Математический анализ
II семестр

Лектор: Кохась Константин Петрович

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

1. Неопределённый интеграл

Определение: *первообразная*
$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F — *первообразная* f, если $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$

Теорема: f — непр на $\langle a, b\rangle \Rightarrow \exists$ пер-я f
Доказательство:
Чуть позже.

Теорема: F — пер-я f на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я f
- G — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

Доказательство:

- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

Определение: *неопределённый интеграл*
Неопределённый интеграл функции f на $\langle a, b\rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f$ - пер-я$\}$

Обозначение: $\int f, \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Примеры:

- $\int \frac{1}{x+a^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + a^2\right| + C$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x$
- $\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ☹
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \arcsin x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

Теорема: *о свойствах неопределённого интеграла*
Пусть f, g имеют пер-е на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифф $\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'\,\mathrm{d}t = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}\right) = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)$
  - Можо читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$

Доказательство:

- Тривиально.
- Тривиально.
- F — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{1/4}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16}+1}\right|$

Теорема: f, g дифф на $\langle a, b\rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:
$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Пример:

$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{x=\sin t\\ [-1,1]\leftrightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}{\overset{???}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t =$
$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

> Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!
>
> — КПК

2. Определённый интеграл

Определение: *плоская фигура*
Плоская фигура — огр. подмн-во $\mathbb{R}^2$

Определение: *множество плоских фигур*
$\mathcal{E}$ = мн-во плоских фигур

Определение: *площадь*
Площадь — функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$ *(площадь прямоугольника)*

Новости (хорошая и странная):
Площади существуют, площадей много.

Замечание:

- σ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \le \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

Определение: *ослабленная площадь*
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- σ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Новости (хорошие и странные):
Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

Пример:
$\sigma_1 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{кон.}} P_k\right\}$

$\sigma_2 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{счётн.}} P_k\right\}$

$\sigma_1\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = 1$
$\sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = \sigma_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right]$
$\Rightarrow \sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = 0$
σ_1 и σ_2 различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

Определение: *положительная срезка*
Положительная срезка f: $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка f: $f^- = \max(-f, 0)$.

Замечание:
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

Определение: *подграфик функции*
$f \geq 0$ на $[a,b], E \subset [a,b]$. *Подграфик ф-ции f на мн-ве E* $\Pi\Gamma(f, E) == \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

Определение: *определённый интеграл*
Определённый интеграл функции f на $[a,b]$ $\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b]))$

2.1. Свойства

Замечание:
Далее считаем $f \in C([a,b])$

Замечание:

- $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \quad \int\limits_a^b f = c(b-a)$ 🙂
- $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
- при $a = b \quad \int\limits_a^b = 0$

Свойство 1: *аддитивность по промежутку*

$\forall c \in [a,b] \int\limits_a^b = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Свойство 2. *монотонность*

$f, g \in C([a,b]), f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:
$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$

Следствие:

$\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) < \Pi\Gamma(g^+[a,b]) \Rightarrow \sigma(\Pi\Gamma(f^+)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^+))$
$\sigma(\Pi\Gamma(f^-)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^-))$

Свойство 3: $f \in C[a,b] \Rightarrow$

1. $\min f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max f(b-a) \le \max f \cdot (b-a)$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$

3. $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

Доказательство:
2.
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

3.
Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \ne b$: $\min f \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \le \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a}\int\limits_b^a f$ — значение f в некоторой точке

Определение: *интеграл с переменным верхним пределом*
$f \in C([a,b]), \Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — *интеграл с переменным верхним пределом*

Теорема: (*Барроу*)
Φ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a,b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \left(\int\limits_a^x f + \int\limits_x^y f\right) - \int\limits_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

Пример:

$$\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int\limits_a^{x^3} - \int\limits_a^{x^2}\right)'_x = \left(\Phi(x^3) - \Phi(x^2)\right)' = e^{-x^6}\cdot 3x^2 - e^{-x^4}\cdot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\int\limits_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}^{\int\limits_{\sin x}^{\ln x}\sqrt{s^4+2s}\,\mathrm{d}s} \sin n^2\,\mathrm{d}n\right)$$ 😉

Теорема: (*формула Ньютона-Лейбница*)

$f \in C([a,b]), F$ — пер-я $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Доказательство:

$\Phi = F + C$

$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

> До Ньютона не было законов Ньютона
>
> — КПК

3. Верхний предел последовательности

Определение: *частичный предел последовательности*
$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \to a$, то a — *частичный предел последовательности* (x_n)

Пример:
- $x_n = (-1)^n$
  $n_k : 2, 4, 6, ... \Rightarrow x_{n_k} \to 1$
  $n_k = 1, 3, 5, ... \Rightarrow x_{n_k} \to -1$

Определение: *верхний предел / нижний предел*
$(x_n) \subset \mathbb{R}, \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \quad z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...) \Rightarrow z_n \le x_n \le y_n, \quad y_{n+1} \ge y_n, \quad z_{n+1} \le z_n$

Верхний предел $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \operatorname*{limsup}\limits_{n \to +\inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

Нижний предел $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \operatorname*{liminf}\limits_{n \to +\inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$

Теорема:

- $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$
- $\forall n \quad x_n \le \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} \tilde{x}_n, \underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} \tilde{x}_n$
- $\lambda \ge 0 \quad \overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$ $(\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim} \lambda x_n = \overline{\lim} \lambda x_n = 0)$
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim} x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim} x_n\right)$
- $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$
  $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \ge \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$

(x_n)
$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n \leq x_n \leq y_n$
$\overline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$
$\underline{\lim}\, x_n = \lim z_n$
$\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$
$\sup(x_n + \tilde{x}_n, x_n + \tilde{x}_{n+1}, ...) \leq \underbrace{\sup(x_n, x_{n+1}, ...)}_{y_n} + \underbrace{\sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, ...)}_{\tilde{y}_n}$

- $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

Доказательство:
По опр. предела $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$
$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
$\underset{\sup \text{ по } k \geq N > N_0}{\rightsquigarrow} \quad y_N + l - \varepsilon \leq \sup\limits_{k \geq N}(x_k + t_k) \leq y_N + l + \varepsilon$
$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + t_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + l + \varepsilon$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

- $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$

Без доказательства
Теорема: (*Техническое описание верхнего предела*)
(x_n) – вещ. последовательность $\Rightarrow$

- $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не огр сверху
- $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
- $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_i) : \forall i \quad x_{n_i} > l - \varepsilon$ (т.е. существует бесконечно много n)

Доказательство:

- Очевидно: $\Rightarrow$: $y_n \to +\infty \quad \forall k \quad \exists y_n > k + 1$ т.е. $\sup(x_n, x_{n+1}, ...) > k + 1$ (т.е. $\forall k \quad \exists x_i > k$) $\Leftarrow$: x_n не огр сверху $\Rightarrow y_n \equiv +\infty$
- Очевидно: $x_n \leq y_n$
  $\Rightarrow$: $y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$
  $\Leftarrow$: $\forall \text{E} < 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad x_k < \text{E} \Rightarrow y_{N+1} \leq \text{E}$
- $\Rightarrow$:
  - $y_n \to l, x_n \leq y_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l - \varepsilon$
  - y_n убывает, $y_n \to l \Rightarrow l \leq y_n \quad \forall n$
    $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
    $\exists x_k, k \geq n : l - \varepsilon < x_k$
    Берём $n = 1$, находим $k = k_1$
    Берём $n > k_1$, находим $k = k_2$
    Берём $n > k_2$, находим $k = k_3$
    И т.д.
- $\Leftarrow$:
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon, x_{n+1} < l + \varepsilon, x_{n+2} < l + \varepsilon, ...$
    $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \leq l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n \geq l - \varepsilon$
    т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \exists$ б.м. $x_i > l - \varepsilon$
    $\Rightarrow \forall n \quad y_n \geq l$

  $\Rightarrow y_n \to l$

Теорема:
(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$ и если оба утв. верны, все 3 предела совпадают
Доказательство:

- $\Rightarrow$: $\lim x_n = \pm\infty \Rightarrow$ очев.: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ (x_n не огр сверху $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = +\infty$)
  $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ по тех. описанию, п.2

  Если $\lim x_n = -\infty$ 🙂 Аналогично

  Пусть $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$, выполняется тех. описание $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = l$
  Аналогично $\underline{\lim}\, x_n = l$
- $\Leftarrow$: $z_n \le x_n \le y_n, z_n \to l, y_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

Теорема: (*о характеризации верхнего предела как частичного*)
(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow$
- $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел x_n : $\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- $\exists n_k : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{\lim}\, x_n, \exists m_j : x_{m_j} \underset{j\to+\infty}{\to} \underline{\lim}\, x_n$

Доказательство:

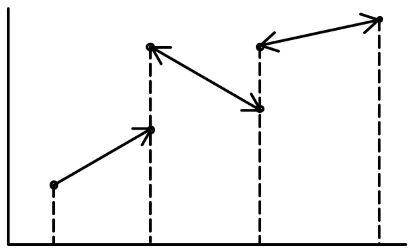
- $n_k : x_{n_k} \to l \quad z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}$
  $z_{n_k} \to \underline{\lim}\, x_n, x_{n_k} \to l, y_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- Про верхний: $\overline{\lim}\, x_n = \pm\infty$ очев
  $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ (из тех. описания)
  $l - \frac{1}{k} \to l, l + \frac{1}{k} \to l \Rightarrow x_{n_k} \to l$

Пример:
$x_n = \sin n$
$\overline{\lim} \sin n = 1$
$\forall k \quad \sup(\sin k, \sin(k+1), \ldots) = 1$
Будем блуждать по окружности с шагом n_i.
$n_0 = 1$
$n_1 = 6$
$n_1, 2n_1, 3n_1, \ldots$
$n_2 = n_1 k$ или $n_1(k+1)$ (соответственно более короткой половинке дуги, которую делит 0)
$n_2, 2n_2, \ldots$
$n_3 = n_2 l$ или $n_2(l+1)$ (аналогично)
и т.д.
Длина шага: $1, < \frac{1}{2}, < \frac{1}{4}, < \frac{1}{8}, \ldots$
$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$
Существует б.много $\sin x_k > 1 - \varepsilon, \sin x_k \le 1 \forall k \Rightarrow \overline{\lim} \sin n = 1$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ — кусочно непрерывная
$x_0=a<x_1,x_2<...<x_{n-1}<b=x_n$
$-\ \forall k \quad f$ — непрерывная на (x_{k-1},x_k)
$\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_k-0} f,\quad \lim\limits_{x\to x_{k-1}+0} f$
Тогда можно считать, что $\forall k \quad f\in C([x_{k-1},x_k]),\qquad \int\limits_a^b f=\sum\limits_{k=1}^n\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f$

Определение: почти первообразная
F — *почти первообразная* $f(x)$, если
$F\in C[a,b]$, дифф. всюду кроме кон. числа точек, $F'(x)=f(x)\ \forall x$, где F дифф.

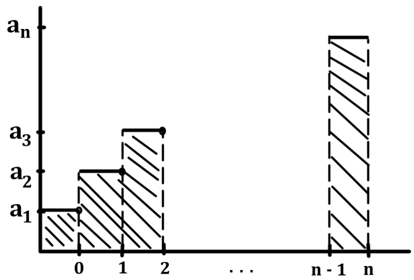
Теорема:
f — кус. непр., F — почти первообр.
Тогда: $\int\limits_a^b=F(b)-F(a)$
$\int\limits_a^b f=\sum\limits_{k=1}^n\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}=\sum\limits_{k=1}^n F(x_k)-F(x_{k-1})=F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a)$
На $(x_{k-1},x_k)F$ — первообразная f
$[x_{k-1},x_k]\tilde{F}:F=\tilde{F}$ на (x_k,x_{k-1})



Пример: неравенство Чебышева
$I_f\cdot I_g\le I_{fg}\quad (f,g$ — возр), $\ I_f=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

Утверждение:
$a_1\le a_2\le ...\le a_n,\ \ b_1\le b_2\le ...\le b_n$
Тогда $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n b_k\right)\le\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^n a_kb_k\right)$

Доказательство:



$f(x)=a_{\lceil x\rceil},\quad x\in(0,n]$
На $(k-1,k)\quad F(x)=x\cdot a_k,\ x\in[k-1,\ k]$

$$F(x)=\begin{cases}a_1x & x\in[0,1]\\ a_2x+(a_1-a_2) & x\in[1,2]\\ a_3x+(a_1+a_2-2a_3) & x\in[2,3]\\ \dots\dots\end{cases}$$

4. Правило Лопиталя

by Иоганн Бернулли

4.1. Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a$ — предельная точка $D,\ a \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\exists \dot{U}(a) \quad f \neq 0, g \neq 0$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
Тогда $\forall (x_k),\ x_k \to a,\ x_k \in D,\ x_k \neq a \quad \exists (y_k),\ y_k \to a,\ y_k \in D,\ y_k \neq a : \lim \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0,\ \lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$
Доказательство:
y_k будем искать в посл. (x_n) так, чтобы $\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k},\ \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}, \quad |f(y_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|, \quad |f(x_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|$

4.2. Лемма 2

Аналогичное верно для случая
$\lim\limits_{x \to a} f = +\infty, \ \lim\limits_{x \to a} g = +\infty$
$\forall (x_k), \ldots \quad \exists (y_k), \ldots : \lim \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0, \ldots = 0$

4.3. Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}}$
дифф.
$g' \neq 0$ на (a, b)
$\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = \left[\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right]$
Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = A$

Доказательство:
$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохраняет знак (т. Дарбу) $\Rightarrow g$ — строго монотонно $\Rightarrow$ в окр. точки $a\ g \neq 0$
По Гейне $x_k \to a,\ x_k \neq a,\ x_k \in (a, b),$ строим последовательность y_k из леммы
$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)},\ f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}} + \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{f'(\xi_k)}{g'(x_k)}} \cdot \left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}\right)$$

Пример:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = ☺$$

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{2x} \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos x}} = ☹$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Пример:

$\int\limits_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ — интеграл Эйлера-Пуассона

$\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$

$1 = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}{g(R)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{-e^{-R^2}}{g'(R)} = 1$

I попытка:

$g(R) = e^{-R^2}$

$g' = -2Re^{-R^2}$

$\frac{e^{-R^2}}{-2Re^{-R^2}} \to 0$

II попытка:

$g(R) = \frac{e^{-R^2}}{2R}$

$\frac{e^{-R^2}}{e^{-R^2} - \underbrace{\frac{e^{-R^2}}{2R}}_{=o\left(e^{-R^2}\right)}} \underset{R\to+\infty}{\to} 1$

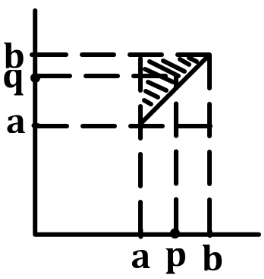
$\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2R} + o\left(\frac{e^{-R^2}}{R}\right)$

5. Приложение определённого интеграла

Общая схема $\langle a,\ b\rangle$

$\mathrm{Segm}\ (\langle a,\ b\rangle) = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$

5.1. Аддитивная функция промежутка



представление $Segm[p,q] \in Segm(a,b)$*, если* (p,q) *лежит в заштрихованном треугольнике*

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \quad \forall c \in [p,q] \quad \Phi([p,q]) = \Phi([p,c]) + \Phi([c,q])$

$[p,q] \mapsto \int\limits_p^q f$

5.2. Плотность аддитивной функции промежутка

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R},\ \ f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

f — плотность Φ, если $\forall \Delta \in \mathrm{Segm} : \min\limits_{\Delta} f \cdot l_\Delta \le \Phi(\Delta) \le \max\limits_{\Delta} f \cdot l_\Delta$

Теорема: (о вычислении а. ф. п. по плотности)

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, — непрерывна

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — а.ф.п

f — плотность Φ

Тогда:

$\forall [p,\ q] \in \text{Segm} \quad \Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f(x)dx$

Доказательство:

Не умаляя общности рассмотрим $[a,b]$

$F(x) = \begin{bmatrix} 0, & x=a \\ \Phi([a,x]), & x \in (a,b] \end{matrix}$

Проверим F — первообразная f

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\Phi[a,x+h]-\Phi[a,x]}{h} = \frac{\Phi([x,x+h])}{h} = f(x+\Theta h),\ 0 \le \Theta \le 1$

$F'_+ = \lim\limits_{h \to +0} ... = f(x)$

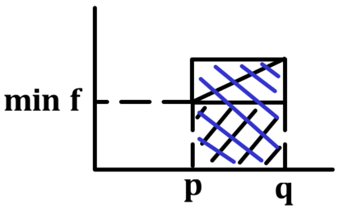
Аналогично $F'_- = f(x)$

$\int\limits_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi([p,q])$

Пример 1: площадь подграфика

$f : \langle a,b \rangle \to R$, непр.

f — плотность, из монотонности площади



$\min f(q-p) \le \sigma(\Pi\Gamma(f,[p,q])) \le \max f(q-p)$

$\Phi : \text{Segm } \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$

$\Phi([p,q]) = \sigma(\Pi\Gamma(f,[p,q])) = \int\limits_p^q f$

Пример:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

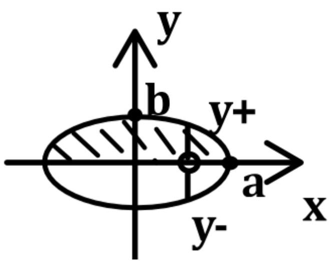


График эллипса

Геометрический способ поиска площади подграфика

$x = a\cos t, t \in [\pi, 0]$

$y = b\sin t$

$\sigma_{\text{элл}} = \int\limits_{-a}^{a} y^+(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\frac{\pi}{2}$

Пример 2: площадь криволинейного сектора $\langle a, b\rangle$
$\Phi : [p,q] \mapsto \sigma$ Сектор $([p,q], r(\varphi))$
Проверим, что $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ — плотность а.ф.п. Φ
$\frac{1}{2}\min\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)(q-p) \le \Phi[p,q] \le \frac{1}{2}\max\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)\cdot(q-p)$
Кр. сектор $([p,q], \min\limits_{q} r) \subset$ Сектор $([p,q], r(\varphi)) \subset$ Кр. сект. $([p,q], \max r)$
Т.е. $\Phi([p,q]) = \frac{1}{2}\int\limits_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

Посчитаем площадь круга

σ Круга $= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \pi R^2$ ☺
$\varphi = \arctan\frac{g(t)}{x(t)}$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$S' = \frac{1}{2}\int\limits_p^q r^2(\varphi)d\varphi \underset{☺}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{t_p}^{t_q} = (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2(t)}{x^2(t)}}\cdot\frac{y'x-x'y}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{t_p}^{t_q} y'(t)x(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t$

$x = R\cos t, t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = R\sin t$
$S = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^2}{4}$

Пример: Изометрическое пространство
$G\subset\mathbb{R}^2 \quad G$ — замкнутая выпуклая фигура. Диаметр $G = \sup(\rho(A,\ B),\ A,\ B\in G) = d \le 1$
Тогда $\sigma(G) \le \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (равенство для круга $r = \frac{1}{2}$)

Доказательство:
$f(x)$ — вып., x_0 где $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists$ касательная
Φ замк., вып. $\Rightarrow r(\varphi)$ непр. $\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi_{\text{нов}} - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi_{\text{нов}} =$
$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \text{"}AB\text{"}^2\,\mathrm{d}\varphi \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi d^2}{4}$

Определение: циклоида — траектория точки на окружности, катящейся по прямой
$S_{\text{черн}} + S_{\text{син}} = S_{\text{прям}} + S_{\text{лепестка}}$
$S = 2\pi r^2 + \pi r^2$
$S = 3\pi r^2$

$$\begin{cases} x(\varphi) = r\varphi - r\sin\varphi \\ y(\varphi) = r - r\cos\varphi \end{cases}, \varphi\in[0, 2\pi]$$

$S = \int\limits_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi}(r - r\cos\varphi)(r - r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int\limits_0^{2\pi} 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r^2 + 0 + \pi r^2$