МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 9

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

19 марта 2021

Матричные нормы

1. Матричные нормы.
2. Матричные приближения меньшего ранга.
3. Оценки погрешности решений СЛУ.
   - Примеры оценок.
     - Решение системы.
     - Обратная матрица.
   - Доказательство неравенств.

Семинар 9

- **Матричные нормы** — это нормы на матрицах + *свойство субмультипликативности:*
$$\|AB\| \le \|A\| \|B\|$$

- **Индуцированная норма**. Любая норма на $\mathbb{R}^n$ задаёт норму на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax| \, .$$

Семинар 9

Задача. Докажите, что

$$A^{-1} \geq \frac{\|E\|}{\|A\|}.$$

Решение. По свойствам матричной норма

$$\|E\| = \left\|AA^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Откуда и получаем требуемое неравенство.

Семинар 9

Примеры индуцированных матричных норм:

- Для $|x|_1 = \sum |x_i|$ получаем максимум суммы модулей элементов в столбцах:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- Для евклидовой метрике $|x|_2$ получаем максимальное сингулярное значение:

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A).$$

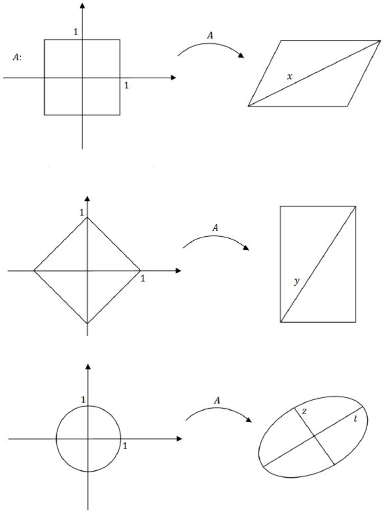
- Для $|x|_\infty = \max |x_i|$ получаем максимум суммы модулей элементов в строках:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Семинар 9

Задача. Найти x, y, z, t для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

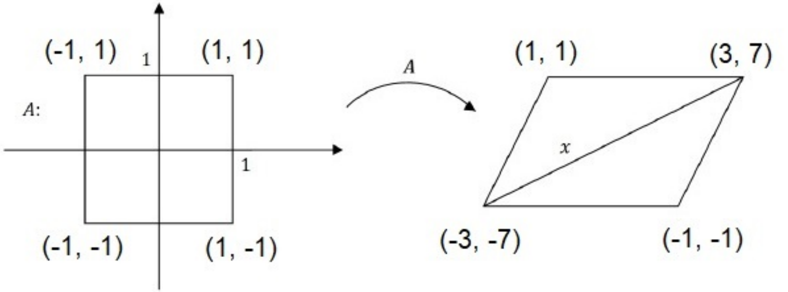


Семинар 9

В первых двух случаях нужно найти диаметр у образа единичный сферы (максимальное расстояние между противоположными точками).

Нужно понять, что “слева” за норма. Ответ — удвоенная норма оператора A.

Семинар 9

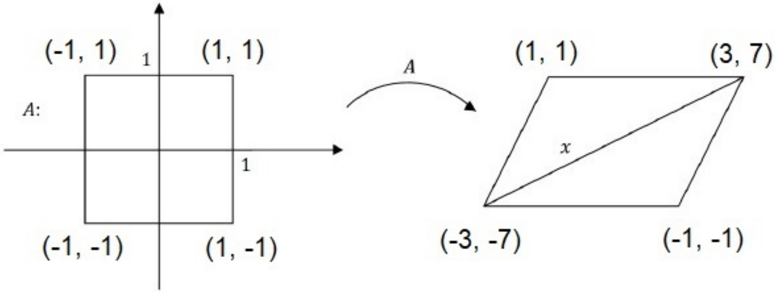


Семинар 9

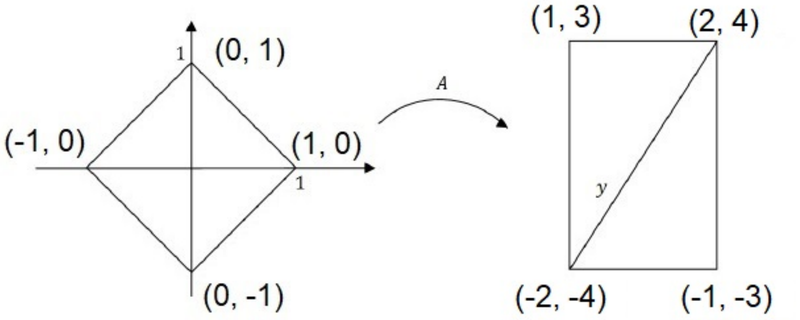
Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ получаем $x = 14$.

Векторная норма: $|x|_\infty = \max |x_i|$, поэтому матричная норма (сумма по строкам)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 7.$$



Семинар 9

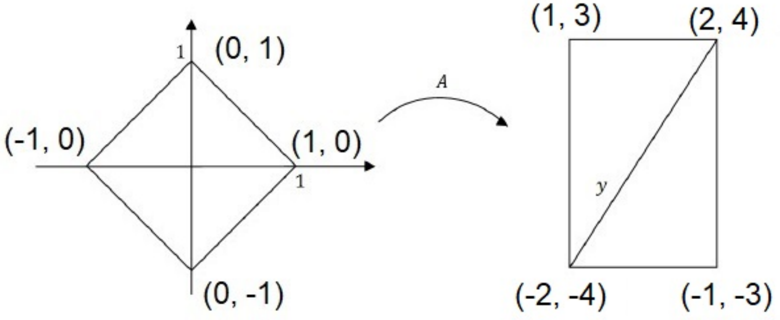


Семинар 9

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ получаем $y = 12$.

Векторная норма: $|x|_1 = \sum |x_i|$, поэтому матричная норма (сумма по столбцам)

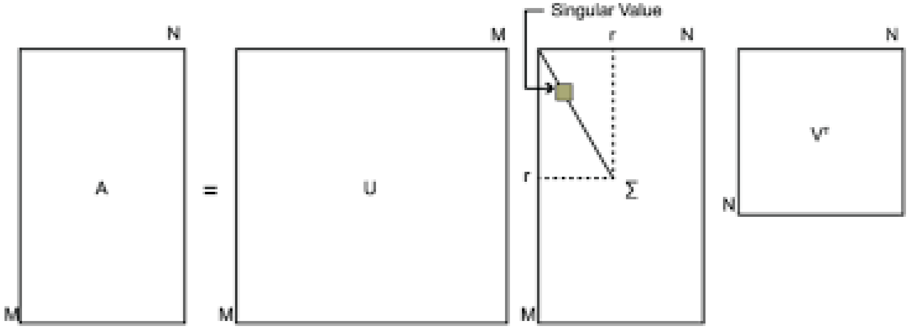
$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 6.$$



Семинар 9

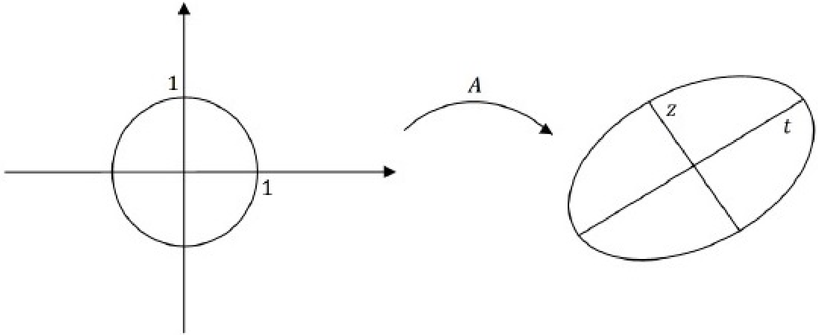
Далее, вспомним SVD разложение матрицы

$$A = U\Sigma V^*$$



Семинар 9

Рассмотрим SVD разложение $A = U\Sigma V^*$. Тогда z, t выражаются через сингулярные значения σ_1, σ_2.



Семинар 9

- V — ортогональная матрица, поэтому она сохраняет длины векторов (в частности, переводит окружность $|v| = R$ в себя).

- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ переводит окружность
$$x^2 + y^2 = 1$$
в эллипс
$$\frac{(x')^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y')^2}{\sigma_2^2} = 1.$$

- V — ортогональная матрица, поэтому она сохраняет длины векторов. И потому переводит эллипс с полуосями a и b в эллипс с такими же полуосями.

Полуоси эллипса — это половины его наибольшего и наименьшего диаметров.

Таким образом:

$$z = 2\sigma_1, \qquad t = 2\sigma_2.$$

В данном случае

$$\sigma_1 = \sqrt{15 + \sqrt{221}}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{15 - \sqrt{221}}.$$

Матричные приближения меньшего ранга

Семинар 9

Задача. Найти наилучшее приближение ранга r для матрицы M в норме $\|\cdot\|_2$ или норме Фробениуса.

Решение. Взять сингулярное разложение

$$M = U\Sigma V^*$$

и заменить

$$\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots)$$

на

$$\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots).$$

Проще говоря — взять первые r сингулярных значений.

LifeHack. Та же задача, но матрица A симметрична:

$$A^T = A.$$

Тогда все матрицы квадратные, и

$$A = U\Sigma U^*,$$

т.е. $V = U$.

Алгоритм нахождения как для SVD, только вместо $A^* A$ берём саму матрицу A.

Это *приведение квадратичной формы к главным осям*.

Семинар 9

Расстояние до приближения ранга r:

- в норме $\|\cdot\|_2$:
$$\|M - M_r\|_2 = \sigma_{r+1}.$$
- в норме Фробениуса:
$$\|M - M_r\|_F = \sqrt{\sigma_{r+1}^2 + \cdots + \sigma_k^2}.$$

Семинар 9

Задача. Найти наилучшее приближение A_1 ранга 1 для матрицы A в норме $\|\cdot\|_2$ и найти $\|A - A_1\|_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим SVD разложение. В данном случае $A = A^T$.

1. Находим собственные значения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Получаем

$$\lambda_1 = 18, \qquad \lambda_2 = 9, \qquad \lambda_3 = 0.$$

2. Находим собственные векторы

$$\det(A - \lambda_i E) v_i = 0.$$

- Первое собственное значение $\lambda_1 = 18$:

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & -9 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Семинар 9

- Второе собственное значение $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 9

- Третье собственное значение $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} v_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, SVD разложение:

$$A = U\Sigma U^T,$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Семинар 9

Наилучшее приближение ранга 1:

$$X_1 = U\Sigma_1 U^T =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Приближение ранга 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Расстояние:

$$\|A - A_1\|_2 = \sigma_2 = 9.$$

Семинар 9

Задача. Найти наилучшее приближение ранга 2 по фробениусовой норме для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Указание А какой ранг у матрицы?

1. Матричные нормы.

2. Матричные приближения меньшего ранга.

3. Оценки погрешности решений СЛУ.
   - Примеры оценок.
     - Решение системы.
     - Обратная матрица.
   - Доказательство неравенств.

Литература

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,
Глава 8.24. Оценка погрешности решения системы линейных уравнений,

Тыртышников Е.Е.,
Методы численного анализа,
Глава 3. Теория возмущений,

Семинар 9

На практике все данные даны с погрешностью. Поэтому вместо точно решения уравнения

$$Ax = b$$

мы получаем решение приближённого уравнения

$$(A + \Delta A)\,\hat{x} = b + \Delta b.$$

Семинар 9

Введём понятие:

- Относительная погрешность:
$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$
  Аналогично для δb и δx.

- Число обусловленности матрицы A
$$\chi(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Примеры оценок

1. Матричные нормы.

2. Матричные приближения меньшего ранга.

3. Оценки погрешности решений СЛУ.
   - Примеры оценок.
     - Решение системы.
     - Обратная матрица.
   - Доказательство неравенств.

Семинар 9

Оценки:

1. Для системы уравнений:

$$(A + \Delta A)\,(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Неравенство:

$$\delta x \leq \chi(A)\,(\delta b + \delta A)\,,$$

для малых $\delta B, \delta A, \delta x$.

2. Для обратной матрицы:

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}.$$

Решение системы

Семинар 9

Задача. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Элементы главной диагонали могут меняться на ε_1, а элементы правой части на ε_2. Оценить возможное изменение решения для нормы

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^* A\right)}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством

$$\delta x \leq \chi(A)\,(\delta b + \delta A)$$

В этой задаче

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Находим евклидову норму векторов

$$\|b\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \qquad \|x\| = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Находим $\|A\|$. Поскольку матрица симметрична

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

её спектральная норма суть максимальное по модулю собственное значение

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} = \max|\lambda|\,.$$

В данном случае

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2, \qquad \Rightarrow \lambda_i = \pm\sqrt{2}.$$

Таким образом

$$\|A\| = \sqrt{2}.$$

Семинар 9

Найдём $\|A^{-1}\|$ и число обусловленности $\chi(A)$. Собственные значения A^{-1} и A взаимнообратны, поэтому

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min|\lambda_A|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \chi(A) = 1.$$

Семинар 9

Найдём $\|\Delta b\|$ и $\|\Delta A\|$. В данной задаче

$$\Delta A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\|\Delta A\| = |\varepsilon_1|, \qquad \|\Delta b\| = \sqrt{2}\,|\varepsilon_2|.$$

Оценим наконец ошибку.

$$\|\Delta x\| \le \chi(A)\,\|x\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Подставляем

$$\|b\| = 5, \qquad \|x\| = \frac{5}{\sqrt{2}}, \qquad \|A\| = \sqrt{2},$$

$$\chi(A) = 1, \qquad \|\Delta A\| = |\varepsilon_1|\,, \qquad \|\Delta b\| = \sqrt{2}\,|\varepsilon_2|\,.$$

Получаем ответ

$$\|\Delta x\| \le \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}\,|\varepsilon_2|}{5} + \frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{2}} \right).$$

Обратная матрица

1. Матричные нормы.

2. Матричные приближения меньшего ранга.

3. Оценки погрешности решений СЛУ.
   - Примеры оценок.
     - Решение системы.
     - Обратная матрица.
   - Доказательство неравенств.

Семинар 9

Задача. Найдите приближенно обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и оцените погрешность приближения относительно равномерной нормы $\|\cdot\|_\infty$, если элементы матрицы A известны с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

Решение.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Погрешность оценивается по формуле

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}.$$

Семинар 9

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и погрешности $\varepsilon = 0.01$ получаем

$$\chi(A) = 35, \qquad \delta A = \frac{0.02}{5} = 0.004$$

Откуда

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A} \leq 0.162791$$

Задача решена.

Доказательство неравенств

Семинар 9

Задача. Доказать, что

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}.$$

Действительно,

$$\delta A^{-1} = \frac{\left\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\left\|-A^{-1}B\right\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|}\,\|B\|\,,$$

где $B = E - (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}$.

Семинар 9

Нужно оценить $\left\|E - (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\right\|$.

Далее для любого Y т.,ч. $|Y\| < 1$ выполено

$$(E - Y)^{-1} = E + Y + Y^2 + Y^3 + \ldots$$

$$\left\|E - (E - Y)^{-1}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Y\|^k = \frac{\|Y\|}{1 - \|Y\|}.$$

Итак,

$$\left\| E - (E + A^{-1}\Delta A)^{-1} \right\| \leq \frac{\left\| A^{-1}\Delta A \right\|}{1 - \left\| A^{-1}\Delta A \right\|}$$

Остаётся воспользоваться

$$\left\| A^{-1}\Delta A \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \left\| \Delta A \right\| = \left\| A^{-1} \right\| \left\| A \right\| \frac{\left\| \Delta A \right\|}{\left\| A \right\|} = \chi(A)\delta A$$

Так и получаем требуемую оценку

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}.$$

Ч.Т.Д.

Семинар 9

Задача. Если

$$(A + \Delta A)\,\hat{x} = b + \Delta b,$$
$$\Delta x = \hat{x} - x,$$

то

$$\delta x \leq \frac{\chi(A)}{1 - \delta A \cdot \chi(A)}\,(\delta b + \delta A)\,,$$

для малых $\delta B, \delta A, \delta x$.

Следствие. Отсюда получается приближённая оценка

$$\delta x \leq \chi(A)\,(\delta b + \delta A)\,.$$

Семинар 9

Докажем, что

$$\delta x \leq \chi(A)\left(\delta b + \delta A\right).$$

1. **Шаг 1.** Оценим δx. Из условия

$$\begin{cases} (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b, \\ Ax = b, \end{cases}$$

выражаем Δx. Получаем

$$\Delta x = \left(A + \Delta A\right)^{-1}\left(\Delta b - \Delta A x\right).$$

Семинар 9

Дальше пользуемся тем, что

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, .$$

Применяем это к

$$\Delta x = (A + \Delta A)^{-1} \, (\Delta b - \Delta A x) \, .$$

Получаем

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right).$$

Семинар 9

Далее воспользуемся тем, что

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \, \|x\| \, .$$

Перепишем это в виде

$$\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|} .$$

Подставляем это в

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right) .$$

Получаем

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \, \|A\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) .$$

Итак, мы доказали, что

$$\delta x \le \left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\| \|A\| \left(\delta b + \delta A\right).$$

3. **Шаг 2.** Оценим $\left\| (A + \Delta A)^{-1} \right\|$.

Начнём с тождества

$$(A + \Delta A)^{-1} (A + \Delta A) = E.$$

Домножим его справа на A^{-1}, получим

$$(A + \Delta A)^{-1} \left(E + \Delta A \cdot A^{-1} \right) = A^{-1}.$$

Перепишем это в виде

$$(A + \Delta A)^{-1} = A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} \Delta A \cdot A^{-1}.$$

Семинар 9

Итак,

$$(A+\Delta A)^{-1} = A^{-1} - (A+\Delta A)^{-1}\Delta A \cdot A^{-1}.$$

Беря нормы, получаем:

$$\left\|(A+\Delta A)^{-1}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| + \left\|(A+\Delta A)^{-1}\right\| \left\|\Delta A \cdot A^{-1}\right\|.$$

Выражаем искомую норму $\left\|(A+\Delta A)^{-1}\right\|$. При $\left\|\Delta A \cdot A^{-1}\right\| < 1$ получаем

$$\left\|(A+\Delta A)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \left\|\Delta A \cdot A^{-1}\right\|}$$

Заметим, что

$$\left\|\Delta A \cdot A^{-1}\right\| \le \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = \delta A \cdot \chi(A).$$

Поэтому

$$\left\|(A+\Delta A)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \delta A \cdot \chi(A)}.$$

4. **Шаг 3.** Докажем требуемое неравенство

$$\delta x \leq \chi(A) \left(\delta b + \delta A\right).$$

Подставляем оценку

$$\left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \delta A \cdot \chi(A)}$$

в неравенство

$$\delta x \leq \left\|(A + \Delta A)^{-1}\right\| \|A\| \left(\delta b + \delta A\right).$$

Получаем

$$\delta x \leq \frac{\chi(A)}{1 - \delta A \cdot \chi(A)} \left(\delta b + \delta A\right).$$

Мы получили требуемое неравенство. Ч.Т.Д.