# Математический анализ
# II семестр

**Лектор: Кохась Константин Петрович**

зима/весна 2024

**_scarleteagle** **ikochelorov**

# Оглавление

**1. Неопределённый интеграл ... 2**

**2. Определённый интеграл ... 3**

2.1. Свойства ... 4

**3. Верхний предел последовательности ... 6**

# 1. Неопределённый интеграл

**Определение:** *первообразная*
$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$F$ — *первообразная* $f$, если $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$

**Теорема:** $f$ — непр на $\langle a, b\rangle \Rightarrow \exists$ пер-я $f$
**Доказательство:**
Чуть позже.

**Теорема:** $F$ — пер-я $f$ на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я $f$
- $G$ — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

**Доказательство:**

- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \mathrm{const}$

**Определение:** *неопределённый интеграл*
*Неопределённый интеграл* функции $f$ на $\langle a, b\rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f$ - пер-я$\}$

**Обозначение:** $\int f, \int f(x) \,\mathrm{d}x$

**Примеры**:

- $\int \frac{1}{x+a^2} \,\mathrm{d}x = \ln\left|x + a^2\right| + C$
- $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \arctan x$
- $\int \frac{1}{x^2-1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ☹
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x} = \arcsin x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

**Теорема:** *о свойствах неопределённого интеграла*
Пусть $f, g$ имеют пер-е на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифф $\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi' \,\mathrm{d}t = \left(\int f(x) \,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}\right) = \int f(\varphi(t)) \,\mathrm{d}\varphi(t)$
  - Можо читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$

**Доказательство:**

- Тривиально.
- Тривиально.
- $F$ — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{1/4} \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16} + 1}\right|$

**Теорема:** $f, g$ дифф на $\langle a, b\rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство:**
$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

**Пример:**

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{x=\sin t \\ [-1,1]\leftrightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}{\overset{???}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

> Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!
>
> — КПК

# 2. Определённый интеграл

**Определение:** *плоская фигура*
*Плоская фигура* — огр. подмн-во $\mathbb{R}^2$

**Определение:** *множество плоских фигур*
$\mathcal{E}$ = мн-во плоских фигур

**Определение:** *площадь*
*Площадь* — функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$ *(площадь прямоугольника)*

**Новости** (хорошая и странная):
Площади существуют, площадей много.

**Замечание:**

- $\sigma$ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

**Определение:** *ослабленная площадь*
*Ослабленная площадь* $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- $\sigma$ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

**Новости** (хорошие и странные):
Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

**Пример:**
$$\sigma_1 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{кон.}} P_k\right\}$$

$$\sigma_2 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{счётн.}} P_k\right\}$$

$\sigma_1\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = 1$
$\sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = \sigma_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right]$
$\Rightarrow \sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = 0$
$\sigma_1$ и $\sigma_2$ различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

**Определение:** *положительная срезка*
Положительная срезка $f$: $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка $f$: $f^- = \max(-f, 0)$.

**Замечание:**
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

**Определение:** *подграфик функции*
$f \geq 0$ на $[a,b], E \subset [a,b]$. *Подграфик ф-ции $f$ на мн-ве $E$* $\Pi\Gamma(f, E) == \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

**Определение:** *определённый интеграл*
Определённый интеграл функции $f$ на $[a,b]$ $\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b]))$

## 2.1. Свойства

**Замечание:**
Далее считаем $f \in C([a,b])$

**Замечание:**

- $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \quad \int\limits_a^b f = c(b-a)$ 🙂
- $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
- при $a = b \quad \int\limits_a^b = 0$

**Свойство 1:** *аддитивность по промежутку*

$\forall c \in [a,b] \int\limits_a^b = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

**Свойство 2.** *монотонность*

$f, g \in C([a,b]), f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

**Доказательство:**
$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$

**Следствие:**

$$\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) < \Pi\Gamma(g^+[a,b]) \Rightarrow \sigma(\Pi\Gamma(f^+)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^+))$$
$$\sigma(\Pi\Gamma(f^-)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^-))$$

**Свойство 3:** $f \in C[a, b] \Rightarrow$

1. $\min f \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \max f(b-a) \leq \max f \cdot (b-a)$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$

3. $\exists c \in [a, b] : \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

**Доказательство:**
2.
$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$-\int\limits_a^b |f| \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$

3.
Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \neq b$: $\min f \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a} \int\limits_b^a f$ — значение $f$ в некоторой точке

**Определение:** *интеграл с переменным верхним пределом*
$f \in C([a, b]), \Phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — *интеграл с переменным верхним пределом*

**Теорема:** (*Барроу*)
$\Phi$ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a, b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

**Доказательство:**

$$\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \left(\int\limits_a^x f + \int\limits_x^y f\right) - \int\limits_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

**Пример:**

$$\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int\limits_a^{x^3} - \int\limits_a^{x^2}\right)'_x = \left(\Phi(x^3) - \Phi(x^2)\right)' = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^4} \cdot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \int\limits_{\int\limits_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}^{\int\limits_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{s^4+2s}\,\mathrm{d}s} \sin n^2\,\mathrm{d}n \right)$$ 😉

**Теорема:** (*формула Ньютона-Лейбница*)

$f \in C([a, b]), F$ — пер-я $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

**Доказательство:**

$\Phi = F + C$

$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

> До Ньютона не было законов Ньютона
>
> — КПК

# 3. Верхний предел последовательности

**Определение:** *частичный предел последовательности*

$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \to a$, то $a$ — *частичный предел последовательности* $(x_n)$

**Пример:**

- $x_n = (-1)^n$
  $n_k : 2, 4, 6, ... \Rightarrow x_{n_k} \to 1$
  $n_k = 1, 3, 5, ... \Rightarrow x_{n_k} \to -1$

**Определение:** *верхний предел / нижний предел*

$(x_n) \subset \mathbb{R}, \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \quad z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...) \Rightarrow z_n \le x_n \le y_n, \quad y_{n+1} \ge y_n, \quad z_{n+1} \le z_n$

*Верхний предел* $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \operatorname*{limsup}\limits_{n \to + \inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

*Нижний предел* $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \operatorname*{liminf}\limits_{n \to + \inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$

**Теорема:**

- $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$
- $\forall n \quad x_n \le \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} \tilde{x}_n, \underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} \tilde{x}_n$
- $\lambda \ge 0 \quad \overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$ $(\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim} \lambda x_n = \overline{\lim} \lambda x_n = 0)$
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim} x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim} x_n\right)$
- $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$
  $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \ge \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$

$(x_n)$
$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n \le x_n \le y_n$
$\overline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$
$\underline{\lim}\, x_n = \lim z_n$
$\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$
$\sup(x_n + \tilde{x}_n, x_n + \tilde{x}_{n+1}, ...) \le \underbrace{\sup(x_n, x_{n+1}, ...)}_{y_n} + \underbrace{\sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, ...)}_{\tilde{y}_n}$

- $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

**Доказательство:**
По опр. предела $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$
$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
$\underset{\sup \text{ по } k \ge N > N_0}{\rightsquigarrow} \quad y_N + l - \varepsilon \le \sup\limits_{k \ge N}(x_k + t_k) \le y_N + l + \varepsilon$
$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \le \overline{\lim}(x_n + t_n) \le \overline{\lim}\, x_n + l + \varepsilon$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

- $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$

Без доказательства
**Теорема:** (*Техническое описание верхнего предела*)
$(x_n)$ — вещ. последовательность $\Rightarrow$

- $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не огр сверху
- $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
- $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_i) : \forall i \quad x_{n_i} > l - \varepsilon$ (т.е. существует бесконечно много n)

**Доказательство:**

- Очевидно: $\Rightarrow$: $y_n \to +\infty \quad \forall k \quad \exists y_n > k + 1$ т.е. $\sup(x_n, x_{n+1}, ...) > k + 1$ (т.е. $\forall k \quad \exists x_i > k$) $\Leftarrow$: $x_n$ не огр сверху $\Rightarrow y_n \equiv +\infty$
- Очевидно: $x_n \le y_n$
  $\Rightarrow$: $y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$
  $\Leftarrow$: $\forall \mathrm{E} < 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad x_k < \mathrm{E} \Rightarrow y_{N+1} \le \mathrm{E}$
- $\Rightarrow$:
  - $y_n \to l, x_n \le y_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \le y_n < l - \varepsilon$
  - $y_n$ убывает, $y_n \to l \Rightarrow l \le y_n \quad \forall n$
    $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
    $\exists x_k, k \ge n : l - \varepsilon < x_k$
    Берём $n = 1$, находим $k = k_1$
    Берём $n > k_1$, находим $k = k_2$
    Берём $n > k_2$, находим $k = k_3$
    И т.д.
- $\Leftarrow$:
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \le l + \varepsilon, x_{n+1} < l + \varepsilon, x_{n+2} < l + \varepsilon, ...$
    $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \le l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n \ge l - \varepsilon$
    т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \exists$ б.м. $x_i > l - \varepsilon$
    $\Rightarrow \forall n \quad y_n \ge l$

  $\Rightarrow y_n \to l$

**Теорема:**
$(x_n)$ — вещ. последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$ и если оба утв. верны, все 3 предела совпадают
**Доказательство:**

- $\Rightarrow$: $\lim x_n = \pm\infty \Rightarrow$ очев.: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ ($x_n$ не огр сверху $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = +\infty$)
  $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ по тех. описанию, п.2

  Если $\lim x_n = -\infty$ 🙂 Аналогично

  Пусть $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$, выполняется тех. описание $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = l$
  Аналогично $\underline{\lim}\, x_n = l$
- $\Leftarrow$: $z_n \le x_n \le y_n, z_n \to l, y_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

**Теорема:** (*о характеризации верхнего предела как частичного*)
$(x_n)$ — вещ. последовательность $\Rightarrow$
- $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $x_n$ : $\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- $\exists n_k : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{\lim}\, x_n, \exists m_j : x_{m_j} \underset{j\to+\infty}{\to} \underline{\lim}\, x_n$

**Доказательство:**

- $n_k : x_{n_k} \to l \quad z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}$
  $z_{n_k} \to \underline{\lim}\, x_n, x_{n_k} \to l, y_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- Про верхний: $\overline{\lim}\, x_n = \pm\infty$ очев
  $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ (из тех. описания)
  $l - \frac{1}{k} \to l, l + \frac{1}{k} \to l \Rightarrow x_{n_k} \to l$

**Пример:**
$x_n = \sin n$
$\overline{\lim} \sin n = 1$
$\forall k \quad \sup(\sin k, \sin(k+1), ...) = 1$
Будем блуждать по окружности с шагом $n_i$.
$n_0 = 1$
$n_1 = 6$
$n_1, 2n_1, 3n_1, ...$
$n_2 = n_1 k$ или $n_1(k+1)$ (соответственно более короткой половинке дуги, которую делит 0)
$n_2, 2n_2, ...$
$n_3 = n_2 l$ или $n_2(l+1)$ (аналогично)
и т.д.
Длина шага: $1, < \frac{1}{2}, < \frac{1}{4}, < \frac{1}{8}, ...$
$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$
Существует б.много $\sin x_k > 1 - \varepsilon, \sin x_k \le 1 \forall k \Rightarrow \overline{\lim} \sin n = 1$