

ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПОЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
16 ноября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
1.1	Основные понятия топологии.	3
2	Лекция 2	4
3	Лекция 3	7
3.1	Связность и линейная связность.	7
4	Лекция 4	8
5	Лекция 5	10
6	Лекция 6	11
6.1	Функциональная отделимость	11
6.2	Взаимоотношение компактности и нормальности	11
7	Лекция 7	12
7.1	Разбиение единицы	12
8	Лекция 8	13
8.1	Кривые Пеано	13
9	Лекция 9	14
9.1	Теорема Титца о продолжении непрерывной функции	14
10	Лекций 10	15
11	Лекция 11	15
11.1	Тихоновская топология и теорема Тихонова	15
11.2	Фактор-топология	16
11.3	Склейка пространств	16
11.4	Одноточечная компактификация	16

1 Лекция 1

1.1 Основные понятия топологии.

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

Определение 1.1. Метрическое пространство — это пара (X, ρ) , где X — множество, а $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество X , если функция ρ очевидно подразумевается.

Утверждение 1.1. $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$ является метрическим пространством.

Определение 1.2. Топологическое пространство — это пара (X, \mathcal{T}) , где X — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X , удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$, где $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \dots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, где $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$ (A — произвольное индексирующее множество);

Множество \mathcal{T} называется топологией на X , а элементы \mathcal{T} — открытыми подмножествами X .

Пример 1.1. 1. Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

2. Дискретная топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = 2^X$.

3. На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство X называется слитым двоеточием), дискретную (в таком случае пространство X называется простым двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Пространство X с топологиями \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 называется связным двоеточием.

Определение 1.3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар в X с центром x_0 и радиусом r — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.

Определение 1.4. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки x), содержащий x и лежащий в U .

Замечание 1.1. Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами). Доказательство этого факта см. в теореме (Т. 2.1) на стр. (5).

Определение 1.5. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \setminus U$ открыто.

Задача 1.1. Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.

Пример 1.2. Топология Зарисского: Рассмотрим множество \mathbb{C}^1 и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \dots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным). Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество X : будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.

Задача 1.2. Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.

Определение 1.6. База \mathfrak{B} топологии \mathcal{T} на X — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы \mathfrak{B} , т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Лемма 1.2 (Достаточное условие на базу топологии). Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ - набор подмножеств X . Тогда если выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in X \exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x$,
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} : (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$,

то \mathfrak{B} является базой некоторой топологии.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве \emptyset можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X , т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединения элементов базы задают топологию на X . □

Задача 1.3. Повторить доказательство для базы метрического пространства.

Определение 1.7. Предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathfrak{B} : U$ есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \mathfrak{B} : U = \bigcap_{i=1}^k P_i$, где $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.

Иначе говоря: предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathcal{T} : U$ есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^m P_{ij}, \text{ где } P_{ij} \in \Pi, k, m \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Замечание 1.2. Любое множество задает предбазу некоторой топологии.

Пример 1.3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ — предбаза.

Тогда $\mathfrak{B} = \underbrace{\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi} \}$ — база,

$\mathcal{T} = \underbrace{\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}} \}$ — топология на X .

2 Лекция 2

Литература:

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. — Общая топология. Основные конструкции.
2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. — Элементарная топология.

Определение 2.1. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Если топология \mathcal{T} на X может быть порождена некоторой метрикой ρ на X , то пространство (X, \mathcal{T}) называется метризуемым.

Замечание 2.1. Существует ряд критериев метризуемости топологических пространств: см. Критерий метризуемости Нагаты — Ю.М.Смирнова, 1950-1951.

Определение 2.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0 — это множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$.

Теорема 2.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии, порождённой на X метрикой ρ .

Доказательство. Рассмотрим множество \mathfrak{B} всех открытых шаров в пространстве X : $\mathfrak{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$. Проверим для \mathfrak{B} оба пункта достаточного условия на базу:

1. Очевидно, $\forall x \in X \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$
2. Обозначим: $B_1 = O_{\varepsilon_1}(x_1)$, $B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2)$ и покажем, что $\forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 = O_\varepsilon(x) \in \mathfrak{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. По определению открытых шаров B_1 и B_2 : $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1$, $\rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Положим $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x_1, x), \frac{\varepsilon_2}{2} - \rho(x_2, x) \right\}$. Тогда: $\forall y \in O_\varepsilon(x)$:

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) = \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Значит, $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Аналогично: $\rho(y, x_2) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Т.к. это верно $\forall y \in O_\varepsilon(x)$, то: $O_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$, т.е. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Т.о. по достаточному условию на базу топологии: открытые шары в метрическом пространстве образуют базу топологии, порождённой метрикой этого пространства. \square

Определение 2.3. Пусть на множестве X заданы две топологии \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 . Говорят, что \mathcal{T}_2 сильнее \mathcal{T}_1 (\mathcal{T}_1 слабее \mathcal{T}_2) и пишут $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, т.е. если любое открытое в \mathcal{T}_1 множество будет открытым в \mathcal{T}_2 .

Такой способ сравнения топологий на множестве X относительно прост. Введённое отношение сравнения является отношением частичного порядка и образует на множестве всех топологий на X структуру частично упорядоченного множества (ЧУМа).

Пример 2.1. Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии на множестве X :

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}_2 = 2^X.$$

В некотором смысле это два полюса сравнения: антидискретная топология на X является слабейшей, а дискретная — сильнейшей, т.е. для любой топологии \mathcal{T} на X : $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2$. Тем не менее введённый порядок на X является частичным, и нетривиальные топологии могут быть несравнимы.

Задача 2.1. Метризуемы ли тривиальные топологии (= антидискретная и дискретная)? Ответ:

1. Рассмотрим дискретную метрику: $\rho_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$ Дискретная метрика порождает дискретную топологию.
2. Антидискретная топология неметризуема.

Определение 2.4 (Индукции топологии подпространства). Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда Y образует топологическое пространство с топологией, называемой индуцированной (с X) топологией (топологией ограничения) $\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Задача 2.2. Проверить, что индуцированная топология действительно является топологией на множестве Y , т.е. удовлетворяет аксиомам из определения топологии.

Пример 2.2. $X = \mathbb{R}^2$ — метрическое пространство с евклидовой метрикой, $Y \subset X$. Базой топологии, порождённой метрикой на пространстве X , являются открытые шары, а базой индуцированной топологии на Y являются всевозможные пересечения открытых шаров в X с Y .

Определение 2.5. Окрестность точки x в топологическом пространстве — это любое открытое множество этого пространства (т.е. элемент топологии), содержащее x .

Замечание 2.2. Из определений топологии и окрестности точки очевидно следует, что:

1. $\bigcap_{i=1}^n$ Окрестностей точки x — Окрестность точки x ,
2. $\bigcup_{\alpha \in A}$ Окрестностей точки x — Окрестность точки x .

Утверждение 2.2. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Тогда $A \subseteq X$ — открыто \Leftrightarrow для каждой точки $x \in A$ существует её окрестность, лежащая в A .

Доказательство. (\Leftarrow): По условию: $\forall x \in A \exists O(x) \in \mathcal{T} : x \in O(x), O(x) \subseteq A$. Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x)$: $C \in \mathcal{T}$. Очевидно, что $A \subseteq C$, а т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subseteq A$, то $C \subseteq A$. Получаем, что $A = C$, значит, $A \in \mathcal{T}$.

(\Rightarrow): Раз A открыто, то A является окрестностью любой своей точки. \square

Определение 2.6. Пусть $x \in X$. Если $\{x\} \in \mathcal{T}$, то x называется изолированной точкой пространства X .

Замечание 2.3. В дискретной топологии на любом пространстве все точки являются изолированными.

Определение 2.7. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется точкой прикосновения множества A , если для любой её окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение 2.8. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется внутренней точкой множества A , если существует её окрестность $O(x)$: $O(x) \subset A$.

Определение 2.9 (A1). Замыкание множества A — это множество всех точек прикосновения A . Обозначение: \overline{A} .

Определение 2.10 (B1). Внутренность множества A — это множество всех внутренних точек A . Обозначение: $\text{Int}(A)$.

Задача 2.3. Показать, что: $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Определение 2.11 (A2). Замыкание \overline{A} множества A — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Иными словами, \overline{A} — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A .

Определение 2.12 (B2). Внутренность $\text{Int}(A)$ множества A — это объединение всех открытых множеств, лежащих в A . Иными словами, $\text{Int}(A)$ — это наибольшее по включению открытое множество, лежащее в A .

Теорема 2.3. Определение A1 эквивалентно определению A2; Определение B1 эквивалентно определению B2.

Доказательство. Доказательство эквивалентности определений A1 и A2 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.

Пусть $\text{Int}_1(A)$ — множество внутренних точек A в смысле определения B1, а $\text{Int}_2(A)$ — в смысле определения B2. Покажем, что эти множества равны:

(\subseteq): Если $x \in \text{Int}_1(A)$, то существует его окрестность $O(x) \subset A$. Но $O(x)$ — открыто, а значит, $O(x) \subset \text{Int}_2(A)$, и $x \in \text{Int}_2(A)$. Получаем, что $\text{Int}_1(A) \subseteq \text{Int}_2(A)$.

(\supseteq): Если $x \in \text{Int}_2(A)$, то x принадлежит какому-то открытому $V \subset A$. Но тогда мы можем взять V в качестве окрестности точки x . Получаем, что $x \in \text{Int}_1(A)$, а значит, $\text{Int}_1(A) \supseteq \text{Int}_2(A)$. Итак, $\text{Int}_1(A) = \text{Int}_2(A)$, а значит, определения B1 и B2 эквивалентны. \square

Определение 2.13. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется граничной точкой множества A , если x является точкой прикосновения A , но не является внутренней точкой A , т.е. если $x \in \overline{A}$, $x \notin \text{Int}(A)$.

Определение 2.14. Граница множества A — это множество всех граничных точек A . Обозначение: $\text{Bd}(A)$ или ∂A . По определению: $\text{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$.

Определение 2.15 (Понятия непрерывного отображения). Пусть (X, \mathcal{T}_X) , (Y, \mathcal{T}_Y) — топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $O(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y$ существует такая окрестность $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$, что $f(U(x_0)) \subset O(f(x_0))$.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением топологических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.4. Следующие условия эквивалентны:

1. Отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.
2. Прообраз любого открытого множества под действием f является открытым, т.е. $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.
3. Прообраз любого замкнутого множества под действием f является замкнутым.
4. Для любого $A \subseteq X$: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (На лекции утверждалось не включение, а равенство, но это неверно).

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий 1, 3 и 4 остаётся в качестве упражнения читателю.

Докажем (1) \Leftrightarrow (2):

(\Rightarrow): Пусть $V \subset Y$ открыто. Рассмотрим $\forall x \in f^{-1}(V)$: Т.к. $V \in \mathcal{T}_Y$ и $f(x) \in V$, то $\exists O(f(x)) \subset V$ — окрестность $f(x)$. Т.к. f непрерывно, то для найденной $O(f(x)) \exists U(x) \in \mathcal{T}_X$ — окрестность x : $f(U(x)) \subset O(f(x)) \subset V$. Значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Получаем, что любая точка из $f^{-1}(V)$ входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, а значит, $f^{-1}(V)$ открыто. Итак, прообраз любого открытого множества под действием f открыт.

(\Leftarrow): Пусть $x \in X$. Рассмотрим $\forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y$ — окрестность $f(x)$. Т.к. $O(f(x))$ открыто, то $f^{-1}(O(f(x)))$ открыто в X — выберем это множество в качестве окрестности x . Получаем, что $\forall x \in X \forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y \exists U(x) \in \mathcal{T}_X : f(U(x)) \subset O(f(x))$, т.е. f непрерывно. \square

3 Лекция 3

Замечание 3.1. Проверять непрерывность отображения топологических пространств удобно на уровне базы или предбазы: Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}_Y$ — база топологии на Y . Тогда отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно \Leftrightarrow прообраз базы (предбазы) открыт: $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{T}_X$

Пример 3.1. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной переменной ("функции из математического анализа").

2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ (Эта функция представляет собой пример накрытия $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$. Определение накрытия смотри (возможно) дальше в курсе).

3. Тривиальный пример: постоянное отображение $f(x) \equiv y_0$, где $f : X \rightarrow Y$ и $y_0 \in Y$.

4. Композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением: Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$; f, g — непрерывные отображения. Тогда $g \circ f$ — непрерывное отображение.

5. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, $Z \subset X$, на Z индуцирована топология $\mathcal{T}_Z = \mathcal{T}|_Z$. Рассмотрим отображение включения: $i : Z \rightarrow X$, $i(x) = x$. Тогда i непрерывно в индуцированной топологии \mathcal{T}_Z .

6. Пусть в дополнение к предыдущему пункту: существует $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отображение ограничения: $f|_Z : Z \rightarrow Y$. Оно непрерывно, т.к. является композицией непрерывных отображений: $f|_Z = f \circ i$.

7. Непрерывность в метрических пространствах:

Определение 3.1 (Непрерывности отображения метрических пространств по Коши). Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$, где O_δ и O_ε — открытые шары в пространствах X и Y соответственно.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Определение 3.2 (Непрерывности отображения метрических пространств по Гейне). Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов X , сходящейся к x_0 , последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x_0)$.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Задача 3.1. Доказать эквивалентность определений непрерывности отображения метрических пространств по Коши и по Гейне.

Теорема 3.1 (Кривая Пеано). Существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

Доказательство этой теоремы смотри дальше в курсе

Определение 3.3. Пусть X, Y — топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется гомеоморфизмом, если: 1) f — биекция, 2) f непрерывно, 3) f^{-1} непрерывно.

Если между пространствами X и Y существует гомеоморфизм, то эти пространства называются гомеоморфными.

Замечание 3.2. Свойство "быть гомеоморфными" очевидно является отношением эквивалентности на множестве топологических пространств, а значит, разбивает это множество на классы эквивалентности.

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, можно найти топологические свойства этих пространств, которые должны сохраняться при любом гомеоморфизме, но у этих пространств отличаются.

Пример 3.2. $f(x) = \operatorname{tg}(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — гомеоморфизм.

3.1 Связность и линейная связность.

Определение 3.4. Топологическое пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

Если же пространство X так разбить нельзя, то оно называется связным.

Пример 3.3. 1. Любое пространство с дискретной топологией несвязно, если содержит более одного элемента.

2. Любое пространство с антидискретной топологией связно.

Теорема 3.2. Отрезок $I = [0, 1]$ с топологией, индуцированной естественной топологией вещественной прямой (т.е. топологией, порождённой на \mathbb{R} евклидовой метрикой), связен.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы открытыми подмножествами отрезка I считаются интервалы вида (a, b) , где $0 < a < b < 1$; полуинтервалы вида $[0, a)$, где $0 < a \leq 1$; полуинтервалы вида $(b, 1]$, где $0 \leq b < 1$; сам отрезок I и \emptyset ; а также их всевозможные объединения и конечные пересечения.

Докажем теперь теорему от противного: пусть отрезок I связан, т.е. $I = A \cup B$, где: 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in A$. Т.к. A открыто, то 0 лежит в A вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда или эта окрестность нуля совпадает со всем отрезком: $I \subseteq A \Rightarrow I = A \Rightarrow B = \emptyset$ — получаем противоречие, или эта окрестность нуля представляет собой полуинтервал, т.е. $\exists \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 1 : [0, \varepsilon) \subseteq A$. Множество таких ε ограничено ($0 < \varepsilon \leq 1$), следовательно, существует его супремум. Обозначим это множество Ω ($\Omega \subseteq A$), а его супремум — ε_0 :

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \Omega = \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \{ \varepsilon \mid [0, \varepsilon) \subseteq A \} = \varepsilon_0.$$

Докажем теперь, что тогда $[0, \varepsilon_0] \subseteq A$. Т.к. ε_0 — супремум множества Ω , то по одному из свойств супремума: $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \varepsilon_0 - \delta < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon \in \Omega$, т.е. $[0, \varepsilon) \subset \Omega \subset A$. Значит, ε_0 является точкой прикосновения множества Ω , а значит, и точкой прикосновения множества A .

Т.к. A и B являются открытыми и дополняют друг друга до I , то в индуцированной топологии на I они являются одновременно открытыми и замкнутыми. Значит, $A = \overline{A}$, т.е. A содержит все свои точки прикосновения. Значит, $\varepsilon_0 \in A$. Но т.к. A открыто, то $\exists U(\varepsilon_0)$ — окрестность ε_0 : $U(\varepsilon_0) \subset A$. Но тогда или $\varepsilon_0 = 1$, а значит, $A = I \Rightarrow B = \emptyset$ — противоречие, или $\varepsilon_0 \neq 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : [0, \varepsilon_0 + \delta) = [0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \delta) \subset A \Rightarrow \varepsilon_0 + \delta \in \Omega$ — противоречие с тем, что $\varepsilon_0 = \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \Omega$.

Во всех случаях получаем противоречия, значит, исходное предположение неверно, а значит, отрезок I в индуцированной топологии связан. \square

Утверждение 3.3. *Непрерывный образ связного пространства связан, т.е. если X связно, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. От противного: пусть $f(X) = A \cup B$, где 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причём 1) $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset$, т.к. $A, B \neq \emptyset$; 2) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, т.к. $A \cap B = \emptyset$; 3) $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ — открыты в X , т.к. A, B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии, а f — непрерывное отображение. Значит, X несвязно — противоречие. \square

Определение 3.5. *Путь γ в топологическом пространстве X , соединяющий точки $x_0, y_0 \in X$ — это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$. Точка x_0 называется началом пути γ , а точка y_0 — концом пути γ .*

Замечание 3.3. *Из доказанных теоремы и утверждения следует, что $\gamma([0, 1])$ — связно в топологии, индуцированной с области значений.*

Определение 3.6. *Пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует путь γ , соединяющий их и лежащий в пространстве X , т.е. $\gamma([0, 1]) \subset X$.*

Теорема 3.4. *Пусть X линейно связно. Тогда X связно.*

Доказательство. От противного: Пусть $X = A \cup B$, где 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты в топологии на X . Т.к. X линейно связно, то $\forall x_0 \in A$ и $\forall y_0 \in B$ можно соединить путём: существует непрерывное отображением $\gamma : [0, 1] = I \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0, \gamma(I) \subset X$. Тогда получаем, что $\gamma(I) = (\gamma(I) \cap A) \cup (\gamma(I) \cap B)$, причём $(\gamma(I) \cap A)$ и $(\gamma(I) \cap B)$ непусты, не пересекаются и открыты в топологии, индуцированной с X на $\gamma(I)$. Значит, $\gamma(I)$ несвязно — противоречие. \square

Замечание 3.4. *Обратное неверно. Пример: объединение графика функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x > 0$ с отрезком $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Это подмножество плоскости \mathbb{R}^2 связно, но не является линейно связным. Доказательство этого факта остаётся читателю в качестве упражнения.*

4 Лекция 4

Компактность

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 4.1. *X — компактно, если из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Раньше это называлось бикомпактностью, а под ω в компакте требовалось счетность изначального покрытия.

Пример 4.1. $[a, b]$ — компактен, для доказательства нужно использовать факт существования точной верхней грани у ограниченного подмножества \mathbb{R}^1 .

Доказательство. \square

Лемма 4.1 (О вложенных отрезках). *Пусть есть система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, где $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Тогда их пересечение не пусто. Дополнительно, если $|b_n - a_n| \rightarrow 0$, тогда их пересечение состоит из одной точки.*

Определение 4.2. Центрированная система множеств $\{X_\alpha \subset X\}$, если пересечение любого конечного числа множеств X_α не пусто.

Лемма 4.2 (Обобщение леммы для топологических пространств). Пусть X - топологическое пространство, тогда существует последовательность замкнутых не пустых подмножеств $X \supset F_1 \supset F_2 \dots$ и $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

Доказательство: игра в понятия (определения). Мы знаем, что

$$F_i - \text{замкнуто} \Leftrightarrow U_i = X \setminus F_i - \text{открыто}$$

□

Лемма выше является следствием леммы ниже.

Лемма 4.3. Топологическое пространство компактно $X \Leftrightarrow$ любая центрируемая система замкнутых подмножеств имеет непустые пересечение

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть $\bigcup_i F_i = \emptyset$, тогда что можно сказать про $\{U_i\}$? Рассмотрим $\bigcup_i (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_i F_i$

$$\bigcup_i U_i \supset X \Rightarrow \text{существует конечное подпокрытие в силу компактности } X$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \supset X$$

Следовательно $\{F_i\}$ удовлетворяют условию.

□

Задача 4.1. Доказать утверждение в обратную сторону.

Определение 4.3. X называется локально компактным, если $\forall x \in X$ существует $O(x)$, для которой существует $V(x)$ такая, что 1) $Cl(V(x)) \subset O(x)$; 2) $Cl(V(x))$ - компактно.

Определение 4.4. Семейство подмножеств $X_\alpha \subset X$ называется локально конечным, если существует $O(x)$, которая пересекается с конечным числом множеств из системы $\{X_\alpha\}$.

Определение 4.5. Топологическое пространство X называется паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие.

Пример 4.2. \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^n является паракомпактным

Лемма 4.4 (наследование компактности). Пусть $X \supset A$, если A - замкнуто, то A сохраняет следующие свойства топологического пространства X

1. компактно
2. локально компактно
3. паракомпактно

Задача 4.2. Доказать лемму выше.

Утверждение 4.5. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, если X компактно, тогда $f(X) \subset Y$ тоже компактно.

Доказательство. Очевидно.

□

Задача 4.3. Рассмотреть похожие утверждения для локальной компактности и паракомпактности.

Определение 4.6 (Аксиомы отделимости).

1. T_0 (аксиома Колмогорова): X удовлетворяет T_0 тогда и только тогда, когда выполняется следующее или существует $O(x)$ такая, что $y \notin O(x)$, или существует $O(y)$ такая, что $x \notin O(y)$ - для любых двух различных элементов $x, y \in X$.
2. T_1 : для любых различных точек найдутся окрестности, удовлетворяющие следующим свойствам $x \notin O(y)$ и $y \notin O(x)$.
3. T_2 (аксиомы Хаусдорфа): для любых различных точек существуют непересекающиеся окрестности.
4. T_3 : для любой точки x из X и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего x , существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$.
5. T_4 : пусть F_1, F_2 - замкнутые множества, причем $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Существуют $O(F_1), O(F_2) : O(F_1) \cap O(F_2) = \emptyset$.

Задача 4.4. Пространство, удовлетворяющее T_1 , но не удовлетворяющее T_0 .

5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику T_1 -пространства:

Утверждение 5.1. X является T_1 -пространством тогда и только тогда, когда для любых x множество $\{x\}$ замкнуто.

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть T_1 . Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Rightarrow y$ не является точкой прикосновения множества X . Значит $X \setminus \{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом x единственная предельная (прикосновенная) точка множества X .

(\Leftarrow) : Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X \setminus \{x\}$, $x \in Y \setminus \{y\}$ \square

Утверждение 5.2. Вообще говоря из T_3 не следует T_0 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Возмем точку x , тогда замкнутое подмножество $F \subset X$, не содержащее x , только пустое; $x \in X$, $\emptyset \in \emptyset$ \square

Определение 5.1. Пространство X регулярно, если оно T_3 и T_1

Утверждение 5.3. T_3 и $T_1 \Rightarrow T_2$

Доказательство. Возьмем x и y , такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x)$: $y \notin O(x)$. Рассмотрим $X \setminus O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме T_3 существуют окрестности $O(x)$ и $O(F)$: $O(x) \cap O(F) = \emptyset$. Найдем окрестность точки y . Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. \square

Пример 5.1. Если X метрическое пространство, то X хаусдорфово.

Рассмотрим полезную характеристику пространства T_2 .

Утверждение 5.4. X пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \bigcap \overline{O}(x) = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим x .

Доказательство. $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O}(x)$, пересечение по всем окрестностям точки x . Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O}(x)$, где пересечение по всем окрестностям точки x . Тогда $\forall \overline{O}(x) y \in \overline{O}(x) \Leftrightarrow \forall V(y) V(y) \cap O(x) \neq \emptyset$. Так как X пространство T_2 , то существует $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Противоречие с тем, что y принадлежит хотя бы одному $\overline{O}(x)$. \square

\Leftarrow упражнение.

Утверждение 5.5. Из T_4 следует T_0 .

Доказательство. Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\emptyset, X\}$. Можем взять $F_1 = \emptyset$, $F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \emptyset$. \square

Утверждение 5.6. Из T_4 не следует T_3 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является T_4 . Возьмем замкнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку b , причем $b \notin F$. Единственной окрестностью F является вся \mathbb{R} , так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее F . Тогда любая окрестность точки b будет нетривиально пересекаться с \mathbb{R} . Значит X не является T_3 . \square

Утверждение 5.7. $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}$, $F = F_2$, применяем аксиому T_4 . \square

Определение 5.2. X – нормально, если оно $T_4 + T_1$.

Лемма 5.8. Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) F_1, F_2 – замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1, \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \emptyset$.

Доказательство. Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \emptyset$. Тогда $x \in \overline{F_2}$, но $\overline{F_2} = F_2 \Rightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

Теорема 5.9. Метрическое пространство нормально.

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома T_2 , из которой следует аксиома T_1 . Докажем T_4 . Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.

Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \emptyset$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с F_1 . \square

6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказана теорема

Теорема 6.1. Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T_4 + T_1$.

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

6.1 Функциональная отделимость

Определение 6.1. $A \subset X$ - всюду плотно в X , если $\bar{A} = X$.

Теорема 6.2 (Лемма Урысона). Пусть X - нормальное пространство. A, B - два замкнутых непересекающихся подмножества X . Тогда существуют непрерывная функция $F : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$

Доказательство. Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств $\{U\}$, которые мы заиндексируем двоично-рациональными числами из $[0, 1]$.

1. $U_1 = X \subset B$
2. U_0 должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0$ (**используем нормальность**) $\subset U_1$
3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\bar{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям U_0 и U_1 .
4. $U_{\frac{1}{4}} : \bar{U}_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \bar{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \bar{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$
5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с q столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\bar{U}_{\frac{k}{2^{n-1}}} \subset U_q \subset \bar{U}_q \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Построили систему открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\bar{U}_q \subset U_r$. Теперь определим функцию F .

$$F(x) = \begin{cases} \inf \{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств A и B . Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где O_α - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0, a)$, $(b, 0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0, a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf \{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \tilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0, a)) = \bigcup_{\tilde{q} < a} U_{\tilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим F , заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup \{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup \{r : x \notin U_r\} = \sup \{r : x \notin \bar{U}_r\} = \sup \{r : x \in X \setminus \bar{U}_r\}$ - это множество открыто. Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация: □

Пример 6.1 (Нормального, но не метризуемого пространства).

6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

Замечание 6.1 (характеризация хаусдорфова пространства). Пусть X - хаусдорфово \Leftrightarrow для любых $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \bar{O}(x)$

Доказательство. (\Leftarrow) : $y \notin \bar{O}(x) \Leftrightarrow y \in X \setminus \bar{O}(x)$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y) : O(y) \cap \bar{O}(x) = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \bar{O}(x) = \emptyset$.

(\Rightarrow) : от противного □

Утверждение 6.3. Замкнутое подмножество компакта - компактно

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 6.4. В хаусдорфовом топологическом пространстве X компактное подмножество F является замкнутым.

Доказательство. Очевидно. □

Задача 6.1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

Лемма 7.1 (Лемма Урысона). X - нормальное пространство, A, B - замкнутые непересекающиеся подмножества X . Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1]$: $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

7.1 Разбиение единицы

Лемма 7.2 (об ужатии). X - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, где U_i - открытое множество. Тогда существует набор открытых $V_i, i = 1, \dots, N$, таких что $\bar{V}_i \subset U_i, i = 1, \dots, N$ и $X \subset \bigcup V_i$.

Доказательство (последовательное). Основание $k = 1$, имеем U_1 . Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A$$

Видно, что B - замкнуто. Очевидно, что $A \subset U_1$.

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать $O(A)$ причем $\bar{O}(A) \subset U_1$, обозначим $V_1 = O(A)$.

Докажем, что $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$ - покрытие X . Если x лежит в объед $U_i, i \geq 2$, то он лежит в $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$. Если x лежит в $X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A \subset V_1$, тогда выполняется тоже самое.

Рассмотрим $1 \leq k < N$. Пусть построены $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_N$.

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_N$$

Следовательно мы можем продолжить k до N . □

Задача 7.1. Подробно расписать доказательство выше.

Определение 7.1. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Носитель функции f (обозн $\text{supp} f$) = $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Определение 7.2. Пусть X - топологическое пространство, U_1, \dots, U_N - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ называется разбиением единицы подчиненное покрытию U_1, \dots, U_N , если выполнены два условия:

1. $\text{supp} f_i = \bar{V}_i \subset U_i$
2. $\sum_{i=1}^N f_i = 1$ на X

Теорема 7.3 (о разбиении единицы). Пусть X - нормальное пространство, U_1, \dots, U_N - конечное покрытие, тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию U_1, \dots, U_N .

Доказательство.

По лемме об ужатии, в U_i можно вписать V_i такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$. По лемме Урысона для $A = \bar{V}_i, B = X \setminus U_i$, будет существовать непрерывная функция $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_i(A) = \{1\}$ и $\varphi_i(B) = \{0\}$, то есть $\varphi_i = 1$ на A и $\varphi_i = 0$ вне A . Рассмотрим функцию f_i определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^N \varphi_i}$$

Причем $\text{supp} f_i$ зависит от φ_i , то есть $\text{supp} f_i = \text{supp} \varphi_i = \bar{V}_i$ □

Задача 7.2. Если f - непрерывное отображение, то $\text{supp} f$ - замкнутое.

Определение 7.3. A называется всюду плотным в топологическом пространстве X , если $\bar{A} = X$.

Определение 7.4. A называется нигде не плотным, если $(\text{int} \bar{A} = \emptyset$ - другое определение) для каждого непустого открытого U существует открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Определение 7.5. X - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.

Пример 7.1 (Канторово множество). Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0, 2$, то это элемент Канторова множества.

Можно рассмотреть $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_i}{3^i}$, $\tilde{a}_i = 1$, если $a_i = 2$, и $\tilde{a}_i = 0$, если $a_i = 0$.

Задача 7.3. Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.

Определение 7.6. X - совершенное, если не содержит изолированных точек.

Теорема 7.4 (Кривая Пеано). Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция $f : I \rightarrow I \times I$, где $I = [0, 1]$

8 Лекция 8

8.1 Кривые Пеано

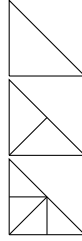
Определение 8.1. Кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ - кривая, если γ - непрерывное отображение.

Кривая Пеано - непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1]^2$.

Замечание 8.1. Гильберт разделил квадрат на 4 части, потом каждую часть также делил на 4. Пеано на 9.

На картинке можно посмотреть в Федорчуке.

Доказательство. Докажем построив заполнение кривой равнобедренного треугольника.



Пусть Δ - прямоугольный равнобедренный треугольник и $I = [0, 1]$. На каждом шаге будем разбивать треугольник и отрезок. На n -ом шаге будем иметь 2^n треугольников и отрезок, разбитый на столько же частей. Будем занумеровывать треугольники и части отрезка двоичным кодом.

Будем иметь следующую нумерацию: $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{i_1 \dots i_n}$. Определим соседние элементы как элементы, у которых есть общая сторона (для разбиения треугольников), общая точка (для разбиения отрезка). Так же мы имеем цепочку вложенных отрезков (треугольников).

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Эти цепочки имеют строго убывающий размер.

Из элементарных геометрических соображений можно получить значение диаметров этих множеств.

$$\text{diam}(I_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{diam}(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Очевидно, что все эти подмножества компактны (т.к. замкнутые и ограниченные подмножества полного метрического пространства).

Замечание 8.2. Рассказ про игру.

Определим отображение $f : I \rightarrow I \times I$.

1) Рассмотрим $t \in I = [0, 1]$. Для t будет существовать последовательность убывающий отрезков

$$t \in I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Т.к. t может лежать на границе отрезков, то последовательность определена неоднозначно. Возьмем последовательность треугольников с теми же индексами. Это будет последовательность вложенных компактов, причем диаметр этого множества стремится к 0. Т.о. пересечение этих треугольников будет состоять из одной точки, эту единственную точку обозначим за $f(t)$.

У этого рассуждения есть недостаток, t может принадлежать двум множествам $I_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{j_1 \dots j_n}$. но в этом случае может объединить эти два множества и получить $J_{i_1 \dots i_n}$, также определим множество $P_n(t) = \{ \}$. (если t - хорошее, то $P_n(t) = \Delta_{i_1 \dots i_n}$, если t - плохое, то $P_n(t)$ - объединению двух соседних треугольников).

Получим еще одну последовательность компактов:

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \dots$$

Утверждение 8.1.

$$\text{diam} P_n \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}$$

Опять получили последовательность вложенных компактов..

Докажем, что f - сюръективно. Рассмотрим точку x_0 из треугольника. Точка будет лежать в определенном последовательности "разрезанных" треугольников. Рассмотрим последовательность подотрезков с теми же индексами, у этой последовательности будет одной общей точкой. Остается доказать, что это точка - прообраз точки x_0 . Это верно, т.к. иначе бы образы этих точек лежали бы в разных треугольниках.

Докажем, что f - непрерывно. - Очевидно. \square

Определение 8.2. $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ - последовательность функций.

$f_n \Rightarrow 1$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое что для каждого $n \geq N$ для каждого $x \in X$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Теорема 8.2. Предел равномерно сходящийся функций непрерывен.

9 Лекция 9

Задача 9.1. Непрерывное отображение (гомеоморфизм) треугольника на квадрат. $f : \Delta \rightarrow I \times I$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y, x + y), & x > y \\ (2x, 2y), & x = y = (x + \min(x, y), x + \min(x, y)) \\ (x + y, x + y), & x < y \end{cases}$$

9.1 Теорема Титца о продолжении непрерывной функции

Теорема 9.1 (Титца о продолжении непрерывной функции). Пусть X - нормальное топологическое пространство. $F \subset X$ - замкнутое подмножество. $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная ограниченная (т.е. $\|\varphi\| = \sup_{x \in F} |\varphi(x)| < \infty$) функция.

Тогда существует $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывное продолжение функции φ , которое сохраняет норму $\|\Phi\| = \sup_{y \in X} |\Phi(y)| = \|\varphi\|$

Доказательство. Будем строить две последовательности функций.

1. $\Phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\varphi_n : F \rightarrow \mathbb{R}$

Замечание 9.1. Пусть $f_n(x) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ - фундаментальная последовательность, тогда существует $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$

Задача 9.2. Доказать, что фундаментальная последовательность равномерно сходится.

Алгоритм построения последовательностей.

1. $\varphi_0 = \varphi$, так как φ - ограниченная функция, то выполняется $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = M_0 < +\infty$ Определим два замкнутых множества в X

$$A_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \leq -\frac{M_0}{3} \right\}$$

$$B_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \geq \frac{M_0}{3} \right\}$$

Очевидно, что эти множества являются замкнутыми и непересекаются.

Применим лемму Урысона к отрезку $[-\frac{M_0}{3}, \frac{M_0}{3}]$, получим функцию $\Phi_0(x)$, которая на A_0 тождественна $-\frac{M_0}{3}$, на B_0 тождественна $\frac{M_0}{3}$.

Рассмотрим "номер" функции Φ_0 : $\|\Phi_0\| \leq \frac{M_0}{3}$.

2. определим функции $\varphi_1 = \varphi_0 - \Phi_0$ на множестве F . Эта функция непрерывна. Рассмотрим норму введенной функции на 3-х участках.

- (a) $\varphi_0 \geq \frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = \frac{M_0}{3}$
- (b) $-\frac{M_0}{3} \leq \varphi_0 \leq \frac{M_0}{3}$; $-\frac{M_0}{3} \leq \Phi_0 \leq \frac{M_0}{3}$
- (c) $\varphi_0 \leq -\frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = -\frac{M_0}{3}$

Из этих неравенств видно, что

$$\|\varphi_1\| \leq \frac{2M_0}{3}$$

3. Примени тоже построение, что и в предыдущем пункте, счетное число раз и получим две последовательности функций.

Таким образом получили, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Phi_n \text{ на множестве } F$$

И

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{M_0}{3} \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \frac{2M_0}{3} \quad (1)$$

Следовательно

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M_0 \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M_0 \quad (2)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$. Докажем, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^n \Phi_i$ будет фундаментальной.

$$\|S_n - S_m\| = \|S_{m+1} + \dots + S_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\Phi_i| \leq \frac{M_0}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^l = M_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

Таким образом она сходится и $S_n \rightrightarrows \Phi$

Докажем, что Φ совпадает с φ на F .

$$\left\| \varphi - \sum_{i=0}^n \Phi_i \right\| = \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M_0$$

При предельном переходе получим $\varphi = \Phi$ на множестве F . □

10 Лекций 10

11 Лекция 11

11.1 Тихоновская топология и теорема Тихонова

Определение 11.1. Тихоновская топология - топология на произведение топологических пространств таким образом, что координатные функции непрерывны.

Замечание 11.1. В конечномерной ситуации Тихоновская топология совпадает с топологией произведения. В бесконечномерном случае это не так.

Теорема 11.1 (Тихонов). $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$, где X_{α} - компактное пространство. $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ - компактно в Тихоновской топологии.

Доказательство. Возможно будет потом. □

Пример 11.1. Пусть $\{0, 1\}$ - несвязное двоеточие. Рассмотрим $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$

В топологии Тихонова это гомеоморфно Канторову множеству. Можно задать следующим образом

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x_k}{3^k}$$

Задача 11.1. Доказать, что это гомеоморфизм в Тихоновской топологии.

В топологии произведения получится $\tau = 2^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$.

Пример 11.2. Гильбертов куб(кирпич) = пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией. Он компактен по теореме Тихонова.

Гильбертов куб гомеоморфен следующему пространству

$$[0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \dots$$

А это ряды, причем $x_n \leq \frac{1}{n}$. Причем $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty$.

11.2 Фактор-топология

Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Пусть на X определено отношение эквивалентности \sim . И тогда X/\sim - классы эквивалентности. Если x лежит в X , то $[x]$ - его класс эквивалентности в X/\sim . Определим топологию τ на X/\sim по следующему правилу:

$$U \in \tau \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \tau_X$$

Пример 11.3. Пусть $X = \mathbb{R}^1$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Тогда $\mathbb{R}^1/\sim \rightarrow S^1$

Аналогично $T^2 = \mathbb{R}^2/\sim$

Пример 11.4. $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, если $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$

Задача 11.2. Доказать, что пространство X/\sim не хаусдорфово.

Как понять, что $f: X/\sim \rightarrow Y$ непрерывно?

$$\tilde{f}(x) = f(\pi(x))$$

Теорема 11.2. f непрерывно тогда и только тогда, когда \tilde{f} - непрерывна

Доказательство. (\Leftarrow): Пусть \tilde{f} - непрерывна, тогда $\tilde{f}^{-1}(U)$ - открыто в X . Из коммутативности диаграммы (формулы выше), следует, что $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ открыто в X . Необходимо доказать, что $V = f^{-1}(U)$ открыто в Y , оно открыто в силу определения фактор топологии.

(\Rightarrow): композиция непрерывных. □

11.3 Склеивка пространств

Рассматриваем $X \sqcup Y$. $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Определение 11.2. Букет: $X \sqcup Y/x_0 y_0$

Цилиндр: $X \times I$, где I - отрезок.

Конус: $\text{Cone}(X)$ - стягиваем основание конуса.

Надстройка: ???

11.4 Одноточечная компактификация

Определение 11.3. Компактификация пространства X = вложение $i: X \rightarrow CX$, где CX - компакт, и топология X индуцирована вложением i .

Определение 11.4 (одноточечная компактификация Александера, введена в 1924 году). Пусть $CX = X \sqcup N$, где N - точка, со следующей топологией.

$$\tau_{CX} = \begin{cases} U \subset X - \text{открыто} \\ W = V \sqcup N, V \subset X, V = X \setminus K, K - \text{замкнуто компактно} \end{cases}$$

Следующее утверждение не дописано.

Теорема 11.3. CX с определенной топологией является компактным пространством.

Доказательство. Рассмотрим K - компакт. Пусть $\tilde{U}_\alpha = \{U_{\tilde{\alpha}}, W_{\tilde{\beta}}\}$ - покрытие CX , в это покрытие точно входит одно $W_{\beta_0} = V_{\beta_0} \sqcup N$. $V_{\beta_0} = X \setminus K_{\beta_0}$ - дополнение к компактному. □