

ЛЕКЦИИ ПО ВВЕДЕНИЮ В ТОПОЛОГИЮ

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
20 января 2025 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
1.1	Основные понятия топологии.	3
2	Лекция 2	4
3	Лекция 3	7
3.1	Связность и линейная связность.	7
4	Лекция 4	8
4.1	Компактность.	8
5	Лекция 5	10
6	Лекция 6	11
6.1	Функциональная отделимость	12
6.2	Взаимоотношение компактности и нормальности	12
7	Лекция 7	12
7.1	Разбиение единицы	13
8	Лекция 8	14
8.1	Кривые Пеано	14
9	Лекция 9	15
9.1	Теорема Титца о продолжении непрерывной функции	15
10	Лекций 10	16
11	Лекция 11	17
11.1	Тихоновская топология и теорема Тихонова	17
11.2	Фактор-топология	17
11.3	Склейка пространств	18
11.4	Одноточечная компактификация	18
12	Лекция 12	18
12.1	Алгебраическая топология. Теория гомотопий	18
13	Лекция 13	19
13.1	Фундаментальная группа	19
14	Лекция 14	20
14.1	Накрытие	20
15	Лекция 15	21

1 Лекция 1

1.1 Основные понятия топологии.

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

Определение 1.1. Метрическое пространство — это пара (X, ρ) , где X — множество, а $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество X , если функция ρ очевидно подразумевается.

Утверждение 1.1. $(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|)$ является метрическим пространством.

Определение 1.2. Топологическое пространство — это пара (X, \mathcal{T}) , где X — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X , удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$, где $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \dots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, где $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$ (A — произвольное индексирующее множество);

Множество \mathcal{T} называется топологией на X , а элементы \mathcal{T} — открытыми подмножествами X .

Пример 1.1. 1. Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

2. Дискретная топология на любом множестве X : $\mathcal{T} = 2^X$.

3. На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство X называется слитымся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство X называется простым или несвязным двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Пространство X с топологиями \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 называется связным двоеточием.

Определение 1.3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар в X с центром x_0 и радиусом r — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.

Определение 1.4. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки x), содержащий x и лежащий в U .

Замечание 1.1. Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами). Доказательство этого факта см. в теореме (Т. 2.1) на стр. (5).

Определение 1.5. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \setminus U$ открыто.

Задача 1.1. Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.

Пример 1.2. Топология Зарисского: Рассмотрим множество \mathbb{C}^1 и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \dots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным). Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество X : будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.

Задача 1.2. Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.

Определение 1.6. База \mathfrak{B} топологии \mathcal{T} на X — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы \mathfrak{B} , т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Лемма 1.2 (Достаточное условие на базу топологии). Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ - набор подмножеств X . Тогда если выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in X \exists B_x \in \mathfrak{B} : x \in B_x$,
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} : (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$,

то \mathfrak{B} является базой некоторой топологии.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве \emptyset можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X , т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединения элементов базы задают топологию на X . □

Задача 1.3. Повторить доказательство для базы метрического пространства.

Определение 1.7. Предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathfrak{B} : U$ есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \mathfrak{B} : U = \bigcap_{i=1}^k P_i$, где $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.

Иначе говоря: предбаза Π топологии \mathcal{T} на X — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где \mathfrak{B} — база \mathcal{T} , такое, что: $\forall U \in \mathcal{T} : U$ есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.

$$\forall U \in \mathcal{T} : U = \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^m P_{ij}, \text{ где } P_{ij} \in \Pi, k, m \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Замечание 1.2. Любое множество задает предбазу некоторой топологии.

Пример 1.3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ — предбаза.

Тогда $\mathfrak{B} = \underbrace{\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi} \}$ — база,

$\mathcal{T} = \underbrace{\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}} \}$ — топология на X .

2 Лекция 2

Литература:

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. — Общая топология. Основные конструкции.
2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. — Элементарная топология.

Определение 2.1. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Если топология \mathcal{T} на X может быть порождена некоторой метрикой ρ на X , то пространство (X, \mathcal{T}) называется метризуемым.

Замечание 2.1. Существует ряд критериев метризуемости топологических пространств: см. Критерий метризуемости Нагаты — Ю.М.Смирнова, 1950-1951.

Определение 2.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0 — это множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$.

Теорема 2.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии, порождённой на X метрикой ρ .

Доказательство. Рассмотрим множество \mathfrak{B} всех открытых шаров в пространстве X : $\mathfrak{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$. Проверим для \mathfrak{B} оба пункта достаточного условия на базу:

1. Очевидно, $\forall x \in X \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$

2. Обозначим: $B_1 = O_{\varepsilon_1}(x_1)$, $B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2)$ и покажем, что $\forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 = O_\varepsilon(x) \in \mathfrak{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. По определению открытых шаров B_1 и B_2 : $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1$, $\rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Положим $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x_1, x), \frac{\varepsilon_2}{2} - \rho(x_2, x) \right\}$. Тогда: $\forall y \in O_\varepsilon(x)$:

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) = \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Значит, $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Аналогично: $\rho(y, x_2) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Т.к. это верно $\forall y \in O_\varepsilon(x)$, то: $O_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$, т.е. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Т.о. по достаточному условию на базу топологии: открытые шары в метрическом пространстве образуют базу топологии, порождённой метрикой этого пространства. \square

Определение 2.3. Пусть на множестве X заданы две топологии \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 . Говорят, что \mathcal{T}_2 сильнее \mathcal{T}_1 (\mathcal{T}_1 слабее \mathcal{T}_2) и пишут $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, т.е. если любое открытое в \mathcal{T}_1 множество будет открытым в \mathcal{T}_2 .

Такой способ сравнения топологий на множестве X относительно прост. Введённое отношение сравнения является отношением частичного порядка и образует на множестве всех топологий на X структуру частично упорядоченного множества (ЧУМа).

Пример 2.1. Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии на множестве X :

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}_2 = 2^X.$$

В некотором смысле это два полюса сравнения: антидискретная топология на X является слабой, а дискретная — сильнейшей, т.е. для любой топологии \mathcal{T} на X : $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2$. Тем не менее введённый порядок на X является частичным, и нетривиальные топологии могут быть несравнимы.

Задача 2.1. Метризуемы ли тривиальные топологии (= антидискретная и дискретная)? Ответ:

1. Рассмотрим дискретную метрику: $\rho_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$ Дискретная метрика порождает дискретную топологию.
2. Антидискретная топология неметризуема.

Определение 2.4 (Индукции топологии подпространства). Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда Y образует топологическое пространство с топологией, называемой индуцированной (с пространства X) топологией (топологией ограничения) $\mathcal{T}|_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Задача 2.2. Проверить, что индуцированная топология действительно является топологией на множестве Y , т.е. удовлетворяет аксиомам из определения топологии.

Пример 2.2. $X = \mathbb{R}^2$ — метрическое пространство с евклидовой метрикой, $Y \subset X$. Базой топологии, порождённой метрикой на пространстве X , являются открытые шары, а базой индуцированной топологии на Y являются всевозможные пересечения открытых шаров в X с Y .

Определение 2.5. Окрестность точки x в топологическом пространстве — это любое открытое множество этого пространства (т.е. элемент топологии), содержащее x .

Замечание 2.2. Из определений топологии и окрестности точки очевидно следует, что:

1. Пересечение конечного числа окрестностей точки является её окрестностью,
2. Объединение (произвольного числа) окрестностей точки является её окрестностью.

Утверждение 2.2. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Тогда $A \subseteq X$ — открыто \Leftrightarrow для каждой точки $x \in A$ существует её окрестность, лежащая в A .

Доказательство. (\Leftarrow): По условию: $\forall x \in A \exists O(x) \in \mathcal{T} : x \in O(x), O(x) \subseteq A$. Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x)$: $C \in \mathcal{T}$. Очевидно, что $A \subseteq C$, а т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subseteq A$, то $C \subseteq A$. Получаем, что $A = C$, значит, $A \in \mathcal{T}$.

(\Rightarrow): Раз A открыто, то A является окрестностью любой своей точки. \square

Определение 2.6. Пусть $x \in X$. Если $\{x\} \in \mathcal{T}$, то x называется изолированной точкой пространства X .

Замечание 2.3. В дискретной топологии на любом пространстве все точки являются изолированными.

Определение 2.7. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется точкой прикосновения множества A , если для любой её окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение 2.8. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется внутренней точкой множества A , если существует её окрестность $O(x)$: $O(x) \subset A$.

Определение 2.9 (A1). Замыкание множества A — это множество всех точек прикосновения A . Обозначение: \overline{A} .

Определение 2.10 (B1). Внутренность множества A — это множество всех внутренних точек A . Обозначение: $\text{Int}(A)$.

Задача 2.3. Показать, что: $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Определение 2.11 (A2). Замыкание \overline{A} множества A — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Иными словами, \overline{A} — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A .

Определение 2.12 (B2). Внутренность $\text{Int}(A)$ множества A — это объединение всех открытых множеств, лежащих в A . Иными словами, $\text{Int}(A)$ — это наибольшее по включению открытое множество, лежащее в A .

Теорема 2.3. Определение A1 эквивалентно определению A2; Определение B1 эквивалентно определению B2.

Доказательство. Доказательство эквивалентности определений A1 и A2 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.

Пусть $\text{Int}_1(A)$ — множество внутренних точек A в смысле определения B1, а $\text{Int}_2(A)$ — в смысле определения B2. Покажем, что эти множества равны:

(\subseteq): Если $x \in \text{Int}_1(A)$, то существует его окрестность $O(x) \subset A$. Но $O(x)$ — открыто, а значит, $O(x) \subset \text{Int}_2(A)$, и $x \in \text{Int}_2(A)$. Получаем, что $\text{Int}_1(A) \subseteq \text{Int}_2(A)$.

(\supseteq): Если $x \in \text{Int}_2(A)$, то x принадлежит какому-то открытому $V \subset A$. Но тогда мы можем взять V в качестве окрестности точки x . Получаем, что $x \in \text{Int}_1(A)$, а значит, $\text{Int}_1(A) \supseteq \text{Int}_2(A)$. Итак, $\text{Int}_1(A) = \text{Int}_2(A)$, а значит, определения B1 и B2 эквивалентны. \square

Определение 2.13. Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда x называется граничной точкой множества A , если x является точкой прикосновения A , но не является внутренней точкой A , т.е. если $x \in \overline{A}$, $x \notin \text{Int}(A)$.

Определение 2.14. Граница множества A — это множество всех граничных точек A . Обозначение: $\text{Bd}(A)$ или ∂A . По определению: $\text{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$.

Определение 2.15 (Понятия непрерывного отображения). Пусть (X, \mathcal{T}_X) , (Y, \mathcal{T}_Y) — топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $O(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y$ существует такая окрестность $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$, что $f(U(x_0)) \subset O(f(x_0))$.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением топологических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.4. Следующие условия эквивалентны:

1. Отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.
2. Прообраз любого открытого множества под действием f является открытым, т.е. $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.
3. Прообраз любого замкнутого множества под действием f является замкнутым.
4. Для любого $A \subseteq X$: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (На лекции утверждалось не включение, а равенство, но это неверно).

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий 1, 3 и 4 остаётся в качестве упражнения читателю.

Докажем (1) \Leftrightarrow (2):

(\Rightarrow): Пусть $V \subset Y$ открыто. Рассмотрим $\forall x \in f^{-1}(V)$: Т.к. $V \in \mathcal{T}_Y$ и $f(x) \in V$, то $\exists O(f(x)) \subset V$ — окрестность $f(x)$. Т.к. f непрерывно, то для найденной $O(f(x)) \exists U(x) \in \mathcal{T}_X$ — окрестность x : $f(U(x)) \subset O(f(x)) \subset V$. Значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Получаем, что любая точка из $f^{-1}(V)$ входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, а значит, $f^{-1}(V)$ открыто. Итак, прообраз любого открытого множества под действием f открыт.

(\Leftarrow): Пусть $x \in X$. Рассмотрим $\forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y$ — окрестность $f(x)$. Т.к. $O(f(x))$ открыто, то $f^{-1}(O(f(x)))$ открыто в X — выберем это множество в качестве окрестности x . Получаем, что $\forall x \in X \forall O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y \exists U(x) \in \mathcal{T}_X : f(U(x)) \subset O(f(x))$, т.е. f непрерывно. \square

3 Лекция 3

Замечание 3.1. Проверять непрерывность отображения топологических пространств удобно на уровне базы или предбазы: Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}_Y$ — база топологии на Y . Тогда отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно \Leftrightarrow прообраз базы (предбазы) открыт: $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{T}_X$

Пример 3.1. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной переменной ("функции из математического анализа").

2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ (Эта функция представляет собой пример накрытия $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$. Определение накрытия смотри (возможно) дальше в курсе).

3. Тривиальный пример: постоянное отображение $f(x) \equiv y_0$, где $f : X \rightarrow Y$ и $y_0 \in Y$.

4. Композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением: Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$; f, g — непрерывные отображения. Тогда $g \circ f$ — непрерывное отображение.

5. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство, $Z \subset X$, на Z индуцирована топология $\mathcal{T}_Z = \mathcal{T}|_Z$. Рассмотрим отображение включения: $i : Z \rightarrow X$, $i(x) = x$. Тогда i непрерывно в индуцированной топологии \mathcal{T}_Z .

6. Пусть в дополнение к предыдущему пункту: существует $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отображение ограничения: $f|_Z : Z \rightarrow Y$. Оно непрерывно, т.к. является композицией непрерывных отображений: $f|_Z = f \circ i$.

7. Непрерывность в метрических пространствах:

Определение 3.1 (Непрерывности отображения метрических пространств по Коши). Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$, где O_δ и O_ε — открытые шары в пространствах X и Y соответственно.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Определение 3.2 (Непрерывности отображения метрических пространств по Гейне). Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов X , сходящейся к x_0 , последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x_0)$.

Отображение f называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.

Задача 3.1. Доказать эквивалентность определений непрерывности отображения метрических пространств по Коши и по Гейне.

Теорема 3.1 (Кривая Пеано). Существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$.

Доказательство этой теоремы смотри дальше в курсе.

Определение 3.3. Пусть X, Y — топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда отображение f называется гомеоморфизмом, если: 1) f — биекция, 2) f непрерывно, 3) f^{-1} непрерывно.

Если между пространствами X и Y существует гомеоморфизм, то эти пространства называются гомеоморфными.

Замечание 3.2. Свойство "быть гомеоморфными" очевидно является отношением эквивалентности на множестве топологических пространств, а значит, разбивает это множество на классы эквивалентности.

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, можно найти топологические свойства этих пространств, которые должны сохраняться при любом гомеоморфизме, но у этих пространств отличаются.

Пример 3.2. $f(x) = \operatorname{tg}(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — гомеоморфизм.

3.1 Связность и линейная связность.

Определение 3.4. Топологическое пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

Если же пространство X так разбить нельзя, то оно называется связным.

Пример 3.3. 1. Любое пространство с дискретной топологией несвязно, если содержит более одного элемента.

2. Любое пространство с антидискретной топологией связно.

Теорема 3.2. Отрезок $I = [0, 1]$ с топологией, индуцированной естественной топологией вещественной прямой (т.е. топологией, порождённой на \mathbb{R} евклидовой метрикой), связен.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы открытыми подмножествами отрезка I считаются интервалы вида (a, b) , где $0 < a < b < 1$; полуинтервалы вида $[0, a)$, где $0 < a \leq 1$; полуинтервалы вида $(b, 1]$, где $0 \leq b < 1$; сам отрезок I и \emptyset ; а также их всевозможные объединения и конечные пересечения.

Докажем теперь теорему от противного: пусть отрезок I связан, т.е. $I = A \cup B$, где: 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in A$. Т.к. A открыто, то 0 лежит в A вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда или эта окрестность нуля совпадает со всем отрезком: $I \subseteq A \Rightarrow I = A \Rightarrow B = \emptyset$ — получаем противоречие, или эта окрестность нуля представляет собой полуинтервал, т.е. $\exists \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 1 : [0, \varepsilon) \subseteq A$. Множество таких ε ограничено ($0 < \varepsilon \leq 1$), следовательно, существует его супремум. Обозначим это множество Ω ($\Omega \subseteq A$), а его супремум — ε_0 :

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \Omega = \sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \{ \varepsilon \mid [0, \varepsilon) \subseteq A \} = \varepsilon_0.$$

Докажем теперь, что тогда $[0, \varepsilon_0] \subseteq A$. Т.к. ε_0 — супремум множества Ω , то по одному из свойств супремума: $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \varepsilon_0 - \delta < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon \in \Omega$, т.е. $[0, \varepsilon) \subset \Omega \subset A$. Значит, ε_0 является точкой прикосновения множества Ω , а значит, и точкой прикосновения множества A .

Т.к. A и B являются открытыми и дополняют друг друга до I , то в индуцированной топологии на I они являются одновременно открытыми и замкнутыми. Значит, $A = \overline{A}$, т.е. A содержит все свои точки прикосновения. Значит, $\varepsilon_0 \in A$. Но т.к. A открыто, то $\exists U(\varepsilon_0)$ — окрестность ε_0 : $U(\varepsilon_0) \subset A$. Но тогда или $\varepsilon_0 = 1$, а значит, $A = I \Rightarrow B = \emptyset$ — противоречие, или $\varepsilon_0 \neq 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : [0, \varepsilon_0 + \delta) = [0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \delta) \subset A \Rightarrow \varepsilon_0 + \delta \in \Omega$ — противоречие с тем, что $\varepsilon_0 = \sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \Omega$.

Во всех случаях получаем противоречия, значит, исходное предположение неверно, а значит, отрезок I в индуцированной топологии связан. \square

Утверждение 3.3. *Непрерывный образ связного пространства связан, т.е. если X связно, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. От противного: пусть $f(X) = A \cup B$, где 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причём 1) $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset$, т.к. $A, B \neq \emptyset$; 2) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, т.к. $A \cap B = \emptyset$; 3) $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ — открыты в X , т.к. A, B — открыты в индуцированной с Y на $f(X)$ топологии, а f — непрерывное отображение. Значит, X несвязно — противоречие. \square

Определение 3.5. *Путь γ в топологическом пространстве X , соединяющий точки $x_0, y_0 \in X$ — это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$. Точка x_0 называется началом пути γ , а точка y_0 — концом пути γ .*

Замечание 3.3. *Из доказанных теоремы и утверждения следует, что $\gamma([0, 1])$ — связно в топологии, индуцированной с области значений.*

Определение 3.6. *Пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует путь γ , соединяющий их и лежащий в пространстве X , т.е. $\gamma([0, 1]) \subset X$.*

Теорема 3.4. *Пусть X линейно связно. Тогда X связно.*

Доказательство. От противного: Пусть $X = A \cup B$, где 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cap B = \emptyset$; 3) A, B — открыты в топологии на X . Т.к. X линейно связно, то $\forall x_0 \in A$ и $\forall y_0 \in B$ можно соединить путём: существует непрерывное отображением $\gamma : [0, 1] = I \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0, \gamma(I) \subset X$. Тогда получаем, что $\gamma(I) = (\gamma(I) \cap A) \cup (\gamma(I) \cap B)$, причём $(\gamma(I) \cap A)$ и $(\gamma(I) \cap B)$ непусты, не пересекаются и открыты в топологии, индуцированной с X на $\gamma(I)$. Значит, $\gamma(I)$ несвязно — противоречие. \square

Замечание 3.4. *Обратное неверно. Пример: объединение графика функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x > 0$ с отрезком $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Это подмножество плоскости \mathbb{R}^2 связно, но не является линейно связным. Доказательство этого факта остаётся читателю в качестве упражнения.*

4 Лекция 4

4.1 Компактность.

Определение 4.1. *Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство. Система $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}$ открытых подмножеств в X называется (открытым) покрытием множества $Y \subseteq X$, если $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.*

Определение 4.2. *Топологическое пространство X называется компактным (иначе, компактом), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Замечание 4.1. *В устаревшей терминологии описанное выше свойство называлось бикompактностью, а в определении компактности (иначе, счётно-компактности) требовалась счётность исходного покрытия.*

Теорема 4.1. *Отрезок $[a, b]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие отрезка $[a, b]$. Рассмотрим множество

$$\Pi = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ покрывается конечным числом элементов покрытия } \{U_\alpha\}\}.$$

Т.о. $\Pi \subseteq [a, b]$, причём $\Pi \neq \emptyset$, т.к. $\exists U_{\alpha_0} \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} : a \in U_{\alpha_0}$. Значит, Π — непустое ограниченное подмножество в \mathbb{R} , а значит, существует $\sup \Pi$. Обозначим $\varepsilon_0 = \sup \Pi$. Т.к. $\Pi \subseteq [a, b]$, то $\varepsilon_0 \in [a, b]$, значит, $\exists U_{\tilde{\alpha}_0} \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} : \varepsilon_0 \in U_{\tilde{\alpha}_0}$. Но $U_{\tilde{\alpha}_0}$ открыто, значит, $\exists \delta > 0 : (\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0 + \delta) \subset U_{\tilde{\alpha}_0}$. Т.к. ε_0 — супремум множества Π , то по свойству супремума: $\exists x_\delta \in \Pi : x_\delta \in (\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0]$. Но тогда по определению ε_0 : $[a, x_\delta]$ покрывается конечным набором элементов из $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Этот набор с добавленным элементом $U_{\tilde{\alpha}_0}$ является конечным покрытием отрезка $[a, \varepsilon_0]$, значит, $\varepsilon_0 \in \Pi$.

Предположим теперь, что $\varepsilon_0 < b$. Тогда ε_0 является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, а значит, $\exists \varepsilon' > 0 : (\varepsilon_0 - \varepsilon', \varepsilon_0 + \varepsilon') \subset [a, b]$. Тогда $[\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon'}{2}, \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{2}] \subset [a, b]$. По определению ε_0 : $[a, \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon'}{2}]$ покрывается конечным набором элементов из $\{U_\alpha\}$. Но тогда этот набор с добавленным элементом $(\varepsilon_0 - \varepsilon', \varepsilon_0 + \varepsilon')$ является конечным покрытием отрезка $[a, \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon'}{2}]$, а значит, $\varepsilon_0 \neq \sup \Pi$ — противоречие. Получаем, что $\varepsilon_0 = b$, а значит, весь отрезок $[a, b]$ покрывается конечным числом элементов из $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, т.е. является компактом. \square

Лемма 4.2 (о вложенных отрезках). Пусть дана система вложенных отрезков: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$. Тогда их пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$. При этом, если $(b_n - a_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то их пересечение состоит из одной точки.

Доказательство. Данная лемма доказывается в курсе математического анализа, так что здесь её доказательство мы приводить не будем. Однако мы докажем обобщение этой леммы на случай топологических пространств. \square

Определение 4.3. Система $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств множества X называется *центрированной*, если пересечение любого конечного числа её элементов не пусто.

Лемма 4.3 (Обобщение леммы о вложенных отрезках для топологических пространств). Пусть X — топологическое пространство, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых непустых подмножеств X такая, что $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$. Тогда если X — компактно, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Данная лемма немедленно следует из следующей теоремы с тем лишь замечанием, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто. \square

Теорема 4.4. Топологическое пространство X компактно \Leftrightarrow любая центрированная система замкнутых подмножеств в X имеет непустое пересечение.

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — центрированная система замкнутых подмножеств в X и $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Тогда множества $U_i = X \setminus F_i$ открыты в X . Рассмотрим $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = X.$$

Значит, система $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ образует покрытие X . Т.к. X компактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$:

$$\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} = X.$$

Но тогда $\bigcap_{j=1}^n F_{i_j} = \emptyset$, а значит, система $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ не является центрированной — противоречие. Значит, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. (\Rightarrow) : Доказательство этого утверждения остаётся читателю в качестве упражнения. \square

Определение 4.4. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если $\forall x \in X$ и для любой окрестности $O(x)$ точки x существует окрестность $V(x)$ такая, что замыкание $\overline{V(x)} \subset O(x)$ и $\overline{V(x)}$ — компакт.

Определение 4.5. Семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств в X называется *локально конечным*, если $\forall x \in X$ существует окрестность $O(x)$ точки x , которая пересекается лишь с конечным числом множеств из семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Определение 4.6. Говорят, что семейство V подмножеств множества X вписано в семейство U , если всякий элемент семейства V содержится в некотором элементе семейства U .

Определение 4.7. Топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие.

Пример 4.1. Пространства $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ являются паракомпактными.

Лемма 4.5 (о наследовании компактности). Пусть X — топологическое пространство, $X \supset A$ и A — замкнуто. Тогда:

1. X компактно $\Rightarrow A$ компактно;
2. X локально компактно $\Rightarrow A$ локально компактно;

3. X паракомпактно $\Rightarrow A$ паракомпактно.

Задача 4.1. Доказать лемму выше.

Утверждение 4.6. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда если X компактно, то $f(X) \subset Y$ тоже компактно.

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие $f(X)$. Рассмотрим семейство $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$: в силу непрерывности f оно состоит из открытых множеств и является покрытием X , а значит, в силу компактности X из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{f^{-1}(V_{\alpha_i})\}_{i=1}^n$. Но тогда семейство $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ будет конечным покрытием $f(X)$, а значит, $f(X)$ — компакт. \square

Задача 4.2. Рассмотреть аналогичные утверждения о локальной компактности и паракомпактности.

Определение 4.8 (Аксиомы отделимости). Пусть X — топологическое пространство. Тогда говорят, что X удовлетворяет аксиоме отделимости T_i тогда и только тогда, когда:

1. T_0 (аксиома Колмогорова): $\forall x, y \in X, x \neq y$: существует окрестность $O(x)$ точки x такая, что $y \notin O(x)$ или существует окрестность $O(y)$ точки y такая, что $x \notin O(y)$.
2. T_1 : $\forall x, y \in X, x \neq y$: найдутся окрестности $O(x)$ точки x и $O(y)$ точки y такие, что $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y)$.
3. T_2 (аксиома Хаусдорфа): $\forall x, y \in X, x \neq y$: найдутся окрестности $O(x)$ точки x и $O(y)$ точки y такие, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.
4. T_3 : для любой точки x из X и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего x , существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$ (где окрестность $O(F)$ — это любое такое подмножество $A \subset X$, что $A \supset F$ и $A \in \mathcal{T}$).
5. T_4 : для любых F_1, F_2 — замкнутых подмножеств в X таких, что $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, существуют непересекающиеся окрестности $O(F_1)$ и $O(F_2)$.

Пример 4.2. 1. Любое пространство с антидискретной топологией не удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 .

2. Связное двоеточие удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 .

3. Любое пространство с дискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 .

4. Любое пространство с антидискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 .

5. Любое пространство с антидискретной топологией удовлетворяет аксиоме отделимости T_4 .

6. Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = \{[a, +\infty)_{a \in \mathbb{R}}, \mathbb{R}, \emptyset\}$. Оно не удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 , но удовлетворяет аксиоме отделимости T_4 , т.к. все замкнутые множества в нём имеют вид $\mathbb{R}, \emptyset, F_a = (-\infty, a), a \in \mathbb{R}$, и для любого замкнутого множества F_a существует единственная окрестность $O(F_a) = \mathbb{R}$, а значит, $\forall b > a$: отделить b и F_a нельзя. При этом не существует таких замкнутых множеств F_a и F_b , что $F_a \cap F_b = \emptyset$.

5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику T_1 -пространства:

Утверждение 5.1. X является T_1 -пространством тогда и только тогда, когда для любых x множество $\{x\}$ замкнуто.

Доказательство. (\Rightarrow) : Пусть T_1 . Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Rightarrow y$ не является точкой прикосновения множества X . Значит $X \setminus \{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом x единственная предельная (прикосновенная) точка множества X .

(\Leftarrow) : Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X \setminus \{x\}, x \in Y \setminus \{y\}$ \square

Утверждение 5.2. Вообще говоря из T_3 не следует T_0 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Возмем точку x , тогда замкнутое подмножество $F \subset X$, не содержащее x , только пустое; $x \in X, \emptyset \in \tau$ \square

Определение 5.1. Пространство X регулярно, если оно T_3 и T_1

Утверждение 5.3. T_3 и $T_1 \Rightarrow T_2$

Доказательство. Возьмем x и y , такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x)$: $y \notin O(x)$. Рассмотрим $X \setminus O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме T_3 существуют окрестности $O(x)$ и $O(F)$: $O(x) \cap O(F) = \emptyset$. Найдем окрестность точки y . Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. \square

Пример 5.1. Если X метрическое пространство, то X хаусдорфово.

Рассмотрим полезную характеристику пространства T_2 .

Утверждение 5.4. X пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \cap \overline{O(x)} = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим x .

Доказательство. $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O(x)}$, пересечение по всем окрестностям точки x . Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O(x)}$, где пересечение по всем окрестностям точки x . Тогда $\forall \overline{O(x)} y \in \overline{O(x)} \Leftrightarrow \forall V(y) V(y) \cap O(x) \neq \emptyset$. Так как X пространство T_2 , то существует $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Противоречие с тем, что y принадлежит хотя бы одному $\overline{O(x)}$. \square

\Leftarrow упражнение.

Утверждение 5.5. Из T_4 следует T_0 .

Доказательство. Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\emptyset, X\}$. Можем взять $F_1 = \emptyset$, $F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \emptyset$. \square

Утверждение 5.6. Из T_4 не следует T_3 .

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}, \emptyset, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является T_4 . Возьмем замкнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку b , причем $b \notin F$. Единственной окрестностью F является вся \mathbb{R} , так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее F . Тогда любая окрестность точки b будет нетривиально пересекаться с \mathbb{R} . Значит X не является T_3 . \square

Утверждение 5.7. $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}$, $F = F_2$, применяем аксиому T_4 . \square

Определение 5.2. X – нормально, если оно $T_4 + T_1$.

Лемма 5.8. Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) F_1, F_2 – замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1, \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \emptyset$.

Доказательство. Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \emptyset$. Тогда $x \in F_2$, но $F_2 = F_2 \Rightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

Теорема 5.9. Метрическое пространство нормально.

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома T_2 , из которой следует аксиома T_1 . Докажем T_4 . Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.

Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \emptyset$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с F_1 . \square

6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказано теорема

Теорема 6.1. Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T_4 + T_1$.

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

6.1 Функциональная отделимость

Определение 6.1. $A \subset X$ - всюду плотно в X , если $\bar{A} = X$.

Теорема 6.2 (Лемма Урысона). Пусть X - нормальное пространство. A, B - два замкнутых непересекающихся подмножества X . Тогда существует непрерывная функция $F : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$

Доказательство. Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств U , которые мы заиндексируем двоично-рациональными числами из $[0, 1]$.

1. $U_1 = X \subset B$
2. U_0 должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0$ (**используем нормальность**) $\subset U_1$
3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\bar{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям U_0 и U_1 .
4. $U_{\frac{1}{4}} : \bar{U}_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \bar{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \bar{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$
5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с q столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\bar{U}_{\frac{k}{2^{n-1}}} \subset U_q \subset \bar{U}_q \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Построили системс открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\bar{U}_q \subset U_r$. Теперь определим функцию F .

$$F(x) = \begin{cases} \inf \{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств A и B . Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где O_α - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0, a)$, $(b, 0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0, a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf \{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \tilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0, a)) = \bigcup_{\tilde{q} < a} U_{\tilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим F , заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup \{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup \{r : x \notin U_r\} = \sup \{r : x \notin \bar{U}_r\} = \sup \{r : x \in X \setminus \bar{U}_r\}$ - это множество открыто} Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация:

□

Пример 6.1 (Нормального, но не метризуемого пространства).

6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

Замечание 6.1 (характеризация хаусдорфова пространства). Пусть X - хаусдорфово \Leftrightarrow для каждой $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \bar{O}(x)$

Доказательство. $(\Leftarrow) : y \notin \bar{O}(x) \Leftrightarrow y \in X \setminus \bar{O}(x)$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y) : O(y) \cap \bar{O}(x) = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \bar{O}(x) = \emptyset$.

$(\Rightarrow) :$ от противного

□

Утверждение 6.3. Замкнутое подмножество компакта - компактно

Доказательство. Очевидно.

□

Лемма 6.4. В хаусдорфовом топологическом пространстве X компактное подмножество F является замкнутым.

Доказательство. Очевидно.

□

Задача 6.1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

Лемма 7.1 (Лемма Урысона). X - нормальное пространство, A, B - замкнутые непересекающиеся подмножества X . Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1] : f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.

7.1 Разбиение единицы

Лемма 7.2 (об ужатии). X - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, где U_i - открытое множество. Тогда существует набор открытых $V_i, i = 1, \dots, N$, таких что $\bar{V}_i \subset U_i, i = 1, \dots, N$ и $X \subset \bigcup V_i$.

Доказательство (последовательное). Основание $k = 1$, имеем U_1 . Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A$$

Видно, что B - замкнуто. Очевидно, что $A \subset U_1$.

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать $O(A)$ причем $\bar{O}(A) \subset U_1$, обозначим $V_1 = O(A)$.

Докажем, что $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$ - покрытие X . Если x лежит в объед $U_i, i \geq 2$, то он лежит в $V_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$. Если x лежит в $X \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N) = A \subset V_1$, тогда выполняется тоже самое.

Рассмотрим $1 \leq k < N$. Пусть построены $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_N$.

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_N$$

Следовательно мы можем продолжить k до N . □

Задача 7.1. Подробно расписать доказательство выше.

Определение 7.1. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Носитель функции f (обозн $\text{supp} f$) = $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Определение 7.2. Пусть X - топологическое пространство, U_1, \dots, U_N - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ называется разбиением единицы подчиненное покрытию U_1, \dots, U_N , если выполнены два условия:

1. $\text{supp} f_i = \bar{V}_i \subset U_i$
2. $\sum_{i=1}^N f_i = 1$ на X

Теорема 7.3 (о разбиении единицы). Пусть X - нормальное пространство, U_1, \dots, U_N - конечное покрытие, тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию U_1, \dots, U_N .

Доказательство. По лемме об ужатии, в U_i можно вписать V_i такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$. По лемме Урысона для $A = \bar{V}_i, B = X \setminus U_i$, будет существовать непрерывная функция $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_i(A) = \{1\}$ и $\varphi_i(B) = \{0\}$, то есть $\varphi_i = 1$ на A и $\varphi_i = 0$ вне A . Рассмотрим функцию f_i определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^N \varphi_i}$$

Причем $\text{supp} f_i$ зависит от φ_i , то есть $\text{supp} f_i = \text{supp} \varphi_i = \bar{V}_i$ □

Задача 7.2. Если f - непрерывное отображение, то $\text{supp} f$ - замкнутое.

Определение 7.3. A называется всюду плотным в топологическом пространстве X , если $\bar{A} = X$.

Определение 7.4. A называется нигде не плотным, если $(\text{int} \bar{A} = \emptyset$ - другое определение) для каждого непустого открытого U существует открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Определение 7.5. X - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.

Пример 7.1 (Канторово множество). Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0, 2$, то это элемент Канторова множества.

Можно рассмотреть $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_i}{3^i}$, $\tilde{a}_i = 1$, если $a_i = 2$, и $\tilde{a}_i = 0$, если $a_i = 0$.

Задача 7.3. Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.

Определение 7.6. X - совершенное, если не содержит изолированных точек.

Теорема 7.4 (Кривая Пеано). Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция $f : I \rightarrow I \times I$, где $I = [0, 1]$

8 Лекция 8

8.1 Кривые Пеано

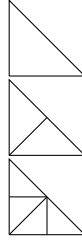
Определение 8.1. Кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ - кривая, если γ - непрерывное отображение.

Кривая Пеано - непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1]^2$.

Замечание 8.1. Гильберт разделил квадрат на 4 части, потом каждую часть также делил на 4. Пеано на 9.

На картинке можно посмотреть в Федорчуке.

Доказательство. Докажем построив заполнение кривой равнобедренного треугольника.



Пусть Δ - прямоугольный равнобедренный треугольник и $I = [0, 1]$. На каждом шаге будем разбивать треугольник и отрезок. На n -ом шаге будем иметь 2^n треугольников и отрезок, разбитый на столько же частей. Будем занумеровывать треугольники и части отрезка двоичным кодом.

Будем иметь следующую нумерацию: $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{i_1 \dots i_n}$. Определим соседние элементы как элементы, у которых есть общая сторона (для разбиения треугольников), общая точка (для разбиения отрезка). Так же мы имеем цепочку вложенных отрезков (треугольников).

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Эти цепочки имеют строго убывающий размер.

Из элементарных геометрических соображений можно получить значение диаметров этих множеств.

$$\text{diam}(I_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{diam}(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Очевидно, что все эти подмножества компактны (т.к. замкнутые и ограниченные подмножества полного метрического пространства).

Замечание 8.2. Рассказ про игру.

Определим отображение $f : I \rightarrow I \times I$.

1) Рассмотрим $t \in I = [0, 1]$. Для t будет существовать последовательность убывающий отрезков

$$t \in I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$$

Т.к. t может лежать на границе отрезков, то последовательность определена неоднозначно. Возьмем последовательность треугольников с теми же индексами. Это будет последовательность вложенных компактов, причем диаметр этого множества стремится к 0. Т.о. пересечение этих треугольников будет состоять из одной точки, эту единственную точку обозначим за $f(t)$.

У этого рассуждения есть недостаток, t может принадлежать двум множествам $I_{i_1 \dots i_n}$ и $I_{j_1 \dots j_n}$. но в этом случае может объединить эти два множества и получить $J_{i_1 \dots i_n}$, также определим множество $P_n(t) = \{ \}$. (если t - хорошее, то $P_n(t) = \Delta_{i_1 \dots i_n}$, если t - плохое, то $P_n(t)$ - объединению двух соседних треугольников).

Получим еще одну последовательность компактов:

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \dots$$

Утверждение 8.1.

$$\text{diam} P_n \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}$$

Опять получили последовательность вложенных компактов..

Докажем, что f - сюръективно. Рассмотрим точку x_0 из треугольника. Точка будет лежать в определенном последовательности "разрезанных" треугольников. Рассмотрим последовательность подотрезков с теми же индексами, у этой последовательности будет одной общей точкой. Остается доказать, что это точка - прообраз точки x_0 . Это верно, т.к. иначе бы образы этих точек лежали бы в разных треугольниках.

Докажем, что f - непрерывно. - Очевидно. \square

Определение 8.2. $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ - последовательность функций.

$f_n \Rightarrow 1$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое что для каждого $n \geq N$ для каждого $x \in X$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Теорема 8.2. Предел равномерно сходящийся функций непрерывен.

9 Лекция 9

Задача 9.1. Непрерывное отображение (гомеоморфизм) треугольника на квадрат. $f : \Delta \rightarrow I \times I$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y, x + y), & x > y \\ (2x, 2y), & x = y = (x + \min(x, y), x + \min(x, y)) \\ (x + y, x + y), & x < y \end{cases}$$

9.1 Теорема Титца о продолжении непрерывной функции

Теорема 9.1 (Титца о продолжении непрерывной функции). Пусть X - нормальное топологическое пространство. $F \subset X$ - замкнутое подмножество. $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная ограниченная (т.е. $\|\varphi\| = \sup_{x \in F} |\varphi(x)| < \infty$) функция.

Тогда существует $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывное продолжение функции φ , которое сохраняет норму $\|\Phi\| = \sup_{y \in X} |\Phi(y)| = \|\varphi\|$

Доказательство. Будем строить две последовательности функций.

1. $\Phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\varphi_n : F \rightarrow \mathbb{R}$

Замечание 9.1. Пусть $f_n(x) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ - фундаментальная последовательность, тогда существует $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$

Задача 9.2. Доказать, что фундаментальная последовательность равномерно сходится.

Алгоритм построения последовательностей.

1. $\varphi_0 = \varphi$, так как φ - ограниченная функция, то выполняется $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = M_0 < +\infty$ Определим два замкнутых множества в X

$$A_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \leq -\frac{M_0}{3} \right\}$$

$$B_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \geq \frac{M_0}{3} \right\}$$

Очевидно, что эти множества являются замкнутыми и непересекаются.

Применим лемму Урысона к отрезку $[-\frac{M_0}{3}, \frac{M_0}{3}]$, получим функцию $\Phi_0(x)$, которая на A_0 тождественна $-\frac{M_0}{3}$, на B_0 тождественна $\frac{M_0}{3}$.

Рассмотрим "номер" функции Φ_0 : $\|\Phi_0\| \leq \frac{M_0}{3}$.

2. определим функции $\varphi_1 = \varphi_0 - \Phi_0$ на множестве F . Эта функция непрерывна. Рассмотрим норму введенной функции на 3-х участках.

- (a) $\varphi_0 \geq \frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = \frac{M_0}{3}$
- (b) $-\frac{M_0}{3} \leq \varphi_0 \leq \frac{M_0}{3}$; $-\frac{M_0}{3} \leq \Phi_0 \leq \frac{M_0}{3}$
- (c) $\varphi_0 \leq -\frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = -\frac{M_0}{3}$

Из этих неравенств видно, что

$$\|\varphi_1\| \leq \frac{2M_0}{3}$$

3. Примени тоже построение, что и в предыдущем пункте, счетное число раз и получим две последовательности функций.

Таким образом получили, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Phi_n \text{ на множестве } F$$

И

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{M_0}{3} \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \frac{2M_0}{3} \quad (1)$$

Следовательно

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M_0 \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M_0 \quad (2)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$. Докажем, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^n \Phi_i$ будет фундаментальной.

$$\|S_n - S_m\| = \|S_{m+1} + \dots + S_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\Phi_i| \leq \frac{M_0}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^l = M_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

Таким образом она сходится и $S_n \Rightarrow \Phi$

Докажем, что Φ совпадает с φ на F .

$$\left\| \varphi - \sum_{i=0}^n \Phi_i \right\| = \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M_0$$

При предельном переходе получим $\varphi = \Phi$ на множестве F . □

10 Лекций 10

Определение 10.1. (Вторая аксиома счетности) Топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, если у него есть счетная база.

Определение 10.2. Локальная база окрестностей в точке $x_0 \in X$ – это набор окрестностей $O_\alpha = B_{x_0}$ (= база в точке x_0), если для любой окрестности U , которой принадлежит точка x_0 , тогда $\exists \alpha : \exists O_\alpha(x_0) \subset U$.

Определение 10.3. (Первая аксиома счетности) X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если $\forall x_0 \in X$ в ней существует счетная база.

Утверждение 10.1. $(X, \rho) \Rightarrow$ первая аксиома счетности, где (X, ρ) – метрическое пространство.

Доказательство. Система $O_r(x_0)$, $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ – счетная база в точке. □

Утверждение 10.2. Из второй аксиомы счетности следует сепарабельность пространства.

Доказательство. Пусть B_k счетная база. В каждом элементе базы выбираем элемент, что и будет счетное всюду плотное множество. □

Утверждение 10.3. Из второй аксиомы счетности следует первая аксиома счетности.

Вопросы:

- Пример неметризуемого пространства, удовлетворяющей первой аксиоме счетности.
- Пример неметризуемого пространства, удовлетворяющей второй аксиоме счетности.
- Пример метризуемого пространства без второй аксиомы счетности. (Это \mathbb{R} с дискретной метрикой).
- Пример не сепарабельного пространства.

Теорема 10.4. (Линделёфа) Пусть X удовлетворяет второй аксиоме счетности, тогда из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

Доказательство. Введем $\Omega \subset \{U_\alpha\}$, где $\{U_\alpha\}$ – покрытие. Имеем счетную базу $\{O_1, O_2, \dots, O_n, \dots\}$. Тогда $\Omega = \{O_i \mid \exists \alpha(i) : O_i \in U_{\alpha(i)}\}$. Так как $\Omega \subset \{O_1, O_2, \dots, O_n, \dots\}$, Ω счетное (не более чем счетное). □

Утверждение 10.5. U_{α_i} образуют счетное подмножество.

Теорема 10.6. Сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Счетная база $O_q(s)$, $s \in S$ – счетное, всюду плотное множество, $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. □

Пример 10.1. Прямая Зоргенфрея = стрелка \mathbb{R} , база $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Она сепарабельна, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Определение 10.4. (Непрерывность по Коши) $f : X \mapsto Y$. Пусть $f(x_0) = y_0$, $\forall O(y_0) \exists U(x_0) : f(U(x_0)) \subset O(y_0)$

Определение 10.5. (Непрерывность по Гейне) $f : X \mapsto Y$. $\{x_n\} \mapsto x_0 \in X$, при $n \mapsto +\infty$, если $\forall O(x_0) \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \geq N x_n \in O(x_0)$.

Теорема 10.7. В метрическом пространстве данные определения эквивалентны.

Теорема 10.8. (Урысона о достаточном условии метризуемости) Нормированное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности метризуемо.

Определение 10.6. Несвязная сумма – это топологическое пространство $X \sqcup Y = \{a_x \in X, a_y \in Y\}$, $\tau_{X \sqcup Y} = \{u_X, u_Y\}$

Определение 10.7. Декартово произведение топологических пространств – это $\{(x, y), x \in X, y \in Y\}$ с топологией $\tau_{X \times Y} = \{u_X \times u_Y \mid u_X \in \tau_X, u_Y \in \tau_Y\}$ – топология прямого произведения.

Определение 10.8. (Топология Тихонова) $\pi_1 : X \times Y \mapsto X$ и $\pi_2 : X \times Y \mapsto Y$ – проекции. Тогда предбаза топологии Тихонова: $\pi_1^{-1}(u_x)$ и $\pi_2^{-1}(u_y)$ прообразы открытых в X и Y множеств.

Замечание 10.1. Топология Тихонова полезна в случае счетного произведения топологических пространств: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times \dots$, $\pi_i^{-1}(u_i)$ – предбаза топологии.

11 Лекция 11

11.1 Тихоновская топология и теорема Тихонова

Определение 11.1. Тихоновская топология – топология на произведение топологических пространств таким образом, что координатные функции непрерывны.

Замечание 11.1. В конечномерной ситуации Тихоновская топология совпадает с топологией произведения. В бесконечномерном случае это не так.

Теорема 11.1 (Тихонов). $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$, где X_{α} – компактное пространство. $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ – компактно в Тихоновской топологии.

Доказательство. Возможно будет потом. □

Пример 11.1. Пусть $\{0, 1\}$ – несвязное двоеточие. Рассмотрим $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$.
В топологии Тихонова это гомеоморфно Канторову множеству. Можно задать следующим образом

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x_k}{3^k}$$

Задача 11.1. Доказать, что это гомеоморфизм в Тихоновской топологии.

В топологии произведения получится $\tau = 2^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$.

Пример 11.2. Гильбертов куб(кирпич) = пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией. Он компактен по теореме Тихонова.

Гильбертов куб гомеоморфен следующему пространству

$$[0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \dots$$

А это ряды, причем $x_n \leq \frac{1}{n}$. Причем $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty$.

11.2 Фактор-топология

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Пусть на X определено отношение эквивалентности. И тогда $X/$ – классы эквивалентности. Если x лежит в X , то $[x]$ – его класс эквивалентности в $X/$. Определим топологию τ на $X/$ по следующему правилу:

$$U \in \tau \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \tau_X$$

Пример 11.3. Пусть $X = \mathbb{R}^1$, $x \sim y = x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Тогда $\mathbb{R}^1/ \rightarrow S^1$

Аналогично $T^2 = \mathbb{R}^2/$

Пример 11.4. $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, если $x \neq y$ то $y - x \in \mathbb{Q}$

Задача 11.2. Доказать, что пространство X/\sim не хаусдорфово.

Как понять, что $f : X/\sim \rightarrow Y$ непрерывно?

$$\tilde{f}(x) = f(\pi(x))$$

Теорема 11.2. f непрерывно тогда и только тогда, когда \tilde{f} - непрерывна

Доказательство. (\Leftarrow): Пусть \tilde{f} - непрерывна, тогда $\tilde{f}^{-1}(U)$ - открыто в X . Из коммутативности диаграммы (формулы выше), следует, что $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$ открыто в X . Необходимо доказать, что $V = f^{-1}(U)$ открыто в Y , оно открыто в силу определения фактор топологии.

(\Rightarrow): композиция непрерывных. □

11.3 Склеивка пространств

Рассматриваем $X \sqcup Y$. $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Определение 11.2. Букет: $X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$

Цилиндр: $X \times I$, где I - отрезок.

Конус: $\text{Cone}(X)$ - стягиваем основание конуса.

Надстройка: ???

11.4 Одноточечная компактификация

Определение 11.3. Компактификация пространства X = вложение i X в CX , где CX - компакт, и топология X индуцирована вложением i .

Определение 11.4 (одноточечная компактификация Александрова, введена в 1924 году). Пусть $CX = X \sqcup N$, где N - точка, со следующей топологией.

$$\tau_{CX} = \begin{cases} U \subset X - \text{открыто} \\ W = V \sqcup N, V \subset X, V = X \setminus K, K - \text{замкнуто компактно} \end{cases}$$

Следующее утверждение не дописано.

Теорема 11.3. CX с определенной топологией является компактным пространством.

Доказательство. Рассмотрим K - компакт. Пусть $\tilde{U}_\alpha = \{U_\alpha, W_\beta\}$ - покрытие CX , в это покрытие точно входит одно $W_{\beta_0} = V_{\beta_0} \sqcup N$. $V_{\beta_0} = X \setminus K_{\beta_0}$ - дополнение к компактному. □

12 Лекция 12

12.1 Алгебраическая топология. Теория гомотопий

Рассматриваем отображения $f_0 : X \rightarrow Y$ и $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_t \in C(X, Y)$ - пространство непрерывных функций. Пусть $t \in [0, 1] = I$, $f_t(x) = F(x, t)$.

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

Т.е. F - отображения из цилиндра в пространство Y .

Определение 12.1. Гомотопия - это непрерывное отображение $F : X \times I \rightarrow Y$, такое что $F(x, 0) = f_0$, $F(x, 1) = f_1$.

Утверждение 12.1. Гомотопность отображений $f : X \rightarrow Y$ является отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность ($f \sim f$): $F(x, t) = f(x, t)$. Симметричность ($f \sim g \Rightarrow g \sim f$): $\exists F(x, t) \Rightarrow \exists \tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$. Транзитивность ($f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$): $\exists F(x, t)$ и $G(x, t) \Rightarrow$

$$\exists \Phi(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1), & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\Phi(x, t)$ непрерывна при $t \neq \frac{1}{2}$. Рассмотрим $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} F(x, t) = F(x, \frac{1}{2}) = g$. G непрерывна, тогда $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}+} G(x, t) = G(x, \frac{1}{2}) = g$.

Таким образом $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \Phi(x, t) = g$ и g непрерывна. □

Задача 12.1. $f(x, y)$ непрерывно по аргументам в отдельности. Тогда f непрерывно.

Обозначение: количество гомотопических классов $\pi(X, Y) := C(X, Y) / \sim$. Класс $f : [f] \in \pi(X, Y)$.

Определение 12.2. Топологические пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными $X \sim Y$, если $\exists f : X \mapsto Y$ и $\exists g : Y \mapsto X$, где f и g непрерывны, такие что $f \circ g : Y \mapsto Y$, $g \circ f : X \mapsto X$ и $f \circ g \sim Id_Y$, $g \circ f \sim Id_X$.

Пример 12.1. $\mathbb{R}^n \sim \{\bar{0}\}$. Рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \mapsto \{\bar{0}\}$, по правилу $f(x) = \bar{0} \forall x$ и $g : \{\bar{0}\} \mapsto \mathbb{R}^n$, по правилу $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Заметим, что f, g непрерывны. $f \circ g(\bar{0}) = f(\bar{0}) = \bar{0} \Rightarrow f \circ g = Id_{\{\bar{0}\}}$. Также $g \circ f(x) = g(\bar{0}) = \bar{0}$. $F(\vec{x}, t) = t\vec{x}$. При $t = 1 : F(\vec{x}, 1) = Id_{\mathbb{R}^n}$. При $t = 0 : F(\vec{x}, 0) = 0$. Таким образом $g \circ f(x) \equiv \bar{0}(x) \sim Id_{\mathbb{R}^n}$.

Утверждение 12.2. Гомотопность топологических пространств является отношением эквивалентности.

Замечание 12.1. Гомотопность пространств X и Y слабее гомеоморфности, то есть из гомеоморфности следует гомотопность. $\exists f, f^{-1} | \varphi^{-1} = Id_Y$, $f^{-1} f = Id_X$.

Определение 12.3. Пусть задан гомотопический класс пространства X . $[X]$ называется его гомотопическим типом.

Определение 12.4. Топологическое пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Задача 12.2. $I = [0, 1]$ стягиваем.

Утверждение 12.3. Пусть $f, g : X \mapsto I = [0, 1]$ непрерывны. Тогда $f \sim g$.

Утверждение 12.4. Пусть $f, g : X \mapsto Y$, где Y - стягиваемо. Тогда $f \sim g$.

Определение 12.5. Пусть $A \subseteq X$, (X, τ) - топологическое пространство. Тогда ретракция (сильная) - это $\Gamma : X \mapsto A$ - непрерывная, такая что $\Gamma|_A \equiv Id_A$ и A - (сильный) ретракт. Ретракция (слабая) - это $\Gamma : X \mapsto A$ - непрерывная, такая что $\Gamma|_A \equiv Id_A$ и A - (слабый) ретракт.

Пример 12.2. Кольцо $\overline{D_1^2} \overline{D_2^2}$

Определение 12.6. Деформация пространства X в подпространство $A \subset X$ - это гомотопия $D : X \times I \mapsto X$, такая что $D(x, 0) = x \forall x \in X$ и $D(x, 1) \in A \forall x \in X$.

Определение 12.7. Если дополнительно $D(x, t) \in A \forall x \in A, \forall t \in I$, то A - сильный деформационный ретракт.

13 Лекция 13

13.1 Фундаментальная группа

Пусть X - топологическое пространство, выберем в нем две точки x_0, x_1 . Рассмотрим множество путей из x_0 в x_1 .

Определение 13.1. Пусть - непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Определение 13.2 (гомотопия путей - связная гомотопия). Гомотопия, сохраняющая точки на границах отрезка, для отображений - $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma_i(0) = x_0, \gamma_i(1) = x_1$.

Определение 13.3. Пространство путей из x_0 в $x_1 = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X : \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$. Обозначается $\Omega(x_0, x_1)$.

Замечание 13.1. Отношение гомотопности - отношение эквивалентности.

Определение 13.4. $\pi^x(x_0, x_1) = \Omega(x_0, x_1) / \sim$ - множество гомотопических классов путей

Умножение путей. Можем умножать пути, у которых начало первого и конец второго совпадают, т.е. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, где γ_1 - путь от x_0 до x_1 , γ_2 - путь от x_1 до x_2 .

$$\gamma_1 \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Видно, что операция не ассоциативна, но $\gamma_1(\gamma_2 \gamma_3) \sim (\gamma_1 \gamma_2) \gamma_3$. Докажем это.

Доказательство. Построим гомотопию.

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{4}{s+1}t) & 0 \leq t < t_1 = \frac{s+1}{4} \\ \gamma_2(4t - 4t_1) & t_1 \leq t < t_2 = \frac{s+2}{4} \\ \gamma_3(???) & t_2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

□

Таким образом умножение путей ассоциативно с точностью до гомотопии.

Определение 13.5. Петля с фиксированным началом = замкнутый путь, т.е. $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$.

Определение 13.6. Рассмотрим $\Omega(x_0, x_0)/\sim$ с операцией умножения путей. Это фундаментальная группа, обозначается $\pi_1(X, x_0)$

Замечание 13.2. Умножение классов эквивалентности $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$.

Теорема 13.1. Это действительно группа.

Доказательство. Проверим корректность. Пусть $\gamma_i, \gamma'_i \in [\gamma_i]$, необходимо доказать, что $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma'_1][\gamma'_2]$ - очевидно.

Ассоциативность уже доказана.

Существование нейтрального элемента $e = [\gamma : [0, 1] \rightarrow x_0]$

Обратный элемент $[\gamma]^{-1} = [\gamma(1-t)]$ □

Зависимость π_1 от начальной точки. Выберем две различные точки в пространстве X - x_0 и x_1 . И между этими точками существует путь $\tilde{\gamma}$.

Петле(классу гомотопической эквивалентности) из $[\gamma] \in \Omega(x_0)/\sim$ сопоставляем путь $[\tilde{\gamma}\gamma\tilde{\gamma}^{-1}]$, т.е. мы задали отображение из $\pi_1(X, x_1)$ в $\pi_1(X, x_0)$, обозначим его $[\gamma]^*$.

Утверждение 13.2. $[\gamma]^*$ изоморфизм групп

Доказательство. Очевидно. □

Таким образом, если X - линейно связно, то фундаментальная группа не зависит от выбора точки.

Определение 13.7. Если фундаментальная группа тривиальна, то пространство называется односвязным.

14 Лекция 14

Замечание 14.1. Даты досрочного экзамена: 16, 17. email: dmitry.millionschikov@math.msu.ru

Определение 14.1. Пространство X называется односвязным, если любые два пути с общими началами концом гомотопны(гомотопия связанная).

Теорема 14.1. Если X линейно связное, то X односвязно тогда и только тогда, когда $\pi_1(x) = \{0\}$

Доказательство. (\Rightarrow): Пусть $gamта_1$ - петля с началом в точек x_0 . $\gamma_0 = \{\gamma_1(t) = x_0 \forall t\}$. В силу односвязности $\gamma_1 \sim \gamma_0 = const$, следовательно тривиальная $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$;

(\Leftarrow): Петля $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ с началом в точке x_0 и $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, следовательно $\gamma_0\gamma_1^{-1} \sim const(x_0) = \{0\}$

$$\gamma_1 \sim (\gamma_0\gamma_1^{-1})\gamma_1 \sim \gamma_0(\gamma_1^{-1}\gamma_1) \sim \gamma_0$$

□

14.1 Накрытие

Пусть $p : \tilde{X} \rightarrow X$ - непрерывное отображение между двумя линейно связными пространствами.

Определение 14.2. p - накрытие, если для $x \in X$ существует окрестность $U = U(x)$ и $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in D_{CN}} V_i$, где $p : V_i \rightarrow U$ - сужение p на V_i - гомеоморфизм.

Пример 14.1. $\tilde{X} = X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ - тривиальный пример.

Пример 14.2. $\tilde{X} = \mathbb{R} \rightarrow X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, где $p(t) = (\cos t, \sin t)$, т.е. $t \mapsto e^{2\pi it}$

Пример 14.3. Пусть \tilde{X}, X - две окружности. $p(z) = z^n$

Пример 14.4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$, $p = (p_{окр}, p_{окр})$

Пример 14.5. $\tilde{X} = S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ - отождествляем противоположные относительно центра точки.

Лемма 14.2 (Лебега). Пусть X - компактное метрическое пространство с метрикой ρ , $\{U_\alpha\}$ - покрытие, тогда существует $r > 0$ (число Лебега покрытия) такое, что любой шар $O_r(x) \subset U_{\tilde{\alpha}}$ для некоторого $\tilde{\alpha}$

Доказательство. Т.к. есть покрытие у пространства X , то у каждой точки $x \in X$ существует r_x такой, что $O_{r_x} \subset U_i$ для некоторого i .

Утверждение 14.3. $\{O_{\frac{1}{2}r_x}(x)\}$ - покрытие X .

Т.к. $\{O_{\frac{1}{2}r_x}(x)\}$ - компакт, то будет существовать конечное подпокрытие.

Определим Лебегово число $\tilde{r} = \min_i \frac{1}{2}r_{x_i}$

Сдвинем шар так, чтобы выполнялось $y \in O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i) \Leftrightarrow x_i \in O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(y)$

$$O_r(y) \subset O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(y) \subset O_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i) \subset U_{\tilde{\alpha}}$$

□

Теорема 14.4 (Следствие). $f : X \rightarrow Y$, X - компакт в метрическом пространстве, Y . Если $\{U_\alpha\}$ - покрытие Y существует $r > 0$ такое, что любой шар $O_r(x) \subset U_\alpha$.

Теорема 14.5 (о накрывающем пути). $p : \tilde{X} \rightarrow X$ - накрытие. $\gamma : I \rightarrow X$ - непрерывный путь, $\gamma(0) = x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Тогда существует единственное $\tilde{\gamma}$ такое, что $p\tilde{\gamma} = \gamma$

Доказательство. Будет потом.

Докажем единственность.

□

Утверждение 14.6. Накрывающий путь единств.

Утверждение 14.7. $f_0, f_1 : Y \rightarrow \tilde{X}$, Y - связное, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ - накрытие, $pf_0 = pf_1$. Тогда $Y' = \{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$. Тогда из связности Y следует, что $Y' = Y$ или $Y' = \emptyset$.

Задача 14.1. Доказать утверждения выше.

Теорема 14.8 (о накрывающей гомотопии).

15 Лекция 15

Все пространства хаусдорфовы.

Определение 15.1. Функция $k(x) = 0 \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ - число $p^{-1}(x)$, число прообразов. - число листов накрытия.

Задача 15.1. Из определения k следует, что это локально постоянная функция.

Задача 15.2. X - связно, $k(x)$, $X \rightarrow D$ - локально постоянно, тогда $k(x) = \text{const}$.

Определение 15.2 (топологическое действие). Дополнительно требуем, что бы при фиксированном элементе группы отображения было гомеоморфизмом.

Определение 15.3. Вполне разрывное действие - действие такое, что для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, такая что, при действии $gU \cap g'U = \emptyset$ при $g \neq g'$.

Теорема 15.1. Пусть \tilde{X} - связное, локально линейное связное (из этого следует, что оно линейное связное), \tilde{X} - односвязное. На \tilde{X} действует свободное и вполне разрывно действует дискретное не более, чем счетная группа Γ .

Тогда $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ - накрытие и $\Gamma \cong \pi_1(\tilde{X}/\Gamma)$

Доказательство. $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ - факторпространство или пространство орбит. Пусть $U \subset \tilde{U}$. Рассмотрим $p(U)$ - почему открыто?

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in \Gamma} gU$$

- оно открыто, т.о. отображение p - открытое.

Нужно доказать, что ограничение p на произвольный лист gU - это $gU \rightarrow p(U)$ - биекция. Нужно взять u таким образом, что $gU \cap g'U = \emptyset$. Пусть $y_1, y_2 \in gU$ и $p(gy_1) = p(gy_2)$. Второе $\Leftrightarrow gy_1 \sim gy_2 \Leftrightarrow$ существует $g' \in \Gamma$ $gy_1 = g'(gy_2) = (g'g)y_2$, тогда $gU = g'gU \neq \emptyset$ - противоречие, следовательно $g' = e \in \Gamma$.

Остается доказать, что обратное тоже непрерывно. - самостоятельно.

Докажем изоморфизм групп. Построим отображение $\psi : \Gamma \rightarrow \pi_1(\tilde{X}/\Gamma)$

$$g \in \Gamma \mapsto [\gamma_g \text{ ???????}]$$

Остается проверить, что это гомоморфизм.

□

Определение 15.4. Накрытие называется универсальным, если \tilde{X} - односвязно.

Действие непрерывных отображений на π_1 . f - непрерывное отображение - индуцирует $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$, тогда $(gf)_* = g_*f_*$

Задача 15.3. $z : X \rightarrow A$ - ретракция, i - вложение A в X , тогда $zi = \text{id}_A$, $r^*i^* = \text{id}_{*A}$

Задача 15.4. $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$, тогда они гомотопически эквивалентны.

Теорема 15.2 (Брауэр). $f : D^2 \rightarrow D^2$ - непрерывное отображение, то существует неподвижная точка.

Доказательство. Очевидно.

□