# Математический анализ
# II семестр

**Лектор: Кохась Константин Петрович**

зима/весна 2024

**_scarleteagle** **imkochelorov**

# Оглавление

# 1. Неопределённый интеграл

**Определение:** *первообразная*
$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$F$ — *первообразная* $f$, если $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$

**Теорема:** $f$ — непр на $\langle a, b\rangle \Rightarrow \exists$ пер-я $f$
**Доказательство:**
Чуть позже.

**Теорема:** $F$ — пер-я $f$ на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — пер-я $f$
- $G$ — пер-я $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$

**Доказательство:**
- $(F + c)' = f$
- $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

**Определение:** *неопределённый интеграл*
*Неопределённый интеграл* функции $f$ на $\langle a, b\rangle$ — мн-во всех первообразных $= \{F + c, c \in \mathbb{R}, f$ - пер-я$\}$

**Обозначение:** $\int f, \int f(x)\,\mathrm{d}x$

**Примеры**:
- $\int \frac{1}{x+a^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + a^2\right| + C$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x$
- $\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ☹
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \arcsin x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$

**Теорема:** *о свойствах неопределённого интеграла*
Пусть $f, g$ имеют пер-е на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$
- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$
- Замена переменной: $\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифф $\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'\,\mathrm{d}t = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}\right) = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)$
  - Можо читать справа налево: $F(\varphi(t)) = h(t) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$

**Доказательство:**
- Тривиально.
- Тривиально.
- $F$ — пер-я $f \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t))$
- Частный случай предыдущего пункта.

Пример: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}} = \frac{1}{1/4}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16}+1}\right|$

**Теорема:** $f, g$ дифф на $\langle a, b\rangle$, $f'g$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle \Rightarrow g'f$ имеет пер-ю на $\langle a, b\rangle$ и $\int fg' = fg - \int f'g$

**Доказательство:**
$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

**Пример:**

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{x=\sin t \\ [-1,1]\leftrightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}{\overset{???}{=}} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

> Если у вас что-то такое в уме - изгоните немедленно!
>
> — КПК

# 2. Определённый интеграл

**Определение:** *плоская фигура*
*Плоская фигура* — огр. подмн-во $\mathbb{R}^2$

**Определение:** *множество плоских фигур*
$\mathcal{E}$ = мн-во плоских фигур

**Определение:** *площадь*
*Площадь* — функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- Аддитивность: $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
- Нормировка: $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$ *(площадь прямоугольника)*

**Новости** (хорошая и странная):
Площади существуют, площадей много.

**Замечание:**

- $\sigma$ монотонна: $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow \sigma A \le \sigma B$
- $\sigma(\text{верт. отрезка}) = 0$

**Определение:** *ослабленная площадь*
*Ослабленная площадь* $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$:

- $\sigma$ монотонна
- Нормировка
- Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2$ (разбиение верт. отрезком) $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

**Новости** (хорошие и странные):
Ослабленные площади существуют, ослабленных площадей много

**Пример:**
$\sigma_1 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup\limits_{\text{кон.}} P_k\right\}$

$\sigma_2 E = \inf\left\{\sum \sigma(P_k) : E \subset \bigcup\limits_{\text{счётн.}} P_k\right\}$

$\sigma_1\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = 1$
$\sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = \sigma_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\{P(x_k)\}\right), P(x_k) = \left[x_1^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_1^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right] \times \left[x_2^k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}, x_2^k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^k}}\right]$
$\Rightarrow \sigma_2\Big([0,1]^2 \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\Big) = 0$
$\sigma_1$ и $\sigma_2$ различаются только в патологических случаях. Для подграфиков непрерывных ф-ций они дают одно и то же.

**Определение:** *положительная срезка*
Положительная срезка $f$: $f^+ = \max(f, 0)$. Отрицательная срезка $f$: $f^- = \max(-f, 0)$.

**Замечание:**
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

**Определение:** *подграфик функции*
$f \geq 0$ на $[a, b], E \subset [a, b]$. *Подграфик ф-ции* $f$ *на мн-ве* $E$ $\Pi\Gamma(f, E) == \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

**Определение:** *определённый интеграл*
Определённый интеграл функции $f$ на $[a, b]$ $\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$

## 2.1. Свойства

**Замечание:**
Далее считаем $f \in C([a, b])$

**Замечание:**

- $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $f \equiv c \quad \int\limits_a^b f = c(b - a)$ 🙂
- $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
- при $a = b \quad \int\limits_a^b = 0$

**Свойство 1:** *аддитивность по промежутку*

$\forall c \in [a, b] \int\limits_a^b = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

**Свойство 2.** *монотонность*

$f, g \in C([a, b]), f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

**Доказательство:**
$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^+$

**Следствие:**

$$\begin{aligned}\Pi\Gamma(f^+, [a, b]) < \Pi\Gamma(g^+[a, b]) \Rightarrow\ & \sigma(\Pi\Gamma(f^+)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^+)) \\ & \sigma(\Pi\Gamma(f^-)) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g^-))\end{aligned}$$

**Свойство 3:** $f \in C[a,b] \Rightarrow$

1. $\min f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max f(b-a) \le \max f \cdot (b-a)$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$

3. $\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

**Доказательство:**
2.
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

3.
Для $a = b$ утверждение тривиально

Если $a \ne b$: $\min f \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \le \max f$, далее по теореме о промежуточном значении $\frac{1}{b-a}\int\limits_b^a f$ — значение $f$ в некоторой точке

**Определение:** *интеграл с переменным верхним пределом*
$f \in C([a,b]), \Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f$ — *интеграл с переменным верхним пределом*

**Теорема:** (*Барроу*)
$\Phi$ — интеграл с пер. верх. пределом, дифф на $[a,b]$, $\forall x \quad \Phi'(x) = f(x)$

**Доказательство:**

$$\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f = \left(\int\limits_a^x f + \int\limits_x^y f\right) - \int\limits_a^x f$$

$$y > x : \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim_{y\to x+0} f(c) = f(x)$$

$x > y$: аналогично

**Пример:**

$$\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int\limits_a^{x^3} - \int\limits_a^{x^2}\right)'_x = \left(\Phi(x^3) - \Phi(x^2)\right)' = e^{-x^6}\cdot 3x^2 - e^{-x^4}\cdot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\int\limits_{x^2}^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}^{\int\limits_{\sin x}^{\ln x}\sqrt{s^4+2s}\,\mathrm{d}s} \sin n^2\,\mathrm{d}n\right)$$ 😉

**Теорема:** (*формула Ньютона-Лейбница*)

$f \in C([a,b]), F$ — пер-я $f \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

**Доказательство:**

$\Phi = F + C$

$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Согласование: $a > b \Rightarrow \int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

> До Ньютона не было законов Ньютона
>
> — КПК

# 3. Верхний предел последовательности

**Определение:** *частичный предел последовательности*
$(x_n) \subset \mathbb{R}$. Если $\exists a, \exists n_k : x_{n_k} \to a$, то $a$ — *частичный предел последовательности* $(x_n)$

**Пример:**
- $x_n = (-1)^n$
  $n_k : 2, 4, 6, ... \Rightarrow x_{n_k} \to 1$
  $n_k = 1, 3, 5, ... \Rightarrow x_{n_k} \to -1$

**Определение:** *верхний предел / нижний предел*
$(x_n) \subset \mathbb{R}, \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...), \quad z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...) \Rightarrow z_n \leq x_n \leq y_n, \quad y_{n+1} \geq y_n, \quad z_{n+1} \leq z_n$

*Верхний предел* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \operatorname*{limsup}\limits_{n\to+\inf} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

*Нижний предел* $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \operatorname*{liminf}\limits_{n\to+\inf} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$

**Теорема:**

- $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$
- $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow \overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, \tilde{x}_n, \underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \tilde{x}_n$
- $\lambda \geq 0 \quad \overline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda \overline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda \underline{\lim}\, x_n$ $(\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lim}\, \lambda x_n = \overline{\lim}\, \lambda x_n = 0)$
- $\overline{\lim}(-x_n) = -(\underline{\lim}\, x_n), \underline{\lim}(-x_n) = -\left(\overline{\lim}\, x_n\right)$
- $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$
  $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, \tilde{x}_n$

$(x_n)$
$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, ...)$
$z_n \le x_n \le y_n$
$\overline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$
$\underline{\lim}\, x_n = \lim z_n$
$\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$
$\sup(x_n + \tilde{x}_n, x_n + \tilde{x}_{n+1}, ...) \le \underbrace{\sup(x_n, x_{n+1}, ...)}_{y_n} + \underbrace{\sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, ...)}_{\tilde{y}_n}$

- $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

**Доказательство:**
По опр. предела $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \forall k > N_0 \quad l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$
$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
$\underset{\sup \text{ по } k \ge N > N_0}{\rightsquigarrow} \quad y_N + l - \varepsilon \le \sup\limits_{k \ge N}(x_k + t_k) \le y_N + l + \varepsilon$
$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \le \overline{\lim}(x_n + t_n) \le \overline{\lim}\, x_n + l + \varepsilon$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$

- $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$

Без доказательства
**Теорема:** (*Техническое описание верхнего предела*)
$(x_n)$ – вещ. последовательность $\Rightarrow$

- $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ не огр сверху
- $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
- $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (n_i) : \forall i \quad x_{n_i} > l - \varepsilon$ (т.е. существует бесконечно много n)

**Доказательство:**

- Очевидно: $\Rightarrow$: $y_n \to +\infty \quad \forall k \quad \exists y_n > k + 1$ т.е. $\sup(x_n, x_{n+1}, ...) > k + 1$ (т.е. $\forall k \quad \exists x_i > k$) $\Leftarrow$: $x_n$ не огр сверху $\Rightarrow y_n \equiv +\infty$
- Очевидно: $x_n \le y_n$
  $\Rightarrow$: $y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$
  $\Leftarrow$: $\forall \mathrm{E} < 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad x_k < \mathrm{E} \Rightarrow y_{N+1} \le \mathrm{E}$
- $\Rightarrow$:
  - $y_n \to l, x_n \le y_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \le y_n < l - \varepsilon$
  - $y_n$ убывает, $y_n \to l \Rightarrow l \le y_n \quad \forall n$
    $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$
    $\exists x_k, k \ge n : l - \varepsilon < x_k$
    Берём $n = 1$, находим $k = k_1$
    Берём $n > k_1$, находим $k = k_2$
    Берём $n > k_2$, находим $k = k_3$
    И т.д.
- $\Leftarrow$:
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \le l + \varepsilon, x_{n+1} < l + \varepsilon, x_{n+2} < l + \varepsilon, ...$
    $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \le l + \varepsilon$
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad y_n \ge l - \varepsilon$
    т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, ...)$, $\exists$ б.м. $x_i > l - \varepsilon$
    $\Rightarrow \forall n \quad y_n \ge l$

  $\Rightarrow y_n \to l$

**Теорема:**
$(x_n)$ — вещ. последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$ и если оба утв. верны, все 3 предела совпадают
**Доказательство:**

- $\Rightarrow$: $\lim x_n = \pm\infty \Rightarrow$ очев.: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ ($x_n$ не огр сверху $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = +\infty$)
  $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ по тех. описанию, п.2

  Если $\lim x_n = -\infty$ 🙂 Аналогично

  Пусть $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$, выполняется тех. описание $\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = l$
  Аналогично $\underline{\lim}\, x_n = l$
- $\Leftarrow$: $z_n \le x_n \le y_n, z_n \to l, y_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

**Теорема:** (*о характеризации верхнего предела как частичного*)
$(x_n)$ — вещ. последовательность $\Rightarrow$
- $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $x_n$ : $\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- $\exists n_k : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{\lim}\, x_n, \exists m_j : x_{m_j} \underset{j\to+\infty}{\to} \underline{\lim}\, x_n$

**Доказательство:**

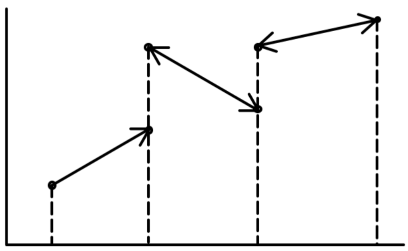
- $n_k : x_{n_k} \to l \quad z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}$
  $z_{n_k} \to \underline{\lim}\, x_n, x_{n_k} \to l, y_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$
- Про верхний: $\overline{\lim}\, x_n = \pm\infty$ очев
  $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$ (из тех. описания)
  $l - \frac{1}{k} \to l, l + \frac{1}{k} \to l \Rightarrow x_{n_k} \to l$

**Пример:**
$x_n = \sin n$
$\overline{\lim} \sin n = 1$
$\forall k \quad \sup(\sin k, \sin(k+1), \dots) = 1$
Будем блуждать по окружности с шагом $n_i$.
$n_0 = 1$
$n_1 = 6$
$n_1, 2n_1, 3n_1, \dots$
$n_2 = n_1 k$ или $n_1(k+1)$ (соответственно более короткой половинке дуги, которую делит 0)
$n_2, 2n_2, \dots$
$n_3 = n_2 l$ или $n_2(l+1)$ (аналогично)
и т.д.
Длина шага: $1, < \frac{1}{2}, < \frac{1}{4}, < \frac{1}{8}, \dots$
$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$
Существует б.много $\sin x_k > 1 - \varepsilon, \sin x_k \le 1 \forall k \Rightarrow \overline{\lim} \sin n = 1$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — кусочно непрерывная
$x_0 = a < x_1, x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$
$- \forall k \quad f$ — непрерывная на $(x_{k-1}, x_k)$
$\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to x_k - 0} f, \quad \lim\limits_{x \to x_{k-1} + 0} f$
Тогда можно считать, что $\forall k \quad f \in C([x_{k-1}, x_k]), \quad \int\limits_a^b f = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f$

**Определение:** почти первообразная
$F$ — *почти первообразная* $f(x)$, если
$F \in C[a, b]$, дифф. всюду кроме кон. числа точек, $F'(x) = f(x) \ \forall x$, где $F$ дифф.

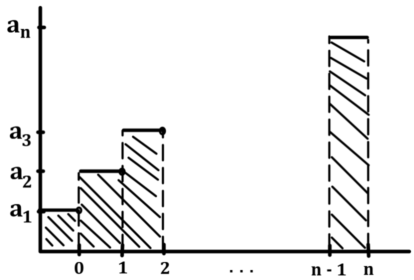
**Теорема:**
$f$ — кус. непр., $F$ — почти первообр.
Тогда: $\int\limits_a^b = F(b) - F(a)$
$\int\limits_a^b f = \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum\limits_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$
На $(x_{k-1}, x_k) F$ — первообразная $f$
$[x_{k-1}, x_k] \tilde{F} : F = \tilde{F}$ на $(x_k, x_{k-1})$



**Пример:** неравенство Чебышева
$I_f \cdot I_g \le I_{fg} \quad (f, g$ — возр), $\ I_f = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$

**Утверждение:**
$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, \ b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$
Тогда $\left( \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n a_k \right) \left( \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n b_k \right) \le \frac{1}{n} \left( \sum\limits_{k=1}^n a_k b_k \right)$

**Доказательство:**




$f(x) = a_{\lceil x \rceil}, \quad x \in (0, n]$
На $(k-1, k) \quad F(x) = x \cdot a_k, \ x \in [k-1, \ k]$

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & x \in [0, 1] \\ a_2 x + (a_1 - a_2) & x \in [1, 2] \\ a_3 x + (a_1 + a_2 - 2a_3) & x \in [2, 3] \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

# 4. Правило Лопиталя

*by* Иоганн Бернулли

## 4.1. Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a$ — предельная точка $D,\ a \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\exists \dot{U}(a) \quad f \neq 0, g \neq 0$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
Тогда $\forall (x_k),\ x_k \to a,\ x_k \in D,\ x_k \neq a \quad \exists (y_k),\ y_k \to a,\ y_k \in D,\ y_k \neq a : \lim \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0,\ \ \lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$
**Доказательство:**
$y_k$ будем искать в посл. $(x_n)$ так, чтобы $\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k},\ \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}, \quad |f(y_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|, \quad |f(x_k)| < \frac{1}{k}|g(x_k)|$

## 4.2. Лемма 2

Аналогичное верно для случая
$\lim\limits_{x \to a} f = +\infty,\ \ \lim\limits_{x \to a} g = +\infty$
$\forall (x_k), \dots \quad \exists (y_k), \dots : \lim \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0, \dots = 0$

## 4.3. Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}}$
дифф.
$g' \neq 0$ на $(a, b)$
$\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = \left[\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right]$
Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f}{g} = A$

**Доказательство:**
$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохраняет знак (т. Дарбу) $\Rightarrow g$ — строго монотонно $\Rightarrow$ в окр. точки $a$ $g \neq 0$
По Гейне $x_k \to a,\ x_k \neq a,\ x_k \in (a, b), \quad$ строим последовательность $y_k$ из леммы
$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)},\ f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}} + \underset{\underset{A}{\downarrow}}{\frac{f'(\xi_k)}{g'(x_k)}} \cdot \left(1 - \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}\right)$$

**Пример:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = ☺$$

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{2x \sin \frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\cos x}} = ☹$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Пример:**

$\int\limits_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ — интеграл Эйлера-Пуассона

$\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$

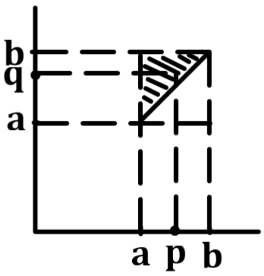
$$1 = \lim_{R\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}{g(R)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{R\to+\infty} \frac{-e^{-R^2}}{g'(R)} = 1$$

I попытка:
$g(R) = e^{-R^2}$
$g' = -2Re^{-R^2}$
$\frac{e^{-R^2}}{-2Re^{-R^2}} \to 0$
II попытка:
$g(R) = \frac{e^{-R^2}}{2R}$
$\frac{e^{-R^2}}{\underbrace{e^{-R^2} - \frac{e^{-R^2}}{2R}}_{=o\left(e^{-R^2}\right)}} \underset{R\to+\infty}{\to} 1$
$\int\limits_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2R} + o\left(\frac{e^{-R^2}}{R}\right)$

# 5. Приложение определённого интеграла

*Общая схема* $\langle a,\ b\rangle$
$\mathrm{Segm}\ (\langle a,\ b\rangle) = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$

## 5.1. Аддитивная функция промежутка




*представление Segm*$[p,q] \in$ *Segm*$(a,b)$*, если* $(p,q)$ *лежит в заштрихованном треугольнике*

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$
$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \quad \forall c \in [p,q] \quad \Phi([p,q]) = \Phi([p,c]) + \Phi([c,q])$
$[p,q] \mapsto \int\limits_p^q f$

## 5.2. Плотность аддитивной функции промежутка

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R},\ f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

$f$ — плотность $\Phi$, если $\forall \Delta \in \mathrm{Segm} : \min\limits_{\Delta} f \cdot l_\Delta \le \Phi(\Delta) \le \max\limits_{\Delta} f \cdot l_\Delta$

**Теорема:** (о вычислении а. ф. п. по плотности)
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, — непрерывна
$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — а.ф.п
$f$ — плотность $\Phi$

Тогда:

$\forall [p,\ q] \in \mathrm{Segm} \quad \Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f(x)dx$

**Доказательство:**

Не умаляя общности рассмотрим $[a,b]$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x=a \\ \Phi([a,x]), & x\in(a,b] \end{cases}$

Проверим $F$ — первообразная $f$

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\Phi[a,x+h]-\Phi[a,x]}{h} = \frac{\Phi([x,x+h])}{h} = f(x+\Theta h),\ 0\le\Theta\le 1$

$F'_+ = \lim\limits_{h\to+0} ... = f(x)$

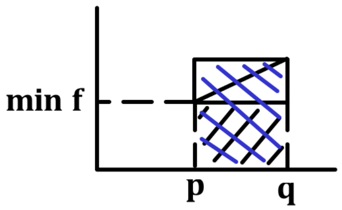
Аналогично $F'_- = f(x)$

$\int\limits_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi([p,q])$

**Пример 1:** площадь подграфика

$f : \langle a,b\rangle \to R$, непр.

$f$ — плотность, из монотонности площади




$\min f(q-p) \le \sigma(\Pi\Gamma(f,[p,q])) \le \max f(q-p)$

$\Phi : \mathrm{Segm}\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

$\Phi([p,q]) = \sigma(\Pi\Gamma(f,[p,q])) = \int\limits_p^q f$

**Пример:**

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

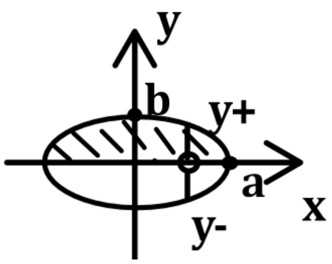



*График эллипса*

*Геометрический способ поиска площади подграфика*

$x = a\cos t, t\in[\pi,0]$

$y = b\sin t$

$\sigma_{\text{элл}} = \int\limits_{-a}^{a} y^+(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t\cdot a\sin t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\frac{\pi}{2}$

**Пример 2:** площадь криволинейного сектора $\langle a, b\rangle$
$\Phi : [p, q] \mapsto \sigma$ Сектор $([p, q], r(\varphi))$
Проверим, что $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ — плотность а.ф.п. $\Phi$
$\frac{1}{2} \min\limits_{[p,q]} r^2(\varphi)(q-p) \le \Phi[p, q] \le \frac{1}{2} \max\limits_{[p,q]} r^2(\varphi) \cdot (q-p)$
Кр. сектор $([p, q], \min\limits_{q} r) \subset$ Сектор $([p, q], r(\varphi)) \subset$ Кр. сект. $([p, q], \max r)$
Т.е. $\Phi([p, q]) = \frac{1}{2} \int\limits_p^q r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

Посчитаем площадь круга

$\sigma$ Круга $= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \pi R^2$ ☺
$\varphi = \arctan \frac{g(t)}{x(t)}$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$S' = \frac{1}{2} \int\limits_p^q r^2(\varphi) d\varphi \underset{☺}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{t_p}^{t_q} = (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int\limits_{t_p}^{t_q} y'(t)x(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t$

$x = R\cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = R \sin t$
$S = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^2}{4}$

**Пример:** Изометрическое пространство
$G \subset \mathbb{R}^2$ $\;G$ — замкнутая выпуклая фигура. Диаметр $G = \sup(\rho(A,\ B),\ A,\ B \in G) = d \le 1$
Тогда $\sigma(G) \le \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ $\quad$ (равенство для круга $r = \frac{1}{2}$)

**Доказательство:**
$f(x)$ — вып., $x_0$ где $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists$ касательная
$\Phi$ замк., вып. $\Rightarrow r(\varphi)$ непр. $\sigma = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi_{\text{нов}} - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\varphi_{\text{нов}} =$
$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} "AB"^2\,\mathrm{d}\varphi \le \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi d^2}{4}$

**Определение:** циклоида — траектория точки на окружности, катящейся по прямой
$S_{\text{черн}} + S_{\text{син}} = S_{\text{прям}} + S_{\text{лепестка}}$
$S = 2\pi r^2 + \pi r^2$
$S = 3\pi r^2$

$$\begin{cases} x(\varphi) = r\varphi - r\sin\varphi \\ y(\varphi) = r - r\cos\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

$S = \int\limits_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} (r - r\cos\varphi)(r - r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2 \int\limits_0^{2\pi} 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r^2 + 0 + \pi r^2$

**Аналитические функции:** $f(x) \in C^{\infty} \longrightarrow$ ф. Тейлора

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ — всюду сходится с рядом Тейлора

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ — сходится с рядом Тейлора в точках из $[-1, 1]$

**Пример неаналитической функции**

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array}\right.$$

**Утверждение:** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(n)}(0) = 0$

**Доказательство:**

1) $\exists f'(0)$ если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = a$, то $f'_+(x_0) = a$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = a$, то $f'\ (x_0) = a$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} =$ 🙂 $\lim \frac{2\left(\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{-\frac{6}{x^3}}{-\frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{6}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{-\frac{6}{x^2}}{-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$

*Следствие:* $\forall k \ \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$

Итак, $f'(0) = 0,$ то есть $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Проверим по индукции по $n$ $\forall n \quad \exists P_n(x)$ — многочлен: $f^{(n)}(x) = \left[\begin{array}{ll} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array}\right.$

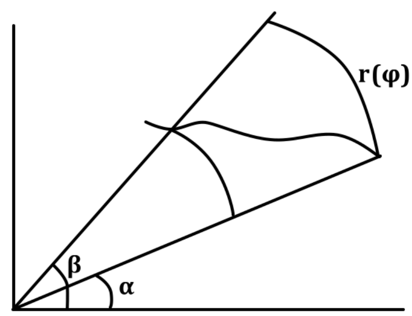
База: $n = 0$, 1 см. раньше

$$f^{(n+1)} = \left[\begin{array}{ll} \left(P'_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ ?, & x = 0 \end{array}\right.$$

$$f^{(n+1)} = \lim_{x \to 0}\left(f^{(n)}(x)\right) = \lim_{x \to 0} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$f$ — плотность аддитивной функции промежутка $\Phi$, если:

$\forall \Delta \in \mathrm{Segm} \quad \min\limits_{\Delta} f \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq \max\limits_{\Delta} f \cdot |\Delta|$ *(f непрерывна, в ином случае вместо min и max, inf и sup)*



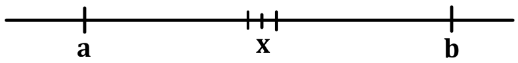
$$f = \frac{1}{2} r^2(\varphi)$$

**Теорема:** $f$ — плотность $\Phi$ ($f$ — непр) $\Rightarrow \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f$

**Теорема:** (*обобщ. теорема о плотности*)

$\Phi$ — а.ф.п: $\mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}, f \in C[a, b]$

Пусть $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle) \quad \exists$ ф. пр-ка $m_\Delta, M_\Delta$ :




- $m_\Delta \cdot |\Delta| \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot |\Delta|$
- $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
- $\forall$ фикс. $x \in \langle a, b\rangle \quad M_\Delta - m_\Delta \underset{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}}{\longrightarrow} 0$

  т.е.
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \Delta \in \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle : |\Delta| < \delta, x \in \Delta \quad M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon$

Тогда $f$ — плотность $\Phi$ $\left(\text{и } \forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle \quad \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f\right)$

**Доказательство:**

Не умаляя общности рассмотрим отрезок $[a, b]$, $\quad F(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x=0 \\ \Phi[a,x], & x>a \end{array}\right. \quad ?\, F' = f$

Фиксируем $x$, Пусть $h > 0$

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\Phi[x,\ x+h]}{h}$, то есть из (1) $\quad m_{[x,\ x+h]} < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_{[x,\ x+h]}$

из (2) $\quad m_{[x,\ x+h]} \le \quad f(x) \quad \le M_{[x,\ x+h]}$

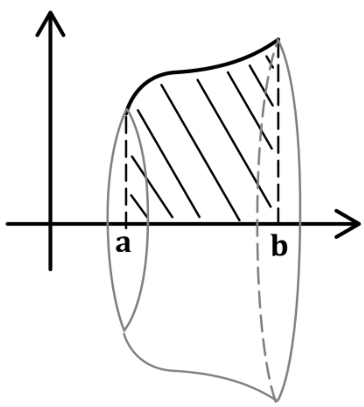
Таким образом $\quad |\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| \le M_{[x,\ x+h]} - m_{[x, x+h]} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

Т. е. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x)$, т.е. $\quad F'_+(x) = f(x)$

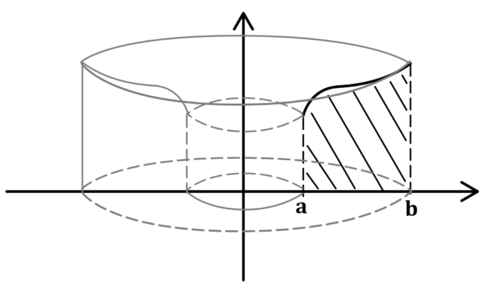
Аналогично $F'_-(x) = f(x)$

## 5.3. Фигуры вращения

I тип: $f \ge 0$, непр.
$T([a, b]) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \le f^2(x)\big\}$




II тип:
$\underset{0 \le a < b}{U([a, b])} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a^2 \le x^2 + z^2 \le b^2,\ 0 \le y \le f\Big(\sqrt{x^2 + z^2}\Big)\Big\}$



а.ф.п. $[a, b] \mapsto \Phi[a, b] = V(T[a, b])$

$$\Psi[a, b] = V(U[a, b])$$

**Теорема:**

1) $\Phi[a, b] = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\Psi[a, b] = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$

**Доказательство:**

1) ИЕЯ

2) ? $2\pi x f(x)$ –
$U[a, b] \subset$ Цилиндр над кольцом $\quad a^2 \le x^2 + z^2 \le b^2,$ высоты $\max\limits_{[a,\ b]} f$

- $\Psi[a, b] \le \left(\pi b^2 - \pi a^2\right) \max f = \pi(b + a) \max f(b - a) \le \pi \cdot \max\limits_{x \in [a,\ b]} 2x \cdot \max\limits_{x \in [a,\ b]} f \cdot (b - a)$

  $\Psi[a, b] \ge \pi \min 2x \cdot \min f(b - a)$

  $M_{[a,\ b]} = \pi \cdot \max\limits_{x \in [a,\ b]} = \pi \cdot \max 2x \cdot \max f$

  $m_{[a,\ b]} = \pi \cdot \min 2x \cdot \min f$

- $m_{[a,\ b]} \le 2\pi x f(x) \le \pi \cdot \max 2x \cdot \max f(x)$
- $M - m \underset{\substack{x \in \Delta \\ |\Delta \to 0|}}{\longrightarrow} 0$

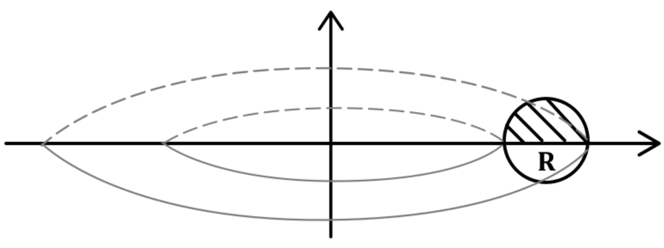
  $\max f \to f(x) \leftarrow \min f$

  $\max\limits_{t \in \Delta} 2t \to 2x \leftarrow \min 2t$

**Посчитаем объём бублика:**

$$V_{\text{бублика}} = 2 \cdot 2\pi \int\limits_{R-2}^{R+2} x\sqrt{r^2 - (x - R)^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int\limits_{R-2}^{R+2} (x - R)\sqrt{r^2 - (x - R)^2}\,\mathrm{d}x + 4\pi R \int\limits_{R-2}^{R+2} \sqrt{r^2 - (x - R)^2}\,\mathrm{d}x$$

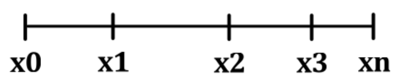
$$= 0 + 4\pi R \cdot \tfrac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$




## 5.4. Интегральные суммы

$f \in C[a,\ b]$

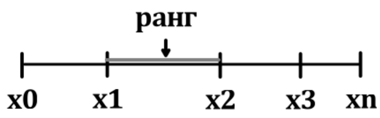
**Определение:** дробление отрезка




*Дробление отрезка* $[a, b]$ – набор точек
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

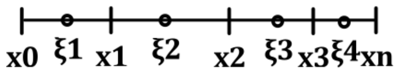
**Определение:** ранг дробления (мелкость)

*Ранг дробления* — $\max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$



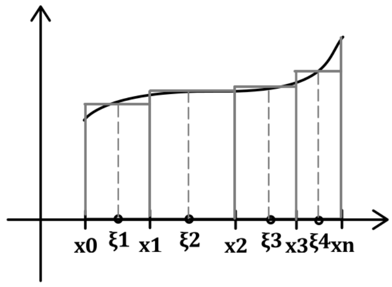

**Определение:** оснащение

*Оснащение* — набор точек
$\xi_1, ..., \xi_n : \forall k \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$




**Определение:** интегральная (риманова) сумма

*Интегральная сумма* — $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$




**Теорема:** (*об интеграле как о пределе интегральной суммы*)

$f \in C[a,\ b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall$ дробление $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, где ранг дробления $< \delta$

$$\left| \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

**Доказательство:**

Т. Кантора: $f$ — непр. на $[a, b] \Rightarrow f$ — равн. непр.

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x,\ \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$$\left| \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} ... \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\,\mathrm{d}x \right| \le \sum |...| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|\,\mathrm{d}x < \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} |b-a| = \varepsilon$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

**Определение:** модуль непрерывности

$\omega(\delta) := \sup\limits_{\substack{x,f \in [a,b] \\ |x-t| < \delta}} |f(x) - f(t)|$ — модуль непрерывности

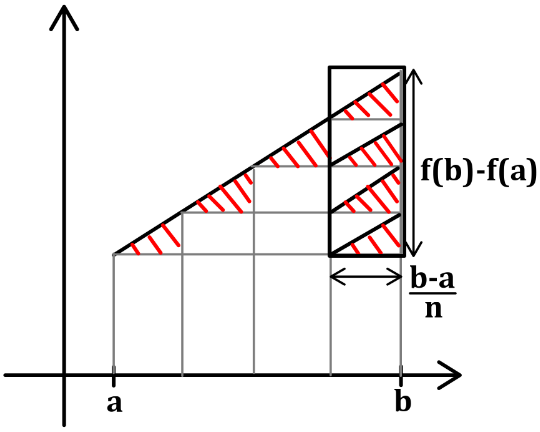
Т. Кантора: $\omega(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$ [для непр. $f$]

$f$ — дифф на $[a,\ b]$ $\quad M = \max|f'| \quad$ Тогда $\omega(\delta) \le M \cdot \delta$

(теорема Лагранжа)

*Предыдущая теорема:* если ранг дробления $< \delta$, то $\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\right| \le \omega(\delta)\cdot(b-a)$

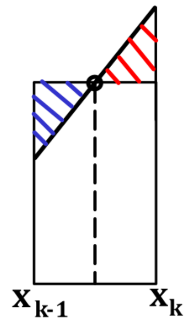
$f \in C^1 \quad M = \max|f'| \quad \left|\int - \sum\right| \le M\delta(b-a)$




**Теорема:** (*об интегральной сумме центральных прямоугольников*)

$f \in C^2[a,\ b] \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad \int = \max(x_k,\ x_{k-1}),\ \xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Тогда $\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right|$




**Доказательство:**

Упражнение

**Теорема:** (*формула трапеций*)

$f \in C^2[a,b] \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \delta = \max(x_k - x_{k-1})$

Тогда $\left|\int\limits_a^f - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

**Доказательство:**

$$\int\limits_\alpha^\beta u'v = uv|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v'u$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{bmatrix} v = f & v = f' \\ u' = 1 & u = x - \xi_k \end{bmatrix} = f(x)(x-\xi_k)|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x-\xi_k)\,\mathrm{d}x = (f(x_k) + f(x_{k-1}))\frac{x_k - x_{k-1}}{2} +$$

$$+\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(-2(x-\xi_k))\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} v = f' & f' = f'' \\ u' = -2(x-\xi_k) & u = \underset{\text{на } [x_{k-1},x_k]}{(x-x_{k-1})(x_k - x)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{2}\left(u\cdot f'|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''\cdot u(x)\,\mathrm{d}x\right), \text{ где } u(x) = (x-x_{k-1})(x_k - x)$$

Суммируем эти формулы по $k = 1, 2, ..., n$

$\int\limits_a^b f = \sum\limits_{k=1}^n \text{трап} - \frac{1}{2} \int\limits_a^b f''(x) u(x) \,\mathrm{d}x$

$\left| \int\limits_a^b f - \sum \text{трап} \right| = \frac{1}{2} \left| \int\limits_a^b f''(x) u(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{2} \int\limits_a^b |f''| u(x) \,\mathrm{d}x \leq \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$

$= \sum\limits_{k=1} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$

$[a, b] = [0, n], x_k = k$

Формула трапеций: $\left| \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x - \sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot 1 \right| \leq \frac{1}{8} \int\limits_0^n |f''|$

🙂 $f(x) = x$

$\left| \int\limits_0^n x \,\mathrm{d}x - \left( \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + ... + \frac{(n-1)+n}{2} \right) \right| \leq 0$

$\Rightarrow 1 + 2 + ... + n = \frac{n}{2} + \int\limits_0^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n^2+n}{2}$ 🙂

Это частный случай формулы Эйлера-Маклорена

## 5.5. Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m,\ n \in \mathbb{Z} \quad f \in C^2[m,\ n] \quad$ Тогда

$\int\limits_m^n f(x)dx = \sum\limits_{i=m}^n f(i) - \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x) \cdot \{x\}(1-\{x\})dx$

Это очевидно, АГА. Это формула трапеции

$\sum\limits_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

Дробим $[m,\ n]$ на единичные отрезки

$\psi(x) = (x - x_{k-1})(x_k - x)$

$\frac{\delta^2}{8}\int ... \quad \frac{1}{2}f(m) + f(m+1) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$

$-\frac{\delta^2}{2}\int\limits_a^b |f''| \quad \int f'' \cdot \psi(x)$

**Пример 1:** $f(x) = x^p,\ p > -1$

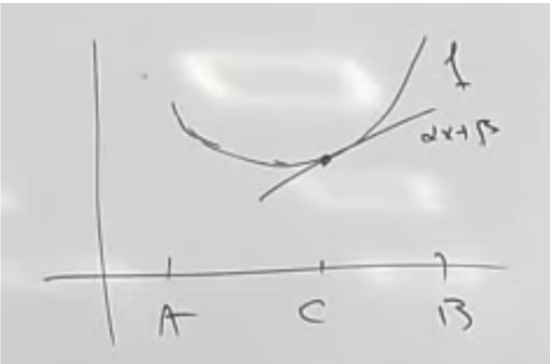
$1^p + 2^p + ... + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^n (x^p)''\{x\}(10\{x\})dx$

# 6. ?

## 6.1. Неравенство Йенсена

**Теорема:**
$f$ — выпуклое, непр. $\langle A, B\rangle$
$\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$, непр.
$\lambda : [a, b] \to [0, +\infty)$, непр., $\int\limits_a^b \lambda = 1$
Тогда $f\left(\int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$

$(*)\varphi \neq \mathrm{const} \Rightarrow m < c < M$
**Доказательство:**
$m = \min \varphi, M = \max \varphi$
$c = \int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq M \int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = M$
$c \geq m$
Берём в точек $c \in \langle A, B\rangle$ опорную прямую $y = \alpha x + \beta \quad (*)$




$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha \int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \lambda(t)(\alpha\varphi(t) + \beta)\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ (в силу выпуклости)

Комментарий по $(*)$: мы не хотим, чтобы опорная прямая была вертикальной, поэтому мы берём $c$ не на конце отрезка. Можно это записать так: $c = \int\limits_a^b \lambda(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t < M \int\limits_a^b \lambda(t)\,\mathrm{d}t$ вместо нестрогого неравенства.

**Пример:** (неравенство Коши)
$f \in C[a, b], f > 0$
Тогда $\exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
(сравниваем с $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$)
*Упражнение:* (написать интегральные суммы)
$f^* \leftrightarrow \exp$
$\lambda \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
$\varphi \leftrightarrow \ln$
$\|\cdot\|_p$

## 6.2. Неравенство Гёльдера

**Теорема:**
$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a_i, b_i > 0, i = 1 \ldots n$
Тогда $\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$
**Доказательство:**
$f(x) = x^p$ — вып. на $[0, +\infty) \qquad f'' = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$
Нер-во Йенсена: $(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum b_i^q}$
$x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} (\sum b_i^q)$

$\alpha_i x_i = a_i b_i^{q - \frac{1}{p-1}} = a_i b_i$

$\alpha_i x_i^p = \frac{\cancel{b_i^q}}{\sum b_i^q} a_i^p \cancel{b_i^{-\frac{p}{p-1}}} (\sum b_i^q)^p = a_i^p (\sum b_i^q)^{p-1}$
$(\sum a_i b_i)^p \leq (\sum a_i^p)(\sum b_i^q)^{p-1}$
$(\sum a_i b_i) \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}}$

**Наблюдение 1:** неравенство работает для нулевых слагаемых
**Наблюдение 2:**
$a_i, b_i \in \mathbb{R}$
$|\sum a_i b_i| \leq \sum |a_i b_i| \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$
**Замечание для нер-ва Йенсена:**
$f(\sum \alpha_i x_i) \leq \sum \alpha_i f(x_i)$, $f$ — строго выпукла, $\alpha_i \neq 0$. Равенство достигается при $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Идя по док-ву нер-ва Гёльдера, заметим, что если нет нулей, то $f(x) = x^p$ — строго выпукла на $(0, +\infty)$.
Равенство достигается тогда, когда:
$\forall i \quad a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} = \lambda$
$\qquad a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} = \lambda^p = \lambda_0$
$\qquad a_i^p = \lambda_0 b_i^q$
$\qquad (a_1^p ... a_m^p) \uparrow\uparrow (b_1^q ... b_n^q)$

## 6.3. Интегральное нер-во Гёльдера

**Теорема:**
$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$
Тогда $\left| \int\limits_a^b fg \right| \leq \left( \int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int\limits_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$
**Доказательство:**
$[a, b]$ дробим на $n$ равных частей: $x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + k\Delta x_k$
Дискретное неравенство Гёльдера:
$a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$
$b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$
$a_k b_k = f(x_k) g(x_k) \Delta x_k$
$\sum |f(x_k) g(x_k)| \Delta x_k \leq (\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k)^{\frac{1}{p}} (\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$n \to +\infty : \int\limits_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \leq \left( \int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int\limits_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$
Из-за предельного перехода равенство найти не получится ☹

Неравенство Гёльдера, случай $n = 2$:
$\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$ — нер-во Коши-Буняковского

$p \to 1, q \to +\infty$:
$\sum a_i b_i \leq \sum a_i \lim\limits_{q \to +\infty} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}} = \sum a_i \max(b_i)$

## 6.4. Неравенство Минковского

**Теорема:**
$p \geq 1, a_i, b_i \in \mathbb{R}$

Тогда $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$p = 1$ — очев

$p > 1 - (a_1...a_n) \mapsto \left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ — норма в $\mathbb{R}^n$

**Доказательство:**

$\sum a_i|a_i+b_i|^{p-1} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|a_i+b_i|^{q(p-1)=p}\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum b_i|a_i+b_i|^{p-1} \le \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum(a_i+b_i)|a_i+b_i|^{p-1} = \left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^1 \le \left(\left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le ...$

Смысл интегрального н-ва Минковского: $f \mapsto \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ — норма

**Теорема:** (инт. н-во Минковского)

$f, g \in C[a,b], p \ge 1$. Тогда $\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

**Доказательство:**

Вариант 1. Переписать дискр. доказательство.

Вариант 2. Интегральные суммы

В н-ве Гёльдера в предельном переходе $\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \to \max|b_i|$

$(b_1, ..., b_n) \mapsto \max|b_i|$ — норма

# 7. Конечные $\varepsilon$-сети

**Определение:** $\varepsilon$-сеть

$(x, \rho)$ — МП, $D \subset X$

Мн-во $N \subset X$ называется $\varepsilon$-сетью для $D \quad \forall x \in D \quad \exists n \in N : \rho(x, n) < \varepsilon$

**Определение:** сверхограниченность

$D$ — сверхограниченно, если $\forall \varepsilon > 0$ в $X \quad \exists$ конечная $\varepsilon$-сеть $N$ для мн-ва $D$

**Лемма:**

$D$ — сверхограниченно в $X \Leftrightarrow D$ — сверхограниченно в $D$

**Доказательство:**

$\Leftarrow$: тривиально

$\Rightarrow$: Берём конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в $X$

$\forall n \in N$ рассмотрим шар $B\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Отметим в каждом шаре точку $d_n$ — конечное число. Тогда $\{d_n\}$ — $\varepsilon$-сеть, лежащая в $D$.

**Лемма:**

Сверхограниченность сохраняется при р. непр. отображениях.

Т.е. $D \subset X$ — сверхогр., $f : X \to Y$ — равн. непр.

$(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$

Тогда $f(D)$ — св.огр. в $Y$

Так как $f(\delta\text{-сеть}) = \varepsilon\text{-сеть}$

$L = \left\{(x_1, x_2, ...), |\overline{x}| = \sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|\right\}$

$D = (e_1, e_2, ...) \subset \overline{B\left(\vec{0}, 1\right)}$

$e_k = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{(k-1)}, 1, 0, ...\right)$

$\rho(e_k, e_j) = \|e_k - e_j\| = 2$

**Лемма:**

$D$ — сверхогр. $\Rightarrow$ замыкание $D$ тоже
$D \subset \bigcup\limits_{N} B(n, \varepsilon) \Rightarrow \overline{D} \subset \bigcup\limits_{N} B(n, 2\varepsilon) \Rightarrow N - 2\varepsilon$-сеть для $\overline{D}$
**Лемма:**
$D$ — сверхогр. $\Leftrightarrow \forall$ посл. точек из $D$ содержит фунд. подпосл-ть
Фундаментальная посл-ть: $x_n$ — фунд. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, k > N \quad \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$
**Доказательство:**
$\Rightarrow$: $\varepsilon := 1$. Строим конечную 1-сеть $N_1$
$\bigcup\limits_{a \in N_1} B(a, 1) \supset D$
$\exists a_1 \in N_1$ : в $B(a_1, 1)$ сод. беск. много $x_n$
Берём эту подпосл. $\left(x_n^{(1)}\right)$, возьмём член $x_{n_1}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$, строим конечную $\frac{1}{2}$-сеть $N_2$
$\bigcup\limits_{a \in N_2} B\left(a, \frac{1}{2}\right) \supset D$
$\exists a_2 \in N_2$ : в $B\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$ сод. беск. подпосл. $x_n^{(1)}$
Берём эту подпосл. $\left(x_n^{(2)}\right)$, возьмём член $x_{n_2} (n_2 > n_1)$
$\vdots$
$\left(x_{n_i}\right)$ — фундаментальная
$\Leftarrow$: $\varepsilon$. Нет $\varepsilon$-сети?
$x_1, x_2 \notin B(x_1, \varepsilon), x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$
Построим посл-ть: $\forall x_k, x_m \quad \rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon$
У посл-ти $(x_n)$ нет фунд. подпосл. Противоречие в определении для обсуждаемого $\varepsilon$.
**Лемма:**
$X$ — сверхогр. $\Rightarrow$ в $X$ имеется счётное всюду плотное подмн-во. $Q$ (т.е. $X$ — сепарабельное)
**Доказательство:**
$Q = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\text{-сеть}\right)$

**Теорема:**
$(X, \rho)$ — МП. Эквивалентны:
1. $X$ — компактно
2. $X$ — полно и сверхогр.

**Доказательство:**
**Замечание:** в МП комп. $\Leftrightarrow$ секв. комп.
$(1) \Rightarrow (2)$ :
$X$ — неполно $\Rightarrow \exists$ фунд. посл., не имеющая предела $\Rightarrow \forall$ подпосл. верно, что она тоже не имеет предела $\Rightarrow$ это противоречит секв. комп.
$X$ — не сверхогр. $\Rightarrow$ по л.4 $\exists$ посл., у которой $\nexists$ фунд. подпосл. $\Rightarrow$ у этой посл. нет сход. подпосл. $\Rightarrow$ противоречит секв. комп.
$(2) \Rightarrow (1)$ :
$X$ — сверхогр. $\Rightarrow \forall$ посл. точек из $X \quad \exists$ фунд. подпосл. $\underset{X\text{ - полное}}{\Rightarrow} \forall$ посл. точек из $X$ имеет сход. подпосл., т.е. это секв. комп.

# 8. Несобственный интеграл

**Определение:** несобственный интеграл
$f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad (-\infty < a < b \leq +\infty)$
$f$ — допустима, если $\forall A : a < A < b \quad f$ — кусочно-непрерывна на $[a, A]$

$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x) \, \mathrm{d}x$, где $A \in [a, b)$
Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то величина называется несобственным интегралом $\int\limits_a^{\to b} f(x) \, \mathrm{d}x$
Если $\nexists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то несобств. инт. не существует.
Если $\lim \Phi(A) \in \mathbb{R}$, то интеграл сходится.

Если $\lim \Phi(A) = \{\pm\}$ или не сущ., то интеграл расходится.
**Пример:**

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\int\limits_1^{A} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln A \underset{A \to +\infty}{\to} +\infty$$

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +0} \int\limits_A^{1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\ln A \underset{A \to +0}{\to} +\infty$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^A = \lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{A} + 1 \to 1$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_1^{A} \sin x = \lim_{A \to +\infty} -\cos A + \cos 1 \text{ не существует}$$