

ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПОЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
19 октября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
2	Лекция 2	4
3	Лекция 3	6
4	Лекция 4	7
5	Лекция 5	8
6	Лекция 6	9

1 Лекция 1

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

Определение 1.1. Метрическое пространство — это пара (X, ρ) , где X — множество, а $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество X , если функция ρ очевидно подразумевается.

Утверждение 1.2. $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$ является метрическим пространством.

Определение 1.3. Топологическое пространство — это пара (X, \mathcal{T}) , где X — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X , удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$, где $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \dots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, где $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$ (A — произвольное индексирующее множество);

Множество \mathcal{T} называется топологией на X , а элементы \mathcal{T} — открытыми подмножествами X .

Пример 1.4. 1. Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

2. Дискретная топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = 2^X$.

3. На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство X называется слипшимся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство X называется простым двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Пространство X с топологиями \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 называется связным двоеточием.

Определение 1.5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар в X с центром x_0 и радиусом r — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.

Определение 1.6. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки x), содержащий x и лежащий в U .

Замечание 1.7. Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами).

Определение 1.8. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \setminus U$ открыто.

Задача 1.9. Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.

Пример 1.10. Топология Зарисского: Рассмотрим множество \mathbb{C}^1 и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \dots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным). Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество X : будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.

Задача 1.11. Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.

Определение 1.12. База \mathfrak{B} топологии \mathcal{T} на X — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы \mathfrak{B} , т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Лемма 1.13 (Достаточное условие на базу топологии). Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X . Тогда если выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in X \quad \exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x$,

$$2. \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} : (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2),$$

то \mathfrak{B} является базой некоторой топологии.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве \emptyset можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X , т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединения элементов базы задают топологию на X . □

Задача 1.14. Повторить доказательство для базы метрического пространства.

Определение 1.15. Предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathfrak{B} : U$ есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \mathfrak{B} : U = \bigcap_{i=1}^k P_i$, где $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.

Иначе говоря: предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathcal{T} : U$ есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^m P_{ij}, \text{ где } P_{ij} \in \Pi, k, m \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Замечание 1.16. Любое множество задает предбазу некоторой топологии.

Пример 1.17. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ — предбаза.

Тогда $\mathfrak{B} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi}\}$ — база,

$\mathcal{T} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}}\}$ — топология на X .

2 Лекция 2

Литература:

1. В.В. Федорчук - Введение в топологию

2. 4 автора - Введение в топологию

Определение 2.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Из метрического можно построить топологические пространство (X, τ) . Такие пространства называются метризуемыми.

Замечание 2.2 (Критерий метризуемости. Накаты Ю.М.Смирнова. 1950-1951).

Определение 2.3. $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Теорема 2.4. Шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии.

Доказательство. 1. $\forall x \in X \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$

2. рассмотрим $(O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2))$ найдем окрестность точки x , лежащий в этом пересечении, чтобы вся окрестность тоже лежала в этом пересечении $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1, \rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x_1, x), \varepsilon_2 - \rho(x_2, x)\}$

Проверим условие $O_\varepsilon \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$

Проверим $y \in O_\varepsilon(x_1) \Rightarrow \rho(y, x_1) < \varepsilon_1$.

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < \varepsilon - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \varepsilon$$

Аналогично для второго шара.

Т.о. по достаточному условию на базу открытые шары будет образовывать базу. □

Простой способ сравнения топологий. Пусть X - множество. τ_1, τ_2 - топологии, определенные на X . ЧУМ - частично упорядоченное множество.

Определение 2.5. $\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$

Обычными словами: любое открытое множество в τ_1 будет открытым в τ_2 .

Пример 2.6. Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии.

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\} \subset \tau_2 = 2^X$$

Можно считать, что это два полюса сравнения, где слева - слабейшая, справа - сильнейшая.

Любую топологию можно сравнить с этими двумя. Но точно существуют не сравнимые.

Задача 2.7. Метризуемые ли тривиальные топологии (= антидискретная и дискретная)?

1. можно ввести дискретную метрику $\rho_D(x, y) = (1, x = y; 0, x \neq y)$. Получим дискретную топологию.
2. неметризуемо.

Определение 2.8 (индуцированная топология подпространства). Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $Y \subset X$. $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

Доказательство. Очевидно, что выполняются аксиомы топологии. □

Пример 2.9. $\mathbb{R}^2 = X$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Определение 2.10. U - окрестность точки $x \in X = U \in \tau$ такое, что $x \in U$.

Замечание 2.11 (Есть тут глубокий смысл?).

$$\bigcap_{i=1}^n \text{окрестность точки } x = \text{окрестность точки } x$$

$$\bigcup_{\alpha} \text{окрестность } x = \text{окрестность}$$

Утверждение 2.12. $A \subset X$ - открыто \Leftrightarrow для каждой точки $x \in A$ существует ее окрестность, лежащая в A .

Доказательство. (\Leftarrow): Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x) \in \tau$. Очевидно, что $A \subset C$. А т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subset A$, то также выполняется включение в другую сторону.

(\Rightarrow): раз A - открыто, то A является окрестностью. □

Определение 2.13. Пусть $x \in X$, $\{x\} \in \tau$, то x называется изолированной точкой.

Замечание 2.14. Если топология дискретная, то все точки изолированные.

Определение 2.15. Пусть $A \subset X$, $x \in X$. x - точка прикосновения множества A , если для любой окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение 2.16. $x \in A$ - внутренняя точка множества A , если существует $O(x)$: $O(x) \subset A$.

Определение 2.17 (A1). Замыкание множества A - множество всех точек прикосновения A . Обозначается \bar{A} .

Определение 2.18 (B1). Внутренность - множество всех внутренних точек. Обозначается $Int(A)$.

Задача 2.19. $Int(A) \subset A \subset \bar{A}$

Определение 2.20 (A2). $\bar{A} = \bigcap_{\text{по всем возможным } F} F = F : 1. F - \text{замкнуто}, 2. A \subset F$ \bar{A} = наименьшее замкнутое множество, содержащее A .

Определение 2.21 (B2). $Int(A) = \bigcup_{\text{по всем } U} U : U \in \tau, U \subset A$ $Int(A)$ = наибольшее открытое в A .

todo:

Определение 2.22. $x \in X$ - граничная точка A , если x - точка прикосновения и $x \notin Int(A)$.

Граница - множество граничных точек. Обозначается $Bd(A)$.

Замечание 2.23.

$$Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$$

Теорема 2.24. Это определения эквивалентны.

Доказательство. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.

Пусть $\text{Int}(A)$ - множество точек в смысле определения B1. Докажем B2. Докажем проверкой включений.

(\subseteq): если $x \in A$ - внутренняя точка, то существует $O(x) \subset A$, тогда $x \in \text{Int}(A)$ в смысле другого определения.

(\supseteq): $x \in \text{Int}(A)$ в смысле определения B2, тогда x принадлежит какому-то одному открытому $V \subset A$, тогда можем взять V за окрестность точки x . \square

Определение 2.25 (понятие непрерывного отображения). Пусть $f : X \rightarrow Y$. f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для каждой $O(f(x_0))$ существует такая окрестность $O(x_0)$, что $f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$.

f - непрерывное отображение топологических пространств, если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.26. Следующие условия эквивалентны:

1. f - непрерывно
2. прообраз любого открытого множества является открытым, т.е. $U \in \tau_X \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_Y$
3. прообраз любого замкнутого замкнут
4. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ - на лекции было дано так, но это утверждение неверно

Доказательство. Докажем только $(1) \Leftrightarrow (2)$.

(\Rightarrow): пусть f - непрерывно. Нужно доказать, что $f^{-1}(V)$ - открыто, можем воспользоваться утверждением при критерий открытости.

(\Leftarrow): пусть $x \in X$, V - окрестность точки $f(x_0)$, тогда по предположению $f^{-1}(V)$ - открыто, следовательно существует $O(x) \subset f^{-1}(V)$ \square

Задача 2.27. Доказать остальные эквивалентности в утверждении выше.

3 Лекция 3

Повторение определения непрерывности и про эквивалентные утверждения из прошлой лекции.

Замечание 3.1 (философское). Проверять непрерывность $f : X \rightarrow Y$ удобно проверять на уровне базы или предбазы. Пусть $\beta \subset 2^Y$ - база топологии Y . Прообраз базы (предбазы) открыт: $f^{-1}(\beta) \subset \tau_X$

Пример 3.2. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные функции одной переменной из математического анализа

2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$, $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ - общее название таких отображений (накрытие)

3. тривиальный пример - постоянное отображение. $f(x) = y_0$, где $f : X \rightarrow Y$ и $y_0 \in Y$.

4. композиция непрерывных - непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, тогда $g(f)$ - непрерывно.

5. $Z \subset X \xrightarrow{f} Y$, где на Z индуцирована топология X . $i : Z \rightarrow X$, $i(x) = x$, тогда i непрерывно в индуцированной топологии.

Непрерывность в метрических пространствах.

Определение 3.3 (По Коши). f непрерывно в точке x_0 , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$

Определение 3.4 (По Гейне). ...

Задача 3.5. Доказать эквивалентность определений.

Теорема 3.6 (Кривая Пеано). Существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

Докажем эту теорему потом.

Определение 3.7. $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, если f - биекция и f, f^{-1} - непрерывны.

Если существует гомеоморфизм между X и Y , то эти пространства гомеоморфны.

Замечание 3.8. Гомеоморфизм задает отношение эквивалентности.

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, нужно найти свойства пространств, которые должны сохраняться, но у этих пространств они отличаются.

Пример 3.9. $f(x) = tg(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ - гомеоморфизм.

Связность и линейная связность.

Определение 3.10. Пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

X - связно, если нельзя так разбить.

Пример 3.11. 1. Рассмотрим X с дискретной топологией. X - всегда несвязно, если содержит более двух точек.

2. Рассмотрим X с антидискретной топологией. X - всегда связно.

3.

Теорема 3.12. Отрезок $I = [0, 1]$ с индуцированной топологией - связен.

Доказательство. От противного. Используя теорию действительных чисел. □

Утверждение 3.13. Непрерывный образ связного множества - связен, т.е. если X - связен, $f : X \rightarrow Y$ следовательно $f(X)$ - связно

Доказательство. От противного. Пусть выполняется $f(X) = A \cup B$, тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ - противоречие. □

Определение 3.14. Пусть в топологическом пространстве, соединяющий $x_0, y_0 \in X$, это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$.

Замечание 3.15. $\gamma([0, 1])$ - связно.

Определение 3.16. Пространство X является линейно связным, если для каждой двух точек, существует путь, соединяющий их.

Теорема 3.17. Пусть X линейно связно, тогда X - связно.

Доказательство. От противного. Пусть $X = A \cup B$. Тогда $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ можно связать отображением γ , тогда получим, что $\gamma([0, 1]) = \gamma([0, 1]) \cap A \cup \gamma([0, 1]) \cap B$ - противоречие. □

Замечание 3.18. Обратное неверно. Пример - график $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ с добавлением отрезка $[-1, 1]$.

4 Лекция 4

Компактность

Пусть X - топологическое пространство.

Определение 4.1. X - компактно, если из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Раньше это называлось бикомпактностью, а под ω -компакте требовалось счетность изначального покрытия.

Пример 4.2. $[a, b]$ - компактен, для доказательства нужно использовать факт существования точной верхней грани у ограниченности подмножества \mathbb{R}^1 .

Доказательство. □

Лемма 4.3 (О вложенных отрезках). Пусть есть система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, где $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Тогда их пересечение не пусто. Дополнительно, если $|b_n - a_n| \rightarrow 0$, тогда их пересечение состоит из одной точки.

Определение 4.4. Центрированная система множеств $\{X_\alpha \subset X\}$, если пересечение любого конечного числа множеств X_α не пусто.

Лемма 4.5 (Обобщение леммы для топологических пространств). Пусть X - топологическое пространство, тогда существует последовательность замкнутых не пустых подмножеств $X \supset F_1 \supset F_2 \dots$ и $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

Доказательство: игра в понятия (определения). Мы знаем, что

$$F_i - \text{замкнуто} \Leftrightarrow U_i = X \setminus F_i - \text{открыто}$$

□

Лемма выше является следствием леммы ниже.

Лемма 4.6. Топологическое пространство компактно $X \Leftrightarrow$ любая центрируемая система замкнутых подмножеств имеет непустые пересечение

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть $\bigcup_i F_i = \emptyset$, тогда что можно сказать про $\{U_i\}$? Рассмотрим $\bigcup_i (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_i F_i$

$$\bigcup_i U_i \supset X \Rightarrow \text{существует конечное подпокрытие в силу компактности } X$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \supset X$$

Следовательно $\{F_i\}$ удовлетворяют условию. □

Задача 4.7. Доказать утверждение в обратную сторону.

Определение 4.8. X называется локально компактным, если $\forall x \in X$ существует $O(x)$, для которой существует $V(x)$ такая, что 1) $Cl(V(x)) \subset O(x)$; 2) $Cl(V(x))$ - компактно.

Определение 4.9. Семейство подмножеств $X_\alpha \subset X$ называется локально конечным, если существует $O(x)$, которая пересекается с конечным числом множеств из системы $\{X_\alpha\}$.

Определение 4.10. Топологическое пространство X называется паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие.

Пример 4.11. \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^n является паракомпактным

Лемма 4.12 (наследование компактности). Пусть $X \supset A$, если A - замкнуто, то A сохраняет следующие свойства топологического пространства X

1. компактно
2. локально компактно
3. паракомпактно

Задача 4.13. Доказать лемму выше.

Утверждение 4.14. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, если X компактно, тогда $f(X) \subset Y$ тоже компактно.

Доказательство. Очевидно. □

Задача 4.15. Рассмотреть похожие утверждения для локальной компактности и паракомпактности.

Определение 4.16 (Аксиомы отделимости).

1. T_0 (аксиома Колмогорова): X удовлетворяет T_0 тогда и только тогда, когда выполняется следующее или существует $O(x)$ такая, что $y \notin O(x)$, или существует $O(y)$ такая, что $x \notin O(y)$ - для любых двух различных элементов $x, y \in X$.
2. T_1 : для любых различных точек найдутся окрестности, удовлетворяющие следующим свойствам $x \notin O(y)$ и $y \notin O(x)$.
3. T_2 (аксиомы Хаусдорфа): для любых различных точек существуют непересекающиеся окрестности.
4. T_3 : для любой точки x из X и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего x , существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$.
5. T_4 : пусть F_1, F_2 - замкнутые множества, причем $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Существуют $O(F_1), O(F_2) : O(F_1) \cap O(F_2) = \emptyset$.

Задача 4.17. Пространство, удовлетворяющее T_1 , но не удовлетворяющее T_0 .

5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику T_1 -пространства:

Утверждение 5.1. X является T_1 -пространством тогда и только тогда, когда для любых x множество $\{x\}$ замкнуто.

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть T_1 . Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Rightarrow y$ не является точкой прикосновения множества X . Значит $X \setminus \{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом x единственная предельная (прикосновенная) точка множества X .

(\Leftarrow) : Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X \setminus \{x\}$, $x \in Y \setminus \{y\}$ □

Утверждение 5.2. Вообще говоря из T_3 не следует T_0 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Возьмем точку x , тогда замкнутое подмножество $F \subset X$, не содержащее x , только пустое; $x \in X$, $\emptyset \in \tau$ \square

Определение 5.3. Пространство X регулярно, если оно T_3 и T_0

Утверждение 5.4. T_3 и $T_1 \Rightarrow T_2$

Доказательство. Возьмем x и y , такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x): y \notin O(x)$. Рассмотрим $X \setminus O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме T_3 существуют окрестности $O(x)$ и $O(F): O(x) \cap O(F) = \emptyset$. Найдем окрестность точки y . Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. \square

Пример 5.5. Если X метрическое пространство, то X хаусдорфово.

Рассмотрим полезную характеристику пространства T_2 .

Утверждение 5.6. X пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \bigcap \overline{O}(x) = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим x .

Доказательство. $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O}(x)$, пересечение по всем окрестностям точки x . Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O}(x)$, где пересечение по всем окрестностям точки x . Тогда $\forall \overline{O}(x) y \in \overline{O}(x) \Leftrightarrow \forall V(y) V(y) \cap O(x) \neq \emptyset$. Так как X пространство T_2 , то существует $U(x)$ и $U(y): U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Противоречие с тем, что y принадлежит хотя бы одному $\overline{O}(x)$. \square

\Leftarrow упражнение.

Утверждение 5.7. Из T_4 следует T_0 .

Доказательство. Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\emptyset, X\}$. Можем взять $F_1 = \emptyset, F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \emptyset, F_2 = \emptyset$. \square

Утверждение 5.8. Из T_4 не следует T_3 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}, \tau = \{\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}, \emptyset, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является T_4 . Возьмем замкнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку b , причем $b \notin F$. Единственной окрестностью F является вся \mathbb{R} , так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее F . Тогда любая окрестность точки b будет нетривиально пересекаться с \mathbb{R} . Значит X не является T_3 . \square

Утверждение 5.9. $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}, F = F_2$, применяем аксиому T_4 . \square

Определение 5.10. X – нормально, если оно $T_4 + T_1$.

Лемма 5.11. Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) F_1, F_2 – замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1, \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \emptyset$.

Доказательство. Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \emptyset$. Тогда $x \in \overline{F_2}$, но $\overline{F_2} = F_2 \Rightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

Теорема 5.12. Метрическое пространство нормально.

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома T_2 , из которой следует аксиома T_1 . Докажем T_4 . Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.

Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \emptyset$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с F_1 . \square

6 Лекция 6

На прошлой лекции было доказано теорема

Теорема 6.1. Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T_4 + T_1$.

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

Функциональная отделимость

Определение 6.2. $A \subset X$ - всюду плотно в X , если $\overline{A} = X$.

Теорема 6.3 (Лемма Урасона). Пусть X - нормальное пространство. A, B - два замкнутых непересекающихся подмножества X . Тогда существуют непрерывная функция $F : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$

Доказательство. Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств $\{U\}$, которые мы заиндексируем двоично-рациональными числами из $[0, 1]$.

1. $U_1 = X \subset B$
2. U_0 должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \overline{U_0}$ (**используем нормальность**) $\subset U_1$
3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям U_0 и U_1 .
4. $U_{\frac{1}{4}} : \overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1$
5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с q столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\overline{U_{\frac{k}{2^{n-1}}}} \subset U_q \subset \overline{U_q} \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Построили систему открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\overline{U_q} \subset U_r$. Теперь определим функцию F .

$$F(x) = \begin{cases} \inf \{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств A и B . Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где O_α - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0, a)$, $(b, 0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0, a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf \{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \tilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0, a)) = \bigcup_{\tilde{q} < a} U_{\tilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим F , заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup \{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup \{r : x \notin U_r\} = \sup \{r : x \notin \overline{U_r}\} = \sup \{r : x \in X \setminus \overline{U_r} - \text{это множество открыто}\}$ Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация: □

Пример 6.4 (Нормального, но не метризуемого пространства).

Взаимоотношение компактности и нормальности

Замечание 6.5 (характеризация хаусдорфова пространства). Пусть X - хаусдорфово \Leftrightarrow для любых $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \overline{O(x)}$

Доказательство. $(\Leftarrow) : y \notin \overline{O(x)} \Leftrightarrow y \in X \setminus \overline{O(x)}$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y) : O(y) \cap \overline{O(x)} = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \overline{O(x)} = \emptyset$.

$(\Rightarrow) :$ от противного □

Утверждение 6.6. Замкнутое подмножество компакта - компактно

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 6.7. В хаусдорфовом топологическом пространстве X компактное подмножество F является замкнутым.

Доказательство. Очевидно. □

Задача 6.8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$