Линейная алгебра
II семестр

Лектор:
Трифанов Александр Игоревич

зима/весна 2024

_scarleteagle **ikochelorov**

1. Полилинейная и тензорная алгебра

1.1. Перестановки

см. курс дискретной математики первого семестра

1.2. Пространство полилинейных форм (пространство ПЛФ)

$\sqsupset X(K)$ – ЛП над K, $\dim_K X = n$,
$\sqsupset X^*(K)$ – пр-во ЛФ над $X(K)$

Определение: полилинейная форма
ПЛФ называется отображение
$u : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times X^* \times ... \times X^*}_{q} \to K$
Обладающее следующщими свойствами (полилинейность - *линейность по всем агрументам*):
1. $u(...\ x_1 + x_2\ ...) = u(...\ x_1\ ...) + u(...\ x_2\ ...)$
2. $u(..., \lambda x, ...) = \lambda u(..., x, ...)$

Замечание:
пара (p, q) – валентность ПЛФ

Примеры:

1. $f \in X^*(k)$ – ПЛФ $(1, 0)$
2. $\hat{x} \in X^{**}$ – ПЛФ $(0, 1)$
3. $E_3 \quad g(x,\ y) = \langle x, y\rangle$ – ПФЛ $(2, 0)$
4. $E_3 \quad \omega(x,\ y,\ z)$ – ПЛФ $(3, 0)$

Замечание:
$\sqsupset \Omega_p^q$ – мн-во ПЛФ (p, q)

1. Равенство линейных форм

$$u, v \in \Omega_p^q : u = v \Leftrightarrow u(x_1,\ x_2,\ ...,\ y^1,\ y^2,\ ...,\ y^q) = v(x_1,\ x_2,\ ...,\ y^1,\ y^2,\ ...,\ y^q)$$
$$\forall x_1,\ ..., x_p \in X,\ y^1,\ ...,\ y^q \in X^*$$

2. Сумма линейных форм

$$\omega = u + v \Leftrightarrow \omega(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) = (u + v)(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) =$$
$$u(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) + v(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q)$$

$\forall u,\ v,\ \omega \quad u + (v + \omega) = (u + v) + \omega$ – *ассоциативность*
$\exists \theta \in \Omega_p^q \quad \theta(x_1, ..., x_p, y^1 ... y^q) = 0, \quad \forall u \quad u + \theta = u = \theta + u$ – *существование нейтрального*
$\forall u \quad \exists(-u) : u + (-u) = \theta$ – *существование обратного*

3. Произведение ПЛФ на скаляр

$$w = \lambda u \Leftrightarrow w(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) = (\lambda u)(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) = \lambda u(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q)$$

Теорема:
$\Omega_p^q = \Omega_p^q(K)$ – ЛП

Доказательство:
Проверка аксиом ЛП ■

1.3. Тензор ПЛФ

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K)$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ – базис $X^*(K)$
$\sphericalangle \quad (x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q) ⊜$

$x_1 = \sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad ... \quad x_p = \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_1^{i_p} e_{i_p}$

$y_1 = \sum\limits_{i_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} \quad ... y^q = \sum\limits_{i_p=1}^n \mu_{j_1}^q f^{j_q}$

$⊜\ u\left(\sum\limits_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} ... = \sum\limits_{i_p=1}^n \xi_1^{i_p} e_{i_p}; \sum\limits_{j_1=1}^n \mu_{j_1}^1 f^{j_1} ... \sum\limits_{j_q=1}^n \mu_{j_q}^1 f^{j_q}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^n ... \sum\limits_{i_p=1}^n \sum\limits_{j_1=1}^n ... \sum\limits_{j_q=1}^n \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q \quad u(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} ... f^{j_q}) ... f^{j_q} = u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ – *тензор линейной формы (сумма произведений координат)*

$= \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Лемма:
Знание тензора $u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ в паре базисов пр-в X и X^* эквивалентно заданию самой ПЛФ u:

$$u \overset{\{e_i\}}{\underset{\{f^j\}}{\leftrightarrow}} u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$$

Доказательство:
см. выше. ■

1.4. Базис пространства ПЛФ

$\Omega_p^q(K)$ – пространство ПЛФ над полем K

Замечание:
$\mathrm{Mat}_K(2) \quad \overset{=e^1}{\underset{=e_{11}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{=e_2}{\underset{=e_{12}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{=e_3}{\underset{=e_{21}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{=e_4}{\underset{=e_{22}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$(e_{11})_{ij} = {}_{11}e^{ij}$

${}_{\alpha\beta}e^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j = \begin{cases} 1, i=\alpha, j=\beta \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$\sphericalangle \quad \left\{{}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\right\}$ – набор ПЛФ в $\Omega_p^q(K)$

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p} \xi_p^{s_p} \mu_{t_1}^1 ... \mu_{t_q^q}$

Замечание:
${}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q} W_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = \delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q}$

Теорема:
Набор $\left\{{}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\right\}$ – базис в $\Omega_p^q(K)$

Доказательство:
Докажем полноту
$\exists u \in \Omega_p^q(K)$
$\sphericalangle \quad u(x_1 ... x_p, y^1 ... y^q = \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W(x_1 ... x_p y^1 ... y^q) u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$
$\Rightarrow u = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Докажем ЛНЗ
$\sphericalangle \quad {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = \theta \mid (e_{i_1} ... e_{i_p}, f^{j_1} ... f^{j_q})$

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} f^{j_q}) \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$

$\delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$
$\alpha_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ■

Замечание:
$\dim_K \Omega_p^q = n^{p+q}$

2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

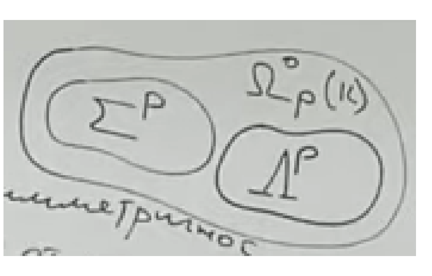
$\sphericalangle \quad \Omega_p^0(K)$
Определение: симметрическая форма
Форма $u \in \Omega_p^0(K)$ – симметрическая, если ее значения не зависят от порядка аргументов

$$u(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(p)}) = u(x_1\ x_2\ ...\ x_p)$$
$$\forall \sigma \in S_P \ (\textit{симметрическая группа перестановок})$$

Пример:
$E_3(\mathbb{R}) \ g(x, y) = \langle x, y\rangle \quad g(x, y) = g(y, x)$

Лемма:
$\sqsupset u$ – симметричная $\Rightarrow u_{i_1 ... i_p} = u_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}}$

$\sqsupset \Sigma^p$ – множество симметричных форм



Лемма:
$\Sigma^p = \Sigma^p(K) \le \Omega_p^0(K)$

Определение: антисимметричная форма
$V \in \Omega_p^0(K)$ – антисимметричная, если $\forall \sigma \in S_p \quad v(x_{\sigma(1) ... \sigma(2)}) = (-1)^{[\sigma] - \text{чётность}} v(x_1\ x_2 ... x_p)$

Пример:
$E_3, \omega(x, y, z) = (x, y, z), \omega(x, z, y) = -\omega(x, y, z)$

Лемма:
Тензор антисимметричной формы антисимметричен по индексам

$$v_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}} = (-1)^{[\sigma]} v_{i_1 ... i_p}$$

$\sqsupset \Lambda$ – мн-во антисимм форм

Лемма:
$\Lambda^p = \Lambda^p(K) \le \Omega_p^0(K)$

Замечание:
$\Lambda^p \cap \Sigma^p = \theta$

Лемма:
$v \in \Lambda^p \Leftrightarrow v$ обнуляется на паре одинаковых аргументов

Доказательство:
$\Leftarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i ... x_i ...) = -v(... x_i ... x_i ...) \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_1' + x_i'' ... x_j' + x_j'' ...) = 0$
$v(... x_1' ... x_1' ...) + v(... x_1' ... x_1'' ... + v(... x_1'' ... x_1' ...) + v(... x_1'' ... x_1'' ...) = 0$
$v(... x_1' ... x_i'' ...) = -v(... x_1'' ... x_1' ...)$ ■

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^p$ – ЛЗ $\Rightarrow \forall v \in \Lambda^p(K) \quad v(x_1 ... x_p) = 0$

2.1. Симметризация и антисимметризация

$\sqsupset W \in \Omega_p^0(K), \quad K : \mathrm{char}\ K = 0 \quad$ ($\mathbb{Q}$ и “больше”)

Лемма:
Следующая форма является симметричной

$$u(x_1 ... x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in s_p} W(x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(p)})$$

Доказательство:
$\sphericalangle \quad u(x_{\chi(1)} ... x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in s_p} W(x_{\sigma\chi(1)} ... x_{\sigma\xi(p)}) =$
$\langle \sigma \circ \chi = \varphi, \quad \sigma = \varphi \circ \chi^{-1}\rangle$
$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\substack{\varphi \circ \chi^{-1} \\ \varphi \in s_p}} W(x_{\varphi(1)} ... x_{\varphi(p)}) = u(x_1 ... x_p)$ ■

Определение: симметризация
Процесс изготовления симметрической формы из произвольной

$$(\mathrm{Sym}\ W)(x_1 ... x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_P} W(x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(p)})$$

Замечание:
Коэффициент $\frac{1}{p!}$ – нормировка: $W \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\ W = W$

Замечание:
$\mathrm{Sym}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$
$\mathrm{Sym}\ (u + v) = \mathrm{Sym}\ u + \mathrm{Sym}\ v$
$\mathrm{Sym}\ (\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Sym}(u)$

Лемма:
Следующая форма является антисимметричной

$$v(x_1 ... x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W(x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(p)})$$

Определение: антисимметризация (альтернирование)
Процесс изготовления антисимметричной формы из произвольной

$$(\mathrm{Alt}\ W)(x_1 ... x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W(x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(p)})$$

Замечание:
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$
$\mathrm{Alt}(u + v) = \mathrm{Alt}\ u + \mathrm{Alt}\ v$
$\mathrm{Alt}(\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Alt}(u)$
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}\ \mathrm{Alt} = 0$

Замечание:
$\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt} \ne \mathrm{id}$
$v(p = 2)$
$A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2}$
$A^{(a)} = \frac{A - A^T}{2}$

2.2. Базис Λ^p

$\dim_k \Lambda^p = \ ?$
$\sqsupset \{{}^{s_1 ... s_p} W\}$ – базис в $\Omega_p^0(K)$

$\sphericalangle \quad {}^{s_1 ... s_p}F = p! \mathrm{Alt}({}^{s_1 ... s_p}W)$

$\{{}^{s_1 ... s_p}F\}$ – набор в Λ^p – ПН, но не ЛНЗ

Лемма:
Форма ${}^{s_1 ... s_p}F$ – антисимметрична по своим индексам
${}^{... s_i ... s_j ...}F = -{}^{... s_j ... s_i ...}F$

Доказательство:
$D^{... s_i ... s_j ...}F(... x_i ... x_j ...) = p! \mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W(... x_i ... x_j ...) = p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W)(... x_i ... x_j ...) =$
$= -p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_j ... s_i ...}W)(... x_i ... x_j ...) = -{}^{... s_j ... s_i ...}F(... x_i ... x_j ...)$

Замечание:

1. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F,\ {}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$ — ЛЗ
2. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F = -{}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$

$$\sphericalangle \quad \left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid \underbrace{1 \le s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_p \le n}_{\vec{s}} \right\}$$

Теорема: $\left\{ {}^{\vec{s}}F \right\}$ — базис в Λ^p

Доказательство:
ПН: $\beth\ U \in \Lambda^p$

$$U = {}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p}$$

$$\mathrm{Alt}\ U = U = \mathrm{Alt}\ \left({}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p} \right)$$

$$= (\mathrm{Alt}\ {}^{s_1 \dots s_p}W) u_{s_1 \dots s_p}$$

$$= \frac{1}{p!} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_1 \dots s_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} {}^{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\vec{s}} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} {}^{s_1 \dots s_p}F (-1)^{[\sigma]} u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}} = \frac{1}{p!} p! \sum_{\vec{s}} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$$

ЛНЗ: $\sphericalangle \quad {}^{\vec{s}}F \alpha_{\vec{s}} = \theta \quad \mid \left(e_{i_1} \dots e_{i_p} \right)$

$$F\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{\vec{s}} = 0$$

$$p!\ \mathrm{Alt}\ {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$$

$$p! \sum_{\sigma \in S_p} {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(1)}} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p}$$

$$p! \sum_{\sigma \in S_p} \delta^{s_1}_{i_{\sigma(1)}} \delta^{s_2}_{i_{\sigma(2)}} \dots \delta^{s_p}_{i_{\sigma(p)}} \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = 0 \quad (\vec{s})$$

$$\alpha_{i_{\varphi(1)} \dots i_{\varphi(p)}} = 0$$

Пример:
$\mathrm{char}\ K = 2 \quad \{0, 1\}$

Замечание:
$!V(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -V(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$
$\mathrm{char}\ K = 0 \quad K \supset \mathbb{Q}$

Базис:
$\left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid 1 \le s_1 < s_2 \dots < s_p \le n \right\}$

Замечание:
$\dim_K \Lambda^p = C^p_n$

Замечание:

$$\begin{array}{lll}
\Lambda^0 & \dim_K \Lambda^0 = 1 & K \\
\Lambda^1 & \dim_K \Lambda^1 = n & X^*(K) \\
\Lambda^2 & \dim_K \Lambda^1 = \frac{n(n-1)}{2} & \mathrm{Mat}^{\mathrm{alt}}_n(2) \\
\vdots & & \\
\Lambda^n & \dim_k \Lambda^n = 1 &
\end{array}$$

Базис $\Lambda^n \quad \left\{ {}^{123 \dots n}F \right\} \Rightarrow \forall U \in \Lambda^n \quad U = \alpha \cdot {}^{123 \dots n}F \}, \alpha \in K$

Замечание:
$\beth\ p > n \Rightarrow \Lambda^p = \{\theta\}$

Определение: определитель
$\sphericalangle \quad {}^{123 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = n!\ \mathrm{Alt}\ {}^{123 \dots n}W(x_1 \dots x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} {}^{\sigma(1) \dots \sigma(n)}W(x_1 \dots x_n)(-1)^{[\sigma]}$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_p^{\sigma(n)} \triangleq \det\{x_1 \dots x_n\}$ — *определитель*

Замечание:
$x_i \leftrightarrow \xi_i$

$$\sphericalangle \quad A = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix} \quad \det\{x_1 \dots x_n\} \equiv \det A$$

- Понятно?
- *молчание*
- Понятно. Всем понятно?
- *нервный смешок*
- Нет, не всем...
- *смех погромче*
- Ну ладно. На экзамене станет понятно.

3. Произведение ПЛФ

3.1. Определения

$\sqsupset U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K)$
Определение: произведение ПЛФ
U и $V -$ ПЛФ   форма $W = U \cdot V -$ *произведение ПЛФ*:
$W\left(x_1, ..., x_p, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^q, ...y^{q_1+q_2}\right)$
$= U\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^{p_1}\right) \cdot V(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}; y^{q_1}, ..., y^{q_1+q_2}$

Замечание:
$W -$ ПЛФ $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$
Лемма:
$U \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}}, \quad V \leftrightarrow v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}}$

$UV \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}} v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}} = w_{i_1,...,i_{p_1+p_2}}^{j_1,...,j_{q_1+q_2}} \leftrightarrow W$

Свойства:

1. $U \cdot V \neq V \cdot U$
   Пример:
   $f, g \in X^*(K)$
   $x, y \in X(K)$
   $(f \cdot g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \neq (g \cdot f)(x, y) = g(x) \cdot f(y)$

2. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} \leftrightarrow$ внешнее произведение

3. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad \theta \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot \theta = \theta \cdot U = \theta \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}(K)$

4. $\forall U, V, W : (U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$

5. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$

6. $\forall \alpha \in K \quad U \cdot (\alpha V) = (\alpha U) \cdot V = \alpha \cdot (U \cdot V)$

7. $\sqsupset \{{}^{s_1 \dots s_p}W\} -$ базис $\Omega_p^0(K)$

   $\sqsupset \{f^j\} -$ базис $X^*(K) \Rightarrow$

   ${}^{s_1 \dots s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}$

   $\sphericalangle \quad {}^{s_1 \dots s_p}W\left(x_1 ... x_p\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p}$

   $=< \{e_i\}$ - базис, сопр. $\{f^j\} >= f^{s_1}(x_1) \cdot ...f^{s_p}\left(x_p\right)$

   $= (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Замечание:

$\left\{{}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W\right\} -$ базис $\Omega_p^q(K) \qquad \left\{{}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W\right\}\left(x_1 ... x_p y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} ... \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 ... \eta_{t_q}^q$

$\left\{f_j\right\} -$ базис $X^*(K)$,

$\{\hat{e}_m\} -$ базис $X^{**}(K) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q}W = f^{s_1} \cdot ... \cdot f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \cdot ... \cdot \hat{e}_{t_q}$

Пространство, в котором эта операция является внутренней:
Определение: внешняя алгебра полилинейных форм
$\sphericalangle \quad \Omega = \Omega_0^0 \dotplus \Omega_0^1 \dotplus \Omega_1^0 \dotplus \Omega_1^1 \dotplus ... = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Omega_i^j$
$\omega \in \Omega \qquad \omega_1 = V_1 + W_1$
$\qquad \omega_2 = V_2 + W_2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = (V_1 + V_2) \cdot (W_1 + W_2)$
$(\Omega, +, \cdot) -$ *внешняя алгебра ПЛФ*

3.2. Алгебра Грассмана

Вступление:
$\sqsupset U \in \Lambda^p, \quad V \in \Lambda^q$
$?\, U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$ неправда.
$\sqsupset U \cdot V = W$
$W\left(x_1, ..., x_p, \quad x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = U\left(x_1, ..., x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Определение: антисимметричное произведение ПЛФ
$U \wedge V = \mathrm{Alt}(U \cdot V) \cdot \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} -$ *антисимметричное произведение ПЛФ*

Лемма:
$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\ U \cdot V) = \mathrm{Sym}(U \cdot \mathrm{Sym}\ V) = \mathrm{Sym}(U \cdot V)$
$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V) = \mathrm{Alt}(U \cdot \mathrm{Alt}\ V) = \mathrm{Alt}(U \cdot V)$

Доказательство *(для альтернирования)*:
$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \mathrm{Alt}\ \left[\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} U \cdot V\right] \left(x_{\sigma_{(1)}} x_{\sigma_{(p)}} x_{p+1} ... x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)] \left(x_{\sigma_{(1)}}, x_{\sigma_{(p)}}, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} [\mathrm{Alt}\ (U \cdot V)] \left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \cdot p! (\mathrm{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Свойства внешнего произведения:
$\sqsupset U \in \Omega_p^0 \quad V \in \Omega_q^0$

1. Суперкоммутативность:
   $U \wedge V = (-1)^{p \cdot q}\ V \wedge U$
   Доказательство:
   $(U \wedge V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \frac{(p+q)!}{p! q!}\ \mathrm{Alt}\ (U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$
   $= (-1)^{p \cdot q} \frac{(p+q)!}{p! q!}\ \mathrm{Alt}\ (V \cdot U)\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q},\ x_1, ..., x_p\right)$
   Замечание:
   $f \wedge g = -g \wedge f \quad \forall f, g \in X^*(K)$
   $v \wedge \omega^{(2m)} = \omega^{(2m)} \wedge v$
2. Ассоциативность:
   $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W$
   Доказательство:
   очевидно (доказательство оставлено читателям в качестве простого, но обязательного упражнения)
3. $U \wedge (\alpha V) = (\alpha U) \wedge V = \alpha(U \wedge V) \qquad \forall \alpha \in K$
4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
5. $\{{}^{s_1 \dots s_p}F\} -$ базис $\Lambda^p \Rightarrow {}^{s_1 \dots s_p}F = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... \wedge f^{s_p}$
   Доказательство:
   ${}^{s_1 \dots s_p}F = p!\ \mathrm{Alt}({}^{s_1 \dots s_p}W) = p!\ \mathrm{Alt}\ (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})$
   $= p! \frac{1(p-1)!}{p!} \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... f^{s_p}) = (p-1)! \cdot f^{s_1} \wedge \mathrm{Alt}(f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}) = ...$
   $= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... f^{s_p}$
6. $U \in \Lambda^p,\ v \in \Lambda^q$
   $u \wedge v = 0 \qquad p + q > n$
   $\sphericalangle \quad \Lambda \in \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^j \quad \dim_K \Lambda^j = C_n^j$
   $\dim_K \Lambda = 2^n$

> Всё, что было до этого — детский сад. Ну может начальная школа
>
> — Трифанов Александр Игоревич

$(\Lambda, +, \wedge) -$ алгебра Грассмана

Определение: градуированная алгебра
$\Lambda -$ *градуированная алгебра*, если:
$U \in \Lambda^P, V \in \Lambda^q \Rightarrow U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$
$\Lambda^p \Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}$

Пример:
Алгебра многочленов