Магистратура ВШЭ. 11 сентября.

Задача 1. Найти базис пересечения и суммы подпространств $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ в $\mathbb{R}^4$, если

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Отображение $L : V \to W$ называется линейным отображением (или гомоморфизмом векторных пространств), если для любых $v_1, v_2, v \in V$, $\lambda \in K$
$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ и $L(\lambda v) = \lambda L(v)$.
Множество линейных отображений из V в W будем обозначать $\mathrm{Hom}(V, W)$. Введем также обозначение $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$.

Задача 2. Будет ли отображение $L \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $L(x + iy) = x - iy$, $\mathbb{R}$-линейным? $\mathbb{C}$-линейным?

Задача 3. Доказать, что произвольное линейное отображение переводит любое линейно зависимое семейство векторов в линейно зависимое. Верен ли аналогичный факт для линейно независимых семейств?

Задача 4. Пусть $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $V_1, V_2 \leqslant V$, $W_1, W_2 \leqslant W$. Верны ли перечисленные ниже равенства? Если нет, то замените их на верные включения.
а) $L(V_1 + V_2) = L(V_1) + L(V_2)$
б) $L(V_1 \cap V_2) = L(V_1) \cap L(V_2)$
в) $L^{-1}(W_1 + W_2) = L^{-1}(W_1) + L^{-1}(W_2)$
г) $L^{-1}(W_1 \cap W_2) = L^{-1}(W_1) \cap L^{-1}(W_2)$
(Замечание: отображение L не обязательно обратимо! $L^{-1}(W_i) = \{v \in V | L(v) \in W_i\}$ – полный прообраз W_i.)

Задача 5. Покажите, что $\mathrm{End}(V)$ – векторное пространство над K. Докажите, что если образы двух ненулевых операторов из $\mathrm{End}(V)$ различны, то эти операторы линейно независимы.

Определение 2. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ – базис V, $(w_1, \ldots, w_m)$ – базис W Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей линейного отображения $L : V \to W$, если

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad j = 1, \ldots n$$

Задача 6. Пусть $V = \{f \in K[x, y] \mid \deg f \leq 2\}$. Выпишите матрицу линейного отображения $L \colon V \to V$ такого, что

$$L(f) = f(x, x + y) - f(x + y, -x + 1)$$

в мономиальном базисе. Найдите базис ядра и образа этого линейного отображения.

Задача 7. Пусть $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{f \in \mathbb{R}[t] | f''' = 0\}$. Линейно ли отображение $L : V \to W$:

$$L((\alpha, \beta, \gamma)) = \alpha(t - 1)^2 + \beta(t^2 - 1) + \gamma(t^2 - 3t + 2)$$

Если да, найдите его матрицу относительно какой-нибудь пары базисов V и W, а также укажите базисы ядра и образа L.

Определение 3. Матрица перехода от базиса $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ к базису $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ – это матрица C, такая что

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

Пример. Матрица перехода от базиса

$$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

к базису

$$((2,1,0),(-1,-2,-3),(-1,0,0))$$

в $\mathbb{R}^3$ – это

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(проверьте!)

Замечание. Перечисляя базисные векторы, мы пишем их в круглых скобках, как упорядоченный набор (а не в фигурных, как обычно записываем множества), так как, как только мы начинаем говорить о координатах в этом базисе, нам становится важна нумерация. (Подумайте, как изменится матрица перехода от $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ к $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, если перенумеровать u_i? Если перенумеровать v_j?)

Утверждение. *Если C – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$, то C обратима и C^{-1} – матрица перехода от $\mathcal{B}'$ к $\mathcal{B}$.*

Задача 8. В пространстве $K[t]_3$ (многочленов с коэффициентами из поля K, степени не более 3) найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{B} = (1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3),$$

$$\mathcal{B}' = (t^3, t^3 - t^2, t^3 - t, t^3 - 1)$$

Задача 9. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим базис $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (1,1,1)$, $f_3 = (2,1,1)$.
а) Найдите матрицу перехода из стандартного базиса в базис f.
б) Найдите матрицу линейного отображения $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что

$$L(x_i) = y_i,$$

где

$$x_1 = (1,2,1), \quad x_2 = (1,1,1), \quad x_3 = (0,1,1),$$

$$y_1 = (-3,-1,-1), \quad y_2 = (2,1,2) \quad y_3 = (3,1,3),$$

в базисе f.

Задача 10. Пусть $\dim(V_1) + \dim(W_1) = \dim(V)$ для некоторых подпространств $V_1 \leqslant V$, $W_1 \leqslant W$. Докажите, что существует отображение $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ такое, что $\mathrm{Im}(L) = W_1$, $\mathrm{Ker}(L) = V_1$.