

Алгоритмы и Структуры Данных. Лекция 2

14.02.2024

_scarleteagle

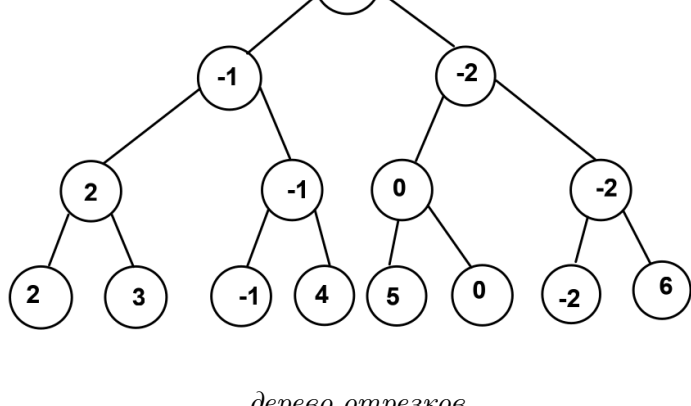
imkochelorov

Дерево отрезков. Отложенные операции

Операции:

- `get(l, r)` `#min(a_l, a_l+1, ..., a_r+1)`
- `add(l, r, x)` `#0(log n)`
#a_l += x
#a_l+1 += 1
#...
#a_r-1 += x

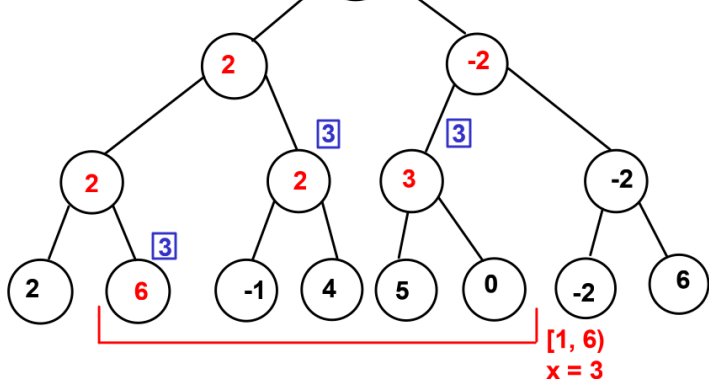
Как выполнить операцию над отрезком за $O(\log n)$, если отрезок в худшем случае имеет длину $O(n)$



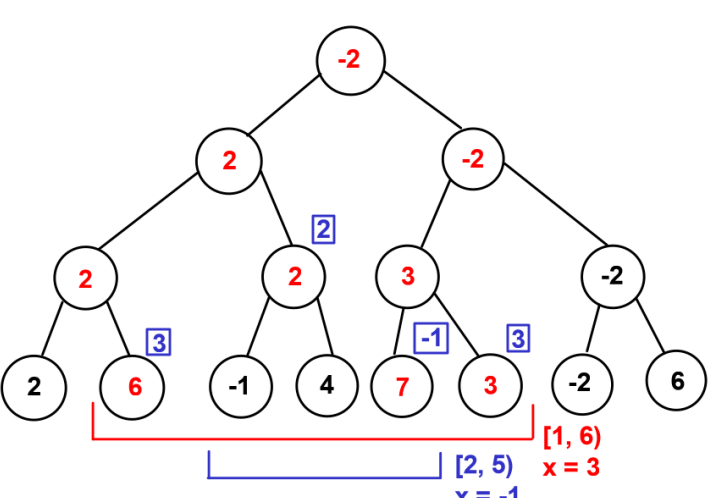
дерево отрезков

Ленивые/отложенные операции (Lazy operations)

Вместо того, чтобы рекурсивно изменять детей, будем хранить, что в вершине результат правильный, а в детях нужно добавить N. Когда будет запрос на ребёнка, проталкиваем изменения в обоих детей



дерево отрезков после вызова `add(1, 6, 3)`



дерево отрезков после вызова `add(2, 5, -1)`

Инвариант дерева:

1. На выходе значение корректное
2. `pr[v]` хранит, сколько прибавить ко всем детям (не считая текущую вершину)

```
def add(v, l, r, ql, qr, x):
    if (qr <= l or r <= ql):
        return
    if (ql <= l and r <= qr):
        tree[v] += x
        pr[v] += x
        return
    m = (l + r) // 2
    push(v)
    add(2 * v + 1, l, m, ql, qr, x)
    add(2 * v + 2, m, r, ql, qr, x)
    tree[v] = min(tree[2 * v + 1], tree[2 * v + 2])

def push(v):
    if (pr[v] == 0):
        return
    tree[2 * v + 1] += pr[v]
    tree[2 * v + 2] += pr[v]
    pr[2 * v + 1] += pr[v]
    pr[2 * v + 2] += pr[v]
    pr[v] = 0

MAX_INT = 1e12
def get(v, l, r, ql, qr):
    if ql >= r or qr <= l:
        return MAX_INT
    if ql <= l and r <= qr:
        return tree[x]
    push(v)
    m = (l + r) // 2
    return min(get(v * 2 + 1, l, m, ql, qr), get(v * 2 + 1, m, r, ql, qr))
```

Наше дерево легко превратить в дерево на сумму:

```
def add(v, l, r, ql, qr, x):
    if (qr <= l or r <= ql):
        return
    if (ql <= l and r <= qr):
        tree[v] += x * (r - l)
        pr[v] += x
        return
    m = (l + r) // 2
    push(v)
    add(2 * v + 1, l, m, ql, qr, x)
    add(2 * v + 2, m, r, ql, qr, x)
    tree[v] = sum(tree[2 * v + 1], tree[2 * v + 2])

def push(v):
    if (add[v] == 0):
        return
    tree[2 * v + 1] += pr[v] * (m - l)
    tree[2 * v + 2] += pr[v] * (r - m)
    pr[2 * v + 1] += pr[v]
    pr[2 * v + 2] += pr[v]
    pr[v] = 0

MAX_INT = 1e12
def get(v, l, r, ql, qr):
    if ql >= r or qr <= l:
        return MAX_INT
    if ql <= l and r <= qr:
        return tree[x]
    push(v)
    m = (l + r) // 2
    return sum(get(v * 2 + 1, l, m, ql, qr), get(v * 2 + 1, m, r, ql, qr))
```

Суть отложенных операций в том, чтобы выполнять их не когда они пришли, а когда возникла необходимость

Зачем готовиться к экзамену по матану с сентября, если можно начать готовиться за 2 дня до него

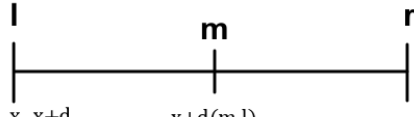
— Первеев Михаил Валерьевич

Попробуем сделать более тяжёлую операцию. Например, прибавление арифметической прогрессии

```
add(l, r, x, d)
#a_l += x
#a_l+1 += x+d
#a_l+2 += x+2d
#...
#a_r-1 += x+d*(...)
```

Сумма арифметических прогрессий — арифметическая прогрессия

$$x_1 + x_2, d_1 + d_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & d_1 \\ x_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

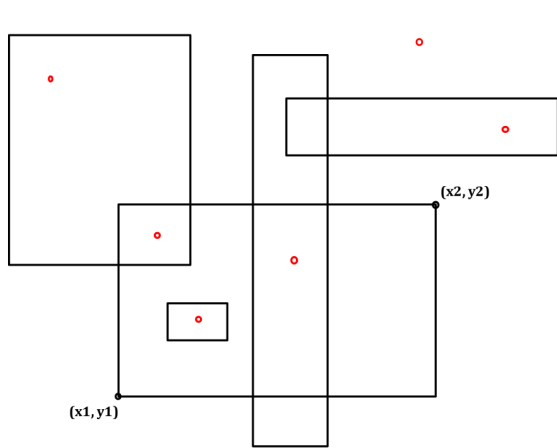


отрезок добавления арифметической прогрессии

Дерево отрезков на сумму с добавлением арифметической прогрессии возможно. На минимум — нет.

Задача:

Даны прямоугольники и точки. Найти сколькими прямоугольниками покрывается точка



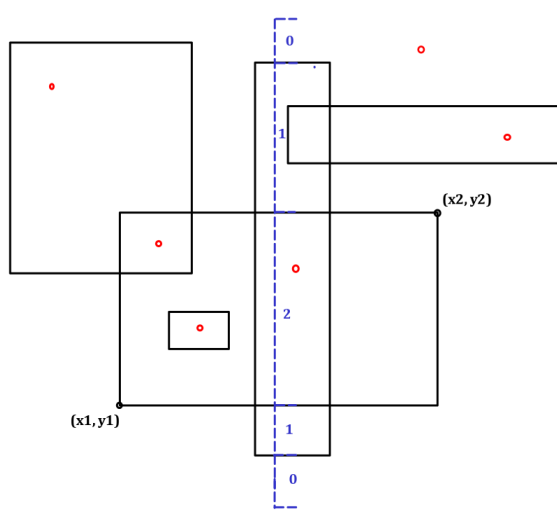
пример прямоугольников и точек

Точки: (x, y)

Прямоугольники: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$0 \leq x_i, y_i \leq c$

Сканирующая прямая:



для каждой координаты линии по y вычисляем сколькими прямоугольниками она покрывается

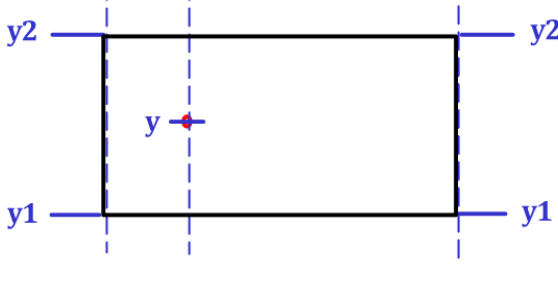
События: границы прямоугольника, точки.

Если дано n прямоугольников, m точек, то событий — $2n+m$.

Сортируем события по x-координате, затем в порядке “начало, точка, конец”

Проходим по событиям

- Если встречаем левую границу, то на отрезке $[y_1, y_2]$ добавляем 1.
- Если встречаем левую границу, то на отрезке $[y_1, y_2]$ вычитаем 1.
- Если встречаем точку, то выводим значение на y.



пример линий на каждое событие

Время работы:

- Сортировка: $O((n+m) \log(n+m))$
- Обработка событий: $O((n+m) \log C)$

Память: $O(C)$

Сжатие координат: отсортируем y-координаты и перенумеруем. $C \rightarrow O(n+m)$