Дискретная математика
II семестр

Лектор: Станкевич Андрей Сергеевич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

Надеюсь, сессия прошла нормально

— Станкевич Андрей Сергеевич

1. Дискретная теория вероятностей

1.1. Введение

Случайности и вероятности давно интересовали людей, *в основном в азартных играх*. Первые теоремы дискретной теории вероятностей появились задолго до появления первого конечного автомата. Но философы всех времён задаются вопросом — "существует ли случайность?"
Философская мысль делится на 2 направления — считающих, что случайности существуют, и ~~остальных~~ детерминистов, считающих, что у нас просто недостаточно входных данных
Это всё мы с вами изучать не будем

1.2. Аксиоматическая теория вероятностей

by *Андрей Николаевич Колмогоров*

Бытовое восприятие случайностей мешает в понимании формальной модели

Определение: множество элементарных исходов
Ω — множество всех возможных элементарных исходов случайного эксперимента, который может закончиться ровно одним из них
Ω может быть не более чем счётным, счётным, или не счётным. Но мы будем рассматривать дискретное множество элементарных исходов
$|\Omega|$ — конечно или счётно

Определение: элементарный исход
Элемент $\omega \in \Omega$

Определение: дискретная плотность вероятности
$p : \Omega \to \mathbb{R} : p(\omega \geq 0), \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
Если Ω несчётна, то требуется другая теория

Определение: дискретное вероятностное пространство
Пара из множества элементарных исходов и дискретной плотности вероятностей (Ω, p)

Примеры:

1. Честная монета:
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$
2. Нечестная монета (распределение Бернулли):
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(1) = p,\ p(0) = 1 - p$
3. Честная игральная кость *(1d6)*:
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ p(i) = \frac{1}{6}$
   1. "Честная" игральная кость (1d20):
      $\Omega = \{1, ..., 20\},\ p(20) = 1$
4. Колода карт:
   $\Omega = \{\langle r, s\rangle \mid r = 1...13, s = 1...4\},\ p(\langle r, s\rangle)$

Определение: случайное событие
Подмножество элементарных исходов $A \subset \Omega, \quad P(A) = \sum\limits_{a \in A} p(a)$
Дискретное множество элементарных исходов является случайным событием

Примеры:

1. Пустое событие $P(\varnothing) = 0$
2. Достоверное событие (полное (?)) $P(\Omega) = 1$
3. *Для честной монеты* $P(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{2}$
4. *Для честной 1d6* $P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$

1.3. Независимость событий

Определение: независимое случайное событие
A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Примеры:
Для честной игральной кости
$\text{Even} = \{2, 4, 6\}, \quad \text{Big} = \{5, 6\}, \quad \text{Small} = \{1, 2, 3\}$

- $P(\text{Even} \cap \text{Big}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Big}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(\text{Even} \cap \text{Small}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(\text{Big} \cap \text{Small}) = P(\varnothing) = 0 \qquad P(\text{Big}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Определение: события, независимые в совокупности
$A_1, A_2, ..., A_k$ – независимы в совокупности, если $\forall I \subset \{1, 2, ..., k\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Примеры:
Для броска двух разных честных монет
$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}, \quad p(i \cdot j) = \frac{1}{4}$
$A = \{01, 00\}, \quad B = \{10, 00\}, \quad C = \{11, 00\}$ не независимы в совокупности

1.4. Прямое произведение вероятностных пространств

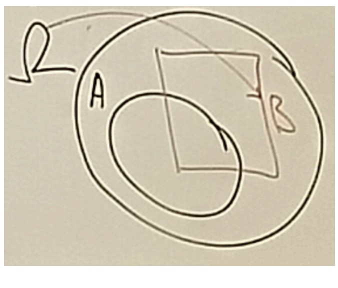
Определение: прямое произведение вероятностей пространств
$\langle \Omega_1, p_1 \rangle, \quad \langle \Omega_2, p_2 \rangle$, прямое произведение пространств $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : \quad p(\langle u_1, u_2 \rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$
$\sum_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in \Omega_1 \times \Omega_2} p(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = \sum p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1} \left(p_1(\omega_1) \cdot \sum_{\omega_2} p_2(\omega_2) \right) = 1$

Пример:
$A_1 \subset \Omega_1, \ A_2 \subset \Omega_2 \Rightarrow A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ — независимы
$(A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$

1.5. Условная вероятность

имеет смысл, если $P(B) \neq \varnothing$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$



если A и B независимы, то
$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{P(B)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$

Теорема: (*Формула полной вероятности*)
$\Omega = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k,}_{\text{полная система событий}} \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$B \qquad P(B|A_i)$
$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$
$\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \cdot P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = P(B)$

Задача:
Две урны, в одной 3 черных и 2 белых, в другой 4 черных и 1 белый шар. С какой вероятностью можно вынуть черный шар?
$A_1 \quad A_2 \quad \frac{1}{2}$
$P(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad P(B|A_2) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Задача:
$P(B|A_i) \quad P(A_i)$ найти $P(A_i|B) = ?$
Достоверность = 1 - $P(B|A_2)$ = 99%
Надёжность = $P(B|A_1)$ = 95%
A_1 — болен ($\frac{1}{100}$)

A_2 — здоров ($\frac{99}{100}$)

$P(A_1|B) = \frac{0,95 \cdot 0,01}{0,95 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,99}$

$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

Определение: формула Байеса

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}$

Определение: Байесовский спам-фильтр
A_1 — спам
A_2 — не спам
B — критерий
$P(B|A_1)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо спам *(можно посчитать)*
$P(B|A_2)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо не спам *(можно посчитать)*

Сам фильтр: $P(A_1|B)$ — вероятность спама при выполнении критерия *(можно вычислить, используя значения выше)*