Магистратура ВШЭ. 4 сентября.

Определение 1. Пусть K — поле. Множество V с операциями сложения и умножения на элемент K называется векторным пространством над K, если для любых $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in K$

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ для любых $u, v, w \in V$;
2. существует $0 \in V$, такой что $0+v = v+0 = v$ для любого $v \in V$;
3. для любого $v \in V$ найдется $-v \in V$, такой что $v+(-v) = (-v)+v = 0$;
4. $u+v = v+u$ для любых $u, v \in V$;
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ для любых $u, v \in V, \alpha \in K$;
6. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ для любых $v \in V, \alpha, \beta \in K$;
7. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ для любых $v \in V, \alpha, \beta \in K$;
8. $1 \cdot v = v$ для любого $v \in V$;

Пример. $\mathbb{R}^n$ – множество наборов из n вещественных чисел – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Его можно (и часто удобно) отождествить с множеством матриц размера $n \times 1$ (столбцов) и записывать вместо $(a_1, \ldots, a_n)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Определение 2. Пусть V – векторное пространство над полем K. *Линейная комбинация* векторов (т.е., элементов V) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – это любое выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in K$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется линейно зависимыми, если существует их нетривиальная (т.е., такая, что не все α_i равны 0) линейная комбинация, равная $0 \in V$. Если такой линейной комбинации нет, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется линейно независимыми.
Множество всех линейных комбинаций $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется их *линейной оболочкой* и обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Задача 1. Поле $\mathbb{R}$ можно рассмотреть как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Доказать, что в нем $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ линейно независимы.

Задача 2. Являются ли линейно независимыми в $\mathbb{R}^3$
а) $(1, -1, 2), \quad (-1, 0, 3), \quad (-4, -3, 27)$;
б) $(2, 1, -3), \quad (3, 2, -5), \quad (1, -1, 1)$?

Задача 3. Пусть $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ – т.е., тройки вещественных чисел, операции определяются обычным образом:
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
Найти общий вид вектора из пересечения $\langle v_1, v_2 \rangle$ и $\langle u_1, u_2 \rangle$, если $v_1 = (0, 2, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$.

Определение 3. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – множество образующих V, если $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V$. (Можно говорить и о бесконечных множествах образующих, но их мы обсуждать не будем.)
Линейно независимое множество образующих называется *базисом*. Все базисы векторного пространства V имеют равное число элементов, которое называется *размерностью* пространства.

Т.е., пусть V конечномерно, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ – его базис. Тогда любой вектор $w \in V$ представляется в виде

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ называются координатами вектора w относительно базиса $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Замечание. Здесь мы говорим о базисе как об упорядоченном наборе, а не просто множестве векторов (т.е., нам важна нумерация элементов). Чтобы подчеркнуть это, мы перечисляем элементы базиса в круглых скобках, а не в фигурных.

Задача 4. Дополнить пару векторов $(1, 1, 0, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$ до базиса пространства $\mathbb{F}_2^4$.

Задача 5. В пространстве $M(2, \mathbb{R})$ (матрицы 2×2 с элементами из $\mathbb{R}$) укажите какой-нибудь базис, содержащий матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Найдите координаты единичной матрицы в выбранном базисе.

Задача 6. Найти базис пространства $\mathbb{R}^3$, в котором векторы x, y, z имеют координатные столбцы $[x]$, $[y]$, $[z]$.

$$x = (0, -1, -1), \quad y = (2, -4, 3), \quad z = (6, -6, 5),$$

$$[x] = (1, 1, 1)^T, \quad [y] = (2, 3, 2)^T, \quad [z] = (5, 6, 4)^T$$

Определение 4. *Прямое произведение* $U \times V$ векторных пространств U и V над полем K– это множество пар (u, v), где $u \in U$, $v \in V$, с операциями
$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$;
$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$,
которые превращают его также в векторное пространство над K.
Аналогично определяется прямое произведение n векторных пространств $V_1, \ldots V_n$.

Задача 7. Докажите, что размерность $U \times V$ равна $m + n$.

Определение 5. $U \subseteq V$ называется подпространством V (обозначение: $U \leqslant V$), если
1) $u_1 + u_2 \in U$ для любых $u_1, u_2 \in U$;
2) $\lambda u \in U$ для любых $u \in U, \lambda \in K$;

Задача 8. Пусть $V_1, V_2 \leq V$. Докажите, что если $V_1 \cup V_2 \leq V$, то $V_1 \leq V_2$ или $V_2 \leq V_1$.

Задача 9. Выяснить, является ли подмножество U пространства $V = K[t]$ его подпространством, и в случае положительного ответа найти какой-нибудь его базис:
а) $U = \{f | f''' = 0\}$;
б) $U = \{f | f(1) = 0\}$;
в) $U = \{f | f(0) = 1\}$;
г) $U = \{f | f(0) + f(1) = 0\}$.

Задача 10. Найдите размерность пространства:
а) кососимметричных матриц (т. е., таких, что $A = A^T$) размера $n \times n$;
б) $K[x_1, \ldots, x_n]_{\leq k} = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \deg f \leq k\}$;
в) матриц, коммутирующих с e_{12} (e_{ij} – матрица с единицей на позиции (i, j) и нулями на остальных).

Задача 11. Пусть $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$.
а)Покажите, что любой набор многочленов $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$, такой, что $\deg p_i(x) = i$, является базисом V.
б) Пусть даны различные элементы $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$. Покажите, что набор многочленов $p_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - \lambda_j)$ является базисом V.

Задача 12. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства решений однородного уравнения $Ax = 0$.

Задача 13. Покажите, что множество решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, имеет размерность $n-1$ над K. Покажите, что все подпространства размерности $n-1$ в K^n имеют такой вид.

Задача 14. Найти базис пересечения и суммы подпространств $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ в $\mathbb{R}^4$, если

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$,

$$D(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in K^n | \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0\}$$

Доказать, что:
а) $D(v_1, v_2, \dots, v_n) \leqslant K^n$;
б) $D(v_1, v_2, \dots, v_n) = K^n$ тогда и только тогда, когда $v_1 = \ldots = v_n = 0$;
в) $\dim D(v_1, v_2, \dots, v_n) + \dim(\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle) = n$.

Задача 16. Пусть V_1, V_2, V_3 – подпространства W. Покажите, что число $\dim(V_i + V_j) \cap V_k + \dim V_i \cap V_j$ одинаково для любой (i, j, k) — перестановки на множестве $\{1, 2, 3\}$.

Задача 17. Пусть $V = \mathbb{F}_2^n$, $U \leqslant V$, $\dim(U) = m$ (в теории информации такое U называется двоичным линейным (n, m)-кодом, а его элементы – кодовыми словами). Доказать, что в двоичном линейном коде:
а) (1 балл) либо все кодовые слова имеют четный вес Хэмминга, либо ровно половина кодовых слов имеет четный вес, а вторая половина – нечетный (весом Хэмминга называется число ненулевых компонент вектора);
б) (1 балл) либо все кодовые слова начинаются с 0, либо ровно половина кодовых слов начинается с 0, а вторая половина – с 1.