Лекции по введению в топлогию

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс. Осенний семестр 2024,г.
10 сентября 2024 г.

*tg: @gallehus

Содержание

1 Лекция 1

Повторение определений из мат. анализа: окрестность точки, открытое множество, замкнутое множество, непрерывная функция, компакт, связность, метрическое пространство. Так же было отмечено, что топлогию можно задать через систему окрестностей.

Замечание 1.1. *$\rho(x,y) = |x-y|$ - метрика, при $x, y \in \mathbb{R}^1$.*

Определение 1.2. *Пара (X, ρ) называется метрическим пространство, если $\rho : X \times X \leftarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ удовлетворяет аксиомам метрики.*

Теорема 1.3. *$\big(\mathbb{R}^1, \rho = |x-y|\big)$ является метрическим пространством.*

Определение 1.4. *Топологическое пространство (X, τ), где τ - совокупность подмножеств - тополгия, удовлетворяющие следуоущим свойствам*

1. $\emptyset \in \tau$
2. $X \in \tau$
3. $\bigcap_{i=1}^{k} U_k \in \tau$
4. $\bigcup U_k \in \tau$

Пример 1.5.

1. *антидискретная(тривиальная) топология $\tau = \{\emptyset, X\}$*
2. *дискретная топология $\tau = 2^X$*
3. *$X = \{1, 2\}$, способы задания топологии: $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$*

Определение 1.6. *Пусть X - метрическое пространство. Открытый шар $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$*

Определение 1.7. *Пусть X - метрическое пространство. $U \subset X$ - открыто, если $\forall x \in U$ $\exists$ окрестность точки(=открытый шар, содержащий x) x, содержащаяся в U.*

Определение 1.8. *В X произвольном топологическом пространстве $U \subset X$ является замкнутым, если дополнение к нему открыто.*

Пример 1.9. *Топология Зарисского определяется в $\mathbb{C}^1$, можно обобщить до $\mathbb{C}^n$. - что-то из алгебраическое геомерии.*

Замкнутое множество - это конечное множество точек.

Задача 1.10. *Доказать, что это топология.*

Определение 1.11. *База топологии $\beta \subset \tau \subset 2^X$, если любое открытое множество $U \in \tau$ можно выразить в виде объединения элементов из базы β, т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где B_α - элемент базы.*

База топологии необходима для уменьшения количестав задаваемых открытых множеств для определения топологии.

Лемма 1.12 (Достаточное условие на базу топологии)**.** *Пусть $\beta \subset 2^x$ - набор подмножеств. Если выполняются следующие условия*

1. *$\forall x \in X \exists B_x \in \beta$ такой, что $x \in B_x$.*
2. *$\forall B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$*

то β является базой топологии.

Доказательство. Вводим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из опредления топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из опредедления топологии. В качество $\emptyset$ можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X, т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединение элементов базы задают топологию на X. $\square$

Задача 1.13. *Повторить доказательство для базы метрического пространства.*

Можно еще уменьшить количество задаваемых элементов.

Определение 1.14. *π называется предбазов топологии, если $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$ и каждое U представляется в виде объединения конечного пересечения элементов предбазы, т.е. $forall U \in \tau$ выполняется*

$$U = \bigcup \bigcap_{i=1}^{k} P_i, \text{ где } P_i \text{- элемент предбазы.}$$

Замечание 1.15. *Любое множество задает предбазу.*

Следующее утверждение не дописано.

Пример 1.16. *Пусть $X = 1, 2, 3, 4, 5$.*
$\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ *- предбаза.*
$\beta = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{$***что-то***$\}, \emptyset\}$
$\tau = \{\dots, \dots\}$
Причем $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$

Определение 1.17. *$f : X \to Y$ - непрерывная функция, если для каждого открытого $U \subset Y$ выполняется $f^{-1}(U)$ - открыто в X.*