

ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс. Осенний семестр 2024,г.
21 сентября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
2	Лекция 2	4
3	Лекция 3	6

1 Лекция 1

Повторение определений из мат. анализа: окрестность точки, открытое множество, замкнутое множество, непрерывная функция, компакт, связность, метрическое пространство. Так же было отмечено, что топологию можно задать через систему окрестностей.

Замечание 1.1. $\rho(x, y) = |x - y|$ - метрика, при $x, y \in \mathbb{R}^1$.

Определение 1.2. Пара (X, ρ) называется метрическим пространством, если $\rho : X \times X \leftarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ удовлетворяет аксиомам метрики.

Теорема 1.3. $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$ является метрическим пространством.

Определение 1.4. Топологическое пространство (X, τ) , где τ - совокупность подмножеств - топология, удовлетворяющие следующим свойствам

1. $\emptyset \in \tau$
2. $X \in \tau$
3. $\bigcap_{i=1}^k U_k \in \tau$
4. $\bigcup U_k \in \tau$

Пример 1.5. 1. антидискретная (тривиальная) топология $\tau = \{\emptyset, X\}$

2. дискретная топология $\tau = 2^X$

3. $X = \{1, 2\}$, способы задания топологии: $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$

Определение 1.6. Пусть X - метрическое пространство. Открытый шар $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$

Определение 1.7. Пусть X - метрическое пространство. $U \subset X$ - открыто, если $\forall x \in U \exists$ окрестность точки (=открытый шар, содержащий x) x , содержащаяся в U .

Определение 1.8. В X произвольном топологическом пространстве $U \subset X$ является замкнутым, если дополнение к нему открыто.

Пример 1.9. Топология Зарисского определяется в \mathbb{C}^1 , можно обобщить до \mathbb{C}^n . - что-то из алгебраическое геометрии.

Замкнутое множество - это конечное множество точек.

Задача 1.10. Доказать, что это топология.

Определение 1.11. База топологии $\beta \subset \tau \subset 2^X$, если любое открытое множество $U \in \tau$ можно выразить в виде объединения элементов из базы β , т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где B_α - элемент базы.

База топологии необходима для уменьшения количества задаваемых открытых множеств для определения топологии.

Лемма 1.12 (Достаточное условие на базу топологии). Пусть $\beta \subset 2^X$ - набор подмножеств. Если выполняются следующие условия

1. $\forall x \in X \exists B_x \in \beta$ такой, что $x \in B_x$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$

то β является базой топологии.

Доказательство. Вводим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_{\gamma} B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве \emptyset можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X , т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединения элементов базы задают топологию на X . □

Задача 1.13. Повторить доказательство для базы метрического пространства.

Можно еще уменьшить количество задаваемых элементов.

Определение 1.14. π называется предбазой топологии, если $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$ и каждое U представляется в виде объединения конечного пересечения элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \tau$ выполняется

$$U = \bigcup_{i=1}^k P_i, \text{ где } P_i - \text{ элемент предбазы.}$$

Замечание 1.15. Любое множество задает предбазу.

Следующее утверждение не дописано.

Пример 1.16. Пусть $X = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ - предбаза.

$\beta = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{\text{что-то}\}, \emptyset\}$

$\tau = \{\dots, \dots\}$

Причем $\pi \subset \beta \subset \tau \subset 2^X$

Определение 1.17. $f : X \rightarrow Y$ - непрерывная функция, если для каждого открытого $U \subset Y$ выполняется $f^{-1}(U)$ - открыто в X .

2 Лекция 2

Литература:

1. В.В. Федорчук - Введение в топологию

2. 4 автора - Введение в топологию

Определение 2.1. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Из метрического можно построить топологические пространство (X, τ) . Такие пространства называются метризуемыми.

Замечание 2.2 (Критерий метризуемости. Накаты Ю.М.Смирнова. 1950-1951).

Определение 2.3. $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Теорема 2.4. Шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии.

Доказательство. 1. $\forall x \in X \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$

2. рассмотрим $(O_{\varepsilon_1}(x_1) = B_1) \cap (B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2))$ найдем окрестность точки x , лежащий в этом пересечении, чтобы вся окрестность тоже лежала в этом пересечении $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1, \rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x_1, x), \varepsilon_2 - \rho(x_2, x)\}$

Проверим условие $O_\varepsilon \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$

Проверим $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \Rightarrow \rho(y, x_1) < \varepsilon_1$.

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < \varepsilon + \rho(x, x_1) = \varepsilon$$

Аналогично для второго шара.

Т.о. по достаточному условию на базу открытые шары будет образовывать базу. □

Простой способ сравнения топологий. Пусть X - множество. τ_1, τ_2 - топологии, определенные на X . ЧУМ - частично упорядоченное множество.

Определение 2.5. $\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$

Обычными словами: любое открытое множество в τ_1 будет открытым в τ_2 .

Пример 2.6. Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии.

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\} \subset \tau_2 = 2^X$$

Можно считать, что это два полюса сравнения, где слева - слабейшая, справа - сильнейшая.

Любую топологию можно сравнить с этими двумя. Но точно существуют не сравнимые.

Задача 2.7. Метризуемые ли тривиальные топологии (= антидискретная и дискретная)?

1. можно ввести дискретную метрику $\rho_D(x, y) = (1, x = y; 0, x \neq y)$. Получим дискретную топологию.

2. неметризуемо.

Определение 2.8 (индуцированная топология подпространства). Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $Y \subset X$. $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

Доказательство. Очевидно, что выполняются аксиомы топологии. □

Пример 2.9. $\mathbb{R}^2 = X$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Определение 2.10. U - окрестность точки $x \in X$ $= U \in \tau$ такое, что $x \in U$.

Замечание 2.11 (Есть тут глубокий смысл?).

$$\bigcap_{i=1}^n \text{окрестность точки } x = \text{окрестность точки } x$$

$$\bigcup_{\alpha} \text{окрестность } x = \text{окрестность } x$$

Утверждение 2.12. $A \subset X$ - открыто \Leftrightarrow для каждой точки $x \in A$ существует ее окрестность, лежащая в A .

Доказательство. (\Leftarrow): Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x) \in \tau$. Очевидно, что $A \subset C$. А т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subset A$, то также выполняется включение в другую сторону.

(\Rightarrow): раз A - открыто, то A является окрестностью. □

Определение 2.13. Пусть $x \in X$, $\{x\} \in \tau$, то x называется изолированной точкой.

Замечание 2.14. Если топология дискретная, то все точки изолированные.

Определение 2.15. Пусть $A \subset X$, $x \in X$. x - точка прикосновения множества A , если для любой окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение 2.16. $x \in A$ - внутренняя точка множества A , если существует $O(x)$: $O(x) \subset A$.

Определение 2.17 (A1). Замыкание множества A - множество всех точек прикосновения A . Обозначается \bar{A} .

Определение 2.18 (B1). Внутренность - множество всех внутренних точек. Обозначается $Int(A)$.

Задача 2.19. $Int(A) \subset A \subset \bar{A}$

Определение 2.20 (A2). $\bar{A} = \bigcap_{\text{по всем возможным } F} F = F : 1. F - \text{замкнуто}, 2. A \subset F$ \bar{A} - наименьшее замкнутое множество, содержащее A .

Определение 2.21 (B2). $Int(A) = \bigcup_{\text{по всем } U} U : U \in \tau, U \subset A$ $Int(A)$ - наибольшее открытое в A .

todo:

Определение 2.22. $x \in X$ - граничная точка A , если x - точка прикосновения и $x \notin Int(A)$.

Граница - множество граничных точек. Обозначается $Bd(A)$.

Замечание 2.23.

$$Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$$

Теорема 2.24. Это определения эквивалентны.

Доказательство. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.

Пусть $Int(A)$ - множество точек в смысле определения B1. Докажем B2. Докажем проверкой включений.

(\subseteq): если $x \in A$ - внутренняя точка, то существует $O(x) \subset A$, тогда $x \in Int(A)$ в смысле другого определения.

(\supseteq): $x \in Int(A)$ в смысле определения B2, тогда x принадлежит какому-то одному открытому $V \subset A$, тогда можем взять V за окрестность точки x . □

Определение 2.25 (понятие непрерывного отображения). Пусть $f : X \rightarrow Y$. f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для каждой $O(f(x_0))$ существует такая окрестность $O(x_0)$, что $f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$.

f - непрерывное отображение топологических пространств, если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.26. Следующие условия эквивалентны:

1. f - непрерывно
2. прообраз любого открытого множества является открытым, т.е. $U \in \tau_X \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_Y$
3. прообраз любого замкнутого замкнут
4. $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ - на лекции было дано так, но это утверждение неверно

Доказательство. Докажем только (1) \Leftrightarrow (2).

(\Rightarrow): пусть f - непрерывно. Нужно доказать, что $f^{-1}(V)$ - открыто, можем воспользоваться утверждением при критерий открытости.

(\Leftarrow): пусть $x \in X$, V - окрестность точки $f(x_0)$, тогда по предположению $f^{-1}(V)$ - открыто, следовательно существует $O(x) \subset f^{-1}(V)$ □

Задача 2.27. Доказать остальные эквивалентности в утверждении выше.

3 Лекция 3

Повторение определения непрерывности и про эквивалентные утверждения из прошлой лекции.

Замечание 3.1 (философское). Проверять непрерывность $f : X \rightarrow Y$ удобно проверять на уровне базы или предбазы. Пусть $\beta \subset 2^Y$ - база топологии Y . Прообраз базы (предбазы) открыт: $f^{-1}(\beta) \subset \tau_X$

Пример 3.2. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные функции одной переменной из математического анализа

2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$, $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ - общее название таких отображений (накрытие)

3. тривиальный пример - постоянное отображение. $f(x) = y_0$, где $f : X \rightarrow Y$ и $y_0 \in Y$.

4. композиция непрерывных - непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, тогда $g(f)$ - непрерывно.

5. $Z \subset X \xrightarrow{f} Y$, где на Z индуцирована топология X . $i : Z \rightarrow X$, $i(x) = x$, тогда i непрерывно в индуцированной топологии.

Непрерывность в метрических пространствах.

Определение 3.3 (По Коши). f непрерывно в точке x_0 , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$

Определение 3.4 (По Гейне). ...

Задача 3.5. Доказать эквивалентность определений.

Теорема 3.6 (Кривая Пеано). Существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

Докажем эту теорему потом.

Определение 3.7. $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, если f - биекция и f, f^{-1} - непрерывны.

Если существует гомеоморфизм между X и Y , то эти пространства гомеоморфны.

Замечание 3.8. Гомеоморфизм задает отношение эквивалентности.

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, нужно найти свойства пространств, которые должны сохраняться, но у этих пространств они отличаются.

Пример 3.9. $f(x) = \tan(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ - гомеоморфизм.

Связность и линейная связность.

Определение 3.10. Пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

X - связно, если нельзя так разбить.

Пример 3.11. 1. Рассмотрим X с дискретной топологией. X - всегда несвязно, если содержит более двух точек.

2. Рассмотрим X с антидискретной топологией. X - всегда связно.

3.

Теорема 3.12. Отрезок $I = [0, 1]$ с индуцированной топологией - связен.

Доказательство. От противного. Используя теорию действительных чисел.

□

Утверждение 3.13. Непрерывный образ связного множества - связен, т.е. если X - связно, $f : X \rightarrow Y$ следовательно $f(X)$ - связно

Доказательство. От противного. Пусть выполняется $f(X) = A \cup B$, тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ - противоречие. □

Определение 3.14. Пусть в топологическом пространстве, соединяющий $x_0, y_0 \in X$, это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$.

Замечание 3.15. $\gamma([0, 1])$ - связно.

Определение 3.16. Пространство X является линейно связным, если для каждый двух точек, существует путь, соединяющий их.

Теорема 3.17. Пусть X линейно связно, тогда X - связно.

Доказательство. От противного. Пусть $X = A \cup B$. Тогда $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ можно связать отображением γ , тогда получим, что $\gamma([0, 1]) = \gamma([0, 1]) \cap A \cup \gamma([0, 1]) \cap B$ - противоречие. □

Замечание 3.18. Обратное неверно. Пример - график $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ с добавлением отрезка $[-1, 1]$.