МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 10

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

26 марта 2021

Приближение матриц

1. Приближение матриц.
2. Погрешность решений.
3. Круги Гершгорина.

Семинар 10

Найти наилучшее приближение B_1 ранга 1 для матрицы B в норме $\|\cdot\|_2$ и найти $\|B - B_1\|_2$, где

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}.$$

Семинар 10

SVD разложение $B = U\Sigma V^T$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Семинар 10

Ответ: Приближение ранга 1:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 12 & 24 & -24 \\ 9 & 18 & -18 \end{pmatrix}.$$

Расстояние:

$$\|B - B_1\|_2 = \sigma_2 = 15.$$

Погрешность решений

1. Приближение матриц.
2. Погрешность решений.
3. Круги Гершгорина.

Семинар 10

Замечание к задаче.
Задача Найдите приближенно обратную матрицу A^{-1}...

Замечание. Иногда оценку

$$\delta A^{-1} \le \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}$$

огрубляют до

$$\delta A^{-1} \le \chi(A)\delta A.$$

Поэтому ответ:

$$\delta A^{-1} \le \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A} \qquad \text{или} \qquad \chi(A)\delta A.$$

Семинар 10

Задача. Оцените относительную погрешность приближённого решения $(1, 1)$ системы $Ax = b$ в норме $\|\cdot\|_1$ с помощью числа обусловленности матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 & -0.1 \\ 5.2 & -2.9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

Семинар 10

$(1,1)$ будет точным решениям для следующих матриц:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

аппроксимирующим исходные

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 & -0.1 \\ 5.2 & -2.9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

Остаётся применить формулу

$$\delta x \leq \chi(\hat{A})(\delta\hat{b} + \delta\hat{A})$$

Семинар 10

Напомним,

- Для $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ получаем максимум суммы модулей элементов **в столбцах**:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Семинар 10

Вычисляем нормы матриц и ошибки:

- Для матрицы A:

$$\|\hat{A}\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\right\|_1 = 8, \qquad \|\Delta\hat{A}\|_1 = \|A - \hat{A}\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}\right\|_1 = 0.3,$$

$$\delta A = \frac{\|\Delta\hat{A}\|_1}{\|\hat{A}\|_1} = \frac{0.3}{8} = 0,0375$$

- Для вектора b:

$$\|\hat{b}\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|_1 = 5, \qquad \|\Delta\hat{b}\|_1 = \|b - \hat{b}\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}\right\|_1 = 0.3,$$

$$\delta b = \frac{\|\Delta\hat{b}\|_1}{\|\hat{b}\|_1} = \frac{0.3}{5} = 0,06$$

Находим норму обратной матрицы:

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \left\|\hat{A}^{-1}\right\|_1 = \frac{8}{9}.$$

Находим число обусловленности

$$\chi(\hat{A}) = \left\|\hat{A}\right\|_1 \left\|\hat{A}^{-1}\right\|_1 = \frac{64}{9} \approx 7,11$$

В данном случае

$$\chi(\hat{A})(\delta\hat{b} + \delta\hat{A}) \approx 7,11(0,06 + 0,0375) \approx 0,693$$

Ответ:

$$\delta x \le \chi(\hat{A})(\delta\hat{b} + \delta\hat{A}) \le 0,694$$

Круги Гершгорина

Литература

Тыртышников Е.Е.,
Методы численного анализа,
Глава 4.2 Круги Гершгорина,

Семинар 10

Пусть A — $n \times n$ (комплексная или вещественная) матрица.

Обозначим через R_i сумму модулей недиагональных элементов i-той строки:

$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| .$$

Теорема

Каждое собственное значение матрицы A содержится хотя бы в одном из дисков $D(a_{ii}, R_i)$ в $\mathbb{C}$.

Семинар 10

То же самое для матрицы A^T.

Теорема

Собственные значения матрицы A содержатся в объединении дисков $D(a_{ii}, C_i)$, где

$$C_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}| .$$

Задача. Нарисовать круги Гершгорина для матрицы A и с их помощью оценить собственные значения. Вычислить собственные значения и сравнить результаты

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственные значения:

$$\lambda_+ = \frac{7+\sqrt{8,4}}{2} \approx 4.94914, \qquad \frac{7-\sqrt{8,4}}{2} \approx 2.05086.$$

Круги Гершгорина, соответствующие строкам: $D(5, 0.3)$ и $D(2, 0.5)$.

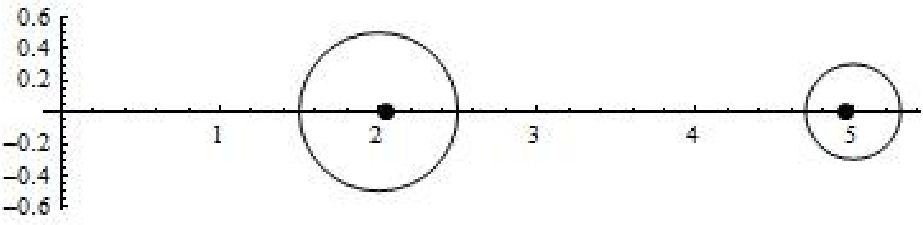


Рис.: Рис.

Семинар 10

Круги Гершгорина, соответствующие строкам: $D(5, 0.5)$ и $D(2, 0.3)$.

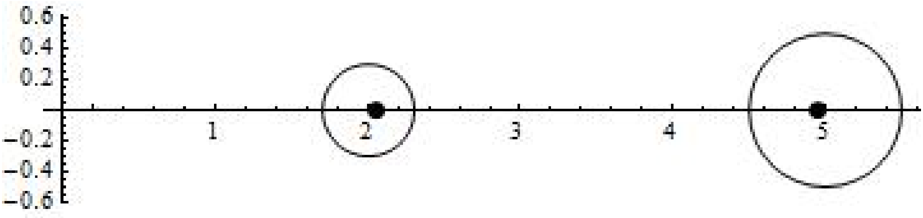


Рис.: Рис.

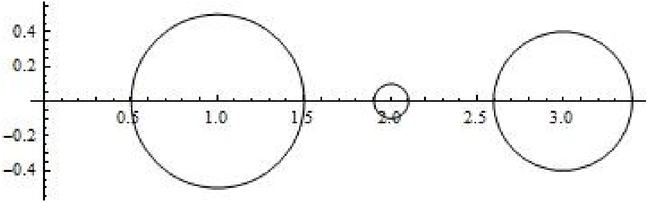
Семинар 10

Задача. С помощью теоремы Гершгорина нарисовать область, где находятся собственные значения матрицы A.

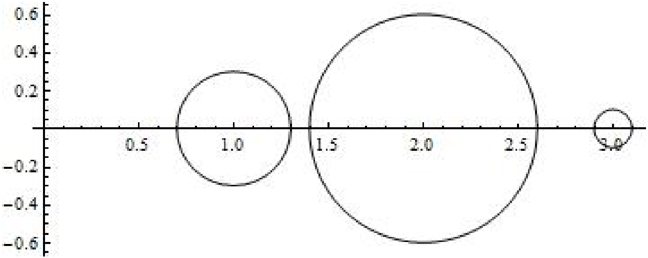
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 10

Круги Гершгорина, соответствующие строкам: $D(1, 0.5), D(2, 0.1), D(3, 0.4)$.



Круги Гершгорина, соответствующие столбцам: $D(1, 0.3), D(2, 0.6), D(3, 0.1)$.



Семинар 10

2ая теорема Гершгорина

Если объединение r кругов Гершгорина U не пересекается с отслаьными $(n-r)$ кругами, то U содержит ровно r собственных значения с учётом кратностей.

Семинар 10

Можно взять круги наименьшего размера: $D(1, 0.3), D(2, 0.1), D(3, 0.1)$.

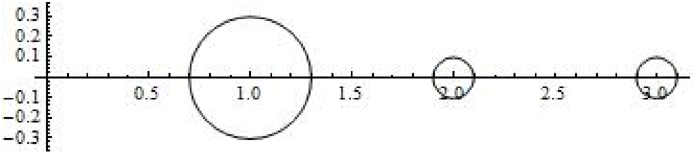


Рис.: Рис.

Семинар 10

Задача. Доказать, что определитель матрицы A не равен 0. Нарисовать наименьшую область, содержащую собственные значения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \cos x & \cos^2 x \\ 0 & 5 & \sin^2 x \\ 3\sin^2 x & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

при $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

Семинар 10

Собственные значения содержатся в объединение кругов Гершгорина для строк:

$$D(2, |\cos x| + \cos^2 x), \qquad D(5, \sin^2 x), \qquad D(10, 3 + 3\sin^2 x)$$

и кругов Гершгорина для столбцов:

$$D(2, 3\sin^2 x) \qquad D(5, 3 + |\cos x|) \qquad D(10, 1).$$

Искомая область — пересечение этих двух областей.

Семинар 10

Заметим, что некоторые круги не пересекаются, откуда:

- Одно собственное лежит в
$$D(2, |\cos x| + \cos^2 x),$$
а два — в
$$D(5, \sin^2 x), \qquad D(10, 3 + 3\sin^2 x)$$
- Два собственных значения лежат в
$$D(2, 3\sin^2 x) \qquad D(5, 3 + |\cos x|)$$
, а одно — в
$$D(10, 1).$$

Семинар 10

Поэтому заведомо

- Одно собственное значение лежит в
$$D(2, |\cos x| + \cos^2 x),$$
- Второе: в пересечении
$$D(5, \sin^2 x) \cup D(10, 3 + 3\sin^2 x) \qquad \text{и} \qquad D(2, 3\sin^2 x) \cup D(5, 3 + |\cos x|)$$
,
- Третье: — в
$$D(10, 1).$$

При некоторых x некоторые из этих областей можно ещё уменьшить.

Семинар 10

Докажем, что $\det A \neq 0$.

Если $\cos x \neq \pm 1$, то все круги Гершгорина для строк :

$$D(2, |\cos x| + \cos^2 x) \qquad D(5, \sin^2 x) \qquad D(10, 3 + 3\sin^2 x)$$

лежат в области $x > 0$, поэтому $\det A \neq 0$.

В оставшихся случаях $\cos x \neq \pm 1$ видно, что матрицы невырожденные:

$$\begin{vmatrix} 2 & \pm 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 10 \neq 0.$$

Семинар 10

При $x = \frac{\pi}{6}$.

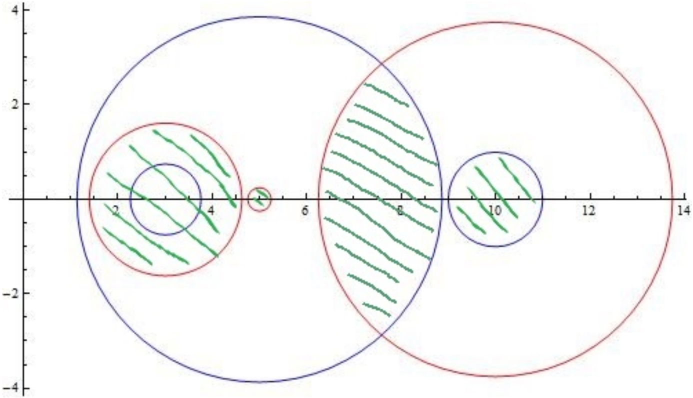


Рис.: Рис.

4 области на 3 собственных значения. (Вспоминаем принцип Дирихле.)

Семинар 10

При $x = \frac{\pi}{6}$.

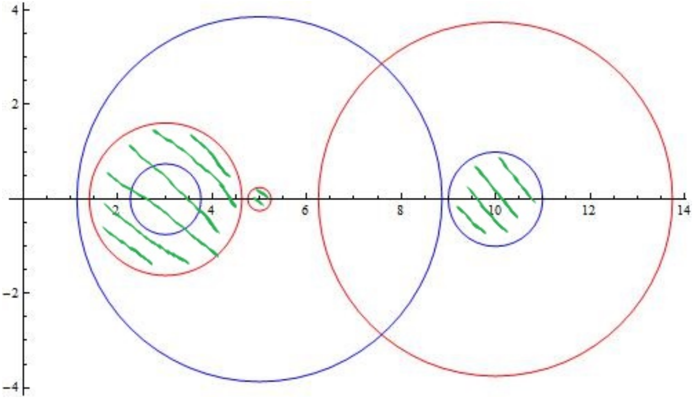


Рис.: Рис.

Семинар 10

При $x = \frac{\pi}{3}$.

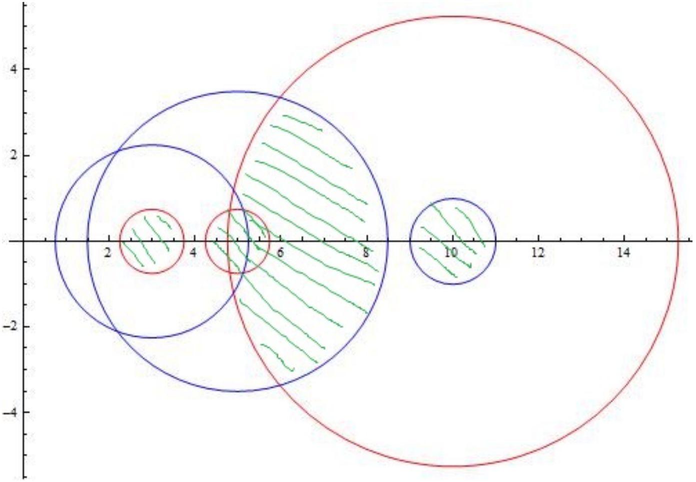


Рис.: Рис.

Семинар 10

Задача. Доказать, что в предыдущих трёх задачах все собственные значения — положительные действительные числа и оценить их.

Решение. Достаточно доказать, что собственные значения — действительные числа. Они содержатся в кругах Гершгорина, а в этих задачах круги Гершгорина содержат только положительные

Если $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ — собственное значение матрицы A, то $\bar{\lambda}$ — тоже её собственное значение.

Круги Гершгорина симметричны относительно оси x, поэтому если $\lambda \notin \mathbb{R}$, то хотя один круг содержит пару собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$.

Но круги Гершгорина в первых двух задачах не пересекающится. Поэтому каждый круг содержит ровно 1 собственное значение. Значит, все собственные значения λ вещественные.

В третьей задаче аналогично, но собственные значения лежат в трёх непересекающихся областях, симметричных относительно оси x.

Утверждение доказано.