Poniedziałek, 11. lipca 2016

Zadanie 1. Dany jest trójkąt BCF, w którym kąt przy wierzchołku B jest prosty. Punkt A leży na prostej CF, przy czym $FA = FB$ oraz punkt F leży pomiędzy punktami A i C. Punkt D obrano tak, że $DA = DC$ oraz AC jest dwusieczną kąta $\angle DAB$. Punkt E obrano tak, że $EA = ED$ oraz AD jest dwusieczną kąta $\angle EAC$. Punkt M jest środkiem odcinka CF, zaś X jest takim punktem, że czworokąt $AMXE$ jest równoległobokiem (gdzie $AM \parallel EX$ oraz $AE \parallel MX$). Wykazać, że proste BD, FX oraz ME przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których w każde pole tablicy o wymiarach $n \times n$ można wpisać jedną z liter I, M oraz O w taki sposób, by oba następujące warunki były spełnione.

- W każdym wierszu i w każdej kolumnie jedna trzecia pól zawiera literę I, jedna trzecia pól zawiera literę M, oraz jedna trzecia pól zawiera literę O.
- Dla każdej linii diagonalnej, jeśli liczba pól na tej linii jest podzielna przez 3, to jedna trzecia pól na tej linii zawiera literę I, jedna trzecia zawiera literę M, oraz jedna trzecia zawiera literę O.

Uwaga: Wiersze i kolumny tablicy $n \times n$ są ponumerowane kolejno liczbami całkowitymi od 1 do n. W ten sposób, każde pole odpowiada parze dodatnich liczb całkowitych (i, j), gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dla $n > 1$, tablica ma $4n - 2$ *linii diagonalnych* dwóch typów. Każda linia diagonalna pierwszego typu składa się ze wszystkich pól (i, j), dla których $i + j$ jest równe pewnej stałej wartości. Każda linia diagonalna drugiego typu składa się ze wszystkich pól (i, j), dla których $i - j$ jest równe pewnej stałej wartości.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt wypukły $P = A_1A_2 \ldots A_k$. Wiadomo, że wierzchołki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mają współrzędne całkowite oraz leżą na jednym okręgu. Niech S będzie polem wielokąta P. Przypuśćmy, że n jest taką nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią, że kwadraty długości boków wielokąta P są liczbami całkowitymi podzielnymi przez n. Udowodnić, że $2S$ jest liczbą całkowitą podzielną przez n.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

Wtorek, 12. lipca 2016

Zadanie 4. Zbiór dodatnich liczb całkowitych nazwiemy *aromatycznym*, jeśli zawiera on co najmniej dwa elementy oraz każdy jego element ma wspólny dzielnik pierwszy z co najmniej jednym spośród pozostałych elementów tego zbioru. Niech $P(n) = n^2 + n + 1$. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą b, dla której istnieje taka nieujemna liczba całkowita a, że zbiór

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

jest aromatyczny.

Zadanie 5. Na tablicy napisano równanie

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-2016) = (x-1)(x-2)\ldots(x-2016),$$

gdzie każda ze stron zawiera 2016 czynników liniowych. Wyznaczyć najmniejszą liczbę k, dla której z tablicy można zetrzeć dokładnie k spośród wszystkich 4032 czynników liniowych tak, aby po każdej ze stron pozostał co najmniej jeden czynnik oraz uzyskane równanie nie miało rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Zadanie 6. Na płaszczyźnie narysowano $n \geqslant 2$ odcinków w taki sposób, że każde dwa z nich przecinają się w dokładnie jednym punkcie niebędącym końcem żadnego z nich, oraz żadne trzy z nich nie przechodzą przez ten sam punkt. Fredek wybiera jeden z końców każdego odcinka i ustawia na nim żabę, skierowaną przodem w stronę drugiego końca tego odcinka. Następnie klaszcze $n-1$ razy. Przy każdym klaśnięciu każda żaba natychmiast skacze do następnego punktu przecięcia na jej odcinku, przy czym żaby nigdy nie zmieniają kierunku poruszania się. Fredek chciałby tak ustawić początkowo żaby, by nigdy nie wystąpiła sytuacja, w której dwie żaby znalazłyby się jednocześnie na tym samym punkcie przecięcia.

(a) Udowodnić, że jeśli n jest nieparzyste, to Fredek zawsze może osiągnąć swój cel.

(b) Udowodnić, że jeśli n jest parzyste, to Fredkowi nigdy nie uda się osiągnąć swojego celu.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.