ВШЭ, 1 курс ПМИ. 10 сентября

Алгоритм Евклида.

Задача 1. Найдите НОД$(105369, 4991)$.

Задача 2. Докажите, что для каждого натурального n числа $n! + 1$ и $(n+1)! + 1$ взаимно просты.

Задача 3. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ НОД$(a, b) =$ НОД$(5a + 3b, 13a + 8b)$.

Задача 4. Найдите НОД$(3^m - 1, 3^n - 1)$ для $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 5. Определим последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \\ 1 & \text{при } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Чему равен НОД(F_{n+1}, F_n)?

Задача 6. Изначально множество состоит из n натуральных чисел. На каждом шаге к нему можно добавить модуль разности любых двух элементов. Найдите:
а) минимальное число, которое можно добавить с помощью таких операций;
б) максимальное количество элементов, которые можно добавить с помощью таких операций.

Задача 7. Для любого ли натурального n существуют $a, b \in \mathbb{Z}$, алгоритм Евклида для которых требует n шагов?

Задача 8. Найдите НОД$(62510, 23731)$ и его линейное представление.

Задача 9. Решите в целых числах уравнение

$$4439x + 1679y = 161$$

Задача 10. Найти наименьшее натуральное n, при котором уравнение $8x + 13y = n$ будет иметь ровно 9 решений в натуральных числах.

Задача 11. Пусть $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$. Найдите необходимое и достаточное условие того, что уравнение

$$ax + by + cz = n$$

разрешимо в целых числах.