Магистратура ВШЭ. Домашнее задание от 4 сентября.

Определение 1. Пусть V – векторное пространство над полем K. *Линейная комбинация* векторов (т.е., элементов V) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – это любое выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in K$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется линейно зависимыми, если существует их нетривиальная (т.е., такая, что не все α_i равны 0) линейная комбинация, равная $0 \in V$. Если такой линейной комбинации нет, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется линейно независимыми.
Множество всех линейных комбинаций $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется их *линейной оболочкой* и обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Определение 2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – множество образующих V, если $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V$. Линейно независимое множество образующих называется *базисом*. Все базисы векторного пространства V имеют равное число элементов, которое называется *размерностью* пространства.
Т.е., пусть V конечномерно, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ – его базис. Тогда любой вектор $w \in V$ представляется в виде

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ называются координатами вектора w относительно базиса $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Задача 1 (1 балл)**.** Найти базис пространства $\mathbb{R}^3$, в котором векторы x, y, z имеют координатные столбцы $[x]$, $[y]$, $[z]$.

$$x = (9, 2, 0), \quad y = (6, 3, 4), \quad z = (3, 1, 2),$$

$$[x] = (1, 2, 1)^T, \quad [y] = (1, -1, 2)^T, \quad [z] = (-2, -1, 3)^T$$

Определение 3. *Прямое произведение* $U \times V$ векторных пространств U и V над полем K– это множество пар (u, v), где $u \in U$, $v \in V$, с операциями
$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$;
$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$,
которые превращают его также в векторное пространство над K.
Аналогично определяется прямое произведение n векторных пространств $V_1, \ldots V_n$.

Задача 2 (1 балл)**.** Докажите, что размерность $U \times V$ равна $m + n$.

Определение 4. $U \subseteq V$ называется подпространством V (обозначение: $U \leqslant V$), если
1) $u_1 + u_2 \in U$ для любых $u_1, u_2 \in U$;
2) $\lambda u \in U$ для любых $u \in U, \lambda \in K$;

Задача 3 (1 балл)**.** Пусть $V_1, V_2 \leq V$. Докажите, что если $V_1 \cup V_2 \leq V$, то $V_1 \leq V_2$ или $V_2 \leq V_1$.

Задача 4. Найдите размерность пространства:
а) (1 балл) кососимметричных матриц (т. е., таких, что $A = A^T$) размера $n \times n$;
б) (1 балл) матриц размера $n \times n$, коммутирующих с e_{12} (e_{ij} – матрица с единицей на позиции (i, j) и нулями на остальных), т.е., таких, что $Ae_{12} = e_{12}A$

Задача 5. Пусть $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\} = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, a_i \in K\}$ (многочлены с коэффициентами из поля k степени не выше n).
а) (1 балл) Покажите, что любой набор многочленов $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$, такой, что $\deg p_i(x) = i$, является базисом V.
б) (2 балла) Пусть даны различные элементы $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$. Покажите, что набор многочленов $p_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - \lambda_j)$ является базисом V.

Задача 6 (1 балл)**.** Пусть
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$
Найдите базис пространства решений однородного уравнения $Ax = 0$.

Задача 7. а) [1 балл] Покажите, что множество решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, $a_i \in K$, имеет размерность $n-1$ над K. б) [2 балла] Покажите, что все подпространства размерности $n-1$ в K^n имеют такой вид.