

Математический анализ
II семестр
Лектор: Кохась Константин Петрович
зима/весна 2024

_scarleteagle

imkochelorov

Оглавление

1. Неопределённый интеграл	2
2. Определённый интеграл	3
2.1. Свойства	4
3. Верхний предел последовательности	6
4. Правило Лопиталья	11
4.1. Лемма об ускоренной сходимости	11
4.2. Лемма 2	11
4.3. Правило Лопиталья	11
5. Приложение определённого интеграла	12
5.1. Аддитивная функция промежутка	12
5.2. Плотность аддитивной функции промежутка	12
5.3. Фигуры вращения	16
5.4. Интегральные суммы	17

1. Неопределённый интеграл

Определение: первообразная

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F — первообразная f , если $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$

Теорема: f — непр на $\langle a, b \rangle \Rightarrow \exists$ пер-я f

Доказательство:

Чуть позже.

Теорема: F — пер-я f на $\langle a, b \rangle \Rightarrow$

- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я f
- G — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

Доказательство:

- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

Определение: неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл функции f на $\langle a, b \rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f - \text{пер-я}\}$

Обозначение: $\int f, \int f(x) dx$

Примеры:

- $\int \frac{1}{x+a^2} dx = \ln|x+a^2| + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$
- $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \odot \odot$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$

Теорема: о свойствах неопределённого интеграла

Пусть f, g имеют пер-е на $\langle a, b \rangle \Rightarrow$

- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ дифф $\Rightarrow \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right)_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t)$
 - Можно читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$

Доказательство:

- Тривиально.
- Тривиально.
- F — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16}+1} \right|$

Теорема: f, g дифф на $\langle a, b \rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b \rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b \rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:

$$(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &\stackrel{???}{=} \int_{x=\sin t} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \\ &\stackrel{[-1,1] \leftrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!

— КПК

2. Определённый интеграл

Определение: *плоская фигура*

Плоская фигура — огр. подмн-во \mathbb{R}^2

Определение: *множество плоских фигур*

\mathcal{E} = мн-во плоских фигур

Определение: *площадь*

Площадь — функция $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b-a)(d-c)$ (площадь прямоугольника)

Новости (хорошая и странная):

Площади существуют, площадей много.

Замечание:

- σ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

Определение: *ослабленная площадь*

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty)$:

- σ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Новости (хорошие и странные):

Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

Пример:

$$\sigma_1 E = \inf \left\{ \sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{кон.}} P_k \right\}$$

$$\sigma_2 E = \inf \left\{ \sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{счётн.}} P_k \right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1([0, 1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) &= 1 \\ \sigma_2([0, 1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) &= \sigma_2\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \\ \Rightarrow \sigma_2([0, 1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) &= 0\end{aligned}$$

σ_1 и σ_2 различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

Определение: *положительная срезка*

Положительная срезка f : $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка f : $f^- = \max(-f, 0)$.

Замечание:

$$\begin{aligned}f &= f^+ - f^- \\ |f| &= f^+ + f^-\end{aligned}$$

Определение: *подграфик функции*

$f \geq 0$ на $[a, b]$, $E \subset [a, b]$. Подграфик ф-ции f на мн-ве E $\Pi(f, E) == \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение: *определённый интеграл*

Определённый интеграл функции f на $[a, b]$ $\int_a^b f = \sigma(\Pi(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi(f^-, [a, b]))$

2.1. Свойства

Замечание:

Далее считаем $f \in C([a, b])$

Замечание:

- $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$ ☺
- $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$
- при $a = b \Rightarrow \int_a^b f = 0$

Свойство 1: *аддитивность по промежутку*

$$\forall c \in [a, b] \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Свойство 2. *монотонность*

$$f, g \in C([a, b]), f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство:

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$$

Следствие:

$$\begin{aligned}\Pi(f^+, [a, b]) &< \Pi(g^+, [a, b]) \Rightarrow \sigma(\Pi(f^+)) \leq \sigma(\Pi(g^+)) \\ \sigma(\Pi(f^-)) &\leq \sigma(\Pi(g^-))\end{aligned}$$

Свойство 3: $f \in C[a, b] \Rightarrow$

$$1. \min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f(b - a) \leq \max f \cdot (b - a)$$

$$2. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$3. \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Доказательство:

2.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

3.

Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \neq b$: $\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ — значение f в некоторой точке

Определение: интеграл с переменным верхним пределом

$f \in C([a, b])$, $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_a^x f$ — интеграл с переменным верхним пределом

Теорема: (Барроу)

Φ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a, b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$\int_a^y f - \int_a^x f = \left(\int_a^x f + \int_x^y f \right) - \int_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

Пример:

$$\left(\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt \right)' = \left(\int_a^{x^3} - \int_a^{x^2} \right)' = (\Phi(x^3) - \Phi(x^2))' = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^4} \cdot 2x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{s^4 + 2s} ds \int_{\int_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt} \sin n^2 dn \right) \quad \textcircled{?}$$

Теорема: (формула Ньютона-Лейбница)

$$f \in C([a, b]), F \text{ — пер-я } f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

$$\Phi = F + C$$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int_a^b f = - \int_b^a f$

До Ньютона не было законов Ньютона

— КПК

3. Верхний предел последовательности

Определение: *частичный предел последовательности*

$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \rightarrow a$, то a — *частичный предел последовательности* (x_n)

Пример:

- $x_n = (-1)^n$
 $n_k : 2, 4, 6, \dots \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow 1$
 $n_k = 1, 3, 5, \dots \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow -1$

Определение: *верхний предел / нижний предел*

$(x_n) \subset \mathbb{R}$, $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \Rightarrow z_n \leq x_n \leq y_n$, $y_{n+1} \geq y_n$, $z_{n+1} \leq z_n$

Верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

Нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$

Теорема:

- $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
- $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n, \underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
- $\lambda \geq 0 \quad \overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n \quad (\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim} \lambda x_n = \overline{\lim} \lambda x_n = 0)$
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim} x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -(\overline{\lim} x_n)$
- $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$
 $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$

$$\begin{aligned}
& (x_n) \\
& y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \\
& z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \\
& z_n \leq x_n \leq y_n \\
& \overline{\lim} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}} \\
& \underline{\lim} x_n = \lim z_n \\
& \overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n \\
& \sup(x_n + \tilde{x}_n, x_n + \tilde{x}_{n+1}, \dots) \leq \underbrace{\sup(x_n, x_{n+1}, \dots)}_{y_n} + \underbrace{\sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots)}_{\tilde{y}_n}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad t_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

Доказательство:

По опр. предела $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$

$$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$$

$$\sup_{k \geq N} x_k + l - \varepsilon \leq \sup_{k \geq N} (x_k + t_k) \leq \sup_{k \geq N} x_k + l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} x_n + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + t_n) \leq \overline{\lim} x_n + l + \varepsilon$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

$$\bullet \quad t_n \rightarrow l > 0, l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim} x_n \cdot l$$

Без доказательства

Теорема: (Техническое описание верхнего предела)

(x_n) — вещ. последовательность \Rightarrow

$$\bullet \quad \overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n \text{ не огр сверху}$$

$$\bullet \quad \overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

$$\bullet \quad \overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\bullet \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$$

$$\bullet \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_i) : \forall i \quad x_{n_i} > l - \varepsilon \text{ (т.е. существует бесконечно много } n)$$

Доказательство:

$$\bullet \quad \text{Очевидно: } \Rightarrow: y_n \rightarrow +\infty \quad \forall k \quad \exists y_n > k + 1 \text{ т.е. } \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) > k + 1 \text{ (т.е. } \forall k \quad \exists x_i > k) \Leftarrow: x_n \text{ не огр сверху} \Rightarrow y_n \equiv +\infty$$

$$\bullet \quad \text{Очевидно: } x_n \leq y_n$$

$$\Rightarrow: y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

$$\Leftarrow: \forall E < 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad x_k < E \Rightarrow y_{N+1} \leq E$$

$\bullet \Rightarrow:$

$$\bullet \quad y_n \rightarrow l, x_n \leq y_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l + \varepsilon$$

$$\bullet \quad y_n \text{ убывает, } y_n \rightarrow l \Rightarrow l \leq y_n \quad \forall n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

$$\exists x_k, k \geq n : l - \varepsilon < x_k$$

Берём $n = 1$, находим $k = k_1$

Берём $n > k_1$, находим $k = k_2$

Берём $n > k_2$, находим $k = k_3$

И т.д.

$\bullet \Leftarrow:$

$$\bullet \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon, x_{n+1} < l + \varepsilon, x_{n+2} < l + \varepsilon, \dots$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \leq l + \varepsilon$$

$$\bullet \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n \geq l - \varepsilon$$

$$\text{т.к. } y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots), \exists \text{ б.м. } x_i > l - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \quad y_n \geq l$$

$$\Rightarrow y_n \rightarrow l$$

Теорема:

(x_n) — вещ. последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ и если оба утв. верны, все 3 предела совпадают

Доказательство:

- $\Rightarrow: \lim x_n = \pm\infty \Rightarrow$ очев.: $\overline{\lim} x_n = +\infty$ (x_n не огр сверху $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$)
 $\underline{\lim} x_n = +\infty$ по тех. описанию, п.2

Если $\lim x_n = -\infty$ ☺ Аналогично

Пусть $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$, выполняется тех. описание $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = l$

Аналогично $\underline{\lim} x_n = l$

- $\Leftarrow: z_n \leq x_n \leq y_n, z_n \rightarrow l, y_n \rightarrow l \Rightarrow x_n \rightarrow l$

Теорема: (о характеристике верхнего предела как частичного)

(x_n) — вещ. последовательность \Rightarrow

- $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $x_n: \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
- $\exists n_k: x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \overline{\lim} x_n, \exists m_j: x_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

- $n_k: x_{n_k} \rightarrow l, z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}, z_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n, x_{n_k} \rightarrow l, y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
- Про верхний: $\overline{\lim} x_n = \pm\infty$ очев
 $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_k: l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ (из тех. описания)
 $l - \frac{1}{k} \rightarrow l, l + \frac{1}{k} \rightarrow l \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow l$

Пример:

$$x_n = \sin n$$

$$\overline{\lim} \sin n = 1$$

$$\forall k \sup(\sin k, \sin(k+1), \dots) = 1$$

Будем блуждать по окружности с шагом n_i .

$$n_0 = 1$$

$$n_1 = 6$$

$$n_1, 2n_1, 3n_1, \dots$$

$$n_2 = n_1 k \text{ или } n_1(k+1) \text{ (соответственно более короткой половинке дуги, которую делит 0)}$$

$$n_2, 2n_2, \dots$$

$$n_3 = n_2 l \text{ или } n_2(l+1) \text{ (аналогично)}$$

и т.д.

$$\text{Длина шага: } 1, < \frac{1}{2}, < \frac{1}{4}, < \frac{1}{8}, \dots$$

$$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\text{Существует б.много } \sin x_k > 1 - \varepsilon, \sin x_k \leq 1 \forall k \Rightarrow \overline{\lim} \sin n = 1$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно непрерывная

$x_0 = a < x_1, x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$

— $\forall k$ f — непрерывная на (x_{k-1}, x_k)

\exists конечный $\lim_{x \rightarrow x_k - 0} f, \lim_{x \rightarrow x_{k-1} + 0} f$

Тогда можно считать, что $\forall k$ $f \in C([x_{k-1}, x_k])$, $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$

Определение: почти первообразная

F — почти первообразная $f(x)$, если

$F \in C[a, b]$, дифф. всюду кроме кон. числа точек, $F'(x) = f(x) \forall x$, где F дифф.

Теорема:

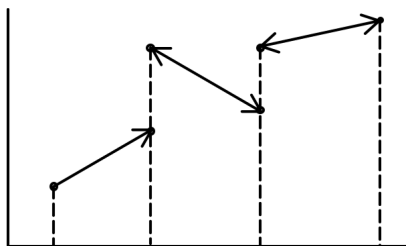
f — кус. непр., F — почти первообр.

Тогда: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

На (x_{k-1}, x_k) F — первообразная f

$$[x_{k-1}, x_k] \tilde{F} : F = \tilde{F} \text{ на } (x_k, x_{k-1})$$



Пример: неравенство Чебышева

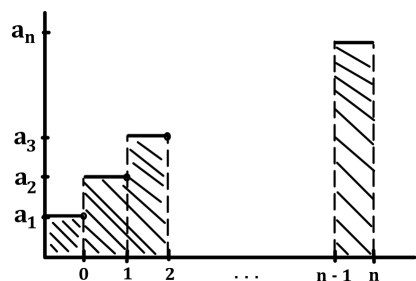
$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg} \quad (f, g - \text{возр}), \quad I_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Утверждение:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\text{Тогда } \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)$$

Доказательство:



$$f(x) = a_{[x]}, \quad x \in (0, n]$$

$$\text{На } (k-1, k) \quad F(x) = x \cdot a_k, \quad x \in [k-1, k]$$

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & x \in [0, 1] \\ a_2 x + (a_1 - a_2) & x \in [1, 2] \\ a_3 x + (a_1 + a_2 - 2a_3) & x \in [2, 3] \\ \dots & \dots \end{cases}$$

4. Правило Лопиталья

by Иоганн Бернулли

4.1. Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка D , $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists \dot{U}(a) \quad f \neq 0, g \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда $\forall (x_k), x_k \rightarrow a, x_k \in D, x_k \neq a \quad \exists (y_k), y_k \rightarrow a, y_k \in D, y_k \neq a : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

Доказательство:

y_k будем искать в посл. (x_n) так, чтобы $\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}, \left| \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}, |f(y_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|, |f(x_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|$

4.2. Лемма 2

Аналогичное верно для случая

$\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g = +\infty$

$\forall (x_k), \dots \quad \exists (y_k), \dots : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0, \dots = 0$

4.3. Правило Лопиталья

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$

дифф.

$g' \neq 0$ на (a, b)

$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f}{g} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right]$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f}{g} = A$

Доказательство:

$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохраняет знак (т. Дарбу) $\Rightarrow g$ — строго монотонно \Rightarrow в окр. точки a $g \neq 0$

По Гейне $x_k \rightarrow a, x_k \neq a, x_k \in (a, b)$, строим последовательность y_k из леммы

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}, f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \cdot \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

\downarrow
0

\downarrow
A

\downarrow
0

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \textcircled{\circ \circ}$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{\uparrow} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \textcircled{\circ \circ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Пример:

$$\int_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{интеграл Эйлера-Пуассона}$$

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^R e^{-x^2} dx}{g(R)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-R^2}}{g'(R)} = 1$$

I попытка:

$$g(R) = e^{-R^2}$$

$$g' = -2Re^{-R^2}$$

$$\frac{e^{-R^2}}{-2Re^{-R^2}} \rightarrow 0$$

II попытка:

$$g(R) = \frac{e^{-R^2}}{2R}$$

$$\frac{e^{-R^2}}{e^{-R^2} - \frac{e^{-R^2}}{2R}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1$$

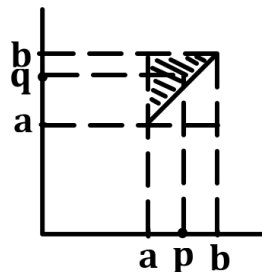
$$\int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2R} + o\left(\frac{e^{-R^2}}{R}\right)$$

5. Приложение определённого интеграла

Общая схема $\langle a, b \rangle$

$$\text{Segm}(\langle a, b \rangle) = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$$

5.1. Аддитивная функция промежутка



представление $\text{Segm}[p, q] \in \text{Segm}(a, b)$, если (p, q) лежит в заштрихованном треугольнике

$$\Phi : \text{Segm} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall [p, q] \in \text{Segm} \langle a, b \rangle \quad \forall c \in [p, q] \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, c]) + \Phi([c, q])$$

$$[p, q] \mapsto \int_p^q f$$

5.2. Плотность аддитивной функции промежутка

$$\Phi : \text{Segm} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f - \text{плотность } \Phi, \text{ если } \forall \Delta \in \text{Segm} : \min_{\Delta} f \cdot l_{\Delta} \leq \Phi(\Delta) \leq \max_{\Delta} f \cdot l_{\Delta}$$

Теорема: (о вычислении а. ф. п. по плотности)

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \text{ — непрерывна}$$

$$\Phi : \text{Segm} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \text{ — а.ф.п.}$$

$$f - \text{плотность } \Phi$$

Тогда:

$$\forall [p, q] \in \text{Segm} \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f(x) dx$$

Доказательство:

Не умаляя общности рассмотрим $[a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x=a \\ \Phi([a, x]), & x \in (a, b] \end{cases}$$

Проверим F — первообразная f

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \frac{\Phi([x, x+h])}{h} = f(x + \Theta h), \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$

$$F'_+ = \lim_{h \rightarrow +0} \dots = f(x)$$

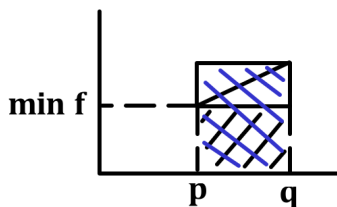
Аналогично $F'_- = f(x)$

$$\int_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi([p, q])$$

Пример 1: площадь подграфика

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

f — плотность, из монотонности площади



$$\min f(q - p) \leq \sigma(\Pi(f, [p, q])) \leq \max f(q - p)$$

$$\Phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi([p, q]) = \sigma(\Pi(f, [p, q])) = \int_p^q f$$

Пример:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

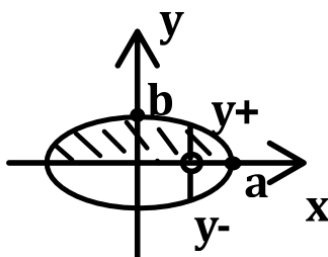


График эллипса



Геометрический способ поиска площади подграфика

$$x = a \cos t, t \in [\pi, 0]$$

$$y = b \sin t$$

$$\sigma_{\text{элл}} = \int_{-a}^a y^+(x) dx = - \int_{\pi}^0 b \sin t \cdot a \sin t dt = ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = ab \frac{\pi}{2}$$

Пример 2: площадь криволинейного сектора $\langle a, b \rangle$

$\Phi : [p, q] \mapsto \sigma$ Сектор $([p, q], r(\varphi))$

Проверим, что $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ — плотность а.ф.п. Φ

$$\frac{1}{2} \min_{[p, q]} r^2(\varphi)(q - p) \leq \Phi[p, q] \leq \frac{1}{2} \max_{[p, q]} r^2(\varphi) \cdot (q - p)$$

Кр. сектор $([p, q], \min_q r) \subset \text{Сектор}([p, q], r(\varphi)) \subset \text{Кр. сект.}([p, q], \max r)$

$$\text{Т.е. } \Phi([p, q]) = \frac{1}{2} \int_p^q r^2(\varphi) d\varphi$$

Посчитаем площадь круга

$$\sigma \text{ Круга} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \pi R^2 \quad \text{☺}$$

$$\varphi = \arctan \frac{g(t)}{x(t)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$S' = \frac{1}{2} \int_p^q r^2(\varphi) d\varphi \quad \text{☺} = \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_q} (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_p}^{t_q} y'(t)x(t) - x'(t)y(t) dt$$

$$x = R \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = R \sin t$$

$$S = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \frac{\pi R^2}{4}$$

Пример: Изометрическое пространство

$G \subset \mathbb{R}^2$ G — замкнутая выпуклая фигура. Диаметр $G = \sup(\rho(A, B), A, B \in G) = d \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ (равенство для круга $r = \frac{1}{2}$)

Доказательство:

$f(x)$ — вып., x_0 где $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists$ касательная

$$\begin{aligned} \Phi \text{ замк., вып.} &\Rightarrow r(\varphi) \text{ непр. } \sigma = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi_{\text{нов}} - \frac{\pi}{2}) d\varphi_{\text{нов}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} AB^2 d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{\pi d^2}{4} \end{aligned}$$

Определение: циклоида — траектория точки на окружности, катящейся по прямой

$$S_{\text{черн}} + S_{\text{син}} = S_{\text{прям}} + S_{\text{лепестка}}$$

$$S = 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$S = 3\pi r^2$$

$$\begin{cases} x(\varphi) = r\varphi - r \sin \varphi \\ y(\varphi) = r - r \cos \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x) dx = \int_0^{2\pi} (r - r \cos \varphi)(r - r \cos \varphi) d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi d\varphi = 2\pi r^2 + 0 + \pi r^2$$

Аналитические функции: $f(x) \in C^\infty \rightarrow \Phi$. Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \text{всюду сходится с рядом Тейлора}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \text{сходится с рядом Тейлора в точках из } [-1, 1]$$

Пример неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Утверждение: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(n)}(0) = 0$

Доказательство:

$$1) \exists f'(0) \quad \text{если} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = a, \text{ то } f'_+(x_0) = a$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a, \text{ то } f'(x_0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \odot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^3}}{-\frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^2}}{-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$\text{Следствие: } \forall k \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$$

$$\text{Итак, } f'(0) = 0, \quad \text{то есть } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Проверим по индукции по } n \quad \forall n \quad \exists P_n(x) - \text{многочлен: } f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

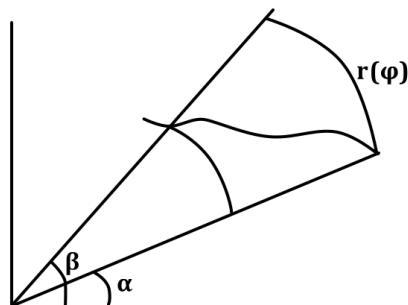
База: $n = 0$, 1 см. раньше

$$f^{(n+1)} = \begin{cases} \left(P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (f^{(n)}(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

f — плотность аддитивной функции промежутка Φ , если:

$$\forall \Delta \in \text{Segm} \quad \min_{\Delta} f \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq \max_{\Delta} f \cdot |\Delta| \quad (f \text{ непрерывна, в ином случае вместо min и max, inf и sup})$$



$$f = \frac{1}{2} r^2(\varphi)$$

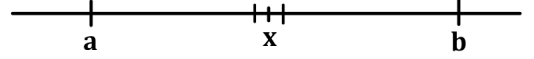
Теорема: f — плотность Φ (f — непр) $\Rightarrow \Phi([p, q]) = \int_p^q f$

Теорема: (обобщ. теорема о плотности)

Φ — а.ф.п: $\text{Segm}(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$

Пусть $\forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle) \quad \exists$ ф. пр-ка m_Δ, M_Δ :

- $m_\Delta \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot |\Delta|$
- $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
- \forall фикс. $x \in \langle a, b \rangle \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[|\Delta| \rightarrow 0]{x \in \Delta} 0$



т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \Delta \in \text{Segm}(\langle a, b \rangle) : |\Delta| < \delta, x \in \Delta \quad M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon$

Тогда f — плотность Φ $\left(\text{и } \forall [p, q] \subset \langle a, b \rangle \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f \right)$

Доказательство:

Не умаляя общности рассмотрим отрезок $[a, b]$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \Phi[a, x], & x>a \end{cases} \quad ? F' = f$

Фиксируем x , Пусть $h > 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h}, \text{ то есть из (1) } m_{[x, x+h]} < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_{[x, x+h]}$$

$$\text{из (2) } m_{[x, x+h]} \leq f(x) \leq M_{[x, x+h]}$$

Таким образом $\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_{[x, x+h]} - m_{[x, x+h]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

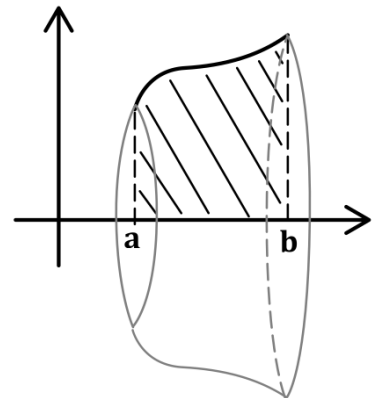
т. е. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$, т.е. $F'_+(x) = f(x)$

Аналогично $F'_-(x) = f(x)$

5.3. Фигуры вращения

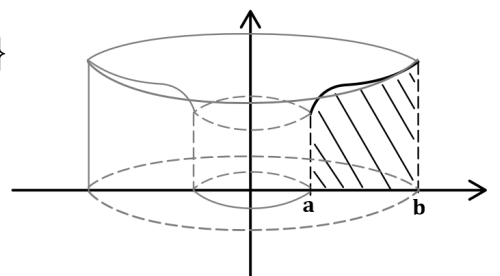
I тип: $f \geq 0$, непр.

$$T([a, b]) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$



II тип:

$$U([a, b]) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a^2 \leq x^2 + z^2 \leq b^2, 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + z^2})\}$$



$$\text{a.ф.п. } [a, b] \mapsto \Phi[a, b] = V(T[a, b])$$

$$\Psi[a, b] = V(U[a, b])$$

Теорема:

$$1) \Phi[a, b] = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$2) \Psi[a, b] = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Доказательство:

1) ИЕЯ

2) ? $2\pi x f(x) -$

$U[a, b] \subset \text{Цилиндр над кольцом } a^2 \leq x^2 + z^2 \leq b^2, \text{ высоты } \max_{[a, b]} f$

$$\bullet \Psi[a, b] \leq (\pi b^2 - \pi a^2) \max f = \pi(b + a) \max f(b - a) \leq \pi \cdot \max_{x \in [a, b]} 2x \cdot \max_{x \in [a, b]} f \cdot (b - a)$$

$$\Psi[a, b] \geq \pi \min 2x \cdot \min f(b - a)$$

$$M_{[a, b]} = \pi \cdot \max_{x \in [a, b]} = \pi \cdot \max 2x \cdot \max f$$

$$m_{[a, b]} = \pi \cdot \min 2x \cdot \min f$$

$$\bullet m_{[a, b]} \leq 2\pi x f(x) \leq \pi \cdot \max 2x \cdot \max f(x)$$

$$\bullet M - m \xrightarrow[\substack{x \in \Delta \\ |\Delta| \rightarrow 0}]{} 0$$

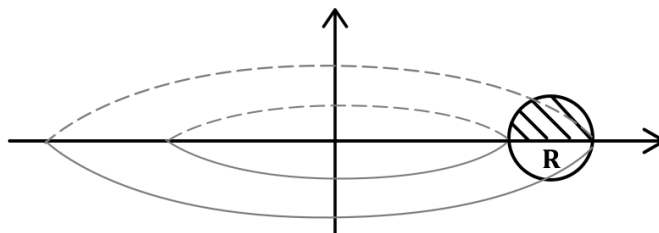
$$\max f \rightarrow f(x) \leftarrow \min f$$

$$\max 2t \rightarrow 2x \leftarrow \min 2t$$

Посчитаем объём бублика:

$$V_{\text{бублика}} = 2 \cdot 2\pi \int_{R-2}^{R+2} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx = 4\pi \int_{R-2}^{R+2} (x-R) \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx + 4\pi R \int_{R-2}^{R+2} \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx$$

$$= 0 + 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$



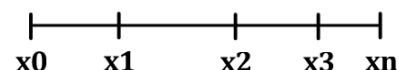
5.4. Интегральные суммы

$$f \in C[a, b]$$

Определение: дробление отрезка

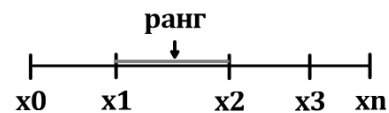
Дробление отрезка $[a, b]$ — набор точек

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



Определение: ранг дробления (мелкость)

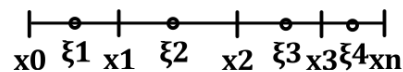
$$\text{Ранг дробления} = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$



Определение: оснащение

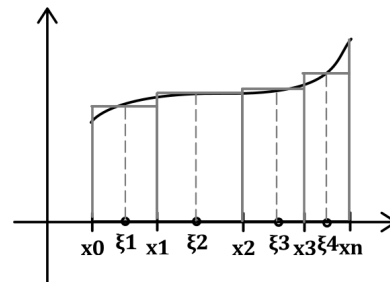
Оснащение — набор точек

$$\xi_1, \dots, \xi_n : \forall k \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$



Определение: интегральная (риманова) сумма

$$\text{Интегральная сумма} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$



Теорема: (об интеграле как о пределе интегральной суммы)

$f \in C[a, b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробление $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, где ранг дробления $< \delta$

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Т. Кантора: f — непр. на $[a, b] \Rightarrow f$ — равн. непр.

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \dots \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) dx \right| \leq \sum |\dots| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})| dx < \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} |b-a| = \varepsilon \end{aligned}$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Определение: модуль непрерывности

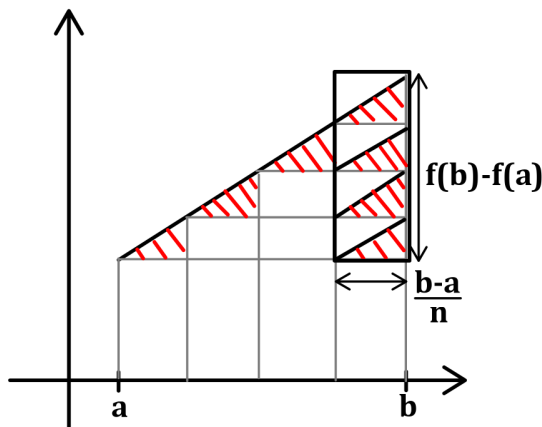
$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |x-t| < \delta}} |f(x) - f(t)| \text{ — модуль непрерывности}$$

Т. Кантора: $\omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ [для непр. f]

f — дифф на $[a, b]$ $M = \max |f'|$ Тогда $\omega(\delta) \leq M \cdot \delta$

(теорема Лагранжа)

Предыдущая теорема: если ранг дробления $< \delta$, то $\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \omega(\delta) \cdot (b - a)$
 $f \in C^1 \quad M = \max|f'| \quad \left| \int - \sum \right| \leq M\delta(b - a)$



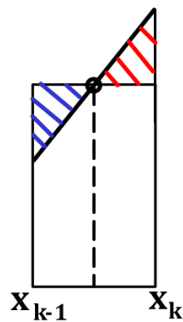
Теорема: (об интегральной сумме центральных прямоугольников)

$f \in C^2[a, b] \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad \xi_k = \max(x_k, x_{k-1}), \quad \xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$

Тогда $\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$

Доказательство:

Упражнение



Теорема: (формула трапеций)

$f \in C^2[a, b] \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \delta = \max(x_k - x_{k-1})$

Тогда $\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$

Доказательство:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u'v = uv|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v'u$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx =$$

$$\left[\begin{matrix} v = f & v = f' \\ u' = 1 & u = x - \xi_k \end{matrix} \right] = f(x)(x - \xi_k)|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - \xi_k) dx = (f(x_k) + f(x_{k-1})) \frac{x_k - x_{k-1}}{2} +$$

$$+ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(-2(x - \xi_k)) dx = \left[\begin{matrix} v = f' & f' = f'' \\ u' = -2(x - \xi_k) & u = (x - x_{k-1})(x_k - x) \end{matrix} \right]_{\text{на } [x_{k-1}, x_k]} =$$

$$= \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} (x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{2} \left(u \cdot f' \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'' \cdot u(x) dx \right), \text{ где } u(x) = (x - x_{k-1})(x_k - x)$$

Суммируем эти формулы по $k = 1, 2, \dots, n$

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \text{трап} - \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)u(x) \, dx$$

$$\left| \int_a^b f - \sum \text{трап} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f''(x)u(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''|u(x) \, dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

$$[a, b] = [0, n], x_k = k$$

$$\text{Формула трапеций: } \left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot 1 \right| \leq \frac{1}{8} \int_0^n |f''|$$

$$\textcircled{\text{☺}} f(x) = x$$

$$\left| \int_0^n x \, dx - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \dots + \frac{(n-1)+n}{2} \right) \right| \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2} + \int_0^n x \, dx = \frac{n^2+n}{2} \textcircled{\text{☺}}$$

Это частный случай формулы Эйлера-Маклорена