Математический анализ: II семестр

Лектор: Кохась Константин Петрович

_scarleteagle | imkochelorov | AberKadaber

Kloppert | при поддержке M3136-37 | ds2bb

(и MrWrld)

Оглавление

1. Первообразная

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

F — **первообразная** f на $\langle a, b\rangle$ — функция на $\langle a, b\rangle$:

$$F \text{ — дифференцируема на } \langle a, b\rangle$$

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : \; F'(x) = f(x)$$

1.1. Теорема о существовании первообразной *(определение)*

f непрерывна на $\langle a, b\rangle$

Что также записывается как $f \in C(\langle a, b\rangle) \Rightarrow$

$$\exists F \text{ — первообразная } f \text{ на } \langle a, b\rangle$$

Доказательство:

Теорема Барроу: 4.5

1.2. Теорема о свойствах первообразной

1. F — первообразная f на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

$$\forall c \in \mathbb{R} : \; (F + c) \text{ — первообразная } f \text{ на } \langle a, b\rangle$$

2. F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$

   G — первообразная f на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \; G - F = c$$

Доказательство:

1. $(F + c)' = F' = f$
2. $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0 \;\Rightarrow\; G - F = c, \; c \in \mathbb{R}$

2. Неопределённый интеграл

$\int f$ — **неопределённый интеграл** f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f на $\langle a, b\rangle$:

$$\int f = \{F + c : \ c \in \mathbb{R}, \ F - \text{первообразная } f\}$$

2.1. Теорема о свойствах неопределённого интеграла

1. *Линейность:*

   f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

   $$\int f + g = \int f + \int g$$

   $$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \int \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int f$$

2. *Замена переменной:*

   f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ — дифференцируема $\Rightarrow$

   $$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \left(\int f(x) \, \mathrm{d}x \right) \Big|_{x \,=\, \varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \, \mathrm{d}\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

   Частный случай (линейная замена):

   $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0 : \quad \int f(\alpha x + \beta) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$$

3. *Интегрирование по частям:*

   f, g дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $(f' \cdot g)$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

   $$(g' \cdot f) \text{ имеет первообразную на } \langle a, b\rangle$$

   $$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Доказательство:

1. F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$

   G — первообразная g на $\langle a, b\rangle$

   $(F + G)' = F' + G' = f + g$

   $(\alpha \cdot F)' = \alpha \cdot F' = \alpha \cdot f$

2. $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $\left(f \cdot g - \int f' \cdot g \right)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f' \cdot g = f \cdot g'$

2.2. Таблица интегралов (первообразных)

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = C$$

$$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C, \ p \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C, \ \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C, \ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan x + C, \ \int -\frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \ \int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos x + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C, \ \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$$

3. Площадь

Плоская фигура — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{E}$ — множество всех плоских фигур

Площадь $-\ \sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

1. *Аддитивность:*

   $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$

   $A = A_1 \sqcup A_2 \ (A_1 \cap A_2 = \varnothing)$

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$$

2. *Нормировка (площадь прямоугольника):*

$$\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a) \cdot (d - c)$$

3.1. Теорема о свойствах площади

σ — площадь

1. *Монотонность:*

   $A, B \in \mathcal{E}$

   $A \subset B \Rightarrow$

$$\sigma(A) \leq \sigma(B)$$

2. *Площадь вертикального отрезка:*

$$\sigma(\text{"вертикального отрезка"}) = 0$$

Доказательство:

1. $B = A \sqcup (B \setminus A)$

   $\sigma(B) = \sigma(A) + \underbrace{\sigma(B \setminus A)}_{\geq 0}$

2. $\forall \varepsilon > 0 : \quad \text{"вертикальный отрезок"} \subset \langle 0, \varepsilon\rangle \times \langle 0, l + \varepsilon\rangle$

   $\sigma(\langle 0, \varepsilon\rangle \times \langle 0, l + \varepsilon\rangle) = \varepsilon \cdot (l + \varepsilon)$ — сколь угодно малое значение

3.2. Ослабленная площадь

Ослабленная площадь $-\ \sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

1. *Монотонность:*

   $A, B \in \mathcal{E}$

   $A \subset B \Rightarrow$

$$\sigma(A) \leq \sigma(B)$$

2. *Нормировка (площадь прямоугольника):*

$$\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a) \cdot (d - c)$$

3. *Ослабленная аддитивность:*

   $E \in \mathcal{E}$

   $E = E_1 \cup E_2$ *(разбиение вертикальным отрезком)*

$$\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$$

4. Определённый интеграл

4.1. Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

f^+ — **положительная срезка** f:

$$f^+ = \max(f, 0)$$

f^- — **отрицательная срезка** f:

$$f^- = \max(-f, 0)$$

4.2. Подграфик функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$ на $\langle a, b\rangle$

$\Pi\Gamma(f, \langle a, b\rangle)$ — **подграфик функции** f на $\langle a, b\rangle$ — плоская фигура:

$$\Pi\Gamma(f, \langle a, b\rangle) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle a, b\rangle, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

4.3. Определенный интеграл

$f : [a, b] \to R$

$f \in C([a, b])$

$\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ — ослабленная площадь

$\displaystyle\int_a^b f$ — **определенный интеграл** f на $[a, b]$ — площадь подграфика f от a до b:

$$\int_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

Простейшие свойства:

$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f \geq 0$

$f \equiv c \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f = c(b - a)$

$\displaystyle\int_a^b -f = -\int_a^b f$

$a = b \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f = 0$

Аддитивность по промежутку:

$\forall c \in [a, b] : \quad \displaystyle\int_a^b = \int_a^c f + \int_c^b f$

4.4. Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C([a, b])$

$f \leq g$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство:

$f \leq g \ \Rightarrow \ f^+ \leq g^+, \ f^- \geq g^-$

Следствия:

1. $\displaystyle\min_{[a,b]}(f) \cdot (b - a) \ \leq \ \int_a^b f \ \leq \ \max_{[a,b]}(f) \cdot (b - a)$

2. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

3. *Теорема о среднем:*

   $\exists \ c \in [a, b] : \ \displaystyle\int_a^b f = f(c) \cdot (b - a)$

Доказательство:

1. $\displaystyle\min_{[a,b]}(f) \leq f \leq \max_{[a,b]}(f)$

   $\displaystyle\int_a^b \mathrm{const} = \mathrm{const} \cdot (b - a)$

2. $-|f| \leq f \leq |f|$

   $$\left.\begin{aligned} \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \\ \int_a^b f \geq \int_a^b -|f| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

3. $a = b : \ \displaystyle\int_a^b f = 0$

   $a \neq b : \ \displaystyle\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$

   По теореме о промежуточном значении $\exists c : \ f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_b^a f$

4.5. Теорема Барроу

$f \in C([a, b])$

$\Phi : [a, b] \to \mathbb{R} :$

$\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f$ — **интеграл с переменным верхним пределом** $\Rightarrow$

$$\Phi \text{ — дифференцируема}$$

$$\forall x \in [a, b] : \ \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство:

$y > x$:

$\Phi(y) - \Phi(x) = \displaystyle\int_a^y f - \int_a^x f = \left(\int_a^x f + \int_x^y f\right) - \int_a^x f$

$$\lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$$\text{где } c \in [x, y] \ \text{ по т. о среднем}$$

$x > y$:

$\Phi(y) - \Phi(x) = \displaystyle\int_a^y f - \int_a^x f = \int_a^y f - \left(\int_a^y f + \int_y^x f\right)$

$$\lim_{y \to x-0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x-0} \frac{1}{x - y} \cdot \int_y^x f = \lim_{y \to x-0} f(c) = f(x)$$

$$\text{где } c \in [y, x] \ \text{ по т. о среднем}$$

4.6. Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C([a, b])$

F — первообразная $f \Rightarrow$

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

Доказательство:

$\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f$

$\exists C : \ \Phi(x) = F(x) + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Согласование:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Для кусочно-непрерывных функций:

Интеграл кусочно-непрерывной функции: 7.2

5. Частичные пределы

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ *вещественная последовательность*

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ — **частичный предел** последовательности x_n

$$\exists (n_k) - \text{последовательность возрастающих индексов}: \ x_{n_k} \to a$$

5.1. Верхний и нижний пределы

$(x_n) \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), \quad y_{n+1} \le y_n \\ z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots), \quad z_{n+1} \ge z_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_n \le x_n \le y_n$$

Верхний предел:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \operatorname*{limsup}_{n\to+\inf} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Нижний предел

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \operatorname*{liminf}_{n\to+\inf} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

5.2. Свойства верхнего и нижнего предела

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$
2. $\forall n: \ x_n \le \tilde{x}_n \Rightarrow$

   $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, \tilde{x}_n, \quad \underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, \tilde{x}_n$
3. $\lambda \ge 0 \Rightarrow$

   $\overline{\lim}(\lambda \cdot x_n) = \underset{[0\cdot\infty=0]}{\lambda \cdot \overline{\lim}\, x_n}, \quad \underline{\lim}(\lambda \cdot x_n) = \underset{[0\cdot\infty=0]}{\lambda \cdot \underline{\lim}\, x_n}$
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim}\, x_n), \quad \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim}\, x_n\right)$
5. $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n, \quad \underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, \tilde{x}_n$
6. $(t_n) \subset \mathbb{R}, \quad t_n \to l \in \mathbb{R}$

   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$
7. $(t_n) \subset \mathbb{R}, \quad t_n \to l \in \mathbb{R}, \quad l > 0$

   $\overline{\lim}(x_n \cdot t_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$

6. $(t_n) \subset \mathbb{R}, \quad t_n \to l \in \mathbb{R}$

   $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}\, x_n + l$
7. $(t_n) \subset \mathbb{R}, \quad t_n \to l \in \mathbb{R}, \quad l > 0$

   $\underline{\lim}(x_n \cdot t_n) = \underline{\lim}\, x_n \cdot l$

Доказательство:

Последним шагом доказательств пунктов 1-5 является предельный переход

1. $\underbrace{z_n}_{\underline{\lim}\, x_n} \le x_n \le \underbrace{y_n}_{\overline{\lim}\, x_n}$
2. $\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) \le \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \ldots)$

   $\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots) \le \inf(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \ldots)$
3. $\lambda \cdot y_n = \sup(\lambda \cdot x_n, \lambda \cdot x_{n+1}, \ldots)$

   $\lambda \cdot z_n = \inf(\lambda \cdot x_n, \lambda \cdot x_{n+1}, \ldots)$
4. $-x_n \le c \quad \Leftrightarrow \quad x_n \ge -c$

   $\sup(-x_n, -x_{n+1}, \ldots) = -\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$

   $\inf(-x_n, -x_{n+1}, \ldots) = -\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)$
5. $\sup(x_n + \tilde{x}_n, x_{n+1} + \tilde{x}_{n+1}, \ldots) \le \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) + \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \ldots)$
6. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0: \ \forall k > N_0 \ \ l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$

   $$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon \quad \underset{\sup \text{ по } k \ge N > N_0}{\rightsquigarrow}$$

   $$y_N + l - \varepsilon \le \sup_{k \ge N}(x_k + t_k) \le y_N + l + \varepsilon$$

   $\overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \le \overline{\lim}(x_n + t_n) \le \overline{\lim}\, x_n + l + \varepsilon$

   $\varepsilon \to +0: \ \overline{\lim}\, x_n + l \le \overline{\lim}(x_n + t_n) \le \overline{\lim}\, x_n + l \ \Rightarrow \ \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$
7. *Осталось недоказанным*

5.3. Техническое описание верхнего предела

$(x_n) \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

1. $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (x_n)$ не ограничена сверху
2. $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$
   - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \ x_n < l + \varepsilon$
   - $\forall \varepsilon > 0$ существует бесконечно много n таких, что $x_n > l - \varepsilon$

Доказательство:

1. $\Rightarrow$:

   $y_n \to +\infty \ \Rightarrow \ \forall k \ \ \exists y_n > k + 1 \ \Rightarrow \ \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) > k + 1 \ \Rightarrow \ \forall k \ \ \exists x_i > k$

   $\Leftarrow$:

   (x_n) не ограничена сверху $\ \Rightarrow \ y_n \equiv +\infty$
2. $\Rightarrow$:

   $x_n \le y_n$

   $y_n \to -\infty \ \Rightarrow \ x_n \to -\infty$

   $\Leftarrow$:

   $\forall \mathrm{E} < 0: \ \exists N: \ \forall k > N: \ x_k < \mathrm{E} \ \Rightarrow \ y_{N+1} \le \mathrm{E}$
3. $\Rightarrow$:
   - $x_n \le y_n, \quad y_n \to l$

     $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \forall n > N \ \ x_n \le y_n < l + \varepsilon$
   - $y_n \searrow, \quad y_n \to l \ \Rightarrow \ \forall n \ \ y_n \ge l$

     $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\forall n}_{\text{позволяет найти бесконечно много } k} \quad \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) \ge l$

     $$\exists k \ge n: \ x_k > l - \varepsilon$$

   $\Leftarrow$:

   $$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \underbrace{\forall n > N}_{\text{для всех последующих } x} \ \ x_n < l + \varepsilon \\ &\quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \forall n > N \ \ y_n \le l + \varepsilon \\ &\bullet\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n \ \ y_n \ge l - \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_n \to l$$

5.4. Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

$(x_n) \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\exists \lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = l$$

Доказательство:

$\Rightarrow$:

- $\lim x_n = +\infty$:

  $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ — по тех. описанию - п.1

  $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ — по тех. описанию - п.2
- $\lim x_n = -\infty$

  $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ — по тех. описанию - п.1

  $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ — по тех. описанию - п.2
- $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$

  $\overline{\lim}\, x_n = l$ — по тех. описанию - п.3

  $\underline{\lim}\, x_n = l$ — по тех. описанию - п.3

$\Leftarrow$:

$$\left.\begin{aligned} &z_n \le x_n \le y_n \\ &y_n \to l \\ &z_n \to l \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n \to l \ - \text{по принципу двух городовых}$$

5.5. Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

$(x_n) \subset \mathbb{R}$

1. $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $x_n \Rightarrow$

   $$\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$$
2. $$\exists (n_k): \ x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{\lim}\, x_n$$

   $$\exists (m_j): \ x_{m_j} \underset{j\to+\infty}{\to} \underline{\lim}\, x_n$$

Доказательство:

1. $n_k: \ x_{n_k} \to l, \quad z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}$

   $z_{n_k} \to \underline{\lim}\, x_n, \quad x_{n_k} \to l, \quad y_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n$

   $\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
2. $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$:

   (x_n) — неограничена сверху по тех. описанию - п.1

   Можно выбрать такие $x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_m}$:

   $\left(x_{n_k}\right) \to +\infty$

   Предел самой (x_n) может не существовать

   $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$:

   $\lim x_n = -\infty$ — по тех. описанию - п.2

   $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R}$

   $\exists n_k: \ l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ — по тех. описанию - п.3

   $$\left.\begin{aligned} l - \tfrac{1}{k} \to l \\ l + \tfrac{1}{k} \to l \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{n_k} \to l$$

   $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$:

   (x_n) — неограничена снизу по тех. описанию - п.1

   Можно выбрать такие $x_{n_1} > x_{n_2} > \ldots > x_{n_m}$:

   $\left(x_{n_k}\right) \to -\infty$

   Предел самой (x_n) может не существовать

   $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$:

   $\lim x_n = +\infty$ — по тех. описанию - п.2

   $\underline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R}$

   $\exists n_k: \ l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ — по тех. описанию - п.3

   $$\left.\begin{aligned} l - \tfrac{1}{k} \to l \\ l + \tfrac{1}{k} \to l \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{n_k} \to l$$

6. Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

1. *Линейность:*

   $f, g \in C[a,b]$

   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \alpha \cdot f + \beta \cdot g = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g$$

2. *Интегрирование по частям:*

   $f, g \in C^1[a,b]$

$$\int_a^b f \cdot g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g$$

3. *Замена переменной:*

   $f \in C(\langle a,b \rangle)$

   $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a,b \rangle$

   $\varphi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$

   $[p,q] \subset \langle a,b \rangle$

$$\int_p^q f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство:

1. F — первообразная f

   G — первообразная g

   $(\alpha \cdot F + \beta \cdot G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$

   $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g = (\alpha F + \beta G) \Big|_a^b$

2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

   $\int_a^b (f \cdot g' + f' \cdot g) = f \cdot g \Big|_a^b$

3. F — первообразная f

   $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

   $\int_p^q f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \Big|_{t=p}^{t=q} = F(x) \Big|_{x=\varphi(p)}^{x=\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,\mathrm{d}x$

6.1. Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a,b]$

f, g одинаково монотонны

$I_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \Rightarrow$

$$I_f \cdot I_g \le I_{fg}$$

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \le (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство:

f, g одинаково монотонны $\Rightarrow \forall x, y \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \ge 0$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \ge 0$ — интегрируем по y, делим на $(b-a)$

$f(x)g(x) - I_f g(x) - f(x) I_g + I_{fg} \ge 0$ — интегрируем по x, делим на $(b-a)$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_g \cdot I_f + I_{fg} \ge 0$ — доказываемое неравенство, умноженное на 2

6.2. Иррациональность числа π

$$\pi \text{ — иррационально}$$

$$\pi^2 \text{ — иррационально}$$

Доказательство:

$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t$

$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & f' = -2nt\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \\ g' = \cos(t) & g = \sin(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cdot \frac{\sin(t)}{n!} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \frac{2n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \sin(t)\,\mathrm{d}t =$

$= \begin{bmatrix} f = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + \underbrace{\underbrace{t(-2t)}_{=\left(\frac{\pi^2}{2} - 2t^2\right) - \frac{\pi^2}{2}} \quad (n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}}_{=2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}} \\ g' = \sin(x) & g = -\cos(x) \end{bmatrix} =$

$= \frac{2}{(n-1)!} \left(\underbrace{-\cos(t) \cdot t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \cos(t)\,\mathrm{d}t + \right.$

$\left. +2(n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} \cos(t)\,\mathrm{d}t \right) =$

$= 2H_{n-1} + (4n-4)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}, \quad n \ge 2$

$H_0 = 2$

$H_1 \underset{\text{первое преобразование}}{\overset{\text{уже сделали}}{=}} 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} f = t & f' = 1 \\ g' = \sin(t) & g = -\cos(t) \end{bmatrix} = -2t\cos(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 4$

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$

$H_n = (4n-2)((4n-6)H_{n-2} - \pi^2 H_{n-3}) - \pi^2 H_{n-2} = ...$

$H_n = ... \underbrace{H_0}_{2} + ... \underbrace{H_1}_{4} = F_n(\pi^2)$ — многочлен от π^2 с целыми коэффициентами, степени не выше n

Предположим, что: π^2 — рациональное $\Leftrightarrow \pi^2 = \frac{l}{m}$

$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\frac{l}{m}\right) \overset{\cdot m^n}{\Rightarrow}$

$0 < \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = F_n\left(\frac{l}{m}\right) \cdot m^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t \ge 1 \\ &\frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{m^n}{n!} \cdot 10^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}\right\} \text{— } \textit{противоречие}$$

6.3. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$

$f \in C^{n+1}(\langle a,b \rangle)$

$x, x_0 \in \langle a,b \rangle$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство:

База индукции:

$n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$

Индуктивный переход:

$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = f^{(n+1)}(t) & u' = f^{(n+2)}(t) \\ v' = (x-t)^n & v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x}}_{\text{элемент суммы}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{искомый остаток}}$$

7. Кусочно-непрерывная функция

f — **кусочно-непрерывная функция** на $[a, b]$:

$$\exists \text{ конечное число точек } a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b :$$

$$f \text{ — непрерывная на } [a, x_1),\ (x_1, x_2),\ ...,\ (x_n, b]$$

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \text{ — разрывы 1 рода}$$

Словами:

$$f \text{ — непрерывна на } [a, b] \text{ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы 1 рода}$$

7.1. Почти первообразная

f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$

$F \in C[a, b]$

F — **почти первообразная** f на $[a, b]$:

$$F'(x) = f(x) \text{ на } [a, b] \text{ за исключением конечного числа точек } x$$

7.2. Интеграл кусочно-непрерывной функции

f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$

F — почти первообразная f на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F \Big|_a^b$$

Доказательство:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$

$\forall k \in [1, n] \quad f$ — непрерывная на (x_{k-1}, x_k)

$$\exists \lim_{x \to x_k - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_k + 0} f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(t) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

8. Правило Лопиталя

8.1. Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка D

$\exists \dot{U}(a) : \forall x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, \; g(x) \neq 0$

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \; \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \to a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{cases} \text{ можно составить такую } (y_k), \text{что } \begin{cases} y_k \to a \\ y_k \in D \\ y_k \neq a \end{cases} \lim \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0, \; \lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty, \; \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \to a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{cases} \text{ можно составить такую } (y_k), \text{что } \begin{cases} y_k \to a \\ y_k \in D \\ y_k \neq a \end{cases} \lim \frac{f(x_k)}{g(y_k)} = 0, \; \lim \frac{g(x_k)}{g(y_k)} = 0$$

Доказательство:

1. $\forall k \;\; \exists N : \; \forall n > N \;\; |f(x_n)| < \frac{1}{k} \cdot |g(x_k)|, \; |g(x_n)| < \frac{1}{k} \cdot |g(x_k)|$

$(y_k) \subset (x_k)$:

$$\begin{cases} |f(y_k)| < \frac{1}{k} |g(x_k)| \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \\ |g(y_k)| < \frac{1}{k} |g(x_k)| \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \end{cases}$$

2. $\forall k \;\; \exists N : \; \forall n > N \;\; |f(x_k)| < \frac{1}{k} \cdot |g(x_n)|, \; |g(x_k)| < \frac{1}{k} \cdot |g(x_n)|$

$(y_k) \subset (x_k)$:

$$\begin{cases} |f(x_k)| < \frac{1}{k} |g(y_k)| \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(x_k)}{g(y_k)}\right| < \frac{1}{k} \\ |g(x_k)| < \frac{1}{k} |g(y_k)| \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(x_k)}{g(y_k)}\right| < \frac{1}{k} \end{cases}$$

8.2. Правило Лопиталя

$a \in \overline{\mathbb{R}}$

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

f, g – дифференцируемы на (a, b)

$g' \neq 0$ на (a, b)

$\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f}{g} = \left[\dfrac{0}{0}, \; \dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f}{g} = A$$

Доказательство:

$g' \neq 0 \;\Rightarrow\; g'$ – сохраняет знак (т. Дарбу) $\;\Rightarrow\; g$ – строго монотонно $\;\Rightarrow\;$ в окрестности точки a $g \neq 0$

По Гейне: $\begin{cases} x_k \to a \\ x_k \neq a \\ x_k \in (a, b) \end{cases}$, строим последовательность y_k из леммы об ускоренной сходимости

Теорема Коши: $\exists \xi_k : \; \dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$

$f(x_k) - f(y_k) = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$

В случае стремления к 0 поделим на $g(x_k)$:

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}} + \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}} \cdot \left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}\right) \;\longrightarrow\; A$$

В случае стремления к $+\infty$ поделим на $g(y_k)$:

$$-\frac{f(y_k)}{g(y_k)} = -\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(x_k)}{g(y_k)}} + \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}} \cdot \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{g(x_k)}{g(y_k)}} - 1\right) \;\longrightarrow\; -A$$

8.3. Аналитическая функция

f – аналитическая функция:

$$f \in C^{\infty}$$

$\forall x_0 \;\; \exists U(x_0) \subset \overline{\mathbb{R}} : \; \forall x \in U :$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Словами:

В некоторой окрестности любой точки (или на всей области определения) f представима в виде ряда Тейлора

8.3.1. Пример неаналитической функции

f – неаналитическая функция: f не разложима в ряд Тейлора

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Ряд Тейлора } f \equiv 0$$

Доказательство:

1. $\exists f'(0)$:

По Теореме Лагранжа (следствию): $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = a$, то $f'_+(x_0) = a$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = a, \text{ то } f'(x_0) = a$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \dfrac{2\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$ – *ситуация ухудшилась*

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{3}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$

Следствие:

$\forall k \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$

$$f'(0) = 0, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Индуктивно докажем, что:

$$\forall n \;\; \exists P_n(x) : \; f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

База индукции:

$n = 0$

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$n = 1$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Индуктивный переход:

$$f^{(n+1)} = \begin{cases} \left(P'_n\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{x \to 0} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, & x = 0 \end{cases}$$

9. Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\mathrm{Segm}(\langle a,\ b\rangle) = \{[p,q]:\ [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$ — множество всех подотрезков $\langle a,b\rangle$

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — **функция промежутка**

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — **аддитивная функция промежутка:**

<u>*Аддитивность функции промежутка:*</u>

$$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)\ \ \forall c \in [p,q]\ \ \Phi([p,q]) = \Phi([p,c]) + \Phi([c,q])$$

Определённый интеграл является аддитивной функцией промежутка

9.1. Плотность аддитивной функции промежутка

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — **плотность аддитивной функции** Φ :

$$\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)\quad \min_{\Delta} f \cdot |\Delta| \le \Phi(\Delta) \le \max_{\Delta} f \cdot |\Delta|$$

9.1.1. Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

$f \in C(\langle a,b\rangle)$

f — плотность $\Phi \Rightarrow$

$$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)\ \ \Phi([p,q]) = \int_p^q f$$

Доказательство:

Не умаляя общности, рассмотрим $[a,b]$ как отрезок

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a,x]), & x \in (a,b] \end{cases}$

F — первообразная f :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a,x+h]) - \Phi([a,x])}{h} = \overbrace{\frac{\Phi([x,x+h])}{h}}^{\in\left[\min\limits_{[x,x+h]} f,\ \max\limits_{[x,x+h]} f\right]} \underset{\text{значении непрерывной функции}}{\overset{\text{теорема о промежуточном}}{=}} f(x+\Theta h),\ 0 \le \Theta \le 1$$

$F'_+(x) = \lim\limits_{h\to+0} f(x+\Theta h) = f(x)$

$F'_-(x) = \lim\limits_{h\to-0} f(x+\Theta h) = f(x)$

$$\int_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi([p,q])$$

9.2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

r — расстояние от начала полярных координат

φ — угол, отступаемый от задающего полярные координаты луча

$r = r(\varphi)$ — линия, заданная в полярных координатах

$\langle \alpha, \beta\rangle :\ \ \alpha, \beta$ — углы, в которых проводятся лучи из начала координат

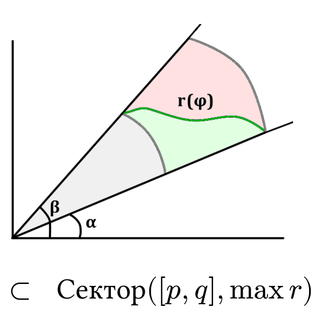
σ — площадь

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$\Phi([p,q]) = \sigma(\text{Сектор}([p,q],\ r(\varphi)))$

$$\frac{1}{2} r^2(\varphi) - \text{плотность } \Phi$$

Доказательство:



$\text{Сектор}([p,q], \min r)\ \subset\ \text{Сектор}([p,q], r(\varphi))\ \subset\ \text{Сектор}([p,q], \max r)$

$\sigma(\text{Сектор}([a,b], c)) = \frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot c^2$

$\frac{1}{2} \cdot (q-p) \cdot \min\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)\ \le\ \Phi[p,q]\ \le\ \frac{1}{2} \cdot (q-p) \cdot \max\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)$

$$\Phi([p,q]) = \frac{1}{2}\int_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

9.2.1. Площадь криволинейного сектора для параметрической кривой

$x(t), y(t)$ — параметрически заданная кривая

$\langle a,b\rangle :\ \ a, b$ — углы, в которых проводятся лучи из начала координат

σ — площадь

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

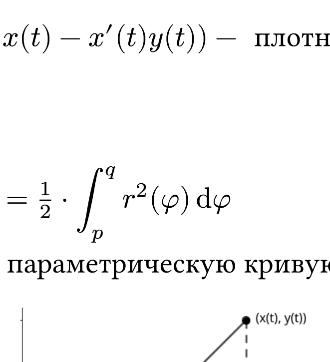
$\Phi([p,q]) = \sigma(\text{Сектор}([p,q],\ \{x(t), y(t)\}))$

$$\frac{1}{2}(y'(t)x(t) - x'(t)y(t)) - \text{ плотность } \Phi$$

Доказательство:

Площадь сектора в полярных координатах $= \frac{1}{2} \cdot \int_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

Произведём замену переменных, переведя параметрическую кривую в полярные координаты



$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

$$r(\varphi(t)) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \begin{bmatrix} \varphi = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \\ r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_p}^{t_q} (x^2(t) + y^2(t)) \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}} \cdot \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{t_p}^{t_q} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))\,\mathrm{d}t$$

9.3. Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая выпуклая фигура

$\text{Диаметр}(G) = \sup(\{\rho(A,B) :\ A, B \in G\})$

$\text{Диаметр}(G) = d \Rightarrow$

$$\sigma(G) \le \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\text{Равенство для круга при } r = \frac{d}{2}$$

Доказательство:

Положим всю нашу фигуру выше оси O_x

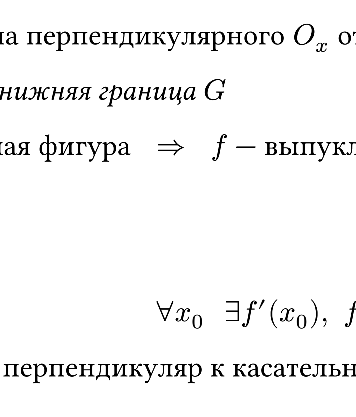
$f(x)$ — длина перпендикулярного O_x отрезка от точки x на O_x до ближайшей точки G

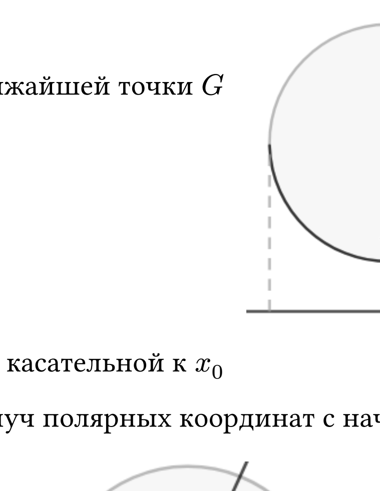
График f — нижняя граница G

G — выпуклая фигура $\ \Rightarrow\ \ f$ — выпуклая функция

$$\forall x_0\ \ \exists f'(x_0),\ \ f'(x_0) - \text{угловой коэффициент касательной к } x_0$$

Построим перпендикуляр к касательной в точке x_0, как задающий луч полярных координат с началом в x_0





Любая прямая из начала построенных полярных координат имеет 2 пересечения границы G

(Кроме изначальной касательной)

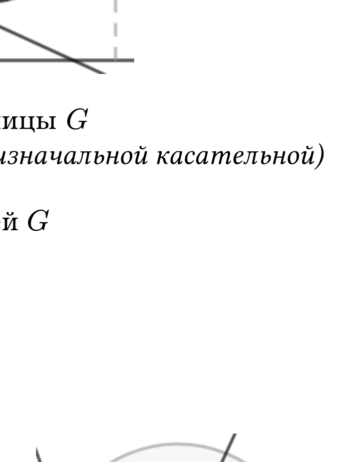
$r(\varphi)$ — длина отрезка под углом φ из начала координат (x_0) до пересечения с границей G

$r(\varphi) \in C\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

$\varphi_0 = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$



$r(\varphi)$ — растояние от x_0 до A — точка на границе G

$r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ — растояние от x_0 до B — точка на границе G

Между x_0A и x_0B прямой угол:

$r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ — квадрат расстояния от A до B

$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{"}\underbrace{AB^2}_{\le d^2}\text{"}\,\mathrm{d}\varphi\ \le\ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

9.4. Обобщенная теорема о плотности

$\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f \in C[a,b]$

$\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)\ \ \exists m_\Delta, M_\Delta$ — функции промежутка:

1. $m_\Delta \cdot |\Delta| \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot |\Delta|$
2. $\forall x \in \Delta\ \ m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
3. $\forall x \in \Delta\ \ \forall \Delta_0 \subset \Delta :\ x \in \Delta_0\ \ M_{\Delta_0} - m_{\Delta_0} \underset{\substack{|\Delta_0|\to 0 \\ x\in\Delta_0}}{\longrightarrow} 0$

$$\forall x \in \Delta\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ \forall \Delta_0 \subset \Delta :\ |\Delta_0| < \delta,\ x \in \Delta_0\ \ \left|M_{\Delta_0} - m_{\Delta_0}\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$f - \text{плотность } \Phi$$

Доказательство:

Не умаляя общности рассмотрим $[a,b]$ как отрезок

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \Phi[a,x], & x > a \end{cases}$

F — первообразная f :

$F'_+ = f :\quad (\text{здесь } h > 0\ \text{ и } h \to +0)$

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\Phi([a,x+h]) - \Phi([a,x])}{h} = \dfrac{\Phi[x,\ x+h]}{h}$

По условию к функциям промежутка п.1: $m_{[x,\ x+h]} \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_{[x,\ x+h]}$

По условию к функциям промежутка п.2: $m_{[x,\ x+h]} \le \qquad f(x) \qquad \le M_{[x,\ x+h]}$

$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le M_{[x,\ x+h]} - m_{[x,x+h]} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ — По условию к функциям промежутка п.3

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to+0}{\longrightarrow} f(x)\ \Rightarrow\ F'_+(x) = f(x)$

$F'_- = f :\quad (\text{здесь } h < 0\ \text{ и } h \to -0)$

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\Phi([a,x+h]) - \Phi([a,x])}{h} = \dfrac{\Phi[x,\ x+h]}{h}$

По условию к функциям промежутка п.1: $m_{[x,\ x+h]} \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_{[x,\ x+h]}$

По условию к функциям промежутка п.2: $m_{[x,\ x+h]} \le \qquad f(x) \qquad \le M_{[x,\ x+h]}$

$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le M_{[x,\ x+h]} - m_{[x,x+h]} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ — По условию к функциям промежутка п.3

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to-0}{\longrightarrow} f(x)\ \Rightarrow\ F'_-(x) = f(x)$

9.5. Объем фигур вращения

$[a,b] \subset [0, +\infty)$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f \ge 0$

$f \in C([a,b])$

График f — верхняя граница A

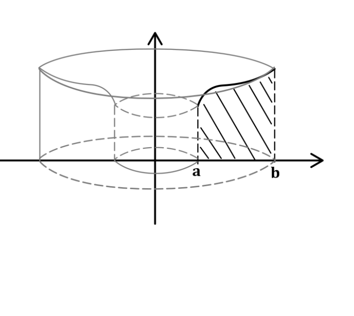
$A \subset \mathbb{R}^2$ — плоская фигура в I квадранте системы координат

I тип вращения A :   вокруг оси O_x — объёмная фигура $T \subset \mathbb{R}^3$

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \left(x, \sqrt{y^2+z^2}\right) \in A\right\}$$

$$T([a,b]) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [a,b],\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\right\}$$

$\Phi([a,b]) = V(T[a,b])$ — аддитивная функция промежутка



II тип вращения A :   вокруг оси O_y — объёмная фигура $U \subset \mathbb{R}^3$

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \left(\sqrt{x^2+z^2}, y\right) \in A\right\}$$

$$U([a,b]) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ a^2 \le x^2+z^2 \le b^2,\ 0 \le y \le f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)\right\}$$

$\Psi([a,b]) = V(U[a,b])$ — аддитивная функция промежутка $\Rightarrow$

1. <u>*Объём фигуры вращения I типа:*</u>

$$\Phi([a,b]) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

2. <u>*Объём фигуры вращения II типа:*</u>

$$\Psi([a,b]) = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство:

1. $\pi \cdot f^2(x)$ — плотность Φ :

   Доказывать будем по определению аддитивной функции промежутка

   Проверим что для любого $[p,q] \subset [a,b]$:

   $$(q-p) \cdot \min_{[p,q]}(\pi \cdot f^2(x)) \le \Phi([p,q]) \le (p-q) \cdot \max_{[p,q]}(\pi \cdot f^2(x))$$

   $$(q-p) \cdot \pi \cdot \min_{[p,q]}(f^2(x)) \le \Phi([p,q]) \le (p-q) \cdot \pi \cdot \max_{[p,q]}(f^2(x))$$

   Слева стоит объем цилиндра с радусом $\min\limits_{[p,q]} f(x)$ и высотой $q - p$

   Справа стоит объем цилиндра с радиусом $\max\limits_{[p,q]} f(x)$ и высотой $q - p$

   $$\text{Цилиндр}([p,q], \min f) \subset \text{Фигура}([p,q], f) \subset \text{Цилиндр}([p,q], \max f)$$

   Поэтому неравенство выполнено, значит $\pi \cdot f^2(x)$ действительно плотность Φ.

2. $2\pi \cdot x \cdot f(x)$ — плотность Ψ :

   Применим обобщённую теорему о плотности:

   $\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}([a,b])$:

   $\Pi_{\max}([p,q])$ — цилиндр с основанием $p^2 \le x^2 + z^2 \le q^2$, высотой $\max\limits_{[p,q]} f$

   $\Pi_{\min}([p,q])$ — цилиндр с основанием $p^2 \le x^2 + z^2 \le q^2$, высотой $\min\limits_{[p,q]} f$

   $$\Pi_{\min}([p,q])\ \le\ \Psi([p,q])\ \le\ \Pi_{\max}([p,q])$$

   $V(\text{цилиндр}) = S(\text{основание}) \cdot h_\Pi$

   $V(\Pi([p,q])) = \pi \cdot (q^2 - p^2) \cdot h_\Pi = \pi \cdot (q+p) \cdot h_\Pi \cdot (q-p)$

   $V(\Pi_{\max}([p,q])) \le \pi \cdot \max\limits_{x\in[p,q]} 2x \cdot \max\limits_{[p,q]} f \cdot (q-p) \qquad (q+p) \le 2q = \max\limits_{x\in[p,q]} 2x$

   $V(\Pi_{\min}([p,q])) \ge \pi \cdot \min\limits_{x\in[p,q]} 2x \cdot \min\limits_{[a,b]} f \cdot (q-p) \qquad (q+p) \ge 2p = \min\limits_{x\in[p,q]} 2x$

   $M_{[p,q]} = \pi \cdot \max\limits_{x\in[p,q]} 2x \cdot \max\limits_{[p,q]} f$

   $m_{[p,q]} = \pi \cdot \min\limits_{x\in[p,q]} 2x \cdot \min\limits_{[p,q]} f$

   $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ m_{[p,q]} \cdot (q-p) \le \Psi([p,q]) \le M_{[p,q]} \cdot (q-p) \\ \bullet\ m_{[p,q]} \le 2\pi \cdot x \cdot f(x) \le M_{[p,q]} \\ \bullet\ M_{[p,q]} - m_{[p,q]} \underset{\substack{x\in[p,q] \\ |[p,q]|\to 0}}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\}\ 2\pi \cdot x \cdot f(x) - \text{действительно плотность } \Psi$$

10. Интегральные суммы

10.1. Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение, интегральная сумма Римана

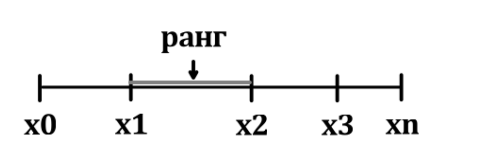
$f \in C[a,b]$

Дробление отрезка $[a,b]$ — разбиение $[a,b]$ на n частей набором точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Ранг дробления — длина наибольшего отрезках дробления:

$$\max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

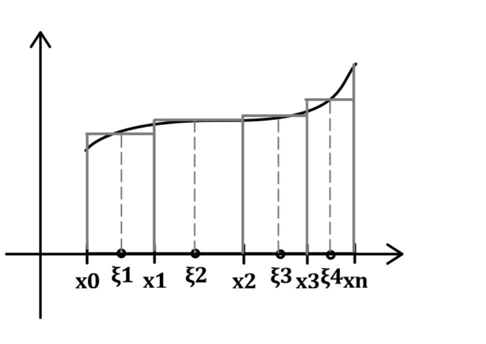


Оснащение дробления — набор точек на отрезках дробления:

$$\{\xi_1, ..., \xi_n : \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Интегральная сумма Римана — сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$



10.2. Интеграл как предел интегральных сумм

$f \in C[a, \ b] \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall\text{дробление } \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\} \text{ с рангом} < \delta \ \ \forall\text{оснащение } \{\xi_1, ..., \xi_n\}$$

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \ < \ \varepsilon$$

Доказательство:

Применим Теорему Кантора о равномерной непрерывности:

$f \in C[a,b] \ \Rightarrow \ f$ — равномерно непрерывна

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, \ \overline{x}, \ |x - \overline{x}| < \delta \ \ |f(x) - f(\overline{x})| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\forall k \ \ f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(\xi_k)}_{\text{const}} \, \mathrm{d}x$

$\left| \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \ = \ \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) \, \mathrm{d}x \right|$

Модуль суммы не превосходит сумму модулей

Модуль интеграла не превосходит интеграл модуля

$\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) \, \mathrm{d}x \right| \ \le \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x \ < \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} \, \mathrm{d}x =$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$

10.3. Теорема об интегральных суммах центральных прямоугольников и трапеций

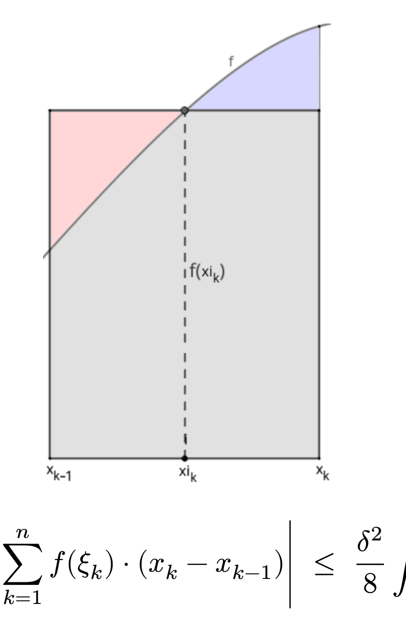
$f \in C^2[a,b]$

$\{x_0, ..., x_n\}$ — дробление $[a,b] : \ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

$\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$ — ранг дробления $\{x_0, ..., x_n\}$

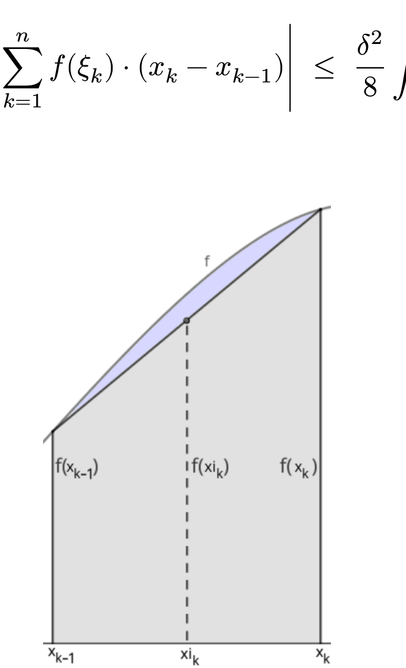
$\xi_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ — оснащение дробления $\{x_0, ..., x_n\} \Rightarrow$

1. *Интегральные суммы центральных прямоугольников:*



$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \ \le \ \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| \, \mathrm{d}x$$

2. *Формула трапеций:*



$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \ \le \ \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| \, \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \cdot (x - x_{k-1})(x_k - x) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство:

1. $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} v = f & v' = f' \\ u' = 1 & u = x - x_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v = f & v' = f' \\ u' = 1 & u = x - x_i \end{bmatrix} =$

$= f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x = x_{i-1}}^{x = \xi_i} - \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) \, \mathrm{d}x + f(x)(x - x_i) \Big|_{x = \xi_i}^{x = x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i) \, \mathrm{d}x =$

$= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) \, \mathrm{d}x - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i) \, \mathrm{d}x =$

$= \begin{bmatrix} v = f' & v' = f'' \\ u' = x - x_{i-1} & u = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v = f' & v' = f'' \\ u' = x - x_i & u = \frac{(x - x_i)^2}{2} \end{bmatrix} =$

$= \sigma\Big(\text{Прямоугольник}_{[x_{i-1}, i_k]}\Big) - \dfrac{1}{2} f'(x)(x - x_{i-1})^2 \Big|_{x = x_{i-1}}^{x = \xi_i} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)(x - x_{i-1})^2 \, \mathrm{d}x -$

$- \dfrac{1}{2} f'(x)(x - x_i)^2 \Big|_{x = \xi_i}^{x = x_i} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\xi_i}^{x_i} f''(x)(x - x_i)^2 \, \mathrm{d}x =$

$= \sigma\Big(\text{Прямоугольник}_{[x_{i-1}, i_k]}\Big) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)(x - x_{i-1})^2 \, \mathrm{d}x + \dfrac{1}{2} \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x)(x - x_i)^2 \, \mathrm{d}x =$

$$u = \begin{cases} (x - x_0)^2, & x \in [x_0, \xi_1] \\ (x - x_1)^2, & x \in [\xi_1, x_1] \\ (x - x_1)^2, & x \in [x_1, \xi_2] \\ (x - x_2)^2, & x \in [\xi_2, x_2] \\ \quad \vdots & \\ (x - x_{n-1})^2, & x \in [x_{n-1}, \xi_n] \\ (x - x_n)^2, & x \in [\xi_n, x_n] \end{cases}$$

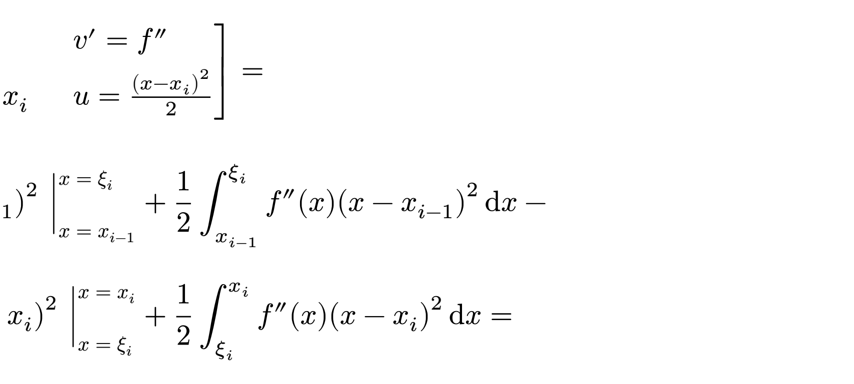


График $y = u(x)$

$= \sigma\Big(\text{Прямоугольник}_{[x_{i-1}, i_k]}\Big) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x$

Просуммируем разложенный интеграл по $k = 1, 2, ..., n$:

$\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \sigma\Big(\text{Прямоугольник}_{[x_{i-1}, i_k]}\Big) - \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x$

$\left| \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \sigma\Big(\text{Прямоугольник}_{[x_{i-1}, i_k]}\Big) \right| \ = \ \dfrac{1}{2} \cdot \left| \displaystyle\int_a^b f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x \right|$

$\le \ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^b |f''(x)| \cdot u(x) \, \mathrm{d}x \ \overset{(*)}{\le} \ \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$

$(*)$ – произвели замену $u(x)$ на её максимальное значение.

График $u(x)$ выглядит как набор парабол ветвями вверх, с вершиной в точках дробления x_i

Максимальное расстояние между $x_i = \delta \ \Rightarrow \ \max\limits_{x \in [a,b]} u(x) = \dfrac{\delta^2}{4}$

2. $(f(x_k) + f(x_{k-1})) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$ — площадь трапеции со сторонами $f(x_k), \ f(x_{k-1})$ и высотой $x_k - x_{k-1}$

$(f(x_k) + f(x_{k-1})) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \ = \ f(x_k)\Big(x_k - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\Big) - f(x_{k-1})\Big(x_{k-1} - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\Big) \ = \ f(x)(x - \xi_k)\Big|_{x = x_{k-1}}^{x = x_k}$

$\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \begin{bmatrix} v = f & v' = f' \\ u' = 1 & u = x - \xi_k \end{bmatrix} \ = \ f(x)(x - \xi_k)\Big|_{x = x_{k-1}}^{x = x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k) \, \mathrm{d}x =$

$= \sigma\Big(\text{Трапеция}_{[x_{k-1}, x_k]}\Big) + \dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(-2(x - \xi_k)) \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} v = f' & v' = f'' \\ u' = -2(x - \xi_k) & u = \underset{\text{на } [x_{k-1}, x_k]}{(x - x_{k-1})(x_k - x)} \end{bmatrix} =$

$$u = \begin{cases} (x - x_0)(x_1 - x), & x \in [x_0, x_1] \\ (x - x_1)(x_2 - x), & x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots & \\ (x - x_{n-1})(x_n - x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

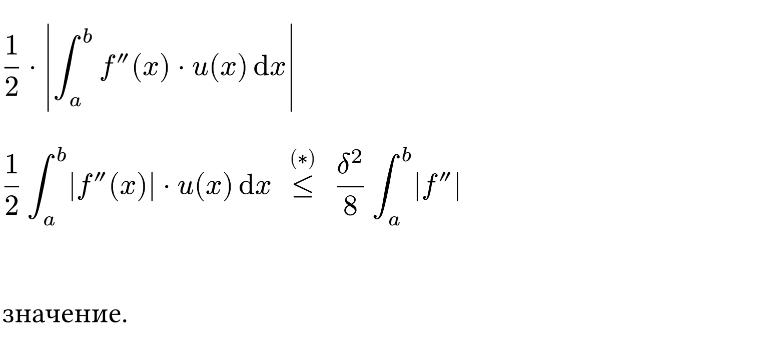


График $y = u(x)$

$= \sigma\Big(\text{Трапеция}_{[x_{k-1}, x_k]}\Big) + \dfrac{1}{2} \cdot \left((x - x_{k-1})(x_k - x) \cdot f'(x)\Big|_{x = x_{k-1}}^{x = x_k} - \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \cdot \underbrace{u(x)}_{(x - x_{k-1})(x_k - x)} \, \mathrm{d}x \right) =$

$= \sigma\Big(\text{Трапеция}_{[x_{k-1}, x_k]}\Big) - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x \right)$

Просуммируем разложенный интеграл по $k = 1, 2, ..., n$:

$\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \sum_{k=1}^{n} \sigma\Big(\text{Трапеция}_{[x_{k-1}, x_k]}\Big) - \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x$

$\left| \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \sigma\Big(\text{Трапеция}_{[x_{k-1}, x_k]}\Big) \right| \ = \ \dfrac{1}{2} \cdot \left| \displaystyle\int_a^b f''(x) \cdot u(x) \, \mathrm{d}x \right| \ \le \ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^b |f''(x)| \cdot u(x) \, \mathrm{d}x \ \overset{(*)}{\le} \ \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$

$(*)$ – произвели замену $u(x)$ на её максимальное значение.

График $u(x)$ выглядит как набор парабол ветвями вниз, равных 0 в точках дробления x_i

Максимальное расстояние между $x_i = \delta \ \Rightarrow \ \max\limits_{x \in [a,b]} u(x) = \dfrac{\delta^2}{4}$

10.4. Формула Эйлера-Маклорена

$f \in C^2[m,n]$

$m, n \in \mathbb{Z}$

$\{x\}$ —дробная часть x

$\left(\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \right)' f(i) = \displaystyle\sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2} \cdot (f(m) + f(n))$

$$\int_m^n f(x) \, \mathrm{d}x = \left(\sum_{i=m}^{n} \right)' f(i) - \frac{1}{2} \cdot \int_m^n f''(x) \cdot \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о формуле трапеций:

$\{x_0, ..., x_{n-m}\}$ — дробление $[m,n]$ на единичные отрезки: $\ \forall k \in [1, n-m] : \ x_k - x_{k-1} = 1$

$\left(\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \right)' f(i) = \dfrac{1}{2} f(m) + f(m+1) + ... + f(n-1) + \dfrac{1}{2} f(n) \ = \ \underbrace{\sum_{k=1}^{n-m} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=1}}_{\text{из формулы трапеций}}$

$\underbrace{(x - x_{k-1}) \cdot (x_k - x)}_{\text{из формулы трапеций}} \ = \ (x - (x - \{x\})) \cdot ((x - \{x\} + 1) - x) = \{x\} \cdot (1 - \{x\})$

Заменяем части формулировки теоремы и получаем условие теоремы о формуле трапеций

10.4.1. Асимптотика степенных сумм

$p > -1 \Rightarrow$

$$1^p + 2^p + ... + n^p \ = \ \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O\big(\max(1, n^{p-1})\big)$$

Доказательство:

$f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + ... + n^p \ = \ \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} \int_1^n (x^p)'' \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x$$

По формуле Эйлера-Маклорена

$\displaystyle\int_1^n x^p \, \mathrm{d}x = \frac{n^{p+1} - 1}{p+1}$

$\frac{1}{2} \displaystyle\int_1^n (x^p)'' \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x \ = \ \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x$

$1^p + 2^p + ... + n^p \ = \ \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2} \displaystyle\int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x}$

$p = 1 :$

$\frac{p(p-1)}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{p(p-1)}{2} \displaystyle\int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x = 0$

$p \ne 1 :$

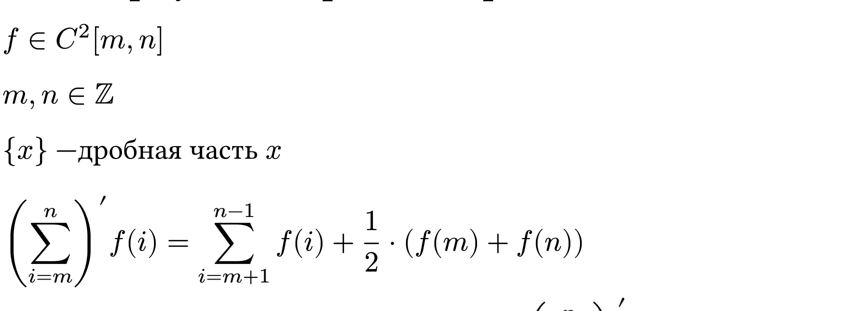


График $y = \{x\}(1 - \{x\})$

$\{x\}(1 - \{x\}) \ \le \ 1$

$\displaystyle\int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x \ \le \ \int_1^n x^{p-2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}$

$$\left.\begin{aligned} p > 1 : \ \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\tfrac{n^{p-1}}{p-1}} - \underset{\text{ограничено}}{\tfrac{1}{p-1}} \ &= \ O(n^{p-1}) \\ p < 1 : \ \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\tfrac{n^{p-1}}{p-1}} - \underset{\text{ограничено}}{\tfrac{1}{p-1}} \ &= \ O(1) \end{aligned}\right\} \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x = O\big(\max(1, n^{p-1})\big)$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}$ — константа, которую можно занести под O

10.4.2. Постоянная Эйлера

γ — постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_1^n x^{-3} \{x\}(1 - \{x\}) \right) + \frac{1}{2}$$

$\gamma \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8} \right]$

10.4.3. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \ = \ \ln n + \gamma + o(1)$$

Доказательство:

$f(x) = x^{-1}$

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \ln n + \int_1^n x^{-3} \{x\}(1 - \{x\})$$

По формуле Эйлера-Маклорена

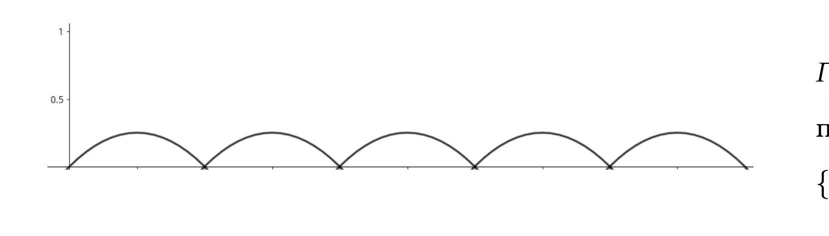


График $y = \{x\}(1 - \{x\})$ — равнодлинные параболы ветвями вниз с центром в $\{x\} = \frac{1}{2}$

$\{x\}(1 - \{x\}) \le \frac{1}{4}$

$\displaystyle\int_1^n x^{-3} \{x\}(1 - \{x\}) \le \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{2x^2}\Big)\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8}$ — ограничено

$\displaystyle\int_1^n x^{-3} \{x\}(1 - \{x\})$ — монотонно возрастает при возрастании n

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_1^n x^{-3} \{x\}(1 - \{x\}) \right) + \frac{1}{2} \ = \ \gamma$

$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underbrace{\frac{1}{2n}}} \ = \ o(1)$

11. Факториальные формулы

11.1. Формула Валлиса

$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n, \quad n - \text{чётно}$

$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n, \quad n - \text{нечётно}$

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство:

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n - \text{чётно} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{нечётно} \end{bmatrix}$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] :$

$\sin^{2k+1} x \ \leq \ \sin^{2k} x \ \leq \ \sin^{2k-1} x$

$I_{2k+1} \ \leq \ I_{2k} \ \leq \ I_{2k-1}$

$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \ \leq \ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \ \leq \ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$

$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \ \leq \ \frac{\pi}{2} \ \leq \ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$

$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1} \ \leq \ \frac{\pi}{2} \ \leq \ \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}$

$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k} - \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1} \ = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2k} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k}$

$a_k \ \leq \ \frac{\pi}{2} \ \leq \ b_k$

$b_k - a_k \ \leq \ \frac{\pi}{4k} \ \Rightarrow \ a_k, b_k \underset{k \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$

11.2. Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

Доказательство:

$f(x) = \ln(x)$

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 1}{2} + \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x$$

По формуле Эйлера-Маклорена

$\ln(n!) = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 - \frac{1}{2} \int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x$

$\{x\}(1 - \{x\}) \leq \frac{1}{4}$

$\int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \leq \frac{1}{4} \int_1^n x^{-2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4} \ - \text{ограничено}$

$\int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \ - \text{монотонно возрастает при возрастании } n$

$n \to +\infty :$

$\int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \ = \mathrm{c}_1 + o(1)$

$\ln(n!) = \underbrace{1 - \frac{1}{2} \int_1^n x^{-2} \{x\}(1 - \{x\}) \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{c}_2 + o(1)} + \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n = c_2 + o(1) + \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n$

Проэкспоненциируем:

$n! = e^{c_2 + o(1)} \cdot \sqrt{n} \cdot n^n e^{-n}$

$e^{c_2 + o(1)} \to C$

Вычислим C :

$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi} \ - \text{формула Валлиса}$

$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!\sqrt{k}} = \frac{2^k \cdot k!}{(2k-1)!!\sqrt{k}} = \frac{2^k \cdot k! \cdot (2k)!!}{(2k-1)!! \cdot (2k)!!\sqrt{k}} = \frac{\left(2^k \cdot k!\right)^2}{(2k)!\sqrt{k}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга с C:

$\frac{\left(2^k \cdot k!\right)^2}{(2k)!\sqrt{k}} = \frac{\cancel{2^{2k}} \cdot \cancel{k} \cdot \cancel{k^{2k}} \cancel{e^{-2k}} \cdot C^{\cancel{2}}}{\cancel{2k^{2k}} \cdot \sqrt{2\cancel{k}} \cdot e^{-2k} \cancel{C} \cdot \cancel{\sqrt{k}}} = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} \ \Rightarrow \ C = \sqrt{2\pi}$

12. Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a, b] \to R^m$ — **гладкий путь:**

$\gamma \in C[a, b]$

$\forall i \in [1, m] \;\; x_i \in C^1[a, b]$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

γ' — **вектор скорости:**

$$\gamma'(t) = \lim_{n \to 0} \frac{\gamma(t+n) - \gamma(t)}{n} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x'_{m(t)} \end{pmatrix}$$

C_γ — **носитель пути** γ :

$$C_\gamma = \gamma([a, b])$$

12.1. Длина гладкого пути

$l : \{\text{Множество гладких путей}_{\mathbb{R}^m}\} \to \mathbb{R}$ — **длина пути:**

$\forall \gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь

1. *Неотрицательность:*

$$l(\gamma) \geq 0$$

2. *Аддитивность:*

$$\forall c \in [a, b] \;\; l(\gamma) = l\left(\gamma \Big|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma \Big|_{[c,b]}\right)$$

3. *Сжатие пути:*

   $C_\gamma = \gamma([a, b])$ — носитель пути γ

   $C_{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma}([a, b])$ — носитель пути $\tilde{\gamma}$

   Если $\exists T : \; C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — *сжатие:*

   $\forall M, M' \in C_\gamma : \;\; \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M') \Rightarrow$

$$l(\gamma) \geq l(\tilde{\gamma})$$

4. *Нормировка:*

   $A, B \in \mathbb{R}^m$

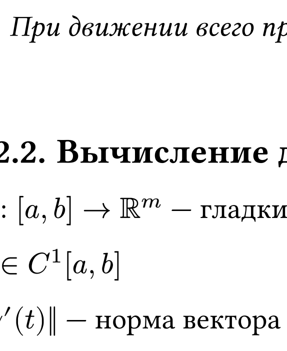
   $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь "из A в B":

   $$\gamma(t) = A + t(B - A)$$

$$l(\gamma) = \rho(A, B)$$

Примечание:

1. *Как понять сжатие пути:*



В бытовом понимании длины пути, эта самая длина пути по дуге должна быть больше длины пути по хорде, как и длина любого пути, отличного от пути по прямой.

Формально это выражается в том, что путь по хорде (как и любой другой кривой путь) может быть *сжат* — спроецирован на путь по прямой так, чтобы расстояние между любыми двумя точками на пути после проекции не увеличилось

2. *При растяжении пути длина растёт* — сжатие в обратную сторону
3. *При движении всего пространства длина пути не меняется*

12.2. Вычисление длины гладкого пути

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь

$\gamma \in C^1[a, b]$

$\|\gamma'(t)\|$ — норма вектора скорости γ

l — длина гладкого пути $\Rightarrow$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Доказательство:

Будем считать, что γ – инъективно (в пути нет самопересечений и топтания на месте)

$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l\left(\gamma \Big|_{[p,q]}\right)$ — аддитивная функция промежутка

Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — плотность Φ, по обобщённой теореме о плотности :

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$

$\forall \Delta \in \mathrm{Segm}([p, q])$:

$m_i(\Delta) = \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad \forall i \in [1, m]$

$M_i(\Delta) = \max\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad \forall i \in [1, m]$

$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_i(\Delta) \\ \vdots \\ m_m(\Delta) \end{pmatrix} : \quad m_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} m_i(\Delta)^2}$

$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} M_i(\Delta) \\ \vdots \\ M_m(\Delta) \end{pmatrix} : \quad M_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} M_i(\Delta)^2}$

1. $m_\Delta|\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta|\Delta|$:

   $\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — линейный путь

   $\left\|\overrightarrow{M}\right\| = M_\Delta$

   $\tilde{\gamma}(t) = \overrightarrow{M}t$

   $\tilde{T} : \; C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}, \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$ — растяжение:

   $\forall [t_0, t_1] \subset [a, b] \;\; \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \underset{\text{о промежуточном значении}}{\overset{\text{по т. Лагранжа}}{=}}$

   $$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i' \underbrace{(\tau_i)^2}_{\text{промежуточное значение}} (t_0 - t_1)^2} \;\leq\; \left\|\overrightarrow{M}\right\| \cdot |t_0 - t_1| = \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1))$$

   $\overline{\gamma} : \;\Delta \to \mathbb{R}^m$ - линейный путь

   $\|\vec{m}\| = m_\Delta$

   $\overline{\gamma} = \vec{m}t$

   $\overline{T} : \; C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}, \quad \gamma(t) \mapsto \overline{\gamma}(t)$ — сжатие:

   $\forall [t_0, t_1] \subset [a, b] \;\; \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \underset{\text{о промежуточном значении}}{\overset{\text{по т. Лагранжа}}{=}}$

   $$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i' \underbrace{(\tau_i)^2}_{\text{промежуточное значение}} (t_0 - t_1)^2} \;\geq\; \|\vec{m}\| \cdot |t_0 - t_1| = \rho(\overline{\gamma}(t_0), \overline{\gamma}(t_1))$$

2. $\forall t \in [p, q] \;\; m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$:

   $m_i(\Delta) = \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$

   $M_i(\Delta) = \max\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$

3. $M_\Delta - m_\Delta \underset{\substack{|\Delta| \to 0 \\ t \in \Delta}}{\longrightarrow} 0$:

   При сжатии отрезка к точке t, $m_i(\Delta)$ и $M_i(\Delta)$ приближаются к $\gamma_i'(t)$ в силу непрерывности

12.3. Корректность определения длины пути

Конструктивно докажем, что длина пути существует.

Для этого предоставим её:

Длина пути = sup суммы длин вписанных ломаных

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь

$x_0 = a$

$x_n = b \Rightarrow$

$$l(\gamma) = \sup\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\| : \;\{x_i\}_{i=0}^{n} - \text{дробление } [a, b]\right\}\right)$$

В формулу заложен "перебор" и взятие супремума по множеству всех дроблений $[a, b]$

12.4. Вариация функции на промежутке

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ — дробление $[a, b]$:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \Rightarrow$

$\mathop{\mathrm{Var}}\limits_a^b$ — **вариация** γ **на промежутке:** — также является аддитивной функцией на промежутке

$$\mathop{\mathrm{Var}}_a^b \gamma = \sup\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})|\right)$$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкий путь $\Rightarrow \mathop{\mathrm{Var}}\limits_a^b \gamma = \int_a^b |\gamma'(x)| \, \mathrm{d}x$

12.5. Теорема о функциях ограниченной вариации

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\mathop{\mathrm{Var}}\limits_a^b f$ — конечна

$$\exists p, q : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; p, q - \text{монотонные, ограниченные}$$

$$f \equiv p - q$$

Доказательство:

Предъявим такие функции :

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(\mathop{\mathrm{Var}}_a^t f(t) + (f(t) - f(a))\right)$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(\mathop{\mathrm{Var}}_a^t f(t) - (f(t) - f(a))\right)$$

$$p(t) - q(t) = f(t) - f(a)$$

$f(a)$ — нормировка, необходимая, чтобы $p(a) = q(a) = 0$

p, q — монотонны :

$y \geq x$:

$p(y) - p(x) = \frac{1}{2}\left(\mathop{\mathrm{Var}}\limits_x^y f + f(y) - f(x)\right) \geq 0 : \;\; |f(y) - f(x)| \leq \mathop{\mathrm{Var}}\limits_x^y f$

$q(y) - q(x) = \frac{1}{2}\left(\mathop{\mathrm{Var}}\limits_x^y f + f(x) - f(y)\right) \geq 0 : \;\; |f(x) - f(y)| \leq \mathop{\mathrm{Var}}\limits_x^y f$

$$p(t) + q(t) = \mathop{\mathrm{Var}}_a^t f(t)$$

13. Неравенства

13.1. Неравенство Йенсена для сумм

f — выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ *(выпукла как $y = x^2$)*

$\{x_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n]: \ x_i \in \langle a, b\rangle$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n]: \ \alpha_i > 0,$

$\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \ \le \ \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Доказательство:

При $n = 2$:

Неравенство — определение выпуклости f:

$$f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f(x_2)$$

$x^* = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i$

$a = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i a \ \le \ x^* \ \le \ \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i b = b$

Построим l — опорную прямую к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x^*, f(x^*))$

График $y = f(x)$ лежит в одной полуплоскости от $y = l(x)$ *(верхней)*

$\forall x \in \langle a, b\rangle \ \ l(x) \le f(x)$

$l(x) = \gamma x + \beta$

$$f(x^*) = l(x^*) = \gamma \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) + \beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma x_i + \beta \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i}_{=1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma x_i + \beta) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l(x_i)$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = f(x^*) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l(x_i) \ \le \ \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

13.2. Неравенство Йенсена для интегралов.

f — выпуклая на $\langle A, B\rangle$

$f \in C(\langle A, B\rangle)$

$\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle, \quad \varphi \in C[a, b]$

$\lambda : [a, b] \to [0, +\infty), \quad \lambda \in C[a, b]$

$\int_a^b \lambda = 1 \Rightarrow$

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \le \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

Доказательство:

Если $\varphi = \text{const}$:

$$\begin{cases} f\left(\int_a^b \lambda(t)\cdot \text{const}\,\mathrm{d}t\right) = f\left(\text{const}\cdot \int_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\text{const}) \\ \int_a^b \lambda(t) f(\text{const})\,\mathrm{d}t = f(\text{const})\cdot \int_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = f(\text{const}) \end{cases}$$

(Не)равенство выполняется

Если $\varphi \ne \text{const}$:

$m = \min\limits_{[a,b]} \varphi$

$M = \max\limits_{[a,b]} \varphi$

$m < M$

$c \ = \ \int_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad c \ < \ M \cdot \int_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = M \qquad c \ > \ m \cdot \int_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = m$

Построим l — опорную прямую $y = f(x)$ в точке $(\text{c}, f(\text{c}))$ $- c \in (A, B) \Rightarrow$ опорная не вертикальна

График $y = f(x)$ лежит в одной полуплоскости от $y = l(x)$ *(верхней)*

$l(x) = \gamma x + \beta$

$\forall x \in \langle A, B\rangle \ \ l(x) \le f(x)$

$$f(c) = \gamma c + \beta = \gamma \int_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \beta\underbrace{\left(\int_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=1} = \int_a^b \lambda(t)(\gamma\varphi(t) + \beta)\,\mathrm{d}t \ \le \ \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(c) = \int_a^b \lambda(t)(\gamma\varphi(t) + \beta)\,\mathrm{d}t \ \le \ \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

13.3. Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

1. *Для сумм:*

   $\forall i \in [1, n] \ \ a_i > 0 \Rightarrow$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \ \le \ \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

2. *Для интегралов:*

   $f > 0$

   $f \in C([a, b]) \Rightarrow$

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))\,\mathrm{d}x\right) \ \le \ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство:

1. $\ln(x)$ — вогнутая функция (выпуклая вверх):

   $\alpha_i = \frac{1}{n}, \quad \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$

   По неравенству Йенсена для сумм:

$$\frac{1}{n}\ln(a_1) + \ldots + \frac{1}{n}\ln(a_n) \ \le \ \ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \ldots + \frac{1}{n}a_n\right)$$

$$\frac{1}{n}\ln(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \ \le \ \ln\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \ \le \ \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

2. Предоставим функции f, φ, λ для интегрального неравенства Йенсена:

   $f_0(x) = \exp(x): \quad \exp(x) \in C[a, b]$ — выпукла ✓

   $\varphi(x) = \ln(f(x)): \quad \varphi \in C[a, b]$ ✓

   $\lambda(x) = \frac{1}{b-a}: \quad \lambda > 0, \ \lambda \in C[a, b], \ \int_a^b \lambda(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{1}{b-a} = 1$ ✓

   По неравенству Йенсена для интегралов :

$$f_0\left(\int_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \ \le \ \int_a^b \lambda(t) f_0(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

13.4. Неравенство Гёльдера для сумм

$p > 1, \ q > 1$:

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \Rightarrow \ q = 1 + \frac{1}{p-1}$

$\{a_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n] \ \ a_i > 0$

$\{b_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n] \ \ b_i > 0 \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \ \le \ \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

При $p = 2$ это неравенство совпадает с неравенством Коши-Буняковского

Доказательство:

$f(x) = x^p$ — выпукла на $[0, +\infty)$:

$f'' = p(p-1)x^{p-2} \ge 0$

Неравенство Йенсена для этой фукнции:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^p \ \le \ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p$$

Возьмём $\alpha_i = \dfrac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}: \quad \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} = 1$

Возьмем $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}}\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)$

$\alpha_i x_i = \dfrac{b_i^q}{\cancel{\sum b_i^q}} a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \cancel{\sum b_i^q} = a_i b_i^{q - \frac{1}{p-1}} = a_i b_i$

$\alpha_i x_i^p = \dfrac{\cancel{b_i^q}}{\sum b_i^q} a_i^p \cancel{b_i^{-\frac{p}{p-1}}} (\sum b_i^q)^p = a_i^p (\sum b_i^q)^{p-1}$

Подставляем полученное в неравенство:

$\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right)^p \le \left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{p-1}$

Возводим в степень $\frac{1}{p}$: $\ \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$

$\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right) \le \left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

13.5. Неравенство Гёльдера для интегралов

$p > 1, \ q > 1$:

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$f, g \in C[a, b] \Rightarrow$

$$\left|\int_a^b fg\right| \ \le \ \int_a^b |fg| \ \le \ \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство:

Докажем с помощью теоремы об интеграле, как пределе интегральных сумм

Дробим $[a, b]$ на n равных частей :

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ — ранг дробления

Неравенство Гёльдера для сумм :

$\left.\begin{aligned} a_k &= |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}} \\ b_k &= |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_k b_k = |f(x_k)g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \ \le \ \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{\frac{1}{q}}$$

Каждая сумма является интегральной, поэтому при $n \to +\infty$:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \ \le \ \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

13.6. Неравенство Минковского

$p \ge 1$

$\{a_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n]: \ a_i \in \mathbb{R}$

$\{b_i\}_{i=1}^n, \quad \forall i \in [1, n]: \ b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство:

По свойствам модуля: $|a_i + b_i| \le |a_i| + |b_i|$

1. $p = 1$:

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i| \ \le \ \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i|$$

2. $p > 1$:

   $\sum\limits_{i=1}^n |a_i + b_i|^p = \sum\limits_{i=1}^n |a_i + b_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1} \ \le \ \sum\limits_{i=1}^n |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1} + \sum\limits_{i=1}^n |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1}$

   Применим неравенство Гёльдера к правой части:

   - *Замечание:*

     $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow pq = p + q \Rightarrow q(p-1) = pq - q = p$

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

13.6.1. Неравенство Минковского для интегралов

$p \ge 1$

$f, g \in C[a, b] \Rightarrow$

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство:

Перепишем доказательство для дискретного неравенства, заменив суммы на интегралы:

$$\int_a^b |f + g|^p \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |f + g|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |f + g|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |f + g|^p \le \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Замечание: *смысл неравенств Минковского*:

1. Мы можем задать норму в $\mathbb{R}^n : (a_1 \ldots a_n) \mapsto (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
2. Мы можем задать норму $f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

14. Компактность и конечные эпсилон-сети

(x, ρ) — метрическое пространство

$D \subset X$

$N \subset X$ — **конечная ε-сеть** для D :

$$\forall x \in D \;\; \exists n \in N : \;\rho(x, n) < \varepsilon$$

D — **сверхограничено:**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{в } X \;\; \exists \text{конечная } \varepsilon\text{-сеть } N \text{ для } D$$

Замечание:

Сверхограниченность более сильное свойство, чем ограниченность

Лемма 1:

$$D - \text{сверхограниченно в } X \;\Leftrightarrow\; D - \text{сверхограниченно в } D$$

Доказательство:

$\Leftarrow$:

$\forall \varepsilon$ в X возьмем ту же ε-сеть, что имеем в D

$\Rightarrow$:

Возьмём N — конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в X

$\forall n \in N$ рассмотрим шар $B\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Отметим в каждом шаре точку $d_n \in D$

Теперь $\{d_n\}$ — ε-сеть, лежащая в D

Лемма 2:

$f : X \to Y$ — равномерно непрерывно:

Напоминание:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x_1, x_2 : \; \rho(x_1, x_2) < \delta \;\Rightarrow\; \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

$D \subset X$ — сверхограничено $\Rightarrow$

$$f(D) - \text{сверхограничено в } Y$$

Сверхограниченность сохраняется при равномерно непрерывных отображениях

Доказательство:

$f(\delta\text{-сеть}) = \varepsilon\text{-сеть}$

Лемма 3:

D — сверхограничено

$\overline{D}$ — замыкание $D \Rightarrow$

$$\overline{D} - \text{сверхограничено}$$

Доказательство:

$D \subset \bigcup\limits_N B(n, \varepsilon) \;\Rightarrow\; \overline{D} \subset \bigcup\limits_N B(n, 2\varepsilon) \;\Rightarrow\; N - 2\varepsilon\text{-сеть для } \overline{D}$

Лемма 4:

D — сверхограничено $\;\Leftrightarrow\;$ $\forall$последовательность из D содержит фундаментальную подпоследовательность

Напоминание:

x_n — фундаментальна $\;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 : \; \exists N : \; \forall m, k > N : \; \rho(x_m, x_k) < \varepsilon$

Доказательство:

$\Rightarrow$:

1. Рассмотрим $\varepsilon = 1$.

   Построим конечную 1-сеть N_1 : $\bigcup\limits_{\substack{a \in N_1 \\ (\text{кон.})}} B(a, 1) \supset D$

   В конечном объединении шаров содержится последовательность $\Rightarrow$

   $\exists a_1 \in N_1 : \;$ в $B(a_1, 1)$ содержится бесконечно много членов последовательности x_n

   Возьмём их все и объединим в подпоследовательность $\left(x_n^{(1)}\right)$, выделим в ней x_{n_1}

2. Теперь рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

   Построим конечную $\frac{1}{2}$-сеть N_2 : $\bigcup\limits_{\substack{a \in N_2 \\ (\text{кон.})}} B\left(a, \frac{1}{2}\right) \supset D$

   В конечном объединении шаров содержится последовательность $\Rightarrow$

   $\exists a_2 \in N_2 : \;$ в $B\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$ содержится бесконечно много членов последовательности $x_n^{(1)}$

   Возьмём их все и объединим в подпоследовательность $\left(x_n^{(2)}\right)$, выделим в ней x_{n_2}

n. Будем продолжать этот процесс рассматривая на n-ном шаге $\varepsilon = \frac{1}{n}$

   Полученная в результате последовательность $\left(x_{n_i}\right)$ — фундаментальная

$\Leftarrow$:

Предположим, что конечная ε-сеть отсутствует

1. Рассмотрим любую x_1
2. По x_1 найдем $x_2 : \; x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$
3. По x_1 и x_2 найдем $x_3 : \; x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$

$+\infty$. И так далее. Этот процесс будет бесконечный, т.к. по предположению $\nexists$конечной ε-сети

Таким образом построим последовательность $(x_n) : \; \forall x_k, x_m : \; \rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon$

У последовательности (x_n) нет фундаментальной подпоследовательности.

Противоречие в определении для обсуждаемого ε

Теорема:

(X, ρ) — метрическое пространство

$$X - \text{компактно} \quad\Leftrightarrow\quad X - \text{полно и сверхограниченно}$$

Доказательство:

Замечание:

В метрическом пространстве компактность $\;\Leftrightarrow\;$ секвенциальная компактность

$\Rightarrow$:

$\sqsupset X$ — неполно $\Rightarrow \exists$фундаментальная последовательность, не имеющая предела $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall$подпоследовательности верно, что она тоже не имеет предела

Противоречие секвенциальной компактности

$\sqsupset X$ — не сверхограничено $\Rightarrow$ *по лемме 4:* $\exists$последовательность, у которой $\nexists$фундаментальная подпосл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ У этой последовательности нет сходящейся подпоследовательности $\Rightarrow$

Противоречие секвенциальной компактности

$\Leftarrow$:

X — сверхограниченно $\Rightarrow \forall$последовательность точек из X $\;\exists$ фундаментальная подпоследовательнсоть

X — полно $\qquad\qquad \Rightarrow \forall$последовательность точек из X имеет сходящуюся подпоследовательность

Это секвенциальная компактность

15. Несобственные интегралы

15.1. Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

$f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad (-\infty < a < b \le +\infty)$

f — *допустима:*

$\forall A : \ a \le A < b \ \ f$ — кусочно-непрерывна на $[a, A]$

$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, где $A \in [a, b)$

$\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x$ — **несобственный интеграл**:

$$\exists \lim_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$$

- $\nexists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}} \ \Rightarrow$ несобственный интеграл не существует
- $\lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$ интеграл сходится
- $\lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) = \{\pm\infty\} \ \Rightarrow$ интеграл расходится

15.2. Простейшие свойства несобственного интеграла

1. *Критерий Больцано-Коши: 16.1*
2. *Аддитивность по промежутку:*

   $\exists \int_a^{\to b} f \Rightarrow$

   $$\forall c \in (a, b) : \ \int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f$$

3. *Линейность:*

   f, g — допустимые на $[a, b)$

   $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — сходятся, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

   $$\lambda f, f \pm g \text{ — допустимы}$$

   $$\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f, \qquad \int_a^{\to b} f + g = \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$$

4. *"Интегрирование неравенств":*

   f, g — допустимы на $[a, b)$

   $f \le g$

   $\exists \int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g \Rightarrow$

   $$\int_a^{\to b} f \le \int_a^{\to b} g$$

5. *Интегрирование по частям:*

   f, g — дифференцируемы, f', g' — допустимы. Тогда*

   $$\int_a^{\to b} fg' = fg \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g$$

   $\star$: если $\exists$ 2 выражения со стрелочками, то $\exists$ и третий и имеет место "="

6. *Замена переменной:*

   $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle a, b \rangle, \ \varphi \in C^1$

   $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}, \ f \in C(\langle a, b \rangle) \Rightarrow$

   $$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta-0)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство:

2. $\sqsupset A : \ c < A < b$

   $\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f$

   $A \to b - 0$

4. При $a < A < b \quad \int_a^A f \le \int_a^A g, \quad A \to b - 0$
5. $\int_a^A fg' = fg \Big|_a^A - \int_a^A f'g, \quad A \to b - 0$
6. $\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\mathrm{A} \to \beta - 0} \int_\alpha^{\mathrm{A}} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\mathrm{A} \to \beta - 0} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\mathrm{A})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$

16. Признаки сходимости несобственных интегралов

16.1. Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

f — допустима на $[a,b) \Rightarrow$

$$\text{Сходимость} \int_a^{\to b} f \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta \in [a,b): \;\forall A, B > \Delta \quad \left|\int_A^B f\right| < \varepsilon$$

$$\text{Расходимость} \int_a^{\to b} f \;\Leftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0: \;\forall \Delta \in [a,b) \;\; \exists A, B > \Delta: \;\left|\int_A^B f\right| \ge \varepsilon$$

Доказательство:

> *Напоминание для фунций:*
> $\exists$конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \;\forall x_1, x_2,\; 0 < |x_i - a| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$F(x) = \int_a^x f$, тогда по определению $\int_a^x f$ — сходится $\;\Leftrightarrow\; \exists$ кон. $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$

Распишем существование этого предела через критерий Больцано-Коши для функций:

$\exists$конечный $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \;\forall x_1, x_2,\; b - x_i < \delta \quad |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$

Найдем что стоит под модулем:

$F(x_1) - F(x_2) = \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f = \int_{x_2}^{x_1} f$

Итого:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Delta := b - \delta: \;\forall x_1, x_2 \in (\Delta, b) \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \varepsilon$$

16.2. Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

f, g — допустимые на $[a,b)$

$f, g \ge 0$

1. $f \le g$ на $[a,b)$:
   - $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится
   - $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
2. $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$:
   - $l \in (0, +\infty)$: $\int_a^b f, \int_a^b g$ — сходятся и расходятся одновременно
   - $l = 0$: $\int_a^b f$ расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ расходится

     $\int_a^b g$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится
   - $l = +\infty$: $\int_a^b g$ расходится $\Rightarrow \int_a^b f$ расходится

     $\int_a^b f$ сходится $\Rightarrow \int_a^b g$ сходится

Доказательство:

1. $f \le g$

   $\Phi(A) = \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g, \quad \Phi \le \Psi$
   - $\int_a^b f$ расходится $\Rightarrow \Phi$ неограничена $\Rightarrow \Psi$ неограничена $\Rightarrow \int_a^b g$ расходится
   - $\int_a^b g$ сходится $\Rightarrow \Psi$ ограничена $\Rightarrow \Phi$ ограничена $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится
2. Сходимость $\int_a^b f \underset{c\in(a,b)}{\Leftrightarrow}$ сходимость $\int_c^b f$
   - $l \in (0, +\infty)$:

     $\exists c \in (a,b)$: при $x \in (c,b) \quad \dfrac{l}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3l}{2}$
     - $\int_a^b f$ сходится $\Rightarrow \int_c^b f$ сходится, а на (c,b) : $\dfrac{l}{2} g(x) < f(x) \Rightarrow \int_c^b \dfrac{l}{2} g$ сходится $\Rightarrow \int_c^b g$ сходится
     - $\int_a^b g$ сходится $\Rightarrow \int_c^b g$ сходится, $\quad f(x) < \dfrac{3l}{2} g(x) \Rightarrow \int_c^b \dfrac{3l}{2} g$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится
   - $l = 0, \;\varepsilon = 1$:

     $\exists c: \;\forall x \in (c,b) \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1,$ то есть $f < g$ и результат следует из 1 части признака
   - $l = +\infty, \;\mathrm{E} = 1$

     $\exists c: \;\forall x \in (c,b) \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} > 1,$ то есть $f > g$ и результат следует из 1 части признака

16.2.1. Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$

Применим прием: *удавить логарифм*

1. $\alpha > 1$:

   $\alpha = 1 + 2a, \;a > 0$

   $\dfrac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{1+a}} \cdot \dfrac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$

   Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a (\ln x)^\beta = +\infty$:
   - $\beta \ge 0 \;\Rightarrow\; x^a (\ln x)^\beta \to +\infty$ — очевидно
   - $\beta < 0$:

     Воспользуемся правилом Лопиталя:

     $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^{-\beta}} = \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{a}{-\beta}}}{\ln x}}_{\overset{(\star)}{\to}+\infty}\right)^{-\beta} = +\infty$$

     Предел $(\star)$ тоже найдем при помощи правила Лопиталя:

     $\sqsupset \gamma = -\dfrac{a}{\beta} > 0 \Rightarrow \lim \dfrac{x^\gamma}{\ln x} = \lim \dfrac{\gamma x^{\gamma-1}}{\frac{1}{x}} = \lim \gamma x^\gamma = +\infty$

   То, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a (\ln x)^\beta = +\infty$: означает, что $\exists\; c: \forall x > c: \dfrac{1}{x^a (\ln x)^\beta} < 1$

   $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}}_{<1} < \int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{1+a}}$ — сходится $\Rightarrow \int_{10}^{+\infty}$ — сходится при $\alpha > 1$ и $\forall\beta$
2. $\alpha < 1$:

   $\alpha = 1 - 2a, a > 0$:

   $\dfrac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{1-a}} \cdot \dfrac{1}{x^{-a} (\ln x)^\beta}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{(\ln x)^\beta} = \ldots = +\infty$ — уже доказали в предыдущем пункте

   Значит $\exists c: \;\forall x > c \quad \dfrac{1}{x^{-a}(\ln x)^\beta} > 1 \;\Rightarrow\; \int_c^{+\infty} \dfrac{1}{x^{1-a}} \cdot \dfrac{1}{x^{-a}(\ln x)^\beta} > \int_c^{+\infty} \dfrac{1}{x^{1-a}} \Rightarrow$ интеграл расходится
3. $\alpha = 1$:

   $\int_{10}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta} \overset{y=\ln x}{\underset{\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}}{=}} \int_{\ln 10}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{y^\beta}$ — это эталонный случай: $\beta \le 1$ — расходится, $\;\beta > 1$ — сходится

16.3. Гамма функция Эйлера

$t > 0$:

$\Gamma(t)$ — **гамма функция Эйлера:**

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

16.3.1. Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства

1. $\Gamma(t)$ сходится:
2. Γ — выпукла на $(0, +\infty)$

   Γ — непрерывна на $(0, +\infty)$
3. *Рекуррентные соотношения и некоторые частные случаи:*
   1. $\Gamma(t+1) \;=\; \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f = x^t & f' = t x^{t-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} = \underbrace{x^t(-e^{-x}) \Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0} + t\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x = t \cdot \Gamma(t)$
   2. $\Gamma(1) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x} \,\mathrm{d}x = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!, \;n \in \mathbb{N}$
   3. $\Gamma(t+1) \;=\; t\Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}$
   4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \sqrt{\pi}$ — **интеграл Эйлера-Пуассона**

Доказательство:

1.
   - $x^{t-1} e^{-x} \underset{x\to+0}{\sim} x^{t-1} \Rightarrow \int_0^1 x^{t-1} \,\mathrm{d}x$ — сходится, т.к. это эталонный случай
   - $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{t-1}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

     Выделенная часть стремится к 0, так как её можно *Лопиталить* это пока степень x не станет < 0

     Также стремление к 0 означает, что $\exists c: \;\forall x > c: \;e^{-\frac{x}{2}} x^{t-1} < 1$

     Итого: $\int_c^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} x^{t-1}}_{<1} < \int_c^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_c^{+\infty} = -2 \cdot e^{-\infty} + 2 \cdot e^{-\frac{c}{2}} = 2 \cdot e^{-\frac{c}{2}}$ — сходится
2. Для начала покажем, что подынтегральная функция выпукла: $t \mapsto f_x(t) = x^{t-1} e^{-x}$

   Для этого возьмем две производные:

   $f'(t) = x^{t-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x}$

   $f''(t) = x^{t-1} \cdot \ln^2 x \cdot e^{-x} \ge 0$ — значит действительно выпукла.

   Напишем определение выпуклости:

   $$\forall t_1, t_2 \;\forall \alpha \in (0,1) \quad f_x(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) \le \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha) f_x(t_2)$$

   Интегрируем это неравенство по x :

   $$\int_0^{+\infty} f_x(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) \,\mathrm{d}x \le \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1) \,\mathrm{d}x + (1-\alpha) \int_0^{+\infty} f_x(t_2) \,\mathrm{d}x$$

   Итого мы получили, что $\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) \le \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2) \Rightarrow \Gamma$ выпуклая $\Rightarrow \Gamma$ — непрерывна

16.4. Интеграл Эйлера–Пуассона

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Также можно выразить через Γ-функцию Эйлера:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{y}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-y} \,\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Доказательство:

Функция e^x — выпукла, поэтому $\forall x: \;e^x > 1 + x$ (касательная в точке $x = 0$)

$$\left.\begin{matrix} e^{-x^2} \ge 1 - x^2 \\ e^{x^2} \ge 1 + x^2 \Leftrightarrow e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\int_0^1 (1-x^2)^n}_{\underset{x=\cos t}{=} w_{2n+1}} \le \int_0^1 e^{-nx^2} \le \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}}_{\underset{x=\frac{y}{\sqrt{n}}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I} \le \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x}_{\underset{x=\operatorname{ctg} t}{=} w_{2n-2}}$$

В качестве w использовался интеграл из формулы Валлиса:

> Формула Валлиса:
> $$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ — четно} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ — нечетно} \end{cases}$$
> В частности: $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \to \sqrt{\pi}$

Итого мы получили:

$w_{2n+1} \;\le\; \dfrac{1}{\sqrt{n}} I \;\le\; w_{2n-2}$

$\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} \;\le\; I \;\le\; \dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \sqrt{n} \;=\; \dfrac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \cdot \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}} \;\to\; \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} \cdot \dfrac{n}{2n+1} \;\to\; \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

17. Абсолютно сходящиеся интегралы

17.1. Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

f — допустимая на $[a, b)$

$\int_a^b f$ — **абсолютно сходящийся интеграл :**

$$\int_a^b f \text{ — абсолютно сходится} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \int_a^b f \text{ — сходится} \\ \int_a^b |f| \text{ — сходится} \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ — **абсолютно сходящийся ряд :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ абсолютно сходится} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ — сходится} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ — сходится} \end{cases}$$

17.2. Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.

Теорема: *(об интегралах)*

f — допустимая на $[a, b)$. Тогда эквивалентны:

1. $\int_a^b f$ — абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится
3. $\int_a^b f_+, \int_a^b f_-$ оба сходятся

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$: Да. 😎

$2 \Rightarrow 3$: $0 \le f_\pm \le |f| \Rightarrow$ сходится по признаку сравнения

$3 \Rightarrow 1$: $\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-, \quad \int_a^b |f| = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f, \int_a^b |f|$ — сходятся $\Rightarrow \int_a^b f$ — абс. сходится

Теорема: *(о рядах)*

$\sum a_n$ — ряд. Тогда эквивалентны:

1. $\sum a_n$ — абсолютно сходится
2. $\sum |a_n|$ — сходится
3. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$, оба сходятся

Доказательство:
Введем обозначение $S_{|n|} = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$ — частичные суммы ряда взятого по модулю.

$1 \Rightarrow 2$: Да. 😎

$2 \Rightarrow 3$: $0 \le S_n^\pm \le S_{|n|} \Rightarrow$ сходится по признаку сравнения

$3 \Rightarrow 1 : S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad S_{|n|} = S_n^+ + S_n^- \quad \Rightarrow \quad \sum a_n, \ \sum |a_n|$ — сходятся $\Rightarrow \sum a_n$ — абсолютно сходится

17.3. Изучение интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ на сходимость и абсолютную сходимость

1. Найдем когда интеграл сходится абсолютно:
   - $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p} \quad \Rightarrow \quad$ при $p > 1$ есть абсолютная сходимость
   - При $p \le 1 : x^p \le x \Rightarrow \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin(x)|}{x^p} \ge \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin(x)|}{x} \ge \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{2\pi n} \nrightarrow 0$

     Значит по признаку Больцано-Коши абсолютной сходимости нет

2. $\sphericalangle \quad p < 0 :$

   Заметим, что если рассмотреть отрезок $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$, тогда $\sin(x) > 0 \Rightarrow$ можно применять оценку снизу на $\frac{1}{x^p} : p < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^p}$ — возрастает $\Rightarrow \min\limits_{[2\pi n, 2\pi n+\pi]} \left(\frac{1}{x^p}\right) = (2\pi n)^{-p}$

   $$\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \ge (2\pi n)^{-p} \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x = 2(2\pi n)^{-p}$$

   Значит по признаку Больцано-Коши интеграл расходится (в том числе абсолютно)

3. $p = 0 :$

   $$\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \text{ расходится аналогично с п.2.}$$

4. $p \in (0, 1]$

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \begin{bmatrix} f = \frac{1}{x^p} & f' = -\frac{p}{x^{p+1}} \\ g' = \sin(x) & g = -\cos(x) \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{\cos x}{x^p}\Big|_1^{+\infty}}_{=-0+\cos(1)} - p\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}}_{\text{абс. сх.}}$$

   Значит при этих p интеграл сходится, но не сходится абсолютно.

17.4. Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

Для обеих теорем:

$$f, g \text{ — допустимы на } [a, b)$$

Теорема: (*признак Дирихле*)

1. первообразная f ограничена: $\exists C : \forall B \in (a, b) \quad \left|\int_a^B f\right| \le C$
2. $g(x)$ — монотонная, $g \in C^1([a, b]), \quad g(x) \underset{x \to b-0}{\longrightarrow} 0$

Тогда

$$\int_a^{\to b} fg \text{ — сходится}$$

Доказательство:
Обозначим $F(B) = \int_a^B f$ — первообразная

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x)g(x)\Big|_a^{\to b}}_{\text{огр} \cdot \text{б.м.}} - \underbrace{\int_a^{\to b} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}_{(\star)}$$

$(\star) : \int_a^{\to b} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ — абсолютно сходится:

$$\int_a^{\to b} |F(x)| \cdot |g'(x)|\,\mathrm{d}x \le C \int_a^{\to b} |g'(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(\star\star)}{=} \pm C \int_a^{\to b} g'(x)\,\mathrm{d}x = \pm C \cdot g(x)\Big|_a^{\to b}$$

$(\star\star) : g(x)$ — монотонная $\Rightarrow g'(x)$ всегда одного знака и модуль может раскрыться только двумя способами.

Теорема: (*признак Абеля*)

1. $\int_a^{\to b} f$ — сходится
2. $g \in C^1([a, b]), \ g(x)$ монотонна, ограничена

Тогда

$$\int_a^{\to b} fg \text{ — сходится}$$

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ — существует, т.к. g — монотонна и ограничена

$$\int_a^{\to b} fg = \underbrace{\int_a^{\to b} f\alpha}_{\text{сх по п.1}} + \underbrace{\int_a^{\to b} f(g - \alpha)}_{\text{сх по Дирихле}}$$

17.5. Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство:
Для начала покажем, что: $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$

Напоминание из тригонометрии: $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)$$

Получается телескопическая сумма в которой останется только 2 члена:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot (\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \ \Big| : 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Теперь проинтегрируем обе части : $0 = \int_0^\pi \cos x + \ldots + \cos nx = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}$

Переносим $\frac{\pi}{2}$ в другую сторону: $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Заметим: $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = \left(n + \frac{1}{2}\right)x & x = \frac{y}{n+\frac{1}{2}} \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{n+\frac{1}{2}} & \end{bmatrix} = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin(y)}{\frac{y}{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{n + \frac{1}{2}} = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$

При $n \to +\infty$: $\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin(y)}{y} \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$

Значит, если $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{x} \overset{(\star)}{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0 \ \Rightarrow \ \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{x} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$

Скомбинируем все что мы только что узнали:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \tfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x} = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \tfrac{\sin(y)}{y} \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \tfrac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y \\ &\int_0^\pi \tfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x} \underset{n \to +\infty}{\to} \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$$

Осталось проверить, действительно ли $(\star)$ верно.

$\sphericalangle \quad f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}, \quad$ доопределим ее в точке 0: $f(0) = 0$, чтобы была непрерывность на $\mathbb{R}$

$f' = \frac{-\cos\frac{x}{2}}{2^2 \cdot \sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2}, \quad x \ne 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f' = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4\sin^2\frac{x}{2} - x^2\cos\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{x^4} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8}$

$$\int_0^\pi \underset{g'}{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)} \cdot \underset{f}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{n + \frac{1}{2}} \cdot f(x)\Big|_0^\pi}_{= 0} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \underbrace{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \underbrace{f'(x)}_{\text{непр}}}_{\text{непр}}\,\mathrm{d}x}_{\le \text{const}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

17.6. Леммы об интегрировании асимптотических равенств и разложений

Лемма: (*об интегрировании асимптотических равенств*)

$f, g \in C([a, b)), \quad g \ge 0, \quad \int_a^{\to b} g$ расходится

$F(x) = \int_a^x f, \qquad G(x) = \int_a^x g$

Тогда при $x \to b - 0$ из соотношений

$$f = O(g), \ f = o(g), \ f \sim g$$

следует

$$F = O(G), \ F = o(G), F \sim G$$

Доказательство:

Чего мы хотим идейно: зная соотношения между функциями, получить те же соотношения (возможно с другими константами) на их первообразные.

1. $F = O(G)$:

   $f = O(g) \Leftrightarrow \exists M \ \exists x_0 : \forall x \in [x_0, b) \quad |f(x)| \le Mg(x)$

   Пусть $\int_a^{x_0} |f(x)|\,\mathrm{d}x = c_1$.

   Возьмём $x_1 : x_0 < x_1 < b, \qquad \int_{x_0}^{x_1} g = \alpha > 0$

   При $x > x_1$:

   $$\left|\int_a^x f\right| \le \int_a^x |f| = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^x \le c_1 + M \cdot \int_{x_0}^x g = \frac{c_1}{\alpha} \underbrace{\int_{x_0}^{x_1}}_{=\alpha} g + M \int_{x_0}^x g \le \left(\tfrac{c_1}{\alpha} + M\right) \int_{x_0}^x g \le \left(\tfrac{c_1}{\alpha} + M\right) \int_a^x g$$

2. $F = o(G)$:

   $f = o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_0 : \ \forall x \in [x_0, b) \ \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}g(x)$

   Проинтегрируем то что мы получили: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : \left|\int_{x_0}^x f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g$

   $\sphericalangle \quad c := \int_a^{x_0} f \quad \Rightarrow \quad \left|c + \int_{x_0}^x f\right| \overset{(?)}{<} \varepsilon \int_{x_0}^x g$

   Мы уже знаем, что: $\left|\int_{x_0}^x f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g$

   А также из условия $\int_a^b g$ — расходится $\Rightarrow \int_a^B g \underset{B \to b-0}{\longrightarrow} +\infty \overset{(\star)}{\Rightarrow} c < \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g$

   $(\star) : c$ — константа, а $\underbrace{\int_a^x g}_{+\infty} = \underbrace{\int_a^{x_0} g}_{\text{огр.}} + \int_{x_0}^x g \Rightarrow \int_{x_0}^x g = +\infty > \frac{2c}{\varepsilon}$

   Итого:

   $$\left|c + \int_{x_0}^x f\right| \le |c| + \left|\int_{x_0}^x f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g + \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0}^x g = \varepsilon \int_{x_0}^x g$$

   $$\left|c + \int_{x_0}^x f\right| = \left|\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f\right| = \underline{\left|\int_a^x f\right| \le \varepsilon \int_{x_0}^x g \le \varepsilon \int_a^x g}$$

3. $f \sim g$

   $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{F(x)}{G(x)} \overset{(\star)}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

   $(\star)$ по признаку сходимости несобственных интегралов +

Лемма:

1. $\varphi_n \in C([a, b]) \ \varphi_n \ge 0$ — шкала асимптотического разложения при $x \to b - 0$

   Пусть $\forall n \quad \Phi_n(x) = \int_x^{\to b} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ — сходится, тогда Φ_n — тоже шкала

2. $f \in C([a, b]) \quad F(x) = \int_x^b f$ — сходится

   Пусть $f(x) \sim \sum c_n\varphi_n(x)$

   Тогда $F \sim \sum c_n\Phi_n$

Доказательство:

1. Проверим, что $\Phi_{n+1} = o(\Phi_n)$: $\quad \lim\limits_{x \to b-0} \frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to b-0} \frac{-\varphi_{n+1}}{-\varphi_n} = 0$
2. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n)$

   $\lim \frac{F(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\Phi_k}{\Phi_n} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{-f(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} = 0$

18. Ряды

18.1. Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

(a_k) — вещественная последовательность

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ — ряд

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k, \sum a_k$ — ряд в другой записи

Определение: *частичная сумма*

$$\forall n \ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ — частичная сумма ряда}$$

Сходимость и расходимость: Рассмотрим предел: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Если предел существует и равен $S \in \overline{\mathbb{R}}$, то S — сумма ряда

- $S \in \mathbb{R}$: ряд сходится
- $S \in \{-\infty; +\infty\}$: ряд расходится
- Если предел не существует, то ряд расходится

18.2. n-й остаток ряда

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (a_k)$ — n-й остаток ряда

18.3. Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости

1. $\sum a_k, \ \sum b_k, \ c_n = a_n + b_n \Rightarrow \sum c_k = \sum a_k + \sum b_k$
2. $\sum a_k$ сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$ Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$ сходится, $\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$
3. - $\sum a_k$ сходится $\Rightarrow$ любой остаток тоже сходится
   - Если k-й остаток ряда сходится $\Rightarrow$ сам ряд сходится
   - $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_n, \ $ ряд сходится $\Leftrightarrow r_n \to 0$

Доказательство:

1. Очевидно: $S_k^{(c)} = S_k^{(a)} + S_k^{(b)} \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} S_k^{(c)} = \lim\limits_{k \to +\infty} S_k^{(a)} + \lim\limits_{k \to +\infty} S_k^{(b)}$
2. Очевидно: $S_k^{(\lambda a)} = \lambda S_k^{(a)} \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} S_k^{(\lambda a)} = \lambda \lim\limits_{k \to +\infty} S_k^{(a)}$
3. - (m-й остаток), $\sphericalangle \quad n > m$

     $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \overset{(\star)}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} a_k$

     $(\star)$: сделаем предельный переход, устремив $n \to +\infty$
   - Очевидно.
   - $\Rightarrow$: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = S_m + r_{m+1}$

     Сделаем предельный переход: устремим $m \to +\infty$

     $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \lim_{m \to +\infty} r_{m+1} \Rightarrow \lim_{m \to +\infty} r_{m+1} = 0$$

     $\Leftarrow$: тривиально

Необходимое условие сходимости:

$\sum a_n$ — сходится, тогда $a_n \to 0$

Доказательство: $a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

18.3.1. Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

Ряд сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$

Ряд расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \ \forall N \ \ \exists n > N \ \ \exists m \in \mathbb{N} : \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \geq \varepsilon$

Доказательство:

Рассмотрим последоватльность частичных сумм S_n :

Ряд сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall a, b > N \ \ |S_b - S_a| < \varepsilon$ — критерий Коши для последовательностей

Заметим, что $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| = |S_{m+n} - S_n|$

Чтобы проверить истинность условия $\forall m, n$ рассмотрим $a = n, \ b = m + n$

19. Признаки сходимости рядов

19.1. Признак сравнения сходимости положительных рядов

$\forall a_k, \forall b_k, \quad a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall n \quad a_n \leq b_n$ (или даже $\exists k > 0 : \forall n \quad a_n \leq k b_n$)

$$\text{Тогда} \begin{cases} \sum b_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum a_k \text{ сходится} \\ \sum a_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum b_k \text{ расходится} \end{cases} \qquad (\star)$$

2. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty)$
   - $0 < l < \infty \quad \sum a_k$ сходится$\Leftrightarrow \sum b_k$ сходится
   - $l = 0 \quad$ выполняется $(\star)$
   - $l = +\infty \quad \begin{cases} \sum a_k \text{ сходится} \Rightarrow \sum b_k \text{ сходится} \\ \sum b_k \text{ расходится} \Rightarrow \sum a_k \text{ расходится} \end{cases}$

3. Пусть начиная с некоторого места $(\exists N_0 \quad \forall n > N_0)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, тогда выполняется $(\star)$

Доказательство:

0. **Лемма:**

   $a_n \geq 0$. Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow S_n^{(a)}$ – ограничена

   Доказательство:

   $S_n^{(a)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – возрастает

   $\Leftarrow$: S_n – ограничена и монотонна $\Rightarrow \exists$ кон $\lim S_n$

   $\exists$ конечный $\lim S_n \Rightarrow S_n$ – ограничена.

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ при всех $n \quad \left(S_n^{(a)} \leq k S_n^{(b)}\right)$
   - $\sum b_n$ – сходится$\Rightarrow S_n^{(b)}$ – огр. $\Rightarrow S_n^{(a)}$ – огр. $\Rightarrow \sum a_n$ – сходится
   - $\sum a_n$ – расходится $\Rightarrow S_n^{(a)}$ – не огр. $\Rightarrow S_n^{(b)}$ – не огр. $\Rightarrow \sum b_n$ – расходится

   Замечание: Можно было бы в условии $a_n \leq b_n$ начиная с некоторого места (НСНМ)

2. $l \in (0, +\infty)$:
   - Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists N : \forall n > N : \quad 0 < \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \;\Leftrightarrow\; a_n < \frac{3l}{2} b_n,\; b_n < \frac{2}{l} a_n$

     Теперь используя первое утверждение, мы получаем, что $\sum a_k$ – сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ – сх
   - $l = +\infty$:

     $\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} > 1 \Rightarrow a_n > b_n$ – воспользуемся первым пунктом.
   - $l = 0$:

     $\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} < 1$ – воспользуемся первым пунктом.

3. Пишем неравенства при $n = N_0 + 1, n+1, \ldots, n+k-1$:

$$\left.\begin{matrix} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \\ \ldots \\ \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \leq \frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}} \end{matrix}\right\} \overset{\text{перемножаем}}{\Rightarrow} \quad \frac{a_{n+k}}{a_n} \leq \frac{b_{n+k}}{b_n} \Rightarrow a_{n+k} \leq \frac{a_n}{b_n} b_{n+k} \text{ – выполнено замечание к 1 пункту.}$$

19.2. Признак Коши сходимости положительных рядов

$\sum a_n,\; a_n \geq 0, \quad K_n := \sqrt[n]{a_n}$

1. $\exists\, q < 1 \quad K_n \leq q$ НСНМ, тогда $\sum a_n$ сходится
2. $K_n \geq 1$ для беск. мн-ва n, тогда $\sum a_n$ расходится

Доказательство:

1. $K_n \leq q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow a_n \leq q^n$ а значит $\sum\limits_{(q<1)} q^n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $K_n \geq 1 \quad a_n \geq 1$ для беск мн-ва номеров $\Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow$ расходится

19.3. Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

$\sum a_n,\; a_n \geq 0, \quad K_n := \sqrt[n]{a_n}$

$K := \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} K_n = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

1. $K > 1 \quad \sum a_n$ расходится
2. $K < 1 \quad \sum a_n$ сходится

Доказательство:

1. $K > 1 \quad \overline{\lim} K_n > 1 \Rightarrow \exists$ беск много $n : K_n > 1$ (техн. описание верхнего предела) $\Rightarrow \sum a_n$ расх
2. $K < 1 \quad \exists N_0 : \forall n > N_0 \quad K_n \leq q$, где $q \in (K, 1)$ – тоже техн. описание верхнего предела.

Замечание: Для рядов $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2} \quad K = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, но при этом первый ряд расходится, а второй сходится $\Rightarrow$ при $K = 1$ признак не работает

19.4. Признак Даламбера сходимости положительных рядов

$\sum a_n > 0 \quad D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$

light:

1. $\exists\, q < 1 \quad D_n \leq q$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ – сх
2. $D_n \geq 1$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ – расх

pro:

Пусть $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} D_n = D$

1. $D < 1 \quad \sum a_n$ – сх
2. $D > 1 \quad \sum a_n$ – расх

Доказательство:

light:

1. НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad a_{n+1} \leq q a_n$

$$\left.\begin{matrix} a_{n+1} \leq q a_n \\ a_{n+2} \leq q a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k} \leq q a_{n+k-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{n+k} \leq q^k a_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k} \leq a_n \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \text{ – сходится, так как } q < 1.$$

2. НСНМ $a_{n+1} \geq a_n$, т.е. $a_n \nrightarrow 0$ – расходится

pro:

1. $D < 1 \quad$ НСНМ $D_n \leq q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сх – первый пункт light
2. $D > 1 \quad$ НСНМ $D_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расх – второй пункт light

Замечание: $\sum \frac{1}{n}, \;\sum \frac{1}{n^2} \quad D = 1$ ☹

19.5. Признак Раабе сходимости положительных рядов

$a_n > 0$

1. НСНМ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. НСНМ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится

Доказательство:

1. Пусть $1 < s < r$.

   Сравним ряды $\sum a_n$ и $\sum \frac{1}{n^s}$

   Попробуем проверить, что:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(?)}{\leq} \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{(?)}{\geq} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$$

   Подставим полученное неравенство в выражение из условия:

$$\begin{cases} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{(?)}{\geq} n\left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s}_{\sim 1 + \frac{s}{n}} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s \\ \text{НСНМ } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \end{cases}$$

   Проанализируем что мы получили:

   1. Из условия нам известно что НСНМ интересующее нас выражение хотя бы r
   2. Если неравенство (?) выполнено, то мо оценили наш ряд сверху сходящимся, поэтому он будет сходится

   Теперь заметим, что можно выбрать очень большое n, при котором выражение $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$

   А также можно можно выбрать n при котором $n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1\right)$ лежит в ε-окрестности точки $s \Rightarrow$ оно $< r$

   Получается неравенство (?) верное, т.к. левая часть $\geq r$, а правая часть $< r$

   Получается ряд $\sum a_n$ – “маленький”, а $\sum \frac{1}{n^s}$ – “большой”. Т.к. большой сходится, маленький тоже.

2. Сравним ряды $\sum a_n$ и $\sum \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow a_n \text{ – “большой”, } b_n \text{ – “маленький”,}$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ – расх} \Rightarrow \sum a_n \text{ – расх}$$

   Следствие:

$$a_n > 0 : \quad \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{a_n}{a_n + 1} - 1\right) = r$$

   Тогда:

   1. $r > 1 : \quad \sum a_n$ – сходится
   2. $r < 1 : \quad \sum a_n$ – расходится

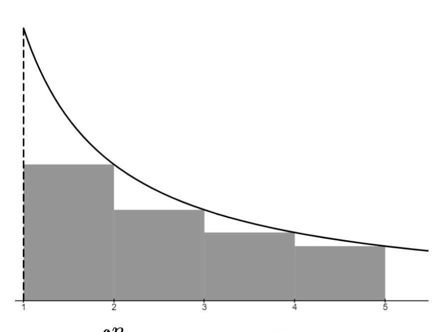
19.6. Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная, монотонная.

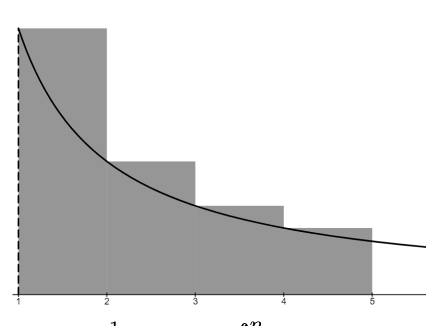
Тогда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k), \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ – сходятся/расходятся одновременно}$$

Доказательство:
Основной случай: $f \downarrow, f > 0$



$$\int_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$



$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)dx$$

Объяснение откуда взялись эти неравенства (на примере левого):

$$\int_1^n f = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(k) = \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

Дальше воспользуемся признаком сравнения:

1. $\int_1^n f$ – сходится, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow$ ряд сходится
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ – сходится, $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \Rightarrow$ интеграл сходится

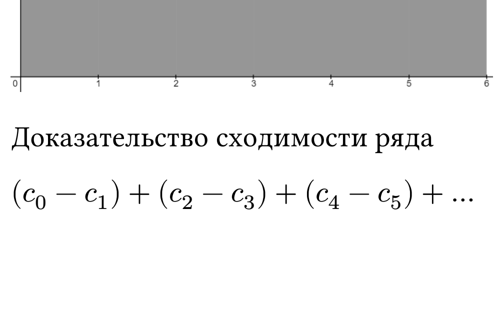
Замечание: можно требовать, что f монотонна НСНМ

19.7. Признак Лейбница

$c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots \geq 0, c_n \to 0$
Тогда

$$\sum (-1)^n c_n \text{ – сходится}$$

Секретное дополнение признака Лейбница: Если ряд сх., то $\forall N \quad \left|\sum\limits_{k \geq N} (-1)^k c_k\right| \leq c_N$



Доказательство сходимости ряда

$(c_0 - c_1) + (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \ldots$

$s_{2n-1} = (c_0 - c_1) + (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \ldots \geq 0$

$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{(c_{2n} - c_{2n+1})}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}$

(s_{2n-1}) – возрастает

s_{2n-1} – ограничено (за счет площади):

$s_{2n-1} = c_0 - (c_1 - c_2) - (c_3 - c_4) - \ldots - (c_{2n-3} - c_{2n-2}) - c_{2n-1} \leq c_0$

Значит $\exists \lim s_{2n-1}$

$s_{2n_{\searrow s}} = s_{2n-1_{\searrow s}} + c_{2n_{\searrow 0}}$

19.8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Дан ряд $\sum a_k b_k$

1. (*Дирихле*)
   1. A_n – ограниченная посл-ть $\left(A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n\right)$, т.е $\exists c_A : \forall n > 0 \; |A_n| \leq c_A$
   2. b_n – монотонная, $b_n \to 0$
2. (*Абеля*)
   1. Ряд $\sum a_n$ сходится
   2. b_n – монотонная, ограниченная.

Тогда $\sum a_n b_n$ сходится, если выполнено 1 или 2.

Преобразование Абеля: (суммирование по частям)
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k, \quad$ где $\left(A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n\right)$

Доказательство:

1. Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\to 0} + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \quad (\star)$$

   $A_n b_n \to 0$, так как A_n – ограниченная, а $b_n \to 0$

   Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$ – сходится абсолютно:

$$b_n \to 0 \Rightarrow \forall n \; |b_n| \leq c_b$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}||A_k| \leq c_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm c_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm c_A (b_1 - b_n) \leq 2 c_A c_b$$

   Можем раскрыть так модуль, так как у нас b_n монотонная последовательность, поэтому разность либо всегда отрицательная, либо положительная. Значит, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) A_k$ – абсолютно сходится (значит и просто сходится), тогда в $(\star)$ все слагаемые сходятся, значит и изначальный ряд сходится.

2. $\exists$ конечный $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = \beta$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta + \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - \beta)$$

Первый сходится по условию (константа не влияет на сходимость), второй сходится по Дирихле: так как a_k сходится $\Rightarrow a_k$ ограниченная и $(b_k - \beta) \to 0$.

20. Свойства сходящихся рядов

20.1. Теорема о группировке слагаемых

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \underbrace{\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}\right)}_{b_1} + \underbrace{\left(a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}\right)}_{b_2} + \underbrace{\left(a_{n_2+1} + ... + a_{n_3}\right)}_{b_3} + ...$

$b_i = \sum\limits_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k$

Теорема:

1. Ряд (A) сходится $\Rightarrow$ Ряд (B) сходится и имеет ту же сумму
2. $\forall n : a_n \geq 0,$ тогда (A) и (B) имеют одинаковую сумму

Доказательство:

1. $S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$
   $\exists \lim S_n^{(a)} = S^{(a)} \Rightarrow \lim S_{n_k}^{(a)} = S^{(a)}$
2. Суммы $S_k^{(b)}$ и $S_n^{(a)}$ огр/не огр одновр.

Замечание:

Ряд (B) — сходится, скобки имеют ограниченны размер:

$\exists M : \; \forall k \; \; n_k - n_{k-1} < M,$

$a_n \to 0$

Тогда (A) сходится к той же сумме

$$S_n^{(a)} = S_k^{(b)} + \underbrace{a_{n_k+1} + ... + a_n}_{\text{неполн скобка}}$$

Доказательство:

$\sqsupset n_k \leq n < n_{k+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(a)} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_k^{(b)} + \underbrace{\Delta_k}_{\to 0}$

Докажем стремление к 0 $\Delta_k : \Delta_k = a_{n_{k+1}} + ... + a_n \Rightarrow |\Delta_k| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_{n-M+1}|$

т.к. $a_n \to 0 : \forall \varepsilon$ мы можем выбрать $k : a_{n-M+1} < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |\Delta_k| < \varepsilon$

20.2. Теорема о перестановке слагаемых

Определение: *перестановка*

Даны $\sum a_k, \sum b_n$

Ряд (B) — **перестановка** ряда (A), если $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция: $\forall k \quad b_k = a_{\varphi(k)} \left(b_{\varphi^{-1}(n)} = a_n\right)$

Теорема:

(A) — абс сходится

Тогда (B) тоже абс сходится и $S^{(b)} = S^{(a)}$

Доказательство:

1. Пусть $\forall k \quad a_k \geq 0$
   $S_k^{(b)} = a_{\varphi(1)} + ... + a_{\varphi(k)} \leq S^{(a)}_{\max(\varphi(i), i=1...k)}$ — мы оценили частичную сумму B через частичную сумму A
   $k \to +\infty \quad S^{(b)} \leq S^{(a)}$
   Аналогично $S^{(a)} \leq S^{(b)}$
2. 😉 $a_n^+ = \max(a_n, 0), a_n^- = \max(-a_n, 0)$
   $(b_k)^- = a^-_{\varphi(k)}$
   $a_n = a_n^+ - a_n^-$
   $\sum(a_n^+ - a_n^-), \;\; \sum(b_k^+ - b_k^-)$ одновременно сходятся или расходятся, т.к. первый представляется в виде разности двух рядов, которые сходятся и при этом положительные, а второй представляется в виде разности двух рядов, первый из которых является перестановкой первого ряда A, а второй — второго.

Теорема: *(Римана) (опционально)*

a_n — сх, не абсолютно

Тогда:

1. $\exists$ перестановка ряда (A), не имеющая суммы ($\nexists \lim S_n^{(b)}$)
2. $\forall s \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists$ перест: $S^{(b)} = s$

Доказательство:

a_n — сходится, не абсолютно $\Rightarrow \sum a_n^+ = +\infty, \sum a_n^- = +\infty$

Тогда разобьем все наши элементы на две кучки: с положительными и отрицательными элементнами ряда.

Чтобы набрать сумму конечную сумму s будем действовать следующим образом:

1. берем элементы с наименьшими индексами из положительной кучки, пока сумма впервые не станет больше s.
2. берем элементы с наименьшими индексами из отрицательной кучки, пока сумма впервые не станет меньше s.
3. Возвращаемся к пункту 1

Т.к. сумма в каждой кучке бескоенечна, пересекать s мы будем каждый раз, но при этом ряд сходится, значит модуль элемента стремится к 0 и каждый раз отклонение от s будет все меньше и меньше, т.е. в пределе ряд будет ровно s.

Чтобы набрать бесконечную сумму (НУО $+\infty$) оценим каждый элемент отрицательной кучки снизу.

Например $\geq -x$. Бдуем набирать сумму $2x$ беря элементы из положительной кучки, потом будем брать элемент из отрицательной кучки, потом опять элементы из положительной кучки с суммой $2x$ и т.д. В итоге сумма ряда будет стремится к $+\infty$

20.3. Суммируемое семейство

Наблюдение: если в абсолютно сходящемся ряду мы можем переставлять элементы как угодно, то почему бы не попробовать переопределить сумму ряду

Определение:

$(a_\omega)_{\omega\in\Omega}, \;\; \Omega$ — счётное

1. $a_\omega \geq 0$
   $\sqsupset S = \sum\limits_{\omega} a_\omega = \sup\left(a_{\omega_1} + ... + a_{\omega_n} \mid n \in \mathbb{N}, \omega_i \in \Omega\right)$ — берем любые конечные суммы и считаем от них sup
   Если S — эта сумма, $\{\omega_1, \omega_2, ...\} = \Omega$, то $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{\omega_i}$
   Доказательство:
   Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{\omega_i}$ является верхней границей того множества, от которого берется sup
   А также мы можем оказаться сколь угодно близко к этой сумме, просто рассмотрев в качестве подмножества частичную сумму нашего ряда.
   Получается что равенство $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{\omega_i}$ действительно верно
2. Пусть семейство $(|a_\omega|)$ имеет конечную сумму.
   Тогда $\exists S : \;\; \forall$ нумерации $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\} \quad \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{\omega_i} = S.$
   Такое сем-во чисел (a_ω) называется суммируемым.

20.4. Теорема о произведении рядов

Если конечное число членов:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_k) = \sum_{i,k} a_i b_k$$

Найдем произведение рядов: $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k = ?$

Для этого нужно найти такое биективное отображение $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, чтобы превратить произведение в один ряд

$$\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k)) \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

— произведение рядов (A) и (B)

Теорема: *(Коши)*

$\sum a_n = S^{(a)}, \;\; \sum b_k = S^{(b)}$ — оба ряда абс. сх.

Тогда $\forall \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ биекции :

$$\sum a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} \text{ абс. сх. и имеет сумму } S^{(a)} S^{(b)}$$

Доказательство:

$\sqsupset \sum|a_k| = A, \sum|b_k| = B$

Оценим N-ую сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{N} \left|a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \sum_{j=1}^{m} |b_j| \leq AB$$

$$n := \max(\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(N)), \quad m := \max(\psi(1), \psi(2), ..., \psi(N))$$

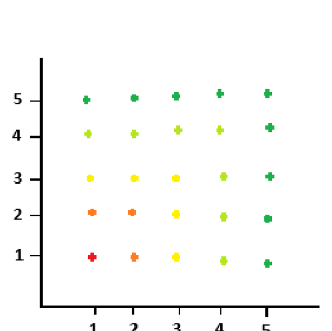
Что мы только что сделали?

Слева у нас стоит произведение некоторых элементов, индекс первого из которых меньше n, правого меньше m. А в правой части стоит произведение вообще всех элементов подходящих под это условие, а т.к. числа положительные очевидно есть неравенство.

Т.е. $\sum a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ — абс. сх. $\Rightarrow$ эта сумма не зависит от γ (теорема о перестановке)

Найдем эту сумму:

Будем рассматривать квадраты с левым нижним углом в точке $(1, 1)$ и правым верхним углом в точке (m, m)



Суммирование *“по квадратам”*

$a_1 b_1,$

$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2),$

$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3),$

$\vdots$

$S_n^{(a)} S_n^{(b)} \to S^{(a)} \cdot S^{(b)}$

21. Функциональные последовательности и ряды

21.1. Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n, f_0 : E \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$

Последовательность f_n сходится поточечно на E к f_0

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0 \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \in E \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f_0(x)$$

$$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$$

21.2. Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

$f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}, E \subset X$

f_n равномерно сх-ся к f на мн-ве E, обозначается: $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f$ на мн-ве E

$$M_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Замечание: Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, т.е. $f_n \to f$ поточечно

21.3. Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

Теорема: *Стокса-Зайдля:*

$$\left.\begin{array}{l} f,\ f_n : \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \to \mathbb{R} \\ x_0 \in X,\ f_n \text{ непрерывна в } x_0 \\ f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ непрерывна в } x_0.$$

Доказательство:

Докажем, что при $x \to x_0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Воспользуемся неравенством ломанной:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(\star)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(\star\star)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(\star)} < \varepsilon$$

Так как f_n непрерывна в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists U(x_0) : \ \forall x \in U(x_0) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выполнена $(\star\star)$

Так как $f_n \rightrightarrows f$ на $X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выполнены $(\star)$

Итого мы получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists U(x_0) : \ \forall x \in U(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Следствие для рядов:

$$\left.\begin{array}{l} u_n : \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \to \mathbb{R} \\ x_0 \in X,\ u_n \text{ непрерывна в } x_0 \\ \sum u_n \rightrightarrows \ldots \text{ на } X \\ S(x) := \sum u_n(x) \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) \text{ непрерывно в } x_0$$

Доказательство:

$S_n(x) \rightrightarrows S(x), S_n(x)$ непрерывна в $x_0 \underset{\text{Зайдль}}{\overset{\text{Стокс-}}{\Longrightarrow}} S(x)$ непрерывна в x_0

21.4. Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

K – компакт

для $f_1, f_2 \in C(K) : \rho(f_1, f_2) = \max|f_1 - f_2|$ – метрика на $C(K)$.

Тогда $C(K)$ – полное МП

Доказательство:

Берём фундаментальную последовательность в $C(K)$ – (f_n)

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n, m > N \ \ \max_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Заметим, что $\forall x_0$ посл. $f_n(x_0)$ – фундаментальная числ. посл. $\Rightarrow \forall x_0 \quad \exists \lim f_n(x_0) = f_0(x_0)$

Итого мы получили: $\exists f_0 : f_n \to f_0$ поточечно на X

? Почему $f_0 \in C(K)$ и $f_n \rightrightarrows f_0$?

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n, m > N \ \ \forall x \in K \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ – в силу фундаментальности $f_n(x)$

Устремим в этой формуле m к $+\infty$:

$f_m(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} f_0(x) \Rightarrow$ при $m \to +\infty$ формула перепишется так :

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \max_{x\in K} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon$

Ну а это как раз и означает, что $\rho(f_n, f_0) \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f_0$ и тогда $f_0 \in C(K)$ (по т. Стокса-Зайделя)

21.5. Равномерная сходимость функционального ряда

$\sum u_n(x), \quad u_n : X \to \mathbb{R}, E \subset X$

$\sum u_n(x)$ сх-ся поточечно на мн-ве E к сумме $S(x)$:

$$\forall x \in E \quad S(x) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

$\sum u_n(x)$ сх-ся равномерно к $S(x)$ на мн-ве E :

$$M_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ где } M_N := \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) - S(x) \right|$$

Замечание:

1. Ряд равномерно сх-ся $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K : \ \forall N > K \ \ \forall x \in E \quad \left| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon$
2. Ряд равномерно сх-ся к $S(x) \Rightarrow$ сумма ряда (поточечная) равна $S(x)$
3. $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

   ряд равномерно сходится $\Leftrightarrow$

   $$\sup_{x\in E} \left| \sum_{n\geq N} u_n(x) \right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{x\in E} |R_N(x)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. $\sum u_n(x)$ – равномерно сходится на $E \Rightarrow u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на мн-ве E

   $u_n(x) = R_n(x) - R_{n+1}(x)$

21.6. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

$\sum u_n(x), \quad u_n : X \to \mathbb{R}$

$\sqsupset \exists c_n$ – вещественная последовательность:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in X \ \ |u_n(x)| \leq c_n \\ \text{Ряд } \sum c_n \text{ сходится} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ равномерно сходится на } X$$

Доказательство:

$$\sup_{x\in X} \left| \sum_{n\geq N} u_n(x) \right| \leq \sup_{x\in X} \sum_{n\geq N} |u_n(x)| \leq \sum_{n\geq N} c_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

21.7. Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости рядов

Ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ \left| S_{n+m}^{(n)}(x) - S_n^{(n)}(x) \right| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall N \ \ \exists n > N \ \ \exists\, m \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in E : \ |u_{n+1}(x) + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}(x)| \geq \varepsilon$$

22. Предельный переход под знаком интеграла

22.1. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Для последовательностей:
$f_n, f \in C[a,b], \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Доказательство:

Тривиально.

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \,\mathrm{d}x \le (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| \to 0$$

Для рядов:

$u_n \in C[a,b]$

$\sum u_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

Так как $S(x)$ непрерывна по т. Стокса-Зайдля, тогда:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство:
По теореме для последовательностей:

$$\int_a^b S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b S(x)$$

И при этом:

$$\int_a^b S_n(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x$$

22.2. Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ – непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$

$$\forall x, y : \exists f'_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$. Тогда Φ дифференцируема на $[c,d]$:

$\Phi'(y) = \displaystyle\int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$

Доказательство:

$$\frac{\Phi(y+h) - \Phi(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,\mathrm{d}x$$

$$\theta \in (0,1),\ \theta = \theta(x,y)$$

(В последнем равенстве нами была использована теорема Лагранжа)

Хотим в этой формуле считать $\lim\limits_{h\to 0}$. Будем делать это по Гейне, $h_n \to 0$

Проверим, что $f'_y(x, y+\theta h_n) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$ равномерно по $x \in [a,b]$

Т.е. $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f'_y(x,y+\theta h_n) - f'_y(x,y)\right| \underset{n\to+\infty}{\dashrightarrow} 0$

Знаем: f'_y – непрерывно на $[a,b]\times[c,d]$ (компакт) $\Rightarrow f'_y$ – равномерно непрерывно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} \ \ \rho((x,y),(x_1,y_1)) < \delta : \ \left|f'_y(x,y) - f'_y(x_1,y_1)\right| < \varepsilon$$

Используем это чтобы проверить что предел действительно 0:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ [\text{текст } (*)] \ \ \forall n > N \ \ \forall x \ \ \forall y \quad \left|f'_y(x, y+\theta h_n) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$$

$(*) : h_n \to 0 \Rightarrow \exists N : \ \forall n > N \ \ |h_n| < \delta$ – из определения равн. непр.
Итого:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Phi(y+h) - \Phi(y)}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f'_y(x, y+\theta h_n)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$$

22.3. Т. о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Последовательности
$f_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$

$f_n \to f_0$ на $\langle a,b\rangle$

$f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle \Rightarrow$

$$f_0 \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

$$f'_0 = \varphi \text{ на } \langle a,b\rangle$$

То есть:

$$\begin{array}{ccc} & f_n & \to & f_0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & \downarrow & & \downarrow \\ & f'_n & \rightrightarrows & \varphi \end{array}$$

Доказательство:

$x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle, \quad f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f'_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\parallel} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f_0(x_1) - f_0(x_0)$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = f_0(x_1) - f_0(x_0)$

– при всех $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$

По теореме Барроу:

$\Rightarrow f_0$ – первообразная φ; $\quad f'_0 = \varphi$

Ряды:

$u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$

$\sum u_n \to S$

$\sum u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$

Тогда:

$$S \in C^1(\langle a,b\rangle) \text{ и } S' = \varphi$$

Доказательство:
Используем только что доказанную теорему: $\sqsupset f_n = S_n, f_0 = S, f'_n = \sum\limits^n {u_k}'$

22.4. Теорема о предельном переходе в суммах

$u_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{м.п}} \to \mathbb{R}$

x_0 предельная точка E

$\forall n \ \exists \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$

$\sum u_n \rightrightarrows \ldots$ на E

Тогда:

$$1. \sum a_n \text{ – сходится}$$

$$2. \sum a_n = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right)$$

Доказательство:

1. Проверим, что $\sum a_n$ – сходится:
$\sqsupset S_n^{(a)} = \sum\limits_{k=1}^n a_k \quad S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n u_k(x)$
Проверим, что последовательность $S_n^{(a)}$ – фундаментальная:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} : \left|S_{n+p}^{(a)} - S_n^{(a)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|S_{n+p}^{(a)} - S_n^{(a)}\right| \le \underbrace{\left|S_{n+p}^{(a)} - S_{n+p}(x)\right|}_{(\star)} + \underbrace{\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right|}_{(\star\star)} + \underbrace{\left|S_n(x) - S_n^{(a)}\right|}_{(\star)} < \varepsilon$$

Из равномерной сходимости: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ \left|S_n^{(a)} - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \left|S_{n+p}^{(a)} - S_{n+p}(x)\right|$

Получаем, что $(\star)$ выполняются.

Т.к. u_n – равномерно сходится, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow (\star\star)$

Итого:

$$|S_{n+p}^{(a)} - S_n^{(a)}| < \varepsilon$$

2. $\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), \ x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, \ x = x_0 \end{cases}$ – непрерывна в x_0

Тогда $\tilde{u}_n(x)$ – равномерно сходится на $E \cup \{x_0\}$, так как:

$$\sup_{x\in E\cup\{x_0\}} \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_n(x)\right| \le \sup_{x\in E} \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_n(x)\right| + \left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_n\right| \to 0$$

Значит $\sum \tilde{u}_n(x)$ – непрерывна (по т. Стокса-Зайдля) в $x_0 \Rightarrow$ выполняется $\sum a_n = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right)$

22.5. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$. Если:

1. $\sum a_n$ равномерно ограничены ($\exists C_A \ \forall N, \forall x : \left|\sum\limits_{n=1}^N a_n(x)\right| \le C_A$
2. $b_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X и $b_n(x)$ монотонна по n

Тогда:

$$\sum a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \ldots$$

Доказательство:
Преобразование Абеля:

$$\sum_N^M a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_N^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

Критерий Больцано-Коши

$$\left|\sum_N^M a_k(x) b_k(x)\right| \le |A_M(x) b_M(x)| + |A_{N-1}(x) b_N(x)| + \left|\sum_N^{M-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) A_k(x)\right| \le$$

$$\le C_A(|b_M(x)| + |b_N(x)| + |b_M(x)| + |b_N(x)|) \underset{(\star)}{\le} \varepsilon$$

$(\star)$ выполняется, так как b_n – равномерно сходится, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K : \ \ \forall k > K \ \ \forall x \in X \ \ |b_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Тогда при $N, M \ge K+1, \forall x \in X$:

$$\left|\sum_N^M a_k(x) b_k(x)\right| < \varepsilon$$

23. Бесконечное произведение

$p_k \geq 0$

$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ — **бесконечное произведение**

$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 ... p_n$ — **частичное произведение**

Ряд сходится (к A), если:

$\lim_{n\to+\infty} \Pi_n = A, \quad A \in (0, +\infty)$

Ряд расходится, если:

1. $A = +\infty$ — произведение расходится и равно $+\infty$
2. $A = 0$ — произведение расходится к 0
3. $\nexists A$ — произведение расходится

23.1. Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

a_n – вещественная последовательность. Тогда

1. $a_n > 0$ НСНМ $\Rightarrow \prod(1+a_n)$ сходится $\Leftrightarrow \sum(a_n)$ сходится
2. $\sum(a_n)$ сходится и $\sum(a_n^2)$ сходится $\Rightarrow \prod(1+a_n)$ сходится

Доказательство:

1. $\prod(1+a_n)$ — сходится $\Leftrightarrow \sum(\ln(1+a_n))$ — сходится $\underset{\text{эквив.}}{\Leftrightarrow} \sum(a_n)$ — сходится
2. $\sum^N \ln(1+a_n) = \sum^N a_n - \sum^N \frac{a_n^2}{2} + \sum^N o(a_n^2)$
   - $\sum^N a_n$ — сходится по условию
   - $\sum^N \frac{a_n^2}{2}$ — сходится по условию
   - $\sum^N o(a_n^2)$ — абсолютно сходится, так как $\sum^N |o(a_n^2)| \leq \sum^N a_n^2$

Тогда $\sum \ln(1+a_n)$ — сходится, а значит и $\prod(1+a_n)$ сходится.

23.2. Теорема Евклида. Сходимость ряда из обратных простых

Простых чисел бесконечно много

Доказательство:

От противного: $p_1, ..., p_n$ — все простые числа

Напоминание: дальше нам понадобится что при $0 < x < 1 : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

Рассмотрим $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ \text{в разл m} \\ \text{только } p_1,...p_n}} \frac{1}{m} \overset{(\star)}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} = +\infty$$

Это противоречие, т.к. слева стоит конечное произведение, а справа $+\infty$

$(\star)$: по основной теореме арифметики любое натуральное число представляется в виде произведения степеней простых, причем единственным образом. Поэтому каждое натуральное число будет содержаться в этой сумме, и только по 1 разу.

Формально мы не уверены, что можно брать бесконечное произведение рядов, но все они абсолютно сходятся, поэтому можно сделать такой вывод:

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = +\infty \Rightarrow \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{ — расходится к } 0$$

Используя теорему об условиях сходимости бесконечного произведения мы можем сказать:

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{ — расходится} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{p_k} \text{ — расходится} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} \text{ — расходится}$$

23.3. Приложение Г-функции

23.3.1. Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

$0 \leq t \leq n \Rightarrow$

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

Доказательство:

Возьмем неравенства из выпуклости:

$1 + y \leq e^y \leq \frac{1}{1-y}$

Возьмём $y = \frac{t}{n}$:

$1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{1}{1-\frac{t}{n}}$

$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$

$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad (\star)$

Получаем, что $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$

Докажем второе неравенство:

$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \overset{(\star)}{\leq} e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$

Теперь вспомним неравенство Бернулли:

$(1-x)^\alpha \geq 1 - \alpha x, \quad$ то есть $\alpha x \geq 1 - (1-x)^\alpha$:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leq \frac{e^{-t} t^2}{n}$$

23.3.2. Формула Эйлера для гамма-функции

Лемма:

$x > 0$

$\sqsupset \prod(n,x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \Rightarrow$

$$\prod(n,x) = n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Доказательство:

$$\prod(n,x) \overset{t=yn}{=} \int_0^1 (1-y)^n (yn)^{x-1} n\,\mathrm{d}y = n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1}\,\mathrm{d}y =$$

$$= n^x \left((1-y)^n \frac{y^x}{x} \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x\,\mathrm{d}y\right) = n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x\,\mathrm{d}y =$$

$$= n^x \frac{n \cdot (n-1)}{x(x+1)} \int_0^1 (1-y)^{n-2} y^{x+1} = \underbrace{...}_{n-2 \text{ раза по частям}} = n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Формула Эйлера:

$x > 0 \Rightarrow$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Доказательство:

Рассмотрим предел такой разности:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n t^{x-1}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t + \underbrace{\int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{n\to+\infty,\ \text{значение} \to 0}\right)$$

Теперь рассмотрим первый интеграл и воспользуемся леммой о приближении экспоненты $(\star)$:

$$0 \leq \int_0^n t^{x-1}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \overset{(\star)}{\leq} \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Тогда $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$

23.3.3. Формула Вейерштрасса для Г-функции

γ — постоянная Эйлера

$x > 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Доказательство:

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} n^{-x} \frac{x(x+1)...(x+n)}{n!} = x \lim_{n\to+\infty} n^{-x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) =$$

$$= x \lim_{n\to+\infty} e^{x(1+...+\frac{1}{n}) - x\ln n} \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}}_{(\star)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Необходимо еще доказать, что $(\star)$ сходится:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \underset{\text{е в Тейлора}}{\overset{\text{разложим}}{=}} \prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Сходится по теореме об условиях сходимости п.1

$\left|\sum\left(-\frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right| = \left|\sum\left(\frac{x^2}{2k^2} - o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right| \leq \sum \frac{x^2}{2k^2}$ — сходится

23.3.4. Дифференцируемость гамма-функции

$$\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$$

Доказательство:

По формуле Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Прологарифмируем:

$$-\ln(\Gamma(x)) = \ln x + \gamma x + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right)}_{\text{дифференцируемо? } (\star)}$$

$$\left(\ln\left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(x+k)}$$

$\sqsupset x \in (0, A)$. Тогда

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(x+k)} \text{ равномерно сходится на } (0, A)\ (\star)$$

$$\left|\frac{x}{k(x+k)}\right| \leq \frac{A}{k^2} \text{ - сходится}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса $(\star)$ — равномерно сходится, а значит $(\star)$ диффиренцируемо

Аналогично $\forall n : \ \Gamma \in C^n$

23.4. Лемма о представлении синуса в виде конечного произведения

$n \in \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\sin x = (2n+1) \cdot \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Доказательство:

$m = 2n + 1$

Формула Муавра:

$$\left.\begin{aligned} &(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz \\ &(\cos z + i \sin z)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (\cos z)^{m-k} \cdot (i \sin z)^k \end{aligned}\right\} \underset{\text{часть}}{\overset{\text{мнимая}}{\Rightarrow}} \sin mz = C_m^1 (\cos z)^{m-1} \sin z - C_m^3 (\cos z)^{m-3} (\sin z)^3 + ...$$

$\sin mz = \sin z \cdot P(\sin^2 z)$ — многочлен от $\sin^2 z$

$\deg P(\sin^2 z) = \frac{m-1}{2} = n$

$Z = \left\{\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, ..., \frac{n\pi}{m}\right\}$:

$\forall z \in Z : \ 0 < z < \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ \sin z \neq 0$

$\sin mz = 0 \ \Rightarrow \ P(\sin^2 z) = 0 \ \Rightarrow \ Z$ — все корни $P(u)$, где $u = \sin^2 z$, так как их n и $\deg P = n$

$P(u) = A\left(1 - \frac{u}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right)...\left(1 - \frac{u}{\sin^2 \frac{\pi n}{m}}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &P(\sin^2 z) = \frac{\sin mz}{\sin z} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} m \\ &P(\sin^2 z) = A \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi k}{m}}\right) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ A = m$$

Получаем:

$\sin(2n+1)z = (2n+1) \cdot \sin z \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right), \quad z = \frac{x}{2n+1}$

$\sin x = (2n+1) \cdot \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$

23.5. Разложение синуса в бесконечное произведение.

$\forall x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Доказательство:

$\sin x = (2n+1) \cdot \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$

$\sin x = \underbrace{(2n+1) \cdot \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)}_{u_j^n} \cdot \underbrace{\prod_{k=j+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)}_{v_j^n}$

$\sin x = u_j^n \cdot v_j^n$

$u_j^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \cdot \prod_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = u_j$ — заменили все sin на эквивалентные

$1 > 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \overset{(\star)}{>} 1 - \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}{\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi k}{2n+1}\right)^2} = 1 - \frac{x^2}{4k^2}$

$(\star) : t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t > \sin(t) > \frac{2}{\pi} t$

$1 > v_j^n > \prod_{k=j+1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$

$n \longrightarrow +\infty$:

$1 > v_j \overset{(\star\star)}{>} \prod_{k=j+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$

$(\star\star)$: верно при $\frac{x^2}{4k^2} < 1$, то есть при больших j

$\sum \frac{x^2}{4k^2}$ — сходится при фиксированном $x \ \Rightarrow \ \prod_{k=j+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$ — сходится

Устреми $j \longrightarrow +\infty$:

$u_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} x \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = u$

$v_j \geq \prod_{k=j+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \Rightarrow v_j \to 1, \quad$ так как v_j — остаточное произведение.

24. Степенные ряды

24.1. Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$z_0 \in \mathbb{C}$

$\forall k: \ a_k \in \mathbb{C}$

$\{z: \ |z - z_0| < r\} = B(z_0, r)$

(A) – **степенной ряд:**

$$(A) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

R – **радиус сходимости степенного ряда** (A) :

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Формула Коши-Адамара

24.2. Теорема о круге сходимости степенного ряда

(A) – степенной ряд $\Rightarrow$

Выполняется одно из трёх утверждений :

1. (A) сходится только при $z = z_0$
2. (A) сходится $\forall z \in \mathbb{C}$
3. $\exists R \in (0, +\infty): \ |z - z_0| < R \ \Rightarrow \ (A)$ абсолютно сходится
   $|z - z_0| > R \ \Rightarrow \ (A)$ расходится

Доказательство:

По принципу покоординатной сходимости :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ – сходится $\ \Leftrightarrow \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\ a_n, \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\ a_n$ – сходятся

$|\mathrm{Re}\ a_n| < |a_n|$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ – сходится $\ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\mathrm{Re}\ a_n|, \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\mathrm{Im}\ a_n|$ – сходятся

Изучим абсолютную сходимость ряда :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |z - z_0|^n$

Признак Коши:

$\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \cdot \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \ \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится

$|z - z_0| \cdot \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \ \Rightarrow$ ряд абсолютно расходится

Ряд абсолютно сходится :
- $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \ \Rightarrow \ z = z_0$ – случай 1
- $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \ \Rightarrow \ z \in \mathbb{C}$ – случай 2
- Иначе $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

R – радиус сходимости степенного ряда (A)

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

24.3. Функция, разложимая в степенной ряд в окрестности точки

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{1}} = 1$

$|z| = 1 \ \Rightarrow \ |z|^n = 1 \nrightarrow 0$

24.4. Теорема о непрерывности степенного ряда

(A) – степенной ряд

R – радиус сходимости (A)

$0 < R \le +\infty \Rightarrow$

1. <u>*Равномерная сходимость ряда:*</u>

$$\forall r \in (0, R): \quad \text{ряд } (A) \text{ – равномерно сходится в } \overline{B(z_0, r)} :$$

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} \left| \sum_{n \ge N} a_n (z - z_0)^n \right| \underset{N \to +\infty}{\to} 0$$

2. <u>*Непрерывность функции степенного ряда:*</u>

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ –непрерывна в } B(z_0, R)$$

Доказательство:

1. *Признак Вейерштрасса:*

   $\exists (c_n): \ \forall x, n: \ |u_n(x)| \le c_n \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \text{ – сходится } \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ – сходится}$$

   $|a_n (z - z_0)^n| \ \le \ |a_n| \cdot r^n$

   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\underbrace{\underbrace{(z_0 + r)}_{(\star)} - z_0}_{<R} \right)^n$ – сходится абсолютно по теореме о круге сходимости $\ \Rightarrow$

   $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ – сходится $\ \Rightarrow \ (A)$ равномерно сходится по Вейерштрассу

   $(\star)$ – мы подставили вместо z самую правую точку на замкнутом шаре

2. Возьмём $z: \ |z - z_0| < r < R$

   В $B(z_0, r)$ есть равномерная сходимость ряда (A)

   По Стоксу-Зайдлю f непрерывна в z.

24.5. Теорема о дифференцировании степенного ряда

Лемма:

$w, w_0 \in \mathbb{C}$

$n \in \mathbb{N}$

$|w| \le r, \ |w_0| \le r \Rightarrow$

$$|w^n - w_0^n| \ \le \ n r^{n-1} |w - w_0|$$

Доказательство:

$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2} \cdot w_0 + ... + w \cdot w_0^{n-2} + w_0^{n-1}| \ \le \ |w - w_0| \cdot r^{n-1} n$

Теорема:

$A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

$A' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

$f(z) = A$

$R \in (0, +\infty]$ – радиус сходимости $(A) \Rightarrow$

1. R – радиус сходимости A'
2. $\forall z \in B(z_0, R): \ f'(z) = A'$

Доказательство:

1. Вместо A' рассмотрим $(z - z_0) A' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^n$, который имеет тот же радиус сходимости

   $R' = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n |a_n|}} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}} \underset{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \to 1}{\overset{\text{из свойств}}{=}} R$

2. Возьмём $a \in B(z_0, r), \ r < R$

   $f'(a) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \ = \ \lim\limits_{z \to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} \ = \ \begin{bmatrix} w = z - z_0 \\ w_0 = a - z_0 \end{bmatrix} \ = \ \lim\limits_{w \to w_0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$

   $\left. \begin{array}{l} \text{По лемме : } \left| a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \right| \le |a_n| n r^{n-1} \\ r < R : \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| n r^{n-1} \text{ – сходится} \end{array} \right\} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$ – равномерно сходится по Вейерштрассу

   По теореме о предельном переходе в суммах :

$$\lim_{w \to w_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{w \to w_0} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n w_0^{n-1} \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (a - z_0)^{n-1}$$

24.5.1. Следствие об интегрировании степенного ряда. Пример.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$

$x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R}$

$F(x) = \dfrac{a_n}{n+1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((x - x_0)^{n+1} \right) + \mathrm{C} \Rightarrow$

1. F имеет тот же радиус сходимости, что f
2. $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$ или $F'(x) \ = \ f(x)$ при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

Доказательство:

1. Пусть у $F(x)$ радиус сходимости R, тогда по т. о дифф. степ. ряда у $F'(x) = f(x)$ радиус сходимости R
2. $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (t - x_0)^n\,\mathrm{d}t \ \underset{\text{сходимости}}{\overset{\text{по равномерной}}{=}} \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$

Пример:

$f(x) = \mathrm{arcctg}\ x, \ x \in (-1, 1)$

$f'(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2} = -1 + x^2 - x^4 + ...$

$f(x) = \int\limits_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x = C - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + ...$

$f(0) = \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + ...$

24.6. Свойства экспоненты

$z \in \mathbb{C}$

$\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = +\infty \Rightarrow$

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
4. $\exp(v + w) = \exp(v) \cdot \exp(w)$

Доказательство:

1. $\exp(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{0^n}{n!} = 1$
2. $\exp'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$
4. $\exp(v) \cdot \exp(w) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{v^n}{n!} \right) \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{w^k}{k!} \right) \overset{(\star)}{=} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{v^j w^{n-j}}{j!(n-j)!} \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{v^j w^{n-j} n!}{j!(n-j)!} \overset{(\star\star)}{=} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} (v + w)^n$

   $(\star)$: Сделали суммирование по диагоналям

   $(\star\star)$: Свернули сумму по биному Ньютона

24.7. Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$a_n \in \mathbb{R}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ – сходится

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$x \in (-1, 1) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Доказательство:

$a_n x^n$ – непрерывно на $[0, 1]$ *(в том числе в 1)*

$f(x)$ задана на $[0, 1)$

Докажем равномерную сходимость $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ на $[0, 1]$ по признаку Абеля:

1. $"a_n(x)" = a_n$ – равномерно сходится (так как сходится и не зависит от x)
2. $"b_n(x)" = x^n$ – при фиксированном x монотонна по n, и стремится к 0

   b_n равномерно ограничена: $(\exists M := 1 : \ \forall x \in X \ \ \forall n \ \ |x^n| < M)$

Следствие:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$

$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$ – суммирование по диагоналям

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = C = A \cdot B$$

Доказательство:

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$q(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

$h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$

При $x \in [0, 1)$ все три ряда абсолютно сходятся

$f(x) \cdot g(x) = h(x)$

По предельному переходу:

$x \to 1 : \ A \cdot B = C$

24.8. Единственность разложения функции в ряд

$\exists V(x_0) : \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow$

Это разложение единственно

Доказательство:

k-ая производная функции f:

$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{n - k!} a_k (x - x_0)^{n-k}$

$f^{(k)}(x_0) = k! a_k \Rightarrow a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ \Rightarrow$ коэфициенты a_n определяются единственным образом

24.9. Разложение бинома в ряд Тейлора

$\dbinom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\dbinom{\sigma}{k} = \dfrac{\sigma(\sigma - 1)(\sigma - 2)...(\sigma - k + 1)}{k!}$

$\sigma \in \mathbb{R}$

$|x| < 1 \Rightarrow$

$$(1 + x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2!} x^2 + ... + \binom{\sigma}{n} x^n + ... \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n = S(x)$$

Доказательство:

При $|x| < 1$:

$S(x)$ – сходится по признаку Даламбера:

$\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \dfrac{\sigma - n}{n + 1} x \right| = \left| \left(\dfrac{\sigma + 1}{n + 1} - 1 \right) x \right|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| \ < \ 1$

$S'(x)(1 + x) = \sigma S(x)$

$S'(x) = \sigma + \dfrac{\sigma(\sigma - 1)}{2} \cdot 2x + \dbinom{\sigma}{3} \cdot 3x + \dbinom{\sigma}{n+1} \cdot (n+1) x^n + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dbinom{\sigma}{n} \cdot x^{n-1} n$

$x S'(x) = \sigma x + \dfrac{\sigma(\sigma - 1)}{2} \cdot 2x^2 + \dbinom{\sigma}{3} \cdot 3x^3 + \dbinom{\sigma}{n} \cdot n x^n + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dbinom{\sigma}{n} x^n n$

$\dbinom{\sigma}{n+1} \cdot (n+1) + \dbinom{\sigma}{n} \cdot n = \dbinom{\sigma}{n} \left(\frac{(n+1)(\sigma - n)}{n+1} + n \right) = \sigma \dbinom{\sigma}{n}$

$f(x) = \dfrac{S(x)}{(1 + x)^\sigma}$

$f'(x) = \dfrac{S'(x)(1 + x)^\sigma - \sigma(1 + x)^{\sigma - 1} S(x)}{(1 + x)^{2\sigma}} = \dfrac{S'(x)(1 + x) - \sigma S(x)}{(1 + x)^{\sigma + 1}} = 0 \Rightarrow f(x) = C$

$f(0) = 1 \ \Rightarrow \ f(x) = 1$

24.10. Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h) \Rightarrow$

f раскладывается в ряд в $V(x_0) \ \Leftrightarrow \ \exists \delta, C, A > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f^{(n)}(x)| \le C A^n n!$

Доказательство:

<u>$\Leftarrow$</u>:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\dfrac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n}$

$\left| \dfrac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \le \dfrac{C A^{n+1} (n+1)!}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = C |A(x - x_0)|^{n+1}$

При $\ A(x - x_0) < 1$:

$|R_n| \le C \cdot (A(x - x_0))^{n+1}$ – сходится

При $|x - x_0| < \min\left(\delta, \frac{1}{A}\right)$

R_n – сходится

<u>$\Rightarrow$</u>:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

Возьмём $x_1 \in \dot{V}(x_0)$

$\left| \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \ \le \ C_1$ – ограничено, так как ряд сходится

$|f^{(n)}(x_0)| \le \dfrac{C_1 n!}{|x_1 - x_0|^n} = C_1 B_1^n n!$

$B_1 = \dfrac{1}{|x_1 - x_0|}$

Пусть $|x - x_0| < \dfrac{1}{2 B_1}$:

$$\begin{aligned}
|f^{(m)}(x)| \ &\le \ \left| \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)...(k-m+1) |x - x_0|^{k-m} \right| \ \le \\
&\le \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!} k(k-1)...(k-m+1) |x - x_0|^{k-m} \ \le \\
&\le \ \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{C_1 B_1^k k!}{k!} k(k-1)...(k-m+1) |x - x_0|^{k-m} = \\
&= C_1 B_1^m \sum_{k=m}^{+\infty} (B_1 |x - x_0|)^{k-m} k(k-1)...(k-m+1) \overset{(\star)}{=} \\
&\overset{(\star)}{=} C_1 B_1^m \frac{m!}{\left(1 - \underbrace{B_1 |x - x_0|}_{\le \frac{1}{2}} \right)^{m+1}} \le C_1 \cdot B_1^m \cdot m! \cdot 2^{m+1} = \\
&= \underbrace{2 C_1}_{=\varepsilon} \cdot \left(\underbrace{2 B_1}_{=A} \right)^m \cdot \underbrace{m!}_{>k}
\end{aligned}$$

$\delta = \min\left(\dfrac{1}{2B}, \varepsilon \right)$

ε – окрестность разложения

$(\star)$:

$|x| < 1$

$\dfrac{1}{1 - x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$

$\left(\dfrac{1}{1 - x} \right)^{(m)} = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k \right)^{(m)}$

$\dfrac{m!}{(1 - x)^{m+1}} = \sum\limits_{k=m}^{+\infty} k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k - m + 1) \cdot x^{k-m}$

24.11. Разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..., \quad |x| < 1$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ..., \quad |x| < 1$$

25. Двойной предел, повторный предел

$X \times Y$

$D_1 \subset X,\ a$ — предельная точка D_1

$D_2 \subset Y,\ b$ — предельная точка D_2

$D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$

$f : D \to R$

Повторный предел:

1. $\forall x \in (D_1 \setminus \{a\})\ \ \exists \lim\limits_{y \to b} f(x, y) = \varphi(x)$ — конечный

   Тогда **повторный предел** — это

   $$\lim_{x \to a} \varphi(x)$$

2. $\forall y \in (D_2 \setminus \{b\})\ \ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \psi(y)$ — конечный

   Тогда это тоже **повторный предел**:

   $$\lim_{y \to b} \psi(y)$$

Двойной предел:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$ — **двойной предел:**

$$\forall U(A)\ \ \exists V(a),\ W(b) :\ \forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap D_1,\ \ \forall y \in \overset{\circ}{W}(b) \cap D_2\ \ f(x, y) \in U(A)$$

25.1. Теорема о двойных и повторных пределах

$f : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in D_1 \setminus \{a\} :\ \exists \varphi(x) \in \mathbb{R} = \lim\limits_{y \to b} f(x, y) \Rightarrow$

$$\exists \text{ повторный предел } \lim_{x \to a} \varphi(x) = A$$

Доказательство:

1. $A \in \mathbb{R}$

   $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists V(a),\ W(b) :\ \forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap D_1,\ \forall y \in \overset{\circ}{W}(b) \cap D_2\ \ (|f(x, y) - A|) < \varepsilon$

   Пусть $y \to b$, тогда $|\varphi(x) - A| \le \varepsilon$

   Т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists V(a) :\ \forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap D_1,\ |\varphi(x) - A| \le \varepsilon\ \Rightarrow\ \exists \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$

2. $A = \pm\infty$

   $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists V(a), W(b) :\ \forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap D_1,\ \forall y \in \overset{\circ}{W}(b) \cap D_2\ \ |f(x, y)| > \varepsilon$

   Пусть $y \to b$, тогда $|\varphi(x)| \ge \varepsilon$

   $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists V(a) :\ \forall x \in \overset{\circ}{V}(a) \cap D_1,\ |\varphi(x)| > \varepsilon\ \Rightarrow\ \exists \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty$