МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 12

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

16 апреля 2021

Метод итераций

1. Метод итераций.

2. Положительные матрицы.

Семинар 12

Задача. Решить СЛУ методом итераций:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 31; \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 38, \end{cases}$$

определить номер итерации, после которой погрешность приближения по каждой координате не превосходит 0.01 и найдите соответствующее приближённое решение. Начните с

$$x_0 = (0, 0, 0).$$

Решение. Переходим к системе

$$x = Px + c,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 3,1 \\ 3,8 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\|P\|_\infty = \max(0,5; \quad 0,5; \quad 0,5) = 0,5 < 1,$$

поэтому метод итераций сойдётся. (Напомним, что $\|P\|_\infty$ — максимум сумм модулей по строкам.)

Взяли векторную норму

$$\|v\|_\infty = \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$$

поскольку ограничиваем погрешность по каждой координате.

Семинар 12

Оценка погрешности

$$\left|x - x^{(k)}\right| \leq \frac{\|P\|_\infty^k}{1 - \|P\|_\infty} \left|x^{(0)}\right| = \frac{(0,5)^k}{0,5} 3,1 < 0,01$$

начиная с $k = 10$. Действительно,

$$\frac{3,1}{2^{k-1}} = \frac{3,1}{512} \approx 0,006.$$

Ответ: После 10 шага погрешность приближения по каждой координате заведомо не превосходит 0.01. Соответствующее приближённое решение:

$$x^{(10)} = \begin{pmatrix} 0,998 & 1,998 & 2,998 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что у СЛУ

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 31; \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 38, \end{cases}$$

точное решение суть

$$x = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}.$$

Так что погрешность нашего решения действительно меньше 0,01.

Семинар 12

Задача. Решить СЛУ методом Зейделя :

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 31; \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 38, \end{cases}$$

Решение. См. Jupyter Notebook

Положительные матрицы

1. Метод итераций.
2. Положительные матрицы.

Теорема Фробениуса-Перрона

Теорема (Перрон)

Для любой положительной матрицы $A > 0$

1. *Существует положительное собственное значение* $\lambda_A > 0$ *т.,ч.*
$$\lambda_A > |\lambda_i|.$$
2. *Существует положительный собственный вектор* x_A *с собственным значением* λ_A*:*
$$Ax_A = \lambda_A x_A, \qquad x_A > 0.$$
3. *Кратность* λ_A *равна* 1*.*

Теорема Фробениуса-Перрона

PageRank. Моделируем Web.

Берём ориентированный граф. Составим по нему матрицу. В столбце j — вероятность перейти из неё в другие вершины.

Пусть из вершины j выходит k стрелок. Для каждой стрелки $j \to i$ полагаем

$$p_{ij} = \frac{1}{k}.$$

Теорема Фробениуса-Перрона

Утверждение

У матрицы P наибольшее собственное значение равно 1.

Доказательство.

- *Это собственное значение*, т.к.

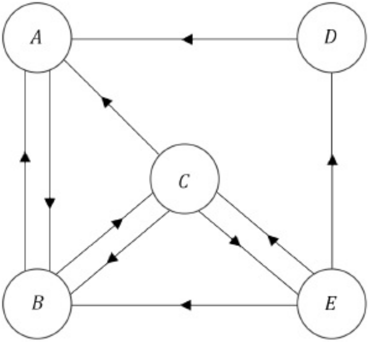
  $$\begin{pmatrix} 1, & \dots, & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

  (сумма вероятностей в столбцах равна 1).

- *Нет положительного собственного значения* $\lambda > 1$. См. круги Гершгорина для $P - \lambda E$ для столбцов. Сумма чисел в столбцах $= 1$, поэтому они лежат в полуплоскости $x < 0$. Значит, P невырождена и $\lambda > 1$ — не собственное значение.

Семинар 12

Задача. Найти самую влиятельную вершину в графе.

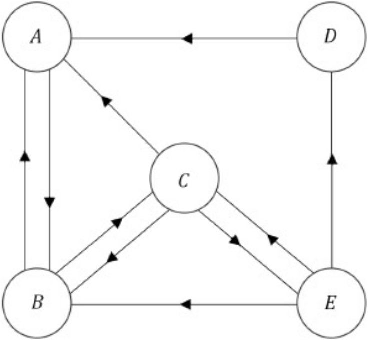


Решение. Составим матрицу. В столбце j — вероятность перейти из неё в другие вершины.

Пусть из вершины j выходит k стрелок. Для каждой стрелки $j \to i$ полагаем

$$p_{ij} = \frac{1}{k}.$$

Семинар 12



Матрица:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Семинар 12

Берём вектор

$$x_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Итеративно вычисляем

$$x_{k+1} = Px_k.$$

Семинар 12

Получаем

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{30} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{15} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$x_1 \approx \begin{pmatrix} 0.367 \\ 0.333 \\ 0.167 \\ 0.067 \\ 0.067 \end{pmatrix}.$$

И т.д. можно проверить

$$x_{100} \approx \begin{pmatrix} 0.292 \\ 0.390 \\ 0219 \\ 0.024 \\ 0.07 \end{pmatrix}.$$

Поэтому самая влиятельная вершина B.

Задача 1 решена.

Можно проверить, что точно решение $Px = x$, где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

суть

$$x = \left(4, \quad \frac{16}{3}, \quad 3, \quad \frac{1}{3}, \quad 1\right).$$

Это примерно то, что мы получили

$$x = (0.2927, \quad 0.3902, \quad 0.2195, \quad 0.0244, \quad 0.0732)\,.$$

Матрица A называется неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов A нельзя привести к блочно-диагональному виду

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right).$$

Семинар 12

Утверждение

Критерии неразложимости матрицы $A \geq 0$:

1. Для любых i, j существует последовательность
$$i = i_0, i_1, \dots i_k = j, \qquad a_{i_k i_{k+1}} > 0.$$
2. Для любых i, j существует $m < n$ т.,ч.
$$(A^m)_{ij} > 0.$$
3. $(E + A)^{n-1} > 0$, где n — порядок матрицы.

Семинар 12

Докажем, что неразложимость $\Leftrightarrow$ п.1

Утверждение. Матрица $A \geq 0$ неразложима $\Leftrightarrow$ Для любых i, j существует последовательность

$$i = i_0, i_1, \ldots i_k = j, \qquad a_{i_k i_{k+1}} > 0.$$

Доказательство. A — разложима

$$\Updownarrow$$

существует множество индексов $S \subset \{1, \ldots, n\}$ т.,ч. $a_{ij} = 0$ если $i \in S, j \notin S$

$$\Updownarrow$$

из вершин S в остальные не идут стрелки

$$\Updownarrow$$

граф не сильно связен.

Семинар 12

Замечание. Условие

$$i = i_0, i_1, \dots i_k = j, \qquad a_{i_k i_{k+1}} > 0$$

означает, что в орграфе, построенном по матрице есть путь из i-той вершины в j-тую (это в точности путь $i_0 i_{i_1} \dots i_k$).

Значит, матрица неразложима $\Leftrightarrow$ соотв. орграф сильно связен (из любой вершины можно прийти в любую другую).

Ясно, что вершины в путях следует брать различными. Если в графе n вершин, то не нужно брать пути длинее $n - 1$.

Семинар 12

Докажем, что п. 1$\Leftrightarrow$ п.2

Утверждение. Для любых i, j существует последовательность

$$i = i_0, i_1, \dots i_k = j, \qquad a_{i_k i_{k+1}} > 0.$$

$\Leftrightarrow$ Для любых i, j существует $m < n$ т.,ч.

$$(A^m)_{ij} > 0.$$

Доказательство.

$$a_{ij}^m = \sum \prod_{k=0}^{m-1} a_{i_k i_{k+1}}.$$

Это формула — обобщение формулы для произведения матриц — если $C = AB$, то

$$c_{ij} = \sum_s a_{is} b_{sj}.$$

Сумма положительна $\Leftrightarrow$ хотя бы одно из слагаемых положительно.

Теорема Фробениуса-Перрона

Замечание. Даже если степеней A^k каждая компонента становится положительной $A^k_{ij} > 0$, не означает, что степень матрицы будет положительной. Пример:

$$A = A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 12

Докажем, что п. 2$\Leftrightarrow$ п.3

Утверждение. Для любых i, j существует $m < n$ т.,ч.

$$(A^m)_{ij} > 0.$$

$\Leftrightarrow$ $(E + A)^{n-1} > 0$, где n — порядок матрицы.
Доказательство.

$$(E + A)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} E + \binom{n-1}{1} A + \cdots + \binom{n-1}{n-1} A^{n-1}.$$

Компонента $(E + A)_{ij}^{n-1} > 0$ (где $i \neq j$) тогда и только тогда одно из слагаемых $A_{ij}^m \neq 0$.

Семинар 12

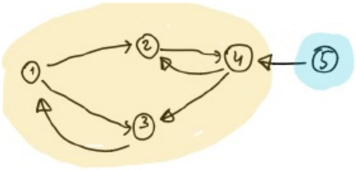
Задача. Разложима ли матрица A?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Семинар 12

Построим ориентированный граф. Проведём ребро $i \to j$, если $a_{ij} > 0$.

Неразложимость $\Leftrightarrow$ этот граф сильно связен (из любой вершины можно прийти в любую).



Граф не сильно связен $\Rightarrow$ *матрица разложима*.

Теорема Фробениуса-Перрона

Теорема (Фробениус-Перрон)

Пусть $A \geq 0$ *— неразложима матрица. Тогда*

1. *Существует положительное собственное значение* $\lambda_A > 0$ *т.,ч.*
$$\lambda_A \geq |\lambda_i|.$$
2. *Существует положительный собственный вектор* x_A *с собственным значением* λ_A*:*
$$Ax_A = \lambda_A x_A, \qquad x_A > 0.$$
3. *Кратность* λ_A *равна* 1*.*

Теорема Фробениуса-Перрона

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения равной длины:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Задача. Разложима ли матрица B? Найти λ и v из теоремы Перрона

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица неразложима, т.к. граф для матрицы смежности сильно связен:

$$1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3.$$

Семинар 12

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = -3.$$

Итак,

$$\lambda = 3$$

Находим собственный вектор v:

$$(B - \lambda E)v = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} v = 0.$$

Ответ: $\lambda = 3,\ v = (1, 3, 2)$.