МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Задача 6

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

Задача 6

Problem

Построить многочлен степени ≤ 3, *аппроксимирующий функцию*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

на отрезке $[0, 6]$ *по норме*

$$|h|_T = \sqrt{\int_0^6 \frac{h(x)^2}{\sqrt{1 - \frac{(2x-6)^2}{36}}} dx}.$$

Задача 6

Заметим, что $|h|_T$ суть длина вектора в пространстве функций на отрезке $[0, 6]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^6 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - \frac{(2x-6)^2}{36}}} dx.$$

Задача 6

Вспомним про многочлены Чебышёва первого рода:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x
\end{aligned}
$$

Задача 6

Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

А именно

$$\langle T_m, T_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Задача 6

Рассмотрим аналоги многочленов Чебышёва на отрезке $[a, b]$:

$$\hat{T}_n(x) = T_n\left(\frac{2x - (b + a)}{b - a}\right).$$

Упражнение. Относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - (\frac{2x-(b+a)}{b-a})^2}}dx$$

многочлены будут ортогональны:

$$\langle \hat{T}_m, \hat{T}_n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{b - a}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi \cdot \frac{b-a}{2}, & m = n = 0. \end{cases}$$

Задача 6

Указание. Действительно, достаточно сделать замену переменных в интеграле. Обозначим $y = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$. Тогда

$$\langle \hat{T}_m, \hat{T}_n \rangle = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(y) T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

Семинар 6

Искомый ответ: Многочлен степени ≤ 3, аппроксимирующий функцию $f(x)$ — это линейная комбинация

$$\sum_{k=0}^{3} \alpha_k \hat{T}_k.$$

Ответ находится при помощи обычных формул ортогональной проекции:

$$\alpha_k = \frac{(f, \hat{T}_k)}{(\hat{T}_k, \hat{T}_k)}.$$

В примере $a = 0, b = 6$ и скалярное произведение считается по формуле:

$$(f, g) = \int_0^6 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - \frac{(2x-6)^2}{36}}} dx.$$