

# ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПОЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.  
Автор конспекта: Ваня Коренев\*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.  
28 октября 2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Лекция 4</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>10</b>
6.1	Функциональная отделимость . . . . .	10
6.2	Взаимоотношение компактности и нормальности . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>11</b>
7.1	Разбиение единицы . . . . .	11

# 1 Лекция 1

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

**Определение 1.1.** Метрическое пространство — это пара  $(X, \rho)$ , где  $X$  — множество, а  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1.  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$ ;
3.  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
4.  $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Функция  $\rho$  называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество  $X$ , если функция  $\rho$  очевидно подразумевается.

**Утверждение 1.2.**  $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$  является метрическим пространством.

**Определение 1.3.** Топологическое пространство — это пара  $(X, \mathcal{T})$ , где  $X$  — множество, а  $\mathcal{T} \subseteq 2^X$  — набор подмножеств  $X$ , удовлетворяющий следующим аксиомам:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ;
2.  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ , где  $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \dots, n$ ;
3.  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ , где  $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$  ( $A$  — произвольное индексирующее множество);

Множество  $\mathcal{T}$  называется топологией на  $X$ , а элементы  $\mathcal{T}$  — открытыми подмножествами  $X$ .

**Пример 1.4.** 1. Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве  $X$ :  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .

2. Дискретная топология на любом множестве  $X$ :  $\mathcal{T} = 2^X$ .

3. На  $X = \{1, 2\}$ , можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство  $X$  называется слипшимся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство  $X$  называется простым двоеточием) и две другие:  $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$ . Пространство  $X$  с топологиями  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  называется связным двоеточием.

**Определение 1.5.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Открытый шар в  $X$  с центром  $x_0$  и радиусом  $r$  — это множество  $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$ . Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.

**Определение 1.6.** Пусть  $X$  — метрическое пространство. Подмножество  $U \subset X$  называется открытым, если  $\forall x \in U$  существует открытый шар (= открытая окрестность точки  $x$ ), содержащий  $x$  и лежащий в  $U$ .

**Замечание 1.7.** Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами).

**Определение 1.8.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Подмножество  $U \subseteq X$  называется замкнутым, если  $X \setminus U$  открыто.

**Задача 1.9.** Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.

**Пример 1.10.** Топология Зарисского: Рассмотрим множество  $\mathbb{C}^1$  и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек:  $\{z_1, \dots, z_n\}$  (пустой набор точек также считается конечным). Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество  $X$ : будем считать замкнутыми любые конечные подмножества  $U \subseteq X$ .

**Задача 1.11.** Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.

**Определение 1.12.** База  $\mathfrak{B}$  топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$  — это подмножество  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$  такое, что  $\forall U \in \mathcal{T}$  можно выразить в виде объединения элементов базы  $\mathfrak{B}$ , т.е.  $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ , где  $B_\alpha \in \mathfrak{B}$ .

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

**Лемма 1.13** (Достаточное условие на базу топологии). Пусть  $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$  — набор подмножеств  $X$ . Тогда если выполняются следующие условия:

1.  $\forall x \in X \quad \exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x$ ,

$$2. \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} : (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2),$$

то  $\mathfrak{B}$  является базой некоторой топологии.

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные  $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$ . Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве  $\emptyset$  можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве  $X$  - объединение всех элементов базы, оно будет равно  $X$ , т.к. для каждого  $x \in X$  существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что  $k = 2$ .

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут  $B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$  существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что  $U_1 \cap U_2$  можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединения элементов базы задают топологию на  $X$ . □

**Задача 1.14.** Повторить доказательство для базы метрического пространства.

**Определение 1.15.** Предбаза  $\Pi$  топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$  — это множество  $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ , где  $\mathfrak{B}$  — база  $\mathcal{T}$ , такое, что:  $\forall U \in \mathfrak{B} : U$  есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е.  $\forall U \in \mathfrak{B} : U = \bigcap_{i=1}^k P_i$ , где  $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$ .

Иначе говоря: предбаза  $\Pi$  топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$  — это множество  $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ , где  $\mathfrak{B}$  — база  $\mathcal{T}$ , такое, что:  $\forall U \in \mathcal{T} : U$  есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^m P_{ij}, \text{ где } P_{ij} \in \Pi, k, m \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

**Замечание 1.16.** Любое множество задает предбазу некоторой топологии.

**Пример 1.17.** Пусть  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Пусть  $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$  — предбаза.

Тогда  $\mathfrak{B} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi}\}$  — база,

$\mathcal{T} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}}\}$  — топология на  $X$ .

## 2 Лекция 2

Литература:

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. — Общая топология. Основные конструкции.
2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. — Элементарная топология.

**Определение 2.1.** Пусть  $(X, \mathcal{T})$  — топологическое пространство. Если топология  $\mathcal{T}$  на  $X$  может быть порождена некоторой метрикой  $\rho$  на  $X$ , то пространство  $(X, \mathcal{T})$  называется метризуемым.

**Замечание 2.2.** Существует ряд критериев метризуемости топологических пространств: см. Критерий метризуемости Нагаты — Ю.М.Смирнова, 1950-1951.

**Определение 2.3.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Открытый шар радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $x_0$  — это множество  $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда шары  $O_\varepsilon(x)$  образуют базу топологии, порождённой на  $X$  метрикой  $\rho$ .

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $\mathfrak{B}$  всех открытых шаров в пространстве  $X$ :  $\mathfrak{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ . Проверим для  $\mathfrak{B}$  оба пункта достаточного условия на базу:

1. Очевидно,  $\forall x \in X \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$

2. Обозначим:  $B_1 = O_{\varepsilon_1}(x_1)$ ,  $B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2)$  и покажем, что  $\forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 = O_\varepsilon(x) \in \mathfrak{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$ . По определению открытых шаров  $B_1$  и  $B_2$ :  $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1$ ,  $\rho(x, x_2) < \varepsilon_2$ . Положим  $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x_1, x), \frac{\varepsilon_2}{2} - \rho(x_2, x) \right\}$ . Тогда:  $\forall y \in O_\varepsilon(x)$ :

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) = \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Значит,  $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ . Аналогично:  $\rho(y, x_2) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in O_{\varepsilon_2}(x_2)$ . Т.к. это верно  $\forall y \in O_\varepsilon(x)$ , то:  $O_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$ , т.е.  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ . Т.о. по достаточному условию на базу топологии: открытые шары в метрическом пространстве образуют базу топологии, порождённой метрикой этого пространства.  $\square$

**Определение 2.5.** Пусть на множестве  $X$  заданы две топологии  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ . Говорят, что  $\mathcal{T}_2$  сильнее  $\mathcal{T}_1$  ( $\mathcal{T}_1$  слабее  $\mathcal{T}_2$ ) и пишут  $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ , если  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ , т.е. если любое открытое в  $\mathcal{T}_1$  множество будет открытым в  $\mathcal{T}_2$ .

Такой способ сравнения топологий на множестве  $X$  относительно прост. Введённое отношение сравнения является отношением частичного порядка и образует на множестве всех топологий на  $X$  структуру частично упорядоченного множества (ЧУМа).

**Пример 2.6.** Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии на множестве  $X$ :

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}_2 = 2^X.$$

В некотором смысле это два полюса сравнения: антидискретная топология на  $X$  является слабейшей, а дискретная — сильнейшей, т.е. для любой топологии  $\mathcal{T}$  на  $X$ :  $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2$ . Тем не менее введённый порядок на  $X$  является частичным, и нетривиальные топологии могут быть несравнимы.

**Задача 2.7.** Метризуемы ли тривиальные топологии (= антидискретная и дискретная)? Ответ:

1. Рассмотрим дискретную метрику:  $\rho_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$  Дискретная метрика порождает дискретную топологию.

2. Антидискретная топология неметризуема.

**Определение 2.8** (Индукцированной топологии подпространства). Пусть  $(X, \mathcal{T})$  — топологическое пространство,  $Y \subset X$ . Тогда  $Y$  образует топологическое пространство с топологией, называемой индуцированной топологией (топологией ограничения)  $\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ .

**Задача 2.9.** Проверить, что индуцированная топология действительно является топологией на множестве  $Y$ , т.е. удовлетворяет аксиомам из определения топологии.

**Пример 2.10.**  $X = \mathbb{R}^2$  — метрическое пространство с евклидовой метрикой,  $Y \subset X$ . Базой топологии, порождённой метрикой на пространстве  $X$ , являются открытые шары, а базой индуцированной топологии на  $Y$  являются всевозможные пересечения открытых шаров в  $X$  с  $Y$ .

**Определение 2.11.** Окрестность точки  $x$  в топологическом пространстве — это любое открытое множество этого пространства (т.е. элемент топологии), содержащее  $x$ .

**Замечание 2.12.** Из определений топологии и окрестности точки очевидно следует, что:

1.  $\bigcap_{i=1}^n$  Окрестностей точки  $x$  — Окрестность точки  $x$ ,

2.  $\bigcup_{\alpha \in A}$  Окрестностей точки  $x$  — Окрестность точки  $x$ .

**Утверждение 2.13.** Пусть  $(X, \mathcal{T})$  — топологическое пространство. Тогда  $A \subseteq X$  — открыто  $\Leftrightarrow$  для каждой точки  $x \in A$  существует её окрестность, лежащая в  $A$ .

*Доказательство.* ( $\Leftarrow$ ): По условию:  $\forall x \in A \exists O(x) \in \mathcal{T} : x \in O(x), O(x) \subseteq A$ . Рассмотрим  $C = \bigcup_{x \in A} O(x)$ :  $C \in \mathcal{T}$ . Очевидно, что  $A \subseteq C$ , а т.к. для каждого  $x \in A$  верно  $O(x) \subseteq A$ , то  $C \subseteq A$ . Получаем, что  $A = C$ , значит,  $A \in \mathcal{T}$ .

( $\Rightarrow$ ): Раз  $A$  открыто, то  $A$  является окрестностью любой своей точки.  $\square$

**Определение 2.14.** Пусть  $x \in X$ . Если  $\{x\} \in \mathcal{T}$ , то  $x$  называется изолированной точкой пространства  $X$ .

**Замечание 2.15.** В дискретной топологии на любом пространстве все точки являются изолированными.

**Определение 2.16.** Пусть  $x \in X$ ,  $A \subset X$ . Тогда  $x$  называется точкой прикосновения множества  $A$ , если для любой её окрестности  $O(x)$  выполняется  $O(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Определение 2.17.** Пусть  $x \in X$ ,  $A \subset X$ . Тогда  $x$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если существует её окрестность  $O(x)$ :  $O(x) \subset A$ .

**Определение 2.18 (A1).** Замыкание множества  $A$  — это множество всех точек прикосновения  $A$ . Обозначение:  $\bar{A}$ .

**Определение 2.19 (B1).** Внутренность множества  $A$  — это множество всех внутренних точек  $A$ . Обозначение:  $\text{Int}(A)$ .

**Задача 2.20.** Показать, что:  $\text{Int}(A) \subset A \subset \bar{A}$ .

**Определение 2.21 (A2).** Замыкание  $\bar{A}$  множества  $A$  — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Иными словами,  $\bar{A}$  — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее  $A$ .

**Определение 2.22 (B2).** Внутренность  $\text{Int}(A)$  множества  $A$  — это объединение всех открытых множеств, лежащих в  $A$ . Иными словами,  $\text{Int}(A)$  — это наибольшее по включению открытое множество, лежащее в  $A$ .

**Теорема 2.23.** Определение A1 эквивалентно определению A2; Определение B1 эквивалентно определению B2.

*Доказательство.* Доказательство эквивалентности определений A1 и A2 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.

Пусть  $\text{Int}_1(A)$  — множество внутренних точек  $A$  в смысле определения B1, а  $\text{Int}_2(A)$  — в смысле определения B2. Покажем, что эти множества равны:

( $\subseteq$ ): Если  $x \in \text{Int}_1(A)$ , то существует его окрестность  $O(x) \subset A$ . Но  $O(x)$  — открыто, а значит,  $O(x) \subset \text{Int}_2(A)$ , и  $x \in \text{Int}_2(A)$ . Получаем, что  $\text{Int}_1(A) \subseteq \text{Int}_2(A)$ .

( $\supseteq$ ): Если  $x \in \text{Int}_2(A)$ , то  $x$  принадлежит какому-то открытому  $V \subset A$ . Но тогда мы можем взять  $V$  в качестве окрестности точки  $x$ . Получаем, что  $x \in \text{Int}_1(A)$ , а значит,  $\text{Int}_1(A) \supseteq \text{Int}_2(A)$ . Итак,  $\text{Int}_1(A) = \text{Int}_2(A)$ , а значит, определения B1 и B2 эквивалентны.  $\square$

**Определение 2.24.** Пусть  $x \in X$ ,  $A \subset X$ . Тогда  $x$  называется граничной точкой множества  $A$ , если  $x$  является точкой прикосновения  $A$ , но не является внутренней точкой  $A$ , т.е. если  $x \in \bar{A}$ ,  $x \notin \text{Int}(A)$ .

**Определение 2.25.** Граница множества  $A$  — это множество всех граничных точек  $A$ . Обозначение:  $\text{Bd}(A)$  или  $\partial A$ . По определению:  $\text{Bd}(A) = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$ .

**Определение 2.26** (Понятия непрерывного отображения). Пусть  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  — топологические пространства,  $f : X \rightarrow Y$ . Отображение  $f$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in X$ , если для любой окрестности  $O(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y$  существует такая окрестность  $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$ , что  $f(U(x_0)) \subset O(f(x_0))$ .

Отображение  $f$  называется непрерывным (непрерывным отображением топологических пространств), если оно непрерывно во всех  $x \in X$ .

**Утверждение 2.27.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывно.
2. прообраз любого открытого множества под действием  $f$  является открытым, т.е.  $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ .
3. прообраз любого замкнутого множества под действием  $f$  является замкнутым.
4.  $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  (На лекции утверждалось не включение, а равенство, но это неверно).

*Доказательство.* Доказательство эквивалентности условий 1, 3 и 4 остаётся в качестве упражнения читателю.

Докажем (1)  $\Leftrightarrow$  (2):

( $\Rightarrow$ ): Пусть  $V \subset Y$  открыто. Рассмотрим  $\forall x \in f^{-1}(V)$ : Т.к.  $V \in \mathcal{T}_Y$  и  $f(x) \in V$ , то  $\exists O(f(x)) \subset V$  — окрестность  $f(x)$ . Т.к.  $f$  непрерывно, то для найденной  $O(f(x)) \exists U(x) \in \mathcal{T}_X$  — окрестность  $x$ :  $f(U(x)) \subset O(f(x)) \subset V$ . Значит,  $U(x) \subset f^{-1}(V)$ . Получаем, что любая точка из  $f^{-1}(V)$  входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, а значит,  $f^{-1}(V)$  открыто. Итак, прообраз любого открытого множества под действием  $f$  открыт.

( $\Leftarrow$ ): Пусть  $x \in X$ . Рассмотрим  $\forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y$  — окрестность  $f(x)$ . Т.к.  $O(f(x))$  открыто, то  $f^{-1}(O(f(x)))$  открыто в  $X$  — выберем это множество в качестве окрестности  $x$ . Получаем, что  $\forall x \in X \forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y \exists U(x) \in \mathcal{T}_X : f(U(x)) \subset O(f(x))$ , т.е.  $f$  непрерывно.  $\square$

### 3 Лекция 3

**Замечание 3.1** (философское). Проверять непрерывность  $f : X \rightarrow Y$  удобно проверять на уровне базы или предбазы. Пусть  $\beta \subset 2^Y$  — база топологии  $Y$ . Прообраз базы (предбазы) открыт:  $f^{-1}(\beta) \subset \tau_X$

**Пример 3.2.** 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции одной переменной из математического анализа

2.  $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ ,  $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$  — общее название таких отображений (накрытие)

3. тривиальный пример - постоянное отображение.  $f(x) = y_0$ , где  $f : X \rightarrow Y$  и  $y_0 \in Y$ .
4. композиция непрерывных - непрерывное отображение  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , тогда  $g(f)$  - непрерывно.
5.  $Z \subset X \xrightarrow{f} Y$ , где на  $Z$  индуцирована топология  $X$ .  $i : Z \rightarrow X$ ,  $i(x) = x$ , тогда  $i$  непрерывно в индуцированной топологии.

Непрерывность в метрических пространствах.

**Определение 3.3** (По Коши).  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что  $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$

**Определение 3.4** (По Гейне). ...

**Задача 3.5.** Доказать эквивалентность определений.

**Теорема 3.6** (Кривая Пеано). Существует непрерывное отображение  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

Докажем эту теорему потом.

**Определение 3.7.**  $f : X \rightarrow Y$  - гомеоморфизм, если  $f$  - биекция и  $f, f^{-1}$  - непрерывны.

Если существует гомеоморфизм между  $X$  и  $Y$ , то эти пространства гомеоморфны.

**Замечание 3.8.** Гомеоморфизм задает отношение эквивалентности.

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, нужно найти свойства пространств, которые должны сохраняться, но у этих пространств они отличаются.

**Пример 3.9.**  $f(x) = tg(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  - гомеоморфизм.

Связность и линейная связность.

**Определение 3.10.** Пространство  $X$  называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

$X$  - связно, если нельзя так разбить.

**Пример 3.11.** 1. Рассмотрим  $X$  с дискретной топологией.  $X$  - всегда несвязно, если содержит более двух точек.

2. Рассмотрим  $X$  с антидискретной топологией.  $X$  - всегда связно.

3.

**Теорема 3.12.** Отрезок  $I = [0, 1]$  с индуцированной топологией - связен.

*Доказательство.* От противного. Используя теорию действительных чисел.

□

**Утверждение 3.13.** Непрерывный образ связного множества - связен, т.е. если  $X$  - связно,  $f : X \rightarrow Y$  следовательно  $f(X)$  - связно

*Доказательство.* От противного. Пусть выполняется  $f(X) = A \cup B$ , тогда  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  - противоречие. □

**Определение 3.14.** Пусть в топологическом пространстве, соединяющий  $x_0, y_0 \in X$ , это непрерывное отображение  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  такое, что  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = y_0$ .

**Замечание 3.15.**  $\gamma([0, 1])$  - связно.

**Определение 3.16.** Пространство  $X$  является линейно связным, если для каждой двух точек, существует путь, соединяющий их.

**Теорема 3.17.** Пусть  $X$  линейно связно, тогда  $X$  - связно.

*Доказательство.* От противного. Пусть  $X = A \cup B$ . Тогда  $x_0 \in A$ ,  $y_0 \in B$  можно связать отображением  $\gamma$ , тогда получим, что  $\gamma([0, 1]) = \gamma([0, 1]) \cap A \cup \gamma([0, 1]) \cap B$  - противоречие. □

**Замечание 3.18.** Обратное неверно. Пример - график  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  с добавлением отрезка  $[-1, 1]$ .

## 4 Лекция 4

Компактность

Пусть  $X$  - топологическое пространство.

**Определение 4.1.**  $X$  - компактно, если из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Раньше это называлось бикомпактностью, а под  $\omega$ -компактом требовалось счетность изначального покрытия.

**Пример 4.2.**  $[a, b]$  - компактен, для доказательства нужно использовать факт существования точной верхней грани у ограниченного подмножества  $\mathbb{R}^1$ .

Доказательство. □

**Лемма 4.3** (О вложенных отрезках). Пусть есть система вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$ , где  $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ . Тогда их пересечение не пусто. Дополнительно, если  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ , тогда их пересечение состоит из одной точки.

**Определение 4.4.** Центрированная система множеств  $\{X_\alpha \subset X\}$ , если пересечение любого конечного числа множеств  $X_\alpha$  не пусто.

**Лемма 4.5** (Обобщение леммы для топологических пространств). Пусть  $X$  - топологическое пространство, тогда существует последовательность замкнутых не пустых подмножеств  $X \supset F_1 \supset F_2 \dots$  и  $\bigcap F_i \neq \emptyset$ .

Доказательство: игра в понятия (определения). Мы знаем, что

$$F_i - \text{замкнуто} \Leftrightarrow U_i = X \setminus F_i - \text{открыто}$$

□

Лемма выше является следствием леммы ниже.

**Лемма 4.6.** Топологическое пространство компактно  $X \Leftrightarrow$  любая центрируемая система замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение

Доказательство.  $(\Rightarrow)$ : Пусть  $\bigcup_i F_i = \emptyset$ , тогда что можно сказать про  $\{U_i\}$ ? Рассмотрим  $\bigcup_i (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_i F_i$

$$\bigcup_i U_i \supset X \Rightarrow \text{существует конечное подпокрытие в силу компактности } X$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \supset X$$

Следовательно  $\{F_i\}$  удовлетворяют условию. □

**Задача 4.7.** Доказать утверждение в обратную сторону.

**Определение 4.8.**  $X$  называется локально компактным, если  $\forall x \in X$  существует  $O(x)$ , для которой существует  $V(x)$  такая, что 1)  $Cl(V(x)) \subset O(x)$ ; 2)  $Cl(V(x))$  - компактно.

**Определение 4.9.** Семейство подмножеств  $X_\alpha \subset X$  называется локально конечным, если существует  $O(x)$ , которая пересекается с конечным числом множеств из системы  $\{X_\alpha\}$ .

**Определение 4.10.** Топологическое пространство  $X$  называется паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие.

**Пример 4.11.**  $\mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^n$  является паракомпактным

**Лемма 4.12** (наследование компактности). Пусть  $X \supset A$ , если  $A$  - замкнуто, то  $A$  сохраняет следующие свойства топологического пространства  $X$

1. компактно
2. локально компактно
3. паракомпактно

**Задача 4.13.** Доказать лемму выше.

**Утверждение 4.14.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  - непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, если  $X$  компактно, тогда  $f(X) \subset Y$  тоже компактно.

Доказательство. Очевидно. □

**Задача 4.15.** Рассмотреть похожие утверждения для локальной компактности и паракомпактности.



**Определение 4.16** (Аксиомы отделимости).

1.  $T_0$  (аксиома Колмогорова):  $X$  удовлетворяет  $T_0$  тогда и только тогда, когда выполняется следующее или существует  $O(x)$  такая, что  $y \notin O(x)$ , или существует  $O(y)$  такая, что  $x \notin O(y)$  - для любых двух различных элементов  $x, y \in X$ .
2.  $T_1$ : для любых различных точек найдутся окрестности, удовлетворяющие следующим свойствам  $x \notin O(y)$  и  $y \notin O(x)$ .
3.  $T_2$  (аксиомы Хаусдорфа): для любых различных точек существуют непересекающиеся окрестности.
4.  $T_3$ : для любой точки  $x$  из  $X$  и для любого замкнутого подмножества  $F \subset X$ , не содержащего  $x$ , существуют непересекающиеся окрестности  $O(x)$  и  $O(F)$ .
5.  $T_4$ : пусть  $F_1, F_2$  - замкнутые множества, причем  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Существуют  $O(F_1), O(F_2) : O(F_1) \cap O(F_2) = \emptyset$ .

**Задача 4.17.** Пространство, удовлетворяющее  $T_1$ , но не удовлетворяющее  $T_0$ .

## 5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику  $T_1$ -пространства:

**Утверждение 5.1.**  $X$  является  $T_1$ -пространством тогда и только тогда, когда для любых  $x$  множество  $\{x\}$  замкнуто.

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$ : Пусть  $T_1$ . Если возьмем  $y \neq x$ , тогда существует  $O(x)$  и  $O(y)$ , т.ч.  $y \notin O(x)$  и  $x \notin O(y) \Rightarrow y$  не является точкой прикосновения множества  $X$ . Значит  $X \setminus \{x\}$  множество не содержащее предельную точку. Таким образом  $x$  единственная предельная (прикосновенная) точка множества  $X$ .

$(\Leftarrow)$ : Пусть различные точки  $\{x\}$  и  $\{y\}$  замкнуты, тогда  $X \setminus \{x\}$  и  $Y \setminus \{y\}$  открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей:  $y \in X \setminus \{x\}, x \notin \{y\}$  □

**Утверждение 5.2.** Вообще говоря из  $T_3$  не следует  $T_0$ .

*Доказательство.* Приведем контрпример: пусть  $X = \{x, y\}$  и  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Возмем точку  $x$ , тогда замкнутое подмножество  $F \subset X$ , не содержащее  $x$ , только пустое;  $x \in X, \emptyset \in \emptyset$  □

**Определение 5.3.** Пространство  $X$  регулярно, если оно  $T_3$  и  $T_0$

**Утверждение 5.4.**  $T_3$  и  $T_1 \Rightarrow T_2$

*Доказательство.* Возьмем  $x$  и  $y$ , такие что  $x \neq y$ . Пусть существует  $O(x)$ :  $y \notin O(x)$ . Рассмотрим  $X \setminus O(x) =: F$ , оно замкнуто и  $y \in F$ . По аксиоме  $T_3$  существуют окрестности  $O(x)$  и  $O(F)$ :  $O(x) \cap O(F) = \emptyset$ . Найдем окрестность точки  $y$ . Существует  $O(y) \subset O(F)$ , так как  $y \in O(F)$  и  $O(F)$  открыто. Таким образом  $O(x) \cap O(y) = \emptyset$ . □

**Пример 5.5.** Если  $X$  метрическое пространство, то  $X$  хаусдорфово.

Рассмотрим полезную характеристику пространства  $T_2$ .

**Утверждение 5.6.**  $X$  пространство  $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \cap \overline{O(x)} = \{x\}$ , где пересечение по всем окрестностям, содержащим  $x$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow x \in \cap \overline{O(x)}$ , пересечение по всем окрестностям точки  $x$ . Докажем методом от противного: пусть существует  $y \in \cap \overline{O(x)}$ , где пересечение по всем окрестностям точки  $x$ . Тогда  $\forall \overline{O(x)} y \in \overline{O(x)} \Leftrightarrow \forall V(y) V(y) \cap O(x) \neq \emptyset$ . Так как  $X$  пространство  $T_2$ , то существует  $U(x)$  и  $U(y)$ :  $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ . Противоречие с тем, что  $y$  принадлежит хотя бы одному  $\overline{O(x)}$ .

$\Leftarrow$  упражнение. □

**Утверждение 5.7.** Из  $T_4$  следует  $T_0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим связное двоеточие:  $X = \{x, y\}$  и  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Замкнутых множеств всего два  $\{\emptyset, X\}$ . Можем взять  $F_1 = \emptyset, F_2 = X$ . Или можем взять  $F_1 = \emptyset, F_2 = \emptyset$ . □

**Утверждение 5.8.** Из  $T_4$  не следует  $T_3$ .

*Доказательство.* Приведем контрпример: пусть  $X = \mathbb{R}, \tau = \{\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}, \emptyset, \mathbb{R}\}$ . Замкнутые множества имеют вид  $F = (-\infty, a]$ . Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является  $T_4$ . Возьмем замкнутое множество  $(-\infty, a] =: F$  и точку  $b$ , причем  $b \notin F$ . Единственной окрестностью  $F$  является вся  $\mathbb{R}$ , так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее  $F$ . Тогда любая окрестность точки  $b$  будет нетривиально пересекаться с  $\mathbb{R}$ . Значит  $X$  не является  $T_3$ . □

**Утверждение 5.9.**  $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$ .

*Доказательство.* Из утверждения 5.1 следует, что  $\{x\}$  замкнуто. Пусть  $F_1 = \{x\}$ ,  $F = F_2$ , применяем аксиому  $T_4$ .  $\square$

**Определение 5.10.**  $X$  – нормально, если оно  $T_4 + T_1$ .

**Лемма 5.11.** Пусть в метрическом пространстве  $(X, \rho)$   $F_1, F_2$  – замкнуты. Тогда  $\forall x \in F_1, \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \emptyset$ .

*Доказательство.* Предположим противное: пусть нельзя найти такую  $O_\varepsilon(x)$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \emptyset$ . Тогда  $x \in \overline{F_2}$ , но  $\overline{F_2} = F_2 \Rightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 5.12.** Метрическое пространство нормально.

*Доказательство.* Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома  $T_2$ , из которой следует аксиома  $T_1$ . Докажем  $T_4$ . Пусть  $F_1, F_2$  – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку  $x_1 \in F_1$  и рассмотрим  $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ . Можно построить окрестность  $V(F_1) = \bigcup_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$  и  $W(F_2) = \bigcup_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$ .

Докажем, что  $V(F_1) \cap W(F_2) = \emptyset$ . Предположим противное:  $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$ . Тогда  $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$  и  $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$ . Заметим, что  $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ , тогда по неравенству треугольника  $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$ , также  $x_1 \in F_1$ , но  $O_\varepsilon(x_2)$  построена так, что она не пересекается с  $F_1$ .  $\square$

## 6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказана теорема

**Теорема 6.1.** Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам  $T_4 + T_1$ .

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

### 6.1 Функциональная отделимость

**Определение 6.2.**  $A \subset X$  – всюду плотно в  $X$ , если  $\overline{A} = X$ .

**Теорема 6.3** (Лемма Урысона). Пусть  $X$  – нормальное пространство.  $A, B$  – два замкнутых непересекающихся подмножества  $X$ . Тогда существуют непрерывная функция  $F : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , такая, что  $F(A) = \{0\}$  и  $F(B) = \{1\}$

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств  $\{U\}$ , которые мы заиндексируем двоично-рациональными числами из  $[0, 1]$ .

1.  $U_1 = X \subset B$
2.  $U_0$  должно быть следующим  $A \subset U_0 \subset \overline{U_0}$  (используем нормальность)  $\subset U_1$
3.  $U_{\frac{1}{2}}$  должно выполняться  $\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1$ , существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям  $U_0$  и  $U_1$ .
4.  $U_{\frac{1}{4}} : \overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}}$  и  $U_{\frac{3}{4}} : \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1$
5. индуктивный переход. Берем  $q = \frac{2k+1}{2^n}$ . Рассмотрим соседние с  $q$  столбики – они будут иметь вид  $\frac{k}{2^{n-1}}$  и  $\frac{k+1}{2^{n-1}}$ .

$$\overline{U_{\frac{k}{2^{n-1}}}} \subset U_q \subset \overline{U_q} \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Построили систему открытых множеств. Это система множеств  $\{U_q\}$  обладает свойством упорядоченности, т.е. если  $q < r \in S$ , то  $\overline{U_q} \subset U_r$ . Теперь определим функцию  $F$ .

$$F(x) = \begin{cases} \inf \{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств  $A$  и  $B$ . Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что  $F^{-1}(O_\alpha)$  – открыт, где  $O_\alpha$  – элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для  $[0, a)$ ,  $(b, 0]$ , т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим  $x \in F^{-1}([0, a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf \{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \tilde{q} < a$ , тогда  $F^{-1}([0, a)) = \bigcup_{\tilde{q} < a} U_{\tilde{q}}$  – открыто.

Рассмотрим  $F$ , заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup \{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup \{r : x \notin U_r\} = \sup \{r : x \notin \overline{U_r}\} = \sup \{r : x \in X \setminus \overline{U_r} \}$  – это множество открыто. Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация:  $\square$

**Пример 6.4** (Нормального, но не метризуемого пространства).

## 6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

**Замечание 6.5** (характеризация хаусдорфова пространства). Пусть  $X$  - хаусдорфово  $\Leftrightarrow$  для любых  $x \neq y$  существует  $O(x) : y \notin \overline{O(x)}$

*Доказательство.*  $(\Leftarrow)$ :  $y \notin \overline{O(x)} \Leftrightarrow y \in X \setminus \overline{O(x)}$  - открыто, тогда существует окрестность  $O(y)$ :  $O(y) \cap \overline{O(x)} = \emptyset$ , тогда  $O(y) \cap \overline{O(x)} = \emptyset$ .

$(\Rightarrow)$ : от противного □

**Утверждение 6.6.** Замкнутое подмножество компакта - компактно

*Доказательство.* Очевидно. □

**Лемма 6.7.** В хаусдорфовом топологическом пространстве  $X$  компактное подмножество  $F$  является замкнутым.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Задача 6.8.**  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## 7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

**Лемма 7.1** (Лемма Урысона).  $X$  - нормальное пространство,  $A, B$  - замкнутые непересекающиеся подмножества  $X$ . Тогда существует непрерывная функция  $f : X \rightarrow [0, 1]$ :  $f(A) = \{0\}$ ,  $f(B) = \{1\}$ .

### 7.1 Разбиение единицы

**Лемма 7.2** (об ужатии).  $X$  - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть  $X \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ , где  $U_i$  - открытое множество. Тогда существует набор открытых  $V_i, i = 1, \dots, N$ , таких что  $\overline{V_i} \subset U_i, i = 1, \dots, N$  и  $X \subset \bigcup V_i$ .

*Доказательство (последовательное).* Основание  $k = 1$ , имеем  $U_1$ . Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A$$

Видно, что  $B$  - замкнуто. Очевидно, что  $A \subset U_1$ .

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать  $O(A)$  причем  $\overline{O(A)} \subset U_1$ , обозначим  $V_1 = O(A)$ .

Докажем, что  $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$  - покрытие  $X$ . Если  $x$  лежит в объединении  $U_i, i \geq 2$ , то он лежит в  $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$ . Если  $x$  лежит в  $X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A \subset V_1$ , тогда выполняется тоже самое.

Рассмотрим  $1 \leq k < N$ . Пусть построены  $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_N$ .

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_N$$

Следовательно мы можем продолжить  $k$  до  $N$ . □

**Задача 7.3.** Подробно расписать доказательство выше.

**Определение 7.4.** Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Носительные функции  $f$  (обозн  $\text{supp} f$ ) =  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ .

**Определение 7.5.** Пусть  $X$  - топологическое пространство,  $U_1, \dots, U_N$  - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$  называется разбиением единицы подчиненное покрытию  $U_1, \dots, U_N$ , если выполнены два условия:

1.  $\text{supp} f_i = \overline{V_i} \subset U_i$
2.  $\sum_{i=1}^N f_i = 1$  на  $X$

**Теорема 7.6** (о разбиении единицы). Пусть  $X$  - нормальное пространство,  $U_1, \dots, U_N$  - конечное покрытие, тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию  $U_1, \dots, U_N$ .

*Доказательство.*

По лемме об ужатии, в  $U_i$  можно вписать  $V_i$  такое, что  $\overline{V_i} \subset U_i$ . По лемме Урысона для  $A = \overline{V_i}, B = X \setminus U_i$ , будет существовать непрерывная функция  $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\varphi_i(A) = \{1\}$  и  $\varphi_i(B) = \{0\}$ , то есть  $\varphi_i = 1$  на  $A$  и  $\varphi_i = 0$  вне  $A$ . Рассмотрим функцию  $f_i$  определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^N \varphi_i}$$

Причем  $\text{supp} f_i$  зависит от  $\varphi_i$ , то есть  $\text{supp} f_i = \text{supp} \varphi_i = \overline{V_i}$

**Задача 7.7.** Если  $f$  - непрерывное отображение, то  $\text{supp} f$  - замкнутое.

**Определение 7.8.**  $A$  называется всюду плотным в топологическом пространстве  $X$ , если  $\overline{A} = X$ .

**Определение 7.9.**  $A$  называется нигде не плотным, если  $(\text{int} \overline{A} = \emptyset$  - другое определение) для каждого непустого открытого  $U$  существует открытое  $V \subset U$  такое, что  $V \cap A = \emptyset$ .

**Определение 7.10.**  $X$  - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.

**Пример 7.11** (Канторово множество). Если  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ , где  $a_i = 0, 2$ , то это элемент Канторова множества.

Можно рассмотреть  $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_i}{3^i}$ ,  $\tilde{a}_i = 1$ , если  $a_i = 2$ , и  $\tilde{a}_i = 0$ , если  $a_i = 0$ .

**Задача 7.12.** Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.

**Определение 7.13.**  $X$  - совершенное, если не содержит изолированных точек.

**Теорема 7.14** (Кривая Пеано). Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция  $f : I \rightarrow I \times I$ , где  $I = [0, 1]$