Линейная алгебра
II семестр
Практик:
Мария Александровна Москаленко

весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov** **AberKadaber**

Оглавление

1. Тензоры

Тензор - значение ПЛФ на всех наборах базисных векторов

Зачем нам тензоры?
Тензоры инвариантны *(константны)*
Фактически, тензор — матричное представление полилинейной формы

Пример тензора:

$$\mathrm{E} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг тензора *определён строго* – он равен 3
Валентность тензора *однозначно определить нельзя*: (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) — возможные её значения

Обозначение $\varepsilon_{ijk} : i$ — строка, j — столбец k — слой

$(3,\ 0) \longleftrightarrow \varepsilon_{ijk}$

$(2,\ 1) \longleftrightarrow \varepsilon_{ij}^{k}$

$(1,\ 2) \longleftrightarrow \varepsilon_{i}^{jk}$

$(0,\ 3) \longleftrightarrow \varepsilon^{ijk}$

$\sqsupset a = (0\ 1\ 1)^T$

$b_{jk} = \varepsilon_{ijk} a^i$ – внутри происходит немое суммирование Эйнштейна

$b_{11} = \varepsilon_{111} a^1 + \varepsilon_{211} a^2 + \varepsilon_{311} a^3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Свёртка индексов:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) = \|a_{kl}^{ij}\|$$

i — локальная строка, j — локальный столбец, k — глобальная строка, l — глобальный стобец

Будем считать что это тензор четвертого ранга, валентности (2, 2)

$a_{hl}^{hj} = b_l^j$

$b_l^j = \sum\limits_h a_{hl}^{hj} = a_{1l}^{1j} + a_{2l}^{2j}$

$b_1^1 = a_{11}^{11} + a_{21}^{21} = 6$

$b_1^2 = a_{11}^{12} + a_{21}^{22} = 10$

...

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Тензорное произведение:

A — ПЛФ валентности $(1, 0) \longleftrightarrow a = (1, -1, 0)$

B — ПЛФ валентности $(2, 0) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\overset{\alpha}{a} \otimes \overset{\beta}{b} = \overset{\gamma}{c}$

$(\alpha_i) \otimes (\beta_{jk}) = \gamma_{ijk}$

$\gamma_{231} = \alpha_2 \cdot \beta_{31}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Другой пример:

$A(2, 0) \longleftrightarrow a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(1, 1) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c = a \otimes b$

$$(\alpha_{ij}) \otimes (\beta_l^k) = \gamma_{ijl}^k$$

Нумерация сверху вниз, слева направо:
k — локальная строка, i — локальный столбец, j — глобальная строка, l — глобальный стобец

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

Следующий пример:

Индекс сферху = форма = горизонтальные координаты

Индекс снизу = вектор = вертикальные координаты

$a^1 = (1, 0, 0)$

$a_2 = (0, 1, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_3 = (0, 0, 1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b = a^1 \otimes a_2 \otimes a_3$

$\beta_{ik}^j = (\psi^j) \otimes (\zeta_i) \otimes (\eta_k)$

$$b = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1.2. Транспонирование тензора:

Двумерное сечение — двумерная матрица, в которой зафиксированы все индексы, кроме 2 конкретных

Транспонирование тензора — операция, результатом которой

$A_{ikl}^{T(kl)} = A_{ilk}$

A — валентность (3, 0) $\longleftrightarrow a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right)$

$b_{ijk} = a_{ikl}$

$\sqsupset i = 1 \Rightarrow b_{jk} = a_{1jk} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{1kj} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\sqsupset i = 2 \Rightarrow b_{jk} = \ldots$

$B_{ijk} = A_{ikj} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right)$

1.3. Проверка тензора на симметричность и антисимметричность

$$a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Является ли он симметричным или антисимметричным?

$a_{223} = 2$ — не антисимметричный по $[ijk]$

$a_{123} = -2,\ a_{213} = -1 \Rightarrow$ не симметрично по (ijk), по (ij), не антисиметрично по $[ij]$

$a_{133} = 1$ не антисимметрично по $[jk]$

$a_{221} = -2,\ a_{212} = 0 \Rightarrow$ не симметрично по (jk)

$a_{221} = -2,\ a_{122} = 2 \Rightarrow$ не симметрично по $(i|j|k)$, но симметрично по $[i|j|k]$

Квадратные скобки - наличие свойства антисимметричности по данному набору

Круглые скобки - наличие свойства симметричности по данному набору индексов

1.4. Симметризация и антисимметризация тензоров

1.4.1. Симметризация

$W \in \Omega_0^p(\mathbb{K})$

$U(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_\sigma W\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right), \quad U \in \Sigma^p(\mathbb{K}), \quad U = \mathrm{Sym}(W)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \mathrm{Sym}(A) \quad b_{i,j} = a_{ij}^s = \frac{1}{2!}(a_{ij} + a_{ji})$

$b_{11} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad b_{13} = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$

$b_{12} = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2 \quad b_{23} = \frac{1}{2}(4 + 1) = \frac{5}{2}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Sym} A$

1.4.2. Антисимметризация

$V(x_1, \ldots x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_\sigma (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right), V \in \Lambda^p(\mathbb{K})$

$V = \mathrm{ASym}(W) = \mathrm{Alt}(W)$

$v_{ij} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\{ij\}} a_{ij} + (-1)^{\{ji\}} a_{ji}\right)$

$v_{13} = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) = 1$

$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{ASym} A$

1.5. Разложение на тензорное произведение одновалентных форм

$a_k^{ij} = \alpha f^i \otimes f^j \otimes e_k$

$$\begin{aligned} \left(a_k^{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) &= 1 \cdot f^1 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^1 \otimes f^2 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^2 \otimes e_1 + \\ &+ 2(f^1 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^1 \otimes f^2 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2) = \\ &= (f^1 \otimes f^1 + f^1 \otimes f^2 + f^2 \otimes f^1 + f^2 \otimes f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) = \\ &= (f^1 + f^2) \otimes (f^1 + f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) \end{aligned}$$

1.6. Смена базиса ПЛФ

Хочется понимать, что будет при смене базиса

X — ЛП (пространство контрвекторов)

$\{e_i\}$ — базис X

$x \in X,\ x_e = \sum \xi^i e_i$

$\{\tilde{e}_i\}$ — новый базис X

Базис e связан с базисом $\tilde{e}$ матрицей перехода T:

$$\tilde{E} = T_{e \to \tilde{e}} E$$

$$E - \text{матрица базиса } e,\ \tilde{E} - \text{матрица базиса } \tilde{e}$$

$\tilde{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_i^k e_k$

$x_{\tilde{e}} = S_{\tilde{e} \to e} x_e, \quad S_{\tilde{e} \to e} = T^{-1}_{e \to \tilde{e}}$

X^*:

$\{f^j\},\ \left\{\tilde{f}^j\right\}$ — базисы, сопряжённые $\{e_i\}$ и $\{\tilde{e}_i\}$ соответственно

$y_f = \sum g_j f^j$

$\tilde{f}^j = f^j S$

$y_{\tilde{f}} = y_f T$

$T = \|\tau_j^i\|$ *(верхний индекс отвечает за строку, нижний за столбец)*

$S = \|\sigma_j^i\|$

$\tau_i^k \cdot \sigma_k^j = \delta_i^j \Leftrightarrow TS = I$ - единичная матрица

$\omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$: $\quad \{e\},\ \{f\}$ — *p раз контрвариантен и q раз ковариантен (p векторов из X, q векторов из X^*)*

$\tilde{\omega}_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$: $\quad \{\tilde{e}\},\ \left\{\tilde{f}\right\}$

$\tilde{\omega}_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot \underbrace{\sigma_{i'_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i'_p}^{i_p}}_{p \text{ раз}} \cdot \underbrace{\tau_{j_1}^{j'_1} \cdot \ldots \cdot \tau_{j_q}^{j'_q}}_{q \text{ раз}}$

p раз контрвариантен $\Rightarrow$ p раз преобразовывается по контрвариантному закону (домножение на σ)
q раз ковариантен $\Rightarrow$ q раз преобразовывается по ковариантному закону (домножение на τ)

Пример:

Тензор валентности (2, 1), задан стандартный базис $\{e\} : e_1 = (1, 0, 0)\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$

$\tilde{e}_1 = e_1$

$\tilde{e}_2 = e_3$

$\tilde{e}_3 = e_2$

$A_e = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = S$

$\tilde{a}_{j'k'}^{i'} = a_{jk}^i \cdot \sigma_{j'}^j \cdot \sigma_{k'}^k \cdot \tau_i^{i'} \underset{\text{свертка индексов по } i}{=} \sigma_{j'}^j \cdot \sigma_{k'}^k \cdot \left(a_{jk}^1 \cdot \tau_1^{j'} + a_{jk}^2 \cdot \tau_2^{j'} + a_{jk}^3 \cdot \tau_3^{i'}\right)$

$\underset{\text{свертка индексов по } j}{=} \sigma_{k'}^k (\sigma_{j'}^1 \left(a_{1k}^1 \tau_1^{i'} + a_{1k}^2 \tau_2^{i'} + a_{1k}^3 \tau_3^{i'}\right) + \sigma_{j'}^2 \left(a_{2k}^1 \tau_1^{i'} + a_{2k}^2 \tau_2^{i'} + a_{2k}^3 \tau_3^{i'}\right) + \sigma_{j'}^3 \left(a_{3k}^1 \tau_1^{j'} + a_{3k}^2 \tau_2^{j'} + a_{3k}^3 \tau_3^{j'}\right)$

$\underset{\text{свертка индексов по } k}{=}$ предлагается оставить непосчитанным

Вместо расписывания свёртки, можно использовать ~~голову~~ матричные произведения

2. Определитель матрицы

По честному, определитель матрицы не умеет считать никто. Не существует *нормального* алгоритма, позволяющего посчитать определитель матрицы произвольного порядка

(запись матрицы внутри | | подразумевает определитель матрицы)

2.1. Метод приведения матрицы к треугольному виду

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \begin{vmatrix} A & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \left(1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \ldots + \frac{x}{a_n - x}\right) \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} -x \prod_{i=1}^{n} (a_i - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

В (1) равенстве мы вычли из всех строчек первую.

В (2) равенстве поделили каждый столбец на $(a_i - x)$.

В (3) равенстве мы прибавили к первому столбцу все остальные столбцы

В (4) равенстве мы сказали что определитель равен произведению элементов на главной диагонали (т.к. есть треугольник из нулей), а также расписали A

В (5) равенстве вынесли x за скобку

2.2. Метод выделения множителей

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x + 1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x + 1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x + 1 \end{vmatrix} = P_{n-1}(x)$$

$D = P_{n-1}(x) = (x - 1) P_{n-2}(x) = (x - 1)(x - 2) P_{n-3}(x) = \ldots = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n + 1) P_0(x)$

$x = 1 : P_{n-1}(1) = 0$
$x = 2 : P_{n-2}(2) = 0$

$P_0(x) = 1$ (*приведённый многочлен*) т.к. наибольшая степень достигается только при перемножении $n - 1$ скобки стоящей на главной диагонали. У всех них коэффициент 1, поэтому и итоговый коэффициент будет 1 $\Rightarrow$ *(для этой конкретной матрицы)* $D = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n + 1)$

2.3. Метод разложения на линейные множители

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x - y - z & x & y & z \\ x - y - z & 0 & z & y \\ y + z - x & z & 0 & x \\ z + y - x & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(x - y - z), \quad (x + z - y), \quad (x + y + z) \quad (x + y - z)$$

$$D = \alpha (x - y - z)(x + z - y)(x + y + z)(x + y - z), \quad \alpha = \pm 1$$

При z^4 должен быть +, поэтому $\alpha = +1$

В (1) равенстве прибавим к первом столбцу второй и вычтем 3-ий и 4-ый
Аналогично можем:

1. Прибавить 3-ий, вычесть 2-ой и 4-ый
2. Прибавить 4-ый, вычесть 2-ой и 3-ий
3. Прибавить 2-ой, 3-ий и 4-ый

При каждом из действий из первого столбца будет выделяться скобка, причем все они взаимнопросты, а т.к. суммарная степень многочлена 4, больше скобок не будет

> Вроде определитель всего лишь 4x4, а уже душно
>
> — Москаленко Мария Александровна

2.4. Метод рекуррентных соотношений

Пример:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix} = x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) + (a_n - x) D_{n-1} =$$

$$= x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) + x \prod_{i=1}^{n-2} (a_i - x)(a_n - x) + (a_n - x)(a_{n-1} - x) D_{n-2}$$

$$D_1 = x + (a_1 - x)$$

В (1) равенстве мы разложили последний столбец по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ a_n + x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n - x \end{pmatrix}$$

Пример:

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 7 D_{n-1} - 5 \cdot 2 \cdot D_{n-2}$$

$$D_n = 7 \cdot D_{n-1} - 10 D_{n-2} \overset{(3)}{\leftrightarrow} x^2 - 7x + 10 = 0 - \text{характеристическое уравнение}$$

$$D_n = C_1 (x_1)^n + C_2 (x_2)^n, \quad C_1 = \frac{D_2 - x_2 D_1}{x_1 (x_1 - x_2)}, \quad C_2 = -\frac{D_2 - x_1 D_1}{x_2 (x_1 - x_2)}$$

В равенстве (1) найдем определитель при помощи разложения по первой строке
В равенстве (2) найдем вторую матрицу при помощи разложения по первому столбцу

3. Линейные операторы

Преподаватель: Попков Роман Андреевич

Пример:

1. $x \mapsto x + a, \quad x, a \in E^3$
2. $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x), \quad f \in \mathbb{R}[x]$
3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + 3 \end{pmatrix}, \quad x_i \in F$
4. $x \mapsto (x, a) \cdot a \quad x, a \in E_3$

Проверим, являются ли эти операторы линейными:

1. $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$
   $(x+y) \mapsto (x+y) + a$
   $x \mapsto x + a$
   $y \mapsto y + a$
   Если $a = 0$, то $\varphi = \mathcal{I}$ (тождественный)
   Если $a \neq 0$, то φ не линейный оператор.
2. $f(x) \mapsto f(x) - \mathcal{I}$
   $f(x) \mapsto f(x+1)$
   $(f+g)(x) \mapsto (f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$
   Сумма линейных операторов — линейный оператор
3. Нет, линейности по второй координате не будет
4. Да, скалярное произведение линейно

3.1. Матрицы линейного оператора

$$\varphi(x) = [\varphi] \cdot x$$

Пример: $E^3 : (i, j, k)$

1. $x \overset{\varphi}{\mapsto} a \times x$
2. B : поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг прямой $x = y = z$

Матрица линейного оператора хранит образы базисных векторов.

$[\varphi]$:
$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$
$\varphi(i) = a \times i = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times i = 0i - a_2 k + a_3 j$
$\varphi(j) = a \times j = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times j = a_1 k + 0j - a_3 i$
$\varphi(k) = a \times k = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times k = -a_1 j + a_2 i + 0k$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & 0 & -a_1 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристика поля:

$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p} = 0, \ p - \min > 0 \Leftrightarrow \operatorname{char} \mathbb{K} = p$

$\nexists p \Leftrightarrow \operatorname{char} \mathbb{K} = 0$

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q} : \operatorname{char} = 0$

$\mathbb{Z}_p, \ p -$ простое: $\operatorname{char} = p$

Пример: *пространство квадратных матриц размера 2*

$M_2(F) \quad E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ – базис

$\varphi : X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X$

$[\varphi] = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a \cdot E_{11} + c \cdot E_{21} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22}$

Пример: *пространство многочленов не выше третьей степени*

$\mathbb{R}[x]_3 \quad (1, x, x^2, x^3)$

$\mathcal{A} : f \mapsto \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$

$\mathcal{A}(1) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x 1\, \mathrm{d}t = 1$

$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x x\, \mathrm{d}t = \frac{x}{2}$

$\mathcal{A}(x^2) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x x^2\, \mathrm{d}t = \frac{x^2}{3}$

$\mathcal{A}(x^3) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x x^3\, \mathrm{d}t = \frac{x^3}{4}$

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}^n = \mathcal{P}_{<1>}^{<x, x^2, x^3>}$ — проектор на 1 паралленльно x, x^2, x^3

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{A}^n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3.2. Переход в новый базис

$e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$\tilde{e} = (\underset{\tilde{e_1}}{e_2}, \underset{\tilde{e_2}}{e_1}, \underset{\tilde{e_3}}{e_3}, \underset{\tilde{e_4}}{e_4})$

$[\varphi]_{\tilde{e}} = (e \rightsquigarrow \tilde{e})^{-1} \cdot [\varphi]_e \cdot (e \rightsquigarrow \tilde{e})$

$(e \rightsquigarrow \tilde{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e \rightsquigarrow \tilde{e})^{-1}$, обратная матрица такая же, потому что *потому*

$[\varphi]_{\tilde{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Домашняя работа:
Найти матрицу $\varphi_{\tilde{e}}$, если $\tilde{e} = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

> Не нужно гадать. Нужно взять и умножить
>
> — Попков Роман Андреевич

Решение:

$e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$\tilde{e} = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

$$[\varphi]_{\tilde{e}} = (e \rightsquigarrow \tilde{e})^{-1} \cdot [\varphi]_e \cdot (e \rightsquigarrow \tilde{e})$$

$$(e \rightsquigarrow \tilde{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (e \rightsquigarrow \tilde{e})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_{\tilde{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

3.3. Базис и ядро линейного оператора

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} \qquad \operatorname{Im}\varphi = \{y \in Y \mid y = \varphi(x)\}$$

Пример:

$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Задание:
Найти базисы $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$

Решение:

$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$x_4 = 0$
$x_1 = -2x_3$
$x_2 = 3x_3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = 3$

$\mathbb{R}[x]_n, \quad n > 2$

1. $\mathcal{A} : f(x) \mapsto f(x+1)$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}, \quad \operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}[x]_n$
2. $\mathcal{B} : f(x) \mapsto f(-x)$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{B} = \{0\}, \quad \operatorname{Im}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[x]_n$
3. $\mathcal{C} : f(x) \mapsto x f''(x)$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{C} = \mathbb{R}[x]_1, \quad \operatorname{Im}(\mathcal{C}) = x \cdot \mathbb{R}[x]_{n-2}$
4. $\mathcal{D} : f(x) \mapsto f(0)x$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{D} = x\mathbb{R}[x]_{n-1}, \quad \operatorname{Im}(\mathcal{D}) = \{ax \mid a \in \mathbb{R}\}$

3.4. Сопряженный оператор (Сопряженное отображение)

$\varphi : V \to V$

$\varphi^* : V^* \to V^*$

$\underbrace{(\varphi^* \underbrace{\omega}_{\in V^*}}_{\in V^*}, x) := (\omega, \varphi x)$

$[\varphi]_e = A$

$[\varphi^*]_{e^*} = \ ?$

$e_1, \ldots, e_n$ — базис V

$e_1^*, \ldots, e_n^*$ — базис V^*

$(e_1^*, e_j) = \delta_{ij}$

$e_i^*(x) = x_i$

$e_i(x^*) = x_i^*$

$A = (a_{ij})$

a_{ij} — i-я координата j-ого базисного вектора

$a_{ij} = (e_i^*, \varphi(e_j)) = (\varphi^* e_i^*, e_j)$ —

j-я координата i-ого базисного ковектора при действии сопряжённого оператора

$[\varphi^*]_{e^*} = A^T$

Домашная работа:

Выразить $\operatorname{Ker}(\varphi^*)$ и $\operatorname{Im}(\varphi^*)$ через $\operatorname{Ker}(\varphi)$ и $\operatorname{Im}(\varphi)$

Решение:

$$[\varphi]_e = A, \quad [\varphi^*]_{e^*} = A^T \qquad [\varphi]_e = A \quad [\varphi^*]_{e^*} = A^T$$

1. $\operatorname{Ker}(\varphi^*)$

$\operatorname{Ker}(\varphi) \ = \{x \in X \ \mid \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow [\varphi] \cdot x = 0\}$

$\operatorname{Ker}(\varphi^*) = \{f \in X^* \mid \varphi^*(f) = 0 \Leftrightarrow f \cdot [\varphi]^* = 0\}$

$\varphi(x) \ = 0 \Leftrightarrow A \cdot x \ = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : \sum\limits_{j=1}^m A_{ij} \cdot x_j = 0$

$\varphi^*(f) = 0 \Leftrightarrow f \cdot A^T = 0 \Leftrightarrow \forall j \in [1, n] : \sum\limits_{i=1}^m f_i \cdot A_{ij}^T = 0 \Leftrightarrow \forall j \in [1, n] : \sum\limits_{i=1}^m A_{ji} \cdot f_i = 0$

$\operatorname{Ker}(\varphi^*) = \{f \in X^* \mid \nu_f = \xi_x, \ x \in \operatorname{Ker}(\varphi)\}$

2. $\operatorname{Im}(\varphi^*)$

$\operatorname{Im}(\varphi) \ = \{y \in Y \ \mid y = \varphi(x) \Leftrightarrow [\varphi] \cdot x = y\}$

$\operatorname{Im}(\varphi^*) = \{g \in Y^* \mid g = \varphi^*(f) \Leftrightarrow f \cdot [\varphi]^* = g\}$

$\varphi(x) \ = y \Leftrightarrow A \cdot x \ = y \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : \sum\limits_{j=1}^m A_{ij} \cdot x_j = y_i$

$\varphi^*(g) = 0 \Leftrightarrow f \cdot A^T = f \Leftrightarrow \forall j \in [1, n] : \sum\limits_{i=1}^m g_i \cdot A_{ij}^T = y_j \Leftrightarrow \forall j \in [1, n] : \sum\limits_{i=1}^m A_{ji} \cdot g_i = y_j$

$\operatorname{Im}(\varphi^*) = \{f \in X^* \mid \nu_f = \xi_x, \ x \in \operatorname{Im}(\varphi)\}$

Задание:

$\varphi \in \operatorname{End}V \quad V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Ker}\varphi$

То есть, доказать, что пространство раскладывается в прямую сумму ядра и образа тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi^2)$

Мы знаем что для любого оператора $\operatorname{Ker}(\varphi^2) \geq \operatorname{Ker}(\varphi)$
Теперь пусть $\operatorname{Ker}(\varphi^2) \leq \operatorname{Ker}(\varphi)$
Рассмотрим некоторый $x \in \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = 0$

$x = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi^2(y) = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker}(\varphi^2) \Rightarrow y \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Rightarrow \varphi(y) = 0 = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$
$\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$

В обратную сторону: пусть $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$
Найдем ядро квадрата: $\varphi(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ дописать

Домашняя работа:

1. Доказать, что ранг проектора равен его следу
2. Доказать, что След(AB) = След(BA)

4. Повторение теории

$\varphi \in \mathrm{End}(x) \Leftrightarrow \varphi : X \to X$

Собственный вектор:

x — собственный вектор оператора φ, если $\varphi x = \lambda x, \lambda \in K, \lambda$ — собственное значение

$\sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$ — спектр линейного оператора φ — множество всех собственных значений.

4.1. Решение задач

1. $\tau : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_2, \quad \tau A = A^T$

   Хотим найти собственные значения и собственные вектора:

   Введем базис в пространстве $\mathbb{R}^2_2$

   $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\tau M_1 = M_1 \quad \tau M_2 = M_3 \quad \tau M_3 = M_2 \quad \tau M_4 = M_4$

   В пространсве матриц работать неудобно, поэтому построим изоморфизм из $\mathbb{R}^2_2$ в $\mathbb{R}^4$:

   $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \leftrightarrow (a, b, c, d)^T$

   $A_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{X}_\tau(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^3(1+\lambda)$

   $\sigma_\tau = \left\{-1^{(1)}, 1^{(3)}\right\}$

   Найдем собственные вектора:

   $\varphi x = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$

   - $\lambda_1 = -1$

     $(A - \lambda_1 E) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

     $\sqsupset x_3$ — параметр, возьмем $x_3 = 1$:

     $x_4 = 0, x_2 = -1, x_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   - $\lambda_2 = 1^{(3)}$

     $(A - \lambda_2 E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

     $\sqsupset x_1, x_3, x_4$ — параметры

     $\sqsupset x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

     $\sqsupset x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

     $\sqsupset x_4 = 1, x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

     $(1\ 0\ 0\ 0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = v_2$

     $(0\ 1\ 0\ 1)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v_3$

     $(0\ 0\ 0\ 1)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v_4$

     Собственный базис: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

     τ — оператор скалярного типа $\Rightarrow A_\tau$ может быть диаганализована

     $\tilde{A}_\tau = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ — значения на диагоналях такие, т.к. это собственные значения. Порядок мог быть каким угодно, но нельзя −1 ставить в любое место между 1, т.к. значения должны записываться по порядку

     $\tilde{A}'_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ — тоже вариант, но в базисе: $\{v_2, v_3, v_4, v_1\}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{x, y, z\} \\ \varphi x = z, \quad \varphi y = x, \quad \varphi z = y \end{matrix}$

   $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1$

   $\sqsupset \mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \sigma_A = \{1\}$ (тут первая кратность и ее можно не писать)

   $\lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda E) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array}\right] \Rightarrow$ в $\mathbb{R}$ диагонализовать нельзя

   $\sqsupset \mathbb{K} = \mathbb{C}$

   $\lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}$

   $k = 0 \quad \lambda_1 = 1$

   $k = 1 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

   $k = 2 \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = e^{\frac{-2\pi}{3}i}$

   $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi}{3}i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi}{3}i} \end{bmatrix}$

   Над $\mathbb{C}$ матрица диагонализуема всегда, а над $\mathbb{R}$ — не всегда.

3. $\mathcal{P}_2$ — пространство однородных полиномов от двух переменных

   $\varphi(p)(x, y) = x\frac{\partial p}{\partial y} + y\frac{\partial p}{\partial x}$

   Найти матрицу $A\varphi$, собственные значения и собственные функции

   $\sqsupset \{x^2, xy, y^2\}$ — базис $\mathcal{P}_2(x, y)$

   $\varphi(x^2) = 2xy$

   $\varphi(xy) = x^2 + y^2$

   $\varphi(y^2) = 2xy$

   $A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   $\chi_\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$

   $\sigma_\varphi = \{-2, 0, 2\}$

   $\lambda = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -2, x_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

   $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = -1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2(x, y) = y^2 - x^2$

   $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 2, x_1 = 1 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

   $\tilde{A}_\varphi = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   Проверим, что v_3 — собственный вектор

   $Av_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_3 v_3$

   $\tilde{A}_\varphi = SAT, \quad S = T^{-1},\ T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $X = L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3 \Rightarrow \forall x \in X \quad x \overset{!}{=} x_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_j \in L_j$

   $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3), A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \tau_\varphi = \left\{4^{(2)}, 6\right\}$

   $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\{\xi_i\}_{i=1}^3$ и $\{\eta^j\}_{j=1}^3$ — сопряжённые базисы $\Rightarrow \forall x \quad x = \eta^1(x)\xi_1 + \eta^2(x)\xi_2 + \eta^3(x)\xi_3$

   $x_j = \eta^j(x)\xi_j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_1}(*) = \xi_1\eta^1(*)$

   $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\varphi = 4\mathcal{P}_{\lambda=4} + 6\mathcal{P}_{\lambda=6}$

   $\mathcal{P}_{\lambda=1} = \mathcal{P}_{v_1} + \mathcal{P}_{v_2}$

   $\mathcal{P}_{v_1}e_1 = (u^1, e_1)v_1 = \left[\frac{1}{2}(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{v_1}e_2 = (u^1, e_2)v_1 = \left[\frac{1}{2}(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{v_1}e_3 = (u^1, e_3)v_1 = \left[\frac{1}{2}(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{v_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{v_2}e_j = (u^2, e_j)v_2 \Rightarrow \mathcal{P}_{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{\lambda=4} = \mathcal{P}_{v_1} + \mathcal{P}_{v_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathcal{P}_{\lambda=6} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\sum_{j=1}^3 \mathcal{P}_{L_j} = \mathcal{I}, \quad \varphi = \sum^i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_j}$

   $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A$