Математический анализ
II семестр

Лектор: Кохась Константин Петрович

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov** **AberKadaber**

Оглавление

1. Неопределённый интеграл

Определение: *первообразная*
$F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
F — *первообразная* f, если $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$

Теорема: f — непр на $\langle a, b \rangle \Rightarrow \exists$ пер-я f
Доказательство:
Чуть позже.

Теорема: F — пер-я f на $\langle a, b \rangle \Rightarrow$
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я f
- G — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

Доказательство:

- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \mathrm{const}$

Определение: *неопределённый интеграл*
Неопределённый интеграл функции f на $\langle a, b \rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f$ - пер-я$\}$

Обозначение: $\displaystyle\int f, \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Примеры:

- $\displaystyle\int \tfrac{1}{x+a^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + a^2\right| + C$
- $\displaystyle\int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \tfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x$
- $\displaystyle\int \tfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right)$ ☹
- $\displaystyle\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \arcsin x$
- $\displaystyle\int \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

1.1. Свойства

Пусть f, g имеют пер-е на $\langle a, b \rangle \Rightarrow$

- $\displaystyle\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d \rangle \to \langle a, b \rangle$ дифф $\Rightarrow \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'\,\mathrm{d}t = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\ |_{x=\varphi(t)}\right) = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)$
  - Можо читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \displaystyle\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$

Доказательство:

- Тривиально.

- Тривиально.
- F — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{1/4}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16}+1}\right|$

Теорема: f, g дифф на $\langle a, b\rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:
$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Пример:

$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{[-1,1]\leftrightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{\overset{???}{\underset{x=\sin t}{=}}} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t ==$
$\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

> Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!
>
> — КПК

2. Определённый интеграл

Определение: *плоская фигура*
Плоская фигура — огр. подмн-во $\mathbb{R}^2$

Определение: *множество плоских фигур*
$\mathcal{E}$ = мн-во плоских фигур

Определение: *площадь*
Площадь — функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$ *(площадь прямоугольника)*

Новости (хорошая и странная):
Площади существуют, площадей много.

Замечание:

- σ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

Определение: *ослабленная площадь*
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- σ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Новости (хорошие и странные):
Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

Пример:

$$\sigma_1 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{кон.}} P_k\right\}$$

$$\sigma_2 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{счётн.}} P_k\right\}$$

$\sigma_1\left([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\right) = 1$

$\sigma_2\left([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\right) = \sigma_2\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right]$

$\Rightarrow \sigma_2\left([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\right) = 0$

σ_1 и σ_2 различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

Определение: *положительная срезка*
Положительная срезка f: $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка f: $f^- = \max(-f, 0)$.

Замечание:
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

Определение: *подграфик функции*
$f \geq 0$ на $[a,b], E \subset [a,b]$. *Подграфик ф-ции* f *на мн-ве* E $\Pi\Gamma(f, E) == \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$

Определение: *определённый интеграл*
Определённый интеграл функции f на $[a,b]$ $\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b]))$

2.1. Свойства

Замечание:
Далее считаем $f \in C([a,b])$

Замечание:

- $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \quad \int\limits_a^b f = c(b-a)$ 🙂
- $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
- при $a = b \quad \int\limits_a^b = 0$

Свойство 1: *аддитивность по промежутку*

$\forall c \in [a,b] \int\limits_a^b = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Свойство 2. *монотонность*

$f, g \in C([a,b]), f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:
$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$

Следствие:

$$\begin{aligned} \Pi\Gamma(f^+, [a,b]) < \Pi\Gamma(g^+[a,b]) \Rightarrow \sigma(\Pi\Gamma(f^+)) &\leq \sigma(\Pi\Gamma(g^+)) \\ \sigma(\Pi\Gamma(f^-)) &\leq \sigma(\Pi\Gamma(g^-)) \end{aligned}$$

Свойство 3: $f \in C[a,b] \Rightarrow$

1. $\min f \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \max f(b-a) \leq \max f \cdot (b-a)$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$

3. $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

Доказательство:
2.
$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$-\int\limits_a^b |f| \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$

3.
Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \neq b$: $\min f \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a} \int\limits_b^a f$ — значение f в некоторой точке

Определение: *интеграл с переменным верхним пределом*

$f \in C([a,b]), \Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — *интеграл с переменным верхним пределом*

Теорема: (*Барроу*)
Φ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a,b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \left(\int\limits_a^x f + \int\limits_x^y f\right) - \int\limits_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

Пример:

$$\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int\limits_a^{x^3} - \int\limits_a^{x^2}\right)'_x = \left(\Phi(x^3) - \Phi(x^2)\right)' = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^4} \cdot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\int\limits_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} \,\mathrm{d}t}^{\int\limits_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{s^4+2s} \,\mathrm{d}s} \sin n^2 \,\mathrm{d}n\right)$$ 😉

Теорема: (*формула Ньютона-Лейбница*)

$$f \in C([a, b]), F - \text{пер-я } f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

$$\Phi = F + C$$

$$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

> До Ньютона не было законов Ньютона
>
> — КПК

3. Верхний предел последовательности

Определение: *частичный предел последовательности*
$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \to a$, то a — *частичный предел последовательности* (x_n)

Пример:

- $x_n = (-1)^n$
  $n_k : 2, 4, 6, ... \Rightarrow x_{n_k} \to 1$
  $n_k = 1, 3, 5, ... \Rightarrow x_{n_k} \to -1$

Определение: *верхний предел / нижний предел*
$(x_n) \subset \mathbb{R}, \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \quad z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...) \Rightarrow z_n \leq x_n \leq y_n, \quad y_{n+1} \geq y_n, \quad z_{n+1} \leq z_n$

Верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\inf} \sup x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

Нижний предел $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\inf} \inf x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$

Теорема:

- $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
- $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n, \underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
- $\lambda \geq 0 \quad \overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$ ($\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim} \lambda x_n = \overline{\lim} \lambda x_n = 0$)
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim} x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim} x_n\right)$
- $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$
  $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$

(x_n)
$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n \le x_n \le y_n$

$\overline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$
$\underline{\lim}\, x_n = \lim z_n$
$\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$
$\sup(x_n + \tilde{x}_n, x_n + \tilde{x}_{n+1}, ...) \le \underbrace{\sup(x_n, x_{n+1}, ...)}_{y_n} + \underbrace{\sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, ...)}_{\tilde{y}_n}$

- $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

Доказательство:
По опр. предела $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$
$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
$\underset{\sup \text{ по } k \ge N > N_0}{\rightsquigarrow} \quad y_N + l - \varepsilon \le \sup\limits_{k \ge N}(x_k + t_k) \le y_N + l + \varepsilon$
$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \le \overline{\lim}(x_n + t_n) \le \overline{\lim}\, x_n + l + \varepsilon$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

- $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$

Без доказательства

Теорема: (*Техническое описание верхнего предела*)
(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow$

- $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не огр сверху
- $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
- $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_i) : \forall i \quad x_{n_i} > l - \varepsilon$ (т.е. существует бесконечно много n)

Доказательство:

- Очевидно:
  $\Rightarrow$: $y_n \to +\infty \quad \forall k \quad \exists y_n > k + 1$ т.е. $\sup(x_n, x_{n+1}, ...) > k + 1$ (т.е. $\forall k \quad \exists x_i > k$)
  $\Leftarrow$: x_n не огр сверху $\Rightarrow y_n \equiv +\infty$
- Очевидно: $x_n \le y_n$
  $\Rightarrow$: $y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$
  $\Leftarrow$: $\forall \mathrm{E} < 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad x_k < \mathrm{E} \Rightarrow y_{N+1} \le \mathrm{E}$
- $\Rightarrow$:
  - $y_n \to l, x_n \le y_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \le y_n < l - \varepsilon$
  - y_n убывает, $y_n \to l \Rightarrow l \le y_n \quad \forall n$
    $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
    $\exists x_k, k \ge n : l - \varepsilon < x_k$
    Берём $n = 1$, находим $k = k_1$
    Берём $n > k_1$, находим $k = k_2$
    Берём $n > k_2$, находим $k = k_3$
    И т.д.
- $\Leftarrow$:
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$ т.е. $x_{n+1} < l + \varepsilon, x_{n+2} < l + \varepsilon, ... \quad \Rightarrow \quad y_n \le l + \varepsilon$ по определению.
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n \ge l - \varepsilon$
    т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \exists$ б.м. $x_i > l - \varepsilon$
    $\Rightarrow \forall n \quad y_n \ge l$

  $\Rightarrow y_n \to l$

Теорема:
(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ и если оба утв. верны, все 3 предела совпадают
Доказательство:

- $\Rightarrow$: $\lim x_n = \pm\infty \Rightarrow$ очев.: $\overline{\lim} x_n = +\infty$ (x_n не огр сверху $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$)
  $\underline{\lim} x_n = +\infty$ по тех. описанию, п.2

  Если $\lim x_n = -\infty$ 🙂 Аналогично

  Пусть $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$, выполняется тех. описание $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = l$
  Аналогично $\underline{\lim} x_n = l$
- $\Leftarrow$: $z_n \leq x_n \leq y_n, z_n \to l, y_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

Теорема: (*о характеризации верхнего предела как частичного*)
(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow$
- $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $x_n : \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
- $\exists n_k : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{\lim} x_n, \exists m_j : x_{m_j} \underset{j\to+\infty}{\to} \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

- $n_k : x_{n_k} \to l \quad z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}$
  $z_{n_k} \to \underline{\lim} x_n, x_{n_k} \to l, y_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
- Про верхний: $\overline{\lim} x_n = \pm\infty$ очев
  $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ (из тех. описания)
  $l - \frac{1}{k} \to l, l + \frac{1}{k} \to l \Rightarrow x_{n_k} \to l$

Пример:
$x_n = \sin n$
$\overline{\lim} \sin n = 1$
$\forall k \quad \sup(\sin k, \sin(k+1), \ldots) = 1$
Будем блуждать по окружности с шагом n_i.
$n_0 = 1$
В какой то момент (на 7-ом шаге) наш шаг пересечет точку 0 и разобьется на 2 дуги - большую и меньшую. Теперь будем делать шаги по 6:
$n_1 = 6$
И теперь на каждом шаге мы будем отодвигаться от 0 на величину меньшей из тех двух дуг, которые мы описали раньше:
$n_1, 2n_1, 3n_1, \ldots$
В какой то момент и она пересечет точку 0, повторим с ней тот же процесс:
$n_2 = n_1 k$ или $n_1(k+1)$ (соответственно более короткой половинке дуги, которую делит 0)
$n_2, 2n_2, \ldots$
$n_3 = n_2 l$ или $n_2(l+1)$ (аналогично)
и т.д.
Длина шага: $1, < \frac{1}{2}, < \frac{1}{4}, < \frac{1}{8}, \ldots$
$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$
Существует б.много $\sin x_k > 1 - \varepsilon, \sin x_k \leq 1 \forall k \Rightarrow \overline{\lim} \sin n = 1$

4. Некоторые приложения определнного интеграла

Лемма:

$f, g \in C[a,b] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство:

$F, G -$ первооообр. f и g

$\alpha F + \beta G -$ первообр. $\alpha f + \beta g$

Обе части $= \alpha F + \beta G \Big|_a^b$

Пример:

$f \in C[a,b] \quad I_f = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f -$ ср. арифм. f на $[a,b]$

$f, g \in C[a,b]$ монотонно возр.

Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$

(*неравенство Чебышёва*)

$$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \leq (b-a) \int\limits_a^b fg$$

Доказательство:

монот $\Rightarrow \forall x, y \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0 \rightsquigarrow \int\limits_a^b ... \,\mathrm{d}y, \frac{1}{b-a}$$

$$f(x)g(x) - I_f g(x) - f(x)I_g + I_{fg} \geq 0 \rightsquigarrow \int\limits_a^b ... \,\mathrm{d}x, \frac{1}{b-a}$$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_g \cdot I_f + I_{fg} \geq 0 -$ удовенное неравенство которое мы хотели 🙂 🙂

Теорема: *формула интегрирования по частям* $f, g \in C^1[a,b]$, Тогда $\int\limits_a^b fg' \Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Доказательство:

$$\int\limits_a^b fg' + f'g = fg \Big|_a^b$$

Пример:

$$H_n = \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t) \,\mathrm{d}t$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n, & f' = -2nt\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \\ g' = \cos(t) & , \quad g = \sin(t) \end{bmatrix} = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \frac{\sin(t)}{n!} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} =$$

$$\begin{bmatrix} f = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \Rightarrow f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + (-2)(n-1)\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} - \frac{\pi^2}{4}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} \\ g' = \sin(t) \Rightarrow g = -\cos(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{(n-1)!}\left(-t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \cos(t) \,\mathrm{d}t + 2(n-1) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \cos(t) \,\mathrm{d}t - \frac{\pi^2}{2}(n - \right.$$

$$1)\left.\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\dots)^{n-2}\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = 2H_{n-1}(4n-4)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

Изначально мы считаем что $n \in \mathbb{N}$. При $n > 2$ все хорошо, везде интегрировать можно, деления на ноль при сокращении не происходило. При n = 2 тоже все хорошо — в этом можно убедиться при помощи метода присатльного взгляда.
Остается найти H_1 и H_0: Очевидно, что $H_0 = 2$.

$$H_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} f = t \Rightarrow f' = 1 \\ g' = \sin(t) \Rightarrow g = -\cos(t) \end{bmatrix} = 2t\cos(t)\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0 + 4 = 4$$

Теорема: *Иррациональность числа* π
Число π — иррационально.

Доказательство:
Проверим, что π^2 — иррационально.
Для этого испольъуем то что мы только что сделали:
$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = (4n-2)\big((4n-6)H_{n-2} - \pi^2 H_{n-3}\big) - \pi^2 H_{n-2} = \dots$
Продолжая так действовать мы получим, что: $H_n = \dots H_0 + \dots H_1 = F_n(\pi^2)$ — многочлен от π^2 с целыми коэффициентами, степени не выше n
Теперь предположим противное: пусть π^2 — рациональное, т.е. $\pi^2 = \frac{l}{m}$

$$H_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\frac{l}{m}\right) \overset{\cdot m^n}{\Rightarrow} 0 < \frac{m^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = F_n\left(\frac{l}{m}\right)\cdot m^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\frac{m^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$ — это не верно, т.к. если помахать руками то $n!$ растет слишком бытро.

Формальное доказательство: $\frac{m^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{m^n}{n!}\cdot 10^n \cdot \pi$ — здесь мы воспользовались тем что

$\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \max(|f|)(b-a)$ и взяли 10 для большого запаса.
Теперь видно, что при $n \to \infty$ выражение стремиться к 0, поэтому оно не может быть ≥ 1 для любого n.

Теорема: *о замене переменной в определенном интеграле*
$f \in C(\langle a, b\rangle), \quad \varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle,\ \ \varphi \in C^1(\langle \alpha, \beta\rangle), \quad [p, q] \in \langle a, b\rangle$
Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,\mathrm{d}x$

Доказательство:
F — первообразная f, тогда $F(\varphi(t))$ — первообразная $F(\varphi(t))\varphi'(t)$

> Очень сложное слово первообразная - очень тяжело его на 4-ой паре писать
>
> — КПК

$$\text{Л.Ч.} = F(\varphi(t))\,\Big|_{t=p}^{t=q} = F(x)\,\Big|_{x=\varphi(p)}^{x=\varphi(q)} = \text{П.Ч.}$$

Очень странная формула:
Во первых нам никто не говорил, что $\varphi([p, q]) = [\varphi(p),\ \varphi(q)]$, она может выходить за пределы этого отрезка.

Пример: $\int\limits_0^{\frac{5\pi}{6}} f(\sin(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ — здесь пока t гуляет от 0 до $\frac{\varphi}{2}$, $\sin(t)$ пробегает от 0 до 1, а потом от 1 до $\frac{1}{2}$.

Проверим что мы делали все верно: $\int\limits_0^{\frac{5\pi}{6}} f(\sin(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} + \int\limits_1^{\frac{1}{2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

Продолжение теоремы: хотим еще уметь делать преобразования в обратную сторону:
$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = [x=\sin(t)] = \int\limits_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

Теорема: *Формула Тейлора с остатком в интегральной форме*
$\langle a,b\rangle \in R, \quad f \in C^{n+1}(\langle a,b\rangle), \quad x, x_0 \in \langle a,b\rangle$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}\frac{x_0}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

Доказательство:
Индукция по n и интегрирование по частям.
База: $n = 0$
$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$ — это формула Ньютона-Лейбница.

Переход:
$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} f = f^{(n+1)}(t) \Rightarrow f' = f^{(n+1)}(t) \\ g' = (x-t)^n \Rightarrow g = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\end{bmatrix} =$

$= -\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x-t)^{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$ — победа, получили ровно то что хотели — в первом слагаемом после подстановке получиться следующий элемент суммы, интеграл ровно тот котоырй нужен.

"Чтобы обеспечить психическое здоровье на практике, неужели если рассмотреть простецкую фукнцию - целую часть x, неужели ее нельзя проинтегрировать"

Определение: *Кусочно-непрерывная фукнкция*
f — кусочно-непрерывная фунция на $[a,b] \Leftrightarrow$ существует конечное число точек $x_1, x_2, ..., x_n$, таких что: f — непрерывна на $[a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b]$, а точки $x_1, ..., x_n$ — разрывы первого рода.

Замечание — такая фукнция f — ограничена.

Определение: *Почти первообразная*
F — почти первообразная некоторой фукнции f на $[a,b]$, если выполняется $F'(x) = f(x)$ — при всех x кроме конечного числа точек и F — непрерывна на $[a,b]$.

Пример:
$F(x) = |x|$, F — почти первообразная $\mathrm{sign}(x)$

Напоминание:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — кусочно непрерывная
$x_0 = a < x_1, x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$
— $\forall k \quad f$ — непрерывная на (x_{k-1}, x_k)
$\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to x_k - 0} f, \quad \lim\limits_{x \to x_{k-1} + 0} f$

Тогда можно считать, что $\forall k \quad f \in C([x_{k-1}, x_k]), \qquad \int\limits_a^b f = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f$

Определение: почти первообразная
F — *почти первообразная* $f(x)$, если
$F \in C[a, b]$, дифф. всюду кроме кон. числа точек, $F'(x) = f(x)\ \forall x$, где F дифф.

Теорема:
f — кус. непр., F — почти первообр., F — дифференцируема всюду кроме x_i из определения кусочно непрерывной

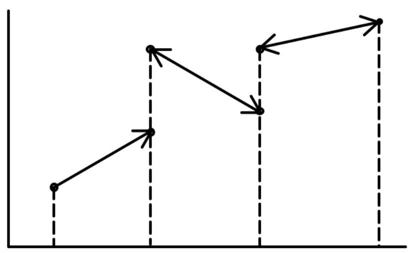
Тогда: $\int\limits_a^b = F(b) - F(a)$

Доказательство:
На (x_{k-1}, x_k) F — первообразная f
Но мы знаем что у f есть полноценная первообразная на $[x_{k-1}, x_k]$ и при этом эта первообразная с точностью до константы совпадает с F на (x_{k-1}, x_k).

Обозначим эту первообразную $\tilde{F} : \tilde{F} \in C([x_{k-1}, x_k])$ и $\tilde{F} = F$ на (x_{k-1}, x_k)

Мы получили: непрерывную функцию F, а также фунцию $\tilde{F}$, которая совпадает с нашей на каждом интервале. Получается что эти функции совпадают на все отрезке.

$$\int\limits_a^b f = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

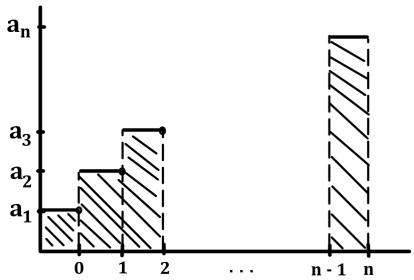


Пример: неравенство Чебышева

$I_f \cdot I_g \leq I_{fg} \quad (f, g$ — возр), $\ I_f = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$

Утверждение (неравенство Чебышева для сумм):
$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n, \ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$
Тогда $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k \right)$

Доказательство:



$f(x) = a_{\lceil x \rceil}, \quad x \in (0, n]$

Тогда $\int\limits_0^n f$ — с одной стороны площадь под графиком, но она как раз и есть одна из сумм неравенства Чебышева

На $(k-1, k) \quad F(x) = x \cdot a_k,\ x \in [k-1,\ k]$ — возникает проблема: в точках a_i происходит разрыв первого рода, а мы хотим чтобы F была непрерывна. Тогда добавим сдвиги на константу:

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & x \in [0, 1] \\ a_2 x + (a_1 - a_2) & x \in [1, 2] \\ a_3 x + (a_1 + a_2 - 2a_3) & x \in [2, 3] \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Когда мы рассмотрим такие фукнци для f, g, fg мы получим ровно интегральное неравенство Чебышева.

5. Правило Лопиталя

by Иоганн Бернулли

5.1. Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a$ — предельная точка $D,\ a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists\ \dot{U}(a) \quad f \neq 0, g \neq 0$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Тогда $\forall (x_k),\ \begin{cases} x_k \to a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{cases} \exists (y_k),\ \begin{cases} y_k \to a \\ y_k \in D : \\ y_k \neq a \end{cases} \lim \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0,\ \lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

Доказательство:

В качестве y_k будем брать некоторые элементы (x_n) так, чтобы:

$\begin{cases} \left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \Leftarrow |f(y_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)| \\ \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \Leftarrow |g(x_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)| \end{cases}$ — здесь следование в другую сторону, т.к. например в первой строчке x_k нам дано, поэтому значение $\frac{1}{k}|g(x_k)|$ нам известно, а т.к. f стремиться к 0 точно найдется такой номер, начиная с которого f меньше чем это известное нам значение. Обозначим это x_i как y_k. Аналогично во второй строке

5.2. Лемма 2

Аналогичное верно для случая $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty,\ \lim\limits_{x \to a} g = +\infty$

$\forall (x_k), \ldots \quad \exists (y_k), \ldots : \lim \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0,\ \lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

5.3. Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},$

f, g — дифференцируемы на (a, b), $\quad g' \neq 0$ на (a, b)

$\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = \left[\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right]$

Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = A$

Доказательство:
$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохраняет знак (т. Дарбу) $\Rightarrow g$ — строго монотонно $\Rightarrow$ в окр. точки a $g \neq 0$

По Гейне: $\begin{cases} x_k \to a \\ x_k \neq a \\ x_k \in (a, b) \end{cases}$, строим последовательность y_k из леммы

Теорема Коши: $\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \Rightarrow f(x_k) - f(y_k) = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k)) \Rightarrow [\ \ : g(x_k)]$

$$\Rightarrow \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}} + \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{f'(\xi_k)}{g'(x_k)}} \cdot \left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}\right)$$

Пример:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =$🙂

$0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{2x} \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos x}} =$☹

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$

Пример:

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ — интеграл Эйлера-Пуассона

$+\infty$ в верхнем пределе означает, что: $\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{R \to +\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2} \underset{R \to +\infty}{\to} 0$

Теперь мы хотим заменить интеграл на эквивалентную фукнцию, то есть найти $g(R)$:

$$1 = \lim_{R \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}{g(R)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{R \to +\infty} \frac{-e^{-R^2}}{g'(R)} = 1$$

I попытка:

$g(R) = e^{-R^2} \Rightarrow g' = -2Re^{-R^2} \Rightarrow \dfrac{-e^{-R^2}}{-2Re^{-R^2}} \to 0$

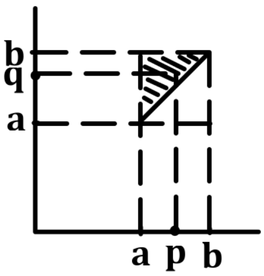
II попытка:

$$g(R) = \frac{e^{-R^2}}{2R} \Rightarrow \frac{e^{-R^2}}{e^{-R^2} - \underbrace{\frac{e^{-R^2}}{2R}}_{=o\left(e^{-R^2}\right)}} \underset{R \to +\infty}{\to} 1$$

Победа, мы получили: $\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2R} + o\left(\frac{e^{-R^2}}{R}\right)$

6. Приложение определённого интеграла

Общая схема $\langle a,\ b\rangle$
$\mathrm{Segm}(\langle a,\ b\rangle) = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всех подотрезков $\langle a, b\rangle$



представление $[p, q] \in Segm(a, b)$, *если* (p, q) *лежит в заштрихованном треугольнике*

6.1. Аддитивная функция промежутка

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \quad \forall c \in [p, q] \quad \Phi([p,q]) = \Phi([p,c]) + \Phi([c,q])$

Это похоже на итнетграл, он тоже аддитивен. Поэтмоу попробуем найти некоторую фукнцию f :

$[p,q] \mapsto \int\limits_p^q f$

6.2. Плотность аддитивной функции промежутка

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ \ f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

f — плотность Φ, если $\forall \Delta \in \mathrm{Segm} : \min\limits_{\Delta} f \cdot l_{\Delta} \le \Phi(\Delta) \le \max\limits_{\Delta} f \cdot l_{\Delta}$
l_{Δ} – длина отрезка Δ.

Теорема: (о вычислении а. ф. п. по плотности)
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, — непрерывна, $\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — а.ф.п, f — плотность Φ
Тогда:

$$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm} \quad \Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f(x)dx$$

Доказательство:
Не умаляя общности рассмотрим $[a, b]$

$$F(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x = a \\ \Phi([a,x]), & x \in (a, b] \end{array}\right.$$

Проверим F — первообразная f:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \underbrace{\frac{\Phi([x, x+h])}{h}}_{\in[\min_{\Delta} f,\, \max_{\Delta} f]} = f(x + \Theta h),\ \ 0 \le \Theta \le 1$$

(В последенм равенстве мы воспользовались теоремой о промежутоном значении для непрерывной фунции)

$$F'_+ = \lim_{h \to +0} f(x + \Theta h) = f(x)$$

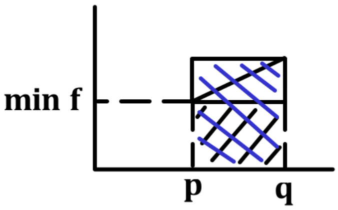
Аналогично $F'_- = f(x)$

$$\int\limits_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi([p,q])$$

Пример 1.1: площадь подграфика

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непр., $\quad \Phi : \text{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} : \quad \Phi([p, q]) = \sigma(\text{ПГ}(f, [p, q]))$

Тогда f — плотность, из монотонности площади



$(q - p) \cdot \min f \leq \sigma(\text{ПГ}(f, [p, q])) \leq (q - p) \cdot \max f$

$\Phi([p, q]) = \sigma(\text{ПГ}(f, [p, q])) = \int\limits_p^q f$

Пример 1.2:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

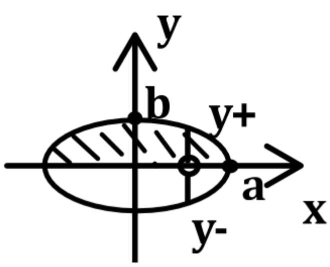


График эллипса

$$\sigma_{\text{элл}} = \int\limits_{-a}^{a} y^+(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [\pi, 0] = -\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\tfrac{\pi}{2}$$

Геометрический способ поиска площади подграфика

Пример 2: площадь криволинейного сектора $\langle a, b\rangle$

$\Phi : [p, q] \mapsto \sigma(\text{Сектор}([p, q], r(\varphi)))$ — аддитивная функция промежутка. Чтобы ее удобно исхать найдем ее плотность:

Проверим, что $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ — плотность а.ф.п. Φ:

$\frac{1}{2}(q - p) \cdot \min\limits_{[p,q]} r^2(\varphi) \leq \Phi[p, q] \leq \frac{1}{2}(q - p) \cdot \max\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)$

Криволинейный сектор $([p, q], \min r) \subset$ Сектор $([p, q], r(\varphi)) \subset$ Криволинейный сектор $([p, q], \max r)$

Т.е. это была действительтно плотоность а.ф.п $\Phi \Rightarrow \Phi([p, q]) = \frac{1}{2}\int\limits_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

Пример 1: Посчитаем площадь круга

$$\sigma \text{ Круга} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \pi R^2$$ 🙂

Пример 2:

$$S' = \frac{1}{2}\int\limits_p^q r^2(\varphi)d\varphi = \begin{bmatrix} \varphi = \arctan\frac{y(t)}{x(t)} \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_{t_p}^{t_q} = (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}}\cdot\frac{y'x-x'y}{x^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_p}^{t_q} y'(t)x(t) - x'(t)y(t))\,\mathrm{d}t$$

Подставим в получившуюся формулу уравнение окружности с радиусом R:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ \Rightarrow\ S = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^2}{4}$$

Пример: Изометрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ $\ G -$ замкнутая выпуклая фигура. Диаметр $G = \sup(\rho(A,\ B),\ A,\ B \in G) = d \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (равенство для круга $r = \frac{1}{2}$)

Доказательство:

Введем с.к. так чтобы вся наша фигура лежала выше оси O_x а также введем функцию $f(x)$ описывающую "нижнюю" часть нашей фигуры

$f(x) -$ вып., $\forall x_0$ где $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists$ касательная

G замк., вып. $\Rightarrow r(\varphi)$ непр.

$$\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi_{\text{нов}} - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi_{\text{нов}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \text{"}AB\text{"}^2\,\mathrm{d}\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi d^2}{4}$$

Определение: циклоида — траектория точки на окружности, катящейся по прямой

$S_{\text{черн}} + S_{\text{син}} = S_{\text{прям}} + S_{\text{лепестка}}$

$S = 2\pi r^2 + \pi r^2$

$S = 3\pi r^2$

$$\begin{cases} x(\varphi) = r\varphi - r\sin\varphi \\ y(\varphi) = r - r\cos\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} (r - r\cos\varphi)(r - r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int\limits_0^{2\pi} 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r^2 + 0 + \pi r^2$$

6.3. Аналитические функции

$f(x) \in C^{\infty} \Rightarrow$ для нее можно писать формулу Тейлора:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ — всюду сходится с рядом Тейлора

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ — сходится с рядом Тейлора в точках из $[-1, 1]$

Пример неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Утверждение: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(n)}(0) = 0$

Доказательство:

1) $\exists f'(0)$ если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = a$, то $f'_+(x_0) = a$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = a$, то $f'\ (x_0) = a$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{2\left(\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$ — не повезло

$$= \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{-\frac{6}{x^3}}{-\frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{6}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{-\frac{6}{x^2}}{-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

Следствие: $\forall k \ \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$

Итак, $f'(0) = 0$, то есть $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Проверим по индукции по n, что $\forall n \ \exists P_n(x)$ — многочлен: $f^{(n)}(x) = \left[\begin{array}{ll} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array}\right.$

База: $n = 0$, 1 см. раньше

$$f^{(n+1)} = \left[\begin{array}{ll} \left(P'_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ ?, & x = 0 \end{array}\right.$$

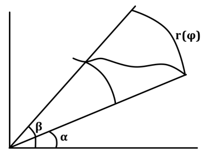
$$f^{(n+1)} = \lim_{x \to 0} \left(f^{(n)}(x)\right) = \lim_{x \to 0} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

6.4. Продолжение плотности аддитивной фукнции промежутка

f — плотность аддитивной функции промежутка Φ, если:

$\forall \Delta \in \text{Segm} \quad \min\limits_{\Delta} f \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq \max\limits_{\Delta} f \cdot |\Delta|$ *(f непрерывна, в ином случае вместо min и max, inf и sup)*

Теорема: (Напоминание) f — плотность Φ (f — непр) $\Rightarrow \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f$



$f = \frac{1}{2} r^2(\varphi)$

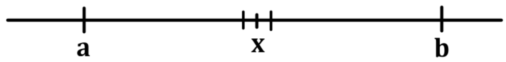
Вот здесь нам повезло, что вот эта функция оказалась аддитивной фукнцией промежутка, и это легко доказалось, но на самом деле обычно все не так просто, поэтому нужен более мощный инструмент

Теорема: (*обобщ. теорема о плотности*)

Φ — а.ф.п: $\mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}, f \in C[a, b]$

Пусть $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle) \quad \exists$ функции промежуткака m_Δ, M_Δ :

1. $m_\Delta \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot |\Delta|$
2. $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \in \langle a, b\rangle \quad M_\Delta - m_\Delta \underset{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}}{\longrightarrow} 0$



т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall \Delta \in \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle$:

$|\Delta| < \delta, x \in \Delta \quad M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon$

Тогда f — плотность Φ $\left(\text{и } \forall\ [p, q] \subset \langle a, b\rangle \quad \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f\right)$

Доказательство:

Не умаляя общности рассмотрим отрезок $[a, b]$, $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$, $\quad$ тогда ? $F' = f$

Фиксируем x, Пусть $h > 0$

$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x,\, x+h]}{h}$, то есть из (1) $\quad m_{[x,\, x+h]} \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_{[x,\, x+h]}$

из (2) $\quad m_{[x,\, x+h]} \leq \quad f(x) \quad \leq M_{[x,\, x+h]}$

Таким образом $\quad \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq M_{[x,\, x+h]} - m_{[x, x+h]} \overset{\text{из } (3)}{\underset{h \to 0}{\longrightarrow}} 0$

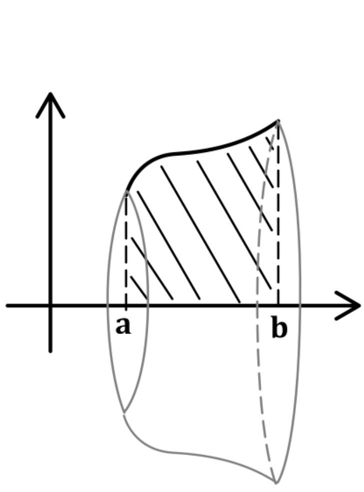
Т. е. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x)$, т.е. $\quad F'_+(x) = f(x)$

Аналогично $F'_-(x) = f(x)$

6.5. Фигуры вращения

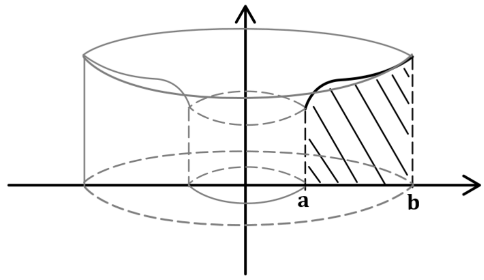
I тип:
$f \geq 0$, непр.
$T([a, b]) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$

$x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$



II тип:

$$U(\underset{0\le a<b}{[a,b]}) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :$$
$$a^2 \le x^2+z^2 \le b^2,$$
$$0\le y\le f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)\}$$



Нам хочеться считать объемы, поэтому введем а.ф.п.:
$[a,b]\mapsto \Phi[a,b] = V(T[a,b])$

$$\Psi[a,b] = V(U[a,b])$$

Теорема:

1) $\Phi[a,b] = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\Psi[a,b] = 2\pi\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$

Доказательство:

1) ИЕЯ (упражнение)

2) ? $2\pi xf(x)$ — плотность Ψ

$U[a,b]\subset$ Цилиндр над кольцом (с основанием) $\quad a^2\le x^2+z^2\le b^2,$ высоты $\max\limits_{[a,\,b]} f$

- $\Psi[a,b]\le\left(\pi b^2-\pi a^2\right)\max f = \pi(b+a)(\max f)(b-a)\le \pi\cdot\max\limits_{x\in[a,\,b]}2x\cdot\left(\max\limits_{x\in[a,\,b]}f\right)\cdot(b-a)$

  $\Psi[a,b]\ge\pi\min 2x\cdot(\min f)(b-a)$

  $M_{[a,\,b]} = \pi\cdot\max\limits_{x\in[a,\,b]} = \pi\cdot\max 2x\cdot\max f$

  $m_{[a,\,b]} = \pi\cdot\min 2x\cdot\min f$

  Это ровно первый пункт обобщенной теоремы плотности

- $m_{[a,\,b]}\le 2\pi xf(x)\le\pi\cdot\max 2x\cdot\max f(x)$

  Это второй пункт теоремы

- $M-m\underset{\substack{x\in\Delta\\ |\Delta\to 0|}}{\longrightarrow}0$

  $\max f\to f(x)\leftarrow\min f$

  $\max\limits_{t\in\Delta}2t\to 2x\leftarrow\min 2t$

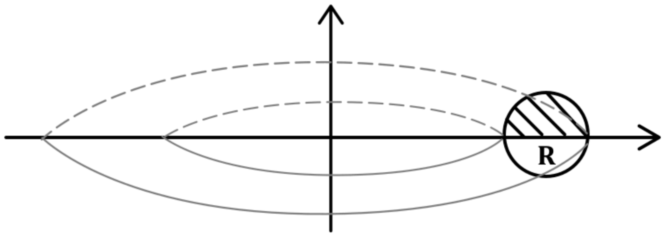
  Это третий пункт

Получилось что все 3 пункта выполнены $\Rightarrow$ это действительно плотность Ψ

Посчитаем объём бублика:
$(x-R)^2+y^2=r^2$ — это формула которой задается сечение бублика. R — расстояние от центра координат, r — радиус круга сечения.

$$V_{\text{бублика}} = 2\cdot 2\pi\int\limits_{R-2}^{R+2}x\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int\limits_{R-2}^{R+2}(x-R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,\mathrm{d}x + 4\pi R\int\limits_{R-2}^{R+2}\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 0+4\pi R\cdot\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R\cdot\pi r^2 = 2\pi^2Rr^2$$

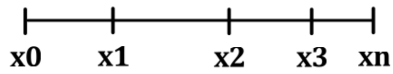

R

6.6. Интегральные суммы

$f \in C[a,\ b]$

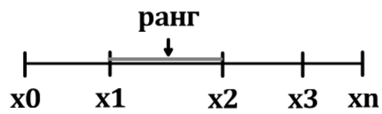
Определение: дробление отрезка

Дробление отрезка $[a, b]$ — набор точек $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$



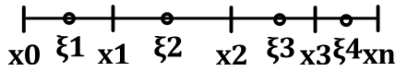
Определение: ранг дробления (мелкость)

Ранг дробления — $\max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$



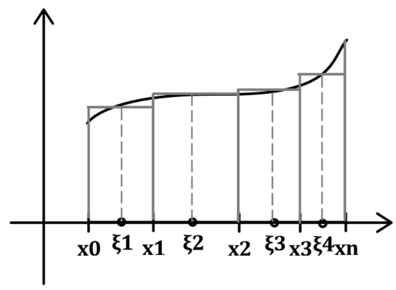
Определение: оснащение

Оснащение — набор точек $\xi_1, ..., \xi_n : \forall k \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$



Определение: интегральная (риманова) сумма

Интегральная сумма — $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$



Теорема: (*об интеграле как о пределе интегральной суммы*)

$f \in C[a,\ b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall$ дробление $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, где ранг дробления $< \delta$

$$\left| \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Теорема Кантора о равномерной непрерывности: f — непр. на $[a, b] \Rightarrow f$ — равн. непр.

Равномерно непрерывно означает: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x,\ \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$

$$\left| \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} ... \right| \overset{(*)}{=} \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\, \mathrm{d}x \right| \le \sum |...| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|\, \mathrm{d}x < \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b - a}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} |b - a| = \varepsilon$$

$(*)$: здесь интеграл разбился по аддитивности на $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)$, а каждый элемент суммы представили в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})$, так как у нас каждый элемент суммы — прямоугольник с основанием $x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(x_{k-1})$.

Замечание: в общем случае можно взять не конец отрезка, а некоторую точку ξ_k на нем и все будет работь.

Определение: модуль непрерывности

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

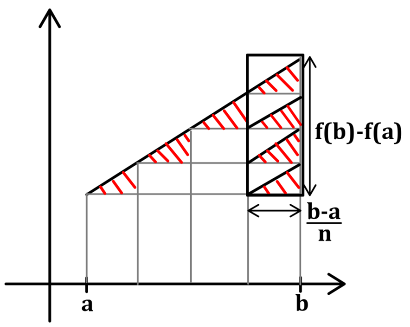
$\omega(\delta) := \sup\limits_{\substack{x, f \in [a,b] \\ |x-t|<\delta}} |f(x) - f(t)|$ — модуль непрерывности

Т. Кантора: $\omega(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$ [для непр. f]

Т. Лагранжа: f — дифф на $[a,\ b]$ $\quad M = \max|f'|$ $\quad$ Тогда $\omega(\delta) \le M \cdot \delta$

Предыдущая теорема: если ранг дробления $< \delta$, то $\left| \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| \le \omega(\delta) \cdot (b-a)$

Если хотим в терминах теоремы Лагранжа: $f \in C^1$ $\quad M = \max|f'|$ $\quad \left| \int - \sum \right| \le M\delta(b-a)$



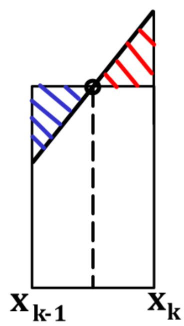
Сделаем равномерное дробление отрезка $[a, b]$
Посмотрим на сколько отличается интеграл от суммы.
Он отличается ровно на площадь красных треугольничков.
Сместим все треугольнички в последний столбец и оценим их площадь площадью прямоугольника — победа.

Теорема: (*об интегральной сумме центральных прямоугольников*)

$f \in C^2[a,\ b] \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$\delta = \max(x_k,\ x_{k-1}),\ \xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Тогда $\left| \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \le \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$



Доказательство:

Упражнение (зная доказательств следующей теоремы)

Теорема: (*формула трапеций*)

$f \in C^2[a, b] \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \delta = \max(x_k - x_{k-1})$

Тогда $\left|\int\limits_a^f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

Доказательство:

Хотим интегрировать по частям: $\int\limits_\alpha^\beta u'v = uv\,\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v'u$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{bmatrix} v = f & v = f' \\ u' = 1 & u = x - \xi_k \end{bmatrix} = f(x)(x-\xi_k)\Big|_{(x\,=\,x_{k-1})}^{(x\,=\,x_k)} - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x-\xi_k)\,\mathrm{d}x = (f(x_k)+f(x_{k-1}))\tfrac{x_k - x_{k-1}}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(-2(x-\xi_k))\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} v = f' & f' = f'' \\ u' = -2(x-\xi_k) & \underset{\text{на } [x_{k-1}, x_k]}{u = (x-x_{k-1})(x_k - x)} \end{bmatrix} =$$

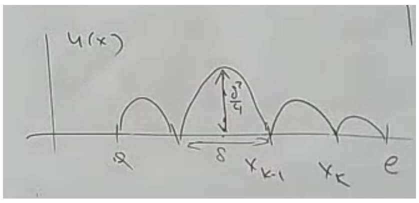
$$= \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{2}\left(u\cdot f'\Big|_{x\,=\,x_{k-1}}^{x\,=\,x_k} - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''\cdot u(x)\,\mathrm{d}x\right), \quad \text{где} \quad u(x) = (x-x_{k-1})(x_k - x)$$

Суммируем эти формулы по $k = 1, 2, ..., n$

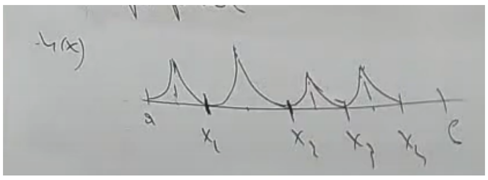
$$\int\limits_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \text{трап} - \tfrac{1}{2}\int\limits_a^b f''(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int\limits_a^b f - \sum \text{трап}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\int\limits_a^b f''(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \tfrac{1}{2}\int\limits_a^b |f''|u(x)\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{\leq} \tfrac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

$(*)$ Здесь мы заменили $u(x)$ на ее максимальное значение. Заметим что $u(x)$ выглядит как набор парабол ветвями вниз, которые проходят через точки x_i, при этом расстояние между $x_i \leq \delta \Rightarrow \max(u) = \frac{\delta^2}{4}$



Подсказка для центральных прямоугольников:



$[a, b] = [0, n], x_k = k$

Формула трапеций: $\left| \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} \cdot 1 \right| \leq \frac{1}{8} \int\limits_0^n |f''|$

🙂 $f(x) = x$

$\left| \int\limits_0^n x\,\mathrm{d}x - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + ... + \frac{(n-1)+n}{2} \right) \right| \leq 0$

$\Rightarrow 1 + 2 + ... + n = \frac{n}{2} + \int\limits_0^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n^2+n}{2}$ 🙂

Это частный случай формулы Эйлера-Маклорена

6.7. Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m,\ n \in \mathbb{Z} \quad f \in C^2[m,\ n]$ Тогда

$$\int\limits_m^n f(x)dx = \sum\limits_{i=m}^{n} f(i) - \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x) \cdot \{x\}(1 - \{x\})dx$$

Это очевидно, АГА. Это формула трапеции

$$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$$

Дробим $[m,\ n]$ на единичные отрезки

$\psi(x) = (x - x_{k-1})(x_k - x)$

$\frac{\delta^2}{8}\int \ldots \quad \frac{1}{2}f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$

$$-\frac{\delta^2}{2}\int\limits_a^b |f''| \quad \int f'' \cdot \psi(x)$$

Пример 1: $f(x) = x^p,\ p > -1$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^n (x^p)''\{x\}(10\{x\})dx$$

7. Неравенства

7.1. Интегральное неравенство Йенсена

Теорема:

$$\left.\begin{array}{l} f - \text{ выпуклая, непр. на } \langle A, B\rangle \\ \varphi : [a,b] \to \langle A, B\rangle - \text{непрерывная} \\ \lambda : [a,b] \to [0,+\infty) - \text{непр. и } \int\limits_a^b \lambda = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\underbrace{\int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t}_{c}\right) \le \int\limits_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

Доказательство:

Пусть $m = \min\varphi, M = \max\varphi$

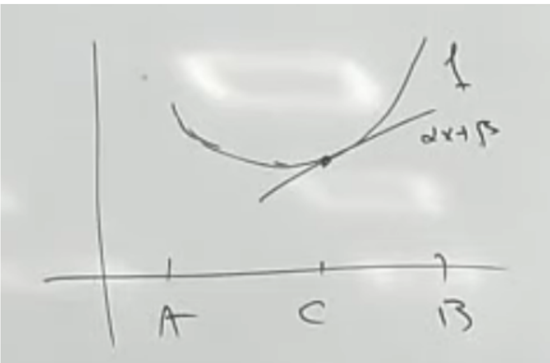
$$c = \int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \le M\int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = M, \quad \text{аналогично } c \ge m$$

$$\text{Если } \varphi = \mathrm{const} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\int\limits_a^b \lambda(t)\cdot\mathrm{const}\,\mathrm{d}t\right) = f\left(\mathrm{const}\cdot\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\mathrm{const}) \\ \int\limits_a^b \lambda(t)f(\mathrm{const})\,\mathrm{d}t = f(\mathrm{const})\cdot\int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = f(\mathrm{const}) \end{cases}$$

В таком случае неравенство очевидно выполняется: $f(\mathrm{const}) \le f(\mathrm{const})$

В противном случае: $\varphi \ne \mathrm{const} \Rightarrow m < c < M$

Берём в точке $c \in \langle A, B\rangle$ опорную прямую к графику: $y = \alpha x + \beta \quad (*)$



$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha\int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \beta\underbrace{\left(\int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=1} = \int\limits_a^b \lambda(t)(\alpha\varphi(t)+\beta)\,\mathrm{d}t \underset{\text{выпуклости}}{\overset{\text{в силу}}{\le}} \int\limits_a^b \lambda(t)f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

Комментарий по $(*)$: мы не хотим, чтобы опорная прямая была вертикальной, поэтому мы берём c не на конце отрезка. Можно это записать так: $c = \int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t < M\int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t$ вместо нестрогого неравенства.

7.2. Пример (неравенство Коши в интегральной форме):

Напоминание (обычное неравенство Коши): $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$

Теперь интегральная форма: $f \in C[a,b],\ \ f > 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f \,\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

В качестве упражнения можно доказать при помощи интегральных сумм

Доказательство при помощи неравенства Йенсена:
$f^* \leftrightarrow \exp$ — здесь f^* на самом деле тот f который был в формулировке неравенства Йенсена, но во избежании коллизии обозначений с тем f который введен в этой теореме немного его переименуем.
$\lambda \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
$\varphi \leftrightarrow \ln$
Если использьовать эти фукнци то наше неравенство ровно сведется к неравенство Йенсена.

7.3. Неравенство Гёльдера для сумм

Теорема:
$p > 1,\ \ q > 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ a_i, b_i > 0\ \forall i = 1...n$
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство:
$f(x) = x^p$ — вып. на $[0, +\infty)$ $\qquad f'' = p(p-1)x^{p-2} \ge 0$

Нер-во Йенсена для этой фукнции: $(\sum \alpha_i x_i)^p \overset{(1)}{\le} \sum \alpha_i x_i^p$, где $\sum \alpha_i = 1$

В качестве α_i возьмем $\alpha_i = \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$ — подходит под нужное нам условие

В качестве x_i возьмем $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} (\sum b_i^q)$

Найдем $a_i x_i$ чтобы подставить его в Л.Ч. (1): $\alpha_i x_i = a_i b_i^{q - \frac{1}{p-1}} = a_i b_i$

Найдем $\alpha_i x_i^p$ чтобы подставить его в П.Ч. (1): $\alpha_i x_i^p = \dfrac{\cancel{b_i^q}}{\sum b_i^q} a_i^p \cancel{b_i^{-\frac{p}{p-1}}} (\sum b_i^q)^p = a_i^p (\sum b_i^q)^{p-1}$

Подставляем то что мы только что получили в (1): $(\sum a_i b_i)^p \le (\sum a_i^p)(\sum b_i^q)^{p-1}$

Возводим предыдущее равенство в степень $\frac{1}{p}$: $(\sum a_i b_i) \le (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}}$

Наблюдение 1: неравенство работает для нулевых слагаемых т.к нулевые множители не влияют на сумму слева и не уменьшают сумму справа

Наблюдение 2:
$a_i, b_i \in \mathbb{R}$
$|\sum a_i b_i| \le \sum |a_i b_i| \le (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

Замечание для нер-ва Йенсена:
$f(\sum \alpha_i x_i) \le \sum \alpha_i f(x_i)$, f — строго выпукла, $\alpha_i \ne 0$. Равенство достигается при $x_1 = x_2 = ... = x_n$
Идя по док-ву нер-ва Гёльдера, заметим, что если нет нулей, то $f(x) = x^p$ — строго выпукла на $(0, +\infty)$. Равенство достигается тогда, когда:
$\forall i \quad \left.\begin{array}{l} a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} = \lambda \\ a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} = \lambda^p = \lambda_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_i^p = \lambda_0 b_i^q \Rightarrow (a_1^p ... a_m^p) \uparrow\uparrow (b_1^q ... b_n^q)$ — эта запись означает что вектора пропорциональны дург другу

7.4. Интегральное нер-во Гёльдера

$$p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ f, g \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int\limits_a^b fg \right| \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство:

$[a, b]$ дробим на n равных частей: $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n} = a + k\Delta x_k$

Дискретное неравенство Гёльдера:

$a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$

$b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$a_k b_k = f(x_k) g(x_k) \Delta x_k$

$\sum |f(x_k) g(x_k)| \Delta x_k \leq \left(\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{\frac{1}{q}}$

Свертка интегральных сумм в интеграл: $n \to +\infty$: $\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$

Из-за предельного перехода равенство найти не получится ☹

Неравенство Гёльдера, случай $n = 2$:

$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – нер-во Коши-Буняковского

$p \to 1, q \to +\infty$:

$\sum a_i b_i \leq \sum a_i \lim\limits_{q \to +\infty} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sum a_i \max(b_i)$

7.5. Неравенство Минковского

Теорема:

$p \geq 1,\ a_i, b_i \in \mathbb{R}$

Тогда $\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$p = 1$ – очев

Смысл неравенства: елси $p > 1$, тогда мы можем задать норму в $\mathbb{R}^n$: $(a_1 ... a_n) \mapsto \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство:

$\sum a_i |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^{q(p-1) = p} \right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum b_i |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

Просуммируем два полученых неравенства:

$\sum (a_i + b_i) |a_i + b_i|^{p-1} = \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^1 \leq \left(\left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ...$

Теорема: (инт. н-во Минковского)

$f, g \in C[a, b], p \geq 1$. Тогда $\left(\displaystyle\int\limits_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\displaystyle\int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\displaystyle\int\limits_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Смысл интегрального н-ва Минковского: $f \mapsto \left(\displaystyle\int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ – норма

Доказательство:

Вариант 1. Переписать дискр. доказательство.
Вариант 2. Интегральные суммы
В н-ве Гёльдера в предельном переходе $\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \to \max|b_i|$
$(b_1, ..., b_n) \mapsto \max|b_i|$ — норма

8. Конечные ε-сети

Определение: ε-сеть
(x, ρ) — МП, $D \subset X$
Мн-во $N \subset X$ называется ε-сетью для $D \quad \forall x \in D \quad \exists\, n \in N : \rho(x, n) < \varepsilon$

Определение: сверхограниченность
D — сверхограниченно, если $\forall \varepsilon > 0$ в $X \quad \exists$ конечная ε-сеть N для мн-ва D

Лемма:
D — сверхограниченно в $X \Leftrightarrow D$ — сверхограниченно в D

Доказательство:
$\Leftarrow$: тривиально
$\Rightarrow$: Берём конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в X
$\forall n \in N$ рассмотрим шар $B\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Отметим в каждом шаре точку d_n — конечное число.
Тогда $\{d_n\}$ — ε-сеть, лежащая в D.

Лемма:
Сверхограниченность сохраняется при равномерно непрерывных отображениях.
Т.е. $D \subset X$ — сверхогр., $f : X \to Y$ — равн. непр. ($\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$)
Тогда $f(D)$ — св.огр. в Y, т.к. $f(\delta\text{-сеть}) = \varepsilon\text{-сеть}$

Вопрос из зала: почему не получиться так, что ограниченное всегда является свехрограниченным?
Ответ: рассмотрим нормированное пространство последовательностей $L = \left\{(x_1, x_2, ...), |\overline{x}| = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} |x_i|\right\}$
$D = (e_1, e_2, ...) \subset \overline{B\left(\vec{0}, 1\right)}$ — ограниченное множество.
$$e_k = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{(k-1)}, 1, 0, ...\right)$$
$\rho\left(e_k, e_j\right) = \left\|e_k - e_j\right\| = 2$ — но это говорит нам о том что D не сверхограниченно

Лемма:
D — сверхогр. $\Rightarrow$ замыкание D тоже
$D \subset \bigcup\limits_N B(n, \varepsilon) \Rightarrow \overline{D} \subset \bigcup\limits_N B(n, 2\varepsilon) \Rightarrow N - 2\varepsilon$-сеть для $\overline{D}$

Лемма:
D — сверхогр. $\Leftrightarrow \forall$ посл. точек из D содержит фундоментальную подпоследовательность
Напоминание (фундаментальная посл-ть): x_n — фунд. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, k > N \quad \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$

Доказательство:
$\Rightarrow$: $\varepsilon := 1$. Строим конечную 1-сеть N_1
$$\bigcup_{\substack{a \in N_1 \\ (\text{кон.})}} B(a, 1) \supset D$$
$\exists a_1 \in N_1$: в $B(a_1, 1)$ сод. беск. много членов последовательности x_n.

Берём все эти бесконечно много x_n и объединяем в подпоследовательность $\left(x_n^{(1)}\right)$, возьмём любой её член и обозначим x_{n_1}

Теперь $\varepsilon := \frac{1}{2}$, строим конечную $\frac{1}{2}$-сеть N_2

$\bigcup\limits_{a \in N_2} B\left(a, \frac{1}{2}\right) \supset D$
$\exists a_2 \in N_2$: в $B\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$ содержит бесконечно много элементов из $x_n^{(1)}$
Берём эти элементы и обозначем $\left(x_n^{(2)}\right)$, возьмём член $x_{n_2} (n_2 > n_1)$
$\vdots$
$\left(x_{n_i}\right)$ — фундаментальная

$\Leftarrow \varepsilon$:. Нет ε-сети?

Какая то x_1, другая $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$ и $x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$

Таким образом построим посл-ть: $\forall x_k, x_m \quad \rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon$

У посл-ти (x_n) нет фунд. подпосл. Противоречие в определении для обсуждаемого ε.

Лемма:
X — сверхогр. $\Rightarrow$ в X имеется счётное всюду плотное подмножество Q. (т.е. X — сепарабельное)

Доказательство:
$Q = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\text{-сеть}\right)$

Теорема:
(X, ρ) — МП. Эквивалентны:
1. X — компактно
2. X — полно и сверхограниченно

Доказательство:
Замечание: в МП комп. $\Leftrightarrow$ секв. комп.
$(1) \Rightarrow (2)$:
X — неполно $\Rightarrow \exists$ фундаментальная последовательнсоть, не имеющая предела $\Rightarrow \forall$ подпоследовательности верно, что она тоже не имеет предела $\Rightarrow$ это противоречит секвинциальной компактности
X — не сверхограничено $\Rightarrow$ по лемме 4 $\exists$ последовательность, у которой $\nexists$ фунд. подпосл. $\Rightarrow$ у этой последовательности нет сходящейся подпоследовательности $\Rightarrow$ противоречит секвинциальной компомпактности
$(2) \Rightarrow (1)$:
X — сверхограниченно $\Rightarrow \forall$ последовательность точек из $X \quad \exists$ фундаментальная подпоследовательнсоть $\underset{X\text{ - полное}}{\Rightarrow} \forall$ последовательнсоть точек из X имеет схододящейся подпоследовательности, т.е. это секвинциальная компактность.

9. Несобственный интеграл

Определение: несобственный интеграл
$f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad (-\infty < a < b \leq +\infty)$

f — **допустима**, если $\forall A : a \leq A < b \quad f$ — кусочно-непрерывна на $[a, A]$

$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x) \,\mathrm{d}x$, где $A \in [a, b)$

Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то величина называется несобственным интегралом $\int\limits_a^{\to b} f(x) \,\mathrm{d}x$

Если $\nexists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то несобств. инт. не существует.

Если $\lim \Phi(A) \in \mathbb{R}$, то интеграл сходится.
Если $\lim \Phi(A) = \{\pm\infty\}$ или не сущ., то интеграл расходится.

Пример:

1. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int\limits_1^{A} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln A \underset{A\to+\infty}{\to} +\infty - \text{расходиться}$$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+0} \int\limits_A^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln A \underset{A\to+0}{\to} +\infty - \text{расходиться}$

3. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{A} + 1 \to 1 - \text{сходиться}$

4. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \sin x = \lim_{A\to+\infty} -\cos A + \cos 1 - \text{не существует}$

Замечание:

1. $f \in C[a,b] : \displaystyle\int\limits_a^{\to b} f = \int\limits_a^{b} f - \text{очевидно}$
2. Теперь можно находить $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty}$ (стрелочка не нужна, потому что нет путаницы)
3. Стрелочка не меняет значения для собственных интегралов, а несобственность и так понятна

$$\int\limits_a^{\to b} f = F\Big|_a^{\to b} = \lim_{A\to b-0} F(A) - F(a)$$

Свойства:

1. Критерий Больцано-Коши

   Напоминание для фунций:

   $\exists$ кон. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \forall x_1 : |x_1 - a| < \delta, \forall x_2 : |x_2 - a| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

   Для интегралов:

   Сходимость $\displaystyle\int\limits_a^{\to b} f \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta \in [a,b) : \forall A, B > \Delta \quad \left|\int\limits_A^{B} f\right| < \varepsilon$

   Отрицание: $\exists\ \varepsilon > 0 : \forall\Delta \in [a,b) \quad \exists A, B > \Delta : \left|\displaystyle\int\limits_A^{B}\right| \geq \varepsilon$,

   т.е. если $\exists\ \varepsilon\ \exists\ (a_n), (b_n) \to b - 0 \quad \left|\displaystyle\int\limits_{a_n}^{b_n} f\right| \geq \varepsilon \Rightarrow \int\limits_a^{\to b}$ расходится

   Пример:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x - \text{расходится}$$

$$A_n = 2\pi n, B_n = 2\pi n + \pi : \int\limits_{A_n}^{B_n} \sin x = 2 \geq \varepsilon = 2$$

2. Аддитивность по промежутку

$\forall c \in (a, b)$, пусть $\exists \int\limits_a^{\to b} f \Rightarrow \int\limits_a^{\to b} f = \int\limits_a^{c} f + \int\limits_c^{\to b} f$

Доказательство:

Очевидно. Берём $A : c < A < b$

$$\int\limits_a^A f = \int\limits_a^c + \int\limits_c^A, \quad A \to b - 0$$

Соглашение. f — допустимая для $\int\limits_0^{\to +\infty}, \int\limits_{\to -\infty}^{0} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f = \int\limits_0^{+\infty} f + \int\limits_{-\infty}^{0} f = \int\limits_{2024}^{+\infty} f + \int\limits_{-\infty}^{2024} f$, если сложение корректно (не случается ситуации $+\infty - \infty$)

Общее соглашение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, кроме a_1, a_2, a_3

$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < b_4$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f = \int\limits_{-\infty}^{b_1} + \int\limits_{b_1}^{\to a_1} + \int\limits_{\to a_1}^{b_2} + \int\limits_{b_2}^{\to a_2} + \int\limits_{\to a_2}^{b_3} + \int\limits_{b_3}^{\to a_3} + \int\limits_{\to a_3}^{b_4} + \int\limits_{b_4}^{+\infty}$, если все существует и сложение корректно.

Пример:

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \cancel{= 0}$, т.к. он расходится (возникает выражение $-\infty + \infty$)

Можно сделать небольшой трюк: $\int\limits_{-1}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 0$, но это достатоно опасно так что не стоит так делать.

Следствие:

$a < A < b, \int\limits_a^{\to b} f$ сходится, тогда $\int\limits_A^{\to b} f \xrightarrow[A \to b - 0]{} 0$

Доказательство:

$$\int\limits_a^{\to b} f = \underbrace{\int\limits_a^{A} f}_{\downarrow \atop \int\limits_a^{\to b} f} + \underbrace{\int\limits_A^{\to b} f}_{\downarrow \atop 0}$$

3. f, g — допустимые на $[a, b)$, $\int\limits_a^{\to b} f, \int\limits_a^{\to b} g$ сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустимы и $\int\limits_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int\limits_a^{\to b} f, \quad \int\limits_a^{\to b} f + g = \int\limits_a^{\to b} f + \int\limits_a^{\to b} g$

Доказательство:

Упражнение читателю.

4. f, g — допустимы, $\int\limits_a^{\to b} f, \int\limits_a^{\to b} g$ сущ., $f \le g$

   Тогда $\int\limits_a^{\to b} f \le \int\limits_a^{\to b} g$

   Доказательство:

   При $a < A < b \quad \int\limits_a^A f \le \int\limits_a^A g, \quad A \to b - 0$

5. Интегрирование по частям:

   f, g — дифф, f', g' — допустимы. Тогда*

   $$\int\limits_a^{\to b} fg' = fg \Big|_a^{\to b} - \int\limits_a^{\to b} f'g$$

   Доказательство:

   $$\int\limits_a^A fg' = fg \Big|_a^A - \int\limits_a^A f'g, \quad A \to b - 0$$

   *: если $\exists$ 2 выражения со стрелочками, то $\exists$ и третий и имеет место "="

6. Замена переменной:

   $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B \rangle, \ \varphi \in C^1$

   $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}, f \in C(\langle a, b \rangle)$

   Тогда: $\int\limits_\alpha^{\to \beta} (f \circ \varphi)\varphi' = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\to \varphi(\beta - 0)} f$

   Доказательство:

   $$f \in C[a, b] \quad \lim_{A \to b - 0} \int\limits_a^A f = \lim_{A \to b - 0} \left(\int\limits_a^b f - \int\limits_A^b f \right) = \int\limits_a^b f$$

   $$\left| \int\limits_A^b f \right| \le \max |f| \cdot (b - A) \to 0$$

10. Признаки сходимости интеграла

Наблюдение.

f — допустима на $[a, b)$, $f \ge 0$, $\Phi(A) = \int\limits_a^A f$

$\int\limits_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \Phi$ — огр. (очевидно: $\Phi \nearrow$)

В этом случае $\lim\limits_{A \to b - 0} \Phi(A) = \sup\limits_{[a, b)} \Phi$

Теорема: *признак сравнения*

f, g — допустимые на $[a, b)$, $f, g \ge 0$

1. $f \le g$ на $[a, b]$. Тогда:

- Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится
- Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится

2. $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
   - $l \in (0, +\infty) : \int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ сходятся одновременно, расходятся тоже
   - $l = 0 : \int\limits_a^b f$ расходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g$ расходится; $\int\limits_a^b g$ сх $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ сходиться
   - $l = +\infty : \int g$ расходится $\Rightarrow \int f$ расходится; $\int f$ сх $\Rightarrow \int g$ сходиться

Доказательство:

1. $$f \le g \quad \Phi(A) = \int\limits_a^A f, \Psi(A) = \int\limits_a^A g, \quad \Phi \le \Psi$$

   $\int\limits_a^b f$ расходиться $\Rightarrow \Phi$ неограничена $\Rightarrow \Psi$ неограничена $\Rightarrow \int\limits_a^b g$ расходиться

   $\int\limits_a^b g$ сходиться $\Rightarrow \Psi$ ограничена $\Rightarrow \Phi$ ограничена $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ сходиться

2. Сходимость $\int\limits_a^b f$ или при $c \in (a, b)$ сходимостьсть $\int\limits_c^b f$ — одно и то же

   - $l \in (0, +\infty) : \exists\ c \in (a, b)$: при $x \in (c, b) \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}l$

     $\int\limits_a^b f$ сходиться $\Rightarrow \int\limits_c^b f$ сходиться, на $(c, b) \quad \frac{l}{2}g(x) < f(x) \Rightarrow \int\limits_c^b \frac{l}{2}g$ сходиться $\Rightarrow \int\limits_c^b g$ сходиться

     $\int\limits_a^b g$ сходиться $\Rightarrow \int\limits_c^b g$ сходиться, $f < \frac{3}{2}g \Rightarrow \int\limits_c^b \frac{3}{2}g$ сходиться $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ сходиться
   - $l = 0 \quad$ для $\varepsilon = 1 \quad \exists\ c : \forall x \in (c, b) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 1$, т.е. $f < g$ и результат слеюует из 1 части признака

     для $\text{E} = 1 \quad \exists\ c : \forall x \in (c, b) \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 1$

Примеры:

1. “Эталоны”:
   $$\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^{+\infty}, & p \ne 1 \\ \ln x\Big|_a^{+\infty}, & p = 1 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} \text{кон}, & p > 1 \\ +\infty, & p \le 1 \end{array}\right.$$

   $$\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} \text{кон}, & p < 1 \\ +\infty, & p \ge 1 \end{array}\right.$$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

$\frac{\cos^2 x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow$ проверим $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ – он сходиться $\Rightarrow$ изначальный сходиться

3. $\displaystyle\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}\ln x} \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Попробуем заменить f на эквивалентную: $f \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{x}\ln x}$

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{x}\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty, \int^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \\
&\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} > \frac{1}{x}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{x}\ln x}\,\mathrm{d}x - \text{расходится}$$

4. $\displaystyle\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

   1. $\alpha > 1 : \alpha = 1 + 2a,\ a > 0$

      $$\frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$$

      $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a (\ln x)^\beta = +\infty \Rightarrow$ при больших x : $\left(\exists\ c : \forall x > c :\ \dfrac{1}{x^a(\ln x)^\beta} < 1\right)$ – но это надо доказать

      Докажем что предел $+\infty$ при помощи правила Лопиталя: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^{-\beta}} = \left(\underbrace{\lim \left(\frac{x^{\frac{a}{-\beta}}}{\ln x}\right)}_{\searrow+\infty}\right)^{-\beta} = +\infty$

      Предел в скобках тоже найдем при помощи правила Лопиталя: $\lim \frac{x^\gamma}{\ln x} = \lim \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{\frac{1}{x}} = \lim \gamma x^\gamma = +\infty$

      $\displaystyle\int\limits_{10}^{+\infty} \to \int\limits_{c}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}}_{<1} < \int\limits_{c}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+a}}$ – сходится $\Rightarrow$ при $\alpha > 1$ интеграл начальный сходиться.

      Название только что примененного приёма: *удавить логарифма*)

   2. $\alpha < 1 : \alpha = 1 - 2a, a > 0$

      $$\frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{1}{x^{-a}(\ln x)^\beta}$$

      $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} = \ldots = +\infty$$

      При $x > c$: $\quad \dfrac{1}{x^{-a}(\ln x)^\beta} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^{1-a}} \cdot \dfrac{1}{x^{-a\ln x}} > \dfrac{1}{x^{1-a}} \Rightarrow$ интеграл расходиться

   3. $\alpha = 1$:

      $$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta} \underset{y=\ln x}{=} \int\limits_{\ln 10}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\beta} - \text{это эталонный случай: } \beta \le 1 - \text{расходится},\ \beta > 1 - \text{сходится}$$

10.1. Γ-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, t > 0$$

1. При $t > 0$ интеграл сходится: $\int\limits_0^1 x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, т.к. $x^{t-1}e^{-x} \underset{x\to+0}{\sim} x^{t-1}$ — эталонный случай (сходиться)

   $x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{t-1}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

   то, что выделеная часть стремиться к 0, означает, что $\exists\ c : \forall x > c \quad e^{-\frac{x}{2}}x^{t-1} < 1$

   Получается, что $e^{-\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}x^{t-1}}_{<1} < e^{-\frac{x}{2}}$ и нам необходимо проверить сходимость следующего интеграла:

   $\int\limits_c^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_c^{+\infty}$ — сходиться, значит и изначальный сходиться.

2. Γ — выпукла на $(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma$ — непрерывна
   Для начала покажем, что подынтегральная фукнция выпукла: $t \mapsto f_{x(t)} = x^{t-1}e^{-x}$
   Для этого возьмем две производные:
   $f'(t) = x^{t-1}\ln xe^{-x}$

   $f''(t) = x^{t-1}\ln^2 xe^{-x} \geq 0$ — значит действительно выпукла.

   Напишем определение выпуклосьи: $\forall t_1, t_2\ \forall\alpha \in (0,1) \quad f_{x(\alpha t_1 + (1-\alpha t_2))} \leq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f_x(t_2)$

   Интегрируем это неравенство по x : $\int\limits_0^{+\infty} f_x(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\,\mathrm{d}x \leq \alpha \int\limits_0^{+\infty} f_x(t_1)\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int\limits_0^{+\infty} f_x(t_2)\,\mathrm{d}x$

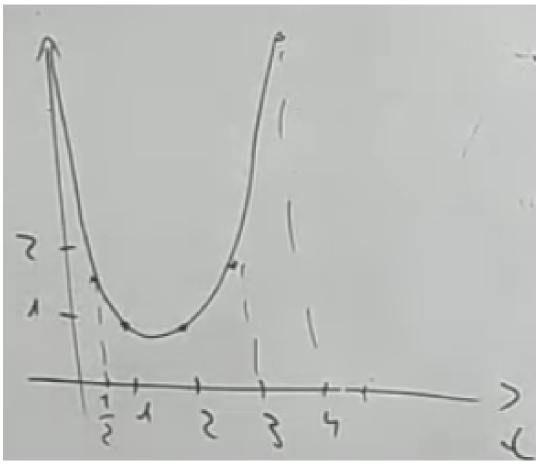
   Для понимания происходящего: последнее слагаемое имеет такой вид: $(1-\alpha)\int\limits_0^{+\infty} x^{t_2-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$

   Итого мы получили, что $\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$, а это как раз занчит что

   Γ выпуклая ⇒ Γ — непрерывна

3. 1. $\Gamma(t+1) = \int\limits_0^{+\infty} \underset{f}{x^t}\underset{g'}{e^{-x}}\,\mathrm{d}x = x^t\underset{=0}{(-e^{-x})}\Big|_{x\,=\,0}^{x\,=\,+\infty} + t\int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = t\cdot\Gamma(t)$
   2. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$
   3. $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$

      $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}$
   4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$



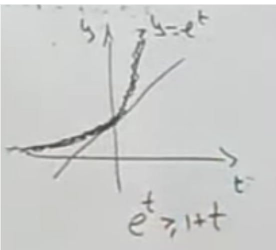
10.2. Интеграл Эйлера-Пуассона

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{y}}{=} \int\limits_0^{+\infty} \tfrac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Доказательство:

$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ — левая часть это выпуклость в прямом её виде, правая часть: $1 + x^2 \leq e^{x^2}$ — тоже выпуклость.



$$\underbrace{\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n}_{\underset{x=\cos t}{=} w_{2n+1}} \leq \int\limits_0^1 e^{-nx^2} \leq \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}}_{\underset{x=\frac{y}{\sqrt{n}}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I} \leq \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x}_{\underset{x=\mathrm{tg}\, t}{=} w_{2n-2}}$$

Здесь в качестве w использовался интеграл из формулы Валлиса:

Формула Валлиса:

$$w_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \left[\begin{array}{ll} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{четн} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\quad, & \text{нечет} \end{array}\right.$$

В частности: $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \to \sqrt{\pi}$

Итого мы получили:

$$w_{2n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} I \leq w_{2n-2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n} \leq I \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\frac{1}{\sqrt{n-1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}\frac{n}{2n+1} \to \sqrt{\pi}$$

10.3. Абсолютно сходящиеся интегралы

Определение: абсолютно сходящийся интеграл
f — допустимая на $[a, b)$

$$\int\limits_a^b f \text{ абсолютно сходится} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_a^b f - \text{сходится} \\ \int\limits_a^b |f| - \text{сходится} \end{cases}$$

Теорема:
f — допустимая на $[a, b)$. Тогда эквивалентны:

1. $\int\limits_a^b f$ — абсолютно сходиться
2. $\int\limits_a^b |f|$ — сходится
3. $\int\limits_a^b f_+, \int\limits_a^b f_-$ оба сходятся

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$: Да. 😎

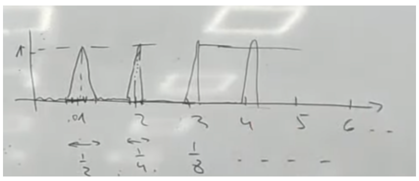
$2 \Rightarrow 3$: $0 \le f_\pm \le |f|$

$3 \Rightarrow 1$: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-, \quad \int\limits_a^b |f| = \int\limits_a^b f_+ + \int\limits_a^b f_-$

Замечание:

$$\int\limits_a^b f \text{ сходится} \nRightarrow f \underset{x \to b-0}{\longrightarrow} 0$$

Пример:
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$



Можно подобрать ширину так, чтобы высота n-го треугольника $= n!$, площадь $= \frac{1}{2^n}$ и получиться кусочно непрерывная функция, у которой сходящийся интеграл, но которая при этом не стремиться к 0 и даже не ограничена.

Продолжаем абсолютно сходящиеся интегралы

Пример:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{R} - \text{изучим абсолютную сходимость}$$

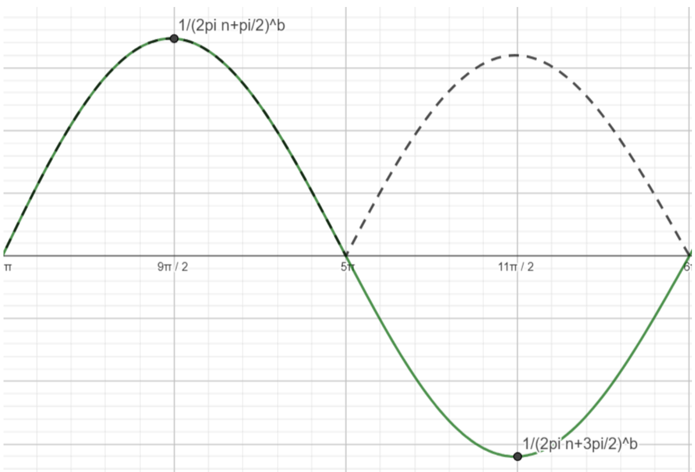
1. $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p} \quad \Rightarrow \quad$ при $p > 1$ сходится абсолютно

2. При $p < 0 \qquad \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \ge (2\pi n)^{-p} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x \ge 2(2\pi n)^{-p}$ расходится (в т.ч. абс. расх.)

3. При $p = 0$ тоже расходится: $\left|\int\limits_{A^n}^{B_n} \sin x\right| > \frac{1}{1000}, \quad A_n = 2\pi n, B_n = 2\pi n + \pi, A_n, B_n \to +\infty$

4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x, \quad p \in (0, 1] \approx \int\limits_1^{+\infty} \frac{10^{-6}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ расходится

$$\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^p} \ge \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\pi n} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} - \text{нет абс сходимости}$$



$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{1}{x^p}\sin x + \int\limits_{2\pi n+\pi}^{2\pi n+2\pi} \frac{1}{x^p}\sin x$$

$$y = x - \pi$$

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^p} - \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin y}{(y+\pi)^p}\sin x$$

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\left(\frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+\pi)^p}\right)$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \left[f = \frac{1}{x^p} \;\; g' = \sin x\right] = -\frac{\cos x}{x^p}\,\Bigg|_1^{+\infty} - p\underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}}_{\text{абс. сх.}}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^p} dx = \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{=+\infty} - \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{сх}}$$

10.4. Признаки сходимости

Теорема: (*признак Дирихле*)

f, g — допустимы на $[a, b)$

Пусть:

1. первообразная f ограничена: $\exists C : \forall B \in (a, b) \quad \left|\int\limits_a^B f\right| \leq C$

2. $g(x)$ — монотонная, $g \in C^1([a, b]), \quad g(x) \underset{x \to b-0}{\longrightarrow} 0$

Тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

Доказательство:

Обозначим $F(B) = \int\limits_a^B f$ — первообразная.

$$\int\limits_a^b fg = \underbrace{F(x)g(x) \Big|_a^{\to b}}_{\text{огр} \cdot \text{б.м.}} - \underbrace{\int\limits_a^{\to b} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{абс. сх.: } \int\limits_a^{\to b} |F(x)| \cdot |g'(x)|\,\mathrm{d}x \leq}$$

$$\leq C \int\limits_a^{\to b} |g'|\,\mathrm{d}x = \pm C \int\limits_a^{\to b} g'\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pm g(x) \Big|_a^{\to b}$$

Тут в оценке у второго интеграла мы воспользовались тем что, $g(x)$ — монотонная, поэтому $g'(x)$ всегда одного знака и модуль может раскрыться только двумя способами.

Теорема: (*признак Абеля*)

f, g — допустимые на $[a, b)$

Пусть:

1. $\int\limits_a^{\to b} f$ — сходится

2. $g \in C^1([a, b]), g(x)$ монотонна, ограничена

Тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ сходится.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{\to b} fg = \underbrace{\int\limits_a^{\to b} f\alpha}_{\text{сх по п.1}} + \underbrace{\int\limits_a^{\to b} f(g-\alpha)}_{\text{сх по Дирихле}}$$

Пример:

$$\int\limits_1^{+\infty} \tfrac{\sin x}{x^p}: \quad f = \sin x \quad F = \cos x - \text{огр.} \quad g = \tfrac{1}{x^p},\ p > 0 \Rightarrow \text{монот}, \to 0 \longrightarrow \text{сх по Дирихле}$$

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \sin(x^3 - x)\,\mathrm{d}x : \quad \underbrace{f = (3x^2-1)\sin(x^3-x),}_{F = -\cos(x^3-x) - \text{ огр.}} \quad \underbrace{g = \tfrac{1}{3x^2-1}}_{\text{монот}, \to 0} \Rightarrow \text{сходится}$$

10.5. Интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Для начала покажем, что: $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\left(\pi + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$

Напоминание из тригонометрии: $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$

$2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)$

Получается телескопическая сумма, и после сокращения всего получисться верное равенство.

Теперь проинтегрируем обе части : $0 = \displaystyle\int\limits_0^{\pi} \cos x + \ldots + \cos nx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}$

Переносим $\frac{\pi}{2}$ в другую сторону: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Проверим, что $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

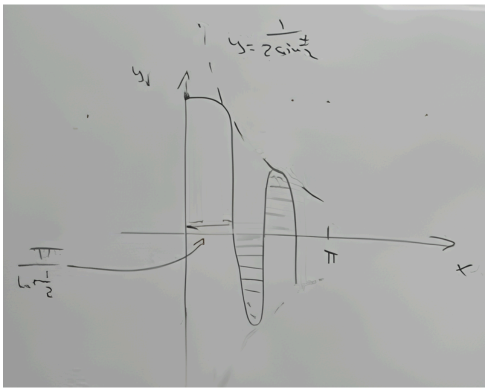
Если это выполняется, то $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\left(\sin n + \frac{1}{2}\right)x}{x} \to \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}$

Утверждение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{x}$ (пусть $f(0) = 0$) чтобы была непрерывность на $\mathbb{R}$)

$$f' = \frac{-\cos\frac{x}{2}}{2^2 \cdot \sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} f' = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2\frac{x}{2} - x^2\cos\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{x^4} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \quad ☺$$

$$\int\limits_0^{\pi} \underbrace{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}_{g'} \cdot \underbrace{f(x)}_{f}\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} \cdot f(x)\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \underbrace{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\, \underbrace{f'(x)}_{\text{непр}}}_{\text{непр}}\,\mathrm{d}x}_{\leq \text{const}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$



10.6. Интегрирование ассимптотических разложений

Напоминание:

$\varphi_k : (a, b) \to \mathbb{R}$

$\underline{x \to a}$ $\quad \forall k \quad \varphi_{k+1} = o(\varphi_k),$ тогда при $x \to a \quad \{\varphi_k\}$ — шкала асимпт. разложения

$\forall n \ f = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + ... + c_n \varphi_n(x) + o(\varphi_n)$

Пример — формула Тейлора: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$

$f \sim \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$

$g \sim \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$

$\forall n \quad f - g = o(\varphi_n), n \to +\infty$

Лемма: (*об интегрировании асимптотических равенств*)

$f, g \in C([a, b)), \quad g \geq 0, \int\limits_a^{\to b} g$ расх

$F(x) = \int\limits_a^x f, \qquad G(x) = \int\limits_a^x g$

Тогда при $x \to b - 0$ из соотношений

$$f = O(g), \quad f = o(g), \ \ f \sim g$$

следует $F = O(G), \ F = o(G), F \ \sim G$

Доказательство:

1. $F = O(G)$:

$\exists M \ \exists x_0$ при $x \in [x_0, b) \quad |f(x)| \leq M g(x)$

Чего мы хотим? Мы хотим похожее неравенство на интегралы: $\int\limits_a^x f \leq \mu \cdot \int\limits_a^x g$

Пусть $\int\limits_a^{x_0} |f| \,\mathrm{d}x = c_1$. $\quad$ Возьмём $x_1 : x_0 < x_1 < b \qquad \int\limits_{x_0}^{x_1} g = \alpha > 0$

При $x > x_1$ $\left|\int\limits_a^x f\right| \leq \int\limits_a^x |f| = \int\limits_a^{x_0} + \int\limits_{x_0}^x \leq c_1 + M \cdot \int\limits_{x_0}^x g = \frac{c_1}{\alpha} \int\limits_{x_0}^{x_1} g + M \int\limits_{x_0}^{x_1} g \leq \left(\frac{c_1}{\alpha} + M\right) \int\limits_{x_0}^x g \leq \left(\frac{c_1}{\alpha} + M\right) \int\limits_a^x g$

2. $F = o(G)$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : |x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} g(x)$

Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 : \left|\int\limits_{x_0}^x f\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \int\limits_{x_0}^x g$

$\exists x_1 > x_0$ для с $:= \int\limits_a^{x_0} f$ при $x > x_1$ $\left|c + \int\limits_{x_1}^x\right| \leq \varepsilon \int\limits_{x_0}^x g$

$\left|\int\limits_{x_1}^x f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{x_1}^x g$

$\int\limits_a^B \underset{B \to b-0}{\longrightarrow} +\infty$

$c < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{x_0}^x g$

$\left|\int\limits_a^{x_0} f\right| \leq \varepsilon \int\limits_{x_0}^x g \leq \varepsilon \int\limits_a^x g$ при $x > x_1$

3. $f \sim g$

$\lim\limits_{x \to b-0} \frac{F(x)}{G(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Лемма:

1. $\varphi_n \in C([a, b])$ $\varphi_n \geq 0$ – шкала асимптотического разложения при $x \to b - 0$

   Пусть $\forall n \quad \Phi_n(x) = \int\limits_x^{\to b} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x$ – сходится, тогда Φ_n – тоже шкала

2. $f \in C([a, b]) \quad F(x) = \int\limits_x^b f$ – сходится

   Пусть $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$

   Тогда $F \sim \sum c_n \Phi_n$

Доказательство:

1. Проверим, что $\Phi_{n+1} = o(\Phi_n)$: $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{-\varphi_{n+1}}{-\varphi_n} = 0$

2. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n)$

$$\lim \frac{F(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \Phi_k}{\Phi_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{f(x) - \sum c_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} = 0$$

Пример:

$\arctan x \underset{x \to +\infty}{\sim} ?$

При дифференцировании:

$$\frac{1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \int\limits_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \sim \int\limits_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

II способ:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \ldots - \text{ряд Тейлора}$$

Проинтегрируем и получим: $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \ldots$

11. Ряды

$$(a_k) - \text{вещественная последовательность}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... - \text{ряд}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \text{ряд в другой записи}$$

$$\forall n \ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n - \text{частичная сумма ряда}$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n \to = \infty} S_n$$

Если предел существует и равен $S \in \overline{\mathbb{R}}$, то S — сумма ряда

- $S \in \mathbb{R}$: ряд сходится
- $S \in \{-\infty; +\infty\}$: ряд расходится

Если предел не существует, то ряд расходится

Замечание:

$S_n - S_{n-1} = a_n$

Примеры рядов:

1. Ряд, состоящий из нулей: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$ — сходится к 0

   Ряд, состоящий из единиц: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$ — расходится

   Ряд, состоящий из чередующихся единиц и минус единиц: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ — расходится

2. Геометрическая последовательность: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$

   $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$

3. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... = e$

   $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$ — чтобы это доказать распишем формулу Тейлора для e^x в $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\to 0}$$

4. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0$

   $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2} + \underbrace{O(\max(1, ...))}_{=O(1)}$

   При $\alpha \leq 1$ ряд расходится

   При $\alpha > 1$ ряд сходится

Определение: n-й остаток ряда

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty}$ – n-й остаток ряда

Соглашение:
$\sum a_k$ – будем называть рядом A
$\sum b_k$ – будем называть рядом B

Свойства:

- $\sum a_k,\ \sum b_k,\ c_n = a_n + b_n \Rightarrow \sum c_k = \sum a_k + \sum b_k$
- $\sum a_k$ сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$ Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$ сходится, $\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$
-
  - $\sum a_k$ сх $\Rightarrow$ любой остаток тоже сходится
  - Если k-й остаток ряда сходится $\Rightarrow$ сам ряд сходится
  - $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_n$, ряд сходится $\Leftrightarrow r_n \to 0$

  Доказательство:
  а) (m-й ост.) $n > m$

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$
  $$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$$

  б) Очевидно

  в) $\Rightarrow$: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \underbrace{S_m}_{\to \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k} + \underbrace{r_{m+1}}_{\to 0}$

  $\Leftarrow$: тривиально

~~нано~~**Теорема:** (*о граблях*):

$\sum a_n$ – сходится, тогда $a_n \to 0$

Доказательство:

$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Пример:

$\alpha \in (0, \pi) : \sum \sin n\alpha$ – расх, т.к.

$\sin n\alpha \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

Грабли:

$\sum \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \to 0$ *Значит, эээ..., ничего, показалось.*

Критерий Больцано-Коши:

ряд сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \left|S_n - S_{n+m}\right| < \varepsilon$

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}\right| < \varepsilon$$

ряд расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall N \quad \exists n > N, \exists m : \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}\right| \geq \varepsilon$

Пример:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x)\,\Big|_0^1 = \ln 2$$

Здесь мы воспользовались суммами Риманна: $\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

12. Сходимость неотрицательных рядов

Лемма:

$a_n \geq 0$. Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow S_n^{(a)}$ – ограничена

Доказательство:

$S_n^{(a)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – возрастает
S_n – ограничена и монотонна $\Rightarrow \exists$ кон $\lim S_n$
$\exists$ кон $\lim S_n \Rightarrow S_n$ – ограничена.

Теорема: (*признак сравнения*)

$\forall a_k, \forall b_k, \quad a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall n \quad a_n \leq b_n$ (или даже $\forall k > 0 : \forall n \quad a_n \leq k b_n$)
   Тогда $\begin{cases} \sum b_k \text{ сх} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх} \\ \sum a_k \text{ расх} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх} \end{cases} \quad (*)$
2. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty)$
   - $0 < l < \infty \quad \sum a_k$ сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ сх
   - $l = 0 \quad$ выполняется $(*)$
   - $l = +\infty \quad \begin{cases} \sum a_k \text{ сх} \Rightarrow \sum b_k \text{ сх} \\ \sum b_k \text{ расх} \Rightarrow \sum a_k \text{ расх} \end{cases}$
3. Пусть начиная с некоторого места $(\exists N_0 \quad \forall n > N_0)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$
   Тогда выполняется $(*)$

Доказательство:

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ при всех $n \quad \left(S_n^{(a)} \leq k S_n^{(b)}\right)$
   - $\sum b_n$ сх $\Rightarrow S_n^{(b)}$ огр $\Rightarrow S_n^{(a)}$ огр $\Rightarrow \sum a_n$ сх
   - $\sum a_n$ расх $\Rightarrow S_n^{(a)}$ – не огр $\Rightarrow S_n^{(b)}$ – не огр $\Rightarrow \sum b_n$ – расх

   Замечание: Можно быдо бы в условии $a_n \leq b_n$ начиная с некоторого места
   Соглашение: фразу “начиная с некоторого места” будем обозначать абривеатурой НСНМ
2. $l \in (0, +\infty)$:
   - Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists N : \forall n > N : \quad 0 < \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l \;\Leftrightarrow\; a_n < \frac{3}{2} l b_n,\; b_n < \frac{2}{l} l a_n$

     Теперь использую первое утверждение мы получаем что $\sum a_k$ сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ сх
   - $l = +\infty$:

     $\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} > 1 \Rightarrow a_n > b_n$ – здесь опять используем первое утверждение и победа
   - $l = 0$:

     $\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} < 1$ – аналогично предыдущему пункту
3. Пишем неравенства при $n = N_0 + 1, n+1, ..., n+k-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \\ \ldots \\ \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \leq \frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}} \end{array}\right\} \overset{\text{перемножаем}}{\Rightarrow} \quad \frac{a_{n+k}}{a_n} \leq \frac{b_{n+k}}{b_n} \Rightarrow a_{n+k} \leq \frac{a_n}{b_n} b_{n+k} \text{ – выполено замечание к I пункту}$$

Пример:

Эталонные ряды:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sum \frac{1}{n^\alpha} & \begin{cases} \alpha > 1 & \text{сх} \\ \alpha \le 1 & \text{расх} \end{cases} \\ \\ \sum q^n & \begin{cases} 0 < q > 1 & \text{сх} \\ q \ge 1 & \text{расх} \end{cases} \end{array}}$$

- Исследуем $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{2024} e^{-k}$

  Попробуем доказать, что $k^{2024}e^{-k} < \frac{1}{k^2}$ при больших k

  То есть нужно проверить (после домножения на k^2): $\dfrac{k^{2026}}{e^k} < 1$?

  $\lim \frac{k^{2026}}{e^k} = \left(\lim \frac{k}{e^{\frac{k}{2026}}}\right)^{2026} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \left(\lim \frac{1}{e^{\frac{k}{2026}}} 2026\right)^{2026} = 0 \Rightarrow$ НСНМ то что мы пытались доказать верно.

  Теперь используем первый пункт предыдущей теоремы и первый эталонный ряд — победа

- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}$

  Перепишем эталоны:

  $\sum e^{-\alpha \ln k}, \sum e^{k \ln q}$

  НСНМ $e^{-\sqrt{k}} < \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow e^{\overbrace{-\sqrt{k}+2\ln k}^{\to -\infty}} < 1$. Числитель стремится к бесконечности, т.к. $\lim \frac{\sqrt{k}}{\ln k} = +\infty$

  Используем то же что и в предыдущем пункте — победа

Теорема: (*признак Коши*)
$\sum a_n,\ a_n \ge 0, \quad K_n := \sqrt[n]{a_n}$

light:

1. $\exists\ q < 1 \quad K_n \le q$ НСНМ, тогда $\sum a_n$ сх
2. $K_n \ge 1$ для беск. мн-ва n, тогда $\sum a_n$ расх

pro:

$K := \overline{\lim} K_n = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}$

1. $K > 1 \quad \sum a_n$ расх
2. $K < 1 \quad \sum a - n$ сх

Замечание: Для рядов $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2} \quad K = \lim\ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, но при этом первый ряд расходится, а второй сходится $\Rightarrow$ при $K = 1$ признак не работает

Доказательство:

1. 1. $K_n \le q \Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n} \le q \Rightarrow a_n \le q^n$ а значит $\sum\limits_{(q<1)} q^n$ сх $\Rightarrow \sum a_n$ сх
   2. $K_n \ge 1 \quad a_n \ge 1$ для беск мн-ва номеров $\Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ расходится
2. 1. $K > 1 \quad \overline{\lim} K_n > 1 \Rightarrow \exists$ беск много $n : K_n > 1$ (техн. описание верхнего предела) $\Rightarrow\ \sum a_n$ расх
   2. $K < 1 \quad \exists N_0 : \forall n > N_0 \quad K_n \le q$, где $q \in (k, 1)$ — тоже техн. описание верхнего предела.

Пример:

$\sum k^{2024} e^{-k}$

$\sqrt[k]{k^{2024}e^{-k}} = k^{\frac{2024}{k}} \frac{1}{e} = \underbrace{e^{\frac{2024}{k}\ln k}}_{\to 1} \frac{1}{e} \to \frac{1}{e} < 1$

Теорема: (*признак Д'Аламбера*)

$\sum a_n, a_n > 0 \quad D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$

light:

1. $\exists\ q < 1 \quad D_n \leq q$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ сх
2. $D_n \geq 1$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ расх

pro: Пусть $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} D_n = D$

1. $D < 1 \quad \sum a_n$ сх
2. $D > 1 \quad \sum a_n$ расх

Замечание: $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2} \quad D = 1$☹

Доказательство:

1. 1. НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad a_{n+1} \leq q a_n$

   $$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} \leq q a_n \\ a_{n+2} \leq q a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k} \leq q a_{n+k-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+k} \leq q^k a_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k} - \text{сходится}$$

   2. НСНМ $a_{n+1} \geq a_n$, т.е. $a_n \not\to 0$ – расходится
2. 1. $D < 1 \quad$ НСНМ $D_n \leq q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сх – первый пункт light
   2. $D > 1 \quad$ НСНМ $D_n \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расх – второй пункт light

Пример:

- $\sum k^{2024} e^{-k}$

  $\lim \frac{(k+1)^{2024} e^{-(k+1)}}{k^{2024} e^{-k}} = \frac{1}{e} < 1$
- $\sum e^{-\sqrt{k}}$

  $e^{-\frac{1}{\sqrt{k}}} \to 1$

13. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость последовательности функций

Определение: поточечная сходимость

$f_n, f_0 : E \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$

Последовательность f_n сходится поточечно на E к f_0

$f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f_0$ на $E \Leftrightarrow \forall x \in E \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f_0(x)$

$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$

Пример:

1. $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

   Если $E \subset (0, 1] \quad f_n(x) \to f_0(x) \equiv 0$ на мн-ве E

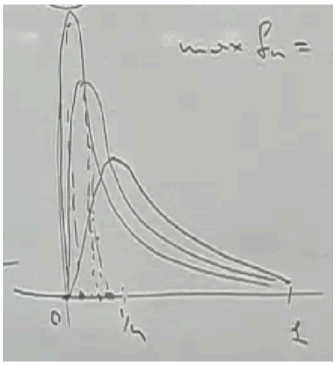
Если же $E \cap (1, +\infty) \neq \varnothing \Rightarrow$ поточечной сходимости нет т.к. значения $f_n \underset{n,x\to+\infty}{\to} +\infty$

2. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}, \quad 0 < \alpha < 2, x \in [0,1]$

   при $x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f_0(x) \equiv 0$

   $\max f_n = ? \quad f_n' = n^\alpha \frac{1+n^2x^2 - xn^2 2x}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Rightarrow n^2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$

   $\max f_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^\alpha \frac{1}{n}}{1+1} = \frac{n^{\alpha-1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\overset{\alpha>1}{\longrightarrow}} +\infty$



Итого мы получили последовательнсоть фукнций которая поточечно сходиться к тождественному 0, но при этом при $n \to +\infty$ её максимальное значение $\to +\infty$.
Почему она поточечно сходитсья?
С точки зрения графика джля каждой точки будем ждать когда n станет настолько большим, что этот "гребень" окажется сильно левее нее, а значение соответственно в нашей точке будет стремится к 0.

Определение: равномерная сходимость

$f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}, E \subset X$

f_n равномерно сх-ся к f на мн-ве E, обозначается: $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f$ на мн-ве E

$M_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Замечание: Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, т.е. $f_n \to f$ поточечно

Пример:

1. $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

   Мы уже выяснили, что: $E \subset (0,1] \quad f_n(x) \to f_0(x) \equiv 0$ на мн-ве E

   Проверим, есть ли равномерная сходимость: $f_n \overset{?}{\rightrightarrows} f_0 \equiv 0$

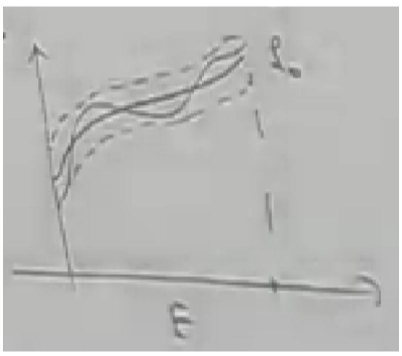
   $M_n := \sup\limits_{x\in E} \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f_0 \equiv 0$

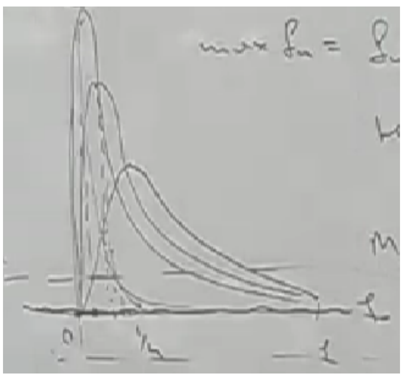
2. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}, \quad 0 < \alpha < 2, x \in [0,1]$

   при $x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f_0(x) \equiv 0$

   Есть ли равномерная сходимость?

   $$M_n := \sup_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} = \frac{n^{\alpha-1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 1 \Rightarrow M_n \nrightarrow 0 & \text{нет равномерной сходимости} \\ \alpha < 1 & \text{есть равномерная сходимость} \end{cases}$$





Замечание: $f_n \rightrightarrows f$ на $E, E_0 \subset E$ Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на E_0

Замечание: $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ огр}\}$

$f_1, f_2 \in \mathcal{F} \quad \rho(f_1, f_2) = \sup\limits_X |f_1 - f_2|$ – это метрика

1. $\rho \geq 0, \rho = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$ – очевидно
2. $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$ – очевидно
3. $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$

   Доказательство:
   Напишем определение sup:

   $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x : \underline{\rho(f_1, f_2) - \varepsilon} \leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \leq \underline{\rho(f_1, f_2) + \rho(f_3, f_2)}$

   Получили ровно то, что хотели: $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3) + \varepsilon$

Теорема: (*Стокса-Зайделя*)

$f_0, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}, X$ – МП, $c \in X$, f_n непр в точке c, $f_n \rightrightarrows f_0$ на X, тогда f_0 непр в точке c

Доказательство:

$|f_0(x) - f_0(c)| \leq [\text{берём любое } n] \leq \underbrace{|f_0(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon \text{ по } (*)} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f_0(c)|}_{<\varepsilon \text{ по } (*)} \overset{?}{\leq} 3\varepsilon$

Только что сверху мы дважды написали неравенство треугольника / одно неравенство ломаной, кому как удобнее

$f_n \rightrightarrows f_0 : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \sup|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad (*)$

Фиксируем любое такое n

f_n непрерывна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(c) : \forall x \in U(c) \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$

Подставим это в неравенство с ? которое мы хотелипрвоерить:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(c) : \forall x \in U(c) \quad |f_n(x) - f_n(c)| \leq 3\varepsilon$ – непрерывность f_0 в точке c

Следствие:

$f_n \in C(X), f_n \rightrightarrows f_0$ Тогда $f_0 \in C(X)$

Замечание:

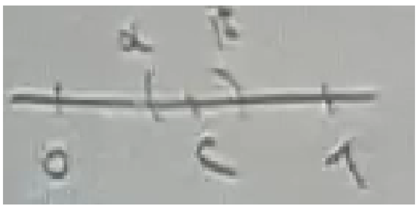
1. Теорема верна в топологическом пространстве с тем же доказательством
2. Для непрерывности f_0 в точке c достаточно иметь равномерную сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на $V(c)$

Пример:

$f_n(x) = x^n \quad x \in (0, 1) \quad f_n(x) \to f_0 \equiv 0$

$f_n \rightrightarrows f_0? \quad \sup\limits_{x \in (0,1)} x^n = 1 \not\to 0$, нет равномерной сх-сти

Но!



$\sup\limits_{x \in (\alpha, \beta)} |f_n - f_0| = \sup x^n = \beta^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

т.е. в каждой точке кроме 1 есть равномерная сходимость на ее окрестности

Пример:

Пусть $X = K$ — компактно, $f_1, f_2 \in C(K)$

$M_n := \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)| = \max |f_1(x) - f_2(x)|$ — чебышёвское расст.

Теорема:

K — компакт, для $f_1, f_2 \in C(K) \quad \rho(f_1, f_2) = \max|f_1 - f_2|$ — метрика на $C(K)$. Тогда $C(K)$ — полное МП

Доказательство:
Берём фунд. посл. в $C(K) \quad (f_n)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N \quad \max\limits_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Заметим, что $\forall x_0$ посл. $f_n(x_0)$ — фунд. числ. посл. $\Rightarrow \forall x_0 \quad \exists \lim f_n(x_0) = f_0(x_0)$

Итого мы получили: $\exists f_0 : f_n \to f_0$ поточечно на X

? Почему $f_0 \in C(K)$ и $f_n \rightrightarrows f_0$?

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N \quad \forall x \in K \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ — в силу фундаментальности $f_n(x)$

Устремим в этой формуле m к $+\infty$:

$f_m(x) \underset{m \to +\infty}{\to} f_0(x) \Rightarrow$ при $m \to +\infty$ формула перепишется так :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \max\limits_{x \in K} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon$

Ну а это как раз и означает, что $\rho(f_n, f_0) \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f_0$ и тогда $f_0 \in C(K)$ (по т. Стокса-Зайделя)

14. Предельный переход под знаком интеграла

Хотим сформулировать теорему:

Некоторые функции $f_n(x) \to f_0(x)$

Тогда

$$\int_a^b f_n(x) \to \int_a^b f_0(x)$$

Антипример:

$f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^n) \quad x \in [0, 1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f_0(x) \equiv 0$

$$\int_0^1 nx^{n-1}(1 - x^n)\,\mathrm{d}x = [t = x^n] = \int_0^1 1 - t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Функции стремятся к 0, но интеграл равен $\frac{1}{2} \Rightarrow$ Желаемой теоремы не существует

$$\lim\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \neq \int_a^b (\lim f_n(x))\,\mathrm{d}x$$

Теорема: Предельный переход под знаком интеграла

$f_n, f \in C[a, b], \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Доказательство:

Тривиально.

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f|\,\mathrm{d}x \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| \to 0$$

Следствие: (правило Лейбница: дифференцирование интеграла по параметру)

$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ — непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$

$$\forall x, y : \exists f'_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$. Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$:

$\Phi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,\mathrm{d}x$

Доказательство:

$$\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h}=\int\limits_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h)\,\mathrm{d}x$$
$$\theta\in(0,1),\ \ \theta=\theta(x,y)$$

(В последнем равенстве нами была использована теорема Лагранжа)

Хотим в этой формуле считать $\lim\limits_{h\to 0}$. Будем делать это по Гейне, $h_n\to 0$

Проверим, что $f'_y(x,y+\theta h_n)\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$ равномерно по $x\in[a,b]$

Т.е. $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f'_y(x,y+\theta h_n)-f'_y(x,y)\right|\underset{n\to+\infty}{\dashrightarrow}0$

Знаем: f'_y — непрерывно на $[a,b]\times[c,d]$ (компакт) $\Rightarrow f'_y$ — равномерно непрерывно:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall^{(x,y)}_{(x_1,y_1)}\ \rho((x,y),(x_1,y_1))<\delta:\left|f'_y(x,y)-f'_y(x_1,y_1)\right|<\varepsilon$$

Используем это чтобы проверить что предел действительно 0:

$$\forall\varepsilon>0\ [\text{текст }(*)]\ \forall n>N\quad\forall x,\forall y\quad\left|f'_y(x,y+\theta h_n)-f'_y(x,y)\right|<\varepsilon$$

$(*)$: $h_n\to 0\Rightarrow\exists N:\forall n>N\quad|h_n|<\delta$ — из определения равн. непр.

Это победа, предел действительно 0!

Итак:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h_n}=\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h_n)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Хотим предельный переход под знаком производной:

Возьмём функцию, стремящуюся к другой

$f_n(x)\to f_0(x)$

Продифференцируем: $f'_n(x)\overset{?}{\dashrightarrow} f_0(x)$

Контрпример:

$f_n(x)=x+\frac{1}{n}\sin(n^{2024}\cdot x)$

$f_{n(x)}\rightrightarrows x$

$f'_n\overset{?}{\to}1$

НЕТ: $f'_n(x)=1+\underbrace{n^{2023}\cdot\cos(n^{2024}x)}_{\text{☹}}$

Теорема: (о предельном переходе под знаком производной)

$f_n\in C^1(\langle a,b\rangle)$

Пусть:

$f_n\to f_0$ на $\langle a,b\rangle$

$f'_n\rightrightarrows\varphi$ на $\langle a,b\rangle$

Тогда:

$f_0\in C^1(\langle a,b\rangle)$

$f'_0=\varphi$ на $\langle a,b\rangle$

$$\begin{array}{ll} & f_n \to f_0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & \downarrow \quad\quad \dashdownarrow \\ & f_n' \rightrightarrows \varphi \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n'(x)) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'$$

Доказательство:

$x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle, \quad f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n'(x)\,\mathrm{d}x \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\|$$

$$f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f_0(x_1) - f_0(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = f_0(x_1) - f_0(x_0)$$

— при всех $x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle$

По теореме Барроу:

$\Rightarrow f_0$ — первообразная φ; $\quad f_0' = \varphi$

14.1. Признак Раабе

$a_n > 0$

1. НСНМ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. НСНМ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится

Доказательство:

2.

Сравним ряды $\sum a_n$ и $\sum \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow a_n \text{ — большое, } b_n \text{ — маленькое,}$$

$\sum \frac{1}{n}$ расх $\Rightarrow \sum a_n$ расх

1.

Пусть $1 < s < r$.
Сравним ряды $\sum a_n$ и $\sum \frac{1}{n^s}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(?)}{\leq} \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{(?)}{\geq} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$$

$$\begin{cases} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{(?)}{\geq} n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s \\ \text{НСНМ } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \end{cases} \Rightarrow \text{неравенство } (?) \text{ выполнено при больших n}$$

т.е. ряд $\sum a_n$ — “маленький”, $\sum \frac{1}{n^s}$ — “большой” ($s > 1$)

Следствие:

$$a_n > 0: \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_n + 1} - 1\right) = r$$

Тогда:

1. $r > 1: \quad \sum a_n$ — сходится

2. $r < 1 : \quad \sum a_n$ — расходится

Упражнение:
Доказать, что:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a}$$

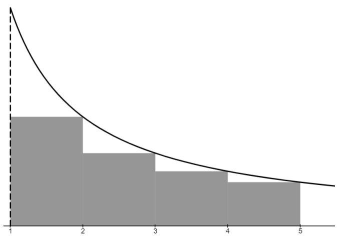
1. При $a > 1$ — сходится
2. При $a \leq 1$ — расходится

Теорема: интегральный признак Коши

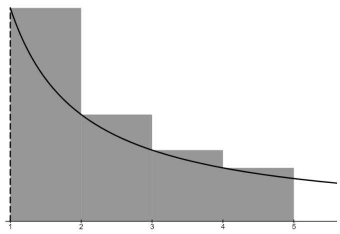
$f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ — непр, монот
Тогда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k), \quad \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ — сх/расх одновременно}$$

Доказательство:
Основной случай: $f \downarrow, f > 0$



$$\int\limits_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=2}^n f(k)$$



$$\sum_{k=1}^{n-1} \geq \int\limits_1^n f(x)dx$$

$$\int\limits_1^n f = \sum_{k=1}^n \int\limits_{k-1}^k f(x)dx \geq \sum_{k=2}^n \int\limits_{k-1}^k f(k) = \sum_{k=2}^n f(x)$$

Замечание: можно требовать

$$\exists M \quad \forall x > M : f \text{ — монотонна}$$

Следствие из интегрального признака Коши:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n(\ln n)^a}\right) = -\frac{1}{n^2(\ln n)^a} - \frac{a}{n^2(\ln n)^{a+1}}$$

Определение: абсолютная сходимость ряда

$\sum a_n$ — абсолютно сходидтся, если

$$\sum a_n \text{ сходится и } \sum |a_n| \text{ сходится}$$

Пример:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Проинтегрируем от 0 до 1:

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{\left|\int\limits_0^1 \dots\uparrow\right| \le \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int\limits_0^1 x^{2n+2} = \frac{1}{2n+3}}$$

Итог: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (ф-ла Грегори-Лейбница)

При этом абсолютной сходимости нет: $\sum \frac{1}{n}$ — расходится, поэтому $\sum \frac{1}{2k}$ — расходится, а $\sum \frac{1}{2k+1}$ можно почленно оценить снизу $\sum \frac{1}{2k}$, а значит он тоже расходится

Объяснение для идиотов:
Признак Раабе:

$$n\left(\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+8}} - 1\right) = \frac{2n}{2n+1} \le 1 - \text{расходится!}$$

"Если вы думаете так, то к вам не придраться, но вы полный идиот"

Теорема:

$\forall$ ряда $\sum a_n$ экв:

1. $\sum a_n$ — абс сх
2. $\sum |a_n|$ — сх
3. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ — сх ($a_n^+ = \max(a_n, 0), a_n^- = \max(-a_n, 0)$)

Доказательство:
Упражнение слушателям.

15. Сходимость произвольных рядов

Теорема: (*признак Лейбница*)

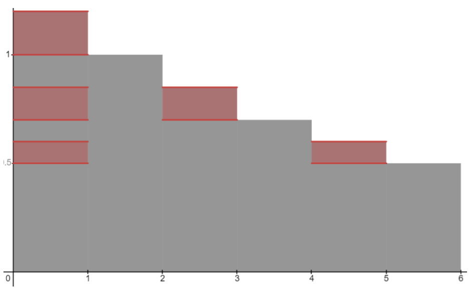
$c_0 \ge c_1 \ge c_2 \ge c_3 \ge \dots \ge 0, c_n \to 0$

Тогда

$$\sum (-1)^n c_n - \text{сх}$$

Секретное дополнение признака Лейбница: Если ряд сх., то

$$\forall N \quad \left|\sum_{k \ge N} (-1)^k c_k\right| \le c_N$$



Доказательство сходимости ряда $(c_0 - c_1) + (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \ldots$

$s_{2n-1} = (c_0 - c_1) + (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \ldots \geq 0$

$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{(c_{2n} - c_{2n+1})}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}$

(s_{2n-1}) — возрастает

s_{2n-1} — ограничено (за счет площади):

$s_{2n-1} = c_0 - (c_1 - c_2) - (c_3 - c_4) - \ldots - (c_{2n-3} - c_{2n-2}) - c_{2n-1} \leq c_0$

Значит $\exists \lim s_{2n-1}$

$s_{2n_{\searrow s}} = s_{2n-1_{\searrow s}} + c_{2n_{\searrow 0}}$

Ряд, для которого не работает признак Лейбница:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

Наш ряд $(-1)^k c_k, \quad$ где $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k} \geq 0$

Монотонность?
$k = 10^6 \quad c_k = \frac{1}{1001}$
$k = 10^6 + 1 \quad c_k \approx \frac{1}{999}$

$k = 10^6 + 2 \quad c_k \approx \frac{1}{1001}$

$f(x)$ — монотонности нет

НЕ РАБОТАЕТ ☹

$\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ — сходится по Лейбницу

$a_k, b_k > 0, \sum a_k, \sum b_k, a_k \sim b_k \Rightarrow \sum a_k, \sum b_k$ сх одновр

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(-(-1)^k\right)}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k} + (-1)^k\right)} = \sum \frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k} + (-1)^k\right)}$$

$\sum \frac{1}{k}$ — расх ☹

Признак сравнения протух.

Преобразование Абеля: (суммирование по частям)

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$

$A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \Leftrightarrow \int f$ — для аналогии с интегралами можно сделать такое сравнение

$\int fg = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)$

Признак Дирихле *(не про зайцев)* и **признак Абеля:**

Дан $\sum a_k b_k$

1. *(Дирихле)* A_n — огр. посл-ть $\left(A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n\right)$, b_n — монот, $b_n \to 0$. Тогда $\sum a_n b_n$ сх
2. *(Абеля)* Ряд $\sum a_n$ сх, b_n — монот, огр. Тогда $\sum a_n b_n$ сходится

Доказательство:

1. A_n — огр, $b_n \to 0 \Rightarrow A_n b_n \to 0, \exists c_A : |A_n| \leq C_A \quad \forall n$

   Применим преобразование Абеля: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\to 0} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \quad (*)$

   $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}||A_k| \leq c_A \sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm c_A \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm c_A (b_1 - b_n) \leq 2 c_A c_B$

   b_n — огр. $\quad \forall n \ |b_n| \leq c_B$

   Значит, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) A_k$ — абс. сходящийся $\Rightarrow$ он сходится $\Rightarrow \exists$ кон $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ldots \Rightarrow$ в $(*)$ всё сходится

2. $\exists$ кон $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \beta$

   $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum a_k \beta}_{\text{сх}} + \underbrace{\sum a_k \left(\overbrace{b_k - \beta}^{\to 0} \right)}_{\text{сх по Дирихле}}$

   $\sum a_k$ сх $\Rightarrow A_k$ — огр

Загадка. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ —?