МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 13

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

23 апреля 2021

1. Вычисление характеристического многочлена
   - Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)
   - Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)
   - Метод Фадеева-Леверрье

2. Нахождение собственных значений
   - Метод вращения (метод Якоби)

Семинар 13

- **Характеристический многочлен** оператора A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

- **Минимальный многочлен** $m_A =$ многочлен наименьшей степени т.,ч.

$$m_A(A) = 0.$$

Теорема Гамильтона-Кэли

$\chi_A(A) = 0.$

Как (эффективно) вычислять минимальный и характеристический многочлены?

Семинар 13

Для одного жорданова $n \times n$ блока

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

минимальный многочлен совпадает с характеристическим:

$$m_J(\lambda) = \chi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n .$$

Семинар 13

В общем нужно рассмотреть ЖНФ (жорданову нормальну форму) A:

- Характеристический многочлен A — **произведение** характеристических многочленов своих жордановых блоков.
- Минимальный многочлен A — **НОК** минимальных многочленов своих жордановых блоков.

Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)

Семинар 13

Метод Крылова нахождения минимального многочлена.

1. Берём вектор $v_1 \neq 0$ и далее векторы
$$v_1, \quad Av_1, \quad \dots, \quad A^{k_1} v_1$$
пока они не станут линейно зависимыми.

2. Пусть линейная зависимость
$$c_{k_1} A^{k_1} v_1 + \dots c_0 v_1 = 0.$$
Берём многочлен с этими коэффициентами:
$$f_1(x) = c_{k_1} x^{k_1} + \dots c_0.$$

Семинар 13

Метод Крылова (продолжение).

1. Если векторы $A^k v_1$ не порождают всё пространство, то берём линейно независимый с ними вектор v_2. Аналогично строим многочлен $f_2(x)$ для $v_2, \dots A^{k_2} v_2$.

2. И т.д. — берём векторы v_i, линейно независимые с построенными векторами $A^k v_j$ и аналогично строить многочлены $f_i(x)$.

   Продолжаем процесс, пока $A^k v_j$ не породят всё пространство (т.е. пока не взяли $n = \dim V$ линейно независимых векторов).

3. Искомый минимальный многочлен будет

$$m(x) = \text{НОК}\,(f_1, f_2 \dots,)$$

Семинар 13

Задача. Методом Крылова найти минимальный многочлен

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Берём вектор
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Берём векторы
$$v_1, Av_1, A^2 v_1, \dots$$
пока они не станут линейно зависимыми. В данном случае
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Av_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Наконец
$$A^4 v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -87 \\ -11 \end{pmatrix} = 6v_1 - Av_1 + 11A^2 v_1 + 8A^3 v_1.$$

Мы получили соотношение

$$A^4 v_1 - 8A^3 v_1 - 11A^2 v_1 + Av_1 - 6v_1 = 0.$$

Значит, минимальный многочлен $m(x)$ делится на

$$f_1(x) = x^4 - 8x^3 - 11x^2 + x - 6.$$

Векторы $A^k v_1$ порождают всё пространство, значит **Ответ:**

$$m(x)x^4 - 8x^3 - 11x^2 + x - 6.$$

Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)

Идея метода Данилевского. Приведём сопряжением $A \to B^{-1}AB$ матрицу A к фробениусовой форме

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы:

$$\chi(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \dots - p_n\right).$$

Семинар 13

Метод Данилевского. Мы будем последовательно сопрягать матрицу $A = A_0$:

$$A_1 = B_1^{-1} A_0 B_1, \qquad \cdots \qquad A_j = B_j^{-1} A_{j-1} B_j$$

После k шагов k нижних строк у A_k будут как в форме Фробениуса. Например,

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & * & * \\ * & \dots & * & * & * & * \\ * & \dots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как находится B_k?

Пример. для матриц 4×4:

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{41}}{a_{43}} & -\dfrac{a_{42}}{a_{43}} & \dfrac{1}{a_{43}} & -\dfrac{a_{44}}{a_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Семинар 13

На k-том шаге. **Левая матрицу** B_k^{-1}:

- $k+1$ строка снизу суть k-тая строка A_k снизу (подняли строчку на 1 вверх).
- остальные строчки — как у единичной матрицы.

Правая матрицу B_k по B_k^{-1}:

- $k+1$ строка снизу. Диагональный элемент b в B_k^{-1} обращается, остальные — умножаются на $-\frac{1}{b}$.
- Остальные строчки — как у единичной матрицы.

Семинар 13

Задача. Методом Данилевского найти характеристический многочлен

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Семинар 13

Решение.

1. Заменим матрицу A на $B_1^{-1}AB_1$, где

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{41}}{a_{43}} & -\dfrac{a_{42}}{a_{43}} & \dfrac{1}{a_{43}} & -\dfrac{a_{44}}{a_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Семинар 13

Получаем новую матрицу:

$$A_2 = B_1^{-1} A B_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы привели последнюю строчку к нужному виду.

Семинар 13

3. Заменим матрицу A_2 на $B_2^{-1}A_2B_2$, где

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{32}} & \dfrac{1}{a_{32}} & -\dfrac{a_{33}}{a_{32}} & -\dfrac{a_{34}}{a_{32}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ij} — элементы матрицы A_2.

Получаем новую матрицу:

$$A_3 = B_2^{-1} A_2 B_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы привели две последние строчки к нужному виду.

Семинар 13

3. Заменим матрицу A_3 на $B_3^{-1}A_3B_3$, где
$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
При этом
$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{21}} & -\frac{a_{22}}{a_{21}} & -\frac{a_{23}}{a_{21}} & -\frac{a_{24}}{a_{21}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ij} — элементы матрицы A_3.

Семинар 13

Получаем новую матрицу:

$$A_4 = B_3^{-1} A_3 B_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -1 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 11 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица A подобна

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Характеристический многочлен A:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 8\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda - 6.$$

Метод Фадеева-Леверрье

1. Вычисление характеристического многочлена
   - Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)
   - Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)
   - Метод Фадеева-Леверрье
2. Нахождение собственных значений
   - Метод вращения (метод Якоби)

Семинар 13

Метод Фадеева-Леверрье:

Строим семейство матриц B_i и полиномы p_i по формулам:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A & p_1 &= \operatorname{tr} B_1 \\
B_2 &= A(B_1 - p_1 I) & p_2 &= \frac{1}{2}\operatorname{tr} B_2 \\
&\dots & &\dots \\
B_k &= A(B_{k-1} - p_{k-1} I) & p_k &= \frac{1}{k}\operatorname{tr} B_k \\
&\dots & &\dots \\
B_n &= A(B_{n-1} - p_{n-1} I) & p_n &= \frac{1}{n}\operatorname{tr} B_n
\end{aligned}
$$

Семинар 13

- Характеристический многочлен находится по формуле:

$$p(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n.$$

- Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n}(B_{n-1} - p_{n-1}I).$$

Семинар 13

Упражнение. Методом Фадеева-Леверрье найти характеристический многочлен и обратную матрицу для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. См. Jupyter Notebook.

Семинар 13

1. Вычисление характеристического многочлена
   - Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)
   - Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)
   - Метод Фадеева-Леверрье
2. Нахождение собственных значений
   - Метод вращения (метод Якоби)

Литература

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,
Глава 11. О приближённых методах вычисления собственных значений и собственных векторов,

Семинар 13

Три основных способа вычисления собственных значений:

1. *Через QR разложение.* Для любых матриц (но не всегда сходится). Итеративно полагаем
$$A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k.$$
2. *Степенной метод.* При $A = A^T$. Векторы
$$v_k = A^k v$$
стремятся к собственному вектору с наибольшим собственным значением λ. Далее “убиваем это собственное значение”
$$A \to A - \lambda \frac{v \cdot v^T}{(v, v)}$$
и повторяем процесс.
3. *Метод Якоби.* При $A = A^T$. Вращениями в двумерных плоскостях зануляем коэффициенты, поэтому матрица не станет близкой к диагональной.

Метод вращения (метод Якоби)

1. Вычисление характеристического многочлена
   - Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)
   - Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)
   - Метод Фадеева-Леверрье
2. Нахождение собственных значений
   - Метод вращения (метод Якоби)

Семинар 13

Метод вращений:

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,
Глава 11.1 Метод вращений (метод Якоби)

Семинар 13

Как привести симметричную матрицу $A = A^T$ к диагональному виду.

Приведение к главным осям: существует ортогональная Q т.,ч.

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Начнём с двумерного случая $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

В качестве Q в $Q^T AQ$ можно взять поворот:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Достаточно сделать первый собственный вектор базисным:

$$A'e_1' = \lambda_1 e_1'.$$

Тогда первый столбец справа будет $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Семинар 13

Метод вращения.

Находим в матрице A наибольший по модулю недиагональный элемент a_{ij}. Берём матрицу

$$R(i,j,\theta) = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\varphi &&&& -\sin\varphi &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \sin\varphi &&&& \cos\varphi &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}.$$

Это поворот на угол φ в плоскости векторов e_i, e_j. Здесь

$$r_{ij} = r_{jj} = \cos\varphi, \qquad r_{ij} = -\sin\varphi, \qquad r_{ji} = \sin\varphi.$$

Семинар 13

Чему равен φ? Если $a_{ii} = a_{jj}$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$:

$$R(i,j,\theta) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

В остальных случаях φ находится из

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, \qquad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Косинус и синус находятся из:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}, \qquad \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$$

Знак синуса равен знаку

$$a_{ij}(a_{ii} - a_{jj}).$$

Семинар 13

Итеративный процесс: на каждом шаге находим $R = R(i, j, \theta)$ и меняем

$$A_{k+1} = R^T A_k R$$

Применяем процесс, пока A_k не станет почти диагональной. Тогда элементы на диагонали аппроксимируют собственные значения матрицы A.

Обычно процесс быстро сходится.

Семинар 13

Задача. Найти собственные векторы и собственные значения методом вращения.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Наибольший по модулю недиагональный элемент

$$a_{23} = -4.$$

Тогда

$$a_{22} = a_{33} = 5.$$

Здесь $a_{ii} = a_{jj}$, поэтому $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

$$R = R(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Семинар 13

Первая итерация:

$$A_1 = R^T A R =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Наибольший по модулю недиагональный элемент

$$a_{13} = -2\sqrt{2}.$$

Тогда

$$a_{11} = 2, \qquad a_{33} = 9.$$

Семинар 13

Находим угол поворота:

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2-9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Поэтому:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} = \frac{7}{9}.$$

Косинус и синус:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = \frac{1}{3}$$

Знак у синуса как у

$$a_{ij}(a_{ii} - a_{jj}) = -2\sqrt{2}(2-9) > 0.$$

Семинар 13

Итак,

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{3}$$

Матрица поворота:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Семинар 13

вторая итерация:

$$A_2 = R^T A_1 R =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Нашли собственные значения

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 10.$$

Семинар 13

Как искать собственные векторы?

Методом вращения — умножением на матрицы $R_1, \ldots R_k$ привели матрицу A к диагональному виду:

$$\Lambda = R_k^T \ldots R_1^T A R_1 \ldots R_k.$$

Тогда **собственные векторы — это столбцы**

$$R_1 \ldots R_k.$$

Семинар 13

В данном случае

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Семинар 13

Ответ: У матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

собственные значения:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 10,$$

и собственные векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Семинар 13

Метод Якоби. Для самосопряжённых матриц
$$\bar{A}^T = A.$$

Меняем матрицу на
$$A \to \bar{R}^T A R.$$

Находим в матрице A наибольший по модулю недиагональный элемент a_{ij}. На этот раз матрица
$$R(i,j,\theta) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & \cos\varphi & & & & -e^{i\theta}\sin\varphi & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & e^{-i\theta}\sin\varphi & & & & \cos\varphi & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Семинар 13

- Для φ формулы те же, но a_{ij} меняется на $|a_{ij}|$:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\,|a_{ij}|}{a_{ii} - a_{jj}}.$$

- Угол θ берётся как у a_{ij}:

$$\theta = \arg a_{ij}.$$

Напомним, что

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Заметим, что

$$e^{i\theta} = \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|}.$$