

ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс. Осенний семестр 2024,г.
8 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 1

3

1 Лекция 1

Повторение определений из мат. анализа: окрестность точки, открытое множество, замкнутое множество, непрерывная функция, компакт, связность, метрическое пространство. Так же было отмечено, что топологию можно задать через систему окрестностей.

Замечание 1.1. $\rho(x, y) = |x - y|$ - метрика, при $x, y \in \mathbb{R}^1$.

Определение 1.2. Пара (X, ρ) называется метрическим пространством, если $\rho : X \times X \leftarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ удовлетворяет аксиомам метрики.

Теорема 1.3. $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$ является метрическим пространством.

Определение 1.4. Топологическое пространство (X, τ) , где τ - совокупность подмножеств - топология, удовлетворяющие следующим свойствам

1. $\emptyset \in \tau$
2. $X \in \tau$
3. $\bigcap_{i=1}^k U_k \in \tau$
4. $\bigcup U_k \in \tau$

Пример 1.5. 1. антидискретная(тривиальная) топология $\tau = \{\emptyset, X\}$

2. дискретная топология $\tau = 2^X$

3. $X = \{1, 2\}$, способы задания топологии: $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$

Определение 1.6. Пусть X - метрическое пространство. Открытый шар $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$

Определение 1.7. Пусть X - метрическое пространство. $U \subset X$ - открыто, если $\forall x \in U \exists$ окрестность точки (=открытый шар, содержащий x) x , содержащаяся в U .

Определение 1.8. В X произвольном топологическом пространстве $U \subset X$ является замкнутым, если дополнение к нему открыто.

Пример 1.9. Топология Зарисского определяется в \mathbb{C}^1 , можно обобщить до \mathbb{C}^n . - что-то из алгебраического геометрии.

Замкнутое множество - это конечное множество точек.

Задача 1.10. Доказать, что это топология.

Определение 1.11. База топологии $\beta \subset \tau \subset 2^X$ - любое открытое подмножество $U \in \tau$ можно выразить в виде объединения элементов из базы β , т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где B_α является элементом базы.

База топологии необходима для уменьшения количества задаваемых открытых множеств для определения топологии.

Следующее утверждение не дописано.

Лемма 1.12 (Достаточное условие на базу топологии). $\beta \subset 2^X$ - набор подмножеств. Если выполняются следующие условия

1. $\forall x \in X \exists B_x \in \beta$ такое, что $x \in B_x$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta : B_3 \subset B_1 \cap B_2)$

то β является базой топологии.

Доказательство. Вводим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^\alpha$. Проверим все свойства из определения топологии.

Добавим в топологию \emptyset, X для выполнения первый 2-ух свойств. □

Задача 1.13. Повторить доказательство для базы метрического пространства.

Можно еще уменьшить количество задаваемых элементов.

Определение 1.14. π называется предбазой топологии, если $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$ и каждое U представляется в виде объединения конечного пересечения элементов = множество всех подмножеств предбазы.

Замечание 1.15. Любое множество задает предбазу.

Следующее утверждение не дописано.

Пример 1.16. Пусть $X = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ - предбаза.

$\beta = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{\text{что-то}\}, \emptyset\}$

$\tau = \{\dots, \dots\}$

Причем $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$

Определение 1.17. $f : X \rightarrow Y$ - непрерывная функция, если для каждого открытого $U \subset Y$ выполняется $f^{-1}(U)$ - открыто в X .