Математический анализ
II семестр

Лектор: Кохась Константин Петрович

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

Оглавление

1. Неопределённый интеграл

Определение: *первообразная*
$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F — *первообразная* f, если $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$

Теорема: f — непр на $\langle a, b\rangle \Rightarrow \exists$ пер-я f
Доказательство:
Чуть позже.

Теорема: F — пер-я f на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я f
- G — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

Доказательство:

- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

Определение: *неопределённый интеграл*
Неопределённый интеграл функции f на $\langle a, b\rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f$ - пер-я$\}$

Обозначение: $\int f, \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Примеры:

- $\int \frac{1}{x+a^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + a^2\right| + C$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x$
- $\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ☹
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \arcsin x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

Теорема: *о свойствах неопределённого интеграла*
Пусть f, g имеют пер-е на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифф $\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'\,\mathrm{d}t = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}\right) = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)$
  - Можо читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$

Доказательство:

- Тривиально.
- Тривиально.
- F — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{1/4}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16}+1}\right|$

Теорема: f, g дифф на $\langle a, b\rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:
$(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

Пример:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{x=\sin t\\ [-1,1]\leftrightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}{\overset{???}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

> Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!
>
> — КПК

2. Определённый интеграл

Определение: *плоская фигура*
Плоская фигура — огр. подмн-во $\mathbb{R}^2$

Определение: *множество плоских фигур*
$\mathcal{E}$ = мн-во плоских фигур

Определение: *площадь*
Площадь — функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a)(d - c)$ *(площадь прямоугольника)*

Новости (хорошая и странная):
Площади существуют, площадей много.

Замечание:

- σ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

Определение: *ослабленная площадь*
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- σ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Новости (хорошие и странные):
Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

Пример:
$$\sigma_1 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{кон.}} P_k\right\}$$

$$\sigma_2 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup_{\text{счётн.}} P_k\right\}$$

$\sigma_1\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = 1$
$\sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = \sigma_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right]$
$\Rightarrow \sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\Big) = 0$
σ_1 и σ_2 различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

Определение: *положительная срезка*
Положительная срезка f: $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка f: $f^- = \max(-f, 0)$.

Замечание:
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

Определение: *подграфик функции*
$f \geq 0$ на $[a,b], E \subset [a,b]$. *Подграфик ф-ции f на мн-ве E* $\Pi\Gamma(f, E) == \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

Определение: *определённый интеграл*
Определённый интеграл функции f на $[a,b]$ $\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b]))$

2.1. Свойства

Замечание:
Далее считаем $f \in C([a,b])$

Замечание:

- $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \quad \int\limits_a^b f = c(b-a)$ 🙂
- $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
- при $a = b \quad \int\limits_a^b = 0$

Свойство 1: *аддитивность по промежутку*

$\forall c \in [a,b] \int\limits_a^b = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Свойство 2. *монотонность*

$f, g \in C([a,b]), f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Доказательство:
$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$

Следствие:

$$\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) < \Pi\Gamma(g^+[a,b]) \Rightarrow \sigma(\Pi\Gamma(f^+)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^+))$$
$$\sigma(\Pi\Gamma(f^-)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^-))$$

Свойство 3: $f \in C[a,b] \Rightarrow$

1. $\min f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max f(b-a) \le \max f \cdot (b-a)$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$

3. $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

Доказательство:
2.
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

3.
Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \ne b$: $\min f \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \le \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a}\int\limits_b^a f$ — значение f в некоторой точке

Определение: *интеграл с переменным верхним пределом*
$f \in C([a,b]), \Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — *интеграл с переменным верхним пределом*

Теорема: (*Барроу*)
Φ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a,b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \left(\int\limits_a^x f + \int\limits_x^y f\right) - \int\limits_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y-x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

Пример:

$$\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int\limits_a^{x^3} - \int\limits_a^{x^2}\right)'_x = \left(\Phi(x^3) - \Phi(x^2)\right)' = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^4} \cdot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\int\limits_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}^{\int\limits_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{s^4+2s}\,\mathrm{d}s} \sin n^2\,\mathrm{d}n\right)$$ 😉

Теорема: (*формула Ньютона-Лейбница*)

$f \in C([a,b]), F$ — пер-я $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Доказательство:

$\Phi = F + C$

$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

> До Ньютона не было законов Ньютона
>
> — КПК

3. Верхний предел последовательности

Определение: *частичный предел последовательности*
$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \to a$, то a — *частичный предел последовательности* (x_n)

Пример:
- $x_n = (-1)^n$
  $n_k : 2, 4, 6, ... \Rightarrow x_{n_k} \to 1$
  $n_k = 1, 3, 5, ... \Rightarrow x_{n_k} \to -1$

Определение: *верхний предел / нижний предел*
$(x_n) \subset \mathbb{R}, \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \quad z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...) \Rightarrow z_n \leq x_n \leq y_n, \quad y_{n+1} \geq y_n, \quad z_{n+1} \leq z_n$

Верхний предел $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \limsup\limits_{n \to + \inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

Нижний предел $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = \liminf\limits_{n \to + \inf} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$

Теорема:

- $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
- $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n, \underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
- $\lambda \geq 0 \quad \overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$ $(\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim} \lambda x_n = \overline{\lim} \lambda x_n = 0)$
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim} x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim} x_n\right)$
- $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n, \underline{\lim}(x_n + y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$