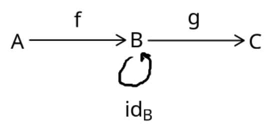
Линейная алгебра
II семестр
Практик:
Селеменчук Антон Сергеевич

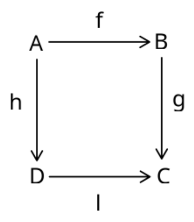
зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Определение: категория
$\mathrm{Cath} \to \mathrm{Obj}\ C$
$\quad \to \mathrm{Hom} C$

1. Определена композиция морфизмов
   $\mathrm{Hom}_C \times \mathrm{Hom}_C \to \mathrm{Hom}_C$
2. Композиция морфизмов ассоциативна:
   $\forall A, B, C \in \mathrm{Obj} C \quad \exists\ \mathrm{Hom}(A, B), \mathrm{Hom}(B, C), \mathrm{Hom}(A, C) \Rightarrow$
   $\mathrm{Hom}(C, B) \circ (\mathrm{Hom}(B, C) \circ \mathrm{Hom}(A, B)) = (\mathrm{Hom}(C, B) \circ \mathrm{Hom}(B, C)) \circ \mathrm{Hom}(A, B)$
3. $\exists!\ \mathrm{id}_B\ \forall B \in \mathrm{Obj} C$: если $\exists \mathrm{Hom}_C(A, B) = f$, то $|\ \mathrm{id}_B \circ f| = f$



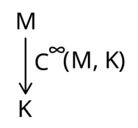


$f \in \mathrm{Hom}(A, B)$
если $g \circ f = l \circ h$, диаграмма коммутативна

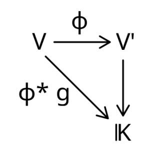
$\mathrm{Sets} : \exists F(S) -$ функция на $S \in \mathrm{Sets}$ со знач. в Lin_K
$\mathrm{Sets} \xrightarrow{F} Lin_K$

$V(\mathbb{K}) \overset{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L}\mathrm{in}\ \mathbb{K})}{\longrightarrow} V'(\mathbb{K})$
$f \downarrow \quad \leftarrow\cdots \quad \downarrow g$
$\mathbb{K} \quad \varphi * \quad \mathbb{K}$

$g(\varphi(v)) \in V^*$
$g \circ \varphi : V \to V' \to \mathbb{K}$
$\varphi^* \in \mathrm{Obj}\ Lin_K^{\mathrm{op}}$
$\varphi^* : V^{*\prime} \to V^*$

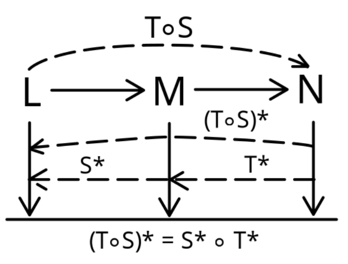


pull-back: $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$



pull-back: $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$

Утверждение:
$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$, где $T, S \in \mathrm{Hom}\ \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}$
$L \xrightarrow{S} M \xrightarrow{T} N$



доказательство

push-forward:
$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^2$
$A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2$
$V_1 \downarrow \cdots \overset{\varphi^*}{\dashrightarrow} \downarrow V_2$
$A_1 \text{———} A_2$

$V_1 : A_1 \to A_1$
$v(a) = b \Rightarrow a + v = b \mid \varphi \circ$
$\varphi(a + v) = b'$
$\varphi(a) + \varphi(v) = \varphi(a + v) = a' + v'$
$\varphi(v) = v' = \varphi * v = \mathrm{d}\varphi(v)$
$* -$ push-forward

$\sum_\mu v^\mu e_\mu \equiv v^\mu e_\mu$ (более краткая запись)

> Не душите!
>
> — Селеменчук

Категория $D\ f : \underbrace{V^n \times V^n \times \ldots \times V^n}_{\text{n штук}} \longrightarrow \mathbb{K}$

- Полилинейное
  $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \to v_1, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_{n-1} + v_n$
- Антисимметричность
  $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$

Теорема: $\forall \varphi \in D \Rightarrow \varphi = c \det$
Доказательство:
Выберем базис $\{e_\mu\} \subset V^n, \{v_i\}_{i=1}^n \subset V^n$
$\Rightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_n) = \varphi\left(v_1^{\mu_1} e_{\mu_1}, \ldots, v_n^{\nu_n} e_{\nu_n}\right) = v^{\mu_1} \ldots v^{\mu_n} \varphi\left(e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_n}\right)$
$= \overbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma = (\mu_1, \ldots, \mu_n)}} (-1)^{P(\mu_1, \ldots, \mu_n)} v^{\mu_1} \ldots v^{\mu_n}}^{\det} \overbrace{\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n)}^{c}$
$V_{,} \quad *^V \times V \to V -$ алгебра
ДЗ: определение алгебры — это A, являющееся и кольцом и $\mathbb{K}$ модулем $\Leftrightarrow$ вект. пространство с умножением на нём

Free vector space composition
$* : V \times V \to V'$
это универсальный объект в категории соответствующих отображений
$v * v = v^\mu e_\mu * v^\nu e_\nu \neq v^\mu v^\nu (e_\mu * e_\nu)$
$(v_1 * v_2) * v_3 \neq v_1 * (v_2 * v_3)$
Определение:
$(\exists! \zeta)$
$G \in \mathrm{Obj}\ G' -$ универсальный объект, если
$\forall A, B \subset \mathrm{Obj}\ C : \eta \in \mathrm{Hom}\ (A, B), \zeta \in \mathrm{Hom}\ (A, G) \quad \exists! \varphi \in \mathrm{Hom}\ (B, G)$: диаграмма ниже коммутативна
$A \xrightarrow{\eta} B$
$\quad \searrow_{\zeta} \downarrow \varphi$
$\quad\quad G$
ДЗ: доказать, что идеал:
$R = <(u + v) * w - v \times w - u \times w,$
$v * (\omega + u) - v * w - v * u,$
$(\lambda v) * w - \lambda \cdot v * w,$
$u * (\lambda w) - \lambda \cdot u * w$
$(v * u) + w - v * (u * w) >$

$(V * V * \ldots * V) \to A(V)$
$A(V) \ni T = \sum_n V^{*n} = \mathbb{K} + V + V * V + \ldots + V * V * \ldots V + \ldots$
$\zeta \in \mathrm{Gr}\ (V), \zeta = \eta + \zeta^i e_i + \zeta^{ij} e_i \times e_j$

$T(V) = A(V)/R$

$R \hookrightarrow A(V) \to A(V)/R \hookleftarrow 0, R \to 0$

f — гомоморфизмы абелевых групп

A — абелевы группы

$\ldots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} A_{i+2} \xrightarrow{f_{i+3}} \ldots$ — комплекс, если:

$f_{i+1} f_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f_i \subseteq \mathrm{Ker}\ f_{i+1}$

Гомология комплекса: $\underbrace{H_{i+1}}_{\text{i+1-я группа гомологии комплекса}} = \mathrm{Ker}\ f_{i+1} / \mathrm{Im}\ f_i$ — **ДЗ**: доказать что H_i являются группами

Точность в члене $A_{i+1} \Rightarrow \mathrm{Im}\ f_{i+1} = \mathrm{Ker}\ f_{i+2}$

Пример:

$0 \xrightarrow{g} L \xrightarrow{i} M$ — всегда комплекс

$\mathrm{Im}\ g \subseteq \mathrm{Ker}\ i$

Доказательство:
При гоморфизме нейтральный элемент переходит в нейтральный

$\sqsupset g^{-1}(l_1) = 0 \Rightarrow g^{-1}(-l_1) = 0$
$\Rightarrow 2l_1 \in \mathrm{Ker}$

Докажем, что $\mathrm{Im}\ g = 0$

$\sqsupset l_1, l_2 \in \mathrm{Im}\ g \Rightarrow l_1 + l_2 \in \mathrm{Im}\ g$

$\Rightarrow$ либо $l_1 = -l_2$, либо $\mathrm{Im}\ g = L$

$g(m \cdot m) = m_1 \circ m_2 = m_2 \circ m_1 \Rightarrow m_1 \circ m_1 = m_2 \circ m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

> короче, доказали
>
> — Селеменчук Антон

Этот комплекс точен в L, если $\mathrm{Ker}\ I = 0 \Rightarrow i$ — инъекция

Пример:
$M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} 0$ — комплекс

$\mathrm{Ker}\ f = N$ по св-ву гомоморфизма
Этот комплекс точен в N, если $\mathrm{Im}\ i = \mathrm{Ker}\ f = N$, то есть i сюръекция

Пример: "Точные тройки"

$0 \xrightarrow{g} L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \to 0$
$\quad\downarrow \quad \searrow$
$\qquad M/L = M/\ \mathrm{Ker} f$
$i^{-1}(M) = L_{\downarrow \mathrm{Im}\ i}$

$L \subset M,\ M/L \underset{\text{если всё это вект. пр-ва}}{\Longrightarrow} \dim M/L = \dim M - \dim L$

Определение: функтор F — функтор из категории C в D, если $\mathrm{Obj}\ D = F(\mathrm{Obj}\ C)$, $\ \mathrm{Mor}\ D = F(\mathrm{Mor}\ C)$,

Но при этом $\forall g, f \in \mathrm{Mor}\ C, \exists g \circ f \Rightarrow F(g \circ f) = F(g) \cdot F(f)$ (ковариант)

Определение: универсальный морфизм
$\sqsupset F : C \to D$ — функтор (ков.)

$X \subset \mathrm{Obj}\ D,\ A,\ A' \in \mathrm{Obj}\ C, h \in \mathrm{Hom}_C(A, A')$

$(A, u : X \to F(A))$ — *универсальный морфизм*, если диаграмма коммутативна:

```
X --u-> F(A)            A
 \        v F(h) <--F--| v h
  \f--> F(A')           A'
```

Коммутативная диаграмма:

```
A --a--> B
 \       |  b
  \      v
   \-c-> C
```

$c = b \circ a$

> Да, мы можем натянуть. Так и говорим
>
> — Селеменчук Антон Сергеевич

$V * W \longrightarrow K\text{-Vect}$
$K\text{-Vect} \times K\text{-Vect} \to K\text{-Vect}$

$V \otimes W = V * W / \langle\ (\lambda_1 v) * (\lambda_2 w) - \lambda_2 \lambda_1 (v * w)\ \rangle$

$V \otimes W \otimes U = V * W * U / \langle\ v * (w * u) - (v * w) * u\ \rangle$

$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$[a, [b, c]] \neq [[a, b], c]$

Определение: тензорная алгебра
$\mathbb{K}$ — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$
Тензорная алгебра — $\underbrace{T(V)}_{\text{по типу } \mathbb{K}[x]} = \sum_{i=0}^{+\infty} V^{\otimes i} = \mathbb{K} + V + V \otimes V + V \otimes V \otimes V + \ldots$

Возьмём (забывающий) функтор $u : K\text{-Alg} \to K\text{-Vect}$, $\quad K\text{-Alg}$ — ассоциативна
и сопоставляем каждой алгебре её векторное пространство $A(V)$

Тогда по произвольному $X \in \mathrm{Obj}\ (\text{K-Vect})$, построим $T(X)$
($\forall$ лин. отображение $X \to A \in$ K-Alg может быть единственным образом, продолжено до гомоморфизма алгебр $T(X) \to A$)

```
  r-->
-U(X) --u--> T(X)
  \          |
   \         v ∃!h
    \--f---> A
```

$\sigma = \langle (v \otimes w - w \otimes v) \otimes t, t \otimes (v \otimes w - w \otimes v) \rangle$ — двусторонний идеал? $S(V) = T(V)/\sigma$
$\Lambda(V) = T(V)/S$
$T(V) = \sum_i V^{\otimes i}$
Выберем некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n \subset V(\mathbb{K})$
$\Rightarrow \forall \zeta \in T(V) = \zeta = \zeta_0 + \zeta^i e_i + \zeta^{ij} e_i \otimes e_j + \ldots + \zeta^{\mu_1 \ldots \mu_n} e_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_n} + \ldots$
$\{\varepsilon_p\} \subset V^{n \times n}$
$e_\mu \otimes e_\nu \mapsto \varepsilon_p$ — линейное
$\zeta_{[56]} = -\zeta_{[65]}$
$\zeta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\zeta_{\mu\nu} - \zeta_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(\zeta_{\mu\nu} + \zeta_{\nu\mu})$

$\mathrm{Mat}_{n \times n} \simeq V^* \otimes V$