Лекции по введению в топологию

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
2 января 2025 г.

*tg: @gallehus

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Основные понятия топологии.

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

Определение 1.1. *Метрическое пространство — это пара (X, ρ), где X — множество, а $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество X, если функция ρ очевидно подразумевается.

Утверждение 1.1. $\left(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|\right)$ *является метрическим пространством.*

Определение 1.2. *Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{T})$, где X — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X, удовлетворяющий следующим аксиомам:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$, *где* $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i = 1, \ldots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, *где* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in A$ *(A — произвольное индексирующее множество);*

Множество $\mathcal{T}$ называется топологией на X, а элементы $\mathcal{T}$ — открытыми подмножествами X.

Пример 1.1.

1. *Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве X:* $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.
2. *Дискретная топология на любом множестве X:* $\mathcal{T} = 2^X$.
3. *На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство X называется слипшимся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство X называется простым или несвязным двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing, \{2\}\}$. Простраство X с топологиями $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ называется связным двоеточием.*

Определение 1.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар в X с центром x_0 и радиусом r — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.*

Определение 1.4. *Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки x), содержащий x и лежащий в U.*

Замечание 1.1. *Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами). Доказательство этого факта см. в теореме (Т. 2.1) на стр. (5).*

Определение 1.5. *Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \backslash U$ открыто.*

Задача 1.1. *Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.*

Пример 1.2. *Топология Зарисского: Рассмотрим множество $\mathbb{C}^1$ и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \ldots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным).*
Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество X: будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.

Задача 1.2. *Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.*

Определение 1.6. *База $\mathfrak{B}$ топологии $\mathcal{T}$ на X — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы $\mathfrak{B}$, т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.*

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Лемма 1.2 (Достаточное условие на базу топологии). *Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ - набор подмножеств X. Тогда если выполняются следующие условия:*

1. $\forall x \in X \;\; \exists B_x \in \mathfrak{B}\colon\; x \in B_x$,

2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}: \; (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$,

то $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве $\varnothing$ можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X, т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \; \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединение элементов базы задают топологию на X. □

Задача 1.3. *Повторить доказательство для базы метрического пространства.*

Определение 1.7. *Предбаза Π топологии $\mathcal{T}$ на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где $\mathfrak{B}$ — база $\mathcal{T}$, такое, что: $\forall U \in \mathfrak{B}$: U есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \mathfrak{B}$: $U = \bigcap_{i=1}^k P_i$, где $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.*
Иначе говоря: предбаза Π топологии $\mathcal{T}$ на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где $\mathfrak{B}$ — база $\mathcal{T}$, такое, что: $\forall U \in \mathcal{T}$: U есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.

$$\forall U \in \mathcal{T} : \; U = \bigcup \bigcap_{i=1}^{k} P_i, \text{ где } P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Замечание 1.2. *Любое множество задает предбазу некоторой топологии.*

Пример 1.3. *Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*
Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ — предбаза.
Тогда $\mathfrak{B} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi}\}$ *— база,*

$\mathcal{T} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}}\}$ — *топология на X.*

2 Лекция 2

Литература:

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. — Общая топология. Основные конструкции.

2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. — Элементарная топология.

Определение 2.1. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Если топология $\mathcal{T}$ на X может быть порождена некоторой метрикой ρ на X, то пространство $(X, \mathcal{T})$ называется метризуемым.*

Замечание 2.1. *Существует ряд критериев метризуемости топологических пространств: см. Критерий метризуемости Нагаты — Ю.М.Смирнова, 1950-1951.*

Определение 2.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0 — это множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$.*

Теорема 2.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии, порождённой на X метрикой ρ.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{B}$ всех открытых шаров в пространстве X: $\mathfrak{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$. Проверим для $\mathfrak{B}$ оба пункта достаточного условия на базу:
1. Очевидно, $\forall x \in X\ \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$
2. Обозначим: $B_1 = O_{\varepsilon_1}(x_1),\ B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2)$ и покажем, что $\forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B_3 = O_\varepsilon(x) \in \mathfrak{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. По определению открытых шаров B_1 и B_2: $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1,\ \rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Положим $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x_1, x), \frac{\varepsilon_2}{2} - \rho(x_2, x)\right\}$. Тогда: $\forall y \in O_\varepsilon(x)$:

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) = \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Значит, $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Аналогично: $\rho(y, x_2) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Т.к. это верно $\forall y \in O_\varepsilon(x)$, то: $O_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$, т.е. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Т.о. по достаточному условию на базу топологии: открытые шары в метрическом пространстве образуют базу топологии, порождённой метрикой этого пространства. □

Определение 2.3. *Пусть на множестве X заданы две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Говорят, что $\mathcal{T}_2$ сильнее $\mathcal{T}_1$ ($\mathcal{T}_1$ слабее $\mathcal{T}_2$) и пишут $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, т.е. если любое открытое в $\mathcal{T}_1$ множество будет открытым в $\mathcal{T}_2$.*

Такой способ сравнения топологий на множестве X относительно прост. Введённое отношение сравнения является отношением частичного порядка и образует на множестве всех топологий на X структуру частично упорядоченного множества (ЧУМа).

Пример 2.1. *Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии на множестве X:*

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\} \subset \mathcal{T}_2 = 2^X.$$

В некотором смысле это два полюса сравнения: антидискретная топология на X является слабейшей, а дискретная — сильнейшей, т.е. для любой топологии $\mathcal{T}$ на X: $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2$. Тем не менее введённый порядок на X является частичным, и нетривиальные топологии могут быть несравнимы.

Задача 2.1. *Метризумы ли тривиальные топологии(= антидискретная и дискретная)? Ответ:*

1. *Рассмотрим дискретную метрику: $\rho_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$ Дискретная метрика порождает дискретную топологию.*

2. *Антидискретная топология неметризуема.*

Определение 2.4 (Индуцированной топологии подпространства)**.** *Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда Y образует топологическое пространство с топологией, называемой индуцированной (с пространства X) топологией (топологией ограничения) $\mathcal{T}|_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.*

Задача 2.2. *Проверить, что индуцированная топология действительно является топологией на множестве Y, т.е. удовлетворяет аксиомам из определения топологии.*

Пример 2.2. *$X = \mathbb{R}^2$ - метрическое пространство с евклидовой метрикой, $Y \subset X$. Базой топологии, порождённой метрикой на пространстве X, являются открытые шары, а базой индуцированной топологии на Y являются всевозможные пересечения открытых шаров в X с Y.*

Определение 2.5. *Окрестность точки x в топологическом пространстве — это любое открытое множество этого пространства (т.е. элемент топологии), содержащее x.*

Замечание 2.2. *Из определений топологии и окрестности точки очевидно следует, что:*

1. *Пересечение конечного числа окрестностей точки является её окрестностью,*

2. *Объединение (произвольного числа) окрестностей точки является её окрестностью.*

Утверждение 2.2. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Тогда $A \subseteq X$ - открыто $\Leftrightarrow$ для каждой точки $x \in A$ существует её окрестность, лежащая в A.*

Доказательство. ($\Leftarrow$): По условию: $\forall x \in A\ \exists O(x) \in \mathcal{T} : x \in O(x), O(x) \subseteq A$. Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x)$: $C \in \mathcal{T}$. Очевидно, что $A \subseteq C$, а т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subseteq A$, то $C \subseteq A$. Получаем, что $A = C$, значит, $A \in \mathcal{T}$.
($\Rightarrow$): Раз A открыто, то A является окрестностью любой своей точки. □

Определение 2.6. *Пусть $x \in X$. Если $\{x\} \in \mathcal{T}$, то x называется изолированной точкой пространства X.*

Замечание 2.3. *В дискретной топологии на любом пространстве все точки являются изолированными.*

Определение 2.7. *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется точкой прикосновения множества A, если для любой её окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \varnothing$.*

Определение 2.8. *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется внутренней точкой множества A, если существует её окрестность $O(x)$: $O(x) \subset A$.*

Определение 2.9 (A1)**.** *Замыкание множества A — это множество всех точек прикосновения A. Обозначение: $\overline{A}$.*

Определение 2.10 (B1)**.** *Внутренность множества A — это множество всех внутренних точек A. Обозначение:* $\mathrm{Int}(A)$.

Задача 2.3. *Показать, что:* $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Определение 2.11 (A2)**.** *Замыкание $\overline{A}$ множества A — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Иными словами, $\overline{A}$ — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.*

Определение 2.12 (B2)**.** *Внутренность* $\mathrm{Int}(A)$ *множества A — это объединение всех открытых множеств, лежащих в A. Иными словами,* $\mathrm{Int}(A)$ *— это наибольшее по включению открытое множество, лежащее в A.*

Теорема 2.3. *Определение A1 эквивалентно определению A2; Определение B1 эквивалентно определению B2.*

Доказательство. Доказательство эквивалентности определений A1 и A2 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.
Пусть $\mathrm{Int}_1(A)$ - множество внутренних точек A в смысле определения B1, а $\mathrm{Int}_2(A)$ — в смысле определения B2. Покажем, что эти множества равны:

($\subseteq$): Если $x \in \mathrm{Int}_1(A)$, то существует его окрестность $O(x) \subset A$. Но $O(x)$ — открыто, а значит, $O(x) \subset \mathrm{Int}_2(A)$, и $x \in \mathrm{Int}_2(A)$. Получаем, что $\mathrm{Int}_1(A) \subseteq \mathrm{Int}_2(A)$.

($\supseteq$): Если $x \in \mathrm{Int}_2(A)$, то x принадлежит какому-то открытому $V \subset A$. Но тогда мы можем взять V в качестве окрестности точки x. Получаем, что $x \in \mathrm{Int}_1(A)$, а значит, $\mathrm{Int}_1(A) \supseteq \mathrm{Int}_2(A)$. Итак, $\mathrm{Int}_1(A) = \mathrm{Int}_2(A)$, а значит, определения B1 и B2 эквивалентны. □

Определение 2.13. *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется граничной точкой множества A, если x является точкой прикосновения A, но не является внутренней точкой A, т.е. если $x \in \overline{A}$, $x \notin \mathrm{Int}(A)$.*

Определение 2.14. *Граница множества A — это множество всех граничных точек A. Обозначение:* $\mathrm{Bd}(A)$ *или ∂A. По определению:* $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Определение 2.15 (Понятия непрерывного отображения)**.** *Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ — топологические пространства, $f : X \to Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $O(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y$ существует такая окрестность $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$, что $f(U(x_0)) \subset O(f(x_0))$.*

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением топологических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.4. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно.*
2. *Прообраз любого открытого множества под действием f является открытым, т.е. $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.*
3. *Прообраз любого замкнутого множества под действием f является замкнутым.*
4. *Для любого $A \subseteq X$: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (На лекции утверждалось не включение, а равенство, но это неверно).*

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий 1, 3 и 4 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем (1) $\Leftrightarrow$ (2):

($\Rightarrow$): Пусть $V \subset Y$ открыто. Рассмотрим $\forall x \in f^{-1}(V)$: Т.к. $V \in \mathcal{T}_Y$ и $f(x) \in V$, то $\exists O(f(x)) \subset V$ — окрестность $f(x)$. Т.к. f непрерывно, то для найденной $O(f(x))$ $\exists U(x) \in \mathcal{T}_X$ — окрестность $x : f(U(x)) \subset O(f(x)) \subset V$. Значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Получаем, что любая точка из $f^{-1}(V)$ входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, а значит, $f^{-1}(V)$ открыто. Итак, прообраз любого открытого множества под действием f открыт.

($\Leftarrow$): Пусть $x \in X$. Рассмотрим $\forall\, O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y$ — окрестность $f(x)$. Т.к. $O(f(x))$ открыто, то $f^{-1}(O(f(x)))$ открыто в X — выберем это множество в качестве окрестности x. Получаем, что $\forall x \in X\ \forall\, O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y\ \exists U(x) \in \mathcal{T}_X : f(U(x)) \subset O(f(x))$, т.е. f непрерывно. □

3 Лекция 3

Замечание 3.1. *Проверять непрерывность отображения топологических пространств удобно на уровне базы или предбазы: Пусть* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}_Y$ *— база топологии на* Y. *Тогда отображение* $f : X \to Y$ *непрерывно* $\Leftrightarrow$ *прообраз базы (предбазы) открыт:* $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{T}_X$

Пример 3.1. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функции одной переменной ("функции из математического анализа").*

2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$ *(Эта функция представляет собой пример накрытия* $f : \mathbb{R}^1 \to S^1$. *Определение накрытия смотри (возможно) дальше в курсе).*

3. *Тривиальный пример: постоянное отображение* $f(x) \equiv y_0$, *где* $f : X \to Y$ *и* $y_0 \in Y$.

4. *Композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением: Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$; f, g *— непрерывные отображения. Тогда* $g \circ f$ *— непрерывное отображение.*

5. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ *— топологическое пространство,* $Z \subset X$, *на* Z *индуцирована топология* $\mathcal{T}_Z = \mathcal{T}|_Z$. *Рассмотрим отображение включения:* $i : Z \to X$, $i(x) = x$. *Тогда* i *непрерывно в индуцированной топологии* $\mathcal{T}_Z$.

6. *Пусть в дополнение к предыдущему пункту: существует* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение. Рассмотрим отображение ограничения:* $f|_Z : Z \to Y$. *Оно непрерывно, т.к. является композицией непрерывных отображений:* $f|_Z = f \circ i$.

7. *Непрерывность в метрических пространствах:*

Определение 3.1 (Непрерывности отображения метрических пространств по Коши)**.** *Пусть* (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) *— метрические пространства,* $f : X \to Y$. *Тогда отображение* f *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$, *где* O_δ *и* O_ε *— открытые шары в пространствах* X *и* Y *соответственно.*

Отображение f *называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех* $x \in X$.

Определение 3.2 (Непрерывности отображения метрических пространств по Гейне)**.** *Пусть* (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) *— метрические пространства,* $f : X \to Y$. *Тогда отображение* f *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$, *если для любой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов* X, *сходящейся к* x_0, *последовательность* $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* $f(x_0)$.

Отображение f *называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех* $x \in X$.

Задача 3.1. *Доказать эквивалентность определений непрерывности отображения метрических пространств по Коши и по Гейне.*

Теорема 3.1 (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывное отображение* $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

Доказательство этой теоремы смотри дальше в курсе.

Определение 3.3. *Пусть* X, Y *— топологические пространства,* $f : X \to Y$. *Тогда отображение* f *называется гомеоморфизмом, если: 1)* f *— биекция, 2)* f *непрерывно, 3)* f^{-1} *непрерывно.*

Если между пространствами X *и* Y *существует гомеоморфизм, то эти пространства называются гомеоморфными.*

Замечание 3.2. *Свойство "быть гомеоморфными" очевидно является отношением эквивалентности на множестве топологических пространств, а значит, разбивает это множество на классы эквивалентности.*

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, можно найти топологические свойства этих пространств, которые должны сохраняться при любом гомеоморфизме, но у этих пространств отличаются.

Пример 3.2. $f(x) = \mathrm{tg}(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ *— гомеоморфизм.*

3.1 Связность и линейная связность.

Определение 3.4. *Топологическое пространство* X *называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.*

Если же пространство X *так разбить нельзя, то оно называется связным.*

Пример 3.3. 1. *Любое пространство с дискретной топологией несвязно, если содержит более одного элемента.*

2. *Любое пространство с антидискретной топологией связно.*

Теорема 3.2. *Отрезок* $I = [0,1]$ *с топологией, индуцированной естественной топологией вещественной прямой (т.е. топологией, порождённой на* $\mathbb{R}$ *евклидовой метрикой), связен.*

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы открытыми подмножествами отрезка I считаются интервалы вида (a,b), где $0<a<b<1$; полуинтервалы вида $[0,a)$, где $0<a\leq 1$; полуинтервалы вида $(b,1]$, где $0\leq b<1$; сам отрезок I и $\varnothing$; а также их всевозможные объединения и конечные пересечения.

Докажем теперь теорему от противного: пусть отрезок I связен, т.е. $I=A\cup B$, где: 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) A,B — открыты. Без ограничения общности можем считать, что $0\in A$. Т.к. A открыто, то 0 лежит в A вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда или эта окрестность нуля совпадает со всем отрезком: $I\subseteq A \Rightarrow I=A \Rightarrow B=\varnothing$ — получаем противоречие, или эта окрестность нуля представляет собой полуинтервал, т.е. $\exists\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq 1:\ [0,\varepsilon)\subseteq A$. Множество таких ε ограниченно $(0<\varepsilon\leq 1)$, следовательно, существует его супремум. Обозначим это множество Ω $(\Omega\subseteq A)$, а его супремум — ε_0:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\Omega=\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\{\,\varepsilon \mid [0,\varepsilon)\subseteq A\,\}=\varepsilon_0.$$

Докажем теперь, что тогда $[0,\varepsilon_0]\subseteq A$. Т.к. ε_0 — супремум множества Ω, то по одному из свойств супремума:
$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:\ \varepsilon_0-\delta<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon\in\Omega$, т.е. $[0,\varepsilon)\subset\Omega\subset A$. Значит, ε_0 является точкой прикосновения множества Ω, а значит, и точкой прикосновения множества A.

Т.к. A и B являются открытыми и дополняют друг друга до I, то в индуцированной топологии на I они являются одновременно открытыми и замкнутыми. Значит, $A=\overline{A}$, т.е. A содержит все свои точки прикосновения. Значит, $\varepsilon_0\in A$. Но т.к. A открыто, то $\exists U(\varepsilon_0)$ — окрестность ε_0: $U(\varepsilon_0)\subset A$. Но тогда или $\varepsilon_0=1$, а значит, $A=I \Rightarrow B=\varnothing$ — противоречие, или $\varepsilon_0\neq 1 \Rightarrow \exists\,\delta>0:\ [0,\varepsilon_0+\delta)=[0,\varepsilon_0]\cup[\varepsilon_0,\varepsilon_0+\delta)\subset A \Rightarrow \varepsilon_0+\delta\in\Omega$ — противоречие с тем, что $\varepsilon_0=\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\Omega$.

Во всех случаях получаем противоречия, значит, исходное предположение неверно, а значит, отрезок I в индуцированной топологии связен. □

Утверждение 3.3. *Непрерывный образ связного пространства связен, т.е. если X связно, $f:X\to Y$ — непрерывное отображение, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. От противного: пусть $f(X)=A\cup B$, где 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) A,B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии. Но тогда $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$, причём 1) $f^{-1}(A),f^{-1}(B)\neq\varnothing$, т.к. $A,B\neq\varnothing$; 2) $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\varnothing$, т.к. $A\cap B=\varnothing$; 3) $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ — открыты в X, т.к. A,B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии, а f — непрерывное отображение. Значит, X несвязно — противоречие. □

Определение 3.5. *Путь γ в топологическом пространстве X, соединяющий точки $x_0,y_0\in X$ — это непрерывное отображение $\gamma:[0,1]\to X$ такое, что $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=y_0$. Точка x_0 называется началом пути γ, а точка y_0 — концом пути γ.*

Замечание 3.3. *Из доказанных теоремы и утверждения следует, что $\gamma([0,1])$ — связно в топологии, индуцированной с области значений.*

Определение 3.6. *Пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек $x,y\in X$ существует путь γ, соединяющий их и лежащий в пространстве X, т.е. $\gamma([0,1])\subset X$.*

Теорема 3.4. *Пусть X линейно связно. Тогда X связно.*

Доказательство. От противного: Пусть $X=A\cup B$, где 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) A,B — открыты в топологии на X. Т.к. X линейно связно, то $\forall x_0\in A$ и $\forall y_0\in B$ можно соединить путём: существует непрерывное отображением $\gamma:[0,1]=I\to X$ такое, что $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=y_0$, $\gamma(I)\subset X$. Тогда получаем, что $\gamma(I)=(\gamma(I)\cap A)\cup(\gamma(I)\cap B)$, причём $(\gamma(I)\cap A)$ и $(\gamma(I)\cap B)$ непусты, не пересекаются и открыты в топологии, индуцированной с X на $\gamma(I)$. Значит, $\gamma(I)$ несвязно — противоречие. □

Замечание 3.4. *Обратное неверно. Пример: объединение графика функции $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x>0$ с отрезком $\{\,(0,y)\mid -1\leq y\leq 1\,\}$. Это подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ связно, но не является линейно связным. Доказательство этого факта остаётся читателю в качестве упражнения.*

4 Лекция 4

4.1 Компактность.

Определение 4.1. *Пусть $(X,\mathcal{T})$ — топологическое пространство. Система $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\mathcal{T}$ открытых подмножеств в X называется (открытым) покрытием множества $Y\subseteq X$, если $Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$.*

Определение 4.2. *Топологическое пространство X называется компактным (иначе, компактом), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Замечание 4.1. *В устаревшей терминологии описанное выше свойство называлось бикомпактностью, а в определении компактности (иначе, счётно-компактности) требовалась счётность исходного покрытия.*

Теорема 4.1. *Отрезок $[a,b]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие отрезка $[a,b]$. Рассмотрим множество

$$\Pi = \{x \in [a,b] \mid [a,x] \text{ покрывается конечным числом элементов покрытия } \{U_\alpha\}\}.$$

Т.о. $\Pi \subseteq [a,b]$, причём $\Pi \neq \varnothing$, т.к. $\exists\, U_{\alpha_0} \in \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} : a \in U_{\alpha_0}$. Значит, Π — непустое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$, а значит, существует $\sup \Pi$. Обозначим $\varepsilon_0 = \sup\Pi$. Т.к. $\Pi \subseteq [a,b]$, то $\varepsilon_0 \in [a,b]$, значит, $\exists\, U_{\widetilde{\alpha}_0} \in \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} : \varepsilon_0 \in U_{\widetilde{\alpha}_0}$. Но $U_{\widetilde{\alpha}_0}$ открыто, значит, $\exists\,\delta > 0 : (\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0 + \delta) \subset U_{\widetilde{\alpha}_0}$. Т.к. ε_0 — супремум множества Π, то по свойству супремума: $\exists\, x_\delta \in \Pi : x_\delta \in (\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0]$. Но тогда по определению ε_0: $[a, x_\delta]$ покрывается конечным набором элементов из $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Этот набор с добавленным элементом $U_{\widetilde{\alpha}_0}$ является конечным покрытием отрезка $[a,\varepsilon_0]$, значит, $\varepsilon_0 \in \Pi$.

Предположим теперь, что $\varepsilon_0 < b$. Тогда ε_0 является внутренней точкой отрезка $[a,b]$, а значит, $\exists\,\varepsilon' > 0 : (\varepsilon_0 - \varepsilon', \varepsilon_0 + \varepsilon') \subset [a,b]$. Тогда $[\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon'}{2}, \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{2}] \subset [a,b]$. По определению $\varepsilon_0 : [a, \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon'}{2}]$ покрывается конечным набором элементов из $\{U_\alpha\}$. Но тогда этот набор с добавленным элементом $(\varepsilon_0 - \varepsilon', \varepsilon_0 + \varepsilon')$ является конечным покрытием отрезка $[a, \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{2}]$, а значит, $\varepsilon_0 \neq \sup\Pi$ — противоречие. Получаем, что $\varepsilon_0 = b$, а значит, весь отрезок $[a,b]$ покрывается конечным числом элементов из $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, т.е. является компактом. □

Лемма 4.2 (о вложенных отрезках). *Пусть дана система вложенных отрезков: $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$. Тогда их пересечение $\bigcap_{i=1}^\infty [a_i,b_i] \neq \varnothing$. При этом, если $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то их пересечние состоит из одной точки.*

Доказательство. Данная лемма доказывается в курсе математического анализа, так что здесь её доказательство мы приводить не будем. Однако мы докажем обобщение этой леммы на случай топологических пространств. □

Определение 4.3. *Система $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ подмножеств множества X называется центрированной, если пересечение любого конечного числа её элементов не пусто.*

Лемма 4.3 (Обобщение леммы о вложенных отрезках для топологических пространств). *Пусть X — топологическое пространство, $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность замкнутых непустых подмножеств X такая, что $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$. Тогда если X — компакт, то $\bigcap_{i=1}^\infty F_i \neq \varnothing$.*

Доказательство. Данная лемма немедленно следует из следующей теоремы с тем лишь замечанием, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто. □

Теорема 4.4. *Топологическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$ любая центрированная система замкнутых подмножеств в X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$: Пусть $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ — центрированная система замкнутых подмножеств в X и $\bigcap_{i=1}^\infty F_i = \varnothing$. Тогда множества $U_i = X \setminus F_i$ открыты в X. Рассмотрим $\bigcup_{i=1}^\infty U_i$:

$$\bigcup_{i=1}^\infty U_i = \bigcup_{i=1}^\infty (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^\infty F_i = X.$$

Значит, система $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ образует покрытие X. Т.к. X компактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$:

$$\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} = X.$$

Но тогда $\bigcap_{j=1}^n F_{i_j} = \varnothing$, а значит, система $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ не является центрированной — противоречие. Значит, $\bigcap_{i=1}^\infty F_i \neq \varnothing$.

$(\Rightarrow)$: Доказательство этого утверждения остаётся читателю в качестве упражнения. □

Определение 4.4. *Топологическое пространство X называется локально компактным, если $\forall x \in X$ и для любой окрестности $O(x)$ точки x существует окрестность $V(x)$ такая, что замыкание $\overline{V(x)} \subset O(x)$ и $\overline{V(x)}$ — компакт.*

Определение 4.5. *Семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ подмножеств в X называется локально конечным, если $\forall x \in X$ существует окрестность $O(x)$ точки x, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

Определение 4.6. *Говорят, что семейство V подмножеств множества X вписано в семейство U, если всякий элемент семейства V содержится в некотором элементе семейства U.*

Определение 4.7. *Топологичесоке пространство X называется паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие.*

Пример 4.1. *Пространства $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ являются паракомпактными.*

Лемма 4.5 (о наследовании компактностей). *Пусть X — топологическое пространство, $X \supset A$ и A — замкнуто. Тогда:*

1. *X компактно $\Rightarrow$ A компактно;*

2. *X локально компактно $\Rightarrow$ A локально компактно;*

3. *X паракомпактно $\Rightarrow A$ паракомпактно.*

Задача 4.1. *Доказать лемму выше.*

Утверждение 4.6. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда если X компактно, то $f(X) \subset Y$ тоже компактно.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие $f(X)$. Рассмотрим семейство $\left\{f^{-1}(V_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$: в силу непрерывности f оно состоит из открытых множеств и является покрытием X, а значит, в силу компактности X из него можно выбрать конечное подпокрытие $\left\{f^{-1}(V_{\alpha_i})\right\}_{i=1}^n$. Но тогда семейство $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ будет конечным покрытием $f(X)$, а значит, $f(X)$ — компакт. □

Задача 4.2. *Рассмотреть аналогичные утверждения о локальной компактности и паракомпактности.*

Определение 4.8 (Аксиомы отделимости)**.** *Пусть X — топологическое пространство. Тогда говорят, что X удовлетворяет аксиоме отделимости T_i тогда и только тогда, когда:*

1. *T_0 (аксиома Колмогорова): $\forall x, y \in X, x \neq y$: существует окрестность $O(x)$ точки x такая, что $y \notin O(x)$ или существует окрестность $O(y)$ точки y такая, что $x \notin O(y)$.*

2. *T_1: $\forall x, y \in X, x \neq y$: найдутся окрестности $O(x)$ точки x и $O(y)$ точки y такие, что $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y)$.*

3. *T_2 (аксиома Хаусдорфа): $\forall x, y \in X, x \neq y$: найдутся окрестности $O(x)$ точки x и $O(y)$ точки y такие, что $O(x) \cap O(y) = \varnothing$.*

4. *T_3: для любой точки x из X и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего x, существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$ (где окрестность $O(F)$ — это любое такое подмножество $A \subset X$, что $A \supset F$ и $A \in \mathcal{T}$).*

5. *T_4: для любых F_1, F_2 — замкнутых подмножеств в X таких, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, существуют непересекающиеся окрестности $O(F_1)$ и $O(F_2)$.*

Пример 4.2. 1. *Любое пространство с антидискретной топологией не удовлетворяет аксиоме отделимости T_0.*

2. *Связное двоеточие удовлетворяет аксиоме отделимости T_0.*

3. *Любое пространство с дискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_1.*

4. *Любое пространство с антидискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.*

5. *Любое пространство с антидискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_4*

6. *Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = \left\{[a, +\infty)_{a\in\mathbb{R}}, \mathbb{R}, \varnothing\right\}$. Оно не удовлетворяет аксиоме отделимости T_3, но удовлетворяет аксиоме отделимости T_4, т.к. все замкнутые множества в нём имеют вид $\mathbb{R}, \varnothing, F_a = (-\infty, a), a \in \mathbb{R}$, и для любого замкнутого множества F_a существует единственная окрестность $O(F_a) = \mathbb{R}$, а значит, $\forall b > a$: отделить b и F_a нельзя. При этом не существует таких замкнутых множеств F_a и F_b, что $F_a \cap F_b = \varnothing$.*

5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику T_1-пространства:

Утверждение 5.1. *X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда для любых x множество $\{x\}$ замкнуто.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$: Пусть T_1. Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Longrightarrow y$ не является точкой прикосновения множества X. Значит $X\backslash\{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом x единственная предельная (прикосновенная) точка множества X.

$(\Leftarrow)$: Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X\backslash\{x\}$ и $Y\backslash\{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X\backslash\{x\}$, $x\backslash\{y\}$ □

Утверждение 5.2. *Вообще говоря из T_3 не следует T_0.*

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Возмем точку x, тогда замкнутое подмножечство $F \subset X$, не содержащее x, только пустое; $x \in X$, $\varnothing \in \varnothing$ □

Определение 5.1. *Пространство X регулярно, если оно T_3 и T_1*

Утверждение 5.3. *T_3 и $T_1 \Rightarrow T_2$*

Доказательство. Возьмем x и y, такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x)$: $y \notin O(x)$. Рассмотрим $X \backslash O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме T_3 существуют окрестности $O(x)$ и $O(F)$: $O(x) \cap O(F) = \varnothing$. Найдем окрестность точки y. Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \varnothing$. $\square$

Пример 5.1. *Если X метрическое пространство, то X хаусдорфово.*

Рассмотрим полезную характеристику пространства T_2.

Утверждение 5.4. *X пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \bigcap \overline{O}(x) = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим x.*

Доказательство. $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O}(x)$, пересечение по всем окрестностям точки x. Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O}(x)$, где пересечение по всем окрестностям точки x. Тогда $\forall \overline{O}(x)\ y \in \overline{O}(x) \Leftrightarrow \forall V(y)\ V(y) \cap O(x) \neq \varnothing$. Так как X пространство T_2, то существует $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Противоречие с тем, что y принадлежит хотя бы одному $\overline{O}(x)$.
$\Leftarrow$ упражнение. $\square$

Утверждение 5.5. *Из T_4 следует T_0.*

Доказательство. Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\varnothing, X\}$. Можем взять $F_1 = \varnothing$, $F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \varnothing, F_2 = \varnothing$. $\square$

Утверждение 5.6. *Из T_4 не следует T_3.*

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}, \varnothing, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является T_4. Возьмем закнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку b, причем $b \notin F$. Единственной окрестностью F является вся $\mathbb{R}$, так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее F. Тогда любая окрестность точки b будет нетривиально пересекаться с $\mathbb{R}$. Значит X не является T_3. $\square$

Утверждение 5.7. *$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.*

Доказательство. Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}$, $F = F_2$, применяем аксиому T_4. $\square$

Определение 5.2. *X – нормально, если оно $T_4 + T_1$.*

Лемма 5.8. *Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) F_1, F_2 - замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1$, $\exists \varepsilon > 0 :\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \varnothing$. Тогда $x \in \overline{F_2}$, но $\overline{F_2} = F_2 \Longrightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. $\square$

Теорема 5.9. *Метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома T_2, из которой следует аксиома T_1. Докажем T_4. Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup\limits_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup\limits_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.
Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \varnothing$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с F_1. $\square$

6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказано теорема

Теорема 6.1. *Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T4 + T1$.*

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

6.1 Функциональная отделимость

Определение 6.1. *$A \subset X$ - всюду плотно в X, если $\overline{A} = X$.*

Теорема 6.2 (Лемма Урысона). *Пусть X - нормальное пространство. A, B - два замкнутых непересекающихся подмножества X. Тогда существеуют непрерывная функция $F : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$*

Доказательство. Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств U, которые мы заиндексируем двоично-рациональными числа из $[0,1]$.

1. $U_1 = X \subset B$

2. U_0 должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0$ **(используем нормальность)** $\subset U_1$

3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям U_0 и U_1.

4. $U_{\frac{1}{4}} : \overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$

5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с q столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\overline{U}_{\frac{k}{2^{n-1}}} \subset U_q \subset \overline{U}_q \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Пострили системс открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\overline{U}_q \subset U_r$. Теперь определим функцию F.

$$F(x) = \begin{cases} \inf\{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств A и B. Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где O_α - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0,a), (b,0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0,a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf\{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \widetilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0,a)) = \bigcup_{\widetilde{q}<a} U_{\widetilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим F, заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup\{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup\{r : x \notin U_r\} = \sup\left\{r : x \notin \overline{U}_r\right\} = \sup\left\{r : x \in X \setminus \overline{U}_r - \text{ это множество открыто}\right\}$ Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация: □

Пример 6.1 (Нормального, но не метризуемого пространства).

6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

Замечание 6.1 (характеризация хаусдорфово пространства). *Пусть X - хаусдорфово $\Leftrightarrow$ для каждых $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \overline{O}(x)$*

Доказательство. ($\Leftarrow$): $y \notin \overline{O}(x) \Leftrightarrow y \in X \setminus \overline{O}(x)$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y)$: $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$.

($\Rightarrow$): от противного □

Утверждение 6.3. *Замкнутое подмножество компакта - компактно*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 6.4. *В хаусдорфовом топологическом пространстве X компактное подмножество F является замкнутым.*

Доказательство. Очевидно. □

Задача 6.1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

Лемма 7.1 (Лемма Урысона). *X - нормальное пространство, A, B - замкнутые непересекающиеся подмножества X. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$: $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.*

7.1 Разбиение единицы

Лемма 7.2 (об ужатии)**.** *X - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$, где U_i - открытое множество. Тогда существует набор открытых $V_i, i = 1, \dots, N$, таких что $\overline{V}_i \subset U_i, i = 1, \dots, N$ и $X \subset \bigcup V_i$.*

Доказательство (последовательное). Основание $k = 1$, имеем U_1. Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A$$

Видно, что B - замкнуто. Очевидно, что $A \subset U_1$.

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать $O(A)$ причем $\overline{O}(A) \subset U_1$, обозначим $V_1 = O(A)$.

Докажем, что $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$ - покрытие X. Если x лежит в объед U_i, $i \geq 2$, то он лежит в $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$. Если x лежит в $X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A \subset V_1$, тогда выполеняется тоже самое.

Рассмотрим $1 \geq k < N$. Пусть построены $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots U_N$.

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots V_k \cup U_{k+1} \cup \dots U_N$$

Слоедовательно мы можем продолжить k до N. □

Задача 7.1. *Подробно расписать доказательство выше.*

Определение 7.1. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Носитель функции f (обозн $suppf$) $= \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

Определение 7.2. *Пусть X - топологическое пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ называется разбиением единицы подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$, если выполненые два условия:*

1. *$suppf_i = \overline{V}_i \subset U_i$*
2. *$\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$ на X*

Теорема 7.3 (о разбиении единицы)**.** *Пусть X - нормальное пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда сущесвтует разбиение единицы, подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$.*

Доказательство. По лемме об ужатии, в U_i можно вписать V_i такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$. По лемме Урысона для $A = \overline{V}_i, B = X \setminus U_i$, будет существовать непрерывная функция $\varphi_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_i(A) = \{1\}$ и $\varphi_i(B) = \{0\}$, то есть $\varphi_i = 1$ на A и $\varphi_i = 0$ вне A. Рассмотрим функцию f_i определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i}$$

Причем $suppf_i$ зависит от φ_i, то есть $suppf_i = supp\varphi_i = \overline{V}_i$

□

Задача 7.2. *Если f - непрерывное отображение, то $suppf$ - замкнутое.*

Определение 7.3. *A назвается всюду плотным в топологическом пространстве X, если $\overline{A} = X$.*

Определение 7.4. *A называется нигде не плотным, если ($int\overline{A} = \emptyset$ - другое определение) для каждого непустого открытого U существует открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap U = \emptyset$.*

Определение 7.5. *X - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.*

Пример 7.1 (Канторово множество)**.** *Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0, 2$, то это элемент Канторово множества.*

Можно рассмотреть $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_i}{3^i}$, $\widetilde{a}_i = 1$, если $a_i = 2$, и $\widetilde{a}_i = 0$, если $a_i = 0$.

Задача 7.3. *Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.*

Определение 7.6. *X - совершенное, если не содержить изолированных точек.*

Теорема 7.4 (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция $f : I \to I \times I$, где $I = [0, 1]$*

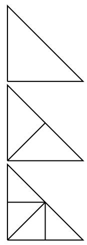
8 Лекция 8

8.1 Кривые Пеано

Определение 8.1. *Кривая* $\gamma : [0,1] \to X$ *- кривая, если* γ *- непрерывное отображение.*
Кривая Пеано - непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ *на* $[0,1]^2$.

Замечание 8.1. *Гильберт разделил квадрат на 4 части, потом каждую часть также делил на 4.*
Пеано на 9.
На картинке можно посмотреть в Федорчуке.

Доказательство. Докажем простроив заполнение кривой равнобедренного треугольника.



Пусть Δ - прямоугольний равнобедренный треугольник и $I = [0,1]$. На каждом шаге будем разбивать треугольник и отрезок. На n-ом шаге будет будем иметь 2^n треугольников и отрезок, разбитый на столько же частей. Будем занумеровывать треугольники и части отрезка двоичным кодом.

Будем иметь следующую нумерацию: $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{i_1 \dots i_n}$. Определим соседние элементы как элементы, у которых есть общая сторона(для разбиения треугольников), общая точка(для разбиения отрезка). Так же мы имеем цепочку вложенных отрезков(треуглников).

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Эти цепочки имеют строго убывающий размер.

Из элементарных геометрических соображений можно получить значение диаметров этих множеств.

$$diam(I_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$diam(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Очевидно, что все эти подмножества компакты(т.к. замкнутые и ограниченные подмножества полного метрического пространства).

Замечание 8.2. *Рассказ про игру.*

Определим отображение $f : I \to I \times I$.

1) Рассмотрим $t \in I = [0,1]$. Для t будет существовать последовательность убывающий отрезков

$$t \in I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Т.к. t может лежать на границе отрезков, то последовательность определенна неоднозначно. Возьмем последовательность треугольников с теми же индексами. Это будет последовательность вложенные компактов, причем дивметр этого множества стремится к 0. Т.о. пересечение этих треугольников будет состоять из одной точки, эту единственную точку обозначим за $f(t)$.

У этого рассуждения есть недостаток, t может принадлежать двум множествам $I_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{j_1 \dots j_n}$. но в этом случае может объядинить эти два множества и получить $J_{i_1 \dots i_n}$, также определим множество $P_n(t) = \{\}$. (если t - хорошее, то $P_n(t) = \Delta_{i_1 \dots i_n}$, если t - плохое, то $P_n(t) =$ объединению двух соседних треугольников).

Получим еще одну последовательность компактов:

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \dots$$

Утверждение 8.1.

$$diam P_n \leq \frac{1}{(\sqrt{2}^{n-2})}$$

Опять получили последовательность вложенных компактов..

Докажем, что f - сюръективно. Рассмотрим точку x_0 из треугольника. Точка будет лежать в определнном последовательность "разрезанных"треугольников. Рассмотрим последовательность подотрезков с теми же индексами, у этой последовательности будет одной общая точка. Остается доказать, что это точка - прообраз точки x_0. Это верно, т.к. иначе бы образы этих точек лежали бы в разных треугольниках.

Докажем, что f - непрерывно. - Очевидно. □

Определение 8.2. *$f_n : X \to \mathbb{R}$ - последовательность функций.*

$f_n \rightrightarrows 1$, если для каждого $\varepsilon > 0$ сущесвтует $N \in \mathbb{N}$ такое что для каждого $m \geq N$ для каждого $x \in X$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Теорема 8.2. *Предел равномерно сходящийся функций непрерывен.*

9 Лекция 9

Задача 9.1. *Непрерывное отображение (гомеоморфизм) треугольника на квадрат. $f : \Delta \to I \times I$*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y, x + y), & x > y \\ (2x, 2x), & x = y \\ (x + y, x + y), & x < y \end{cases} = (x + \min(x, y), x + \min(x, y))$$

9.1 Теорема Титца о продолжении непрерывной функции

Теорема 9.1 (Титца о продолжении непрерывной функции)**.** *Пусть X - нормальное топологическое пространство. $F \subset X$ - замкнутое подмножество. $\varphi : F \to \mathbb{R}$ - непрерывная ограниченная(т.е. $\|\varphi\| = \sup_{x \in F} |\varphi(x)| < \infty$) функция.*

Тогда существует $\Phi : X \to \mathbb{R}$ - непрерывное продолжение функции φ, которое сохраняет норму $\|\Phi\| = \sup_{y \in X} |\Phi(y)| = \|\varphi\|$

Доказательство. Будем строить две последовательности функций.

1. $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$
2. $\varphi_n : F \to \mathbb{R}$

Замечание 9.1. *Пусть $f_n(x) : Y \to \mathbb{R}$ - фундаментальная последовательность, тогда существует $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$*

Задача 9.2. *Доказать, что фундаментальная последовательность равномерно сходится.*

Алгоритм построения последовательностей.

1. $\varphi_0 = \varphi$, так как φ - ограниченная функция, то выполняется $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = M_0 < +\infty$ Определим два замкнутых множества в X
$$A_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \leq -\frac{M_0}{3} \right\}$$
$$B_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \geq \frac{M_0}{3} \right\}$$
   Очевидно, что эти множества являются замкнутыми и непересек.

   Применим лемму Урысона к отрезку $\left[-\frac{M_0}{3}, \frac{M_0}{3}\right]$, получим функцию $\Phi_0(x)$, которая на A_0 тождественна $-\frac{M_0}{3}$, на B_0 тождественна $\frac{M_0}{3}$.

   Рассмотрим "номру"функции Φ_0: $\|\Phi_0\| \leq \frac{M_0}{3}$.

2. определим функции $\varphi_1 = \varphi_0 - \Phi_0$ на множестве F. Эта функция непрерывна. Рассмотрим норму введеной функции на 3-ех участках.

   (a) $\varphi_0 \geq \frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = \frac{M_0}{3}$

   (b) $-\frac{M_0}{3} \leq \varphi_0 \leq \frac{M_0}{3}$; $-\frac{M_0}{3} \leq \Phi_0 \leq \frac{M_0}{3}$

   (c) $\varphi_0 \leq -\frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = -\frac{M_0}{3}$

   Из этих неравенств видно, что
$$\|\varphi_1\| \leq \frac{2M_0}{3}$$

3. Примени тоже построение, что и в предыдущем пункте, счетное число раз и получим две последовательности функций.

Таким образом получили, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Phi_n \text{ на множестве } F$$

И

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{M_0}{3} \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \frac{2M_0}{3} \tag{1}$$

Следовательно

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M_0 \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} M_0 \tag{2}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$. Докажем, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i$ будет фундаментольной.

$$\|S_n - S_m\| = \|S_{m+1} + \ldots + S_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\Phi_i| \leq \frac{M_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{l} = M_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

Таким образом она сходится и $S_n \rightrightarrows \Phi$

Докажем, что Φ совпадает с φ на F.

$$\left\|\varphi - \sum_{i=0}^{n} \Phi_i\right\| = \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} M_0$$

Припредельном переходе получим $\varphi = \Phi$ на множестве F. □

10 Лекций 10

11 Лекция 11

11.1 Тихоновская топология и теорема Тихонова

Определение 11.1. *Тихоновская топология - топология на произведение топологических пространств таким образом, что координатные функции непрерывны.*

Замечание 11.1. *В конечномерной ситуации Тихоновоская топология совпадает с топологией произведения. В бесконечномерном случае это не так.*

Теорема 11.1 (Тихонов)**.** $\Pi_\alpha X_\alpha$, *где* X_α *- компактное пространство.* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *- компактно в Тихоновской топологии.*

Доказательство. Возможно будет потом. □

Пример 11.1. *Пусть* $\{0,1\}$ *- несвязное двоеточие. Рассмотрим* $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots$.

В топологии Тихонова это гомеоморфно Канторову множеству. Можно задать следующим образом

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x_k}{3^k}$$

Задача 11.1. *Доказать, что это гомеоморфзим в Тихоновской топологии.*

В топологии произвеедения получится $\tau = 2^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$.

Пример 11.2. *Гильбертов куб(кирпич) = пространство* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *с тихоновской топологией. Он компактен по теореме Тихонова.*

Гильбертов куб гомеоморфен следующему простврнаству

$$[0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \ldots$$

А это ряды, причем $x_n \leq \frac{1}{n}$*. Причем* $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty$.

11.2 Фактор-топология

Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Пусть на X определено отношение эквивалентности . И тогда $X/$ - классы эквивалентности. Если x лежит в X, то $[x]$ - его класс эквивалентности в $X/$. Определим топологию τ на $X/$ по следуюущему правилу:

$$U \in \tau \ \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \tau_X$$

Пример 11.3. *Пусть* $X = \mathbb{R}^1$, $x \ y = x - y \in 2\pi Z$.
Тогда $R^1/ \ \to S^1$
Аналогично $T^2 = \mathbb{R}^2/$

Пример 11.4. $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, *если* $x \ y = y - x \in \mathbb{Q}$

Задача 11.2. *Доказать, что пространство* $X/$ *не хаусдорфовою.*

Как понять, что $f : X/ \ \to Y$ непрерывно?

$$\widetilde{f}(x) = f(\pi(x))$$

Теорема 11.2. f *непрерывно тогда и только тогда, когда* $\widetilde{f}$ *- непрерывна*

Доказательство. $(\Leftarrow)$: Пусть $\widetilde{f}$ - непрерывна, тогда $\widetilde{f}^{-1}(U)$ - открыто в X. Из коммутативности диаграммы(формулы выше), следует, что $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ открыто в X. Необходимо доказать, что $V = f^{-1}(U)$ открыто в Y, оно открыто в силу определения фактор топологии.
$(\Rightarrow)$: композиция непрерывных. □

11.3 Склейка пространств

Рассматриваем $X \bigsqcup Y$. $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Определение 11.2. *Букет:* $X \bigsqcup Y / x_0 \ y_0$
Циллиндр: $X \times I$, *где* I *- отрезок.*
Конус: $Cone(X)$ *- стягиваем основание конуса.*
Надстройкка: ???

11.4 Одноточечная компактификация

Определение 11.3. *Компактификация пространства* X = *вложение* i X *в* CX, *где* CX *- компакт, и топология* X *индуцирована вложением* i.

Определение 11.4 (отдноточечтная компактификация Александрова, введена в 1924 году)**.** *Пусть* $CX = X \bigsqcup N$, *где* N *- точка, со следующей топологией.*

$$\tau_{CX} = \begin{cases} U \subset X - \textit{открыто} \\ W = V \bigsqcup N, V \subset X, V = X \setminus K, K - \textit{замкнуто компактно} \end{cases}$$

Следующее утверждение не дописано.

Теорема 11.3. CX *с определенной топологией явялется компактным пространством.*

Доказательство. Рассмотрим K - компакт. Пусть $\widetilde{U}_\alpha = \left\{U_{\tilde{\alpha}}, W_{\tilde{\beta}}\right\}$ - покрытие CX, в это покрытие точно входит одно $W_{\beta_0} = V_{\beta_0} \bigsqcup N$. $V_{\beta_0} = X \setminus K_{\beta_0}$ - дополнение к компакту.
□

12 Лекция 12

13 Лекция 13

13.1 Фундаментальная группа

Пусть X - топологическое пространство, выберем в нем две точки x_0, x_1. Рассмотрим множество путей из x_0 в x_1.

Определение 13.1. *Пусть - непрерывное отображение* $\gamma : [0,1] \to X$.

Определение 13.2 (гомотопия путей - связная гомотопия)**.** *Гомотопия, сохраняющее точки на граница отрезка, для отображений -* $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X, \gamma_i(0) = x_0, \gamma_i(1) = x_1$.

Определение 13.3. *Пространство путей из* x_0 *в* $x_1 = \{\gamma : [0,1] \to X : \ \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$. *Обозначается* $\Omega(x_0, x_1)$.

Замечание 13.1. *Отношение гомотопности - отношение эквивалентности.*

Определение 13.4. $\pi^x(x_0, x_1) = {}^{\Omega(x_0,x_1)}\!/\!_\sim$ *- множество гомотопических классов путей*

Умножение путей. Можем умножать пути, у которых начало первого и нонец второго совпадают, т.е $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, где γ_1 - путь от x_0 до x_1, γ_2 - путь от x_1 до x_2.

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases} \tag{3}$$

Видно, что операция не ассоциативна, но $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3) \sim (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$. Докажем это.

Доказательство. Построим гомотопию.

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{4}{s+1}t) & 0 \le t < t_1 = \frac{s+1}{4} \\ \gamma_2(4t-4t_1) & t_1 \le t < t_2 = \frac{s+2}{4} \\ \gamma_3(???) & t_2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

□

Таким образом умножение путей ассоциативно с точностью до гомотопии.

Определение 13.5. *Петля с фиксированный началом = замкнутый путь, т.е.* $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$.

Определение 13.6. *Рассмотрим* ${}^{\Omega(x_0,x_0)}\!/\!_\sim$ *с операцией умножения путей. Это фундаментальная группа, обозначается* $\pi_1(X, x_0)$

Замечание 13.2. *Умножение классов эквивалентности* $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$.

Теорема 13.1. *Это действительно группа.*

Доказательство. Проверим корректность. Пусть $\gamma_i, \gamma_i' \in [\gamma_i]$, необходимо доказать, что $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1'][\gamma_2']$ - очевидно.
Ассоциативность уже доказана.
Существование нейтрального элемента $e = [\gamma : [0,1] \to x_0]$
Обратный элемент $[\gamma]^{-1} = [\gamma(1-t)]$ □

Зависимость π_1 от начальной точки. Выберем две различные точки в пространстве X - x_0 и x_1. И между этими точками существует путь $\tilde{\gamma}$.

Петле(классу гомотопической эквивалентности) из $[\gamma] \in {}^{\Omega(x_0)}\!/\!_\sim$ сопоставляем путь $[\tilde{\gamma}\gamma\tilde{\gamma}^{-1}]$, т.е. мы задали отображнение из $\pi_1(X, x_1)$ в $\pi_1(X, x_2)$, обозначим его $[\gamma]^*$.

Утверждение 13.2. $[\gamma]^*$ *изоморфизм групп*

Доказательство. Очевидно. □

Таким образом, если X - линейно связно, то фундаментальная группа не зависит от выбора точки.

Определение 13.7. *Если фундаментальная группа тривиально, то пространство называется односвязным.*

14 Лекция 14

Замечание 14.1. *Даты досрочного экзамена: 16, 17. email: dmitry.millionschikov@math.msu.ru*

Определение 14.1. *Пространство X называется односвязным, если любые два пути с общими началамии концом гомотопны(гомотопия связанная).*

Теорема 14.1. *Если X линейное связное, то X односвязно тогда и только тогда, когда* $\pi_1(x) = \{0\}$

Доказательство. ($\Rightarrow$:) Пусть $gamma_1$ - петля с началом в точек x_0. $\gamma_0 = \{\gamma_1(t) = x_0 \forall t\}$. В силу односвязности $\gamma_1 \sim \gamma_0 = const$, следовательно тривиальная $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$;
($\Leftarrow$:) Петля $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ с началом в точке x_0 и $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, следовательно $\gamma_0\gamma^P - 1_1 \sim const(x_0) = \{0\}$

$$\gamma_1 \sim (\gamma_0\gamma_1^{-1})\gamma_1 \sim \gamma_0(\gamma_1^{-1}\gamma_1) \sim \gamma_0$$

□

14.1 Накрытие

Пусть $p : \tilde{X} \to X$ - непрерывное отображение между двумя линейно связными пространствами.

Определение 14.2. *p - накрытие, если для $x \in X$ существует окрестность $U = U(x)$ и $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in D \subset \mathbb{N}} V_i$, где $p : V_i \to U$ - сужжение p на V_i - гомеоморфизм.*

Пример 14.1. *$\tilde{X} = X \times \mathbb{N} \to X$ - тривиальный пример.*

Пример 14.2. *$\tilde{X} = \mathbb{R} \to X = S^q \subset \mathbb{R}^2$, где $p(t) = (\cos t, \sin t)$, т.е. $t \mapsto e^{2\pi i t}$*

Пример 14.3. *Пусть $\tilde{X}, X$ - две окружности. $p(z) = z^n$*

Пример 14.4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $p = (p_{окр}, p_{окр})$

Пример 14.5. *$\tilde{X} = S^2 \to \mathbb{R}P^2$ - отождествялем противоположные относительно центра точки.*

Лемма 14.2 (Лебега)**.** *Пусть X - компактное метрическое пространство с метрикой ρ, $\{U_\alpha\}$ - покрытие, тогда существует $r > 0$ (число Лебега покрытия) такое, что любой шар $O_r(x) \subset U_{\tilde{\alpha}}$ для некоторого $\tilde{\alpha}$*

Доказательство. Т.к. есть покрытие у пространства X, то у каждой точки $x \in X$ существует r_x такой, что $O_{r_x} \subset U_i$ для некоторого i.

Утверждение 14.3. *$\{O_{\frac{1}{2}r_x}(x)\}$ - покрытие X.*

Т.к. $\{O_{\frac{1}{2}r_x}(x)\}$ - компакт, то будет существовать конечное подпокрытие.
Определим Лебегово число $\tilde{r} = \min_i \frac{1}{2} r_{x_i}$
Сдвинем шар так, чтобы выполнялось $y \in O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i) \Leftrightarrow x_i \in O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(y)$

$$O_r(y) \subset O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(y) \subset O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i) \subset U_{\tilde{\alpha}}$$

□

Теорема 14.4 (Следствие)**.** *$f : X \to Y$, X - компакт в метрическом пространстве, Y. Если $\{U_\alpha\}$ - покрытие Y существует $r > 0$ такое, что любой шар $O_r(x) \subset U_\alpha$.*

Теорема 14.5 (о накрывающем пути)**.** *$p : \tilde{X} \to X$ - накрытие. $\gamma : I \to X$ - непрерывный путь, $\gamma(0) = x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Тогда существует единственное $\tilde{\gamma}$ такое, что $p\tilde{\gamma} = \gamma$*

Доказательство. Будет потом.
Докажем единственность. □

Утверждение 14.6. *Накрывающий путь единств.*

Утверждение 14.7. *$f_0, f_1 : Y \to \tilde{X}$, Y - связное, $p : \tilde{X} \to X$ - накрытие, $pf_0 = pf_1$. Тогда $Y' = \{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$. Тогда из связности Y следует, что $Y' = Y$ или $Y' = \emptyset$.*

Задача 14.1. *Доказать утверждения выше.*

Теорема 14.8 (о накрывающей гомотопии)**.**

15 Лекция 15

Все пространства хаусдорфовы.

Определение 15.1. *Функция $k(x) = 0 \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ - число $p^{-1}(x)$, число прообразов. - число листов накрытия.*

Задача 15.1. *Из определения k следует, что это локально постоянная функция.*

Задача 15.2. *X - связно, $k(x)$, $X \to D$ - локально постоянно, тогда $k(x) = const$.*

Определение 15.2 (топологическое действие)**.** *Дополнительное требуем, что бы при фиксированном элементы группы отображения было гомеоморфизмом.*

Определение 15.3. *Вполне разрываное действие - действиве такое, что для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, такая что, при действиее $gU \cup g'U = \emptyset$ при $g \neq g'$.*

Теорема 15.1. *Пусть $\tilde{X}$ - связное, локальное линейное свзяное(из этого следуте, что оно линейное связное), $\tilde{X}$ - односвязное. На $\tilde{X}$ действует свободное и вполне разрывано действует дискретное не более, чем счетная группа Γ.*
Тогда $p : \tilde{X} \to {}^{\tilde{X}}\!/_{\Gamma}$ - накрытие и $\Gamma \cong \pi_1({}^{\tilde{X}}\!/_{\Gamma})$

Доказательство. $p : \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma$ - факторпространство или пространство орбит. Пусть $U \subset \tilde{U}$. Рассмотрим $p(U)$ - почему открыто?

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in \Gamma} gU$$

- оно открыто, т.о. отображение p - открытое.

Надо доказать, что ограничение p на произвольный лист gU - это $gU \to p(U)$ - биекция. Нужно вязть u таким образом, что $gU \cap g'U = \emptyset$. Пусть $y_1, y_2 \in gU$ и $p(gy_1) = p(gy_2)$. Второе $\Leftrightarrow gy_1 \sim gy_2 \Leftrightarrow$ существует $g' \in \Gamma gy_1 = g'(gy_2) = (g'g)y_2$, тогда $gU = g'gU \neq \emptyset$ - противоречие, следовательно $g' = e \in \Gamma$.

Остается доказать, что обратное тоже непрерывно. - самостоятельно.

Докажем изоморфизм групп. Построи отображение $\psi : \Gamma \to \pi_1(\tilde{X}/\Gamma)$

$$g \in \Gamma \longmapsto [\gamma_g????????]$$

Остается проверить, что это гомоморфизм. □

Определение 15.4. *Накрытие называется называется универсальным, если $\tilde{X}$ - односвязно.*

Действие непрерывных отображений на π_1. f - непрерывное отображение - индуцирует $f_* : \pi(X, x_0) \to \pi_1(y, f(x_0))$, $g_* : \pi(Y, f(x_)) \to \pi_1(Z, z_0)$, тогда $(gf)_* = g_* f_*$

Задача 15.3. $z : X \to A$ *- ретракция,* i *- вложение* A *в* X*, тогда* $ri = \mathrm{id}_A$*,* $r^* i^* = \mathrm{id}_{*A}$

Задача 15.4. $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$*, тогда они гомотопически эквивалентны.*

Теорема 15.2 (Брауэр)**.** $f : D^2 \to D^2$ *- непрерывное отображение,то существует неподвижная точка.*

Доказательство. Очевидно. □