Линейная алгебра

II семестр

Лектор:

Трифанов Александр Игоревич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

1. Полилинейная и тензорная алгебра

1.1. Перестановки

см. курс дискретной математики первого семестра

1.2. Пространство полилинейных форм (пространство ПЛФ)

$\sqsupset X(\mathbb{K})$ — ЛП над $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} X = n$,

$\sqsupset X^*(\mathbb{K})$ — пр-во ЛФ над $X(\mathbb{K})$

Определение: полилинейная форма

ПЛФ называется отображение

$u : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times X^* \times ... \times X^*}_{q} \to \mathbb{K}$

Обладающее следующщими свойствами (полилинейность - *линейность по всем агрументам*):

1. $u(...\ x_1 + x_2\ ...) = u(...\ x_1\ ...) + u(...\ x_2\ ...)$
2. $u(..., \lambda x, ...) = \lambda u(..., x, ...)$

Замечание:
пара (p, q) — валентность ПЛФ

Примеры:

1. $f \in X^*(\mathbb{K})$ — ПЛФ $(1, 0)$
2. $\hat{x} \in X^{**}$ — ПЛФ $(0, 1)$
3. $E_3 \quad g(x,\ y) = \langle x, y \rangle$ — ПЛФ $(2, 0)$
4. $E_3 \quad \omega(x,\ y,\ z)$ — ПЛФ $(3, 0)$

Замечание:
$\sqsupset \Omega_p^q$ — мн-во ПЛФ (p, q)

1. Равенство линейных форм

$$u, v \in \Omega_p^q : u = v \Leftrightarrow u\left(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q\right) = v\left(x_1,\ x_2, ...,\ x_p;\ y^1, y^2, ...,\ y^q\right)$$

$$\forall x_1,\ ..., x_p \in X,\ y^1,\ ...,\ y^q \in X^*$$

2. Сумма линейных форм

$$\omega = u + v \Leftrightarrow \omega\left(x_1, ..., x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) = (u+v)\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) =$$

$$u\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right) + v\left(x_1, ...,\ x_p;\ y^1, ...,\ y^q\right)$$

$$\forall x_1, ..., x_p \in X,\ y^1, ...,\ y^q \in X^*$$

$\forall u, v, \omega \in \Omega_p^q \quad u + (v + \omega) = (u + v) + \omega$ — *ассоциативность*

$\exists \Theta \in \Omega_p^q \quad \Theta\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = 0, \quad \forall u \in \Omega_p^q \quad u + \Theta = u = \Theta + u$ – *существование нейтрального*

$\forall u \in \Omega_p^q \quad \exists(-u) : u + (-u) = \Theta$ — *существование обратного*

3. Произведение ПЛФ на скаляр

$$w = \lambda u \Leftrightarrow w\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = (\lambda u)\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right) = \lambda u\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^q\right)$$

Теорема:

$\Omega_p^q = \Omega_p^q(\mathbb{K})$ — ЛП

Доказательство:
Проверка аксиом ЛП ■

1.3. Тензор ПЛФ

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(\mathbb{K})$, $\left\{f^j\right\}_{j=1}^n$ — базис $X^*(\mathbb{K})$
$\sphericalangle \quad u\left(x_1,\ ...,\ x_p,\ y^1,\ ...,\ y^q\right) \ominus$

$x_1 = \sum\limits_{i_1=1}^{n} \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad ... \quad x_p = \sum\limits_{i_p=1}^{n} \xi_p^{i_p} e_{i_p}$

$y_1 = \sum\limits_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1}^1 f^{j_1} \quad ... \quad y^q = \sum\limits_{j_p=1}^{n} \mu_{j_1}^q f^{j_q}$

$\ominus\, u\left(\sum\limits_{i_1=1}^{n} \xi_1^{i_1} e_{i_1} ... \sum\limits_{i_p=1}^{n} \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \sum\limits_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1}^1 f^{j_1} ... \sum\limits_{j_q=1}^{n} \mu_{j_q}^q f^{j_q}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^{n} ... \sum\limits_{i_p=1}^{n} \sum\limits_{j_1=1}^{n} ... \sum\limits_{j_q=1}^{n} \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u\left(e_{i_1} ... e_{i_p} f^{j_1} ... f^{j_q}\right) = \sum\limits_{i_1=1}^{n} ... \sum\limits_{i_p=1}^{n} \sum\limits_{j_1=1}^{n} ... \sum\limits_{j_q=1}^{n} \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}.$

$u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ — *тензор линейной формы*

Лемма:
Задание тензора $u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$ в паре базисов пр-в X и X^* эквивалентно заданию самой ПЛФ u:

$$u \underset{\{e^i\}}{\overset{\{f_j\}}{\leftrightarrow}} u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$$

Доказательство:
см. выше. ■

1.4. Базис пространства ПЛФ

$\Omega_p^q(\mathbb{K})$ — пространство ПЛФ над полем $\mathbb{K}$

Замечание:
$\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(2) \quad \underset{=e_{11}}{\overset{=e^1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{12}}{\overset{=e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{21}}{\overset{=e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \ \underset{=e_{22}}{\overset{=e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$(e_{11})_{ij} = {}_{11}e^{ij}$

${}_{\alpha\beta}e^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j = \begin{cases} 1, i=\alpha, j=\beta \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$\sphericalangle \quad \left\{ {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \right\}$ — набор ПЛФ в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$, такой, что:

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p} \mu_{t_1}^1 ... \mu_{t_q}^q$

Замечание:
${}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q} W\, {}^{j_1 ... j_q}_{i_1 ... i_p} = \delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q}$

Теорема:

Набор $\left\{ {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \right\}$ — базис в $\Omega_p^q(\mathbb{K})$

Доказательство:
Докажем полноту

$\sqsupset u \in \Omega_p^q(\mathbb{K})$
$\sphericalangle \quad u\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{i_1} ... \xi_p^{i_p} \mu_{j_1}^1 ... \mu_{j_q}^q u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q} = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W\left(x_1 ... x_p; y^1 ... y^q\right) u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$
$\Rightarrow u = {}^{i_1 ... i_p}_{j_1 ... j_q} W u_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$

Докажем ЛНЗ
$\sphericalangle \quad {}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = \theta$. Рассмотрим на поднаборе базисов $\left(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q}\right)$

${}^{s_1 s_2 ... s_p}_{t_1 t_2 ... t_q} W\left(e_{i_1} ... e_{i_p}; f^{j_1} ... f^{j_q}\right) \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$

$\delta_{i_1}^{s_1} ... \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} ... \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0 \Rightarrow \alpha_{s_1 ... s_p}^{t_1 ... t_q} = 0$ ■

Замечание:
$\dim_{\mathbb{K}} \Omega_p^q = n^{p+q}$

2. Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\sphericalangle \quad \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Определение: симметрическая форма

Форма $u \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — симметрическая, если ее значения не зависят от порядка аргументов

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$$

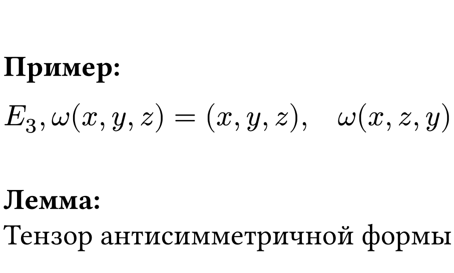
$$\forall \sigma \in S_p \text{ (группа перестановок)}$$

Пример:

$E_3(\mathbb{R})\ g(x, y) = \langle x, y \rangle \quad g(x, y) = g(y, x)$

Лемма:
$\sqsupset u$ — симметричная $\Rightarrow u_{i_1 ... i_p} = u_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}}$

$\sqsupset \Sigma^p$ — множество симметричных форм



Лемма:
$\Sigma^p = \Sigma^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Определение: антисимметричная форма

$V \in \Omega_p^0(\mathbb{K})$ — антисимметричная, если $\forall \sigma \in S_p \quad v\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{[\sigma] - \text{ чётность}} v\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Пример:

$E_3, \omega(x, y, z) = (x, y, z), \quad \omega(x, z, y) = -\omega(x, y, z)$

Лемма:
Тензор антисимметричной формы антисимметричен по индексам

$$v_{i_{\sigma(1)} ... i_{\sigma(p)}} = (-1)^{[\sigma]} v_{i_1 ... i_p}$$

$\sqsupset \Lambda$ — мн-во антисимметричных форм

Лемма:
$\Lambda^p = \Lambda^p(\mathbb{K}) \leq \Omega_p^0(\mathbb{K})$

Замечание:
$\Lambda^p \cap \Sigma^p = \Theta$

Лемма:
$v \in \Lambda^p \Leftrightarrow v$ обнуляется на паре одинаковых аргументов

Доказательство:
$\Leftarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i ... x_i ...) = -v(... x_i ... x_i ...) \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow$: $\sphericalangle \quad v(... x_i' + x_i'' ... x_i' + x_i'' ...) = 0$

$v(... x_i' ... x_i' ...) + v(... x_i' ... x_i'' ...) + v(... x_i'' ... x_i' ...) + v(... x_i'' ... x_i'' ...) = 0$

$v(... x_i' ... x_i'' ...) = -v(... x_i'' ... x_i' ...)$ ■

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\Rightarrow \forall v \in \Lambda^p(\mathbb{K}) \quad v\left(x_1, ..., x_p\right) = 0$

2.1. Симметризация и антисимметризация

$\sqsupset W \in \Omega_p^0(\mathbb{K}), \quad \mathbb{K} : \mathrm{char}\, \mathbb{K} = 0 \quad$ ($\mathbb{Q}$ и "больше")

Лемма:
Следующая форма является симметричной

$$u\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Доказательство:
$\sphericalangle \quad u\left(x_{\chi(1)}, ..., x_{\chi(p)}\right) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma\chi(1)}, ..., x_{\sigma\chi(p)}\right) =$
$\langle \sigma \circ \chi = \varphi, \quad \sigma = \varphi \circ \chi^{-1} \rangle$
$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\substack{\varphi \circ \chi^{-1} \\ \varphi \in S_p}} W\left(x_{\varphi(1)}, ..., x_{\varphi(p)}\right) = u\left(x_1, ..., x_p\right)$ ■

Определение: симметризация

Процесс изготовления симметрической формы из произвольной

$$(\mathrm{Sym}\ W)\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
Коэффициент $\frac{1}{p!}$ — нормировка: $W \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\ W = W$

Замечание:
$\mathrm{Sym}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$

$\mathrm{Sym}\ (u + v) = \mathrm{Sym}\ u + \mathrm{Sym}\ v$

$\mathrm{Sym}\ (\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Sym}(u)$

Лемма:
Следующая форма является антисимметричной

$$v\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Определение: антисимметризация (альтернирование)

Процесс изготовления антисимметричной формы из произвольной

$$(\mathrm{Alt}\ W)\left(x_1, ..., x_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Замечание:
$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$

$\mathrm{Alt}(u + v) = \mathrm{Alt}\ u + \mathrm{Alt}\ v$

$\mathrm{Alt}(\lambda u) = \lambda\ \mathrm{Alt}(u)$

$\mathrm{Alt}\ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}\ \mathrm{Alt} = 0$

Замечание:
$\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt} \neq \mathrm{id}$
$v(p = 2)$
$A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2}$
$A^{(a)} = \frac{A - A^T}{2}$

2.2. Базис Λ^p

$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^p = \ ?$

$\sqsupset \left\{ {}^{s_1 ... s_p} W \right\}$ — базис в $\Omega_p^0(\mathbb{K})$

$\sphericalangle \quad {}^{s_1 ... s_p}F = p! \mathrm{Alt}({}^{s_1 ... s_p}W)$

$\left\{ {}^{s_1 ... s_p}F \right\}$ — набор в Λ^p — ПН, но не ЛНЗ

Лемма:
Форма ${}^{s_1 ... s_p}F$ — антисимметрична по своим индексам
${}^{... s_i ... s_j ...}F = -{}^{... s_j ... s_i ...}F$

Доказательство:
$D^{... s_i ... s_j ...}F\left(... x_i ... x_j ...\right) = p! \mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W\left(... x_i ... x_j ...\right) = p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_i ... s_j ...}W)\left(... x_i ... x_j ...\right) ==$
$-p!(\mathrm{Alt}\ {}^{... s_j ... s_i ...}W)\left(... x_i ... x_j ...\right) = -{}^{... s_j ... s_i ...}F\left(... x_i ... x_j ...\right)$

Замечание:

1. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F,\ {}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$ — ЛЗ
2. ${}^{\dots s_i \dots s_j \dots}F = -{}^{\dots s_j \dots s_i \dots}F$

$\sphericalangle \quad \left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid \underbrace{1 \le s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_p \le n}_{\vec{s}} \right\}$

Теорема: $\left\{ {}^{\vec{s}}F \right\}$ — базис в Λ^p

Доказательство:
ПН: $\sqsupset U \in \Lambda^p$

$U = {}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p}$

$\mathrm{Alt}\ U = U = \mathrm{Alt}\ \left({}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p} \right)$

$= (\mathrm{Alt}\ {}^{s_1 \dots s_p}W) u_{s_1 \dots s_p}$

$= \frac{1}{p!} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_1 \dots s_p} = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\vec{s}} \sum\limits_{\sigma \in S_p} {}^{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$

$= \frac{1}{p!} \sum\limits_{\vec{s}} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} {}^{s_1 \dots s_p}F (-1)^{[\sigma]} u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}} = \frac{1}{p!} p! \sum\limits_{\vec{s}} {}^{s_1 \dots s_p}F u_{s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(p)}}$

ЛНЗ: $\sphericalangle \quad {}^{\vec{s}}F \alpha_{\vec{s}} = \theta \quad \mid \left(e_{i_1} \dots e_{i_p} \right)$

$F\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{\vec{s}} = 0$

$p!\ \mathrm{Alt}\ {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$

$p! \sum\limits_{\sigma \in S_p} {}^{s_1 \dots s_p}W \left(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(1)}} \right) \alpha_{s_1, \dots, s_p}$

$p! \sum\limits_{\sigma \in S_p} \delta^{s_1}_{i_{\sigma(1)}} \delta^{s_2}_{i_{\sigma(2)}} \dots \delta^{s_p}_{i_{\sigma(p)}} \alpha_{s_1, \dots, s_p} = 0$

$\sum\limits_{\sigma \in S_p} \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = 0 \quad (\vec{s})$

$\alpha_{i_{\varphi(1)} \dots i_{\varphi(p)}} = 0$

Пример:
$\mathrm{char}\ K = 2 \quad \{0, 1\}$

Замечание:
$!V(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -V(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$
$\mathrm{char}\ K = 0 \quad K \supset \mathbb{Q}$

Базис:
$\left\{ {}^{s_1 \dots s_p}F \mid 1 \le s_1 < s_2 \dots < s_p \le n \right\}$

Замечание:
$\dim_K \Lambda^p = C^p_n$

Замечание:

$\Lambda^0 \quad \dim_K \Lambda^0 = 1 \quad K$

$\Lambda^1 \quad \dim_K \Lambda^1 = n \quad X^*(K)$

$\Lambda^2 \quad \dim_K \Lambda^1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \mathrm{Mat}^{\mathrm{alt}}_n(2)$

$\vdots$

$\Lambda^n \quad \dim_k \Lambda^n = 1$

Базис $\Lambda^n \quad \left\{ {}^{123 \dots n}F \right\} \Rightarrow \forall U \in \Lambda^n \quad U = \alpha \cdot {}^{123 \dots n}F \}, \alpha \in K$

Замечание:
$\sqsupset p > n \Rightarrow \Lambda^p = \{\theta\}$

Определение: определитель
$\sphericalangle \quad {}^{123 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = n!\ \mathrm{Alt}\ {}^{123 \dots n}W(x_1 \dots x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} {}^{\sigma_{(1)} \dots \sigma_{(n)}}W(x_1 \dots x_n)(-1)^{[\sigma]}$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma_{(1)}} \xi_2^{\sigma_{(2)}} \dots \xi_p^{\sigma_{(n)}} \triangleq \det\{x_1 \dots x_n\}$ — *определитель*

Замечание:
$x_i \leftrightarrow \xi_i$
$\sphericalangle \quad A = \begin{pmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \dots & \xi^1_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \dots & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \dots & \xi^n_n \end{pmatrix} \quad \det\{x_1 \dots x_n\} \equiv \det A$

- Понятно?
- *молчание*
- Понятно. Всем понятно?
- *нервный смешок*
- Нет, не всем...
- *смех погромче*
- Ну ладно. На экзамене станет понятно.

3. Произведение ПЛФ

3.1. Определения

$\sqsupset U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K)$

Определение: произведение ПЛФ

U и V — ПЛФ   форма $W = U \cdot V$ — *произведение ПЛФ*:

$W\left(x_1, ..., x_p, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^q, ...y^{q_1+q_2}\right)$

$= U\left(x_1, ..., x_p; y^1, ..., y^{q_1}\right) \cdot V(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}; y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}$

Замечание:
W — ПЛФ $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$

Лемма:
$U \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}}, \quad V \leftrightarrow v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}}$

$UV \leftrightarrow u_{i_1,...,i_{p_1}}^{j_1,...j_{q_1}} v_{i_{p_1+1},...,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},...,j_{q_1+q_2}} = w_{i_1,...,i_{p_1+p_2}}^{j_1,...,j_{q_1+q_2}} \leftrightarrow W$

Свойства:

1. $U \cdot V \neq V \cdot U$

   Пример:

   $f, g \in X^*(K)$

   $x, y \in X(K)$

   $(f \cdot g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \neq (g \cdot f)(x, y) = g(x) \cdot f(y)$

2. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad V \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} \leftrightarrow$ внешнее произведение

3. $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}(K) \quad \theta \in \Omega_{p_2}^{q_2}(K) \quad U \cdot \theta = \theta \cdot U = \theta \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}(K)$

4. $\forall U, V, W : (U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$

5. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$

6. $\forall \alpha \in K \quad U \cdot (\alpha V) = (\alpha U) \cdot V = \alpha \cdot (U \cdot V)$

7. $\sqsupset \{{}^{s_1 ... s_p}W\}$ — базис $\Omega_p^0(K)$

   $\sqsupset \{f^j\}$ — базис $X^*(K) \Rightarrow$

   ${}^{s_1 ... s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}$

   $\sphericalangle \quad {}^{s_1 ... s_p}W\left(x_1 ... x_p\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} ... \xi_p^{s_p}$

   $=<\{e_i\}$ - базис, сопр. $\{f^j\} >= f^{s_1}(x_1) \cdot ... f^{s_p}\left(x_p\right)$

   $= (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$

Замечание:

$\left\{{}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q}W\right\}$ — базис $\Omega_p^q(K) \qquad \left\{{}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q}W\right\}\left(x_1 ... x_p y^1 ... y^q\right) = \xi_1^{s_1} ... \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 ... \eta_{t_q}^q$

$\{f_j\}$ — базис $X^*(K)$,

$\{\hat{e}_m\}$ — базис $X^{**}(K) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{s_1 ... s_p}_{t_1 ... t_q}W = f^{s_1} \cdot ... \cdot f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \cdot ... \cdot \hat{e}_{t_q}$

Пространство, в котором эта операция является внутренней:

Определение: внешняя алгебра полилинейных форм

$\sphericalangle \quad \Omega = \Omega_0^0 \dotplus \Omega_0^1 \dotplus \Omega_1^0 \dotplus \Omega_1^1 \dotplus ... = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Omega_i^j$

$\omega \in \Omega \qquad \omega_1 = V_1 + W_1$

$\qquad \omega_2 = V_2 + W_2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = (V_1 + V_2) \cdot (W_1 + W_2)$

$(\Omega, +, \cdot)$ — *внешняя алгебра ПЛФ*

3.2. Алгебра Грассмана

Вступление:

$\sqsupset U \in \Lambda^p, \quad V \in \Lambda^q$

$?\, U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$ неправда.

$\sqsupset U \cdot V = W$

$W\left(x_1, ..., x_p, \quad x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = U\left(x_1, ..., x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Определение: антисимметричное произведение ПЛФ

$U \wedge V = \operatorname{Alt}(U \cdot V) \cdot \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$ — *антисимметричное произведение ПЛФ*

Лемма:

$\operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} U \cdot V) = \operatorname{Sym}(U \cdot \operatorname{Sym} V) = \operatorname{Sym}(U \cdot V)$

$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V) = \operatorname{Alt}(U \cdot \operatorname{Alt} V) = \operatorname{Alt}(U \cdot V)$

Доказательство *(для альтернирования)*:

$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \operatorname{Alt}\ \left[\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} U \cdot V\right]\left(x_{\sigma_{(1)}} x_{\sigma_{(p)}} x_{p+1} ... x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} [\operatorname{Alt}\ (U \cdot V)]\left(x_{\sigma_{(1)}}, x_{\sigma_{(p)}}, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} [\operatorname{Alt}\ (U \cdot V)]\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

$= \frac{1}{p!} \cdot p! (\operatorname{Alt}\ U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$

Свойства внешнего произведения:

$\sqsupset U \in \Omega_p^0 \quad V \in \Omega_q^0$

1. Суперкоммутативность:

   $U \wedge V = (-1)^{p \cdot q}\ V \wedge U$

   Доказательство:
   $(U \wedge V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right) = \frac{(p+q)!}{p! q!} \operatorname{Alt}\ (U \cdot V)\left(x_1, ..., x_p,\ x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$
   $= (-1)^{p \cdot q} \frac{(p+q)!}{p! q!} \operatorname{Alt}\ (V \cdot U)\left(x_{p+1}, ..., x_{p+q},\ x_1, ..., x_p\right)$

   Замечание:
   $f \wedge g = -g \wedge f \quad \forall f, g \in X^*(K)$

   $v \wedge \omega^{(2m)} = \omega^{(2m)} \wedge v$

2. Ассоциативность:

   $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W$

   Доказательство:
   очевидно (доказательство оставлено читателям в качестве простого, но обязательного упражнения)

3. $U \wedge (\alpha V) = (\alpha U) \wedge V = \alpha(U \wedge V) \qquad \forall \alpha \in K$

4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$

5. $\{{}^{s_1 ... s_p}F\}$ — базис $\Lambda^p \Rightarrow {}^{s_1 ... s_p}F = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... \wedge f^{s_p}$

   Доказательство:
   ${}^{s_1 ... s_p}F = p!\ \operatorname{Alt}({}^{s_1 ... s_p}W) = p!\ \operatorname{Alt}\ (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p})$
   $= p! \frac{1(p-1)!}{p!} \cdot f^{s_1} \wedge \operatorname{Alt}(f^{s_2} \cdot ... f^{s_p}) = (p-1)! \cdot f^{s_1} \wedge \operatorname{Alt}(f^{s_2} \cdot ... \cdot f^{s_p}) = ...$
   $= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge ... f^{s_p}$

6. $U \in \Lambda^p,\ v \in \Lambda^q$

   $u \wedge v = 0 \qquad p + q > n$

   $\sphericalangle \quad \Lambda \in \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^j \quad \dim_K \Lambda^j = C_n^j$

   $\dim_K \Lambda = 2^n$

Всё, что было до этого — детский сад. Ну может начальная школа

— Трифанов Александр Игоревич

$(\Lambda, +, \wedge)$ — алгебра Грассмана

Определение: градуированная алгебра

Λ — *градуированная алгебра*, если:

$U \in \Lambda^P, V \in \Lambda^q \Rightarrow U \cdot V \in \Lambda^{p+q}$

$\Lambda^p \Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}$

Пример:

Алгебра многочленов

4. Определитель

$\sphericalangle \quad \dim_K \Lambda^n = 1 \Rightarrow \{{}^{12\ldots n}F\}$ – базис Λ^n

Определение: определитель

Определитель набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ – "число"
$$\det\{x_1 \ldots x_n\} = {}^{12\ldots n}F(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$= n! \text{ Alt } {}^{12\ldots n}W(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$= n! \cdot \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} {}^{12\ldots n}W\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}\right)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \ldots \xi^n_{\sigma(n)}$$

Замечание:
Альтернативная форма:
$$C := [x_1 x_2 \ldots x_n] = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \ldots & \xi^1_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \ldots & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \ldots & \xi^n_n \end{bmatrix}$$
$\det C := \det\{x_1 \ldots x_n\}$

4.1. Определитель как форма объёма

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор в $X(K)$

Определение: параллелепипед, построенный на векторах набора $\{x_i\}_{i=1}^n$
Множество следующего вида: $T_{n\{x_1 \ldots x_n\}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda^i x_i \mid \lambda^i \in [0,\ 1]\ \forall i \right\}$

$\sqsupset \omega$ – форма объёма в $X(K)$ $(K = \mathbb{R})$

Свойства:

1. $\text{codom } \omega \in \mathbb{R}$
2. $\omega T\{\ldots x'_i + x''_i \ldots\} = \omega T\{\ldots x'_i\} + \omega T\{\ldots x''_i \ldots\}$
   $\omega T\{\ldots \lambda x_i \ldots\} = \lambda \omega T\{\ldots x_i \ldots\}$
3. $\omega T\{x_1 \ldots x_n\} = 0 \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ

$\Rightarrow \omega \in \Lambda^n \Rightarrow \omega \sim \det$

Вычисление определителя — вычисление объёма параллелепипеда, построенного на векторах набора

4.2. Свойства определителя

Замечание:
$$\det\{x_1 \ldots x_n\} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \ldots \xi^n_{\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \ldots & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & \ldots & \xi^n_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^1_n & \ldots & \xi^n_n \end{vmatrix}$$

1.

$\det C^T = \det C$

Доказательство:
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \ldots \xi^n_{\sigma(n)} = \det C$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi^{\sigma(1)}_1 \xi^{\sigma(2)}_2 \ldots \xi^{\sigma(n)}_n \triangleq \det C^T$$
$$\left(\begin{matrix} \sum_\sigma {}^{12\ldots n}W\left(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}\right) = \xi^1_{\sigma(1)} \ldots \xi^n_{\sigma(n)} \\ \sum_\sigma {}^{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)}W(x_1 \ldots x_n) = \xi^{\sigma(1)}_1 \ldots \xi^{\sigma(n)}_n \end{matrix} \right)$$

2.

$\det\{\ldots x'_i + x''_i \ldots\} = \det\{\ldots x'_i \ldots\} + \det\{\ldots x''_i \ldots\}$

$\det\{\ldots \lambda x_i \ldots\} = \lambda \det\{\ldots x_i \ldots\}$

$\det\{\lambda C\} = \lambda^n \det C$

$\det(C_1 + C_2) \neq \det C_1 + \det C_2$

3.

$\det\{\ldots x_i \ldots x_j \ldots\} = \det\{\ldots x_i \ldots x_j + \lambda x_i\}$

4.

$\det\{\ldots x_i \ldots x_j \ldots\} = -\det\{\ldots x_j \ldots x_i \ldots\}$

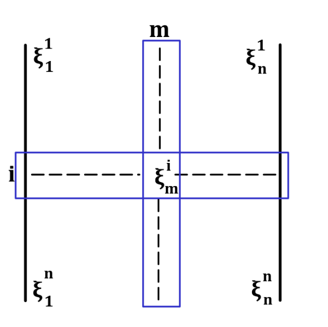
5.

Рекуррентная формула
$\det C = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \xi^i_j M^i_j$ – разложение по j-му столбцу
$\det C = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \xi^i_j M^i_j$ – разложение по i-ой строке

Доказательство:

$$\det C = {}^{12\ldots n}F(x_1 x_2 \ldots x_n) =$$
$$= f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$= f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^m \wedge \ldots \wedge$
$f^n(x_1 \ldots x_m \ldots x_n)$
$=< x_m = \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i; f^j(e_i) = \delta^j_i >$
$= f^1 \wedge \ldots \wedge f^m \wedge \ldots \wedge$
$f^n\left(x_1 \ldots \sum_{i=1}^n \xi^i_m e_i \ldots x_n\right)$
$= \sum_{i=1}^n f^1 \wedge \ldots \wedge f^m \wedge \ldots \wedge$
$f^n\left(x_1 \ldots \underset{m}{\underline{e_i}} \ldots x_n\right)$
$= \sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} f^1 \wedge \ldots \wedge f^{m-1} \wedge$
$f^{m+1} \wedge \ldots \wedge f^n(x_1 \ldots x_{m-1} x_{m+1} \ldots x_n))$
$=$
$\sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} M^i_m \qquad \circleddash$

$f \wedge g = f \cdot g - g \cdot f$
$f \wedge g \wedge h = f \cdot g \cdot h + h \cdot f \cdot g + g \cdot h \cdot f -$
$- f \cdot h \cdot g - g \cdot f \cdot h - h \cdot g \cdot f$



Определение: алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента ξ^i_m называется "число":
$$A^i_m = (-1)^{i+m} M^i_m$$

Замечание:
$\det C = \sum_{i=1}^n \xi^i_m A^i_m$

Теорема: (*Лапласа*)

Определитель матрицы равен сумме произведений миноров матрицы на их алгебраических дополнениях
$$\det C = \sum_{i_1 \ldots i_p} (-1)^{i_1 + \ldots + i_p + j_1 + \ldots j_p} M^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} L^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$$

Пример:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \ldots$$ ("*кому интересно, дома досчитаете*")

Доказательство:

Продолжаем "доказательство" предыдущего свойства
$$\circleddash \sum_{i=1}^n \xi^i_m (-1)^{i+m} \sum_{j=1}^n \xi^j_l (-1)^{j+l} M^{ij}_{ml} = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\xi^i_m \xi^j_l}_{L^{ij}_{ml}} (-1)^{i+m+j+l} M^{ij}_{ml}$$

Замечание:
$\det \text{diag } \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
$\det \text{diag } \{C_1 C_2 \ldots C_m\} = \prod_{i=1}^m \det C_i$
$$\det \begin{bmatrix} C_1 & * & \ldots & * \\ 0 & C_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & C_m \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \det C_i$$

Замечание:
$\sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b$ – система Крамера
$\Rightarrow \xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det\{a_i \ldots a_n\}, \Delta_i = \det\left\{a_1 \ldots \underset{i}{b} \ldots a_n\right\}$
Доказательство:
$\Delta_i = \det\{a_1 \ldots b \ldots a_n\} = \det\left\{a_1 \ldots \sum_{i=1}^n \xi^i a_i \ldots a_n\right\} = \det\{a_1 \ldots \xi^i a_i \ldots a_n\} = \xi^i \Delta$

5. Ранг матрицы

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор в $X(K)$

$\det\{x_1 \ldots x_n\} = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ

Сколько ЛНЗ векторов в наборе $\{x_i\}_{i=1}^n$?

Лемма:
$\{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛЗ $\Leftarrow \forall V \in \Lambda^M\ V(x_1 \ldots x_m) = 0$

Доказательство:
От противного: $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ (при $\uparrow$ этом условии)

$x_1 x_2 \ldots x_m$

$\downarrow \ \downarrow \quad \downarrow$

$e_1 e_2 \quad e_m e_{m+1} \ldots e_n$ – базис $X(K)$

$\sqsupset \{f^j\}_{j=1}^n$ – базис, сопряженный к $\{e_i\}_{i=1}^n$: $f^j(e_i) = \delta^j_i$

$\sphericalangle \quad f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^m(x_1 x_2 \ldots x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)} \cdot f^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot f^{\sigma(m)}(x_1 x_2 \ldots x_m) \sim$

$\sim C \cdot \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{[\sigma]} \xi^{\sigma(1)}_1 \xi^{\sigma(2)}_2 \ldots x^{\sigma(m)}_m$

$= C \cdot \delta^{\sigma(1)}_1 \delta^{\sigma(2)}_2 \ldots \delta^{\sigma(m)}_m = C \neq 0$

Нашли m-форму, которая не обнуляется. Противоречие

${}^{12\ldots m}F = m!(\text{Alt } {}^{12\ldots m}W) = m! \frac{1}{m!} \sum$

Замечание:
Если хотя бы одна m-форма отлична от нуля, то набор $\{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ

$V \in \Lambda^m \quad \sqsupset \{{}^{s_1 \ldots s_m}F\}$ – базис Λ^m

Замечание:
Для проверки ЛЗ достаточно проверить базисные формы

$\{x_i\}_{i=1}^n : \forall s_1 \ldots s_p, 1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leq n \quad {}^{s_1 \ldots s_p}F(x_1 \ldots x_m) = 0 \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛЗ

$$\sphericalangle \quad C = \begin{bmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \ldots & \xi^1_m \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \ldots & \xi^2_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \ldots & \xi^n_m \end{bmatrix} \longleftarrow \text{сколько ЛНЗ}$$
${}^{s_1}F \quad {}^{s_1 s_2}F \quad {}^{s_1 s_2 s_3}F$

Определение: ранг матрицы

Рангом матрицы C называется её наибольший порядок отличного от нуля минора

$\text{rg }(C) \quad \text{rank}(C) \quad \text{rk}(C)$

Пример:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & b_2 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_c \end{bmatrix}$$

1. $b_1 \neq 0 \Rightarrow \text{rank } C \geq 1$
2. $b_1 b_2 \neq 0 \Rightarrow \text{rank } C \geq 2$

$\vdots$

$l.\ \prod_{i=1}^l b_i \neq 0 \Rightarrow \text{rank } C \geq l$
$l+1.\ V\ L^{i_1 \ldots i_{l+1}}_{j_1 \ldots j_{l+1}} \Rightarrow \text{rank } C = l$

Определение: базисные столбцы (строки)

Базисными столбцами (строками) матрицы C называются столбцы (строки), входящие в базисный минор

Лемма:
Любая строка (столбец) матрицы C является линейной комбинацией базисных строк (столбцов)
Доказательство:
Очевидно. 😎

Теорема: (*о ранге*)

Ранг матрицы равен кол-ву ЛНЗ строк или столбцов матрицы

Свойства ранга:

1. `pass`
2.

5.1. Теорема Крамера и Кронекера-Капелли

$\sqsupset \sum_{i=1}^n \xi^1 a_1 = b$ – СЛАУ
$$A = [a_1 a_2 \ldots a_n], \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}$$
В матричной форме $A\xi = b \quad (*)$

Теорема: (*Крамер*)

$(*)$ совместна и определена $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $\{a_1 a_2 \ldots a_n\}$ – базис $K^n \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ $\Rightarrow \det\{a_1 \ldots a_n\} \neq 0$
$\Leftarrow$: $\det\{a_1 \ldots a_n\} = \det A \neq 0 \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ $\Rightarrow \max +$ ЛНЗ $\Rightarrow$ базис $\Rightarrow \exists$ решение $\forall b$
$\xi^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Теорема: (*Кронекера-Капелли*)

$\sphericalangle \quad A\xi = b \quad (*)$

$A, [A \mid b]$ – расширенная матрицы

Система $(*)$ совместна $\Leftrightarrow \text{rank } A = \text{rank } [A \mid b]$
Доказательство:
$\Rightarrow$: $(*)$ совместна $\Rightarrow b \in \langle a_1 \ldots a_n \rangle \Rightarrow$ добавление столбца b не меняет ранга A

$\Rightarrow \text{rank } A = \text{rank } [A \mid B]$

$\Leftarrow$: $\text{rank } [A \mid b] = \text{rank } A \Rightarrow b \in \langle a_1 \ldots a_n \rangle \Rightarrow$ совместна

5.2. Вычисление ранга

Лемма:
Гауссовы (элементарные) преобразования не меняют ранг матрицы

1. Сложение строк (не меняет определитель)
2. Умножение строки на число $\neq 0$ (определитель умножается на λ)
3. Перестановка строк (меняет только знак определителя)

Приведение к верхнему треугольному виду
$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \tilde{a}^1_1 & \tilde{a}^1_2 & \ldots & \tilde{a}^1_n \\ 0 & \tilde{a}^2_2 & \ldots & \tilde{a}^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & ? \end{bmatrix}$$
$\text{rank } A$ – кол-во отличных от нуля строк

6. Тензорное произведение

$\sqsupset X(K),\ Y(K)$ – ЛП над K

$\dim_K X = n$

$\dim_K Y = m$

$\sqsupset Z(K)$ – ЛП над K

$\sqsupset b : X \times Y \to Z$ – билинейное отображение

$\forall x_1, x_2, x \in X(K) \quad y_1, y_2, y \in Y(K) \quad \forall \lambda \in K$

- $b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$
- $b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$
- $b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$

Замечание:
$x \in X(K) \quad \exists\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K)$
$y \in Y(K) \quad \exists\{g_j\}_{j=1}^m$ – базис $Y(K)$
$x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i \quad y = \sum\limits_{j=1}^m \eta^j g_j$
$b(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, g_j) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n \xi^i \eta^j h_{ij}, \quad h_{ij} \in Z(K)$

Замечание:
$b(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = b(?,?)$

Лемма:
Следующие условия эквивалентны:

1. $\{b(e_i, g_j)\}_{i=1...n}^{j=1...m}$ – базис $Z(K)$
2. $\forall z \in Z(K) \quad \exists! z = \sum\limits_{i=1}^n b(e_i, y_i), \quad y_i \in Y(K)$
3. $\forall z \in Z(K) \quad \exists! z = \sum\limits_{j=1}^m b(x_j, g_j), \quad x_j \in X(K)$

Доказательство:
$(1) \Leftrightarrow (2)$:

$\{b(e_i, g_j)\}$ – базис $Z(K) \Rightarrow \forall z \quad z \overset{!}{=} \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \zeta^{ij} b(e_i, g_j) = \sum\limits_{i=1}^n b\left(e_i, \sum\limits_{j=1}^m \zeta^{ij} g_j\right) = \sum\limits_{i=1}^n b(e_i, y_i)$ $(1) \Leftrightarrow (3)$

аналогично.

Определение: тензорное произведение

$X(K),\ Y(K)$ – линейные пространства

$\otimes : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ – билинейное отображение, такое что:

Если $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K)$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ – базис $Y(K) \quad \Rightarrow \{e_i \otimes g_j\}_{i=1...n}^{j=1...m}$ – базис $T = X \otimes Y$

$T(K) = X(K) \otimes Y(K)$ – *тензорное произведение*

Замечание:

$x \in X(K),\ y \in Y(K)$

$x \otimes y = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \otimes \left(\sum\limits_{j=1}^m \eta^j g_j\right) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \underset{\text{координаты тензора } z}{\xi^i \eta^j} \underset{\text{базис } T = X \otimes Y}{(e_i \otimes j_j)}$

Определение: разложимый (факторизуемый) элемент

Элемент $z \in T$ называется разложимым, если $\exists x \in X(K), y \in Y(K)$, что $z = x \otimes y$, иначе z называется неразложимым

Пример:

Неразложимый: $z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$

Разложимый: $z = x_1 \otimes y_1 + x_1 \otimes y_2 = x_1 \otimes (y_1 + y_2)$

Замечание:

Общий вид элемента $Z(K)$:
$z = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m \zeta^{ij} e_i \otimes g_j$

Пример:

$n = 3,\ m = 2$
$[\zeta^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
$z = e_1 \otimes g_1 + 2e_1 \otimes g_2 + 3e_2 \otimes g_1 + e_2 \otimes g_2 + 4e_3 \otimes g_1 + 2e_3 \otimes g_2$

Замечание:

$\dim_K T = \dim_K X \cdot \dim_K Y$

Теорема: (*основная теорема тензорной алгебры*)

Для любого билинейного отображения $b : X \times Y \to Z$

$\exists!$ билинейное отбражение $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$ такое, что следующая диаграмма коммутативна

$X \times Y \xrightarrow{\otimes} X \otimes Y$

$b \searrow Z \swarrow \tilde{b}$

$\sphericalangle \quad b = \tilde{b} \circ \otimes$

Доказательство:

$\tilde{b}(e_i \otimes g_j) = b(e_i,\ g_j)$ и продолжим по линейности

Лемма:

$X \otimes Y \simeq Y \otimes X$

$X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$

Замечание:

Обобщение теоремы:

$\sqsupset X_1 ... X_p$ – ЛП над K

Для любого p-линейного отображения $\omega\ \exists!\ \tilde{\omega}$ – линейное, такое что следующая диаграмма коммутативна:
$x_1 \times ... \times x_p \xrightarrow{\otimes} x_1 \otimes ... \otimes x_p$

$\omega \searrow \quad z \quad \swarrow \tilde{\omega}$

Замечание:

$\sqsupset X^*(K),\ Y(K)$

$\sphericalangle \quad X^* \times Y \to X^* \otimes Y$

$(\alpha,\ y) \mapsto \alpha(*)y \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\sqsupset x \in X \quad x \mapsto \alpha(x)y$

$\boxed{X^* \otimes Y \simeq \mathrm{Hom}_K(X, Y)}$

$X^* \simeq \mathrm{Hom}\ (X, K)$

Замечание:

$X^*(K), Y^*(K)$

$X^* \times Y^* \to X^* \otimes Y^*$

$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta \in \mathrm{Hom}_K(X, Y; K)$

$\boxed{X^* \otimes Y^* \simeq \mathrm{Hom}\ (X, Y; K)}$

$\alpha \otimes \beta \leftrightarrow \omega \in \Omega_0^2(K) \quad \omega(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$

$X \times Y \to X \otimes Y \simeq \mathrm{Hom}(X^* Y^*; ???)$

$(x, y) \to x \otimes y$

$(x \otimes y)(\alpha, \beta) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$

$\alpha \in X^*$

$\beta \in Y^*$

$x \otimes y \leftrightarrow \omega \in \Omega_0^2(K)$

7. Пространство тензоров

Определение: пространство тезноров

$\sqsupset X(K)$ – ЛП над K

$\underbrace{X^* \otimes X^* \otimes ... \otimes X^*}_{p} \otimes \underbrace{X \otimes X \otimes ... \otimes X}_{q}$

Замечание:

Обозначение $T_q^p(K)(\Omega_p^q)$

Пример:

$T_0^1(K) = X^*$

$T_1^0(K) = X$

$T_1^1 = X^* \otimes X \simeq \mathrm{End}_K(X)$

Определение: тензор ранга (p, q)

Тензором ранга (p, q) называется элемент пространства тензоров $T_q^p(K)$

Пример:

$\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes ... \otimes \alpha^P \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_q \in T_q^p(K)$

7.1. Операции с тензорами

1. Транспонирование

   $t_{ij} : T_q^p \to T_q^p$

   $... \otimes x_i \otimes ... \otimes x_j \otimes ... \mapsto ... \otimes x_j \otimes ... \otimes x_i \otimes ...$

   $t^{ij} : T_q^p \to T_q^p$

   $... \otimes \alpha^i \otimes ... \otimes \alpha^j \otimes ... \mapsto ... \otimes \alpha^j \otimes ... \otimes \alpha^i \otimes ...$

2. Свёртка

   $\hat{c}_j^i : T_q^p \to T_{q-1}^{p-1}$

   $... \otimes \alpha^i \otimes ... \otimes x_j \otimes ... \mapsto ... \otimes \alpha^{i(x_j)} \in K \otimes ...$

3. $\sqsupset T$ – пр-во вех тензоров (всех рангов)

   $u = \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes ... \otimes \alpha^{p_1} \otimes x_1 \otimes ... \otimes x_{q_1}$

   $v = \beta^1 \otimes \beta^2 \otimes ... \otimes \beta^{p_2} \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_{q_2}$

   $u \otimes v = \alpha^1 \otimes ... \otimes \alpha^{p_1} \otimes \beta^1 \otimes ... \otimes \beta^{p_2} \otimes x_1 \otimes ... \otimes x_{q_1} \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_{q_2}$

Лемма:

$\Omega_p^q(K) \simeq T_q^p(K)$

Доказательство:
$\sqsupset \omega \in T_q^p(K) \Rightarrow \omega = \alpha^1 \otimes ... \otimes \alpha^p \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_q$
$\sqsupset W \in \Omega_p^q(K)$
$x_1, ..., x_p \in X; \quad \beta^1, ..., \beta^q \in X^*$
$W(x_1, x_2, ..., x_p, \beta^1, \beta^2, ..., \beta^q) \circeq \alpha^1(x_1)\alpha^2(x_2)...\alpha^p(x_p)\beta^1(y_1)\beta^2(y_2)...\beta^q(y_q)$

Замечание:
Базис $T_q^p(K)$: $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \otimes f^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ... \otimes e_{j_q}$
Базис $\Omega_p^q(K)$: $f^{i_1} \cdot f^{i_2} \cdot ... \cdot f^{i_p} \cdot \hat{e}_{j_1} \cdot \hat{e}_{j_2} \cdot ... \cdot \hat{e}_{j_q}$

Пример:

$\tilde{c}_j^i : X^* \otimes X \to K$

$\alpha \otimes x \mapsto \alpha(x)$

$\sphericalangle \quad T_p^0(K)$

$x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p$

$\mathrm{char}\ K = 0$

$\mathrm{Sym} : T_p^0(K) \to \Sigma_p(K)$

$\mathrm{Sym}\ (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(p)}$

$\mathrm{Alt} : T_p^0(K) \to \Lambda_p(K)$

$\mathrm{Alt}\ (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(p)}$

Замечание:
$\sqsupset \omega \in T_q^p(K)$
$v = \underbrace{\tilde{v}_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}}_{\substack{\text{коорд.тензора} \\ \omega \text{ в базисах } \{e_i\}_{i=1}^n \\ \text{и} \{f^j\}_{j=1}^n}} f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \otimes f^{i_p} \otimes \hat{e}_{j_1} \otimes ... \otimes \hat{e}_{j_q}$

$v = \tilde{v}_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q} \ {}_{j_1 ... j_q}^{i_1 ... i_p} W$

$(1, 2, 3)^T \leftrightarrow 1 + 2t + 3t^2$

7.2. Тензорная алгебра

$\sqsupset X(K)$ – ЛП над K

$\sphericalangle \quad T_q^p(K) = \left(\bigotimes\limits_{i=1}^p X^*\right) \otimes \left(\bigotimes\limits_{j=1}^q X\right)$

$\sphericalangle \quad T(K) = \bigoplus\limits_{p=0}^\infty \bigoplus\limits_{q=0}^\infty T_q^p(K)$

Пример:

$\sqsupset X, Y$ – ЛП

$X \oplus Y$ – ЛП

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

$(T, +, \otimes, \lambda)$ – тензорная алгебра

$\omega_{01} \in T_1^0, v_{01} \in T_1^0 \Rightarrow \omega_{01} \otimes v_{01} \in T_2^0$

$x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$

$(\Lambda, +, \wedge, \lambda)$ – алгебра антисимм. тензоров

$(\Sigma, +, \vee, \lambda)$ – алгебра симметр. тензоров

8. Определитель линейного оператора

$\sqsupset X(K),\ Y(K)$ — ЛП над K

$\sphericalangle \quad \varphi : X(K) \to Y(K)$ — линейное

$\forall\ x_1,\ x_2,\ x \in X(K)$

$\varphi(X_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

Замечание:
$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\mathrm{Hom}_K(X, X) =: \mathrm{End}_K(X)$

8.1. Тензорное произведение операторов

Определение: тензорное произведение линейных операторов

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X),\ \psi \in \mathrm{End}(Y)$

$\chi : \varphi \otimes \psi$ — *тензорное произведение линейных операторов*, если

$\chi : X \otimes Y \to X \otimes Y$

$\chi(x \otimes y) \mapsto (\chi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$

Лемма:
$\chi \in \mathrm{End}_{X \otimes Y}$

Доказательство:

- $\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \chi(x \otimes y_1 + x \otimes y_2)$
  $\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1 + y_2) = \varphi(x) \otimes \big(\psi(y)_1 + \psi(y_2)\big) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1) + \psi(x) \otimes \psi(y_2) =$
  $= \chi(x \otimes y_1 + \chi(x \otimes y_2))$

$\chi(\lambda x \otimes y) = \chi((\lambda x) \otimes y) = \varphi(\lambda x) \otimes \psi(y) = \lambda[\varphi(x) \otimes \psi(y)] = \lambda \cdot \chi(x \otimes y)$

8.2. Матрица линейного оператора

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X $\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

$e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_i^j e_j$

Определение: матрица линейного оператора

Набор $A_\varphi = \left\| a_i^j \right\|$ — матрица линейного оператора в базисе $(e_i)_{i=1}^n$

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \scriptstyle\varphi e_1 & \scriptstyle\varphi e_2 & \scriptstyle\dots & \scriptstyle\varphi e_n \end{array} \end{array}$$

$\sqsupset \{g_l\}_{l=1}^m$ — базис $Y(K)$

$\sqsupset \psi \in \mathrm{End}_K(Y)$

$\sqsupset B_\psi = \|b_l^k\|$ — матрица ψ в базисе $\{g_l\}_{l=1}^m$

Замечание:

$\left.\begin{array}{l} \{e_i\}_{i=1}^n \text{ — базис } X \\ \{g_j\}_{j=1}^m \text{ — базис } Y \end{array}\right. \Rightarrow \{e_i \otimes g_j\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ — базис $X \otimes Y$

$(\varphi \otimes \psi)(e_i \otimes g_j) = \varphi(e_i) \otimes \psi(g_j) = \left(\sum\limits_{k=1}^n a_i^k e_k\right) \otimes \left(\sum\limits_{l=1}^m\right) b_j^l g_l = \sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{l=1}^m a_i^k b_j^l (e_k \otimes g_l)$

$C_{\varphi \otimes \psi} = \left\| a_i^k \otimes b_j^l \right\|_{i,k=1\dots n}^{j,l=1\dots m}$ — матрица тензорного произведения.

В кронекеровской форме:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 B_\psi & a_2^1 B_\psi & \dots \\ a_2^1 B_\psi & a_2^2 B_\psi & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

8.3. Тензорная степень

$\sqsupset X(k)$ — ЛП над K

$\varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

$\sphericalangle \quad T_p(K) = \bigotimes\limits_{i=1}^n X := \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{p}$

Замечание:
Элементы (разложимые) имеют вид:

$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots x_p$

Определение: тензорная степень

Тензорная степень оператора φ — линейное отображение вида:

$$\varphi^{\otimes p} : \bigotimes_{i=1}^p X \to \bigotimes_{i=1}^p X$$

$$\varphi^{\otimes p}\big(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes_p\big) = \varphi x_1 \otimes \varphi x_2 \otimes \dots \otimes \varphi x_p$$

8.4. Внешняя степень оператора

$\sphericalangle \quad \Lambda^p := \underbrace{X \wedge X \wedge \dots \wedge X}_{p} = \bigwedge\limits_{i=1}^p X$

$\dim_K X = n \quad \Rightarrow \quad \dim_K \Lambda^p = C_n^p$

Замечание:
Элементы Λ^p имеют вид:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots x_p$$

Определение: определитель набора векторов

Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется величина такая, что в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет место

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 x_2 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма:
$\det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n]$

Доказательство:
$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \xi_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_n^{i_n} e_{i_n} = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_3^{\sigma(3)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

Замечание:
$\det[x_1 \dots x_n]$ зависит от базиса

$\sqsupset z \in \Lambda^n \Rightarrow z = \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

$\{e'_j\}_{j=1}^n \xleftarrow{T} \{e_i\}_{i=1}^n, e'_j = \sum\limits_{i=1}^n \tau_j^i e_i$
$e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n = \tau_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \tau_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \tau_n^{i_n} e_{i_n} = \tau_1^{i_1} \tau_2^{i_2} \dots \tau_n^{i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} =$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \tau_1^{\sigma(1)} \tau_2^{\sigma(2)} \dots \tau_n^{\sigma(n)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

Определение: внешняя степень оператора

Внешняя степень оператора φ — лирhiйное отображение вида:

$$t\varphi(\wedge p) : \bigwedge_{i=1}^p X \to \bigwedge_{i=1}^p X$$

$$\varphi^{\wedge p}\big(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p\big) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_p$$

Определение: определитель линейного оператора

Определитель линейного оператора φ — величина $\det\varphi$, такая, что:

$$\varphi(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \dots \wedge \varphi e_n = \det\varphi e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма:
$\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(X) \Rightarrow \det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$

Доказательство:
$(\varphi \circ \psi)(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = (\varphi \circ \psi)e_1 \wedge (\varphi \circ \psi)e_2 \wedge \dots \wedge (\varphi \circ \psi)e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \varphi(\psi(e_2)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) =$
$= \varphi^{\wedge n}(\psi e_1 \wedge \psi e_2 \wedge \dots \wedge \psi e_n = \det\varphi \cdot (\psi e_1 \wedge \psi e_2 \wedge \dots \wedge \psi e_n) = \det\psi \cdot \psi^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) =$
$= \det\varphi \cdot \det\psi(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$

Замечание:
Определитель $\det\varphi$ равен определителю матрицы A_φ соответствующего оператора в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$

Лемма:
$\det\varphi$ сто пудов не зависит от базиса

Доказательство:
$\sqsupset z \in \Lambda^n \quad \Rightarrow \quad \varphi^{\wedge n} z = \det\varphi \cdot z$

если $z = \underbrace{\alpha\ \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n}_{\text{верно}}}_{\text{верно}}$

ДЗ:
$\tilde{A}\varphi - SA_\varphi T \qquad \det S = (\det T)^{-1}$

9. Линейный оператор

9.1. Основные определения

$\sqsupset X(K), Y(K)$ — ЛП над K

$\sphericalangle \quad X(K) \to Y(K)$ — отображения

$\forall x, x_1, x_2 \in X(K) \quad \forall \alpha \in K$

1. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Пример:

1. $\sqsupset I : X(K) \to X(K)$ — тождественный оператор
   $\forall x \in X(K) \quad Ix = x$
   $\mathrm{Ker}\ I = \{0\}$
   $\mathrm{Im}\ I = X$
2. $\Theta : X(K) \to X(K) :$
   $\forall x \in X(K) \quad \Theta x = 0_x$
   $\mathrm{Ker}\ \Theta = \{X\}$
   $\mathrm{Im}\ \Theta = \{0\}$
3. $\sqsupset f \in X^*(\mathbb{R})$
   $f : X \to \mathbb{R}$
   $\dim_K \mathrm{Ker}\ f = n - 1$
   $\dim_K \mathrm{Im}\ f = L$
4. $X(K) = L \oplus M \Rightarrow \forall x \in X$
   $\sphericalangle \quad \mathcal{P}_L^{\|M}(x) = x_L$ — проектор,
   аналогично $\mathcal{P}_M^{\|L}(x) = x_M$
   $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_L^{\|M} = M$
   $\mathrm{Im}\ \mathcal{P}_L^{\|M} = L$
5. $X = K[x]_n$
   $\sphericalangle \quad D : X(K) \to X(K)$
   $\forall p \in K[x]_n \quad (Dp)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$
   $\mathrm{Ker}\ D = \left\{q \in K[x]_n \mid \deg q = 0\right\}$
   $\mathrm{Im}\ D = K[x]_{n-1}$
6. $X(K) = \mathrm{Mat}_K(n)$
   $\tau : X(K) \to X(K)$
   $\forall A \in \mathrm{Mat}_K(n) \quad \tau(A) = A^T$
   $\mathrm{Ker}\ \tau = \{0\}$
   $\mathrm{Im}\ \tau = \mathrm{Mat}_K(n)$
7. $X = C[a, b]$в
   $$(Lf)(x) = \int_a^b \underbrace{l(x, y)}_{\substack{\text{ядро инт.}\\ \text{оператора}\\ \text{(core)}}} f(y)\,\mathrm{d}y$$
   Пример:
   $f(x) = \sin x$
   $l(x, y) = e^{x+y}$
   $$(Lf)(x) = \int_0^\pi e^{x+y} \sin y\,\mathrm{d}y$$

Замечание:
Обозначение $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y), \varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

Определение: *Ядро линейного оператора*

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{K(X,Y)}$ — множество: $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in X(K) \mid \varphi(x) = 0_Y\}$

Лемма:
$\mathrm{Ker}\ \varphi \leq X(K)$

Определение: *Образ линейного опреатора*

Образ линейного оператора — это множество $\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in X(K)\} = \varphi(X)$

Лемма:
$\mathrm{Im}\ \varphi \leq Y(K)$

9.2. (Первая) теорема о ядре и образе

$\sqsupset L(K) \leq X(K)$ — подпространство

$\sphericalangle \quad X / L$ — фактор-пространство вида $\left\{\underbrace{x + L}_{\overline{x}} \mid x \in X\right\}$

$\sqsupset \left\{\overline{v}_j\right\}_{j=1}^m$ — базис фактора X / L

$\uparrow$ ЛНЗ в $X / L \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^m \lambda^j \overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \lambda^j = 0$

$\uparrow$ ПН

Переформулируем:

Мы знаем, что $\overline{v}_j = v_j + L,\ \overline{0} = L$, тогда

$\boxed{\sum\limits_{j=1}^m \lambda^j v_j \in L \Leftrightarrow \lambda^j = 0}\ (*)$

Определение: ЛНЗ относительно L

Набор $\left\{v_j\right\}_{j=1}^m$, обладающий свойством (*)

Определение: набор “порождает” X относительно L

$\left\{v_j\right\}_{j=1}^m$ порождает X относительно $L \Leftrightarrow$ любой элемент может быть представлен в виде ЛК $\left\{v_j\right\}_{j=1}^m$ и элементов из L

Теорема: *следующие условия эквивалнтны*

1. $\left\{v_j\right\}_{j=1}^m$ порождает X относительно L
2. $\left\{\overline{v}_j\right\}_{j=1}^m$ — базис X / L
3. $X = \langle v_1 ... v_m \rangle_K \oplus L$

Замечание:
$\dim_K X = \dim_K L + \dim_K X / L \quad (**)$

$\sqsupset \varphi : X(K) \to Y(K)$

$X / \mathrm{Ker} \simeq \mathrm{Im}\ \varphi$ *(теорема об изоморфизме)*

Теорема: (О ядре и образе)

$\dim_K \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim_K \mathrm{Im}\ \varphi = \dim_K X$

Доказательство:
В формуле $(**)$ положим $L = \mathrm{Ker}\ Y$ и вспомним теорему об изоморфизме

Замечание:
$\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ — линейное пространство над K

$\sqsupset \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{K(X,Y)}$

1. $\varphi = \psi \Leftrightarrow \forall x \in X(K) \quad \varphi(x) = \psi(x)$
2. $\zeta = \varphi + \psi$, если
   $\zeta(x) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$
3. $\chi = \lambda \cdot \varphi$, если
   $\chi(x) = (\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$

$? \quad \dim_K \mathrm{Hom}(X, Y) = \ ?$

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис $X(K)$

$\sqsupset \left\{g_j\right\}_{j=1}^m$ — базис $Y(K)$

$\varphi(e_i) = \sum\limits_{j=1}^m a_i^j g_j$

Определение: матрица линейного оператора

Набор $\left\|a_i^j\right\| = A_\varphi$ называется матрицей линейного оператора в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{g_j\right\}_{j=1}^m$

$$\sphericalangle \quad x \in X(K) \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \ \Rightarrow \ \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi^i a_i^j g^j$$

$$\varphi(x) = y \in Y(K) \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j \Rightarrow \eta^j = \sum_{i=1}^n a_i^j \xi^i \Rightarrow \eta = A_\varphi \xi$$

Определение: оператор матричной единицы

$\left\{{}_j^i\varepsilon\right\} :\ {}_j^i\varepsilon(x) = \xi^i g_j,\ x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i$

Лемма:
${}_j^i\varepsilon \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

Доказательство:
$\forall x_1, x_2 \in X(K) : \quad {}_j^i\varepsilon(x_1 + x_2) = (\xi_1 + \xi_2)i g_j = \xi_1^i g_j + \xi_2^i g_j = {}_j^i\varepsilon(x_1) + {}_j^i\varepsilon(x_2)$

$\forall x \in X(K) \quad \forall \lambda \in K : \quad {}_j^i\varepsilon(\lambda x) = (\lambda\xi)^i g_j = \lambda \cdot \xi^i g_j = \lambda {}_j^i\varepsilon(x)$

Замечание:
$$\begin{array}{cccc} A_\varphi = [\varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$
координаты в базисе $Y(K)$

${}_j^i\varepsilon(e_k) = e_k^i g_j = \delta_k^i g_j$

Теорема:
$\left\{{}_j^i\varepsilon\right\}_{i=1...n}^{j=1...m}$ — базис $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$

Доказательство:
ПН:

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$$\sphericalangle \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi^i a_i^j g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i^j \cdot {}_j^i\varepsilon(x) \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m {}_j^i\varepsilon \cdot a_i^j$$

ЛНЗ:

$$\sphericalangle \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m {}_j^i\varepsilon \beta_i^j = \Theta \quad \mid e_k$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m {}_j^i\varepsilon(e_k) \beta_i^j = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_k^i g_j \beta_i^j = 0$$

$$\sum_{j=1}^m g_j \beta_k^j = 0 \Rightarrow \beta_k^j = 0\ \forall j$$

${}_j^i\varepsilon$ — базис $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$

Замечание:
$\dim_K \mathrm{Hom}\ (X, Y) = mn$

Замечание:
$\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

$$\begin{array}{ccc} \sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n & \xrightarrow{T} & \left\{\tilde{e}_j\right\}_{j=1}^n \text{ — базисы } X \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_\varphi & & \tilde{A}_\varphi \end{array}$$

$\boxed{\tilde{A}_\varphi = S A_\varphi T}$

Доказательство:

$$\varphi(\tilde{e}_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \tau_j^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \tau_j^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tau_j^i a_i^s e_s$$

$$\varphi(\tilde{e}_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_j^i \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{a}_j^i \tau_i^s e_s$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tau_j^i a_i^s e_s = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{a}_j^i \tau_i^s e_s$$

$$A_\varphi T = T \tilde{A}_\varphi \Rightarrow \tilde{A}_\varphi = S A_\varphi T$$

“Представьте себе, что у вас все гораздо хуже”

Д/З:

$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{T_1} \left\{\tilde{e}_j\right\}_{j=1}^n$

$\{g_s\}_{s=1}^m \xrightarrow{T_2} \{\tilde{g}_t\}_{t=1}^m$

$A_\varphi \xrightarrow{?} \tilde{A}_\varphi$

10. Алгебра линейных операторов

$\sqsupset X(K),\ Y(K),\ Z(K)$

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y),\ \psi \in \mathrm{Hom}_K(Y, Z)$

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

Определение: коядро

$Y / \mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{coker}\ \varphi$ — коядро

Определение: *композиция операторов*

Композицией операторов φ и ψ называется отображение $\chi = \psi \circ \varphi$, такое что

$\forall x \in X(K) \quad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$

Лемма:
$\chi \in \mathrm{Hom}_K(X, Z)$

Доказательство:
$\chi(x_1 + x_2) = (\psi \circ \varphi)(x_1 + x_2) = \psi(\varphi(x_1 + x_2)) = \psi(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) + \psi(\varphi(x_2)) = \chi(x_1) + \chi(x_2)$

$\chi(\lambda x) = (\psi \circ \varphi)(\lambda x) = \psi(\varphi(\lambda x)) = \psi(\lambda\varphi(x)) = \lambda\psi(\varphi(x)) = \lambda\chi(x)$

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X

$\sqsupset \left\{g_j\right\}_{j=1}^m$ — базис Y

$\sqsupset \{h_s\}_{s=1}^p$ — базис Z

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{\varphi \leftrightarrow A_\varphi} \left\{g_j\right\}_{j=1}^m$

$\left\{g_j\right\}_{j=1}^m \xrightarrow{\psi \leftrightarrow B_\psi} \{h_s\}_{s=1}^p$

$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{\chi \leftrightarrow ?\ C_\chi} \{h_s\}_{s=1}^p$

$$\chi(e_i) = (\psi \circ \varphi)(e_i) = \psi(\varphi(e_i)) = \psi\left(\sum_{j=1}^n a_i^j g_j\right) = \sum_{j=1}^m a_i^j \psi(g_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^p a_i^j b_j^s h_s$$

$$\chi(e_i) = \sum_{s=1}^p c_i^s h_s$$

$$\Rightarrow c_i^s = \sum_{j=1}^m a_i^j b_j^s$$

$\boxed{C_\chi = B_\psi A_\varphi}$

$\varphi \in \mathrm{End}_{K(X)}$

Свойства “$\circ$” на $\mathrm{End}_K(X)$:

1. $\forall \varphi, \psi, \chi \in \mathrm{End}_K(X) \quad \varphi \circ (\psi \circ \chi) = (\varphi \circ \psi) \circ \chi$
2. $\exists I \in \mathrm{End}_K(X) : \forall \varphi \in \mathrm{End}_K(X) \quad I \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ I$

Замечание:
$(\mathrm{End}_K(X), \circ)$ — моноид + абелева группа, а значит кольцо операторов над $X(K)$, а значит $\mathrm{End}_{K(X)}$ — алгебра эндоморфизмов пространства X.

$\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ — некоммутативная алгебра

Замечание:
A — алгебра (например $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$)

Кватернионы

$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$

$q = z + jw,\ z, j \in \mathbb{C}$

$i\ j \quad i \cdot j =: k$

$q = a + bi + cj + dk$

Таблица Кэли для произведения:

$\cdot$	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Об алгебре

$\sqsupset \left\{e_j\right\}_{j=1}^n$ — базис алгебры A

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^u e_j$$

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \overbrace{(e_i \cdot e_j)}^{= \sum_{s=1}^n m_{ij}^s e_s}$$

$\left\|m_{ij}^s\right\|$ — структурные константы алгебры

$\mathrm{End}_K(X)$ — алгебра

$?\ (\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$

$?\ \varphi \circ (\lambda\psi) = (\lambda\varphi) \circ \psi = \lambda(\varphi \circ \psi)$

$\mathrm{End}_K(X) \simeq \mathrm{Mat}_K(n), \quad n = \dim_k X$

$\varphi \quad \left\{e_j\right\}_{j=1}^n \quad {}_j^i\varepsilon \quad \varphi = {}_j^i\varepsilon a_i^j \longrightarrow A = \left\|a_i^j\right\|$

$\varphi \longleftrightarrow A_\varphi,\ \psi \longleftrightarrow B_\psi \Rightarrow \varphi + \psi \longleftrightarrow A_\psi + B_\psi,\ \varphi \circ \psi \longleftrightarrow A_\varphi \cdot B_\psi$

$\mathrm{Mat}_K(n)$ — алгебра матриц $n \times n$

$\mathcal{P}_L x = \mathcal{P}_L(x_L + x_M) = x_L$

Обратный оператор

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

${}^?\sphericalangle \quad \tilde{\varphi} : \mathrm{Im}\ \varphi \longrightarrow X$ — отображение

$\forall x \in X \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi)x = x$

$\forall y \in \mathrm{Im}\ \varphi \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi)y = y$

Получилось, что $\tilde{\varphi}$ — линейный операторр:

$\sphericalangle \quad \varphi(\tilde{\varphi}(y_1) + \tilde{\varphi}(y_2)) = \varphi(\tilde{\varphi}(y_1)) + \varphi(\tilde{\varphi}(y_2)) = y_1 + y_2$

$\tilde{\varphi}(y_1) + \tilde{\varphi}(y_2) = \tilde{\varphi}(y_1 + y_2)$

Определение: Обратимый оператор

Оператор φ называется обратимым, если существует оператор $\tilde{\varphi}$, обладающий всеми перечисленными выше свойствами

Определение: Обратный оператор

Оператор φ^{-1} называется обратным к оператору φ, если:

1. $\forall x \in X \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)x = x \Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$
2. $\forall y \in Y \quad (\varphi \circ \varphi^{-1})y = y \Leftrightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y$

Лемма:
Чтобы существовал обратный оператор, необходимо, чтобы $Y \simeq X$

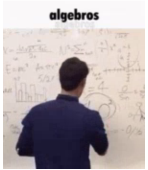
Доказательство:
$\exists \varphi^{-1} \Rightarrow \varphi$ — биекция $\Rightarrow \varphi$ — изоморфизм

Теорема: $\exists\ \varphi^{-1} \Leftrightarrow$ выполнено одно из (эквивалентных) условий:

1. $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{0\}$
2. $\dim_K \mathrm{Im}\ \varphi = \dim_K X$

(-_-)$^{z\ z\ z...}$

```
    z z z...
(_ _ )
```



залил на гит прямо со спунами

11. Обратная матрица

11.1. Общие положения

$A(K)$ – алгебра над K

Определение: унитальная алгебра

Алгебра A(K) – *унитальная*, если

$\exists\ 1 \in A(K)$

$\forall a \in A(K): \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

Примеры единиц:

1. $\mathbb{R} \quad 1_{\mathbb{R}} = 1$
2. $\mathbb{C} \quad 1_{\mathbb{C}} = (1, 0) \leftrightarrow 1 + 0_i$
3. $\mathbb{H} \quad 1_{\mathbb{H}} = (1, 0p, 0) \leftrightarrow 1 + 0_i + 0_j + 0_k$
4. $K[x] \quad 1_{K[x]} = 1 + 0t + 0t^2 + ...$
5. $X, \mathrm{End}_{K(X)} \quad 1 = \mathrm{id}_x$
6. $\mathrm{Mat}_K(n) \quad 1 = E = \mathrm{diag}\{1\ 1\ ...\ 1\}$

Определение: обратный элемент

Элемент b называется обратным к элементу $a \in A$, если

$ab = 1_A$ (правый обратный)

$ca = 1_A$ (левый обратный)

Замечание:
Если b является правым обратным и левым обратным, то

$b = c =: a^{-1}$

11.2. Обратимость в $\mathrm{Mat}_k(n)$

$\sqsupset A \in \mathrm{Mat}_K(n)$

Определение: обратимая матрица

A – *обратимая матрица*, если

$\exists\ B, C \in \mathrm{Mat}_K(n): \quad AB = E \quad CA = E$

Замечание:
$B = C =: A^{-1}$

Теорема:
$\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Замечание:
A, если $\det A \neq 0$ называется *невырожденной*

Доказательство:
$\Rightarrow \quad \sqsupset \exists B: \quad AB = E$

$A = \|a^i_j\| \quad B = \|b^i_j\| \quad E = \|\delta^i_j\|$ – *символ Кронекера*

$\sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j \cdot b^j_k = \delta^i_k, \quad \sqsupset k$ – фиксированный

$\sqsupset b^j_k =: \xi^j, \quad \delta^i_k = c^i = \begin{pmatrix} 0\ 0\ ...\ \overset{\overset{k}{\vee}}{1}\ 0\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j \cdot \xi^j = c^i$ – СЛАУ на k-й столбец B

- неоднородная (по построению)
- совместная
- определенная (по условию)

$\Rightarrow$ Система Крамера

$\Leftrightarrow$ по теореме Крамера $\det\|a^i_j\| = \det A \neq 0$

Замечание:
$\exists\ c? \quad CA = E \quad A^T C^T = E^T = E \quad \det A^T = \det A \neq 0$

11.3. Вычисления обратной матрицы

11.3.1. Метод Крамера

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$, где $\tilde{A}$ – матрица алгебраического дополнения матрицы A

$A = \|a^i_j\|, \ \tilde{A} = \|A^i_j\|, \ A^i_j = (-1)^{i+j} M^i_j$

$(\star)$ – система Крамера

$\xi^j = \frac{\Delta j}{\Delta} = \frac{\det(c \to a_j)}{\det A}$

$$\det(c \to a_j) = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} ... & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & \vdots & ... & ... \\ ... & ... & 1 & ... & ... \\ ... & ... & \vdots & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array} & \end{array} = A^k_j$$

11.3.2. Метод Гаусса

$(A|E) \underset{\text{преобразования Гаусса (элементарные)}}{\longrightarrow} (E|A^{-1})$

Элементарные преобразования

1. перестановка строк
2. умножение строки на число $\neq 0$
3. составление линейной комбинации строк

$\sphericalangle \quad A \cdot B = C \longleftrightarrow C^i_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j b^j_k$

$$j \longrightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} \longleftarrow j$$

Лемма:

1. Перестановка строк в A ведёт ту же перестановку в C
2. Если строку A умножить на $\lambda \in K \Rightarrow$ то же происходит в C
3. Составление линейной комбинации строк в $A \Rightarrow$ то же в матрице C

Доказательство:
Очевидно.

Определение: элементарная матрица

Q – *элементарная* матрица, если получена из матрицы E элементарными преобразованиями

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_1\underline{Q'} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right]$$

$${}_2\underline{Q''} = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_3\underline{Q'''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & ... \\ \lambda & 1 & 0 & ... & ... \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$A \mapsto \underbrace{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2} ... Q_1}_{A^{-1}} A = E$

$E \mapsto A^{-1} E = A^{-1}$

12. Сопряженный оператор

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$

$\sqsupset X^*$ – пространство, сопряженное X

$\sqsupset Y^*$ – пространство, сопряженное Y

$\sphericalangle \quad \varphi^*: \quad \forall f \in Y^* \quad \forall x \in X$

$$\boxed{f(\varphi x) = (\varphi^* f)(x)}$$

Замечание: $\varphi^*: Y^* \to X^*$

Определение: сопряженный оператор

Линейный оператор φ^* называется сопряженным к φ

Лемма: φ^* – линейное отображение

$\sphericalangle \quad \varphi^*(f + g) = \varphi^* f + \varphi^* g$

$\forall x \ [\varphi^*(f + g)](x) = (f + g)(\varphi x) = f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)) = (\varphi^* f)(x) + (\varphi^* g)(x) = (\varphi^* f + \varphi^* g)(x)$

$\sphericalangle \quad \varphi^*(\lambda f) = \lambda(\varphi^* f)$

$\forall x \ [\varphi^*(\lambda f)](x) = (\lambda f)(\varphi(x)) = \lambda(\varphi^* f)(x)$

Замечание: $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(Y^*, \ X^*)$

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^{n}$ – базис $X(K)$

$\sqsupset \{g_i\}_{i=1}^{m}$ – базис $Y(K)$

$\varphi \longleftrightarrow A_\varphi$

$\sqsupset \{f^s\}_{s=1}^{n}$ – базис $X^*(K)$

$\sqsupset \{h^t\}_{t=1}^{m}$ – базис $Y^*(K)$

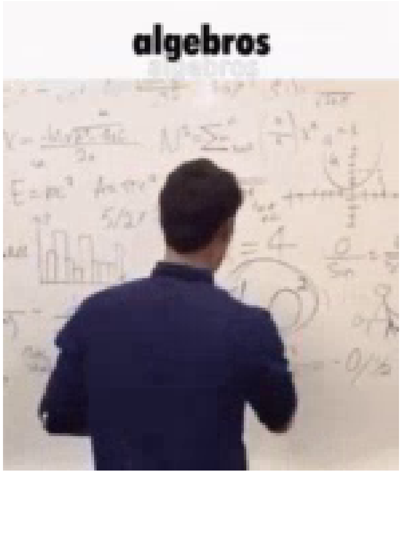
$\varphi^* \longleftrightarrow A_{\varphi^*}$

$A_{\varphi^*} \overset{?}{=} ...A_\varphi$

$f(\varphi(x)) = \sum\limits_{t=1}^{m} \eta_t \sum\limits_{i=1}^{n} a^t_i \xi^i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{t=1}^{m} \eta_t a^t_i \xi^i = \eta^T A_\varphi \xi$

$f \longleftrightarrow (\eta_1 \eta_2 ... \eta_m)$

$x \longleftrightarrow (\xi^1 \xi^2 ... \xi^n)^T$



13. Алгебра скалярных полиномов

$\sqsupset \varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

Определены:

- $\varphi + \varphi = 2\varphi$
- $\lambda\varphi, \quad \lambda \in K$
- $\varphi^0 = \mathrm{id}_X, \varphi^i = \varphi^{i-1} \circ \varphi$

Замечание:
В $\mathrm{End}_K(X)$ возникает кольцо R_φ:

$$R_\varphi = \{p(\varphi) \mid p \in K[x]\} =: K[\varphi]$$

Замечание:
$\sqsupset p \in K[x] : p(\varphi) = \Theta$

13.1. Основные конструкции

$K[x] = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n \mid a_n \in K, N \in \mathbb{N} \right\}$ – кольцо многочленов над K

$\forall p, q \in K[x]$:

- $p + q \in K[x]$
  $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$
- $\lambda p \in K[x]$
  $(\lambda p)(x) = \lambda p(x)$
- $pq \in K[x]$
  $(pq)(x) = p(x)q(x)$

Получилась коммутативная алгебра.

- $0 \in K[x] \quad 0(t) = 0 + 0x + \ldots$
  $1 \in K[x] \quad 1(t) = 1 + 0x + \ldots$

Определение: идеал в $K[x]$

Идеалом в алгебре $K[x]$ называется линейное подпространство J, которое обрадает следующим свойством:

$$\forall p \in K[x] \quad \forall q \in K \quad pq \in J$$

$$JK[x] \subseteq J, 1 \in K[x] \Rightarrow JK[x] = J$$

Пример:

1. $J_\alpha = \{p \in K[x] \mid p(\alpha) = 0\}$
2. $J_q = qK[x] = \{p \in K[x] \mid p \vdots q\}$
   $J_\alpha = (x - \alpha)K[x]$

Определение: главный идеал

Идеал вида $J_q = qK[x]$ называется *главным идеалом*:

$$(q) = J_q = \{qp \mid p \in K[x]\}$$

Контрпример: не главный идеал:

$(q_1 q_2) = \{p_1 q_1 + p_2 q_2 \mid p_1, p_2 \in K[x]\}$

Теорема:

$K[x]$ – кольцо главных идеалов (PID)

Доказательство:

$K[x]$ – евклидово кольцо: $\deg p$

$\forall p, q \in K[x] \quad \exists p = gq + r, \deg r < \deg q$

$\sphericalangle \quad J \trianglelefteq K[x]$

$\sqsupset q \in J, \deg q$ – наименьший в J

$\sphericalangle \quad p \in J \Rightarrow \exists! p_{\in J} = \underbrace{gq}_{\in K} + r_{\in J}, \quad \deg r < \deg q$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow p = g \cdot q \in q \cdot K[x]$

$\sphericalangle \quad J_q = qK[x]$

Определение: порождающий многочлен идеала

Многочлен q называется порождающим многочленом идеала J_q

Контрпример: Не PID: $K[x, y]$

$(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \ldots$

Замечание:
$J_q \equiv (q)$ – существует мин. многочлен $p = \min(J_q)$

Лемма:
$q \sim p \ (\exists \alpha \in K[x]^* : p = \alpha q)$

Доказательство:
$q \vdots p$, т.к. $p - \min$

$p \vdots q \Leftarrow p \in qK[x] \quad \exists g \in K[x] : p = qg$

Замечание:
q будем называть минимальным порождающим полиномом идеала J_q

13.2. Операции с идеалами

$\sqsupset \alpha, \beta \trianglelefteq K[x]$

Определение: сумма идеалов

$\alpha + \beta = \{p = p_1 + p_2 \mid p_1 \in \alpha, p_2 \in \beta\}$

Лемма:
$\alpha + \beta \trianglelefteq K[x]$

Доказательство:
$\sqsupset q \in K[x], p \in \alpha + \beta \Rightarrow p = p_1 + p_2$

$qp = \underbrace{qp_1}_{\in\alpha} + \underbrace{qp_2}_{\in\beta} = \widetilde{p_1} + \widetilde{p_2}$

$\sqsupset p, p' \in \alpha + \beta \Rightarrow p = p_1 + p_2, p' = p_1' + p_2' \Rightarrow p + p' = (p_1 + p_1') + (p_2 + p_2')$

Определение: пересечение идеалов

$\alpha \cap \beta = \{p \mid p \in \alpha, p \in \beta\}$

Лемма:
$\alpha \cap \beta \trianglelefteq K[x]$

Доказательство:
$\sqsupset q \in K[x], p \in \alpha \cap \beta \Rightarrow p \in \alpha \cap p \in \beta$

$qp \in \alpha, qp \in \beta \Rightarrow qp \in \alpha \cap \beta$

Определение: произведение идеалов

$\alpha \cdot \beta = \{\sum p_i q_i \mid p_i \in \alpha, q_i \in \beta\}$

$\alpha \cdot \beta \subseteq \alpha \cap \beta$

$\alpha \cdot \beta = \alpha \cap \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

Определение: радикал идеала

$r(\alpha) = \sqrt{\alpha} = \{p \in K[x] \mid p^n \in \alpha, n \in \mathbb{N}\}$

Определение: частное идеалов

$(a : b) = \{p \in K[x] \mid \beta p \subseteq \alpha\}$

Лемма:
$\sqsupset \alpha = (p), \beta = (q)$, тогда $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow p \vdots q$

Доказательство:
$p \in \alpha \subseteq \beta \Rightarrow p \in \beta = qK[x] \Rightarrow \exists g \in K[x], p = gq$

Лемма:
$\alpha = (p), \beta = (q) \Rightarrow \alpha + \beta = (r), r = \gcd(p, q)$

Доказательство:
$\tilde{r} = \gcd(p, q)$

$r \in \alpha + \beta$, но $\alpha + \beta \ni \alpha \Rightarrow p \vdots r$

$\alpha + \beta \ni \beta \Rightarrow q \vdots r$

$\Rightarrow r = \mathrm{cd}(p, q)$

$p \vdots \tilde{r}, q \vdots \tilde{r} \Rightarrow \tilde{r} \in \alpha + \beta, \tilde{r} = p_{\vdots r} a + q_{\vdots r} b \Rightarrow \tilde{r} \vdots r \Rightarrow \tilde{r} \sim r$

Пример:

$\alpha = (8), \beta = (6) \Rightarrow \alpha + \beta = (2)$

$\alpha = (5), \beta = (4) \Rightarrow \alpha + \beta = (1) = \mathbb{Z}$

Лемма:
$\alpha = (p), \beta = (q) \Rightarrow \alpha \cap \beta = (r) \Rightarrow r = \mathrm{lcm}(p, q)$

Доказательство:
$\tilde{r} = \mathrm{lcm}(p, q)$

$\alpha \cap \beta \subseteq \alpha \quad r \vdots p$

$\alpha \cap \beta \subseteq \beta \quad r \vdots q$

$\Rightarrow r = \mathrm{cm}(p, q)$

$\tilde{r} \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \tilde{r} \vdots r$

Замечание:
$\sqsupset p_1, p_2 \in K[x] : \gcd(p_1, p_2) = d \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in K[x] : p_1 q_1 + p_2 q_2 = d$

Доказательство:
$\alpha = (p_1), \beta = (p_2)$

$\alpha + \beta = (d)$

Лемма:
$\sqsupset p_1, p_2 \in K[x] : \gcd(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1 q_2 \subseteq K[x] : p_1 q_1 + p_2 p_2 = 1$

Теорема:

$\sqsupset p_1, p_2, \ldots, p_m \in K[x] : \gcd(p_i, p_{j \neq i}) = 1 \Rightarrow \exists \{q_i\}_{i=1}^m \in K[x] : \sum\limits_{i=1}^m p_i' q_i = 1, \quad p_i' = \frac{p}{p_i} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_m}{p_i}$

14. Кольцо операторных полиномов

14.1. Введение

$K[x]$ — кольцо (алгебра) скалярных полиномов

$K[x]$ — кольцо главных идеалов
$\forall J \trianglelefteq K[x] \quad \exists p_J \in K[t] \quad J = (p_J)$

(p_J — минимальный порождающий полином идеала J)

Лемма:
$\sqsupset p_1, p_2 \in K[t] : \gcd(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow$

$\exists q_1, q_2 \in K[t] \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$

$\sqsupset X(K)$ — линейное пространство над K

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

$\forall \sigma_\varphi \quad K[x] \longrightarrow \operatorname{End}_K(X)$
$p(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^m \mapsto p(\varphi) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m \varphi^m$

Лемма:
$\sigma_y \in \operatorname{Hom}(K[x], \operatorname{End}_K(x))$

Доказательство:
$\forall p, q \in K[x]$

$\sigma_\varphi(p+q) = \sigma_\varphi(p) + \sigma_\varphi(q)$

$\sigma_\varphi(1) = \mathcal{I} \quad \sigma_\varphi(1) = \sigma_\varphi(x^0) = \varphi^0 = \mathcal{I}$

$\sigma_\varphi(\lambda p) = \lambda \sigma_\varphi(p)$

Замечание:
$\operatorname{Im}\, \sigma_\varphi = K[\varphi] \trianglelefteq \operatorname{End}_K(X)$

Замечание:
$\operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi = \{p \in K[x] \mid p(\varphi) = \theta\}$

$\operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi$ — пространство полиномов, аннулирующих оператор φ

Лемма:
$\operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi$ — нетривиально
Доказательство:
$\sqsupset \dim_K X = n \Rightarrow \dim_K \operatorname{End}_K(x) = n^2$
$\sphericalangle \quad \left\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2, ..., \varphi^{n^2}\right\}$ — ЛЗ набор $\Rightarrow \exists\{\lambda_m\}_{m=0}^{n^2} : \sum\limits_{m=0}^{n^2} \lambda_m \varphi^m = \theta \Rightarrow p(x) = \sum\limits_{m=0}^{n^2} \lambda_m x^m \in \operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi$
Замечание:
$\operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi \trianglelefteq K[t] \Rightarrow \exists p_\varphi \in \operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi : \operatorname{Ker}\, \sigma_\varphi = \left(p_\varphi\right)$
Определение: минимальный аннулирующий многочлен

Многочлен p_φ называется *минимальным аннулирующим многочленом* оператора φ.

$$p_\varphi(\varphi) = \theta$$

Замечание:
$\sqsupset p, q \in K[t] \quad p - q \quad p_\varphi \Leftrightarrow p(\varphi) = q(\varphi)$

$\sqsupset p = g p_\varphi + r \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

$\boxed{K[\varphi] \simeq K[t] \,/\, \left(p_\varphi\right)}$

14.2. Структурная теорема

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

$\sqsupset p_\varphi$ — мин. аннулир. полином φ

$\sqsupset p_\varphi = p_1 p_2 : \gcd(p_1, p_2) = 1$

Лемма:
$X = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)$
Доказательство:
$\exists q_1, q_2 \in K[x] : p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$

$\boxed{p_1(\varphi) + q_1(\varphi) + p_2(\varphi) q_2(\varphi) = \mathcal{I}}$

$\forall x \in X(K)$

$\sphericalangle \quad \mathcal{I}x = \underbrace{p_1(\varphi) q_1(\varphi) x}_{x_2} + \underbrace{p_2(\varphi) q_2(\varphi) x}_{x_1} = x_1 + x_2$

$\sphericalangle \quad p_1(\varphi) x_1 = p_1(\varphi) p_2(\varphi) q_2(\varphi) x = p_\varphi(\varphi) q_2(\varphi) x = \theta q_2(\varphi) x = 0 \Rightarrow \underline{x_1 \in \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi)}$

$p_2(\varphi) x_2 = p_2(\varphi) p_1(\varphi) q_1(\varphi) x = p_\varphi(\varphi) q_1(\varphi) x = 0 \Rightarrow \underline{x_2 \in \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)}$

Итак, $\forall x \in X(K) \quad x \in \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) + \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)$

$\sqsupset z \in \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \cap \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi) \Rightarrow z \in \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \wedge z \in \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi) \Rightarrow p_1(\varphi) z = 0, p_2(\varphi) z = 0$

$z = p_1(\varphi) q_1(\varphi) z + p_2(\varphi) q_2(\varphi) z = 0$

Лемма:
$\operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) = \operatorname{Im}\, p_2(\varphi)$

$\operatorname{Ker}\, p_2(\varphi) = \operatorname{Im}\, p_1(\varphi)$
Замечание:
$p_\varphi(\varphi) = \theta \quad \forall x \in X(k) \quad p_\varphi(\varphi) x = 0$

$p_1(\varphi) \underbrace{p_2(\varphi) x}_{\in \operatorname{Im}\, p_2(\varphi)} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\, p_2(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi)$
Доказательство:
$\dim_K(X) = \dim_K \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) + \dim_K \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)$ (из пред. леммы)

$\dim_K(X) = \dim_K \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi) + \dim_K \operatorname{Im}\, p_2(\varphi)$

$\dim_K \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) = \dim_K \operatorname{Im}\, p_2(\varphi) \Rightarrow \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \simeq \operatorname{Im}\, p_2(\varphi) \overset{(*)}{\Rightarrow} \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) = \operatorname{Im}\, p_2(\varphi)$

Замечание:
$X = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi) = \operatorname{Im}\, p_1(\varphi) \oplus \operatorname{Im}\, p_2(\varphi)$, но $\operatorname{Im}\, p_i(\varphi) \simeq X \,/\, \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi)$

$X \simeq X \,/\, \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \oplus X \,/\, \operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)$

Лемма:
$p_1(\varphi) q_1(\varphi)$ — проектор на $\operatorname{Ker}\, p_2(\varphi)$

$p_2(\varphi) q_2(\varphi)$ — проектор на $\operatorname{Ker}\, p_1(\varphi)$
Доказательство:
$\mathcal{P}_1 = p_2(\varphi) q_2(\varphi), \mathcal{P}_2 = p_1(\varphi) q_1(\varphi)$

1. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \ (i = 1, 2)$

   $\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}\mathcal{P}_1 = \left(\underbrace{p_1(\varphi) q_1(\varphi)}_{\mathcal{P}_2} + \underbrace{p_2(\varphi) q_2(\varphi)}_{\mathcal{P}_1}\right)\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1)\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1$

   $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = p_1(\varphi) q_1(\varphi) p_2(\varphi) q_2(\varphi) = p_\varphi(\varphi) q_1(\varphi) q_2(\varphi) = \theta$

   $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I} \Leftrightarrow \forall x \in X(K) \quad x = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_1 x + \mathcal{P}_2 x = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) x = \mathcal{I} x$

Теорема: $\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(x)$

$\sqsupset p_\varphi \in K[x] : p_\varphi = \theta$

$\sqsupset p_\varphi = p_1 p_2 : \gcd(p_1, p_2) = 1$

Тогда:

1. $X = L_1 \oplus L_2, L_i = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi)$
2. $\mathcal{P}_1 = p_2(\varphi) q_2(\varphi)$ — проектор на L_1

   $\mathcal{P}_2 = p_1(\varphi) q_1(\varphi)$ — проектор на L_2
3. $\operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) = \operatorname{Im}\, p_2(\varphi) \quad X = \operatorname{Ext}\ (L_1, L_2)$

Замечание:
По индукции получаем:
$p_\varphi = \prod\limits_{i=1}^{m} p_i : \gcd\left(p_i, p_{j \neq i}\right) = 1$
Тогда:

1. $X = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, где $L_i = \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi)$
2. $\mathcal{P}_i = p_i'(\varphi) q_i(\varphi)$ — проектор на L_i

   $p_i' = p_\varphi \,/\, p_i$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists q_i \in K[x] : \sum\limits_{i=1}^{m} p_i q_i = 1$

15. Инвариантные подпространства

$\sqsupset X(K)$ — ЛП над K

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

Определение: инвариантное подпространство

Подпространство $L(K) \leq X(K)$ называется инвариантным подпространством оператора φ, если

$$\forall x \in L(K) \quad \varphi(x) \in L(x) \Leftrightarrow \varphi(L) \subseteq L$$

Примеры:

1. $\mathcal{I}x = x$ — любое подпространство X является инвариантным
2. $\theta x = 0$ — любое подпространство X является инвариантным
3. $X = L_1 \oplus L_2, \mathcal{P}_1$ — проектор на L_1

   L_1 и L_2 — инвариантны для $\mathcal{P}_1$
4. $K^n \quad A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ — в базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ $L_i =< e_i >$ — инвариантное подпространство $A \quad 2^n$ подпространств

Определение: ультраинвариантное пространство

Пространство называется ультраинвариантно, если оно инвариантно и его дополнение также инвариантно
Контрпример:

$K[x]_n$
$< x^n > \leq K[x]_n = K[x]_{n-1} \oplus < x^n \underset{K}{>}$
$\varphi : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1} \notin < x^n \underset{K}{>}$
$\forall p \in K[x]_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p \in K[x]_{n-1}$
Замечание:
$x = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow L_1$ — ультраинвариантное $\Rightarrow L_2$ — ультраинвариантное
Доказательство:
Симметричность определения.

Определение: компонента оператора в УИПП

$\sqsupset L \leq X(K)$ — УИПП φ

Оператор φ_L называется компонентой оператора φ в УИПП L, если $\varphi_L = \varphi \Big|_L$ — сужение φ на L

Лемма:
$\sqsupset X = L_1 \oplus L_2, L_1, L_2$ — УИПП φ, φ_i — компонента φ в L_i

Тогда $\varphi = \varphi \mathcal{P}_1 + \varphi \mathcal{P}_2 = \varphi_1 \oplus \varphi_2$
Доказательство:
$\forall x \in X(K) \quad x x^{!} x_1 + x_2, x_i \in L_i$

$x = \mathcal{P}_1 x + \mathcal{P}_2 x, \mathcal{P}_i$ — проектор на L_i

$\varphi(x) = \varphi(\mathcal{P}_1 x + \mathcal{P}_2 x) = \varphi(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) x = (\varphi \mathcal{P}_1 + \varphi \mathcal{P}_2) x$

$\varphi = \varphi \mathcal{P}_1 + \varphi \mathcal{P}_2 = \varphi_1 \oplus \varphi_2$

$\varphi(x) = (\varphi_1 \oplus \varphi_2)(x_1 \oplus x_2)$

$\forall x \in X(K) \quad x = (x_1, x_2), x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$

$\varphi \in \operatorname{End}\ (X), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$

$\sqsupset \varphi \in \operatorname{End}_K(X)$

$p_\varphi(\varphi) = \theta$

$\sqsupset p_\varphi = p_1 p_2 : \gcd(p_1, p_2) = 1$

$\Rightarrow X = L_1 \oplus L_2, L_i = \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi)$
Лемма:
L_1, L_2 — ИПП φ
Доказательство:
$\forall x \in L_1 \quad \varphi(x) \in L_1?$

$x \in L_1 = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) \Rightarrow p_1(\varphi) x = 0$

$\sphericalangle \quad p_1(\varphi)(\varphi x) = (p_1(\varphi)\varphi)(x) = (\varphi p_1(\varphi)) x = 0 \Rightarrow \varphi x \in L_1$

Для L_2 аналогично
Замечание:
L_1 и L_2 — УИПП
Лемма:
L_1 и L_2 — нетривиальные УИПП ($\neq X, \{0\}$)
Доказательство:
От противного: $\sqsupset L_1 = X \Rightarrow L_1 = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi) = X$

$\forall x \in X \quad p_1(\varphi) x = 0 \Rightarrow p_1(\varphi) = 0, p_1 = \min(\varphi), \deg p_1 < \deg p_\varphi$

$\sqsupset L_1 = \{0\} \Rightarrow L_2 = X$, противоречие

Лемма:
$X = L_1 \oplus L_2, L_1 = \operatorname{Ker}\, p_1(\varphi)$

$\sqsupset \varphi_i$ — компонента φ в L_1

Тогда p_i — минимальный аннулирующий полином для φ_i
Доказательство:
$\forall x \in L_i \quad p_i(\varphi_i) x = 0$

$\hookrightarrow \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi) \Rightarrow p_i(\varphi) x = 0$

$p_i(\varphi) x = p_i(\varphi) \mathcal{P}_i x = p_i(\varphi_i) x$

$\sqsupset \tilde{p}_i - \min(\varphi_i) \Rightarrow \tilde{p}_i(\varphi_i) = 0$

$p_i, \tilde{p}_i \Rightarrow \exists g : p_i = g \tilde{p}_i, \deg g > 0$

$p_\varphi = p_1 p_2 = \tilde{p}_1 g p_2, \tilde{p}_1 p_2 - \min(\varphi), \deg \tilde{p}_1 p_2 < \deg p_\varphi$, противоречие

16. Спектральная теорема

Теорема: $\varphi \in \operatorname{End}_K(X), p_\varphi = p_1 p_2 : \gcd(p_1, p_2) = 1$

1. $X = L_1 \oplus L_2, L_i = \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi)$ — УИПП
2. $\mathcal{P}_i = p_i'(\varphi) q_i(\varphi)$ — проектор на L_i

   Здесь $p_1'(x) q_1(x) + p_2'(x) q_2(x) = 1$
3. $\varphi = \varphi_1 \mathcal{P}_1 + \varphi_2 \mathcal{P}_2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \varphi_i \mathcal{P}_i = \varphi_1 \oplus \varphi_2$

   $p_i = \min(\varphi_i)$

Замечание:
Обобщение:
$\sqsupset p_\varphi(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} (x - x_i)^{r_i} \Rightarrow p_i(x) = (x - x_i)^{r_i} \Rightarrow L_i = \operatorname{Ker}\, p_i(\varphi) = \operatorname{Ker}\ (\varphi - x_i \mathcal{I})^{r_i}$
$X = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i, \quad \mathcal{P}_i = p_i'(\varphi) q_i(\varphi)$
$\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i \mathcal{P}_i$
$\sphericalangle \quad L_i = \operatorname{Ker}\ (\varphi - x_i \mathcal{I})^{r_i}$

$\forall x \in L_i \quad (\varphi - x_i \mathcal{I})^{r_i} x = 0$

$\hookrightarrow (\varphi - x_i \mathcal{I})^{r_i} x = 0 \Rightarrow (\varphi - x_i \mathcal{I})^{r_i} = \theta \Rightarrow \varphi_i - x_i \mathcal{I} = \left[\begin{array}{l} \theta \\ \tau_i, \tau_i^{r_i} = \theta \end{array}\right.$

(τ_i — нильпотент)

$\varphi_i = \tau_i + x_i \mathcal{I}$

$\boxed{\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} (\tau_i + x_i \mathcal{I}) \mathcal{P}_i}$

$p_\varphi = p_1 p_2 ... p_m$

Напоминание:

Теорема: $\varphi \in \mathrm{End}_K(X)$

$\sqsupset p_\varphi = \prod\limits_{i=1}^{m} p_i = \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i}$

Тогда:

1. $\exists \{q_i\}_{i=1}^m \in K[\lambda] : \sum\limits_{i=1}^{m} p_i'(\varphi) q_i(\varphi) = \mathcal{I}$
2. $X = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i,\ L_i = \mathrm{Ker} p_i(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})$ – УИПП
3. $p_i - \min(\varphi_i),\ \mathcal{P}_i = p_i'(\varphi) q_i(\varphi)$
4. $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i \mathcal{P}_i = \ \sum\limits_{i=1}^{m} (\tau_i + \lambda_i \mathcal{I}) \mathcal{P}_i,\ \tau_i^{r_i} = \theta$

Два случая:

1. $(\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i} x = 0 \cancel{0} \overset{?}{\Rightarrow} (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) x = 0 \quad (r_i = 1)$
2. $(\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i} = 0 \Rightarrow \tau_i^{r_i} = \theta$

17. Спектральный анализ оператора

$\sqsupset r_i = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) = \left\{ x \in X(K) \mid \underline{(\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) x = 0} \right\} \Rightarrow \varphi x = \lambda x \Longleftrightarrow \underline{(\varphi - \lambda \mathcal{I}) x = 0}$

$\sqsupset \{e_i\}_{i=1}^n$ – базис $X(K) \Rightarrow \varphi \leftrightarrow A_\varphi,\ x \leftrightarrow \xi$

$\left(A_\varphi - \lambda E\right) \xi = 0$ – СЛАУ (однородная)

Замечание:

Система $\left(A_\varphi - \lambda E\right) \xi = 0$ имеет нетривиальные решения, если $\left(A_\varphi - \lambda E\right)$ – вырождена $\Rightarrow$ $\det\left(A_\varphi - \lambda E\right) = 0$

Определение: характеристический многочлен

Многочлен $\chi_\varphi(\lambda) = \det\left(A_\varphi - \lambda E\right)$

Лемма:

$\sqsupset \left\{\tilde{e}_j\right\}_{j=1}^n$ – другой базис $X(K) \Rightarrow \det\left(\tilde{A}_\varphi - \lambda E\right) = \left(A_\varphi - \lambda E\right)$

Доказательство:

$\varphi \leftrightarrow \tilde{A}_\varphi$

$\det\left(\tilde{A}_\varphi - \lambda E\right) = \det\left(S A_\varphi T - \lambda E\right) = \det\left(S A_\varphi T - \lambda S T\right) =$

$\det\left[S\left(A_\varphi - \lambda E\right) T\right] = \det S\ \det\left(A_\varphi - \lambda E\right)\ \det T = \det\left(A_\varphi - \lambda E\right)$

Замечание:

$\mathcal{X} = \det(\varphi - \lambda \mathcal{I})$

Теорема: *(Гамильтон-Кэли)* $\quad \mathcal{X}_\varphi \in \left(p_\varphi\right)$

$\mathcal{X}_\varphi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{X}_\varphi \vdots p_\varphi$

Доказательство:

$\sqsupset \mathcal{X}_\varphi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n$

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T \Rightarrow \det(A) E = A \tilde{A}^T}$

$\varphi \leftrightarrow A_\varphi$

$\det\left(A_\varphi - \lambda E\right) \cdot E - \left(A_\varphi - \lambda E\right)\left(A_\varphi \widetilde{- \lambda} E\right)^T$

$\left(A_\varphi \widetilde{- \lambda} E\right)^T = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda_2 + \ldots + C_{n-1} \lambda^{n-1}$

Пример: $A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2+1 \\ \lambda-\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\sphericalangle \quad \left(A_\varphi - \lambda E\right)\left(C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + \ldots + C_{n-1} \lambda^{n-1}\right)$

$\lambda^0 : A_\varphi C_0$

$\lambda^1 : A_\varphi C_1 - C_0$

$\lambda^2 : A_\varphi C_2 - C_1$

$\vdots$

$\lambda^{n-1} : A_\varphi C_{n-1} - C_{n-2}$

$\lambda^n : -C_{n-1}$

$\mathcal{X} \varphi()$