Дискретная математика
II семестр

Лектор: Станкевич Андрей Сергеевич

зима/весна 2024

_scarleteagle **ikochelorov**

Оглавление

Надеюсь, сессия прошла нормально

— Станкевич Андрей Сергеевич

1. Дискретная теория вероятностей

1.1. Введение

Случайности и вероятности давно интересовали людей, *в основном в азартных играх*. Первые теоремы дискретной теории вероятностей появились задолго до появления первого конечного автомата. Но философы всех времён задаются вопросом — “существует ли случайность?”
Философская мысль делится на 2 направления — считающих, что случайности существуют, и ~~остальных~~ детерминистов, считающих, что у нас просто недостаточно входных данных
Это всё мы с вами изучать не будем

1.2. Аксиоматическая теория вероятностей

by *Андрей Николаевич Колмогоров*

Бытовое восприятие случайностей мешает в понимании формальной модели

Определение: множество элементарных исходов
Ω — множество всех возможных элементарных исходов случайного эксперимента, который может закончиться ровно одним из них
Ω может быть не более чем счётным, счётным, или не счётным. Но мы будем рассматривать дискретное множество элементарных исходов
$|\Omega|$ — конечно или счётно

Определение: элементарный исход
Элемент $\omega \in \Omega$

Определение: дискретная плотность вероятности
$p : \Omega \to \mathbb{R} : p(\omega \geq 0),\ \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
Если Ω несчётна, то требуется другая теория

Определение: дискретное вероятностное пространство
Пара из множества элементарных исходов и дискретной плотности вероятностей (Ω, p)

Примеры:

1. Честная монета:
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$
2. Нечестная монета (распределение Бернулли):
   $\Omega = \{0, 1\},\ p(1) = p,\ p(0) = 1 - p$
3. Честная игральная кость *(1d6)*:
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ p(i) = \frac{1}{6}$
   1. “Честная” игральная кость (1d20):
      $\Omega = \{1, ..., 20\},\ p(20) = 1$
4. Колода карт:
   $\Omega = \{\langle r, s\rangle \mid r = 1...13, s = 1...4\},\ p(\langle r, s\rangle)$

Определение: случайное событие
Подмножество элементарных исходов $A \subset \Omega, \quad P(A) = \sum\limits_{a \in A} p(a)$
Дискретное множество элементарных исходов является случайным событием

Примеры:

1. Пустое событие $P(\varnothing) = 0$
2. Достоверное событие (полное (?)) $P(\Omega) = 1$
3. *Для честной монеты* $P(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{2}$
4. *Для честной 1d6* $P(\{1,3,5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{5,6\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{2}$

1.3. Независимость событий

Определение: независимое случайное событие
A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Примеры:
Для честной игральной кости
$\text{Even} = \{2,4,6\}, \quad \text{Big} = \{5,6\}, \quad \text{Small} = \{1,2,3\}$

- $P(\text{Even} \cap \text{Big}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Big}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(\text{Even} \cap \text{Small}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\text{Even}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(\text{Big} \cap \text{Small}) = P(\varnothing) = 0 \qquad P(\text{Big}) \cdot P(\text{Small}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Определение: события, независимые в совокупности
$A_1, A_2, ..., A_k$ – независимы в совокупности, если $\forall I \subset \{1, 2, ..., k\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Примеры:
Для броска двух разных честных монет
$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}, \quad p(i \cdot j) = \frac{1}{4}$
$A = \{01, 00\}, \quad B = \{10, 00\}, \quad C = \{11, 00\}$ не независимы в совокупности

1.4. Прямое произведение вероятностных пространств

Определение: прямое произведение вероятностей пространств
$\langle \Omega_1, p_1 \rangle, \quad \langle \Omega_2, p_2 \rangle$, прямое произведение пространств $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : \quad p(\langle u_1, u_2 \rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$

$$\sum_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in \Omega_1 \times \Omega_2} p(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = \sum p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1} \left(p_1(\omega_1) \cdot \sum_{\omega_2} p_2(\omega_2) \right) = 1$$

Пример:
$A_1 \subset \Omega_1, \ A_2 \subset \Omega_2 \Rightarrow A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ — независимы
$(A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$

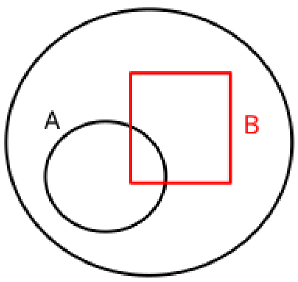
1.5. Условная вероятность

имеет смысл, если $P(B) \neq \varnothing$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$

если A и B независимы, то
$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{P(B)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$



Теорема: (*Формула полной вероятности*)
$\Omega = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k}_{\text{полная система событий}}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$B \qquad P(B|A_i)$
$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$
$\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)} \cdot P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = P(B)$

Задача:
Две урны, в одной 3 черных и 2 белых, в другой 4 черных и 1 белый шар. С какой вероятностью можно вынуть черный шар?
$A_1 \quad A_2 \quad \frac{1}{2}$
$P(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad P(B|A_2) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Задача:
$P(B|A_i) \quad P(A_i)$ найти $P(A_i|B) = ?$
Достоверность = 1 - $P(B|A_2)$ = 99%
Надёжность = $P(B|A_1)$ = 95%
A_1 — болен ($\frac{1}{100}$)

A_2 — здоров ($\frac{99}{100}$)

$P(A_1|B) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}01}{0{,}95 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99}$

$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

Определение: формула Байеса

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}$

Определение: Байесовский спам-фильтр
A_1 — спам
A_2 — не спам
B — критерий
$P(B|A_1)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо спам *(можно посчитать)*
$P(B|A_2)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо не спам *(можно посчитать)*

Сам фильтр: $P(A_1|B)$ — вероятность спама при выполнении критерия *(можно вычислить, используя значения выше)*

1.6. Случайная величина

Определение: случайная величина
$\langle\Omega,\ p\rangle$ — вероятностное пространство
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина (численная характеристика вероятностного эксперимента*

Примеры:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
η — выигрыш Васи

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	…
η	2	4	8	16	…

Операции над случайными величинами:
Произведение с числом:
$\xi = c \cdot \eta \quad c \in \mathbb{R}$
Сумма случайных величин:
$\xi = \eta + \zeta$
Произведение случайных величин:
$\xi = \eta \cdot \zeta$
Возведение в степень случайной величины:
$\xi = \eta^{\zeta}$
Можно даже рассмотреть синус случайной величины:
$\xi = \sin\zeta$

Определение: дискретная плотность распределения
ξ — случайная величина
$f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *дискретная плотность распределения*
$f_\xi(a) = P(\xi = a) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) = a\})$

Определение: функция распределения
ξ — случайная величина
$F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функция распределения*
$F_\xi(a) = P(\xi \le a)$

Пример:
Подбросим 10 монет
$\Omega = \mathbb{B}^{10}$
$\xi(\omega)$ — число единиц

$P(\xi = a) = \frac{\binom{10}{a}}{2^{10}}$

$f(a) = F(a) - F(a - \delta)$
$F(a) = \sum\limits_{b \leq a} f(b)$

1.7. Математическое ожидание

Определение: математическое ожидание
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega)$ — *математическое ожидание*

Пример:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
$\mathrm{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Легко заметить, что 3.5 никогда не выпадает на игральной кости
Математическое ожидание не означает наиболее вероятные исход

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

$E\xi = 0$
Математическое ожидание равно 0, но при этом, после 1 игры, Вася либо получит монету, либо потеряет

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	…
η	2	4	8	16	…

$\mathrm{E}_\xi = +\infty$
Математическое ожидание может равняться $+\infty$

$\mathrm{E}c = c$
Математическое ожидание константы равняется константе

Линейность математического ожидания:
Теорема:
$\xi = c \cdot \eta \quad \mathrm{E}\xi = c \cdot \mathrm{E}\eta$
$\xi = \eta + \zeta \quad \mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

$\mathrm{E}(\eta + \xi) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta + \zeta)(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta(\omega) + \zeta(\omega)) = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

Примечание:
Если $|\Omega| = +\infty$, то $\exists \mathrm{E}\xi \ \Leftrightarrow \exists \mathrm{E}(|\xi|)$

Пример:
ξ — выпало на верхней грани игральной кости D6
η — выпало на нижней грани
$\mathrm{E}\xi = 3.5, \mathrm{E}\eta = 3.5$
$\mathrm{E}(\xi + \eta) = 7$
Вне зависимости от расположения значений на игральной кости относительно друг друга

Пример:
$\Omega = S_n$ — перестановки n элементов
$|\Omega| = n!$
$\xi(\sigma) = |\{i \mid \sigma_i = i\}|$ — количество неподвижных точек
$n = 3 \quad \xi(\langle 1, 3, 2 \rangle) = 1$
$\mathrm{E}\xi = 1$
Мы можем посчитать математическое ожидание, не зная распределение

$\xi_i = \begin{cases} 1, & \sigma_i = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
$\xi_1(1\ 3\ 2) = 1$
$\xi_2(1\ 3\ 2) = 0$
$\xi_3(1\ 3\ 2) = 0$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
$P(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi_i = 1 \cdot P(\xi_i = 1) + 0 \cdot P(\xi_i = 0) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

Теорема:
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_a a \cdot P(\xi = a)$
$\sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_a \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_a a \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} p(\omega) = \sum\limits_a a \cdot P(\xi = a)$

Определение: независимые случайные величины
ξ и η — *независимы*, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi \leq a]$ и $[\eta \leq b]$ — *независимые случайные события*
$P(\xi \leq a \land \eta \leq b) = P(\eta \leq a) \cdot P(\eta \leq b)$

Замечание:
ξ и η — независимые, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi = a]$ и $[\eta = b]$ — независимые
Работает за исключением патологических случаев, которые мы не будем рассматривать

Пример 1:
$P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ — вероятность того, что Вася выиграл 1 монету

$P(\eta = 2) = \frac{1}{6}$ — вероятность выпадения на игральной кости 2

$P(\xi = 1 \land \eta = 2) = 0$

Пример 2:

$_\eta{}^\xi$	-1	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Теорема:
ξ и η независимы $\Rightarrow \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$

$\mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \sum\limits_a a \cdot P(\xi \cdot \eta = a) = \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bc \cdot P(\xi = b \land \eta = c) = \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bc P(\xi = b) P(\eta = c) =$
$= \sum\limits_b b \sum\limits_c c P(\xi = b) P(\eta = c) = \mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta$

1.8. Дисперсия

Вступление:
Давайте посчитаем математическое ожидание отклонения этой случайной величины от ее математического ожидания. Внезапно обнаружим, что оно равняется 0
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\xi = 0$ 😩

Определение: дисперсия
$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 -$ *дисперсия*
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\left(\xi^2 - 2\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2\right) = \mathrm{E}\xi^2 - 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$
На английском: $\mathrm{Var}\ \xi$

$\mathrm{D}c\xi = c^2\mathrm{D}\xi$
$\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathrm{E}(\xi + \eta))^2 = \mathrm{E}\xi^2 + 2\mathrm{E}\xi\eta + \mathrm{E}\eta^2 - (\mathrm{E}\xi)^2 + 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta - (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta + 2(\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta)$

Определение: ковариация
$\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta = \mathrm{Cov}(\xi,\ \eta) -$ *ковариация*