Лекции по введению в топологию

Лектор: Миллионщиков Д.В.
Автор конспекта: Ваня Коренев*

2 курс, 2 поток. Осенний семестр 2024 г.
21 октября 2024 г.

*tg: @gallehus

Содержание

1 Лекция 1

Читателю рекомендуется повторить определения окрестности точки, открытого множества, замкнутого множества, непрерывной функции, компакта, связности.

Определение 1.1. *Метрическое пространство — это пара (X, ρ), где X — множество, а $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$;
3. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется метрикой (функцией расстояния). Часто метрическим пространством называют само множество X, если функция ρ очевидно подразумевается.

Утверждение 1.2. $\left(\mathbb{R}^1, \rho = |x - y|\right)$ *является метрическим пространством.*

Определение 1.3. *Топологическое пространство — это пара $(X, \mathcal{T})$, где X — множество, а $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — набор подмножеств X, удовлетворяющий следующим аксиомам:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
2. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$, *где* $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
3. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, *где* $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$ *(A — произвольное индексирующее множество);*

Множество $\mathcal{T}$ называется топологией на X, а элементы $\mathcal{T}$ — открытыми подмножествами X.

Пример 1.4.
1. *Антидискретная (тривиальная) топология на любом множестве X:* $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.
2. *Дискретная топология на любом множестве X:* $\mathcal{T} = 2^X$.
3. *На $X = \{1, 2\}$, можно задать 4 топологии: антидискретную (в таком случае пространство X называется слипшимся двоеточием), дискретную (в таком случае пространство X называется простым двоеточием) и две другие: $\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing, \{2\}\}$. Прострaство X с топологиями $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ называется связным двоеточием.*

Определение 1.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Открытый шар в X с центром x_0 и радиусом r — это множество $O_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$. Открытые шары также называют открытыми окрестностями точек, которые они содержат, в метрическом пространстве.*

Определение 1.6. *Пусть X - метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in U$ существует открытый шар (= открытая окрестность точки x), содержащий x и лежащий в U.*

Замечание 1.7. *Любое метрическое пространство является топологическим, если определить топологию на нём через открытые шары (т.е. считать открытые шары открытыми множествами).*

Определение 1.8. *Пусть X - топологическое пространство. Подмножество $U \subseteq X$ называется замкнутым, если $X \backslash U$ открыто.*

Задача 1.9. *Доказать, что топология может быть определена через понятие замкнутых множеств.*

Пример 1.10. *Топология Зарисского: Рассмотрим множество $\mathbb{C}^1$ и назовём в нём замкнутыми подмножествами любые конечные наборы точек: $\{z_1, \ldots, z_n\}$ (пустой набор точек также считается конечным).*
Топологию Зарисского можно обобщить на произвольное множество X: будем считать замкнутыми любые конечные подмножества $U \subseteq X$.

Задача 1.11. *Доказать, что топология Зарисского действительно является топологией.*

Определение 1.12. *База $\mathfrak{B}$ топологии $\mathcal{T}$ на X — это подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $\forall U \in \mathcal{T}$ можно выразить в виде объединения элементов базы $\mathfrak{B}$, т.е. $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}$.*

База топологии позволяет уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Лемма 1.13 (Достаточное условие на базу топологии)**.** *Пусть $\mathfrak{B} \subseteq 2^X$ - набор подмножеств X. Тогда если выполняются следующие условия:*

1. $\forall x \in X \quad \exists B_x \in \mathfrak{B}$: $x \in B_x$,

2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}: \ (x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$,

то $\mathfrak{B}$ *является базой некоторой топологии.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные $U_\alpha = \bigcup_\gamma B_\gamma^{(\alpha)}$. Проверим все свойства из определения топологии.

Легко проверить, что выполняются первые 2-а свойства из определения топологии. В качестве $\varnothing$ можно взять объединение пустого числа множеств, а в качестве X - объединение всех элементов базы, оно будет равно X, т.к. для каждого $x \in X$ существует элемент базы, содержащий его.

Докажем выполнение 3-его свойства. Благодаря принципу математической индукции достаточно доказать, что $k = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in A_1} B_\alpha^{(1)} \cap \bigcup_{\alpha \in A_2} B_\alpha^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)} = \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \bigcup_{x \in B_{\alpha_1}^{(1)} \cap B_{\alpha_2}^{(2)}} B_{3,x}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

Тут $B_{3,x}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ существует из-за пункта 2. В итоге мы получили, что $U_1 \cap U_2$ можно выразить в виде объединения элементов базы.

Докажем выполнение 4-го свойства.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I} B_i^{(\alpha)} = \bigcup_{(\alpha, i) \in A \times I} B_i^\alpha$$

Опять получили объединения элементов базы.

Итого всевозможные объединение элементов базы задают топологию на X. □

Задача 1.14. *Повторить доказательство для базы метрического пространства.*

Определение 1.15. *Предбаза* Π *топологии* $\mathcal{T}$ *на* X *— это множество* $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$*, где* $\mathfrak{B}$ *— база* $\mathcal{T}$*, такое, что:* $\forall U \in \mathfrak{B}$*:* U *есть конечное пересечение элементов предбазы, т.е.* $\forall U \in \mathfrak{B}$*:* $U = \bigcap_{i=1}^k P_i$*, где* $P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}$.
Иначе говоря: предбаза Π *топологии* $\mathcal{T}$ *на* X *— это множество* $\Pi \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$*, где* $\mathfrak{B}$ *— база* $\mathcal{T}$*, такое, что:* $\forall U \in \mathcal{T}$*:* U *есть объединение конечных пересечений элементов предбазы, т.е.*

$$\forall U \in \mathcal{T}: \ U = \bigcup \bigcap_{i=1}^{k} P_i, \text{где } P_i \in \Pi, k \in \mathbb{N}.$$

Предбаза топологии позволяет ещё уменьшить количество изначально задаваемых открытых множеств, определяющих топологию.

Замечание 1.16. *Любое множество задает предбазу некоторой топологии.*

Пример 1.17. *Пусть* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Пусть $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$ *— предбаза.*
Тогда $\mathfrak{B} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}}_{\text{Элементы } \Pi}, \underbrace{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Все конечные пересечения элементов } \Pi}\}$ *— база,*

$\mathcal{T} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}}_{\text{Элементы } \mathfrak{B}}, \underbrace{\varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{Все объединения элементов } \mathfrak{B}}\}$ *— топология на* X.

2 Лекция 2

Литература:

1. В.В. Федорчук - Введение в топологию
2. 4 автора - Введение в топоплогию

Определение 2.1. *Пусть* (X, ρ) *- метрическое пространство. Из метрического можно построить топологические пространство* (X, τ)*. Такие пространства называеются метризуемыми.*

Замечание 2.2 (Критерий метризуемости. Накаты Ю.М.Смирнова. 1950-1951)**.**

Определение 2.3. $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Теорема 2.4. *Шары* $O_\varepsilon(x)$ *образуют базу топологии.*

Доказательство. 1. $\forall x \in X \ \exists \ O_\varepsilon(x) : x \in O_\varepsilon(x)$

2. рассмторим $(O_{\varepsilon_1}(x_1) = B_1) \cap (B_2 = O_{\varepsilon_2}(x_2))$ найдем окрестность точки x, лежащий в этом пересечении, чтобы вся окрестность тоже лежала в этом пересечении $\rho(x, x_1) < \varepsilon_1, \rho(x, x_2) < \varepsilon_2$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x_1, x), \varepsilon_2 - \rho(x_2, x)\}$
Проверим условие $O_\varepsilon \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_w}(x_2)$

Проверим $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \Rightarrow \rho(y, x_1) < \varepsilon_1$.

$$\rho(y, x_1) \le \rho(y, x) + \rho(x, x_1) < \varepsilon - \rho(x, x_1) + \rho(x, x_1) = \varepsilon$$

Аналогично для второго шара.

Т.о. по достаточному условию на базу открытые шары будет образовывать базу. □

Простой способ сравнения топологий. Пусть X - множество. τ_1, τ_2 - топологии, определенные на X. ЧУМ - частично упорядоченное множество.

Определение 2.5. $\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$

Обычными словами: любое открытое множество в τ_1 будет открытым в τ_2.

Пример 2.6. *Рассмотрим антидискретную и дискретную топологии.*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\} \subset \tau_2 = 2^X$$

Можно считать, что это два полюса сравнения, где слева - слабейшая, справа - сильнейшая.
Любую топологию можно сравнить с этими двумя. Но точно существуют не сравнимые.

Задача 2.7. *Метризумые ли тривиальные топлогии(= антидискретная и дискретная)?*
1. можнов ввести дискретную метрику $\rho_D(x, y) = (1, x = y; 0, x \neq y)$. Получим дискретную топологию.
2. неметризуемо.

Определение 2.8 (индуцированная топология подространства)**.** *Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $Y \subset X$. $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.*

Доказательство. Очевидно, что выполняются аксиомы топологии. □

Пример 2.9. $\mathbb{R}^2 = X$ *- метрическое пространство, $Y \subset X$.*

Определение 2.10. *U - окрестность точки $x \in X$ = $U \in \tau$ такое, что $x \in U$.*

Замечание 2.11 (Есть тут глубокий смысл?)**.**

$$\bigcap_{i=1}^{n} \textit{окрестность точки } x = \textit{окрестность точки } x$$

$$\bigcup_{\alpha} \textit{окрестность } x = \textit{окрестность}$$

Утверждение 2.12. *$A \subset X$ - открыто $\Leftrightarrow$ для каждой точки $x \in$ сущесвтует ее окрестность, лежащая в A.*

Доказательство. ($\Leftarrow$): Рассмоторим $C = \bigcup_{x \in A} O(x) \in \tau$. Очевидно, что $A \subset C$. А т.к. для каждого $x \in A$ верно $O(x) \subset A$, то также выполняется включение в другую сторону.
($\Rightarrow$): раз A - открыто, то A является окрестностью. □

Определение 2.13. *Пусть $x \in X$, $\{x\} \in \tau$, то x называется изолированной точкой.*

Замечание 2.14. *Если топлопгия дискретная, то все точки изолированные.*

Определение 2.15. *Пусть $A \subset X$, $x \in X$. x - точка прикосновения множества A, если для любой окрестности $O(x)$ выполняется $O(x) \cap A \neq \emptyset$.*

Определение 2.16. *$x \in A$ - внутрення точка множества A, если существует $O(x)$: $O(x) \subset A$.*

Определение 2.17 (A1)**.** *Замыкание множества A - множество всех точек прикосновения A. Обозначается $\overline{A}$.*

Определение 2.18 (B1)**.** *Внутренность - множество всех внутренних точек. Обозначается $Int(A)$.*

Задача 2.19. $Int(A) \subset A \subset \overline{A}$

Определение 2.20 (A2)**.** $\overline{A} = \bigcap_{\textit{по всем возможным } F} = F : 1.F - \textit{замкнуто}, 2.A \subset F$ $\overline{A}$ *= наименьшее замкнутое множество, содержащее A.*

Определение 2.21 (B2)**.** $Int(A) = \bigcup_{\textit{по всем } U} U : U \in \tau, U \subset A$ $Int(A)$ *= наибольшее открытое в A.*

todo:

Определение 2.22. *$x \in X$ - граничная точка A, если x - точка прикосновения и $x \notin Int(A)$.*
Граница - множество граничных точек. Обозначается $Bd(A)$.

Замечание 2.23.

$$Bd(A) = \overline{A} \setminus Int(A)$$

Теорема 2.24. *Это определния эквивалентны.*

Доказательство. Докажем эквивалентность определний B1 и B2.

Пусть $Int(A)$ - множество точек в смысле определения B1. Докажем B2. Докажем проверкой включений.

($\subseteq$): если $x \in A$ - внутрення точка, то существует $O(x) \subset A$, тогда $x \in Int(A)$ в смыле другого определения.

($\supseteq$): $x \in Int(A)$ в смысле определния B2, тогда x принадлежит каком-то одному открытому $V \subset A$, тогда можем взять V за окрестность точки x. □

Определение 2.25 (понятие непрерывного отображения)**.** *Пусть $f : X \to Y$. f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для каждой $O(f(x_0))$ существует такая окрестность $O(x_0)$, что $f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$.*

f - непрервыное отображение топологических пространств, если оно непрервыно во всех $x \in X$.

Утверждение 2.26. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *f - непрерывно*
2. *прообраз любого открытого множества является открытым, т.е. $U \in \tau_X \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_Y$*
3. *прообраз любого замкнутого замкнут*
4. *$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ - на лекции было дано так, но это утвреждение неверно*

Доказательство. Докажем только (1) $\Leftrightarrow$ (2).

($\Rightarrow$): пусть f - непрерывно. Нужно доказать, что $f^{-1}(V)$ - открыто, можем воспользоваться утверждением при критерий открытости.

($\Leftarrow$): пусть $x \in X$, V - окрестность точки $f(x_0)$, тогда по предположению $f^{-1}(V)$ - открыто, следовательно существует $O(x) \subset f^{-1}(V)$ □

Задача 2.27. *Доказать остальные эквивалентности в утверждении выше.*

3 Лекция 3

Повторение определения непрерывности и про эквивалентные утверждения из прошлой лекции.

Замечание 3.1 (философское)**.** *Проверять непрерывность $f : X \to Y$ удобно проверять на уровне базы или предбазы. Пусть $\beta \subset 2^Y$ - база топологии Y. Прообраз базы (предбазы) открыт: $f^{-1}(\beta) \subset \tau_X$*

Пример 3.2.

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывные функции одной переменной из математического анализа*
2. *$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$, $f : \mathbb{R}^1 \to S^1$ - общее название таких отображений (накрытие)*
3. *тривиальный пример - постоянное отображение. $f(x) = y_0$, где $f : X \to Y$ и $y_0 \in Y$.*
4. *композиция непрерывных - непрерывное отображение $X \to_f Y \to_g Z$, тогда $g(f)$ - непрерывно.*
5. *$Z \subset X \to_f Y$, где на Z индуцирована топология X. $i : Z \to X$, $i(x) = x$, тогда i непрерывно в индуцированной топологии.*

Непрерывность в метрических пространствах.

Определение 3.3 (По Коши)**.** *f непрерывно в точке x_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$*

Определение 3.4 (По Гейне)**.** *...*

Задача 3.5. *Доказать эквивалентность определений.*

Теорема 3.6 (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$*

Докажем эту теорему потом.

Определение 3.7. *$f : X \to Y$ - гомеоморфзим, если f - биекция и f, f^{-1} - непрерывны.*

Если сущесвтует гомеоморфзим между X и Y, то эти пространства гомеомрфны.

Замечание 3.8. *Гомеомрфзим задает отношение эквивалентности.*

Чтобы доказать, что пространства не являются гомеоморфными, нужно найти свойства пространств, которые должные сохраняться, но у этих пространств они отличаются.

Пример 3.9. *$f(x) = tg(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to_f (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ - гомеоморфзим.*

Связность и линейная связность.

Определение 3.10. *Пространство X называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножетсв.*

X - связно, если нельзя так разбить.

Пример 3.11. *1. Рассмотрим X с дискретной топологией. X - всегда несвязно, если содержит более двух точек.*

2. Рассмотрим X с антидискретной топологией. X - всегда связно.

3.

Теорема 3.12. *Отрезок $I = [0, 1]$ с индуцированной топологией - связен.*

Доказательство. От противного. Используя теорию действительных чисел. □

Утверждение 3.13. *Непрерывный образ связного множества - связен, т.е. если X - связен, $f : X \to Y$ следовательно $f(X)$ - связно*

Доказательство. От противного. Пусть выполняется $f(X) = A \cup B$, тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ - противоречие. □

Определение 3.14. *Пусть в топологическом пространстве, соединяющий $x_0, y_0 \in X$, это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \to X$ такое, что $gamma(0) = x_0$, $gamma(1) = y_0$.*

Замечание 3.15. *$\gamma([0, 1])$ - связно.*

Определение 3.16. *Пространство X является линейно связным, если для каждый двух точек, существует путь, содединяющий их.*

Теорема 3.17. *Пусть X линейно свзяно, тогда X - связно.*

Доказательство. От противного. Пусть $X = A \cup B$. Тогда $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ можно свзять отображением γ, тогда получим, что $\gamma([0, 1]) = \gamma([0, 1]) \cap A \cup \gamma([0, 1]) \cap B$ - противоречие. □

Замечание 3.18. *Обратное неверно. Пример - график $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ с добавлением отрезка $[-1, 1]$.*

4 Лекция 4

Компактность

Пусть X - топологическое пространство.

Определение 4.1. *X - компактно, если из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Раньше это называлось бикомпактностью, а под в компакте требовалось счетность изначального покрытия.

Пример 4.2. *$[a, b]$ - компактен, для доказательстве нужно использовать факт существования точной верхней грани у ограниченности подмножества $\mathbb{R}^1$.*

Доказательство. □

Лемма 4.3 (О вложенных отрезках)**.** *Пусть есть система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, где $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$.*

Тогда их пересечение не пусто. Дополнительно, если $|b_n - a_n| \to 0$, тогда их пересечние состоит из одной точки.

Определение 4.4. *Центрированння система множеств $\{X_\alpha \subset X\}$, если пересечение любого конечного числа множеств X_α не пустно.*

Лемма 4.5 (Обобщение леммы для топологических пространств)**.** *Пусть X - топологическое пространство, тогда существует последовательность замкнутых не пустых подмножеств $X \supset F_1 \supset F_2 \ldots$ и $\bigcap F_i \neq \emptyset$.*

Доказательство: игра в понятия(определения). Мы знаем, что

$$F_i - \text{замкнуто} \Leftrightarrow U_i = X \setminus F_i \text{- открыто}$$

□

Лемма вышея является следствием леммы ниже.

Лемма 4.6. *Топологическое пространство компактно $X \Leftrightarrow$ любая центрируемая система замкнутых подмножест имеет непустые пересечение*

Доказательство. $(\Rightarrow)$: Пусть $\bigcup_i F_i = \emptyset$, тогда что можно сказать про $\{U_i\}$? Рассмотрим $\bigcup_i (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_i F_i$

$$\bigcup_i U_i \supset X \Rightarrow \text{существует конечное подпокрытие в силу компактности} X$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots U_{\alpha_k} \supset X$$

Следовательно $\{F_i\}$ удовлетворяют условию. □

Задача 4.7. *Доказать утверждение в обратную сторону.*

Определение 4.8. *X называется локально компактным, если $\forall x \in X$ существует $O(x)$, для которой существует $V(x)$ такая, что 1) $Cl(V(x)) \subset O(x)$; 2) $Cl(V(x))$ - компактно.*

Определение 4.9. *Семейство подмножеств $X_\alpha \subset X$ называется локально конечным, если существует $O(x)$, которая пересекаяется с конечным числом множеств из системы $\{X_\alpha\}$.*

Определение 4.10. *Топологичесоке пространство X называется паракомпактном, если в любое его открытое покрытие множ вписать локально конечное подпокрытие.*

Пример 4.11. $\mathbb{R}^1$ *и* $\mathbb{R}^n$ *является паракомпактном*

Лемма 4.12 (наследование компактностей)**.** *Пусть $X \supset A$, если A - замкнутно, то A сохраняет следующие свойтсва топологического протсрантсва X*

1. *компактно*
2. *локально компактно*
3. *паракомпактно*

Задача 4.13. *Доказать лемму выше.*

Утверждение 4.14. *Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, если X компактно, тогда $f(X) \subset Y$ тоже компактно.*

Доказательство. Очевидно. □

Задача 4.15. *Рассмотреть похожие утверждения для локальной компактности и паракомпактности.*

Определение 4.16 (Аксиомы отделимости)**.**

1. *T_0 (аксиома Колмогорова): X удовлетворяет T_0 тогда и только тогда, когда выполнятеся следующиее или существует $O(x)$ такая, что $y \notin O(x)$, или существует $O(y)$ такая, что $x \notin O(y)$ - для каждых двух различных элементов $x, y \in X$.*
2. *T_1: для двух ралзичных точек найдутся окрестности, удовлетворяющие следующим свойствам $x \notin O(y)$ и $y \notin O(x)$.*
3. *T_2 (аксиомы Хаусдорфа): для двух различных точек существуют непересекающиеся окрестности.*
4. *T_3: для любой точки x из X и для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего x, существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$.*
5. *T_4: пусть F_1, F_2 – замкнутые множества, причем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Существуют $O(F_1), O(F_2) : O(F_1) \cap O(F_2) = \varnothing$.*

Задача 4.17. *Пространство, удовлетворяющие T_1, но не удовлетворяющие T_0.*

5 Лекция 5

Рассмотрим полезную характеристику T_1-пространства:

Утверждение 5.1. *X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда для любых x множество $\{x\}$ замкнуто.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$: Пусть T_1. Если возьмем $y \neq x$, тогда существует $O(x)$ и $O(y)$, т.ч. $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y) \Longrightarrow y$ не является точкой прикосновения множества X. Значит $X \backslash \{x\}$ множество не содержащее предельную точку. Таким образом x единственная предельная (прикосновенная) точка множества X.

$(\Leftarrow)$: Пусть различные точки $\{x\}$ и $\{y\}$ замкнуты, тогда $X \backslash \{x\}$ и $Y \backslash \{y\}$ открыты. Данные множества открыты, возьмем их в качестве окрестностей: $y \in X \backslash \{x\}$, $x \backslash \{y\}$ □

Утверждение 5.2. *Вообще говоря из T_3 не следует T_0.*

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Возмем точку x, тогда замкнутое подмножечство $F \subset X$, не содержащее x, только пустое; $x \in X$, $\varnothing \in \varnothing$ ☐

Определение 5.3. *Пространство X регулярно, если оно T_3 и T_0*

Утверждение 5.4. T_3 *и* $T_1 \Rightarrow T_2$

Доказательство. Возьмем x и y, такие что $x \neq y$. Пусть существует $O(x)$: $y \notin O(x)$. Рассмотрим $X \backslash O(x) =: F$, оно замкнуто и $y \in F$. По аксиоме T_3 существуют окрестности $O(x)$ и $O(F)$: $O(x) \cap O(F) = \varnothing$. Найдем окрестность точки y. Существует $O(y) \subset O(F)$, так как $y \in O(F)$ и $O(F)$ открыто. Таким образом $O(x) \cap O(y) = \varnothing$. ☐

Пример 5.5. *Если X метрическое пространство, то X хаусдорфово.*

Рассмотрим полезную характеристику пространства T_2.

Утверждение 5.6. *X пространство $T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \ \ \bigcap \overline{O}(x) = \{x\}$, где пересечение по всем окрестностям, содержащим x.*

Доказательство. $\Rightarrow x \in \bigcap \overline{O}(x)$, пересечение по всем окрестностям точки x. Докажем методом от противного: пусть существует $y \in \bigcap \overline{O}(x)$, где пересечение по всем окрестностям точки x. Тогда $\forall \overline{O}(x)\ y \in \overline{O}(x) \Leftrightarrow \forall V(y)\ V(y) \cap O(x) \neq \varnothing$. Так как X пространство T_2, то существует $U(x)$ и $U(y)$: $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Противоречие с тем, что y принадлежит хотя бы одному $\overline{O}(x)$.
$\Leftarrow$ упражнение. ☐

Утверждение 5.7. *Из T_4 следует T_0.*

Доказательство. Рассмотрим связное двоеточие: $X = \{x, y\}$ и $\tau = \{\varnothing, X\}$. Замкнутых множеств всего два $\{\varnothing, X\}$. Можем взять $F_1 = \varnothing$, $F_2 = X$. Или можем взять $F_1 = \varnothing, F_2 = \varnothing$. ☐

Утверждение 5.8. *Из T_4 не следует T_3.*

Доказательство. Приведем контрпример: пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}, \varnothing, \mathbb{R}\}$. Замкнутые множества имеют вид $F = (-\infty, a]$. Так как нет двух пересекающихся множеств, то пространство является T_4. Возьмем закнутое множество $(-\infty, a] =: F$ и точку b, причем $b \notin F$. Единственной окрестностью F является вся $\mathbb{R}$, так как это единственное открытое множество удовлетворяющее топологии и содержащее F. Тогда любая окрестность точки b будет нетривиально пересекаться с $\mathbb{R}$. Значит X не является T_3. ☐

Утверждение 5.9. $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Из утверждения 5.1 следует, что $\{x\}$ замкнуто. Пусть $F_1 = \{x\}$, $F = F_2$, применяем аксиому T_4. ☐

Определение 5.10. *X – нормально, если оно $T_4 + T_1$.*

Лемма 5.11. *Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) F_1, F_2 - замкнуты. Тогда $\forall x \in F_1$, $\exists \varepsilon > 0 :\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть нельзя найти такую $O_\varepsilon(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ O_\varepsilon(x) \cap F_2 \neq \varnothing$. Тогда $x \in \overline{F_2}$, но $\overline{F_2} = F_2 \Longrightarrow x \in F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. ☐

Теорема 5.12. *Метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, то есть выполняется аксиома T_2, из которой следует аксиома T_1. Докажем T_4. Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Возьмем точку $x_1 \in F_1$ и рассмотрим $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Можно построить окрестность $V(F_1) = \bigcup\limits_{x_1 \in F_1} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $W(F_2) = \bigcup\limits_{x_2 \in F_2} O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$.
Докажем, что $V(F_1) \cap W(F_2) = \varnothing$. Предположим противное: $\exists w \in V(F_1) \cap W(F_2)$. Тогда $\exists x_1 \in F_1 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)$ и $\exists x_2 \in F_2 : w \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2)$. Заметим, что $\rho(x_1, w) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_2, w) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда по неравенству треугольника $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in O_\varepsilon(x_2)$, также $x_1 \in F_1$, но $O_\varepsilon(x_2)$ построена так, что она не пересекается с F_1. ☐

6 Лекция 6

На прошлой лекции была доказано теорема

Теорема 6.1. *Метрическое пространство является нормальным, то есть удовлетворяет аксиомам $T4 + T1$.*

Вопрос: что нужно добавить для нормального пространства, чтобы оно стало метризуемым?

6.1 Функциональная отделимость

Определение 6.2. *$A \subset X$ - всюду плотно в X, если $\overline{A} = X$.*

Теорема 6.3 (Лемма Урысона)**.** *Пусть X - нормальное пространство. A, B - два замкнутых непересекающихся подмножества X. Тогда существуют непрерывная функция $F : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, такая, что $F(A) = \{0\}$ и $F(B) = \{1\}$*

Доказательство. Для доказательства этой леммы будет использовать двоично-рациональные числа, это

$$S = \left\{ q = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Стандартное доказательство:

Будем строить по индукции семейство открытых множеств $\{U\}$, которые мы заиндексируем двоично-рациональными числа из $[0,1]$.

1. $U_1 = X \subset B$

2. U_0 должно быть следующим $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0$ **(используем нормальность)** $\subset U_1$

3. $U_{\frac{1}{2}}$ должно выполняться $\overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$, существование такого множества следует из нормальности, примененной к дополнениям U_0 и U_1.

4. $U_{\frac{1}{4}} : \overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ и $U_{\frac{3}{4}} : \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$

5. индуктивный переход. Берем $q = \frac{2k+1}{2^n}$. Рассмотрим соседние с q столбики - они будут иметь вид $\frac{k}{2^{n-1}}$ и $\frac{k+1}{2^{n-1}}$.

$$\overline{U}_{\frac{k}{2^{n-1}}} \subset U_q \subset \overline{U}_q \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$$

Пострили системс открытых множеств. Это система множеств $\{U_q\}$ обладает свойством упорядоченности, т.е. если $q < r \in S$, то $\overline{U}_q \subset U_r$. Теперь определим функцию F.

$$F(x) = \begin{cases} \inf \{q : x \in U_q\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Очевидно выполнение требований для множеств A и B. Проверим непрерывность. Достаточно проверить, что $F^{-1}(O_\alpha)$ - открыт, где O_α - элемент базы топологии отрезка. Можно это доказать только для $[0,a), (b,0]$, т.к. остальные элементы топологии можно получить из этих двух.

Рассмотрим $x \in F^{-1}([0,a)) \Leftrightarrow F(x) < a \Leftrightarrow \inf \{q : x \in U_q\} < a \Leftrightarrow \exists \widetilde{q} < a$, тогда $F^{-1}([0,a)) = \bigcup_{\widetilde{q} < a} U_{\widetilde{q}}$ - открыто.

Рассмотрим F, заданную другим образом

$$F(x) = \begin{cases} \sup \{r : x \notin U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

$\sup \{r : x \notin U_r\} = \sup \left\{r : x \notin \overline{U}_r\right\} = \sup \left\{r : x \in X \setminus \overline{U}_r - \text{ это множество открыто}\right\}$ Далее аналогично первому случаю.

Иллюстрация: □

Пример 6.4 (Нормального, но не метризуемого пространства)**.**

6.2 Взаимоотношение компактности и нормальности

Замечание 6.5 (характеризация хаусдорфово пространства)**.** *Пусть X - хаусдорфово $\Leftrightarrow$ для каждых $x \neq y$ существует $O(x) : y \notin \overline{O}(x)$*

Доказательство. ($\Leftarrow$): $y \notin \overline{O}(x) \Leftrightarrow y \in X \setminus \overline{O}(x)$ - открыто, тогда существует окрестность $O(y)$: $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$, тогда $O(y) \cap \overline{O}(x) = \emptyset$.

($\Rightarrow$): от противного □

Утверждение 6.6. *Замкнутое подмножество компакта - компактно*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 6.7. *В хаусдорфовом топологическом пространстве X компактное подмножество F является замкнутым.*

Доказательство. Очевидно. □

Задача 6.8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7 Лекция 7

Повторение из прошлой лекции.

Лемма 7.1 (Лемма Урысона)**.** *X - нормальное пространство, A, B - замкнутные непересекающиеся подмножества X. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$: $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.*

7.1 Разбиение единицы

Лемма 7.2 (об ужатии)**.** *X - нормальное пространство с конечным покрытием, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$, где U_i - открытое множество. Тогда существует набор открытых $V_i, i = 1, \dots, N$, таких что $\overline{V}_i \subset U_i, i = 1, \dots, N$ и $X \subset \bigcup V_i$.*

Доказательство (последовательное). Основание $k = 1$, имеем U_1. Рассмотрим

$$X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A$$

Видно, что B - замкнуто. Очевидно, что $A \subset U_1$.

Аналогично доказательству лемме Урысона, будет существовать $O(A)$ причем $\overline{O}(A) \subset U_1$, обозначим $V_1 = O(A)$.

Докажем, что $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$ - покрытие X. Если x лежит в объед U_i, $i \geq 2$, то он лежит в $V_1 \cup U_2 \cup \dots U_N$. Если x лежит в $X \setminus (U_2 \cup \dots U_N) = A \subset V_1$, тогда выполеняется тоже самое.

Рассмотрим $1 \geq k < N$. Пусть построены $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots U_N$.

$$A' = X \setminus V_1 \cup \dots V_k \cup U_{k+1} \cup \dots U_N$$

Слоедовательно мы можем продолжить k до N. □

Задача 7.3. *Подробно расписать доказательство выше.*

Определение 7.4. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Носительные функции f (обозн $suppf$) $= \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

Определение 7.5. *Пусть X - топологическое пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда набор непрерывных функций $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ называется разбиением единицы подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$, если выполненые два условия:*

1. *$suppf_i = \overline{V}_i \subset U_i$*
2. *$\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$ на X*

Теорема 7.6 (о разбиении единицы)**.** *Пусть X - нормальное пространство, $U_1, \dots, U_N$ - конечное покрытие, тогда сущесвтует разбиение единицы, подчиненное покрытию $U_1, \dots, U_N$.*

Доказательство.

По лемме об ужатии, в U_i можно вписать V_i такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$. По лемме Урысона для $A = \overline{V}_i, B = X \setminus U_i$, будет существовать непрерывная функция $\varphi_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_i(A) = \{1\}$ и $\varphi_i(B) = \{0\}$, то есть $\varphi_i = 1$ на A и $\varphi_i = 0$ вне A. Рассмотрим функцию f_i определенную следующим образом

$$f_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i}$$

Причем $suppf_i$ зависит от φ_i, то есть $suppf_i = supp\varphi_i = \overline{V}_i$

□

Задача 7.7. *Если f - непрерывное отображение, то $suppf$ - замкнутое.*

Определение 7.8. *A назвается всюду плотным в топологическом пространстве X, если $\overline{A} = X$.*

Определение 7.9. *A называется нигде не плотным, если ($int\overline{A} = \emptyset$ - другое определение) для каждого непустого открытого U существует открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap U = \emptyset$.*

Определение 7.10. *X - сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество в нем.*

Пример 7.11 (Канторово множество)**.** *Если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0, 2$, то это элемент Канторово множества.*

Можно рассмотреть $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_i}{3^i}$, $\widetilde{a}_i = 1$, если $a_i = 2$, и $\widetilde{a}_i = 0$, если $a_i = 0$.

Задача 7.12. *Доказать, что Канторово множество совершенно и доказать непрерывность функции выше.*

Определение 7.13. *X - совершенное, если не содержить изолированных точек.*

Теорема 7.14 (Кривая Пеано)**.** *Существует непрерывная кривая из отрезка в произведение двух отрезков, т.е. функция $f : I \to I \times I$, где $I = [0, 1]$*