Линейная алгебра

II семестр

Лектор:

Трифанов Александр Игоревич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

1. Полилинейная и тензорная алгебра

1.1. Перестановки

см. курс дискретной математики первого семестра

1.2. Пространство полилинейных форм (пространство ПЛФ)

$\sqsupset X(\mathbb{K})$ — ЛП над $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} X = n$,

$\sqsupset X^*(\mathbb{K})$ — пр-во ЛФ над $X(\mathbb{K})$

Определение: полилинейная форма

ПЛФ называется отображение

$u : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times X^* \times ... \times X^*}_{q} \to \mathbb{K}$

Обладающее следующщими свойствами (полилинейность - *линейность по всем агрументам*):

1. $u(...\ x_1 + x_2\ ...) = u(...\ x_1\ ...) + u(...\ x_2\ ...)$
2. $u(..., \lambda x, ...) = \lambda u(..., x, ...)$

Замечание:
пара (p, q) — валентность ПЛФ

Примеры:

1. $f \in X^*(\mathbb{K})$ — ПЛФ $(1, 0)$
2. $\hat{x} \in X^{**}$ — ПЛФ $(0, 1)$
3. $E_3 \quad g(x,\ y) = \langle x, y \rangle$ — ПЛФ $(2, 0)$
4. $E_3 \quad \omega(x,\ y,\ z)$ — ПЛФ $(3, 0)$

Замечание:
$\sqsupset \Omega_p^q$ — мн-во ПЛФ (p, q)

1. Равенство линейных форм

$$u, v \in \Omega_p^q : u = v \Leftrightarrow u(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q) = v(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q)$$

$$\forall x_1,\ ..., x_p \in X,\ y^1,\ ...,\ y^q \in X^*$$

2. Сумма линейных форм

$$\omega = u + v \Leftrightarrow \omega(x_1, ..., x_p;\ y^1, ...,\ y^q) = (u + v)(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q) =$$

$$u(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q) + v(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q)$$

$$\forall x_1, ..., x_p \in X,\ y^1, ...,\ y^q \in X^*$$

$\forall u, v, \omega \in \Omega_p^q \quad u + (v + \omega) = (u + v) + \omega$ — *ассоциативность*

$\exists \Theta \in \Omega_p^q \quad \Theta(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q) = 0, \quad \forall u \in \Omega_p^q \quad u + \Theta = u = \Theta + u$ – *существование нейтрального*

$\forall u \in \Omega_p^q \quad \exists(-u) : u + (-u) = \Theta$ — *существование обратного*

3. Произведение ПЛФ на скаляр

$$w = \lambda u \Leftrightarrow w(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q) = (\lambda u)(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q) = \lambda u(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q)$$

Теорема:

$\Omega_p^q = \Omega_p^q(\mathbb{K})$ — ЛП

Доказательство:
Проверка аксиом ЛП ■

1.3. Тензор ПЛФ

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(\mathbb{K})$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ — базис $X^*(\mathbb{K})$

$\sphericalangle \quad u(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) \ominus$

$$x_1 = \sum_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad ... \quad x_p = \sum_{i_p=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}$$

$$y_1 = \sum_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} \quad ... \quad y^q = \sum_{j_p=1}^n \mu_{j_1}^q f^{j_q}$$

$$\ominus u\left(\sum_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} ... \sum_{i_p=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \sum_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} ... \sum_{j_q=1}^n \mu_{j_q}^q f^{j_q}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} ... f^{j_q}) = \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n ... \sum_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}.$$

$u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ — *тензор линейной формы*

Лемма:
Задание тензора $u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ в паре базисов пр-в X и X^* эквивалентно заданию самой ПЛФ u:

$$u \underset{\{e^i\}}{\overset{\{f_j\}}{\leftrightarrow}} u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$$

Доказательство:
см. выше. ■

1.4. Базис пространства ПЛФ

$\Omega_p^q(\mathbb{K})$ — пространство ПЛФ над полем $\mathbb{K}$

Замечание:

$\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(2) \quad \underset{=e_{11}}{\overset{=e^1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{12}}{\overset{=e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{21}}{\overset{=e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{=e_{22}}{\overset{=e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$(e_{11})_{ij} = {}_{11}e^{ij}$

${}_{\alpha\beta}e^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j = \begin{cases} 1, i = \alpha, j = \beta \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$\sphericalangle \quad \left\{ {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \right\}$ — набор ПЛФ в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$, такой, что:

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p} \mu_{t_1}^1 ... \mu_{t_q}^q$

Замечание:
${}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q} W^{j_1 ... j_q}_{i_1 ... i_p} = \delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q}$

Теорема:

Набор $\left\{ {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \right\}$ — базис в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$

Доказательство:
Докажем полноту

$\sqsupset u \in \Omega_p^q(\mathbb{K})$

$\sphericalangle \quad u(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q) = \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q) u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$
$\Rightarrow u = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Докажем ЛНЗ

$\sphericalangle \quad {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = \theta$. Рассмотрим на поднаборе базисов $(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q})$

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q}) \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$

$\delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0 \Rightarrow \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$ ■

Замечание:
$\dim_{\mathbb{K}} \Omega_p^q = n^{p+q}$

2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\sphericalangle \quad \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Определение: симметрическая форма

Форма $u \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — симметрическая, если ее значения не зависят от порядка аргументов

$$u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}) = u(x_1, x_2, ..., x_p)$$

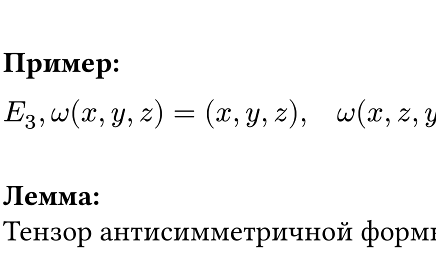
$$\forall \sigma \in S_p \text{ (группа перестановок)}$$

Пример:

$E_3(\mathbb{R})\ g(x, y) = \langle x, y \rangle \quad g(x, y) = g(y, x)$

Лемма:
$\sqsupset u$ — симметричная $\Rightarrow u_{i_1 ... i_p} = u_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}}$

$\sqsupset \Sigma^p$ — множество симметричных форм



Лемма:
$\Sigma^p = \Sigma^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Определение: антисимметричная форма

$V \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — антисимметричная, если $\forall \sigma \in S_p \quad v(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) = (-1)^{[\sigma] - \text{чётность}} v(x_1, x_2, ..., x_p)$

Пример:

$E_3, \omega(x, y, z) = (x, y, z), \quad \omega(x, z, y) = -\omega(x, y, z)$

Лемма:
Тензор антисимметричной формы антисимметричен по индексам

$$v_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}} = (-1)^{[\sigma]} v_{i_1 ... i_p}$$

$\sqsupset \Lambda$ — мн-во антисимметричных форм

Лемма:
$\Lambda^p = \Lambda^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Замечание:
$\Lambda^p \cap \Sigma^p = \Theta$

Лемма:
$v \in \Lambda^p \Leftrightarrow v$ обнуляется на паре одинаковых аргументов

Доказательство:
$\Leftarrow$: $\sphericalangle \quad v(...x_i...x_i...) = -v(...x_i...x_i...) \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow$: $\sphericalangle \quad v(...x_i' + x_i''...x_i' + x_i''...) = 0$

$v(...x_i'...x_i'...) + v(...x_i'...x_i''...) + v(...x_i''...x_i'...) + v(...x_i''...x_i''...) = 0$

$v(...x_i'...x_i''...) = -v(...x_i''...x_i'...)$ ■

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\Rightarrow \forall v \in \Lambda^p(\mathbb{K}) \quad v(x_1, ..., x_p) = 0$

2.1. Симметризация и антисимметризация

$\sqsupset W \in \Omega_p^0(\mathbb{K}), \quad \mathbb{K} : \mathrm{char}\ \mathbb{K} = 0 \quad$ ($\mathbb{Q}$ и “больше”)

Лемма:
Следующая форма является симметричной

$$u(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

Доказательство:
$\sphericalangle \quad u(x_{\chi(1)}, ..., x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W(x_{\sigma\chi(1)}, ..., x_{\sigma\chi(p)}) =$

$\langle \sigma \circ \chi = \varphi, \quad \sigma = \varphi \circ \chi^{-1} \rangle$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\varphi \circ \chi^{-1} \\ \varphi \in S_p}} W(x_{\varphi(1)}, ..., x_{\varphi(p)}) = u(x_1, ..., x_p)$ ■

Определение: симметризация

Процесс изготовления симметрической формы из произвольной

$$(\mathrm{Sym}\ W)(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

Замечание:
Коэффициент $\frac{1}{p!}$ — нормировка: $W \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\ W = W$

Замечание:
$\mathrm{Sym}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$

$\mathrm{Sym}\ (u + v) = \mathrm{Sym}\ u + \mathrm{Sym}\ v$

$\mathrm{Sym}\ (\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Sym}(u)$

Лемма:
Следующая форма является антисимметричной

$$v(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

Определение: антисимметризация (альтернирование)

Процесс изготовления антисимметричной формы из произвольной

$$(\mathrm{Alt}\ W)(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

Замечание:
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$

$\mathrm{Alt}(u + v) = \mathrm{Alt}\ u + \mathrm{Alt}\ v$

$\mathrm{Alt}(\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Alt}(u)$

$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}\ \mathrm{Alt} = 0$

Замечание:
$\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt} \neq \mathrm{id}$
$v(p = 2)$
$A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2}$
$A^{(a)} = \frac{A - A^T}{2}$

2.2. Базис Λ^p

$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^p = \ ?$

$\sqsupset \{ {}^{s_1 ... s_p} W \}$ — базис в $\Omega_p^0(\mathbb{K})$

$\sphericalangle \quad {}^{s_1 ... s_p}F = p!\mathrm{Alt}({}^{s_1 ... s_p}W)$

$\{ {}^{s_1 ... s_p}F \}$ — набор в Λ^p — ПН, но не ЛНЗ

Лемма:
Форма ${}^{s_1 ... s_p}F$ — антисимметрична по своим индексам

${}^{... s_i ... s_j ...}F = -{}^{... s_j ... s_i ...}F$

Доказательство:
$D^{... s_i ... s_j ...}F(...x_i...x_j...) = p!\mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W(...x_i...x_j...) = p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W)(...x_i...x_j...) ==$
$-p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_j ... s_i ...}W)(...x_i...x_j...) = -{}^{... s_j ... s_i ...}F(...x_i...x_j...)$

Замечание:

1. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F,\ {}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$ — ЛЗ
2. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F = -{}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$

$\vartriangleleft \quad \left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid \underbrace{1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_p \leq n}_{\vec{s}} \right\}$

Теорема: $\left\{ {}^{\vec{s}}F \right\}$ — базис в Λ^p

Доказательство:
ПН: $\sqsupset U \in \Lambda^p$

$$U = {}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p}$$

$$\text{Alt } U = U = \text{Alt } \left({}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p} \right)$$

$$= (\text{Alt } {}^{s_1 \dots s_p}W) u_{s_1 \dots s_p}$$

$$= \tfrac{1}{p!} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_1 \dots s_p} = \tfrac{1}{p!} \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} {}^{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$$

$$= \tfrac{1}{p!} \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} {}^{s_1 \dots s_p}F (-1)^{[\sigma]} u_{s_{\sigma_{(1)}} \dots s_{\sigma_{(p)}}} = \tfrac{1}{p!} p! \sum_{\vec{s}} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_{\sigma_{(1)}} \dots s_{\sigma_{(p)}}}$$

ЛНЗ: $\vartriangleleft \quad {}^{\vec{s}}F \alpha_{\vec{s}} = \theta \quad \mid \left(e_{i_1} \dots e_{i_p} \right)$

$$F\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{\vec{s}} = 0$$

$$p! \text{ Alt } {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$$

$$p! \sum_{\sigma \in S_p} {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_{\sigma_{(1)}}}, \dots, e_{i_{\sigma_{(1)}}} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p}$$

$$p! \sum_{\sigma \in S_p} \delta^{s_1}_{i_{\sigma_{(1)}}} \delta^{s_2}_{i_{\sigma_{(2)}}} \dots \delta^{s_p}_{i_{\sigma_{(p)}}} \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{i_{\sigma_{(1)}} \dots i_{\sigma_{(p)}}} = 0 \quad (\vec{s})$$

$$\alpha_{i_{\varphi_{(1)}} \dots i_{\varphi_{(p)}}} = 0$$

Пример:
$\text{char } K = 2 \quad \{0, 1\}$

Замечание:
$!V(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -V(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$
$\text{char } K = 0 \quad K \supset \mathbb{Q}$

Базис:
$\left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid 1 \leq s_1 < s_2 \dots < s_p \leq n \right\}$

Замечание:
$\dim_K \Lambda^p = C^p_n$

Замечание:

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0 & \dim_K \Lambda^0 = 1 \quad K \\ \Lambda^1 & \dim_K \Lambda^1 = n \quad X^*(K) \\ \Lambda^2 & \dim_K \Lambda^1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{Mat}^{\text{alt}}_n(2) \\ \vdots & \\ \Lambda^n & \dim_k \Lambda^n = 1 \end{array}$$

Базис $\Lambda^n \quad \left\{ {}^{123 \dots n}F \right\} \Rightarrow \forall U \in \Lambda^n \quad U = \alpha \cdot {}^{123 \dots n}F \}, \alpha \in K$

Замечание:
$\sqsupset p > n \Rightarrow \Lambda^p = \{\theta\}$

Определение: определитель
$\vartriangleleft \quad {}^{123 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = n! \text{ Alt } {}^{123 \dots n}W(x_1 \dots x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} {}^{\sigma_{(1)} \dots \sigma_{(n)}}W(x_1 \dots x_n)(-1)^{[\sigma]}$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma_{(1)}} \xi_2^{\sigma_{(2)}} \dots \xi_p^{\sigma_{(n)}} \triangleq \det\{x_1 \dots x_n\}$ — *определитель*

Замечание:
$x_i \leftrightarrow \xi_i$
$\vartriangleleft \quad A = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix} \quad \det\{x_1 \dots x_n\} \equiv \det A$

- Понятно?

- *молчание*

- Понятно. Всем понятно?

- *нервный смешок*

- Нет, не всем...

- *смех погромче*

- Ну ладно. На экзамене станет понятно.

3. Произведение ПЛФ

3.1. Определения

$\sqsupset U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K)$

Определение: произведение ПЛФ

U и V — ПЛФ   форма $W = U \cdot V$ — *произведение ПЛФ*:

$W\left(x_1, ..., x_p, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^q, ... y^{q_1+q_2}\right)$

$= U\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^{q_1}\right) \cdot V(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}; y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}$

Замечание:
W — ПЛФ (p_1+p_2, q_1+q_2)
Лемма:
$U \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}}, \quad V \leftrightarrow v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}}$

$UV \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}} v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}} = w_{i_1,...,i_{p_1+p_2}}^{j_1,...,j_{q_1+q_2}} \leftrightarrow W$

Свойства:

1. $U \cdot V \neq V \cdot U$

   Пример:

   $f, g \in X^*(K)$

   $x, y \in X(K)$

   $(f \cdot g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \neq (g \cdot f)(x, y) = g(x) \cdot f(y)$

2. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} \leftrightarrow$ внешнее произведение

3. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad \theta \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot \theta = \theta \cdot U = \theta \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}(K)$

4. $\forall U, V, W : (U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$

5. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$

6. $\forall \alpha \in K \quad U \cdot (\alpha V) = (\alpha U) \cdot V = \alpha \cdot (U \cdot V)$

7. $\sqsupset \{{}^{s_1 \dots s_p}W\}$ — базис $\Omega_p^0(K)$

   $\sqsupset \{f^j\}$ — базис $X^*(K) \Rightarrow$

   ${}^{s_1 \dots s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}$

   $\lessdot \quad {}^{s_1 \dots s_p}W\left(x_1 ... x_p\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p}$

   $=< \{e_i\}$ - базис, сопр. $\{f^j\} >= f^{s_1}(x_1) \cdot ... f^{s_p}\left(x_p\right)$

   $= (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Замечание:

$\left\{{}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W\right\}$ — базис $\Omega_p^q(K) \qquad \left\{{}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W\right\}\left(x_1 ... x_p y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} ... \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 ... \eta_{t_q}^q$

$\{f_j\}$ — базис $X^*(K)$,

$\{\hat{e}_m\}$ — базис $X^{**}(K) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W = f^{s_1} \cdot ... \cdot f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \cdot ... \cdot \hat{e}_{t_q}$

Пространство, в котором эта операция является внутренней:

Определение: внешняя алгебра полилинейных форм

$\lessdot \quad \Omega = \Omega_0^0 \dotplus \Omega_0^1 \dotplus \Omega_1^0 \dotplus \Omega_1^1 \dotplus ... = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Omega_i^j$

$\omega \in \Omega \qquad \omega_1 = V_1 + W_1$

$\qquad \omega_2 = V_2 + W_2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = (V_1 + V_2) \cdot (W_1 + W_2)$

$(\Omega, +, \cdot)$ — *внешняя алгебра ПЛФ*

3.2. Алгебра Грассмана

Вступление:

$\sqsupset U \in \Lambda^p, \quad V \in \Lambda^q$

$?\, U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$ неправда.

$\sqsupset U \cdot V = W$

$W\left(x_1, ..., x_p, \quad x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = U\left(x_1, ..., x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Определение: антисимметричное произведение ПЛФ

$U \wedge V = \mathrm{Alt}(U \cdot V) \cdot \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$ — *антисимметричное произведение ПЛФ*

Лемма:
$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\ U \cdot V) = \mathrm{Sym}(U \cdot \mathrm{Sym}\ V) = \mathrm{Sym}(U \cdot V)$

$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V) = \mathrm{Alt}(U \cdot \mathrm{Alt}\ V) = \mathrm{Alt}(U \cdot V)$

Доказательство *(для альтернирования)***:**

$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \mathrm{Alt}\ \left[\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} U \cdot V\right]\left(x_{\sigma_{(1)}} x_{\sigma_{(p)}} x_{p+1} ... x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)]\left(x_{\sigma_{(1)}}, x_{\sigma_{(p)}}, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)]\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \cdot p! (\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Свойства внешнего произведения:

$\sqsupset U \in \Omega_p^0 \quad V \in \Omega_q^0$

1. Суперкоммутативность:

   $U \wedge V = (-1)^{p \cdot q}\ V \wedge U$

   Доказательство:
   $(U \wedge V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \frac{(p+q)!}{p! q!}\ \mathrm{Alt}\ (U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$
   $= (-1)^{p \cdot q} \frac{(p+q)!}{p! q!}\ \mathrm{Alt}\ (V \cdot U)\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q},\ x_1, ..., x_p\right)$

   Замечание:

   $f \wedge g = -g \wedge f \quad \forall f, g \in X^*(K)$

   $v \wedge \omega^{(2m)} = \omega^{(2m)} \wedge v$

2. Ассоциативность:

   $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W$

   Доказательство:
   очевидно (доказательство оставлено читателям в качестве простого, но обязательного упражнения)

3. $U \wedge (\alpha V) = (\alpha U) \wedge V = \alpha(U \wedge V) \qquad \forall \alpha \in K$

4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$

5. $\{{}^{s_1 \dots s_p}F\}$ — базис $\Lambda^p \Rightarrow {}^{s_1 \dots s_p}F = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... \wedge f^{s_p}$

   Доказательство:
   ${}^{s_1 \dots s_p}F = p!\ \mathrm{Alt}({}^{s_1 \dots s_p}W) = p!\ \mathrm{Alt}\ (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})$
   $= p! \frac{1 (p-1)!}{p!} \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... f^{s_p}) = (p-1)! \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}) = ...$
   $= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... f^{s_p}$

6. $U \in \Lambda^p,\ v \in \Lambda^q$

   $u \wedge v = 0 \qquad p + q > n$

   $\lessdot \quad \Lambda \in \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^j \quad \dim_K \Lambda^j = C_n^j$

   $\dim_K \Lambda = 2^n$

> Всё, что было до этого — детский сад. Ну может начальная школа
>
> — Трифанов Александр Игоревич

$(\Lambda, +, \wedge)$ — алгебра Грассмана

Определение: градуированная алгебра

Λ — *градуированная алгебра*, если:

$U \in \Lambda^P, V \in \Lambda^q \Rightarrow U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$

$\Lambda^p \Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}$

Пример:

Алгебра многочленов

4. Определитель

$\sphericalangle \quad \dim_K \Lambda^n = 1 \Rightarrow \left\{ {}^{12\dots n}F \right\} - \text{базис } \Lambda^n$

Определение: определитель

Определитель набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ – "число"
$$\det\{x_1 \dots x_n\} = {}^{12\dots n}F(x_1 x_2 \dots x_n)$$
$$= n! \text{ Alt } {}^{12\dots n}W(x_1 x_2 \dots x_n)$$
$$= n! \cdot \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma] 12\dots n} W\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}\right)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \dots \xi^n_{\sigma(n)}$$

Замечание:
Альтернативная форма:
$$C := [x_1 x_2 \dots x_n] = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \dots & \xi^1_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \dots & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \dots & \xi^n_n \end{bmatrix}$$
$\det C := \det\{x_1 \dots x_n\}$

4.1. Определитель как форма объёма

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор в $X(K)$

Определение: параллелепипед, построенный на векторах набора $\{x_i\}_{i=1}^n$

Множество следующего вида: $T_{n\{x_1 \dots x_n\}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda^i x_i \mid \lambda^i \in [0,\ 1]\ \forall i \right\}$

$\sqsupset \omega$ – форма объёма в $X(K)$ $(K = \mathbb{R})$

Свойства:

1. $\operatorname{codom} \omega \in \mathbb{R}$
2. $\omega T\{\dots x'_i + x''_i \dots\} = \omega T\{\dots x'_i\} + \omega T\{\dots x''_i \dots\}$
   $\omega T\{\dots \lambda x_i \dots\} = \lambda \omega T\{\dots x_i \dots\}$
3. $\omega T\{x_1 \dots x_n\} = 0 \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ

$\Rightarrow \omega \in \Lambda^n \Rightarrow \omega \sim \det$

Вычисление определителя — вычисление объёма параллелепипеда, построенного на векторах набора

4.2. Свойства определителя

Замечание:
$$\det\{x_1 \dots x_n\} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \dots & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & \dots & \xi^n_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^1_n & \dots & \xi^n_n \end{vmatrix}$$

1.

$\det C^T = \det C$

Доказательство:
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} = \det C$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \triangleq \det C^T$$
$$\begin{pmatrix} \sum_\sigma {}^{12\dots n}W\left(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}\right) = \xi^1_{\sigma(1)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} \\ \sum_\sigma {}^{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)}W(x_1 \dots x_n) = \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

2.

$\det\{\dots x'_i + x''_i \dots\} = \det\{\dots x'_i \dots\} + \det\{\dots x''_i \dots\}$

$\det\{\dots \lambda x_i \dots\} = \lambda \det\{\dots x_i \dots\}$

$\det\{\lambda C\} = \lambda^n \det C$

$\det(C_1 + C_2) \neq \det C_1 + \det C_2$

3.

$\det\left\{\dots x_i \dots x_j \dots\right\} = \det\left\{\dots x_i \dots x_j + \lambda x_i\right\}$

4.

$\det\left\{\dots x_i \dots x_j \dots\right\} = -\det\left\{\dots x_j \dots x_i \dots\right\}$

5.

Рекуррентная формула

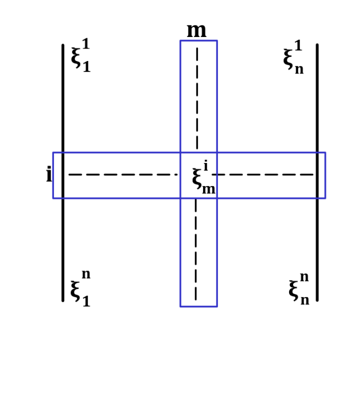
$\det C = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \xi^i_j M^i_j$ – разложение по j-му столбцу

$\det C = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \xi^i_j M^i_j$ – разложение по i-ой строке

Доказательство:

$$\det C = {}^{12\dots n}F(x_1 x_2 \dots x_n) =$$
$$= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n(x_1 x_2 \dots x_n)$$

$f \wedge g = f \cdot g - g \cdot f$
$f \wedge g \wedge h = f \cdot g \cdot h + h \cdot f \cdot g + g \cdot h \cdot f -$
$-f \cdot h \cdot g - g \cdot f \cdot h - h \cdot g \cdot f$



$= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^m \wedge \dots \wedge$
$f^n(x_1 \dots x_m \dots x_n)$
$=< x_m = \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i; f^j(e_i) = \delta^j_i >$
$= f^1 \wedge \dots \wedge f^m \wedge \dots \wedge$
$f^n \left(x_1 \dots \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i \dots x_n \right)$
$= \sum_{i=1}^n f^1 \wedge \dots \wedge f^m \wedge \dots \wedge$
$f^n \left(x_1 \dots \underset{m}{e_i} \dots x_n \right)$
$= \sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} f^1 \wedge \dots \wedge f^{m-1} \wedge$
$f^{m+1} \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots x_{m-1} x_{m+1} \dots x_n))$
$=$
$\sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} M^i_m$ ⊜

Определение: алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента ξ^i_m называется "число":
$$A^i_m = (-1)^{i+m} M^i_m$$

Замечание:
$\det C = \sum_{i=1}^n \xi^i_m A^i_m$

Теорема: (*Лапласа*)

Определитель матрицы равен сумме произведений миноров матрицы на их алгебраических дополнениях

$\det C = \sum_{i_1 \dots i_p} (-1)^{i_1 + \dots + i_p + j_1 + \dots j_p} M^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} L^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$

Пример:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \dots$$ ("*кому интересно, дома досчитаете*")

Доказательство:

Продолжаем "доказательство" предыдущего свойства

⊜ $\sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} \sum_{j=1}^n \xi^j_l (-1)^{j+l} M^{ij}_{ml} = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\xi^i_m \xi^j_l}_{L^{ij}_{ml}} (-1)^{i+m+j+l} M^{ij}_{ml}$

Замечание:

$\det \operatorname{diag} \{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

$\det \operatorname{diag} \{C_1 C_2 \dots C_m\} = \prod_{i=1}^m \det C_i$

$$\det \begin{bmatrix} C_1 & * & \dots & * \\ 0 & C_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & C_m \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \det C_i$$

Замечание:
$\sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b$ – система Крамера
$\Rightarrow \xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det\{a_i \dots a_n\}, \Delta_i = \det\left\{a_1 \dots \underset{i}{b} \dots a_n\right\}$
Доказательство:
$\Delta_i = \det\{a_1 \dots b \dots a_n\} = \det\left\{a_1 \dots \sum_{i=1}^n \xi^i a_i \dots a_n\right\} = \det\{a_1 \dots \xi^i a_i \dots a_n\} = \xi^i \Delta$

5. Ранг матрицы

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор в $X(K)$

$\det\{x_1 \dots x_n\} = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ

Сколько ЛНЗ векторов в наборе $\{x_i\}_{i=1}^n$?

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛЗ $\Leftarrow \forall V \in \Lambda^M\ V(x_1 \dots x_m) = 0$

Доказательство:
От противного: $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ (при $\uparrow$ этом условии)

$x_1 x_2 \dots x_m$

$\downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow$

$e_1 e_2 \quad e_m e_{m+1} \dots e_n$ – базис $X(K)$

$\sqsupset \{f^j\}_{j=1}^n$ – базис, сопряженный к $\{e_i\}_{i=1}^n$: $f^j(e_i) = \delta^j_i$

$\sphericalangle \quad f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^m(x_1 x_2 \dots x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot f^{\sigma(m)}(x_1 x_2 \dots x_m) \sim$

$\sim C \cdot \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots x_m^{\sigma(m)}$

$= C \cdot \delta_1^{\sigma(1)} \delta_2^{\sigma(2)} \dots \delta_m^{\sigma(m)} = C \neq 0$

Нашли m-форму, которая не обнуляется. Противоречие

${}^{12\dots m}F = m!(\text{Alt } {}^{12\dots m}W) = m! \frac{1}{m!} \sum$

Замечание:
Если хотя бы одна m-форма отлична от нуля, то набор $\{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ

$V \in \Lambda^m \quad \sqsupset \{{}^{s_1 \dots s_m}F\}$ – базис Λ^m
Замечание:
Для проверки ЛЗ достаточно проверить базисные формы
$\{x_i\}_{i=1}^n : \forall s_1 \dots s_p, 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m \leq n \quad {}^{s_1 \dots s_p}F(x_1 \dots x_m) = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛЗ

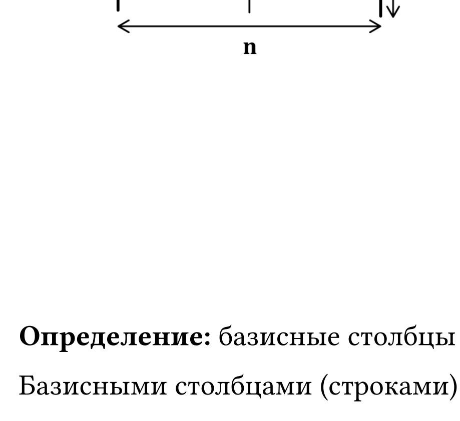
$$\sphericalangle \quad C = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \dots & \xi^1_m \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \dots & \xi^2_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \dots & \xi^n_m \end{bmatrix} \longleftarrow \text{сколько ЛНЗ}$$
${}^{s_1}F \quad {}^{s_1 s_2}F \quad {}^{s_1 s_2 s_3}F$

Определение: ранг матрицы

Рангом матрицы C называется её наибольший порядок отличного от нуля минора

$\operatorname{rg}(C) \quad \operatorname{rank}(C) \quad \operatorname{rk}(C)$

Пример:



$$B = \begin{bmatrix} b_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & b_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_c \end{bmatrix}$$

1. $b_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} C \geq 1$
2. $b_1 b_2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} C \geq 2$

$\vdots$

l. $\prod_{i=1}^l b_i \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} C \geq l$

$l+1$. $V\ L^{i_1 \dots i_{l+1}}_{j_1 \dots j_{l+1}} \Rightarrow \operatorname{rank} C = l$

Определение: базисные столбцы (строки)

Базисными столбцами (строками) матрицы C называются столбцы (строки), входящие в базисный минор

Лемма:
Любая строка (столбец) матрицы C является линейной комбинацией базисных строк (столбцов)
Доказательство:
Очевидно. 😎

Теорема: (*о ранге*)

Ранг матрицы равен кол-ву ЛНЗ строк или столбцов матрицы

Свойства ранга:

1. `pass`
2.

5.1. Теорема Крамера и Кронекера-Капелли

$\sqsupset \sum_{i=1}^n \xi^1 a_1 = b$ – СЛАУ

$$A = [a_1 a_2 \dots a_n], \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}$$

В матричной форме $A\xi = b \quad (*)$

Теорема: (*Крамер*)

$(*)$ совместна и определена $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $\{a_1 a_2 \dots a_n\}$ – базис $K^n \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ $\Rightarrow \det\{a_1 \dots a_n\} \neq 0$

$\Leftarrow$: $\det\{a_1 \dots a_n\} = \det A \neq 0 \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ $\Rightarrow \max +$ ЛНЗ $\Rightarrow$ базис $\Rightarrow \exists$ решение $\forall b$

$\xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Теорема: (*Кронекера-Капелли*)

$\sphericalangle \quad A\xi = b \quad (*)$

$A, [A \mid b]$ – расширенная матрицы

Система $(*)$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \mid b]$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $(*)$ совместна $\Rightarrow b \in \langle a_1 \dots a_n \rangle \Rightarrow$ добавление столбца b не меняет ранга A

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \mid B]$

$\Leftarrow$: $\operatorname{rank} [A \mid b] = \operatorname{rank} A \Rightarrow b \in \langle a_1 \dots a_n \rangle \Rightarrow$ совместна

5.2. Вычисление ранга

Лемма:
Гауссовы (элементарные) преобразования не меняют ранг матрицы

1. Сложение строк (не меняет определитель)
2. Умножение строки на число $\neq 0$ (определитель умножается на λ)
3. Перестановка строк (меняет только знак определителя)

Приведение к верхнему треугольному виду
$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \tilde{a}^1_1 & \tilde{a}^1_2 & \dots & \tilde{a}^1_n \\ 0 & \tilde{a}^2_2 & \dots & \tilde{a}^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ? \end{bmatrix}$$
$\operatorname{rank} A$ – кол-во отличных от нуля строк

6. Тензорное произведение

$\sqsupset X(K),\ Y(K)$ – ЛП над K

$\dim_K X = n$

$\dim_K Y = m$

$\sqsupset Z(K)$ – ЛП над K

$\sqsupset b : X \times Y \to Z$ – билинейное отображение

$\forall x_1, x_2, x \in X(K) \quad y_1, y_2, y \in Y(K) \quad \forall \lambda \in K$

- $b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$
- $b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$
- $b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$

Замечание:
$x \in X(K) \quad \exists\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K)$
$y \in Y(K) \quad \exists\{g_j\}_{j=1}^m$ – базис $Y(K)$
$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$
$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j h_{ij}, \quad h_{ij} \in Z(K)$

Замечание:
$b(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = b(?,?)$

Лемма:
Следующие условия эквивалентны:

1. $\{b(e_i, g_j)\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ – базис $Z(K)$
2. $\forall z \in Z(K) \quad \exists! z = \sum_{i=1}^n b(e_i, y_i), \quad y_i \in Y(K)$
3. $\forall z \in Z(K) \quad \exists! z = \sum_{j=1}^m b(x_j, g_j), \quad x_j \in X(K)$

Доказательство:
(1) $\Leftrightarrow$ (2):
$\{b(e_i, g_j)\}$ – базис $Z(K) \Rightarrow \forall z \quad z \overset{!}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} b(e_i, g_j) = \sum_{i=1}^n b\left(e_i, \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} g_j\right) = \sum_{i=1}^n b(e_i, y_i)$ (1) $\Leftrightarrow$ (3)
аналогично.

Определение: тензорное произведение

$X(K),\ Y(K)$ – линейные пространства

$\otimes : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ – билинейное отображение, такое что:

Если $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K)$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ – базис $Y(K) \quad \Rightarrow \{e_i \otimes g_j\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ – базис $T = X \otimes Y$

$T(K) = X(K) \otimes Y(K)$ – *тензорное произведение*

Замечание:

$x \in X(K),\ y \in Y(K)$

$x \otimes y = \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m \eta^j g_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underset{\text{координаты тензора } z}{\xi^i \eta^j} \underset{\text{базис } T = X \otimes Y}{(e_i \otimes j_j)}$

Определение: разложимый (факторизуемый) элемент

Элемент $z \in T$ называется разложимым, если $\exists x \in X(K), y \in Y(K)$, что $z = x \otimes y$, иначе z называется неразложимым

Пример:

Неразложимый: $z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$

Разложимый: $z = x_1 \otimes y_1 + x_1 \otimes y_2 = x_1 \otimes (y_1 + y_2)$

Замечание:

Общий вид элемента $Z(K)$:
$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} e_i \otimes g_j$

Пример:

$n = 3,\ m = 2$
$[\zeta^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
$z = e_1 \otimes g_1 + 2e_1 \otimes g_2 + 3e_2 \otimes g_1 + e_2 \otimes g_2 + 4e_3 \otimes g_1 + 2e_3 \otimes g_2$

Замечание:

$\dim_K T = \dim_K X \cdot \dim_K Y$

Теорема: (*основная теорема тензорной алгебры*)

Для любого билинейного отображения $b : X \times Y \to Z$

$\exists!$ билинейное отбражение $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$ такое, что следующая диаграмма коммутативна

$X \times Y \xrightarrow{\otimes} X \otimes Y$

$b \searrow Z \swarrow \tilde{b}$

$\sphericalangle \quad b = \tilde{b} \circ \otimes$

Доказательство:

$\tilde{b}(e_i \otimes g_j) = b(e_i,\ g_j)$ и продолжим по линейности

Лемма:

$X \otimes Y \simeq Y \otimes X$

$X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$

Замечание:

Обобщение теоремы:

$\sqsupset X_1 \dots X_p$ – ЛП над K

Для любого p-линейного отображения $\omega\ \exists!\ \tilde{\omega}$ – линейное, такое что следующая диаграмма коммутативна:
$x_1 \times \dots \times x_p \xrightarrow{\otimes} x_1 \otimes \dots \otimes x_p$

$\omega \searrow \quad z \quad \swarrow \tilde{\omega}$

Замечание:

$\sqsupset X^*(K),\ Y(K)$

$\sphericalangle \quad X^* \times Y \to X^* \otimes Y$

$(\alpha,\ y) \mapsto \alpha(*)y \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\sqsupset x \in X \quad x \mapsto \alpha(x)y$

$\boxed{X^* \otimes Y \simeq \mathrm{Hom}_K(X, Y)}$

$X^* \simeq \mathrm{Hom}\ (X, K)$

Замечание:

$X^*(K), Y^*(K)$

$X^* \times Y^* \to X^* \otimes Y^*$

$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta \in \mathrm{Hom}_K(X, Y; K)$

$\boxed{X^* \otimes Y^* \simeq \mathrm{Hom}\ (X, Y; K)}$

$\alpha \otimes \beta \leftrightarrow \omega \in \Omega_0^2(K) \quad \omega(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$

$X \times Y \to X \otimes Y \simeq \mathrm{Hom}(X^* Y^*; ???)$

$(x, y) \to x \otimes y$

$(x \otimes y)(\alpha, \beta) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$

$\alpha \in X^*$

$\beta \in Y^*$

$x \otimes y \leftrightarrow \omega \in \Omega_0^2(K)$

7. Пространство тензоров

Определение: пространство тезноров

$\sqsupset X(K)$ – ЛП над K

$\underbrace{X^* \otimes X^* \otimes \dots \otimes X^*}_{p} \otimes \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{q}$

Замечание:

Обозначение $T_q^p(K)(\Omega_p^q)$

Пример:
$T_0^1(K) = X^*$
$T_1^0(K) = X$
$T_1^1 = X^* \otimes X \simeq \mathrm{End}_K(X)$

Определение: тензор ранга (p, q)

Тензором ранга (p, q) называется элемент пространства тензоров $T_q^p(K)$

Пример:

$\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \dots \otimes \alpha^P \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q \in T_q^p(K)$

7.1. Операции с тензорами

1. Транспонирование
   $t_{ij} : T_q^p \to T_q^p$
   $\dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots \mapsto \dots \otimes x_j \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots$
   $t^{ij} : T_q^p \to T_q^p$
   $\dots \otimes \alpha^i \otimes \dots \otimes \alpha^j \otimes \dots \mapsto \dots \otimes \alpha^j \otimes \dots \otimes \alpha^i \otimes \dots$

2. Свёртка
   $\tilde{c}_j^i : T_q^p \to T_{q-1}^{p-1}$
   $\dots \otimes \alpha^i \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots \mapsto \dots \otimes \alpha^{i(x_j)} \in K \otimes \dots$

3. $\sqsupset T$ – пр-во вех тензоров (всех рангов)
   $u = \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \dots \otimes \alpha^{p_1} \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{q_1}$
   $v = \beta^1 \otimes \beta^2 \otimes \dots \otimes \beta^{p_2} \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{q_2}$
   $u \otimes v = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^{p_1} \otimes \beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^{p_2} \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{q_1} \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{q_2}$

Лемма:

$\Omega_p^q(K) \simeq T_q^p(K)$

Доказательство:
$\sqsupset \omega \in T_q^p(K) \Rightarrow \omega = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q$
$\sqsupset W \in \Omega_p^q(K)$
$x_1, \dots, x_p \in X; \quad \beta^1, \dots, \beta^q \in X^*$
$W(x_1, x_2, \dots, x_p, \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^q) \circeq \alpha^1(x_1)\alpha^2(x_2)\dots\alpha^p(x_p)\beta^1(y_1)\beta^2(y_2)\dots\beta^q(y_q)$

Замечание:
Базис $T_q^p(K)$: $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$
Базис $\Omega_p^q(K)$: $f^{i_1} \cdot f^{i_2} \cdot \dots \cdot f^{i_p} \cdot \hat{e}_{j_1} \cdot \hat{e}_{j_2} \cdot \dots \cdot \hat{e}_{j_q}$

Пример:

$\tilde{c}_j^i : X^* \otimes X \to K$

$\alpha \otimes x \mapsto \alpha(x)$

$\sphericalangle \quad T_p^0(K)$

$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$

$\mathrm{char}\ K = 0$

$\mathrm{Sym} : T_p^0(K) \to \Sigma_p(K)$

$\mathrm{Sym}\ (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}$

$\mathrm{Alt} : T_p^0(K) \to \Lambda_p(K)$

$\mathrm{Alt}\ (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}$

Замечание:
$\sqsupset \omega \in T_q^p(K)$
$v = \underbrace{\tilde{v}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}}_{\substack{\text{коорд.тензора} \\ \omega \text{ в базисах } \{e_i\}_{i=1}^n \\ \text{и} \{f^j\}_{j=1}^n}} f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes \hat{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{j_q}$

$v = \tilde{v}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad {}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} W$

$(1, 2, 3)^T \leftrightarrow 1 + 2t + 3t^2$

7.2. Тензорная алгебра

$\sqsupset X(K)$ – ЛП над K

$\sphericalangle \quad T_q^p(K) = \left(\bigotimes_{i=1}^p X^*\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^q X\right)$

$\sphericalangle \quad T(K) = \bigoplus_{p=0}^\infty \bigoplus_{q=0}^\infty T_q^p(K)$

Пример:

$\sqsupset X, Y$ – ЛП

$X \oplus Y$ – ЛП

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

$(T, +, \otimes, \lambda)$ – тензорная алгебра

$\omega_{01} \in T_1^0, v_{01} \in T_1^0 \Rightarrow \omega_{01} \otimes v_{01} \in T_2^0$

$x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$

$(\Lambda, +, \wedge, \lambda)$ – алгебра антисимм. тензоров

$(\Sigma, +, \vee, \lambda)$ – алгебра симметр. тензоров

8. Определитель линейного оператора

$\sqsupset X(K),\ Y(K)$ — ЛП над K

$\lessdot \quad \varphi : X(K) \to Y(K)$ — линейное

$\forall\ x_1,\ x_2,\ x \in X(K)$

$\varphi(X_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

Замечание:
$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\mathrm{Hom}_K(X, X) =: \mathrm{End}_K(X)$

8.1. Тензорное произведение операторов

Определение: тензорное произведение линейных операторов

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X),\ \psi \in \mathrm{End}(Y)$

$\chi : \varphi \otimes \psi$ — *тензорное произведение линейных операторов*, если

$\chi : X \otimes Y \to X \otimes Y$

$\chi(x \otimes y) \mapsto (\chi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$

Лемма:
$\chi \in \mathrm{End}_{X \otimes Y}$

Доказательство:

- $\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \chi(x \otimes y_1 + x \otimes y_2)$
  $\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1 + y_2) = \varphi(x) \otimes \big(\psi(y)_1 + \psi(y_2)\big) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1) + \psi(x) \otimes \psi(y_2) =$
  $= \chi(x \otimes y_1 + \chi(x \otimes y_2))$

$\chi(\lambda x \otimes y) = \chi((\lambda x) \otimes y) = \varphi(\lambda x) \otimes \psi(y) = \lambda[\varphi(x) \otimes \psi(y)] = \lambda \cdot \chi(x \otimes y)$

8.2. Матрица линейного оператора

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X $\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X)$
$e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_i^j e_j$

Определение: матрица линейного оператора

Набор $A_\varphi = \left\| a_i^j \right\|$ — матрица линейного оператора в базисе $(e_i)_{i=1}^n$

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \underset{\varphi e_1}{\uparrow} & \underset{\varphi e_2}{\uparrow} & \dots & \underset{\varphi e_n}{\uparrow} \end{array} \end{array}$$

$\sqsupset \{g_l\}_{l=1}^m$ — базис $Y(K)$

$\sqsupset \psi \in \mathrm{End}_K(Y)$

$\sqsupset B_\psi = \|b_l^k\|$ — матрица ψ в базисе $\{g_l\}_{l=1}^m$

Замечание:

$\left.\begin{array}{l} \{e_i\}_{i=1}^n \text{ — базис } X \\ \{g_j\}_{j=1}^m \text{ — базис } Y \end{array}\right. \Rightarrow \{e_i \otimes g_j\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ — базис $X \otimes Y$

$(\varphi \otimes \psi)(e_i \otimes g_j) = \varphi(e_i) \otimes \psi(g_j) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k e_k\right) \otimes \left(\sum\limits_{l=1}^{m}\right) b_j^l g_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} a_i^k b_j^l (e_k \otimes g_l)$

$C_{\varphi \otimes \psi} = \left\| a_i^k \otimes b_j^l \right\|_{i,k=1\dots n}^{j,l=1\dots m}$ — матрица тензорного произведения.

В кронекеровской форме:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 B_\psi & a_2^1 B_\psi & \dots \\ a_2^1 B_\psi & a_2^2 B_\psi & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

8.3. Тензорная степень

$\sqsupset X(k)$ — ЛП над K

$\varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

$\lessdot \quad T_p(K) = \bigotimes\limits_{i=1}^{n} X := \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{p}$

Замечание:
Элементы (разложимые) имеют вид:

$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots x_p$

Определение: тензорная степень

Тензорная степень оператора φ — линейное отображение вида:

$$\varphi^{\otimes p} : \bigotimes_{i=1}^{p} X \to \bigotimes_{i=1}^{p} X$$

$$\varphi^{\otimes p}\big(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes_p\big) = \varphi x_1 \otimes \varphi x_2 \otimes \dots \otimes \varphi x_p$$

8.4. Внешняя степень оператора

$\lessdot \quad \Lambda^p := \underbrace{X \wedge X \wedge \dots \wedge X}_{p} = \bigwedge\limits_{i=1}^{p} X$

$\dim_K X = n \quad \Rightarrow \quad \dim_K \Lambda^p = C_n^p$

Замечание:
Элементы Λ^p имеют вид:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots x_p$$

Определение: определитель набора векторов

Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется величина такая, что в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет место

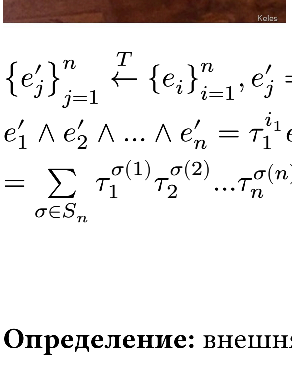
$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 x_2 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма:
$\det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n]$

Доказательство:
$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \xi_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_n^{i_n} e_{i_n} = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_3^{\sigma(3)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

Замечание:
$\det[x_1 \dots x_n]$ зависит от базиса

$\sqsupset z \in \Lambda^n \Rightarrow z = \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$



$\{e'_j\}_{j=1}^n \xleftarrow{T} \{e_i\}_{i=1}^n, e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_j^i e_i$
$e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n = \tau_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \tau_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \tau_n^{i_n} e_{i_n} = \tau_1^{i_1} \tau_2^{i_2} \dots \tau_n^{i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} =$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \tau_1^{\sigma(1)} \tau_2^{\sigma(2)} \dots \tau_n^{\sigma(n)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

Определение: внешняя степень оператора

Внешняя степень оператора φ — лирhійное отображение вида:

$$t\varphi(\wedge p) : \bigwedge_{i=1}^{p} X \to \bigwedge_{i=1}^{p} X$$

$$\varphi^{\wedge p}\big(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p\big) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_p$$

Определение: определитель линейного оператора

Определитель линейного оператора φ — величина $\det\varphi$, такая, что:

$$\varphi(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \dots \wedge \varphi e_n = \det\varphi e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма:
$\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(X) \Rightarrow \det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$

Доказательство:
$(\varphi \circ \psi)(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = (\varphi \circ \psi)e_1 \wedge (\varphi \circ \psi)e_2 \wedge \dots \wedge (\varphi \circ \psi)e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \varphi(\psi(e_2)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) =$
$= \varphi^{\wedge n}(\psi e_1 \wedge \psi e_2 \wedge \dots \wedge \psi e_n = \det\varphi \cdot (\psi e_1 \wedge \psi e_2 \wedge \dots \wedge \psi e_n) = \det\psi \cdot \psi^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) =$
$= \det\varphi \cdot \det\psi(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$

Замечание:
Определитель $\det\varphi$ равен определителю матрицы A_φ соответствующего оператора в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$

Лемма:
$\det\varphi$ сто пудов не зависит от базиса

Доказательство:
$\sqsupset z \in \Lambda^n \quad \Rightarrow \quad \varphi^{\wedge n} z = \det\varphi \cdot z$

если $z = \underbrace{\alpha\ \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n}_{\text{верно}}}_{\text{верно}}$

ДЗ:
$\tilde{A}\varphi - SA_\varphi T \qquad \det S = (\det T)^{-1}$

9. Линейный оператор

9.1. Основные определения

$\sqsupset X(K), Y(K)$ — ЛП над K

$\sphericalangle \quad X(K) \to Y(K)$ — отображения

$\forall x, x_1, x_2 \in X(K) \quad \forall \alpha \in K$

1. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Пример:

1. $\sqsupset I : X(K) \to X(K)$ — тождественный оператор $\qquad \operatorname{Ker} I = \{0\}$

   $\forall x \in X(K) \quad Ix = x \qquad \operatorname{Im} I = X$

2. $\Theta : X(K) \to X(K) :$ $\qquad \operatorname{Ker} \Theta = \{X\}$

   $\forall x \in X(K) \quad \Theta x = 0_x \qquad \operatorname{Im} \Theta = \{0\}$

3. $\sqsupset f \in X^*(\mathbb{R})$ $\qquad \dim_K \operatorname{Ker} f = n - 1$

   $f : X \to \mathbb{R} \qquad \dim_K \operatorname{Im} f = L$

4. $X(K) = L \oplus M \Rightarrow \forall x \in X$ $\qquad \operatorname{Ker} \mathcal{P}_L^{\parallel M} = M$

   $\sphericalangle \quad \mathcal{P}_L^{\parallel M}(x) = x_L$ — проектор, $\qquad \operatorname{Im} \mathcal{P}_L^{\parallel M} = L$

   аналогично $\mathcal{P}_M^{\parallel L}(x) = x_M$

5. $X = K[x]_n$ $\qquad \operatorname{Ker} D = \left\{q \in K[x]_n \mid \deg q = 0\right\}$

   $\sphericalangle \quad D : X(K) \to X(K)$ $\qquad \operatorname{Im} D = K[x]_{n-1}$

   $\forall p \in K[x]_n \quad (Dp)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

6. $X(K) = \operatorname{Mat}_K(n)$ $\qquad \operatorname{Ker} \tau = \{0\}$

   $\tau : X(K) \to X(K)$ $\qquad \operatorname{Im} \tau = \operatorname{Mat}_K(n)$

   $\forall A \in \operatorname{Mat}_K(n) \quad \tau(A) = A^T$

7. $X = C[a, b]$в

   $$(Lf)(x) = \int\limits_a^b \underbrace{l(x, y)}_{\substack{\text{ядро инт.}\\ \text{оператора}\\ \text{(core)}}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

   Пример:

   $f(x) = \sin x$

   $l(x, y) = e^{x+y}$

   $$(Lf)(x) = \int\limits_0^\pi e^{x+y}\sin y\,\mathrm{d}y$$

Замечание:
Обозначение $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(X, Y), \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

Определение: *Ядро линейного оператора*

$\varphi \in \operatorname{Hom}_{K(X,Y)}$ — множество: $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in X(K) \mid \varphi(x) = 0_Y\}$

Лемма:
$\operatorname{Ker} \varphi \leq X(K)$

Определение: *Образ линейного опреатора*

Образ линейного оператора — это множество $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in X(K)\} = \varphi(X)$

Лемма:
$\operatorname{Im} \varphi \leq Y(K)$

9.2. (Первая) теорема о ядре и образе

$\sqsupset L(K) \leq X(K)$ — подпространство

$\sphericalangle \quad X/L$ — фактор-пространство вида $\left\{\underbrace{x + L}_{\overline{x}} \mid x \in X\right\}$

$\sqsupset \{\overline{v}_j\}_{j=1}^m$ — базис фактора X/L

$\uparrow$ ЛНЗ в $X/L \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^m \lambda^j \overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \lambda^j = 0$

$\uparrow$ ПН

Переформулируем:

$\boxed{\sum\limits_{j=1}^m \lambda^j v_j \in L \Leftrightarrow \lambda^j = 0}\ (*)$

Определение: ЛНЗ относительно L

Набор $\{v_j\}_{j=1}^m$, обладающий свойством (*)

Определение: “порождает” X относительно L

$\{v_j\}_{j=1}^m$ порождает X относительно $L \Leftrightarrow$ любой элемент может быть представлен в виде ЛК $\{v_j\}_{j=1}^m$ и элементов из L

Теорема: *следующие условия эквивалнтны*

1. $\{v_j\}_{j=1}^m$ порождает X относительно L
2. $\{\overline{v}_j\}_{j=1}^m$ — базис X/L
3. $X = \langle v_1 \dots v_m\rangle_K \oplus L$

Замечание:
$\dim_K X = \dim_K L + \dim_K X/L \quad (**)$

$\sqsupset \varphi : X(K) \to Y(K)$

$X/\operatorname{Ker} \simeq \operatorname{Im} \varphi$ *(теорема об изоморфизме)*

Теорема: (О ядре и образе)

$\dim_K \operatorname{Ker} \varphi + \dim_K \operatorname{Im} \varphi = \dim_K X$

Доказательство:
В формуле $(**)$ положим $L = \operatorname{Ker} Y$ и вспомним теорему об изоморфизме

Замечание:
$\operatorname{Hom}_{K(X,Y)}$ — линейное пространство над K

$\sqsupset \varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_{K(X,Y)}$

1. $\varphi = \psi \Leftrightarrow \forall x \in X(K) \quad \varphi(x) = \psi(x)$
2. $\zeta = \varphi + \psi$, если

   $\zeta(x) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$
3. $\chi = \lambda \cdot \varphi$, если

   $\chi(x) = (\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$

$? \quad \dim_K \operatorname{Hom}(X, Y) = \ ?$

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(K)$ $\qquad \varphi(e_i) = \sum\limits_{j=1}^m a_i^j g_j$

$\sqsupset \{g_j\}_{j=1}^m$ — базис $Y(K)$

Определение: матрица линейного оператора

Набор $\left\|a_i^j\right\| = A_\varphi$ называется матрицей линейного оператора в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$

$$\sphericalangle \quad x \in X(K) \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \ \Rightarrow\ \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi^i a_i^j g^j$$

$$\varphi(x) = y \in Y(K) \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j \Rightarrow \eta^j = \sum_{i=1}^n a_i^j \xi^i \Rightarrow \eta = A_\varphi \xi$$

Определение: оператор матричной единицы

$\left\{{}^i_j\varepsilon\right\} : \ {}^i_j\varepsilon(x) = \xi^i g_j, \ x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i$

Лемма:
${}^i_j\varepsilon \in \operatorname{Hom}_K(X, Y)$

Доказательство:
$\forall x_1, x_2 \in X(K) : \quad {}^i_j\varepsilon(x_1 + x_2) = (\xi_1 + \xi_2)i g_j = \xi_1^i g_j + \xi_2^i g_j = {}^i_j\varepsilon(x_1) + {}^i_j\varepsilon(x_2)$

$\forall x \in X(K) \quad \forall \lambda \in K : \quad {}^i_j\varepsilon(\lambda x) = (\lambda\xi)^i g_j = \lambda \cdot \xi^i g_j = \lambda {}^i_j\varepsilon(x)$

Замечание:

$$\begin{array}{l} A_\varphi = [\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \dots\ \varphi(e_n)] \qquad {}^i_j\varepsilon(e_k) = e_k^i g_j = \delta_k^i g_j \\ \qquad\ \ \vdots \qquad\ \ \vdots \qquad\qquad\ \vdots \\ \qquad\ \uparrow \qquad\ \uparrow \qquad\qquad\ \uparrow \end{array}$$

координаты в базисе $Y(K)$

Теорема:

$\left\{{}^i_j\varepsilon\right\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ — базис $\operatorname{Hom}_K(X, Y)$

Доказательство:
ПН:

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{Hom}_K(X, Y)$

$\sphericalangle \quad \varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \xi^i a_i^j g_j = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m a_i^j \cdot {}^i_j\varepsilon(x) \Rightarrow \varphi = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m {}^i_j\varepsilon \cdot a_i^j$

ЛНЗ:

$\sphericalangle \quad \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m {}^i_j\varepsilon \beta_i^j = \Theta \quad \mid e_k$

$\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m {}^i_j\varepsilon(e_k)\beta_i^j = 0$

$\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \delta_k^i g_j \beta_i^j = 0$

$\sum\limits_{j=1}^m g_j \beta_k^j = 0 \Rightarrow \beta_j^j = 0 \ \forall j$

${}^i_j\varepsilon$ — базис $\operatorname{Hom}_K(X, Y)$

Замечание:
$\dim_K \operatorname{Hom}\ (X, Y) = mn$

Замечание:
$\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

$$\begin{array}{ccc} \sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n & \xrightarrow{T} & \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n \text{ — базисы } X \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_\varphi & & \tilde{A}_\varphi \end{array}$$

$\boxed{\tilde{A}_\varphi = SA_\varphi T}$

Доказательство:

$$\varphi(\tilde{e}_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \tau_j^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \tau_j^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tau_j^i a_i^s e_s$$

$$\varphi(\tilde{e}_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_j^i \tilde{e}^i = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{a}_j^i \tau_i^s e_s$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tau_j^i a_i^s e_s = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{a}_j^i \tau_i^s e_s$$

$A_\varphi T = T\tilde{A}_\varphi \Rightarrow \tilde{A}_\varphi = SA_\varphi T$

“Представьте себе, что у вас все гораздо хуже”

Д/З:

$\varphi \in \operatorname{Hom}_K(X, Y)$

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{T_1} \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$

$\{g_s\}_{s=1}^m \xrightarrow{T_2} \{\tilde{g}_t\}_{t=1}^m$

$A_\varphi \xrightarrow{?} \tilde{A}_\varphi$

10. Алгебра линейных операторов

$\sqsupset X(K),\ Y(K),\ Z(K)$

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{Hom}_K(X, Y),\ \psi \in \operatorname{Hom}_K(X, Y)$

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

Определение: коядро

$Y/\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{coker} \varphi$ — коядро

Определение: *композиция операторов*

Композицией операторов φ и ψ называется отображение $\chi = \psi \circ \varphi$, такое что

$\forall x \in X(K) \quad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$

Лемма:
$\chi \in \operatorname{Hom}_K(X, Z)$

Доказательство:
$\chi(x_1 + x_2) = (\psi \circ \varphi)(x_1 + x_2) = \psi(\varphi(x_1 + x_2)) = \psi(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) + \psi(\varphi(x_2)) = \chi(x_1) + \chi(x_2)$

$\chi(\lambda x) = (\psi \circ \varphi)(\lambda x) = \psi(\varphi(\lambda x)) = \psi(\lambda\varphi(x)) = \lambda\psi(\varphi(x)) = \lambda\chi(x)$

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X

$\sqsupset \{g_j\}_{j=1}^m$ — базис Y

$\sqsupset \{h_s\}_{s=1}^p$ — базис Z

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{\varphi \leftrightarrow A_\varphi} \{g_j\}_{j=1}^m$

$\{g_j\}_{j=1}^m \xrightarrow{\psi \leftrightarrow B_\psi} \{h_s\}_{s=1}^p$

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{\chi \leftrightarrow ?\ C_\chi} \{h_s\}_{s=1}^p$

$$\chi(e_i) = (\psi \circ \varphi)(e_i) = \psi(\varphi(e_i)) = \psi\left(\sum_{j=1}^n a_i^j g_j\right) = \sum_{j=1}^m a_i^k \psi(g_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^p a_i^j b_j^s h_s$$

$\chi(e_i) = \sum\limits_{s=1}^p c_i^s h_s$

$\Rightarrow c_i^s = \sum\limits_{j=1}^m a_i^j b_j^s$

$\boxed{C_\chi = B_\psi A_\varphi}$

$\varphi \in \operatorname{End}_{K(X)}$

Свойства “$\circ$” на $\operatorname{End}_K(X)$:

1. $\forall \varphi, \psi, \chi \in \operatorname{End}_K(X) \quad \varphi \circ (\psi \circ \chi) = (\varphi \circ \psi) \circ \chi$
2. $\exists I \in \operatorname{End}_K(X) : \forall \varphi \in \operatorname{End}_K(X) \quad I \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ I$

Замечание:
$(\operatorname{End}_K(X), \circ)$ — моноид + абелева группа, а значит кольцо операторов над $X(K)$, а значит $\operatorname{End}_{K(X)}$ — алгебра эндоморфизмов пространства X.

$\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ — некоммутативная алгебра

Замечание:
A — алгебра (например $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$)

Кватернионы

$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$

$q = z + jw,\ z, j \in \mathbb{C}$

$i\ j \quad i \cdot j =: k$

$q = a + bi + cj + dk$

Таблица Кэли для произведения:

$\cdot$	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ — базис A

$x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i \quad y = \sum\limits_{j=1}^n \eta^u e_j$

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \eta^u e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \overbrace{(e_i \cdot e_j)}^{= \sum_{s=1}^n m_{ij}^s e_s}$$

$\left\|m_{ij}^s\right\|$ — структурные константы алгебры

$\operatorname{End}_K(X)$ — алгебра

$?\ (\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$

$?\ \varphi \circ (\lambda\psi) = (\lambda\varphi) \circ \psi = \lambda(\varphi \circ \psi)$

$\operatorname{End}_K(X) \simeq \operatorname{Mat}_{K(n)}, \quad n = \dim_k X$

$\varphi \quad \{e_j\}_{j=1}^n \quad {}^i_j\varepsilon \quad \varphi = {}^i_j\varepsilon a_i^j \longrightarrow A = \left\|a_i^j\right\|$

$\varphi \longleftrightarrow A_\varphi,\ \psi \longleftrightarrow B_\psi \Rightarrow \varphi + \psi \longleftrightarrow A_\psi + B_\psi,\ \varphi \circ \psi \longleftrightarrow A_\varphi \cdot B_\psi$

$\operatorname{Mat}_K(n)$ — алгебра матриц $n \times n$

$\mathcal{P}_L x = \mathcal{P}_L(x_L + x_M) = x_L$

Обратный оператор

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{Hom}_K(X)$

${}^?\sphericalangle \quad \tilde{\varphi} : \operatorname{Im} \varphi \longrightarrow X$ — отображение

$\forall x \in X \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi)x = x$

$\forall y \in \operatorname{Im} \varphi \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi)y = y$

$\sphericalangle \quad \varphi(\tilde{\varphi}(y_1) + \tilde{\varphi}(y_2)) = \varphi(\tilde{\varphi}(y_1)) + \varphi(\tilde{\varphi}(y_2)) = y_1 + y_2$

$\tilde{\varphi}(y_1) + \tilde{\varphi}(y_2) = \tilde{\varphi}(y_1 + y_2)$

Определение: Обратимый оператор

Оператор φ называется обратимым, если существует оператор $\tilde{\varphi}$, обладающий всеми перечисленными выше свойствами

Определение: Обратный оператор

Оператор φ^{-1} называется обратным к оператору φ, если:

1. $\forall x \in X \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)x = x \Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$
2. $\forall y \in Y \quad (\varphi \circ \varphi^{-1})y = y \Leftrightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$

Лемма:
Чтобы существовал обратный оператор, необходимо, чтобы $Y \simeq X$

Доказательство:
$\exists\varphi^{-1} \Rightarrow \varphi$ — биекция $\Rightarrow \varphi$ — изоморфизм

Теорема: $\exists\ \varphi^{-1} \Leftrightarrow$ выполнено одно из (эквивалентных) условий:

1. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$
2. $\dim_K \operatorname{Im}_Y = \dim_K X$

(-_-)$^{z\ z\ z...}$

z z z...

(_ _)