14.2.2024 1. proseminář

1) Určete maximální definiční obor a obor hodnot, a zda je funkce prostá, na, vzájemně jednoznačná, a případně najděte inverzní funkci $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 2$

a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 2$ nesmím ve jmenovateli mít 0

$[(x-1)^3 \neq 0] \iff x \neq 1$ $\Rightarrow$ maximální $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f : D_f \to \mathbb{R}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

b) $f(x) = y$, $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y \in \mathbb{R}$ a je to parametr

$f : D_f \to \mathbb{R}$

co znamená, že je fce prostá? (injektivní)
- Když vezmu y, může se mi stát, že $\exists$ ~~ste~~ 2 různé x_1, x_2 které se zobrazí na stejné y

co znamená, že je fce surjektivní (na)?
- $H_f = \mathbb{R}$
- každé $y \in \mathbb{R}$ má aspoň 1 vzor

Závěr: $H_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ je prostá, není na (surjektivní), není bijektivní

inverze: $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

$f(x) = y$ $[x \neq 1] \leftarrow$ mám v D_f

$\Updownarrow$

$\frac{1}{(x-1)^3} + 2 = y$

$1 = (y-2)(x-1)^3$

$y = 2$: $\to 1 = 0$ nemá řešení, $y = 2 \notin H_f$

$y \neq 2$: $\to$ podělíme $(y-2)$ mám právě 1 řešení

$\frac{1}{y-2} = (x-1)^3 \iff x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y-2}}$

2) Vyřešte rovnici

$x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ pro neznámou $x \in \mathbb{R}$. Která čísla tuto rovnici řeší? Jak vypadá množina všech řešení?

substituce: $z = x^2 \Rightarrow (x^2)^2 + 2x^2 - 8 = 0$

$z^2 + 2z - 8 = 0 \leftarrow$ to řešit umím

řešení: $z_\pm = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{4+32}) = \frac{1}{2}(-2 \pm 6) \genfrac{<}{}{0pt}{}{2}{-4}$ $\leftarrow$ dosadím zpátky v substituci

$x^2 = z_+ = 2 \to x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$

$x^2 = z_- = -4 \to x^2 = -4$ nemá reálné řešení
$x = \emptyset$

nebudeme se dostávat do $\mathbb{C}$

Závěr: množina všech řešení této úlohy je $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

3) Pro reálný parametr $a \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna reálná řešení rovnice

$P_a(x) = 2x^3 + (1-2a)x^2 - (1+a)x + a = 0 \rightarrow x = a: \cancel{2a^3} + (\cancel{1}-\cancel{2a})\cdot \cancel{a^2} - (\cancel{1}+\cancel{a})\cdot \cancel{a} + \cancel{a} = 0$

Diskutujte počet řešení v závislosti na parametru a

$$2x^3 + (1-2a)x^2 - (1+a)x + a : (x-a) = 2x^2 + x - 1$$

$$\underline{-2x^3 + 2ax^2}$$
$$x^2 - (1+a)x + a$$
$$\underline{-x^2 + ax}$$
$$-x + a$$
$$\underline{+x - a}$$
$$0 \checkmark$$

kvadratický polynom

$$P_a(x) = (x-a)\cdot \underbrace{(2x^2 + x - 1)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_\pm = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{1+8}\right) = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

Proč přesně jsme to vydělili $x-a$?
- pokud jsou na nás hodní, bude to $x-a$ (kořenový činitel)

$$P_a(x) = 2\cdot(x-a)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)$$

Kořeny v závislosti na $\underline{a}$:

$x_1 = a,\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -1$

<u>Počet řešení</u>

$a \notin \{\frac{1}{2}; -1\} \Rightarrow$ 3 řešení

$a \in \{\frac{1}{2}; -1\} \Rightarrow$ 2 řešení

4) Druhá odmocnina nezáporného čísla x je definována jako nezáporné reálné číslo u, které splňuje $u^2 = x$ a značí se $u = \sqrt{x}$

Dokažte, nebo pomocí protipříkladu vyvraťte, následující vztahy (x a y jsou libovolná nezáporná čísla a z je libovolné reálné číslo)

$\underbrace{\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}_{\text{je pravda}}$, $\underbrace{\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}}_{\text{není pravda}}$, $\underbrace{\sqrt{z^2} = z}_{\text{není pravda}}$, $\underbrace{\sqrt{z^2} = |z|}_{\text{je pravda}}$

~~x = 9~~
~~y = 16~~

Protipříklad pro: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$x := 9$

$y := 16$

$\sqrt{x+y} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ není pravda

protipříklad pro: $\sqrt{z^2} = z$

$z = -1$

$\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$ není pravda

důkaz pro: $\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

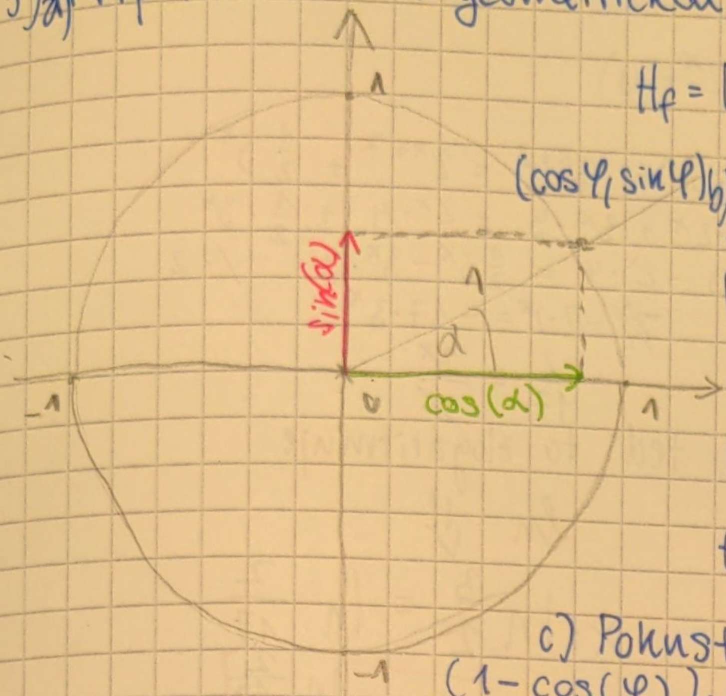
~~$(\sqrt{x\cdot y})^2 = ($~~

$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}) = (\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})\cdot(\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}) \overset{\text{def.}\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} \sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

důkaz pro: $\sqrt{z^2} = |z|$

$$|z|\cdot|z| = \begin{cases} z \geq 0: & z\cdot z = z^2 \\ z < 0: & (-z)\cdot(-z) = z^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z^2} = |z|$$

5) a) Připomeňme si geometrickou definici funkcí sin a cos pomocí



$H_f = D_f = \langle -1 ; 1 \rangle$

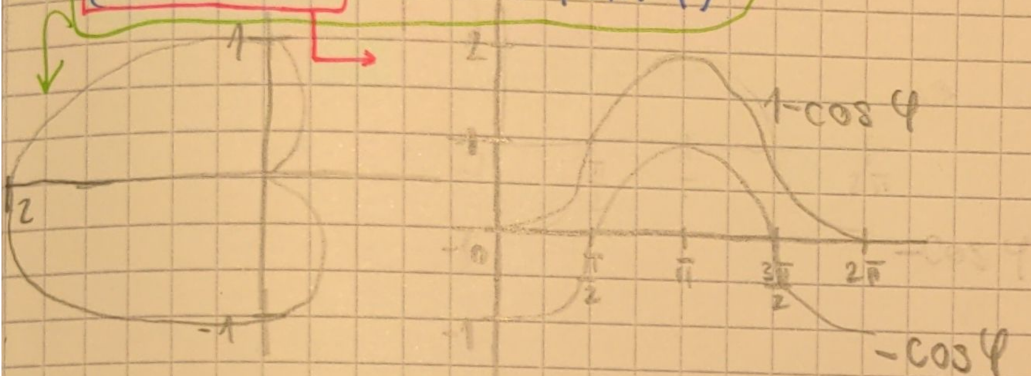
b) Dále pomocí této definice do roviny (x, y) znázorněte bod o souřadnicích $r \cdot (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, pro nějaké $r > 0$ a $\varphi \in \langle 0 ; 2\pi)$.

Co se s bodem v rovině děje, když plynule měníme φ od 0 do 2π?

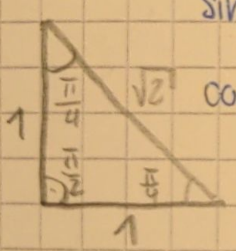
- když měním φ, jdu po kružnici protisměru hodinových ručiček
- parametr r kontroluje vzdálenost bodu od počátku. tedy r je prostě poloměr

c) Pokuste se v ~~množ~~ rovině načrtnout množinu bodů $(1-\cos(\varphi)) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi)$ kde φ probíhá interval $\langle 0 ; 2\pi)$ (tzv. kardioida)

$(1-\cos(\varphi)) \cdot (\cos\varphi , \sin\varphi)$

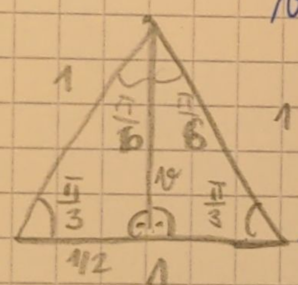


6) Odvození hodnot sin a cos



$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$v = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) Funkce $f(x) := x^x$, $x \in D_f := (0 ; +\infty)$ není polynomiální (něco jako x^n) ani exponenciální a^x. Jde ji vyjádřit pomocí jiných elementárních funkcí?

Ano, lze: $f(x) = \underset{e^{x \cdot \ln(x)}}{x^x} = (x)^x = \underbrace{(e^{\ln(x)})^x}_{\text{důležitá úprava}}$ nebo třeba $(10^{\log_{10} x})^x =$

8) Vyřešte rovnici $x \in \mathbb{R}$

$$3\cdot\left(2^x + 3^{x+1}\right) = 2^{x+2} + \frac{1}{2}3^x \quad /:2^x \quad \Big| \; (2^x > 0)$$

$$\cancel{3\cdot 1 + 3\cdot\frac{3^x\cdot 3}{2^x} = 4 + \frac{3^x}{2^{x+1}}}$$

$$\cancel{\frac{3^{x+1}}{2^x} = \frac{3^x + 2^{x+1}}{2^{x+1}}} \quad /\cdot 2^{x+1}$$

$$\cancel{2\cdot 3^{x+1} = 3^x + 2^{x+1}}$$

$$\cancel{2\cdot 3^x\cdot 3 = 3^x + 2^x\cdot 2} \quad /:3^x$$

$$\cancel{6 = 1 + \frac{2^{x+1}}{3^x}}$$

$$\cancel{5 = 2^{x+1}}$$

$$\cancel{3 + 3\cdot\frac{3^{x+1}}{2^x} = 4 + \frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Má právě jedno řešení !

$$3\cdot 2^x + 3^{x+2} = 2^{x+2} + \frac{1}{2}3^x$$

$$3\cdot 2^x + 3^x\cdot 9 = 2^x\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 3^x$$

$$2^x\cdot 3 - 2^x\cdot 4 = \frac{1}{2}3^x - 3^x\cdot 9 \quad /\cdot 2$$

$$\cancel{7} - 2\cdot 2^x = -17\cdot 3^x$$

$$\frac{2}{17} = \frac{3^x}{2^x}$$

teď to zlogaritmuje

ln ⇓

$$x\cdot\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{17}$$

$$\boxed{x = \frac{\ln\frac{2}{17}}{\ln\frac{3}{2}}}$$