# Лекции по введению в топологию

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
10 ноября 2024 г.

*tg: @gallehus

## Содержание

# 1 Лекция 1

## 1.1 Основные понятия топологии.

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

**Определение 1.1.** *Метрическое пространство — это пара $(X, \rho)$, где $X$ — множество, а $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

*Функция $\rho$ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество $X$, если функция $\rho$ очевидно подразумевается.*

**Утверждение 1.1.** $\left(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|\right)$ *является метрическим пространством.*

**Определение 1.2.** *Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{T})$, где $X$ — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств $X$, удовлетворяющий следующим аксиомам:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$, *где* $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, *где* $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$ *($A$ — произвольное индексирующее множество);*

*Множество $\mathcal{T}$ называется топологией на $X$, а элементы $\mathcal{T}$ — открытыми подмножествами $X$.*

**Пример 1.1.**

1. *Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве $X$:* $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.
2. *Дискретная топология на любом множестве $X$:* $\mathcal{T} = 2^X$.
3. *На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство $X$ называется слипшимся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство $X$ называется простым двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing, \{2\}\}$. Простраство $X$ с топологиями $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ называется связным двоеточием.*

**Определение 1.3.** *Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство. Открытый шар в $X$ с центром $x_0$ и радиусом $r$ — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.*

**Определение 1.4.** *Пусть $X$ - метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки $x$), содержащий $x$ и лежащий в $U$.*

**Замечание 1.1.** *Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами). Доказательство этого факта* *см. в теореме (Т. 2.1) на стр. (5).*

**Определение 1.5.** *Пусть $X$ - топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \backslash U$ открыто.*

**Задача 1.1.** *Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.*

**Пример 1.2.** *Топология Зарисского: Рассмотрим множество $\mathbb{C}^1$ и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \ldots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным).*
*Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество $X$: будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.*

**Задача 1.2.** *Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.*

**Определение 1.6.** *База $\mathfrak{B}$ топологии $\mathcal{T}$ на $X$ — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы $\mathfrak{B}$, т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.*

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

**Лемма 1.2** (Достаточное условие на базу топологии). *Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ - набор подмножеств $X$. Тогда если выполняются следующие условия:*

1. $\forall x \in X \ \ \exists B_x \in \mathfrak{B}\colon \ x \in B_x$,
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}: \ (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$,

*то $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии.*

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качество $\varnothing$ можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве $X$ - объединение всех элементов базы, оно будет равно $X$, т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \ \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединение элементов базы задают топологию на $X$. □

**Задача 1.3.** *Повторить доказательство для базы метрического пространства.*

**Определение 1.7.** *Предбаза $\Pi$ топологии $\mathcal{T}$ на $X$ — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где $\mathfrak{B}$ — база $\mathcal{T}$, такое, что: $\forall U \in \mathfrak{B}$: $U$ есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е. $\forall U \in \mathfrak{B}$: $U = \bigcap_{i=1}^k P_i$, где $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.*
*Иначе говоря: предбаза $\Pi$ топологии $\mathcal{T}$ на $X$ — это множество $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$, где $\mathfrak{B}$ — база $\mathcal{T}$, такое, что: $\forall U \in \mathcal{T}$: $U$ есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.*

$$\forall U \in \mathcal{T} : \ U = \bigcup \bigcap_{i=1}^k P_i, \text{ где } P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

**Замечание 1.2.** *Любое множество задает предбазу некоторой топологии.*

**Пример 1.3.** *Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*
*Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ — предбаза.*
*Тогда $\mathfrak{B} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi}\}$ — база,*

$\mathcal{T} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}}\}$ — *топология на $X$.*

# 2 Лекция 2

Литература:

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. — Общая топология. Основные конструкции.
2. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. — Элементарная топология.

**Определение 2.1.** *Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Если топология $\mathcal{T}$ на $X$ может быть порождена некоторой метрикой $\rho$ на $X$, то пространство $(X, \mathcal{T})$ называется метризуемым.*

**Замечание 2.1.** *Существует ряд критериев метризуемости топологических пространств: см. Критерий метризуемости Нагаты — Ю.М.Смирнова, 1950-1951.*

**Определение 2.2.** *Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x_0$ — это множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$.*

**Теорема 2.1.** *Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство. Тогда шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу топологии, порождённой на $X$ метрикой $\rho$.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество $\mathfrak{B}$ всех открытых шаров в пространстве $X$: $\mathfrak{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$. Проверим для $\mathfrak{B}$ оба пункта достаточного условия на базу:
1. Очевидно, $\forall x \in X\ \exists O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$
2. Обозначим: $B_1 = O_{\varepsilon_1}(x_1)$, $B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2)$ и покажем, что $\forall x \in B_1 \cap B_2\quad \exists B_3 = O_\varepsilon(x) \in \mathfrak{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. По определению открытых шаров $B_1$ и $B_2$: $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1,\ \rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Положим $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x_1, x), \frac{\varepsilon_2}{2} - \rho(x_2, x)\right\}$. Тогда: $\forall y \in O_\varepsilon(x)$:

$$\rho(y, x_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_1) = \varepsilon + \rho(x, x_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Значит, $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Аналогично: $\rho(y, x_2) < \varepsilon_2 \Rightarrow y \in O_{\varepsilon_2}(x_2)$. Т.к. это верно $\forall y \in O_\varepsilon(x)$, то: $O_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$, т.е. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Т.о. по достаточному условию на базу топологии: открытые шары в метрическом пространстве образуют базу топологии, порождённой метрикой этого пространства. □

**Определение 2.3.** *Пусть на множестве $X$ заданы две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Говорят, что $\mathcal{T}_2$ сильнее $\mathcal{T}_1$ ($\mathcal{T}_1$ слабее $\mathcal{T}_2$) и пишут $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, т.е. если любое открытое в $\mathcal{T}_1$ множество будет открытым в $\mathcal{T}_2$.*

Такой способ сравнения топологий на множестве $X$ относительно прост. Введённое отношение сравнения является отношением частичного порядка и образует на множестве всех топологий на $X$ структуру частично упорядоченного множества (ЧУМа).

**Пример 2.1.** *Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии на множестве $X$:*

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\} \subset \mathcal{T}_2 = 2^X.$$

*В некотором смысле это два полюса сравнения: антидискретная топология на $X$ является слабейшей, а дискретная — сильнейшей, т.е. для любой топологии $\mathcal{T}$ на $X$: $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2$. Тем не менее введённый порядок на $X$ является частичным, и нетривиальные топологии могут быть несравнимы.*

**Задача 2.1.** *Метризумы ли тривиальные топологии(= антидискретная и дискретная)? Ответ:*

1. *Рассмотрим дискретную метрику: $\rho_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$ Дискретная метрика порождает дискретную топологию.*
2. *Антидискретная топология неметризуема.*

**Определение 2.4** (Индуцированной топологии подространства). *Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда $Y$ образует топологическое пространство с топологией, называемой индуцированной (с $X$) топологией (топологией ограничения) $\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.*

**Задача 2.2.** *Проверить, что индуцированная топология действительно является топологией на множестве $Y$, т.е. удовлетворяет аксиомам из определения топологии.*

**Пример 2.2.** *$X = \mathbb{R}^2$ - метрическое пространство с евклидовой метрикой, $Y \subset X$. Базой топологии, порождённой метрикой на пространстве $X$, являются открытые шары, а базой индуцированной топологии на $Y$ являются всевозможные пересечения открытых шаров в $X$ с $Y$.*

**Определение 2.5.** *Окрестность точки $x$ в топологическом пространстве — это любое открытое множество этого пространства (т.е. элемент топологии), содержащее $x$.*

**Замечание 2.2.** *Из определений топологии и окрестности точки очевидно следует, что:*

1. *$\bigcap_{i=1}^n$ Окрестностей точки $x$ — Окрестность точки $x$,*
2. *$\bigcup_{\alpha \in A}$ Окрестностей точки $x$ — Окрестность точки $x$.*

**Утверждение 2.2.** *Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Тогда $A \subseteq X$ - открыто $\Leftrightarrow$ для каждой точки $x \in A$ существует её окрестность, лежащая в $A$.*

*Доказательство.* ($\Leftarrow$): По условию: $\forall x \in A\ \exists O(x) \in \mathcal{T} : x \in O(x), O(x) \subseteq A$. Рассмотрим $C = \bigcup_{x \in A} O(x)$: $C \in \mathcal{T}$. Очевидно, что $A \subseteq C$, а т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subseteq A$, то $C \subseteq A$. Получаем, что $A = C$, значит, $A \in \mathcal{T}$.

($\Rightarrow$): Раз $A$ открыто, то $A$ является окрестностью любой своей точки. □

**Определение 2.6.** *Пусть $x \in X$. Если $\{x\} \in \mathcal{T}$, то $x$ называется изолированной точкой пространства $X$.*

**Замечание 2.3.** *В дискретной топологии на любом пространстве все точки являются изолированными.*

**Определение 2.7.** *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда $x$ называется точкой прикосновения множества $A$, если для любой её окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \varnothing$.*

**Определение 2.8.** *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда $x$ называется внутренней точкой множества $A$, если существует её окрестность $O(x)$: $O(x) \subset A$.*

**Определение 2.9** (A1)**.** *Замыкание множества $A$ — это множество всех точек прикосновения $A$. Обозначение: $\overline{A}$.*

**Определение 2.10** (B1)**.** *Внутренность множества $A$ — это множество всех внутренних точек $A$. Обозначение:* $\mathrm{Int}(A)$.

**Задача 2.3.** *Показать, что:* $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

**Определение 2.11** (A2)**.** *Замыкание $\overline{A}$ множества $A$ — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $A$. Иными словами, $\overline{A}$ — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее $A$.*

**Определение 2.12** (B2)**.** *Внутренность* $\mathrm{Int}(A)$ *множества $A$ — это объединение всех открытых множеств, лежащих в $A$. Иными словами,* $\mathrm{Int}(A)$ *— это наибольшее по включению открытое множество, лежащее в $A$.*

**Теорема 2.3.** *Определение A1 эквивалентно определению A2; Определение B1 эквивалентно определению B2.*

*Доказательство.* Доказательство эквивалентности определений A1 и A2 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем эквивалентность определений B1 и B2.
Пусть $\mathrm{Int}_1(A)$ - множество внутренних точек $A$ в смысле определения B1, а $\mathrm{Int}_2(A)$ — в смысле определения B2. Покажем, что эти множества равны:

($\subseteq$): Если $x \in \mathrm{Int}_1(A)$, то существует его окрестность $O(x) \subset A$. Но $O(x)$ — открыто, а значит, $O(x) \subset \mathrm{Int}_2(A)$, и $x \in \mathrm{Int}_2(A)$. Получаем, что $\mathrm{Int}_1(A) \subseteq \mathrm{Int}_2(A)$.

($\supseteq$): Если $x \in \mathrm{Int}_2(A)$, то $x$ принадлежит какому-то открытому $V \subset A$. Но тогда мы можем взять $V$ в качестве окрестности точки $x$. Получаем, что $x \in \mathrm{Int}_1(A)$, а значит, $\mathrm{Int}_1(A) \supseteq \mathrm{Int}_2(A)$. Итак, $\mathrm{Int}_1(A) = \mathrm{Int}_2(A)$, а значит, определения B1 и B2 эквивалентны. □

**Определение 2.13.** *Пусть $x \in X$, $A \subset X$. Тогда $x$ называется граничной точкой множества $A$, если $x$ является точкой прикосновения $A$, но не является внутренней точкой $A$, т.е. если $x \in \overline{A}$, $x \notin \mathrm{Int}(A)$.*

**Определение 2.14.** *Граница множества $A$ — это множество всех граничных точек $A$. Обозначение:* $\mathrm{Bd}(A)$ *или $\partial A$. По определению:* $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.

**Определение 2.15** (Понятия непрерывного отображения)**.** *Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ — топологические пространства, $f : X \to Y$. Отображение $f$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $O(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y$ существует такая окрестность $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$, что $f(U(x_0)) \subset O(f(x_0))$.*

*Отображение $f$ называется непрерывным (непрерывным отображением топологических пространств), если оно непрерывно во всех $x \in X$.*

**Утверждение 2.4.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно.*
2. *Прообраз любого открытого множества под действием $f$ является открытым, т.е. $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.*
3. *Прообраз любого замкнутого множества под действием $f$ является замкнутым.*
4. *Для любого $A \subseteq X$: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (На лекции утверждалось не включение, а равенство, но это неверно).*

*Доказательство.* Доказательство эквивалентности условий 1, 3 и 4 остаётся в качестве упражнения читателю. Докажем (1) $\Leftrightarrow$ (2):

($\Rightarrow$): Пусть $V \subset Y$ открыто. Рассмотрим $\forall x \in f^{-1}(V)$: Т.к. $V \in \mathcal{T}_Y$ и $f(x) \in V$, то $\exists O(f(x)) \subset V$ — окрестность $f(x)$. Т.к. $f$ непрерывно, то для найденной $O(f(x))$ $\exists U(x) \in \mathcal{T}_X$ — окрестность $x : f(U(x)) \subset O(f(x)) \subset V$. Значит, $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Получаем, что любая точка из $f^{-1}(V)$ входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, а значит, $f^{-1}(V)$ открыто. Итак, прообраз любого открытого множества под действием $f$ открыт.

($\Leftarrow$): Пусть $x \in X$. Рассмотрим $\forall\, O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y$ — окрестность $f(x)$. Т.к. $O(f(x))$ открыто, то $f^{-1}(O(f(x)))$ открыто в $X$ — выберем это множество в качестве окрестности $x$. Получаем, что $\forall x \in X\ \forall\, O(f(x)) \in \mathcal{T}_Y\ \exists U(x) \in \mathcal{T}_X : f(U(x)) \subset O(f(x))$, т.е. $f$ непрерывно. □

# 3 Лекция 3

**Замечание 3.1.** *Проверять непрерывность отображения топологических пространств удобно на уровне базы или предбазы: Пусть* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}_Y$ *— база топологии на* $Y$*. Тогда отображение* $f : X \to Y$ *непрерывно* $\Leftrightarrow$ *прообраз базы (предбазы) открыт:* $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathcal{T}_X$

**Пример 3.1.**
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функции одной переменной ("функции из математического анализа").*
2. $f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ *(Эта функция представляет собой пример накрытия* $f : \mathbb{R}^1 \to S^1$*. Определение накрытия смотри (возможно) дальше в курсе).*
3. *Тривиальный пример: постоянное отображение* $f(x) \equiv y_0$*, где* $f : X \to Y$ *и* $y_0 \in Y$*.*
4. *Композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением: Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$*;* $f, g$ *— непрерывные отображения. Тогда* $g \circ f$ *— непрерывное отображение.*
5. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ *— топологическое пространство,* $Z \subset X$*, на* $Z$ *индуцирована топология* $\mathcal{T}_Z = \mathcal{T}|_Z$*. Рассмотрим отображение включения:* $i : Z \to X$*,* $i(x) = x$*. Тогда* $i$ *непрерывно в индуцированной топологии* $\mathcal{T}_Z$*.*
6. *Пусть в дополнение к предыдущему пункту: существует* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение. Рассмотрим отображение ограничения:* $f|_Z : Z \to Y$*. Оно непрерывно, т.к. является композицией непрерывных отображений:* $f|_Z = f \circ i$*.*
7. *Непрерывность в метрических пространствах:*

**Определение 3.1** (Непрерывности отображения метрических пространств по Коши)**.** *Пусть* $(X, \rho_X)$*,* $(Y, \rho_Y)$ *— метрические пространства,* $f : X \to Y$*. Тогда отображение* $f$ *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$*, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$*, где* $O_\delta$ *и* $O_\varepsilon$ *— открытые шары в пространствах* $X$ *и* $Y$ *соответственно.*

*Отображение* $f$ *называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех* $x \in X$*.*

**Определение 3.2** (Непрерывности отображения метрических пространств по Гейне)**.** *Пусть* $(X, \rho_X)$*,* $(Y, \rho_Y)$ *— метрические пространства,* $f : X \to Y$*. Тогда отображение* $f$ *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$*, если для любой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов* $X$*, сходящейся к* $x_0$*, последовательность* $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* $f(x_0)$*.*

*Отображение* $f$ *называется непрерывным (непрерывным отображением метрических пространств), если оно непрерывно во всех* $x \in X$*.*

**Задача 3.1.** *Доказать эквивалентность определений непрерывности отображения метрических пространств по Коши и по Гейне.*

**Теорема 3.1** (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывное отображение* $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$

Доказательство этой теоремы смотри дальше в курсе

**Определение 3.3.** *Пусть* $X$*,* $Y$ *— топологические пространства,* $f : X \to Y$*. Тогда отображение* $f$ *называется гомеоморфизмом, если: 1)* $f$ *— биекция, 2)* $f$ *непрерывно, 3)* $f^{-1}$ *непрерывно.*

*Если между пространствами* $X$ *и* $Y$ *существует гомеоморфизм, то эти пространства называются гомеоморфными.*

**Замечание 3.2.** *Свойство "быть гомеоморфными" очевидно является отношением эквивалентности на множестве топологических пространств, а значит, разбивает это множество на классы эквивалентности.*

*Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, можно найти топологические свойства этих пространств, которые должны сохраняться при любом гомеоморфизме, но у этих пространств отличаются.*

**Пример 3.2.** $f(x) = tg(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{f} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ *— гомеоморфизм.*

## 3.1 Связность и линейная связность.

**Определение 3.4.** *Топологическое пространство* $X$ *называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.*

*Если же пространство* $X$ *так разбить нельзя, то оно называется связным.*

**Пример 3.3.**
1. *Любое пространство с дискретной топологией несвязно, если содержит более одного элемента.*
2. *Любое пространство с антидискретной топологией связно.*

**Теорема 3.2.** *Отрезок* $I = [0, 1]$ *с топологией, индуцированной естественной топологией вещественной прямой (т.е. топологией, порождённой на* $\mathbb{R}$ *евклидовой метрикой), связен.*

*Доказательство.* Заметим, что в условиях теоремы открытыми подмножествами отрезка $I$ считаются интервалы вида $(a,b)$, где $0<a<b<1$; полуинтервалы вида $[0,a)$, где $0<a\leq 1$; полуинтервалы вида $(b,1]$, где $0\leq b<1$; сам отрезок $I$ и $\varnothing$; а также их всевозможные объединения и конечные пересечения.

Докажем теперь теорему от противного: пусть отрезок $I$ связен, т.е. $I=A\cup B$, где: 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) $A,B$ — открыты. Без ограничения общности можем считать, что $0\in A$. Т.к. $A$ открыто, то 0 лежит в $A$ вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда или эта окрестность нуля совпадает со всем отрезком: $I\subseteq A \Rightarrow I=A \Rightarrow B=\varnothing$ — получаем противоречие, или эта окрестность нуля представляет собой полуинтервал, т.е. $\exists\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq 1:\ [0,\varepsilon)\subseteq A$. Множество таких $\varepsilon$ ограниченно ($0<\varepsilon\leq 1$), следовательно, существует его супремум. Обозначим это множество $\Omega$ ($\Omega\subseteq A$), а его супремум — $\varepsilon_0$:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\Omega=\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\{\,\varepsilon\mid[0,\varepsilon)\subseteq A\,\}=\varepsilon_0.$$

Докажем теперь, что тогда $[0,\varepsilon_0]\subseteq A$. Т.к. $\varepsilon_0$ — супремум множества $\Omega$, то по одному из свойств супремума:
$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:\ \varepsilon_0-\delta<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon\in\Omega$, т.е. $[0,\varepsilon)\subset\Omega\subset A$. Значит, $\varepsilon_0$ является точкой прикосновения множества $\Omega$, а значит, и точкой прикосновения множества $A$.

Т.к. $A$ и $B$ являются открытыми и дополняют друг друга до $I$, то в индуцированной топологии на $I$ они являются одновременно открытыми и замкнутыми. Значит, $A=\overline{A}$, т.е. $A$ содержит все свои точки прикосновения. Значит, $\varepsilon_0\in A$. Но т.к. $A$ открыто, то $\exists U(\varepsilon_0)$ — окрестность $\varepsilon_0$: $U(\varepsilon_0)\subset A$. Но тогда или $\varepsilon_0=1$, а значит, $A=I \Rightarrow B=\varnothing$ — противоречие, или $\varepsilon_0\neq 1 \Rightarrow \exists\delta>0:\ [0,\varepsilon_0+\delta)=[0,\varepsilon_0]\cup[\varepsilon_0,\varepsilon_0+\delta)\subset A \Rightarrow \varepsilon_0+\delta\in\Omega$ — противоречие с тем, что $\varepsilon_0=\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\Omega$.

Во всех случаях получаем противоречия, значит, исходное предположение неверно, а значит, отрезок $I$ в индуцированной топологии связен. $\square$

**Утверждение 3.3.** *Непрерывный образ связного пространства связен, т.е. если $X$ связно, $f:X\to Y$ — непрерывное отображение, то $f(X)$ связно.*

*Доказательство.* От противного: пусть $f(X)=A\cup B$, где 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) $A,B$ — открыты в индуцированной с $Y$ на $f(X)$ топологии. Но тогда $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$, причём 1) $f^{-1}(A),f^{-1}(B)\neq\varnothing$, т.к. $A,B\neq\varnothing$; 2) $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\varnothing$, т.к. $A\cap B=\varnothing$; 3) $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ — открыты в $X$, т.к. $A,B$ — открыты в индуцированной с $Y$ на $f(X)$ топологии, а $f$ — непрерывное отображение. Значит, $X$ несвязно — противоречие. $\square$

**Определение 3.5.** *Путь $\gamma$ в топологическом пространстве $X$, соединяющий точки $x_0,y_0\in X$ — это непрерывное отображение $\gamma:[0,1]\to X$ такое, что $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=y_0$. Точка $x_0$ называется началом пути $\gamma$, а точка $y_0$ — концом пути $\gamma$.*

**Замечание 3.3.** *Из доказанных теоремы и утверждения следует, что $\gamma([0,1])$ — связно в топологии, индуцированной с области значений.*

**Определение 3.6.** *Пространство $X$ называется линейно связным, если для любых двух точек $x,y\in X$ существует путь $\gamma$, соединяющий их и лежащий в пространстве $X$, т.е. $\gamma([0,1])\subset X$.*

**Теорема 3.4.** *Пусть $X$ линейно связно. Тогда $X$ связно.*

*Доказательство.* От противного: Пусть $X=A\cup B$, где 1) $A,B\neq\varnothing$; 2) $A\cap B=\varnothing$; 3) $A,B$ — открыты в топологии на $X$. Т.к. $X$ линейно связно, то $\forall x_0\in A$ и $\forall y_0\in B$ можно соединить путём: существует непрерывное отображением $\gamma:[0,1]=I\to X$ такое, что $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=y_0$, $\gamma(I)\subset X$. Тогда получаем, что $\gamma(I)=(\gamma(I)\cap A)\cup(\gamma(I)\cap B)$, причём $(\gamma(I)\cap A)$ и $(\gamma(I)\cap B)$ непусты, не пересекаются и открыты в топологии, индуцированной с $X$ на $\gamma(I)$. Значит, $\gamma(I)$ несвязно — противоречие. $\square$

**Замечание 3.4.** *Обратное неверно. Пример: объединение графика функции $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x>0$ с отрезком $\{\,(0,y)\mid -1\leq y\leq 1\,\}$. Это подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ связно, но не является линейно связным. Доказательство этого факта остаётся читателю в качестве упражнения.*

# 4 Лекция 4

Компактность

Пусть $X$ - топологическое пространство.

**Определение 4.1.** *$X$ - компактно, если из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

*Раньше это называлось бикомпактностью, а под в компакте требовалось счетность изначального покрытия.*

**Пример 4.1.** *$[a,b]$ - компактен, для доказательстве нужно использовать факт существования точной верхней грани у ограниченности подмножества $\mathbb{R}^1$.*

*Доказательство.* $\square$

**Лемма 4.1** (О вложенных отрезках). *Пусть есть система вложенных отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, где $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$.*

*Тогда их пересечение не пусто. Дополнительно, если $|b_n-a_n|\to 0$, тогда их пересечние состоит из одной точки.*

**Определение 4.2.** *Центрированння система множеств $\{X_\alpha \subset X\}$, если пересечение любого конечного числа множеств $X_\alpha$ не пустно.*

**Лемма 4.2** (Обобщение леммы для топологических пространств)**.** *Пусть $X$ - топологическое пространство, тогда существует последовательность замкнутых не пустых подмножеств $X \supset F_1 \supset F_2 \dots$ и $\bigcap F_i \neq \emptyset$.*

*Доказательство: игра в понятия(определения).* Мы знаем, что

$$F_i - \text{замкнуто} \Leftrightarrow U_i = X \setminus F_i \text{- открыто}$$

□

Лемма вышея является следствием леммы ниже.

**Лемма 4.3.** *Топологическое пространство компактно $X \Leftrightarrow$ любая центрируемая система замкнутых подмножест имеет непустые пересечение*

*Доказательство.* $(\Rightarrow)$ : Пусть $\bigcup_i F_i = \emptyset$, тогда что можно сказать про $\{U_i\}$? Рассмотрим $\bigcup_i (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_i F_i$

$$\bigcup_i U_i \supset X \Rightarrow \text{существует конечное подпокрытие в силу компактности} X$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots U_{\alpha_k} \supset X$$

Следовательно $\{F_i\}$ удовлетворяют условию. □

**Задача 4.1.** *Доказать утверждение в обратную сторону.*

**Определение 4.3.** *$X$ называется локально компактным, если $\forall x \in X$ существует $O(x)$, для которой существует $V(x)$ такая, что 1) $Cl(V(x)) \subset O(x)$; 2) $Cl(V(x))$ - компактно.*

**Определение 4.4.** *Семейство подмножеств $X_\alpha \subset X$ называется локально конечным, если существует $O(x)$, которая пересекаяется с конечным числом множеств из системы $\{X_\alpha\}$.*

**Определение 4.5.** *Топологичесоке пространство $X$ называется паракомпактном, если в любое его открытое покрытие множ вписать локально конечное подпокрытие.*

**Пример 4.2.** *$\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^n$ является паракомпактном*

**Лемма 4.4** (наследование компактностей)**.** *Пусть $X \supset A$, если $A$ - замкнутно, то $A$ сохраняет следующие свойтсва топологического протсрантсва $X$*

1. *компактно*
2. *локально компактно*
3. *паракомпактно*

**Задача 4.2.** *Доказать лемму выше.*

**Утверждение 4.5.** *Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, если $X$ компактно, тогда $f(X) \subset Y$ тоже компактно.*

*Доказательство.* Очевидно. □

**Задача 4.3.** *Рассмотреть похожие утверждения для локальной компактности и паракомпактности.*

**Определение 4.6** (Аксиомы отделимости)**.**

1. *$T_0$ (аксиома Колмогорова): $X$ удовлетворяет $T_0$ тогда и только тогда, когда выполнятеся следующиее или существует $O(x)$ такая, что $y \notin O(x)$, или существует $O(y)$ такая, что $x \notin O(y)$ - для каждых двух различных элементов $x, y \in X$.*
2. *$T_1$: для двух ралзичных точек найдутся окрестности, удовлетворяющие следующим свойствам $x \notin O(y)$ и $y \notin O(x)$.*
3. *$T_2$ (аксиомы Хаусдорфа): для двух различных точек существуют непересекающиеся окрестности.*
4. *$T_3$: для любой точки $x$ из $X$ и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего $x$, существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$.*
5. *$T_4$: пусть $F_1, F_2$ – замкнутые множества, причем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Существуют $O(F_1), O(F_2) : O(F_1) \cap O(F_2) = \varnothing$.*

**Задача 4.4.** *Пространство, удовлетворяющие $T_1$, но не удовлетворяющие $T_0$.*

# 5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику $T_1$-пространства:

**Утверждение 5.1.** *$X$ является $T_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любых $x$ множество $\{x\}$ замкнуто.*

*Доказательство.* $(\Rightarrow):$ Пусть $T_1$. Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Longrightarrow y$ не является точкой прикосновения множества $X$. Значит $X \backslash \{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом $x$ единственная предельная (прикосновенная) точка множества $X$.

$(\Leftarrow):$ Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X\backslash\{x\}$ и $Y\backslash\{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X\backslash\{x\}$, $x\backslash\{y\}$ ☐

**Утверждение 5.2.** *Вообще говоря из $T_3$ не следует $T_0$.*

*Доказательство.* Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Возмем точку $x$, тогда замкнутое подмножечство $F \subset X$, не содержащее $x$, только пустое; $x \in X$, $\varnothing \in \varnothing$ ☐

**Определение 5.1.** *Пространство $X$ регулярно, если оно $T_3$ и $T_1$*

**Утверждение 5.3.** *$T_3$ и $T_1 \Rightarrow T_2$*

*Доказательство.* Возьмем $x$ и $y$, такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x)$: $y \notin O(x)$. Рассмотрим $X\backslash O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме $T_3$ существуют окрестности $O(x)$ и $O(F)$: $O(x) \cap O(F) = \varnothing$. Найдем окрестность точки $y$. Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \varnothing$. ☐

**Пример 5.1.** *Если $X$ метрическое пространство, то $X$ хаусдорфово.*

Рассмотрим полезную характеристику пространства $T_2$.

**Утверждение 5.4.** *$X$ пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \bigcap \overline{O}(x) = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим $x$.*

*Доказательство.* $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O}(x)$, пересечение по всем окрестностям точки $x$. Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O}(x)$, где пересечение по всем окрестностям точки $x$. Тогда $\forall \overline{O}(x)\ y \in \overline{O}(x) \Leftrightarrow \forall V(y)\ V(y) \cap O(x) \neq \varnothing$. Так как $X$ пространство $T_2$, то существует $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Противоречие с тем, что $y$ принадлежит хотя бы одному $\overline{O}(x)$.
$\Leftarrow$ упражнение. ☐

**Утверждение 5.5.** *Из $T_4$ следует $T_0$.*

*Доказательство.* Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\varnothing, X\}$. Можем взять $F_1 = \varnothing$, $F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \varnothing, F_2 = \varnothing$. ☐

**Утверждение 5.6.** *Из $T_4$ не следует $T_3$.*

*Доказательство.* Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}, \varnothing, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является $T_4$. Возьмем закнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку $b$, причем $b \notin F$. Единственной окрестностью $F$ является вся $\mathbb{R}$, так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее $F$. Тогда любая окрестность точки $b$ будет нетривиально пересекаться с $\mathbb{R}$. Значит $X$ не является $T_3$. ☐

**Утверждение 5.7.** *$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.*

*Доказательство.* Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}$, $F = F_2$, применяем аксиому $T_4$. ☐

**Определение 5.2.** *$X$ – нормально, если оно $T_4 + T_1$.*

**Лемма 5.8.** *Пусть в метрическом пространстве $(X, \rho)$ $F_1, F_2$ - замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1$, $\exists \varepsilon > 0:\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \varnothing$.*

*Доказательство.* Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \varnothing$. Тогда $x \in \overline{F_2}$, но $\overline{F_2} = F_2 \Longrightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. ☐

**Теорема 5.9.** *Метрическое пространство нормально.*

*Доказательство.* Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома $T_2$, из которой следует аксиома $T_1$. Докажем $T_4$. Пусть $F_1, F_2$ – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup\limits_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup\limits_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.

Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \varnothing$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с $F_1$. ☐

# 6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказано теорема

**Теорема 6.1.** *Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T4 + T1$.*

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

## 6.1 Функциональная отделимость

**Определение 6.1.** *$A \subset X$ - всюду плотно в $X$, если $\overline{A} = X$.*

**Теорема 6.2** (Лемма Урысона)**.** *Пусть $X$ - нормальное пространство. $A, B$ - два замкнутых непересекающихся подмножества $X$. Тогда существуют непрерывная функция $F : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$*

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств $\{U\}$, которые мы заиндексируем двоично-рациональными числа из $[0, 1]$.

1. $U_1 = X \subset B$

2. $U_0$ должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0$ **(используем нормальность)** $\subset U_1$

3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям $U_0$ и $U_1$.

4. $U_{\frac{1}{4}} : \overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$

5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с $q$ столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\overline{U}_{\frac{k}{2^{n-1}}} \subset U_q \subset \overline{U}_q \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Пострили системс открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\overline{U}_q \subset U_r$. Теперь определим функцию $F$.

$$F(x) = \begin{cases} \inf\left\{q : x \in U_q\right\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств $A$ и $B$. Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где $O_\alpha$ - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0, a), (b, 0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0, a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf\left\{q : x \in U_q\right\} < a \Leftrightarrow \exists \widetilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0, a)) = \bigcup_{\widetilde{q}<a} U_{\widetilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим $F$, заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup\left\{r : x \notin U_r\right\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup\left\{r : x \notin U_r\right\} = \sup\left\{r : x \notin \overline{U}_r\right\} = \sup\left\{r : x \in X \setminus \overline{U}_r - \text{ это множество открыто}\right\}$ Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация: □

**Пример 6.1** (Нормального, но не метризуемого пространства)**.**

## 6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

**Замечание 6.1** (характеризация хаусдорфово пространства)**.** *Пусть $X$ - хаусдорфово $\Leftrightarrow$ для каждых $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \overline{O}(x)$*

*Доказательство.* ($\Leftarrow$): $y \notin \overline{O}(x) \Leftrightarrow y \in X \setminus \overline{O}(x)$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y)$: $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$.

($\Rightarrow$): от противного □

**Утверждение 6.3.** *Замкнутое подмножество компакта - компактно*

*Доказательство.* Очевидно. □

**Лемма 6.4.** *В хаусдорфовом топологическом пространстве $X$ компактное подмножество $F$ является замкнутым.*

*Доказательство.* Очевидно. □

**Задача 6.1.** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

# 7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

**Лемма 7.1** (Лемма Урысона)**.** *$X$ - нормальное пространство, $A, B$ - замкнутые непересекающиеся подмножества $X$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$: $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.*

## 7.1 Разбиение единицы

**Лемма 7.2** (об ужатии)**.** *$X$ - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$, где $U_i$ - открытое множество. Тогда существует набор открытых $V_i, i = 1, \dots, N$, таких что $\overline{V}_i \subset U_i, i = 1, \dots, N$ и $X \subset \bigcup V_i$.*

*Доказательство (последовательное).* Основание $k = 1$, имеем $U_1$. Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A$$

Видно, что $B$ - замкнуто. Очевидно, что $A \subset U_1$.

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать $O(A)$ причем $\overline{O}(A) \subset U_1$, обозначим $V_1 = O(A)$.

Докажем, что $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$ - покрытие $X$. Если $x$ лежит в объед $U_i$, $i \geq 2$, то он лежит в $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$. Если $x$ лежит в $X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A \subset V_1$, тогда выполеняется тоже самое.

Рассмотрим $1 \geq k < N$. Пусть построены $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots U_N$.

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots V_k \cup U_{k+1} \cup \dots U_N$$

Слоедовательно мы можем продолжить $k$ до $N$. □

**Задача 7.1.** *Подробно расписать доказательство выше.*

**Определение 7.1.** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Носитель функции $f$ (обозн $suppf$) $= \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

**Определение 7.2.** *Пусть $X$ - топологическое пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ называется разбиением единицы подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$, если выполненые два условия:*

1. *$suppf_i = \overline{V}_i \subset U_i$*
2. *$\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$ на $X$*

**Теорема 7.3** (о разбиении единицы)**.** *Пусть $X$ - нормальное пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда сущесвтует разбиение единицы, подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$.*

*Доказательство.*

По лемме об ужатии, в $U_i$ можно вписать $V_i$ такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$. По лемме Урысона для $A = \overline{V}_i, B = X \setminus U_i$, будет существовать непрерывная функция $\varphi_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_i(A) = \{1\}$ и $\varphi_i(B) = \{0\}$, то есть $\varphi_i = 1$ на $A$ и $\varphi_i = 0$ вне $A$. Рассмотрим функцию $f_i$ определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i}$$

Причем $suppf_i$ зависит от $\varphi_i$, то есть $suppf_i = supp\varphi_i = \overline{V}_i$

□

**Задача 7.2.** *Если $f$ - непрерывное отображение, то $suppf$ - замкнутое.*

**Определение 7.3.** *$A$ назвается всюду плотным в топологическом пространстве $X$, если $\overline{A} = X$.*

**Определение 7.4.** *$A$ называется нигде не плотным, если ($int\overline{A} = \emptyset$ - другое определение) для каждого непустого открытого $U$ существует открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap U = \emptyset$.*

**Определение 7.5.** *$X$ - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.*

**Пример 7.1** (Канторово множество)**.** *Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0, 2$, то это элемент Канторово множества.*

*Можно рассмотреть $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_i}{3^i}$, $\widetilde{a}_i = 1$, если $a_i = 2$, и $\widetilde{a}_i = 0$, если $a_i = 0$.*

**Задача 7.3.** *Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.*

**Определение 7.6.** *$X$ - совершенное, если не содержить изолированных точек.*

**Теорема 7.4** (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция $f : I \to I \times I$, где $I = [0, 1]$*

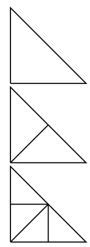
# 8 Лекция 8

## 8.1 Кривые Пеано

**Определение 8.1.** *Кривая* $\gamma : [0, 1] \to X$ *- кривая, если* $\gamma$ *- непрерывное отображение.*
*Кривая Пеано - непрерывное отображение отрезка* $[0, 1]$ *на* $[0, 1]^2$.

**Замечание 8.1.** *Гильберт разделил квадрат на 4 части, потом каждую часть также делил на 4.*
*Пеано на 9.*
*На картинке можно посмотреть в Федорчуке.*

*Доказательство.* Докажем простроив заполнение кривой равнобедренного треугольника.



Пусть $\Delta$ - прямоугольний равнобедренный треугольник и $I = [0, 1]$. На каждом шаге будем разбивать треугольник и отрезок. На n-ом шаге будет будем иметь $2^n$ треугольников и отрезок, разбитый на столько же частей. Будем занумеровывать треугольники и части отрезка двоичным кодом.

Будем иметь следующую нумерацию: $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $I_{i_1 \ldots i_n}$. Определим соседние элементы как элементы, у которых есть общая сторона(для разбиения треугольников), общая точка(для разбиения отрезка). Так же мы имеем цепочку вложенных отрезков(треуглников).

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots$$

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots$$

Эти цепочки имеют строго убывающий размер.

Из элементарных геометрических соображений можно получить значение диаметров этих множеств.

$$diam(I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$diam(\Delta_{i_1 \ldots i_n}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Очевидно, что все эти подмножества компакты(т.к. замкнутые и ограниченные подмножества полного метрического пространства).

**Замечание 8.2.** *Рассказ про игру.*

Определим отображение $f : I \to I \times I$.

1) Рассмотрим $t \in I = [0, 1]$. Для $t$ будет существовать последовательность убывающий отрезков

$$t \in I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots$$

Т.к. $t$ может лежать на границе отрезков, то последовательность определенна неоднозначно. Возьмем последовательность треугольников с теми же индексами. Это будет последовательность вложенные компактов, причем дивметр этого множества стремится к 0. Т.о. пересечение этих треугольников будет состоять из одной точки, эту единственную точку обозначим за $f(t)$.

У этого рассуждения есть недостаток, $t$ может принадлежать двум множествам $I_{i_1 \ldots i_n}$ и $I_{j_1 \ldots j_n}$. но в этом случае может объядинить эти два множества и получить $J_{i_1 \ldots i_n}$, также определим множество $P_n(t) = \{\}$. (если $t$ - хорошее, то $P_n(t) = \Delta_{i_1 \ldots i_n}$, если $t$ - плохое, то $P_n(t) =$ объединению двух соседних треугольников).

Получим еще одну последовательность компактов:

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \ldots$$

**Утверждение 8.1.**

$$diam P_n \leq \frac{1}{(\sqrt{2}^{n-2})}$$

Опять получили последовательность вложенных компактов..

Докажем, что $f$ - сюръективно. Рассмотрим точку $x_0$ из треугольника. Точка будет лежать в определнном последовательность "разрезанных"треугольников. Рассмотрим последовательность подотрезков с теми же индексами, у этой последовательности будет одной общая точка. Остается доказать, что это точка - прообраз точки $x_0$. Это верно, т.к. иначе бы образы этих точек лежали бы в разных треугольниках.

Докажем, что $f$ - непрерывно. - Очевидно. □

**Определение 8.2.** *$f_n : X \to \mathbb{R}$ - последовательность функций.*

*$f_n \rightrightarrows 1$, если для каждого $\varepsilon > 0$ сущесвтует $N \in \mathbb{N}$ такое что для каждого $m \geq N$ для каждого $x \in X$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$*

**Теорема 8.2.** *Предел равномерно сходящийся функций непрерывен.*

# 9 Лекция 9

**Задача 9.1.** *Непрерывное отображение (гомеоморфизм) треугольника на квадрат. $f : \Delta \to I \times I$*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y, x + y), & x > y \\ (2x, 2x), & x = y \\ (x + y, x + y), & x < y \end{cases} = (x + \min(x, y), x + \min(x, y))$$

## 9.1 Теорема Титца о продолжении непрерывной функции

**Теорема 9.1** (Титца о продолжении непрерывной функции)**.** *Пусть $X$ - нормальное топологическое пространство. $F \subset X$ - замкнутое подмножество. $\varphi : F \to \mathbb{R}$ - непрерывная ограниченная(т.е. $\|\varphi\| = \sup_{x \in F} |\varphi(x)| < \infty$) функция.*

*Тогда существует $\Phi : X \to \mathbb{R}$ - непрерывное продолжение функции $\varphi$, которое сохраняет норму $\|\Phi\| = \sup_{y \in X} |\Phi(y)| = \|\varphi\|$*

*Доказательство.* Будем строить две последовательности функций.

1. $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$
2. $\varphi_n : F \to \mathbb{R}$

**Замечание 9.1.** *Пусть $f_n(x) : Y \to \mathbb{R}$ - фундаментальная последовательность, тогда существует $f(y) = \lim_{n \to \infty} f_n(y)$*

**Задача 9.2.** *Доказать, что фундаментальная последовательность равномерно сходится.*

Алгоритм построения последовательностей.

1. $\varphi_0 = \varphi$, так как $\varphi$ - ограниченная функция, то выполняется $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = M_0 < +\infty$ Определим два замкнутых множества в $X$
$$A_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \leq -\frac{M_0}{3} \right\}$$
$$B_0 = \left\{ x \in F : \varphi(x) = \varphi_0(x) \geq \frac{M_0}{3} \right\}$$
   Очевидно, что эти множества являются замкнутыми и непересек.

   Применим лемму Урысона к отрезку $\left[-\frac{M_0}{3}, \frac{M_0}{3}\right]$, получим функцию $\Phi_0(x)$, которая на $A_0$ тождественна $-\frac{M_0}{3}$, на $B_0$ тождественна $\frac{M_0}{3}$.

   Рассмотрим "номру"функции $\Phi_0$: $\|\Phi_0\| \leq \frac{M_0}{3}$.

2. определим функции $\varphi_1 = \varphi_0 - \Phi_0$ на множестве $F$. Эта функция непрерывна. Рассмотрим норму введеной функции на 3-ех участках.

   (a) $\varphi_0 \geq \frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = \frac{M_0}{3}$

   (b) $-\frac{M_0}{3} \leq \varphi_0 \leq \frac{M_0}{3}$; $-\frac{M_0}{3} \leq \Phi_0 \leq \frac{M_0}{3}$

   (c) $\varphi_0 \leq -\frac{M_0}{3}$; $\Phi_0 = -\frac{M_0}{3}$

   Из этих неравенств видно, что
$$\|\varphi_1\| \leq \frac{2M_0}{3}$$

3. Примени тоже построение, что и в предыдущем пункте, счетное число раз и получим две последовательности функций.

Таким образом получили, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \Phi_n \text{ на множестве } F$$

И

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{M_0}{3} \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \frac{2M_0}{3} \tag{1}$$

Следовательно

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M_0 \qquad \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} M_0 \tag{2}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$. Докажем, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i$ будет фундаментольной.

$$\|S_n - S_m\| = \|S_{m+1} + \ldots + S_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\Phi_i| \leq \frac{M_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{l} = M_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

Таким образом она сходится и $S_n \rightrightarrows \Phi$

Докажем, что $\Phi$ совпадает с $\varphi$ на $F$.

$$\left\|\varphi - \sum_{i=0}^{n} \Phi_i\right\| = \|\varphi_{n+1}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} M_0$$

Припредельном переходе получим $\varphi = \Phi$ на множестве $F$. □