Дискретная математика
II семестр

Лектор: Станкевич Андрей Сергеевич

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

Надеюсь, сессия прошла нормально

— Станкевич Андрей Сергеевич

1. Дискретная теория вероятностей

1.1. Введение

Случайности и вероятности давно интересовали людей, *в основном в азартных играх*. Первые теоремы дискретной теории вероятностей появились задолго до появления первого конечного автомата. Но философы всех времён задаются вопросом — "существует ли случайность?"
Философская мысль делится на 2 направления — считающих, что случайности существуют, и ~~остальных~~ детерминистов, считающих, что у нас просто недостаточно входных данных
Это всё мы с вами изучать не будем

1.2. Аксиоматическая теория вероятностей

by *Андрей Николаевич Колмогоров*

Бытовое восприятие случайностей мешает в понимании формальной модели

Определение: множество элементарных исходов
Ω — множество всех возможных элементарных исходов случайного эксперимента, который может закончиться ровно одним из них
Ω может быть не более чем счётным, счётным, или не счётным. Но мы будем рассматривать дискретное множество элементарных исходов
$|\Omega|$ — конечно или счётно

Определение: элементарный исход
Элемент $\omega \in \Omega$

Определение: дискретная плотность вероятности
$p : \Omega \to \mathbb{R} : p(\omega \geq 0), \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
Если Ω несчётна, то требуется другая теория

Определение: дискретное вероятностное пространство
Пара из множества элементарных исходов и дискретной плотности вероятностей (Ω, p)

Примеры:

1. Честная монета:
   $\Omega = \{0, 1\},\ \ p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$
2. Нечестная монета (распределение Бернулли):
   $\Omega = \{0, 1\},\ \ p(1) = p,\ \ p(0) = 1 - p$
3. Честная игральная кость *(1d6)*:
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \ p(i) = \frac{1}{6}$
   1. "Честная" игральная кость (1d20):
      $\Omega = \{1, ..., 20\},\ \ p(20) = 1$
4. Колода карт:
   $\Omega = \{\langle r, s\rangle \mid r = 1...13, s = 1...4\},\ \ p(\langle r, s\rangle)$

Определение: случайное событие
Подмножество элементарных исходов $A \subset \Omega, \quad P(A) = \sum\limits_{a \in A} p(a)$
Дискретное множество элементарных исходов является случайным событием

Примеры:

1. Пустое событие $P(\varnothing) = 0$
2. Достоверное событие (полное (?)) $P(\Omega) = 1$
3. *Для честной монеты* $P(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{2}$
4. *Для честной 1d6* $P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$

1.3. Независимость событий

Определение: независимое случайное событие
A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Примеры:
Для честной игральной кости
$\mathrm{Even} = \{2, 4, 6\}, \quad \mathrm{Big} = \{5, 6\}, \quad \mathrm{Small} = \{1, 2, 3\}$

- $P(\mathrm{Even} \cap \mathrm{Big}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\mathrm{Even}) \cdot P(\mathrm{Big}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(\mathrm{Even} \cap \mathrm{Small}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} \qquad P(\mathrm{Even}) \cdot P(\mathrm{Small}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(\mathrm{Big} \cap \mathrm{Small}) = P(\varnothing) = 0 \qquad P(\mathrm{Big}) \cdot P(\mathrm{Small}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Определение: события, независимые в совокупности
$A_1, A_2, ..., A_k$ – независимы в совокупности, если $\forall I \subset \{1, 2, ..., k\} \quad P\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$

Примеры:
Для броска двух разных честных монет
$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}, \quad p(i \cdot j) = \frac{1}{4}$
$A = \{01, 00\}, \quad B = \{10, 00\}, \quad C = \{11, 00\}$ не независимы в совокупности

1.4. Прямое произведение вероятностных пространств

Определение: прямое произведение вероятностей пространств
$\langle\Omega_1, p_1\rangle, \quad \langle\Omega_2, p_2\rangle$, прямое произведение пространств $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : \quad p(\langle u_1, u_2\rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$
$\sum\limits_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle \in \Omega_1 \times \Omega_2} p(\langle\omega_1, \omega_2\rangle) = \sum p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \sum\limits_{\omega_1}\left(p_1(\omega_1) \cdot \sum\limits_{\omega_2} p_2(\omega_2)\right) = 1$

Пример:
$A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega_2 \Rightarrow A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ — независимы
$(A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$

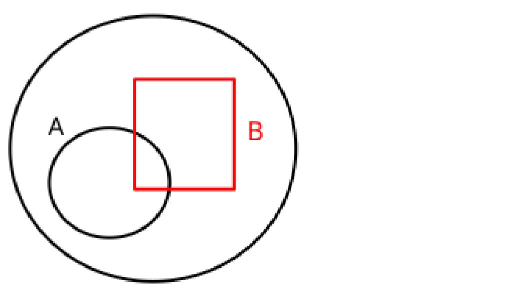
1.5. Условная вероятность

имеет смысл, если $P(B) \neq \varnothing$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$

если A и B независимы, то
$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{P(B)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$



Теорема: (*Формула полной вероятности*)
$\Omega = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k}_{\text{полная система событий}}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$B \qquad P(B|A_i)$
$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$
$\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \cdot P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = P(B)$

Задача:
Две урны, в одной 3 черных и 2 белых, в другой 4 черных и 1 белый шар. С какой вероятностью можно вынуть черный шар?
$A_1 \quad A_2 \quad \frac{1}{2}$
$P(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad P(B|A_2) = \frac{4}{5} \quad P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Задача:
$P(B|A_i) \quad P(A_i) \quad$ найти $P(A_i|B) = ?$
Достоверность = 1 - $P(B|A_2)$ = 99%
Надёжность = $P(B|A_1)$ = 95%
A_1 — болен $(\frac{1}{100})$

A_2 — здоров $(\frac{99}{100})$

$P(A_1|B) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}01}{0{,}95 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99}$

$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

Определение: формула Байеса

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}$

Определение: Байесовский спам-фильтр
A_1 — спам
A_2 — не спам
B — критерий
$P(B|A_1)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо спам *(можно посчитать)*
$P(B|A_2)$ — вероятность выполнения критерия, если письмо не спам *(можно посчитать)*

Сам фильтр: $P(A_1|B)$ — вероятность спама при выполнении критерия *(можно вычислить, используя значения выше)*

1.6. Случайная величина

Определение: случайная величина
$\langle \Omega,\ p \rangle$ — вероятностное пространство
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина (численная характеристика вероятностного эксперимента)*

Примеры:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
η — выигрыш Васи

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	...
η	2	4	8	16	...

Операции над случайными величинами:
Произведение с числом:
$\xi = c \cdot \eta \quad c \in \mathbb{R}$
Сумма случайных величин:
$\xi = \eta + \zeta$
Произведение случайных величин:
$\xi = \eta \cdot \zeta$
Возведение в степень случайной величины:
$\xi = \eta^{\zeta}$
Можно даже рассмотреть синус случайной величины:
$\xi = \sin \zeta$

Определение: дискретная плотность распределения
ξ — случайная величина
$f_{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *дискретная плотность распределения*
$f_{\xi}(a) = P(\xi = a) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) = a\})$

Определение: функция распределения
ξ — случайная величина
$F_{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функция распределения*
$F_{\xi}(a) = P(\xi \leq a)$

Пример:
Подбросим 10 монет
$\Omega = \mathbb{B}^{10}$
$\xi(\omega)$ — число единиц

$P(\xi = a) = \frac{\binom{10}{a}}{2^{10}}$

$f(a) = F(a) - F(a - \delta)$
$F(a) = \sum\limits_{b \leq a} f(b)$

1.7. Математическое ожидание

Определение: математическое ожидание
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega)$ — *математическое ожидание*

Пример:
Игральная кость
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\xi(\omega) = \omega$
$\mathrm{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Легко заметить, что 3.5 никогда не выпадает на игральной кости
Математическое ожидание не означает наиболее вероятные исход

Пример 1:
Вася получает 1 монету, если игральная кость падает нечётным числом и теряет 1 монету в ином случае:

ω	1	2	3	4	5	6
η	1	-1	1	-1	1	-1

$E\xi = 0$
Математическое ожидание равно 0, но при этом, после 1 игры, Вася либо получит монету, либо потеряет

Пример 2:
Вася получает число монет, равное 2 в степени числа бросков кости, которые потребовались, чтобы выпало определённое число

ω	1	01	001	0001	...
η	2	4	8	16	...

$\mathrm{E}_{\xi} = +\infty$
Математическое ожидание может равняться $+\infty$

$\mathrm{E}c = c$
Математическое ожидание константы равняется константе

Линейность математического ожидания:
Теорема:
$\xi = c \cdot \eta \quad \mathrm{E}\xi = c \cdot \mathrm{E}\eta$
$\xi = \eta + \zeta \quad \mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

$\mathrm{E}(\eta + \zeta) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta + \zeta)(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\eta(\omega) + \zeta(\omega)) = \mathrm{E}\eta + \mathrm{E}\zeta$

Примечание:
Если $|\Omega| = +\infty$, то $\exists \mathrm{E}\xi \ \Leftrightarrow \exists \mathrm{E}(|\xi|)$

Пример:
ξ — выпало на верхней грани игральной кости D6
η — выпало на нижней грани
$\mathrm{E}\xi = 3.5, \mathrm{E}\eta = 3.5$
$\mathrm{E}(\xi + \eta) = 7$
Вне зависимости от расположения значений на игральной кости относительно друг друга

Пример:
$\Omega = S_n$ — перестановки n элементов
$|\Omega| = n!$
$\xi(\sigma) = |\{i \mid \sigma_i = i\}|$ — количество неподвижных точек
$n = 3 \quad \xi(\langle 1, 3, 2 \rangle) = 1$
$\mathrm{E}\xi = 1$
Мы можем посчитать математическое ожидание, не зная распределение

$\xi_i = \begin{cases} 1, & \sigma_i = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
$\xi_1(1\ 3\ 2) = 1$
$\xi_2(1\ 3\ 2) = 0$
$\xi_3(1\ 3\ 2) = 0$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
$P(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi_i = 1 \cdot P(\xi_i = 1) + 0 \cdot P(\xi_i = 0) = \frac{1}{n}$
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

Теорема:
$\mathrm{E}\xi = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi = a)$
$\sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} \xi(\omega) p(\omega) = \sum\limits_{a} a \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = a} p(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi = a)$

Определение: независимые случайные величины
ξ и η — *независимы*, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi \leq a]$ и $[\eta \leq b]$ — *независимые случайные события*
$P(\xi \leq a \land \eta \leq b) = P(\eta \leq a) \cdot P(\eta \leq b)$

Замечание:
ξ и η — независимые, если
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [\xi = a]$ и $[\eta = b]$ — независимые
Работает за исключением патологических случаев, которые мы не будем рассматривать

Пример 1:
$P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ — вероятность того, что Вася выиграл 1 монету

$P(\eta = 2) = \frac{1}{6}$ — вероятность выпадения на игральной кости 2

$P(\xi = 1 \land \eta = 2) = 0$

Пример 2:

$_{\eta}{}^{\xi}$	-1	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Теорема:
ξ и η независимы $\Rightarrow \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$

$\mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \sum\limits_{a} a \cdot P(\xi \cdot \eta = a) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{b} \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bc \cdot P(\xi = b \land \eta = c) = \sum\limits_{a} \sum\limits_{b} \sum\limits_{c : b \cdot c = a} bc P(\xi = b) P(\eta = c) =$
$= \sum\limits_{b} b \sum\limits_{c} c P(\xi = b) P(\eta = c) = \mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta$

1.8. Дисперсия

Вступление:
Давайте посчитаем математическое ожидание отклонения этой случайной величины от ее математического ожидания. Внезапно обнаружим, что оно равняется 0
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\xi = 0$ 😞

Определение: дисперсия
$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$ — *дисперсия*
$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\left(\xi^2 - 2\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2\right) = \mathrm{E}\xi^2 - 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\xi + (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$
На английском: $\mathrm{Var}\ \xi$

$\mathrm{D}c\xi = c^2 \mathrm{D}\xi$
$\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathrm{E}(\xi + \eta))^2 = \mathrm{E}\xi^2 + 2\mathrm{E}\xi\eta + \mathrm{E}\eta^2 - (\mathrm{E}\xi)^2 - 2\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta - (\mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta + 2(\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta)$

Определение: ковариация
$\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta = \mathrm{Cov}(\xi,\ \eta)$ — *ковариация*

$\Omega,\ p$ — вероятностное пространство

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина *(численная характеристика вероятностного эксперимента)*

$E\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot p(\xi = a)$ — мат ожидание

$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ — мат ожидание суммы равно сумме мат ожиданий

$F_\xi(a) = P(\xi \le a)$ — функция распределения случайной величины

$f_\xi(a) = P(\xi = a)$ — плотность случайной величины

ξ и η — независимые для $\forall \alpha\ \beta$, если $[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$

ξ и η — независимые $\Rightarrow E(\xi, \eta) = E\xi \cdot E\eta$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — дисперсия

ξ и η независимые $\Rightarrow D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2(E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta)$

$\mathrm{Cov}(\xi,\ \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ — коварияция

ξ и η независимые $\Rightarrow \mathrm{Cov}(\xi,\ \eta) = 0$

$\mathrm{Cov}(\xi, \xi) = E(\xi \cdot \xi) - E\xi \cdot E\xi = D\xi$

$\mathrm{Cov}(\xi, -\xi) = -E\xi^2 + (E\xi)^2 = -D\xi$ — ковариация может быть отрицательной

Теорема:

$\mathrm{Cov}(\xi, \eta)^2 \le D\xi \cdot D\eta$

Определение: корреляция

$\mathrm{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$ — *корреляция*

$-1 \le \mathrm{Corr}(\xi, \eta) \le 1$

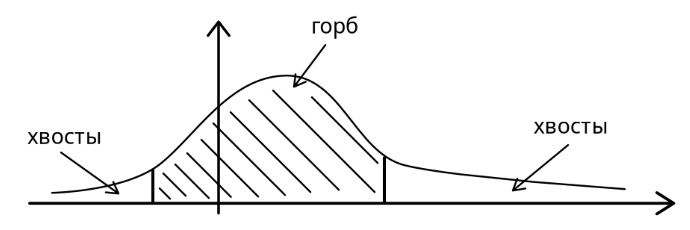
$D\xi = 0 \Leftrightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow p(\omega) > 0 \Rightarrow \xi(\omega) = E\xi$
Корреляции с константой не бывает, иначе в формуле деление на ноль

Теорема:

$$\begin{aligned} \mathrm{Corr}(\xi, \eta) &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = c \cdot \eta,\ c > 0 \\ &= -1 \qquad\qquad\quad c < 0 \end{aligned}$$

Корреляция не означает причинно-следственной связи

1.9. Хвостовые неравенства



Задача:
Средняя зарплата 10 опрошенных человек — 50 тысяч. Сколько максимум человек может иметь зарплату больше или равную 250 тысяч рублей?
Максимум 2 человека, в случае, если 8 остальных имеют нулевую зарплату

Неравенство Маркова *“очень богатых не может быть очень много”*

$\xi > 0 \quad E\xi$

$P(\xi \ge c \cdot E\xi) \le \frac{1}{c}$

Доказательство:

$P(\xi \ge c \cdot E\xi) = \sum\limits_{\omega : \xi \ge c \cdot E\xi} p(\omega)$

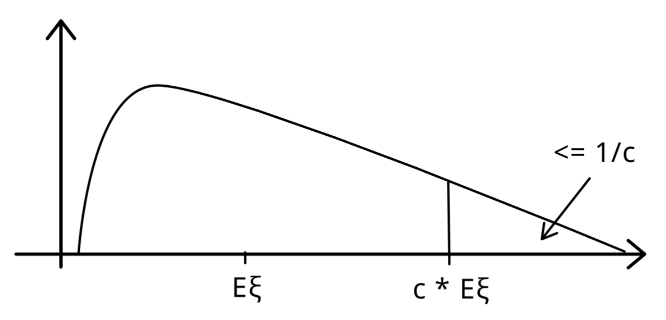
$E\xi = \sum\limits_{\omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega) =$

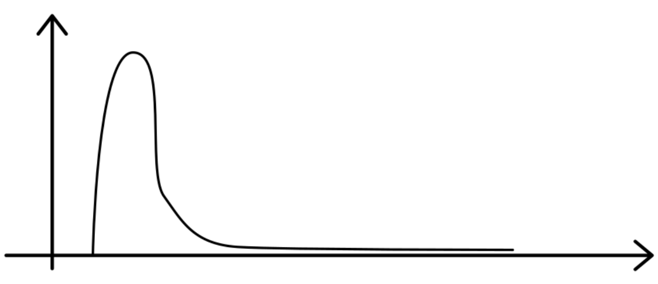
$= \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) \ge c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot \xi(\omega) + \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) < c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot \xi(\omega) \ge$

$\ge \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) \ge c \cdot E\xi} p(\omega) \cdot c \cdot E\xi$

$E\xi \ge c \cdot E\xi \cdot P(\xi \ge c \cdot E\xi)$

$P(\xi \ge c \cdot E\xi) \le \frac{1}{c}$





$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

$\eta = (\xi - e\xi)^2$

$P(\eta \ge c^2 E\eta) \le \frac{1}{c^2}$

$P\left((\xi - E\xi)^2 \ge c^2 D\xi\right) \le \frac{1}{c^2}$

$P(|\xi - E\xi|) \ge c \cdot \sqrt{D\xi}) \le \frac{1}{c^2}$

Определение: среднеквадратическое отклонение

$\sigma = \sqrt{D\xi}$

Теорема: неравенство Чебышева

$P(|\xi - E\xi| \ge c \cdot \sigma) \le \frac{1}{c^2}$

$P(\eta \ge \alpha) \quad \alpha^2 = c^2 E\eta \quad c^2 = \frac{\alpha^2}{D\xi}$

$P(|\eta - E\eta| \le \alpha) \le \frac{D\xi}{\alpha^2}$

$\xi \quad n$ раз $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = \eta$

ξ_i — о. р. незав. сл. величины

$E\eta = E\xi$

$D\eta = \frac{1}{n^2} \cdot nD\xi = \frac{1}{n} D\xi$

нет. м. о. μ

$P(|\xi - \mu| \ge \alpha) \le \frac{D\xi}{\alpha^2} = \varepsilon$

$P(|\eta - \mu| \ge \alpha) \le \frac{D\eta}{\alpha^2} = \frac{\varepsilon}{n}$

Для какого α
$P(|\xi - \mu| \ge \alpha) \le \varepsilon$

$\frac{D\xi}{\alpha^2} \le \varepsilon$

$\alpha^2 \ge \frac{1}{\varepsilon} \cdot D\xi$

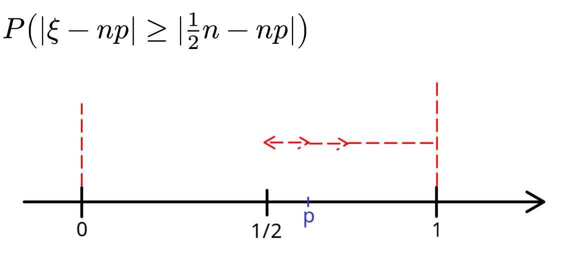
$\alpha \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \cdot D\xi} = N_0$

$\alpha \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} D \cdot \eta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot N_0$

Определение: распределение Бернулли
$0, 1 \quad p(1) = p,\ p(0) = q, \quad \xi_i$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \quad E\xi = np$

$P\left(|\xi - np| \ge |\frac{1}{2}n - np|\right)$



$P_{\mathrm{err}} \le P\left(|\xi - np| \ge |\frac{1}{2}n - np|\right)$

$P\left(np - \xi \ge np - \frac{1}{2}n\right)$
$P\left(\xi \le \left(\frac{1}{2}n - np\right) + np\right)$
$P\left(\xi \le np\left(\left(\frac{1}{2p} - 1\right) + 1\right)\right) \quad \frac{1}{2p} - 1 = \delta$
$P(\xi \le np(1 - \delta))$
$P(\xi \ge np(1 + \delta))$ — симметричная ситуация

Теорема: граница Чернова

$$\left.\begin{array}{l} P(\xi \le np(1 - \delta)) \\ \\ P(\xi \ge np(1 + \delta)) \end{array}\right. \le e^{-\frac{\delta^2}{2} np}$$

$e^{-\frac{1}{54}n} \le \varepsilon$

$-\frac{1}{54} n \le \ln \varepsilon$

$n \ge 54 \ln \frac{1}{\varepsilon}$

$\xi \quad t \quad \eta = e^{t\xi}$

$P(\eta \ge e^{t\alpha}) \le \frac{E\eta}{e^{t\alpha}}$

$E\eta = Ee^{t\xi} - Ee^{t \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i} = E \prod\limits_{i=1}^{n} e^{t\xi_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} Ee^{t\xi_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} (p \cdot e^t + 1 - p)$

> Сегодня будет не так весело, как на вчерашней лекции парадигм
>
> — Станкевич Андрей Сергеевич

Что такое информация?

1.10. Энтропия

информация = -неопределённость

Определение: энтропия случайнго источника

Количество информации, приходящейся на одно сообщение источника

$\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ — *вероятностное пространство (случайный источник)*

Вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$

$H(p_1, p_2, ..., p_n)$ — *энтропия случайного источника*

Свойства:

1. H непрерывна
2. $H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ... \frac{1}{n}\right)$ возрастает при росте n
3. Закон аддитивности

$$\Omega = \{(i, j),\ i = 1...n,\ j = 1...m_i\}$$
$$p_i = P(w.\text{first} = i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
$$q_{ij} = p(w.\text{second} = j \mid w.\text{first} = i)$$
$$\sum_{j=1}^{m_i} q_{ij} = 1$$
$$p((i, j)) = p(w.\text{first} = \text{i}) \cdot p(w.\text{second} = j \mid w.\text{first} = i) = p_i \cdot q_{ij}$$
$$H\left(p_1 q_{11}, p_1 q_{12}, ..., p_1 q_{1 m_1}, p_2 q_{21}, \cdot, p_n q_{nm}\right) = H(p_1, p_2, ..., p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H\left(q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{i m_i}\right)$$

$h(n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ... \frac{1}{n}\right) \quad h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$h(n) \nearrow$

$p_i = \frac{1}{n},\ q_{ij} = \frac{1}{m}$

$h(m \cdot n) = h(n)$

Такая функция единственна — логарифм. Докажем это

$h(n) =\ ?$

$i \quad h(n^i) = i \cdot h(n)$

$2^k \leq n^i \leq 2^{k+1} \qquad k = \lfloor \log_2 n^i \rfloor = \lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor$

$k \cdot h(2) \leq i \cdot h(n) \leq (k + 1) h(2)$

$$h(2) \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor}{i} \leq h(n) \leq h(2) \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor + 1}{i}$$

$$\forall i \left| h(n) - \frac{\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor}{i} \right| < \frac{1}{i}$$

$\lfloor i \cdot \log_2 n \rfloor = i \cdot \log_2 n = \{i \cdot \log_2 n\}$

$$\left| \frac{h(n)}{h(2)} - \log_2 n + \frac{\{i \cdot \log_2 n\}}{i} \right| < \frac{1}{i}$$

$$\frac{h(n)}{h(2)} = \log_2 n \qquad h(2) = c$$

$h(n) = c \cdot \log_2 n$

Бит, если $c = 1$

$$p_i = \frac{a_i}{b} \qquad q_{ij} = \frac{1}{a_i} \quad m_i = a_i$$

$H\left(p_i q_{ij}\right) = H(p_i) + \sum p_I H\left(q_{ij}\right)$

$h(b) = H(p_1 ... p_n) + \sum (p_i h(a_i))$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 b = H(p_1 ... p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 a_i$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(p_{i(\log_2 a_i - \log_2 b)}\right) = H(p_1 ... p_n)$$

$$H(p_1 ... p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i$$

Пример 1:

Возьмём TeX исходник учебника математического анализа, представимый в виде строки. Рассмотрим все символы в нём и вероятность получить конкретный символ, взяв случайный. Получим энтропию учебника математического анализа — количество информации. Но это не лучшая оценка информации учебника математического анализа, потому что после случайной перестановки символов энтропия (количество информации) не изменится, но количество информации по математическому анализу приравняется к 0

Пример 2:

Возьмём случайную строку длинной в миллион символов (число информации несколько миллионов бит). Лучший способ передать её (информацию о ней) — передать весь миллион символов (несколько миллионов бит *возможно после небольшого сжатия*)
Если мы захотим передать эту строку по телефонному звонку, нам придётся диктовать весь миллион символов. Но если мы просто захотим передать не фиксированную случайную строку в миллион символов, достаточно сказать "запиши случайную строку в миллион символов". В обоих случаях количество переданной информации равно, но усилия для передачи не равны

Определение: сложность по Колмогорову

$S \in \Sigma^*$

$K(S)$ — наименьшая длина программы, выводящей S на пустом входе

$\left| K_{\text{c++}}(S) - K_{\text{java}}(S) \right| \leq C_{\text{c++, java}}$

Можно написать на языке программирования Java интерпретатор язык программирования C++
Его размер не зависит ни от размера программы на C++, ни от S — константа

$K(S) \quad S$ случайнвя строка длины n

$K(S) = \Omega(n)$ "почти наверное"

$S = (01)^n \quad K(S) = O(\log_2 n)$

> C++ плохо выбирать, потому что он такой. Немного мерзкий язык. Выберем математическую модель C++
>
> — Станкевич Андрей Сергеевич

Пример 1:

Колмогоровская сложность учебника по математическому анализу меньше, чем колмогоровская сложность случайной строки. *Доказательства не будет*

Кодирование Хаффмана — оптималльный префиксный код, независимо кодирует $\forall$ символ

Арифметическое кодирование —

$L \quad f_i$

$\frac{p}{z^q} \quad q \simeq -L \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{L} \log_2 \frac{f_i}{L} = L \cdot H\left(\frac{f_1}{L}, ..., \frac{f_n}{L}\right)$ — *энтропийный барьер*

Арифметическое кодироание — оптимальный алгоритм кодирования, не учитывающего взаимного расположения символов

Доказательство минимальной асимптотики алгоритма сортировки с помощью энтропийного барьера:

$h(n!) = \log_2(n!) \simeq \log_2\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}\right) = n \cdot \log_2 n - n \cdot \log_2 e + \log \sqrt{2\pi n} = \Sigma(n \cdot \log n)$