Линейная алгебра
II семестр

Практик:
Мария Александровна Москаленко

зима/весна 2024

_scarleteagle **imkochelorov**

1. Тензоры

Тензор - значение ПЛФ на всех наборах базисных векторов

Зачем нам тензоры?
Тензоры инвариантны *(константны)*
Фактически, тензор — матричное представление полилинейной формы

Пример тензора:

$$\mathrm{E} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг тензора *определён строго* – он равен 3
Валентность тензора *однозначно определить нельзя*: (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) — возможные её значения

Обозначение ε_{ijk} : i — строка, j — столбец k — слой

$(3,\ 0) \longleftrightarrow \varepsilon_{ijk}$

$(2,\ 1) \longleftrightarrow \varepsilon_{ij}^{k}$

$(1,\ 2) \longleftrightarrow \varepsilon_{i}^{jk}$

$(0,\ 3) \longleftrightarrow \varepsilon^{ijk}$

$\sqsupset a = (0\ 1\ 1)^T$

$b_{jk} = \varepsilon_{ijk} a^i$ – внутри происходит немое суммирование Эйнштейна

$b_{11} = \varepsilon_{111} a^1 + \varepsilon_{211} a^2 + \varepsilon_{311} a^3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Свёртка индексов:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) = \|a_{kl}^{ij}\|$$

i — локальная строка, j — локальный столбец, k — глобальная строка, l — глобальный стобец

Будем считать что это тензор четвертого ранга, валентности (2, 2)

$a_{hl}^{hj} = b_l^j$

$b_l^j = \sum_h a_{hl}^{hj} = a_{1l}^{1j} + a_{2l}^{2j}$

$b_1^1 = a_{11}^{11} + a_{21}^{21} = 6$

$b_1^2 = a_{11}^{12} + a_{21}^{22} = 10$

...

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Тензорное произведение:

A — ПЛФ валентности $(1, 0) \longleftrightarrow a = (1, -1, 0)$

B — ПЛФ валентности $(2, 0) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\overset{\alpha}{a} \otimes \overset{\beta}{b} = \overset{\gamma}{c}$

$(\alpha_i) \otimes (\beta_{jk}) = \gamma_{ijk}$

$\gamma_{231} = \alpha_2 \cdot \beta_{31}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Следующий пример:

$A(2, 0) \longleftrightarrow a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(1, 1) \longleftrightarrow b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c = a \otimes b$

$$(\alpha_{ij}) \otimes (\beta_l^k) = \gamma_{ijl}^k$$

Нумерация сверху вниз, слева направо:
k — локальная строка, i — локальный столбец, j — глобальная строка, l — глобальный стобец

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

Следующий пример:

Индекс сферху = форма = горизонтальные координаты

Индекс снизу = вектор = вертикальные координаты

$a^1 = (1, 0, 0)$
$a_2 = (0, 1, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_3 = (0, 0, 1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b = a^1 \otimes a_2 \otimes a_3$

$\beta_{ik}^j = (\psi^i) \otimes (\zeta_i) \otimes (\eta_k)$

$$b = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1.2. Транспонирование тензора:

Двумерное сечение — двумерная матрица, в которой зафиксированы все индексы, кроме 2 конкретных

Транспонирование тензора — операция, результатом которой

$A_{ikl}^{T(kl)} = A_{ilk}$

A — валентность (3, 0) $\longleftrightarrow a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right)$

$b_{ijk} = a_{ikl}$

$\sqsupset i = 1 \Rightarrow b_{jk} = a_{1jk} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{1kj} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\sqsupset i = 2 \Rightarrow b_{jk} = \ldots$

$$B_{ijk} = A_{ikj} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

1.3. Проверка тензора на симметричность и антисимметричность

$$a = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Является ли он симметричным или антисимметричным?

$a_{223} = 2$ — не антисимметричный по $[ijk]$

$a_{123} = -2,\ a_{213} = -1 \Rightarrow$ не симметрично по (ijk), по (ij), не антисиметрично по $[ij]$

$a_{133} = 1$ не антисимметрично по $[jk]$

$a_{221} = -2,\ a_{212} = 0 \Rightarrow$ не симметрично по (jk)

$a_{221} = -2,\ a_{122} = 2 \Rightarrow$ не симметрично по $(i|j|k)$, но симметрично по $[i|j|k]$

Квадратные скобки - наличие свойства антисимметричности по данному набору

Круглые скобки - наличие свойства симметричности по данному набору индексов

1.4. Симметризация и антисимметризация тензоров

1.4.1. Симметризация

$W \in \Omega_0^p(\mathbb{K})$

$U(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right), \quad U \in \sum^p(\mathbb{K}), \quad U = \mathrm{Sym}(W)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \mathrm{Sym}(A) \quad b_{i,j} = a_{ij}^s = \frac{1}{2!}(a_{ij} + a_{ji})$

$b_{11} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad b_{13} = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$

$b_{12} = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2 \quad b_{23} = \frac{1}{2}(4 + 1) = \frac{5}{2}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Sym} A$$

1.4.2. Антисимметризация

$V(x_1, ...x_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right), V \in \Lambda^p(\mathbb{K})$

$V = \mathrm{ASym}(W) = \mathrm{Alt}(W)$

$v_{ij} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\{ij\}} a_{ij} + (-1)^{\{ji\}} a_{ji}\right)$

$v_{13} = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) = 1$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{ASym} A$$

1.5. Разложение на тензорное произведение одновалентных форм

$a_k^{ij} = \alpha f^i \otimes f^j \otimes e_k$

$$\begin{aligned} \left(a_k^{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) &= 1 \cdot f^1 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^1 \otimes f^2 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^1 \otimes e_1 + 1 \cdot f^2 \otimes f^2 \otimes e_1 + \\ &+ 2(f^1 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^1 \otimes f^2 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2 + f^2 \otimes f^1 \otimes e_2) = \\ &= (f^1 \otimes f^1 + f^1 \otimes f^2 + f^2 \otimes f^1 + f^2 \otimes f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) = \\ &= (f^1 + f^2) \otimes (f^1 + f^2) \otimes (e_1 + 2e_2) \end{aligned}$$