

Рабочая тетрадь № 4

Высказывание – это утверждение, которое может принимать два значения: истина, либо ложь.

Если высказывание A ложно, то будем записывать $A = 0$, иначе $A = 1$.

Математическая логика не касается вопросов ложности или истинности конкретных высказываний [1]. Здесь высказывания X, Y, Z – переменные, которые могут быть ложными или истинными.

Операции с переменными, принимающими такие значения, называются булевой алгеброй (алгеброй логики).

1. Теоретический материал

Пусть A и B – высказывания. С этими высказываниями можно выполнять следующие основные логические операции:

- отрицание «НЕ»: $\neg A$
- конъюнкция «И»: $A \& B$
- дизъюнкция «ИЛИ»: $A \vee B$
- импликация «следует»: $A \rightarrow B$
- эквивалентность: $A \sim B$.

Элементарные логические операции

p	\bar{p}	q	\bar{q}	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \sim q$	$p \oplus q$
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0

Приоритет выполнения операций:

Сначала выполняются действия в скобках. Затем выполняется операция отрицания (\bar{A}), далее – конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee), импликация (\Rightarrow) и в последнюю очередь – эквивалентность (\sim). Однотипные операции выполняются в порядке следования.

Таблица истинности – это набор всевозможных комбинаций переменных с указанием значения логической формулы. Такая таблица, описывает логическую функцию.

2. Пример

Задача:

Приведите таблицу истинности для следующего выражения

$$\bar{A} \vee B \wedge A \Rightarrow B$$

Решение:

A	B	\bar{A}	$B \wedge A$	$(\bar{A}) \vee (B \wedge A)$	$((\bar{A}) \vee (B \wedge A)) \Rightarrow B$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
		0	1	1	1

Задача:

Для какого из представленных вариантов символьных строк следующее высказывание является ложным:

$$(\text{Первая буква гласная}) \rightarrow \neg(\text{Третья буква согласная}) ?$$

1) abedc; 2) babas; 3) becde; 4) abcab.

Решение:

Логическое выражение является импликацией. Данная логическая функция ложна только в том случае, когда из истинной левой части высказывания следует ложная правая часть. Левая часть будет истинной для вариантов один и четыре. Правая часть является отрицанием высказывания «третья буква согласная» (что эквивалентно высказыванию «третья буква гласная»). При этом правая часть ложна для вариантов два, три и четыре. Следовательно, правильный вариант расположен под номером 4.

Ответ:

4

Задача:

Какое из представленных выражений равносильно следующему:

$$A \vee \neg(\neg B \wedge \neg C) ?$$

- 1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$; 2) $A \wedge \neg(B \wedge C)$;
 3) $A \vee \neg B \vee \neg C$; 4) $A \vee B \vee C$.

Решение:

Задействуем законы де Моргана. Раскрыв скобки запишем:

$$A \vee \neg(\neg B \wedge \neg C) = A \vee (\neg\neg B \vee \neg\neg C).$$

Теперь применим закон двойного отрицания:

$$A \vee (\neg\neg B \vee \neg\neg C) = A \vee B \vee C.$$

Следовательно, правильный вариант четвертый.

Ответ:

4

Задача:

По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить, какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует [5].

X	Y	Z	F
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0

- 1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$; 2) $X \vee \neg Y \vee \neg Z$;
 3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$; 4) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$.

Решение:

Подставим представленные значения X, Y и Z из таблицы во все варианты логических функций.

Для первого выражения получим:

$$\neg 1 \wedge \neg 0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0;$$

$$\neg 0 \wedge \neg 0 \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1;$$

$$\neg 0 \wedge \neg 1 \wedge 0 = 1 \wedge 0 \wedge 0 = 0.$$

Для второго выражения получим:

$$1 \wedge 0 \wedge \neg 0 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0;$$

$$0 \wedge 0 \wedge \neg 1 = 0 \wedge 0 \wedge 0 = 0;$$

$$0 \wedge 1 \wedge \neg 0 = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0.$$

Для третьего выражения получим:

$$1 \vee \neg 0 \vee \neg 0 = 1 \vee 1 \vee 1 = 1;$$

$$0 \vee \neg 0 \vee \neg 1 = 0 \vee 1 \vee 0 = 1;$$

$$0 \vee \neg 1 \vee \neg 0 = 0 \vee 0 \vee 1 = 1.$$

Для четвертого выражения получим:

$$\neg 1 \vee \neg 0 \vee 0 = 0 \vee 1 \vee 0 = 1;$$

$$\neg 0 \vee \neg 0 \vee 1 = 1 \vee 1 \vee 1 = 1;$$

$$\neg 0 \vee \neg 1 \vee 0 = 1 \vee 0 \vee 0 = 0.$$

Таким образом, сопоставив приходим к выводу, что правильный вариант под номером один.

Ответ:

1

Задача:

Найдите наименьшее целое число $x > 0$, при котором логическое выражение $(4 > -(4 + x) \cdot x) \rightarrow (30 > x \cdot x)$ является ложным?

Решение:

Импликация ложна только в случае, если левая часть выражения истинна, а правая ложна.

Рассмотрим левую часть. После преобразований можно записать квадратное неравенство $x^2 + 4x + 4 > 0$ или $(x + 2)^2 > 0$. Поскольку $x > 0$, левая часть импликации истинна всегда. Выражение $(30 > x \cdot x)$ будет ложным для $x > 5$. ($30 > 5^2$, но $30 < 6^2$). Следовательно наименьшее целое число x большее нуля, для которого высказывание ложно равно 6.

Ответ:

6

Задача:

Перед началом соревнований три зрителя высказали предположения по поводу победителей:

- Коля победит, Петя будет вторым;
- Петя– третий, Ваня– первый;
- Коля будет последним, а первым будет Женя.

Когда турнир окончился, оказалось, что каждый из зрителей был прав только в одном прогнозе из двух. Какое место на соревнованиях заняли

Женя, Ваня, Петя и Коля? В ответе перечислите места участников в указанном порядке имен.

Решение:

Обозначим буквами предсказания каждого зрителя [5].

Первый: А — Коля победит; В — Петя второй.

Второй: С — Петя третий; D — Ваня первый.

Третий: E — Коля последний; F — Женя первый.

Нетрудно заметить, что истинными одновременно не могут быть выражения В и С; А и E; А и D; А и F; D и F.

Поскольку из условия известно, что в каждом из прогнозов одно высказывание ложно, а другое истинно, то получаем следующее:

- $A \neg B \vee \neg AB = 1$;
- $C \neg D \vee \neg CD = 1$;
- $E \neg F \vee \neg EF = 1$.

Так как все условия должны быть истинными одновременно справедливо следующее выражение:

$$(A \neg B \vee \neg AB)(C \neg D \vee \neg CD)(E \neg F \vee \neg EF) = 1.$$

Раскроем скобки. Используя логические законы, рассмотренные ранее, получим:

$$\begin{aligned} & A \neg B C \neg D E \neg F \vee \neg A B C \neg D E \neg F \vee A \neg B C D E \neg F \vee \\ & \vee \neg A B C D E \neg F \vee A \neg B C \neg D E F \vee \neg A B C \neg D E F \vee \\ & \vee A \neg B C D E F \vee \neg A B C D E F = 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что $BC = 0$, $AE = 0$, $AD = 0$, $AF = 0$, $DF = 0$, получаем следующее:

$$\neg A B \neg C D E \neg F = 1.$$

Представленная конъюнкция равна единице, если все сомножители равны единице, следовательно:

$$A = 0; B = 1; C = 0; D = 1; E = 1; F = 0.$$

Вспоминая высказывания каждого из зрителей, получаем, что Петя — второй, Ваня — первый, Коля — последний, т. е. четвертый. Таким образом, Женя на третьем месте. Следовательно, правильный ответ — 3124.

Ответ:	
	3124

3. Задания				
1.	Задача:			
	Составить таблицу истинности для выражений			0 0 0 1
	1) $A \vee B \Rightarrow A \sim B$			0 0 1 1
	2) $\bar{A} \vee (\bar{B} \sim \bar{A}) \oplus B$ (\oplus – исключающее ИЛИ, сумма по модулю 2)			0 1 0 0
	3) $A \vee B \Rightarrow C$			0 1 1 1
		0 0 0	0 0 1	1 0 0 0
		0 1 0	0 1 0	1 0 1 1
Решение:		1 0 0	1 0 1	1 1 0 0
		1 1 1	1 1 0	1 1 1 1
2.	Задача:			
	Для какого слова истинно высказывание:			
	(Первая буква гласная \vee Пятая буква согласная) \rightarrow Вторая буква гласная?			
	1) арбуз;	3) кресло;	2) ответ;	4) привет.
	Решение:			
	Ответ:			
3.	Задача:			
	Выберете логическое выражение эквивалентное следующему:			
	$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$			
	1) $\neg A \vee B \vee \neg C$;	2) $A \vee \neg B \vee \neg C$;		
	3) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$;	4) $A \vee B \vee \neg C$.		
	Решение:			
	not(not a and b) == a or not b ==> 2			
	Ответ:			
	2) a or not b or not c			
4.	Задача:			
	По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует.			

	X	Y	Z	F
	0	0	0	0
	1	0	1	1
	0	1	0	1

1) $X \wedge Y \wedge Z$; 2) $X \wedge Y \vee Z$;
 3) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$; 4) $X \vee Y \wedge \neg Z$.

Решение:

1 - . 2 - , 3 . 3 - , 2 . => 4

Ответ:

4) x or y and not z

5. **Задача:**

Найдите наибольшее целое число $x > 0$, для которого ложно выражение:

$$((x + 6) \cdot x + 9 > 0) \rightarrow (x \cdot x > 20) .$$

Решение:

$(4+6)*4 + 9 = 49; 4*4 = 16 \Rightarrow 1 \rightarrow 0 = 0$

Ответ:

4

6. **Задача:**

Найдите значения логических переменных A, B, C, D, при которых логическое выражение $(\neg(C \vee B) \wedge A) \rightarrow ((\neg A \wedge \neg C) \vee D) = 0$.

Решение:

(empty box)

Ответ:

a,b,c,d = 1,0,0,0

7. **Задача:**

В соревновании участвовало пять человек: Аня, Надя, Вера, Рита, Саша. Об итогах турнира есть пять высказываний:

1. Первое место заняла Аня, а Рита – третья.
2. Пятая Вера, а вот Надя первая.
3. Первая Саша, а Вера– вторая.
4. Рита пятая, а Надя была четвертой.
5. Надя была четвертой, а первой — Аня.

Известно, что в каждом утверждении только одно утверждение из двух истинно. Требуется найти, кто занял первое место, и на каком

	<p>месте была Аня? Ответ следует записать в виде первой буквы имени победительницы, и, через запятую, места, занятого Анной.</p> <p>Решение:</p> <p>3-> 4-> 5-> 1-> 2</p> <p>Ответ:</p> <p>2</p>
--	--

Тест 4	
1.	<p>Задание:</p> <p>Таблица, включающая всевозможные значения логической функции, называется:</p> <p>Ответ:</p> <p>1) таблица ложности; 2) таблица истинности; 3) таблица значений; 4) таблица ответов.</p>
2.	<p>Задание:</p> <p>Значение логического выражения $\neg(A \vee B)$ по закону Моргана равно:</p> <p>Ответ:</p> <p>1) $\neg A \& \neg B$; 2) $\neg A \& B$; 3) $A \& \neg B$; 4) $\neg A \vee \neg B$.</p>
3.	<p>Задание:</p> <p>Какое из перечисленных имен удовлетворяет истинности высказывания:</p> <p>\neg (Первая буква согласная \rightarrow Третья буква гласная) ?</p> <p>Ответ:</p> <p>1) Ирина; 2) Сергей; 3) Григорий; 4) Ольга.</p>
4.	<p>Задание:</p> <p>Выберете выражение эквивалентное следующему:</p> <p>$\neg A \vee \neg(B \wedge C)$</p> <p>Ответ:</p> <p>1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$; 2) $\neg A \wedge B \wedge C$; 3) $A \wedge \neg B \wedge C$; 4) $(\neg A \vee B) \wedge C$.</p>
5.	<p>Задание:</p> <p>По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует.</p>

		X	Y	Z	F
		0	0	0	0
		1	1	0	1
		1	0	0	1
Ответ:					
1) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$; 2) $X \wedge Y \wedge Z$; 3) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$; 4) $X \vee Y \vee Z$.					
6.	Задание:				
		Для какого из приведенных значений x выражение $(x > 2) \vee (x > 5) \rightarrow (x < 3)$ истинно.			
	Ответ:				
		1) 5;	2) 3;	3) 4;	4) 2.
7.	Задание:				
		Для какого из приведенных значений x выражение $\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3)) = 1$.			
	Ответ:				
		1) 1;	2) 2;	3) 3;	4) 4.
8.	Задание:				
		Сколько разнообразных решений имеет выражение $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \wedge (E \vee \neg E) = 0$, A, B, C, D, T — логические переменные? В качестве ответа требуется написать количество таких наборов.			
	Ответ:				
9.	Задание:				
		Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание $(100 < X \cdot X) \rightarrow (100 > (X + 1)(X + 1))$?			
	Ответ:				
10.	Задание:				
		Четыре друга — Антон, Михаил, Николай и Виктор пришли в автосалон. Продавец сказал, что осталось только четыре машины: красная, черная, белая и синяя. Каждый из друзей купил по машине.			

Имеется три утверждения:

- Красную машину купил Антон, а черную— Михаил;
- Антон взял черный автомобиль, а Виктор – белый;
- Николай забрал черное авто, а Виктор — синее.

Кто купил синюю машину, и какой автомобиль выбрал Виктор?
Известно, что половина каждого утверждения ложна, а половина истинна.

Ответ требуется записать в виде первой буквы имени, взявшего синий автомобиль, и, через запятую, первую букву цвета машины Виктора.

Ответ:

Реализация задач на языке программирования Python

1. Теоретический материал

В Python существует возможность работы с двоичными разрядами (битами) целых величин. При этом каждый бит числа рассматривается отдельно. Для этого в Python задействованы битовые (поразрядные) операторы, которые реализуют битовые операции.

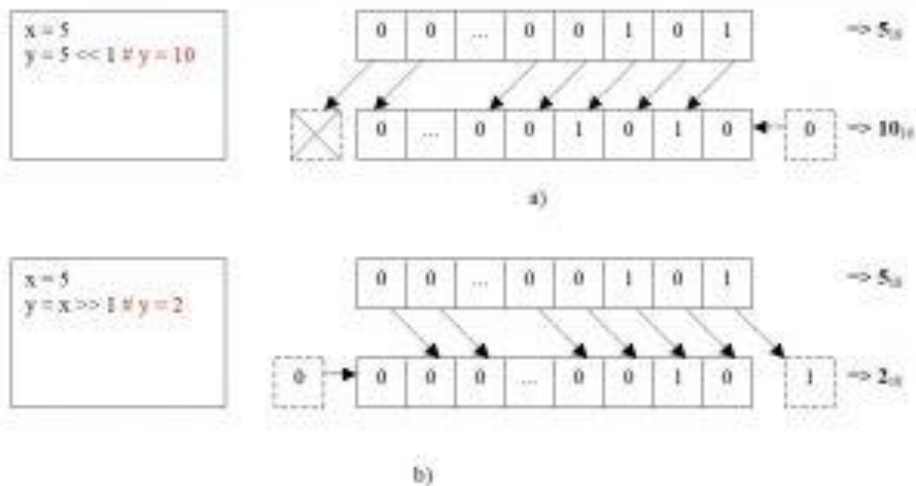
В побитовых операторах (операциях) операнды рассматриваются как последовательность бит (нулей или единиц). Над разрядами существует возможность выполнять известные логические операции (логическое «ИЛИ», логическое «И», и т.д.).

Битовые операции в Python в порядке убывания приоритета представлены ниже:

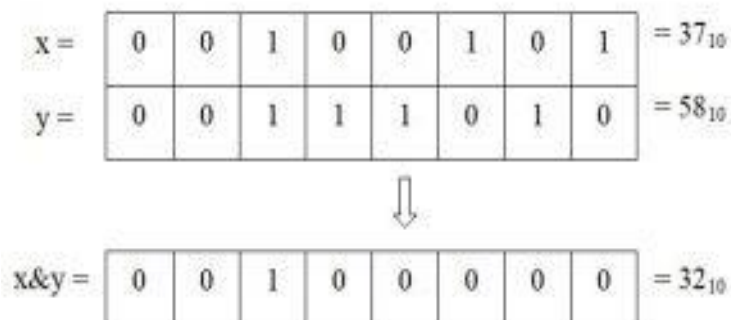
Операции	Назначение
~	побитовое НЕ (инверсия);
<<,>>	битовые сдвиги влево и вправо;
&	побитовое И;
^	побитовое исключающее ИЛИ (XOR);
	побитовое ИЛИ (OR).

В битовой инверсии значение любого бита числа меняется на противоположное. У числа при этом меняется знак со смещением на -1.

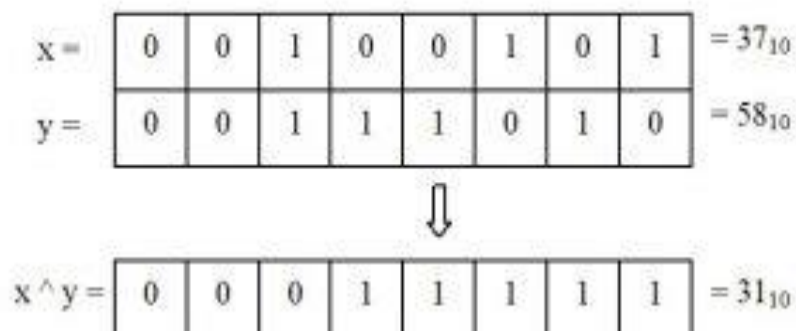
Операторы сдвига влево << и сдвига вправо >> сдвигают биты на одну или несколько позиций влево или вправо соответственно.



Битовый оператор И (AND) есть бинарным и выполняет побитовое «И» для каждой пары битов операндов, которые размещаются слева и справа от знака оператора &.



Битовый оператор «исключительное ИЛИ» обозначается ^ и выполняет операцию сложения по модулю 2 для любого бита операндов.



Битовый оператор ИЛИ (OR) символом |. Оператор реализует побитовое логическое сложение.

x =	0	0	1	0	0	1	0	1	= 37 ₁₀
y =	0	0	1	1	1	0	1	0	= 58 ₁₀
↓									
x y =	0	0	1	1	1	1	1	1	= 63 ₁₀

2. Пример

Задача:

Дано число $x = 37$, $y = 58$.

Найти $\sim x$, $x \gg 3$, $x \ll 2$, $x \& y$, $x \wedge y$, $x | y$

Решение (код программы):

x, y = 37, 58

#x в десятичной и двоичной системе

print('x = ', x, ' x_bin = ', bin(x))

#y в десятичной и двоичной системе

print('y = ', y, ' y_bin = ', bin(y))

#~x в десятичной и двоичной системе

a = ~x

print('~x = ', a, ' ~x_bin = ', bin(a))

#x >> 3 в десятичной и двоичной системе

b = x >> 3

print('x >> 3 = ', b, ' (x >> 3)_bin = ', bin(b))

#x << 2 в десятичной и двоичной системе

c = x << 2

print('x << 2 = ', c, ' (x << 2)_bin = ', bin(c))

#x & y в десятичной и двоичной системе

```

d = x & y
print('x&y =', d, ' (x&y)_bin = ', bin(d))

#x^y в десятичной и двоичной системе
e = x ^ y
print('x^y =', e, ' (x^y)_bin = ', bin(e))

#x|y в десятичной и двоичной системе
f = x | y
print('x|y =', f, ' (x|y)_bin = ', bin(f))

```

Задача:

Вытянуть из числа 4,5,6 биты и определить их целочисленное значение.

Решение (код программы):

```

number = int(input('Input number: '))
# фильтр на 4,5,6 биты
number &= 0b1110000
# сдвинуть на 4 разряда вправо
number >>= 4
print('number = ', number)

```

Задача:

Умножить значения двух чисел. В первом числе взять биты, которые размещены в позициях 0-5. Во втором числе взять биты, которые размещены в позициях 0-7.

Решение (код программы):

```

x = int(input('x = '))
y = int(input('y = '))

# фильтр на 0-5 биты
x &= 0b11111

# фильтр на 0-7 биты
y &= 0b1111111

```

```
# умножить
z = x*y
print('x = ', x)
print('y = ', y)
print('z = ', z)
```

3. Задания

Задача:

Даны два различных числа k и n . Выведите значение $2^k + 2^n$, используя только битовые операции.

Решение (код программы):

```
k,n = [int(i) for i in input("k,n (k n): ").split(" ")]
```

Задача:

Ввести число $n > 0$ с клавиатуры. Если число n является точной степенью двойки, вывести “YES”, в противном случае “NO”.

Решение (код программы):

```
n = int(input("n: "))
if(bin(n)[2:].count("1") == 1): print("YES")
else: print("NO")
```

Задача:

Даны целые числа a и k . Выведите число, которое получается из a установкой значения k -го бита в 1.

Решение (код программы):

```
a, k = [int(i) for i in input("a,k (a k): ").split(" ")]
print(a | (1 << k))
```

Задача*:

Дано целые числа n и k . Обнулите в числе n его последние k бит и выведите результат. Рекомендуется сделать эту задачу без использования циклов.

Решение (код программы):

```
n, k = [int(i) for i in input("a,k (a k): ").split(" ")]
print(n & ~(1 << k))
```