированная алгебра*, если:
$U \in \Lambda^P, V \in \Lambda^q \Rightarrow U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$
$\Lambda^p \Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}$

Пример:
Алгебра многочленов

4. Определитель

$\sphericalangle \quad \dim_K \Lambda^n = 1 \Rightarrow \{{}^{12...n}F\}$ — базис Λ^n

Определение: определитель
Определитель набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ — "число"

$$\det\{x_1...x_n\} = {}^{12...n}F(x_1x_2...x_n) = n!\ \mathrm{Alt}\ {}^{12...n}W(x_1x_2...x_n) = n! \cdot \tfrac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{[\sigma]\,12...n}W\left(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}...\xi^n_{\sigma(n)}$$

Замечание:
Альтернативная форма:

$$C := [x_1x_2...x_n] = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & ... & \xi^1_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & ... & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & ... & \xi^n_n \end{bmatrix}$$

$\det C := \det\{x_1...x_n\}$

4.1. Определитель как форма объёма

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ — набор в $X(K)$

Определение: параллелепипед, построенный на векторах набора $\{x_i\}_{i=1}^n$

Множество следующего вида: $T_{n\{x_1...x_n\}} = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda^i x_i \mid \lambda^i \in [0,\ 1]\ \forall i\right\}$

$\sqsupset \omega$ — форма объёма в $X(K)$ $(K = \mathbb{R})$

Свойства:

1. $\mathrm{codom}\ \omega \in \mathbb{R}$
2. $\omega T\{...x'_i + x''_i...\} = \omega T\{...x'_i\} + \omega T\{...x''_i...\}$
   $\omega T\{...\lambda x_i...\} = \lambda\omega T\{...x_i...\}$
3. $\omega T\{x_1...x_n\} = 0 \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ — ЛЗ

$\Rightarrow \omega \in \Lambda^n \Rightarrow \omega \sim \det$
Вычисление определителя — вычисление объёма параллелепипеда, построенного на векторах набора

4.2. Свойства определителя

Замечание:

$$\det\{x_1...x_n\} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}...\xi^n_{\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & ... & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & ... & \xi^n_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^1_n & ... & \xi^n_n \end{vmatrix}$$

1.
$\det C^T = \det C$

Доказательство:

$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}...\xi^n_{\sigma(n)} = \det C$

$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{[\sigma]}\xi_1^{\sigma(1)}\xi_2^{\sigma(2)}...\xi_n^{\sigma(n)} \triangleq \det C^T$

$$\begin{pmatrix} \sum_\sigma {}^{12...n}W\left(x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}\right) = \xi^1_{\sigma(1)}...\xi^n_{\sigma(n)} \\ \sum_\sigma {}^{\sigma(1)\sigma(2)...\sigma(n)}W(x_1...x_n) = \xi_1^{\sigma(1)}...\xi_n^{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

2.
$\det\{...x'_i + x''_i...\} = \det\{...x'_i...\} + \det\{...x''_i...\}$
$\det\{...\lambda x_i...\} = \lambda\det\{...x_i...\}$
$\det\{\lambda C\} = \lambda^n \det C$
$\det(C_1 + C_2) \neq \det C_1 + \det C_2$

3.
$\det\{...x_i...x_j...\} = \det\{...x_i...x_j + \lambda x_i\}$

4.
$\det\{...x_i...x_j...\} = -\det\{...x_j...x_i...\}$

5.
Рекуррентная формула

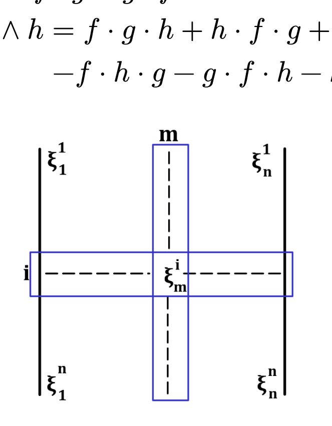
$\det C = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j}\xi^i_j M^i_j$ — разложение по j-му столбцу

$\det C = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}\xi^i_j M^i_j$ — разложение по i-ой строке

Доказательство:

$\det C = {}^{12...n}F(x_1x_2...x_n) =$
$= f^1 \wedge f^2 \wedge ... \wedge f^n(x_1x_2...x_n)$
$= f^1 \wedge f^2 \wedge ... \wedge f^m \wedge ... \wedge f^n(x_1...x_m...x_n)$
$=< x_m = \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i; f^j(e_i) = \delta^j_i >$
$= f^1 \wedge ... \wedge f^m \wedge ... \wedge f^n\left(x_1... \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i ... x_n\right)$
$= \sum_{i=1}^n f^1 \wedge ... \wedge f^m \wedge ... \wedge f^n\left(x_1... \underset{m\curvearrowright}{\underline{e_i}} ...x_n\right)$
$= \sum_{i=1}^n \xi^i_m(-1)^{i+m} f^1 \wedge ... \wedge f^{m-1} \wedge f^{m+1} \wedge ... \wedge f^n(x_1...x_{m-1}x_{m+1}...x_n))$
$= \sum_{i=1}^n \xi^i_m(-1)^{i+m}M^i_m$ $\quad\circleddash$

$f \wedge g = f \cdot g - g \cdot f$
$f \wedge g \wedge h = f \cdot g \cdot h + h \cdot f \cdot g + g \cdot h \cdot f -$
$\quad - f \cdot h \cdot g - g \cdot f \cdot h - h \cdot g \cdot f$



Определение: алгебраическое дополнение
Алгебраическим дополнением элемента ξ^i_m называется "число":

$$A^i_m = (-1)^{i+m}M^i_m$$

Замечание:

$\det C = \sum_{i=1}^n \xi^i_m A^i_m$

Теорема: (*Лапласа*)
Определитель матрицы равен сумме произведений миноров матрицы на их алгебраических дополнениях

$\det C = \sum_{i_1...i_p} (-1)^{i_1+...+i_p+j_1+...j_p} M^{i_1...i_p}_{j_1...j_p} L^{i_1...i_p}_{j_1...j_p}$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + ...$$ ("*кому интересно, дома досчитаете*")

Доказательство:

Продолжаем "доказательство" предыдущего свойства

$\circleddash \sum_{i=1}^n \xi^i_m(-1)^{i+m} \sum_{j=1}^n \xi^j_l(-1)^{j+l}M^{ij}_{ml} = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\xi^i_m\xi^j_l}_{L^{ij}_{ml}}(-1)^{i+m+j+l}M^{ij}_{ml}$

Замечание:

$\det \mathrm{diag}\ \{\lambda_1...\lambda_n\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
$\det \mathrm{diag}\ \{C_1C_2...C_m\} = \prod_{i=1}^m \det C_i$

$$\det\begin{bmatrix} C_1 & * & ... & * \\ 0 & C_2 & ... & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & ... & C_m \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \det C_i$$

Замечание:
$\sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b$ — система Крамера
$\Rightarrow \xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det\{a_i...a_n\}, \Delta_i = \det\left\{a_1... \underset{i\curvearrowright}{b} ...a_n\right\}$

Доказательство:
$\Delta_i = \det\{a_1...b...a_n\} = \det\left\{a_1... \sum_{i=1}^n \xi^i a_i...a_n\right\} = \det\{a_1...\xi^i a_i...a_n\} = \xi^i\Delta$

5. Ранг матрицы

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ — набор в $X(K)$

$\det\{x_1...x_n\} = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ — ЛЗ

Сколько ЛНЗ векторов в наборе $\{x_i\}_{i=1}^n$?

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛЗ $\Leftarrow \forall V \in \Lambda^M\ V(x_1...x_m) = 0$

Доказательство:
От противного: $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ (при $\uparrow$ этом условии)
$x_1x_2...x_m$
$\downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow$
$e_1e_2\quad e_me_{m+1}...e_n$ — базис $X(K)$
$\sqsupset \{f^j\}_{j=1}^n$ — базис, сопряженный к $\{e_i\}_{i=1}^n$: $f^j(e_i) = \delta^j_i$

$\sphericalangle \quad f^1 \wedge f^2 \wedge ... \wedge f^m(x_1x_2...x_m) = \sum_{\sigma\in S_m} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot ... \cdot f^{\sigma(m)}(x_1x_2...x_m) \sim$

$\sim C \cdot \sum_{\sigma\in S_m} (-1)^{[\sigma]}\xi_1^{\sigma(1)}\xi_2^{\sigma(2)}...x_m^{\sigma(m)}$

$= C \cdot \delta_1^{\sigma(1)}\delta_2^{\sigma(2)}...\delta_m^{\sigma(m)} = C \neq 0$

Нашли m-форму, которая не обнуляется. Противоречие
${}^{12...m}F = m!(\mathrm{Alt}\ {}^{12...m}W) = m!\frac{1}{m!}\sum$

Замечание:
Если хотя бы одна m-форма отлична от нуля, то набор $\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ

$V \in \Lambda^m \quad \sqsupset \{{}^{s_1...s_m}F\}$ — базис Λ^m

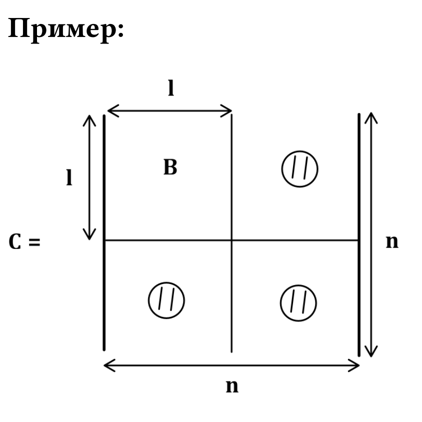
Замечание:
Для проверки ЛЗ достаточно проверить базисные формы
$\{x_i\}_{i=1}^n : \forall s_1...s_p, 1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_m \leq n \quad {}^{s_1...s_p}F(x_1...x_m) = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛЗ

$$\sphericalangle \quad C = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & ... & \xi^1_m \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & ... & \xi^2_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & ... & \xi^n_m \end{bmatrix} \longleftarrow \text{сколько ЛНЗ}$$

${}^{s_1}F \quad {}^{s_1s_2}F \quad {}^{s_1s_2s_3}F$

Определение: ранг матрицы
Рангом матрицы C называется её наибольший порядок отличного от нуля минора
$\mathrm{rg}\ (C) \quad \mathrm{rank}(C) \quad \mathrm{rk}(C)$

Пример:



$$B = \begin{bmatrix} b_1 & * & * & ... & * \\ 0 & b_2 & * & ... & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & b_c \end{bmatrix}$$

1. $b_1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\ C \geq 1$
2. $b_1b_2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\ C \geq 2$

$\vdots$

l. $\prod_{i=1}^l b_i \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\ C \geq l$

$l+1$. $V\ L^{i_1...i_{l+1}}_{j_1...j_{l+1}} \Rightarrow \mathrm{rank}\ C = l$

Определение: базисные столбцы (строки)
Базисными столбцами (строками) матрицы C называются столбцы (строки), входящие в базисный минор

Лемма:
Любая строка (столбец) матрицы C является линейной комбинацией базисных строк (столбцов)
Доказательство:
Очевидно. 😎

Теорема: (*о ранге*)
Ранг матрицы равен кол-ву ЛНЗ строк или столбцов матрицы

Свойства ранга:
1. `pass`
2.

5.1. Теорема Крамера и Кронекера-Капелли

$\sqsupset \sum_{i=1}^n \xi^1 a_1 = b$ — СЛАУ

$A = [a_1a_2...a_n], \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}$

В матричной форме $A\xi = b \quad (*)$
Теорема: (*Крамер*)
$(*)$ совместна и определена $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $\{a_1a_2...a_n\}$ — базис $K^n \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ — ЛНЗ $\Rightarrow \det\{a_1...a_n\} \neq 0$
$\Leftarrow$: $\det\{a_1...a_n\} = \det A \neq 0 \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ — ЛНЗ $\Rightarrow$ max + ЛНЗ $\Rightarrow$ базис $\Rightarrow \exists$ решение $\forall b$
$\xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Теорема: (*Кронекера-Капелли*)
$\sphericalangle \quad A\xi = b \quad (*)$
$A, [A \mid b]$ — расширенная матрицы
Система $(*)$ совместна $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ [A \mid b]$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $(*)$ совместна $\Rightarrow b \in \langle a_1...a_n\rangle \Rightarrow$ добавление столбца b не меняет ранга A
$\Rightarrow \mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ [A \mid B]$
$\Leftarrow$: $\mathrm{rank}\ [A \mid b] = \mathrm{rank}\ A \Rightarrow b \in \langle a_1...a_n\rangle \Rightarrow$ совместна

5.2. Вычисление ранга

Лемма:
Гауссовы (элементарные) преобразования не меняют ранг матрицы
1. Сложение строк (не меняет определитель)
2. Умножение строки на число $\neq 0$ (определитель умножается на λ)
3. Перестановка строк (меняет только знак определителя)

Приведение к верхнему треугольному виду

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & ... & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & ... & a^n_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \tilde{a}^1_1 & \tilde{a}^1_2 & ... & \tilde{a}^1_n \\ 0 & \tilde{a}^2_2 & ... & \tilde{a}^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ? \end{bmatrix}$$

rank A — кол-во отличных от нуля строк