МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 3

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

5 февраля 2021

Решение Задач к Семинару 2

Семинар 2

Для любого ЛСУ

$$Ax = b$$

существует псевдорешение

$$A^+ b.$$

Это

1. решение методом наименьших квадратов

$$\|Ax - b\| \to \min,$$

2. наименьшей длины

$$\|x\| \to \min.$$

Решение Задач к Семинару 2

Задача Найти решение наименьшей длины системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + t = -1, \\ 2y - 3z = -1, \\ x - 2y + z + t = 0, \\ x - 2z + t = 8. \end{cases}$$

1. Находим псевдообратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} -2/5 & -1/10 & 1/2 & 2/5 \\ -3/5 & -1/15 & 1/3 & 4/15 \\ -2/5 & -4/15 & 1/3 & 1/15 \\ -2/5 & -1/10 & 1/2 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем ответ:

$$\begin{pmatrix} -2/5 & -1/10 & 1/2 & 2/5 \\ -3/5 & -1/15 & 1/3 & 4/15 \\ -2/5 & -4/15 & 1/3 & 1/15 \\ -2/5 & -1/10 & 1/2 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/10 \\ 14/5 \\ 6/5 \\ 37/10 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 2

Алгоритм нахождения SVD-разложения

$$A = U\Sigma V^*.$$

1. Находим собственные значения λ_i матрицы A^*A. Сингулярные значения

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

   Так мы нашли $\Sigma = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\right).$

2. Находим канонический базис v_i матрицы A^*A:

$$(A^*A - \lambda_i E)v_i = 0.$$

   Канонический базис нужно взять ортонормированным. Это столбцы V.

3. Находим столбцы U через соотношение

$$Av_i = \sigma_i u_i.$$

   Если $\sigma_i = 0$, то берём векторы единичной длины, ортогональные остальным u_i.

Задача. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3i}{5} \\ -\frac{3i}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3i}{5} \\ -\frac{3i}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 2

Замечание

SVD не всегда однозначно. В разложении

$$M = U\Sigma V^*$$

1. сингулярные значения (в матрице Σ) определены однозначно,
2. а матрицы U и V не всегда однозначны.

Решение Задач к Семинару 2

Задача. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Находим $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 56 & 16 \\ 56 & 68 & 40 \\ 16 & 40 & 32 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\operatorname{rk} A = 2$, поэтому $\det A^T A = 0$.

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим собственные значения $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda_i E) = 0.$$

В данном случае

$$\det\left(\begin{pmatrix} 80 & 56 & 16 \\ 56 & 68 & 40 \\ 16 & 40 & 32 \end{pmatrix} - \lambda E\right) = -\lambda^3 + 180\lambda^2 - 5184\lambda = -\lambda\left(\lambda - 144\right)\left(\lambda - 36\right).$$

Итак, сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{144} = 12, \qquad \sigma_2 = \sqrt{36} = 6, \qquad \sigma_3 = 0.$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим собственные векторы

$$(A^T A - \lambda_i E) v_i = 0.$$

Собственное значение $\lambda_1 = 144$:

$$A^T A - 144E = \begin{pmatrix} -64 & 56 & 16 \\ 56 & -76 & 40 \\ 16 & 40 & -112 \end{pmatrix}.$$

Решение единичной длины:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим собственные векторы

$$(A^T A - \lambda_i E) v_i = 0.$$

Собственное значение $\lambda_2 = 36$:

$$A^T A - 36E = \begin{pmatrix} 44 & 56 & 16 \\ 56 & 32 & 40 \\ 16 & 40 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение единичной длины:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим собственные векторы
$$(A^T A - \lambda_i E)v_i = 0.$$
Собственное значение $\lambda_3 = 0$:
$$A^T A = \begin{pmatrix} 80 & 56 & 16 \\ 56 & 68 & 40 \\ 16 & 40 & 32 \end{pmatrix}.$$
Решение единичной длины:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. Итак, на данный момент

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T .$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим столбцы U через соотношение

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Для $\sigma_1 = 12$:

$$u_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Находим столбцы U через соотношение

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Для $\sigma_2 = 6$:

$$u_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Итак, матрица U имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * & * \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix}$$

Оставшиеся столбцы берём так, чтобы U была ортогональной.

Решение Задач к Семинару 2

Какой вектор ортогонален векторам $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

Домножим векторы на константы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 2

Уравнение на ортогональные векторы:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Пара решений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее делаем ортогонализацию Грама-Шмидта для этих решений и нормируем их.

Решение Задач к Семинару 2

Получаем ответ:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T .$$

Решение Задач к Семинару 2

Псевдообратная через SVD

$$M = U\Sigma V^*.$$

Тогда псевдообратная матрица:

$$M^+ = V\Sigma^+ U^*,$$

где

$$\Sigma^+ = \left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_k}, 0, \ldots, 0\right).$$

Решение Задач к Семинару 2

Обоснование формулы псевдообратной матрицы через SVD.

Задача

Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ — унитарная матрица, а A — произвольная матрица порядка n, то

$$B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+.$$

Нужно использовать определение псевдообратной матрицы A^+:

$$AA^+A = A,$$
$$A^+AA^+ = A,$$
$$(AA^+)^* = AA^+$$
$$(A^+A)^* = A^+A$$

Решение Задач к Семинару 2

1. Докажем, что
$$BB^+B = B.$$
Подставляем $B = AU$ и $B^+ = U^*A^+$:
$$BB^+B = AUU^*A^+AU = AA^+AU = AU = B.$$
2. Докажем, что
$$B^+BB^+ = B^+.$$
Подставляем B и B^+:
$$B^+BB^+ = U^*AAUU^*A^+ = U^*A^+AA^+ = U^*A^+ = B^+.$$

Решение Задач к Семинару 2

3. Докажем, что
$$(BB^+)^* = BB^+.$$
Подставляем B и B^+:
$$(BB^+)^* = (AUU^*A^+)^* = (AA^+)^* = AA^+ = AUU^*A^+ = BB^+.$$

3. Докажем, что
$$(B^+B)^* = B^+B.$$
Подставляем B и B^+:
$$(B^+B)^* = (U^*A^+AU)^* = U^*(A^+A)^*U = U^*A^+AU = B^+B.$$

Решение Задач к Семинару 2

Задача. Найти псевдообратную матрицу A^+, используя SVD:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 9 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Находим SVD разложение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$$

Решение Задач к Семинару 2

Псевдообратная:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{162} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Теория. Лекция.

2. Решение Задач к Семинару 2.

3. Семинар 3.
   - Линейная регрессия.
   - Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита
   - Сплайны
   - Кривые Безье

1. Теория. Лекция.

2. Решение Задач к Семинару 2.

3. Семинар 3.
   - Линейная регрессия.
   - Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита
   - Сплайны
   - Кривые Безье

Семинар 3

Простейшая линейная регрессия.

Пусть даны точки (x_i, y_i), где $i = 1, \ldots, N$. Аппроксимируем решение линейной функцией

$$y_i = kx_i + b$$

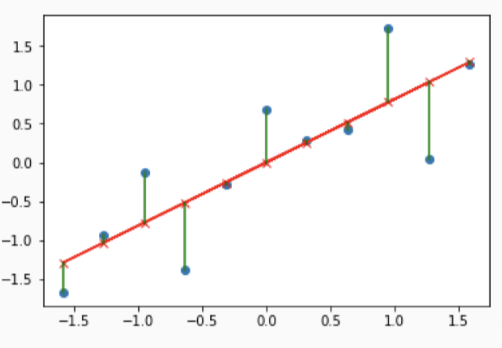


Рис.: Рис. 1

Семинар 3

На самом деле — это всего лишь псевдорешение

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Семинар 3

Обычно про линейную регрессию пишут, что:

1. Решение проходит через
$$(\bar{x}, \bar{y}),$$
где
$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}.$$
2. Мы минимизируем
$$\sum_i (y_i - (kx_i + b))^2 .$$
Поэтому решение
$$k = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$
$$b = \bar{y} - k\bar{x}.$$

Семинар 3

Покажем, что линейная регрессия — умножение на псевдообратную матрицу (см. выше).

Отметим, что

$$k = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_i (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{(\sum_i x_i) - n\bar{x}^2}$$

Семинар 3

Псевдорешение:

$$\begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n(\sum x_i^2) - n^2\bar{x}^2} \begin{pmatrix} n & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ n\bar{y} \end{pmatrix}$$

Получаем требуемое:

$$k = \frac{\sum_i (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{(\sum_i x_i) - n\bar{x}^2}$$

Также несложно проверить, что

$$b = \bar{y} - k\bar{x}.$$

Действительно,

$$\bar{y} - k\bar{x} = \bar{y}\frac{(\sum_i x_i^2) - n\bar{x}^2}{(\sum_i x_i^2) - n\bar{x}^2} - \frac{\sum_i (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{(\sum_i x_i^2) - n\bar{x}^2}\bar{x} =$$

$$= \frac{-\bar{x}\sum_i (x_i y_i) + \bar{y}(\sum_i x_i^2)}{(\sum_i x_i^2) - n\bar{x}^2}$$

Семинар 3

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Для любого набора чисел

$$(x_0, y_0), \qquad (x_1, y_1), \qquad \ldots \qquad (x_n, y_n),$$

где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ т.,ч.

1. $\deg L(x) \leq n$,
2. $L(x_j) = y_j$.

Многочлен степени $\leq n$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Уравнения на интерполяционный многочлен:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Это система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Семинар 3

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычисление:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы $l_i(x)$ определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Иными словами,

$$l_i(x) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Семинар 3

Отметим, что это отношение определителей Вандермонта:

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Базисные многочлены для интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$l_i(x) = \frac{v(x_0, \ldots, \underset{i}{x} \ldots, x_n)}{v(x_0, \ldots, x_n)}.$$

Задача Известно, что $f(x)$ — многочлен третий степени такой, что

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19. \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

Решение Использовать формулу для интерполяционного многочлена Лагранжа.

Семинар 3

Задача. Приблизить следующую функцию $y(x)$ многочленом второй степени по методу наименьших квадратов

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	-0.8	1.6	2.3	1.5

.

Решение Многочлен второй степени:

$$ax^2 + bx + c.$$

Ищем решение методом наименьших квадратов

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = -4 \\ a - b + c = -0.8 \\ c = 1.6 \\ a + b + c = 2.3 \\ 9a + 3b + c = 1.5 \end{cases}$$

Семинар 3

СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -0.8 \\ 1.6 \\ 2.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Находим псевдообратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{5}{84} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{28} & \frac{5}{84} \\ -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ -\frac{4}{105} & \frac{12}{35} & \frac{41}{105} & \frac{12}{35} & -\frac{4}{105} \end{pmatrix}$$

Семинар 3

Получаем ответ:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{84} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{28} & \frac{5}{84} \\ -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ -\frac{4}{105} & \frac{12}{35} & \frac{41}{105} & \frac{12}{35} & -\frac{4}{105} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -0.8 \\ 1.6 \\ 2.3 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{39}{140} \\ \frac{49}{50} \\ \frac{216}{175} \end{pmatrix}.$$

Семинар 3

Эрмитова интерполяция. Многочлен, который в заданных точках совпадает с значениями исходной функции и её первых m производных.

$$
\begin{array}{cccc}
(x_0, y_0), & (x_1, y_1), & \ldots, & (x_{n-1}, y_{n-1}), \\
(x_0, y_0'), & (x_1, y_1'), & \ldots, & (x_{n-1}, y_{n-1}'), \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(x_0, y_0^{(m)}), & (x_1, y_1^{(m)}), & \ldots, & (x_{n-1}, y_{n-1}^{(m)})
\end{array}
$$

Такой многочлен степени не более $n(m+1)-1$ существует и единственен.

Семинар 3

Задача Найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \\ f(x_1) = 0 \\ f'(x_1) = x_1'. \end{cases}$$

Решение Ищем многочлен

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Это система линейных уравнений на a_i:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0 \\ a_1 + 2a_2 x_0^2 + 3a_3 x^2 = y_0' \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ a_1 + 2a_2 x_0^2 + 3a_3 x^2 = y_1' \end{cases}$$

Сплайны

Семинар 3

Сплайн $S(x)$ — локально аппроксимируем $f(x)$ полиномом и гладко их сшиваем.

Пример: Сплайн степени 2 — производная $S'(x)$ непрерывна.

Семинар 3

Квадратичный сплайн. Опорные точки:

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)],$$

где

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

- На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ ищем полином

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Семинар 3

- Условие в узлах:
$$S_i(x_i) = y_i.$$

- Непрерывность производной $S'(x)$:
$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$$
Граничные условия:
$$S_i'(x_0) = d_0.$$
Берём $d_0 = f'(x_0)$ или $d_0 = 0$ (если не знаем производную).

Семинар 3

Задача Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Аппроксимировать квадратичным сплайном с узлами

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = 4.$$

В данном случае

$$f(0) = -6, \qquad f(2) = 0, \qquad f'(0) = 11.$$

Мы ищем функцию

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad 0 \le x \le 2, \\ f_2(x) &= b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \qquad 2 \le x \le 4. \end{aligned}$$

Семинар 3

Уравнения на первую функцию:

$$\begin{cases} f_1(0) = f(0), \\ f_1'(0) = f'(0), \\ f_1(2) = f(2). \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} a_0 = -6, \\ a_1 = 11, \\ 4a_2 + 11 * 2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Итак,

$$f_1(x) = -4x^2 + 11x - 6.$$

Отметим, что

$$f_1'(2) = -8 * 2 + 11 = -5.$$

Семинар 3

Уравнения на вторую функцию:

$$\begin{cases} f_2(2) = f(2), \\ f_2'(2) = f_1'(2), \\ f_2(4) = f(4). \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} 4b_2 + 2b_1 + b_0 = 0, \\ 4b_2 + b_1 = -5, \\ 16b_2 + 4b_1 + b_0 = 6. \end{cases}$$

Итак,

$$f_2(x) = 4x^2 - 21x + 26.$$

Семинар 3

Итоговый квадратичный сплайн:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= -4x^2 + 11x - 6, \qquad && 0 \le x \le 2, \\
f_2(x) &= 4x^2 - 21x + 26, \qquad && 2 \le x \le 4.
\end{aligned}
$$

Кривые Безье

Семинар 3

Кривые Безье. $\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n}$ — кривая Безье с опорными точками $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

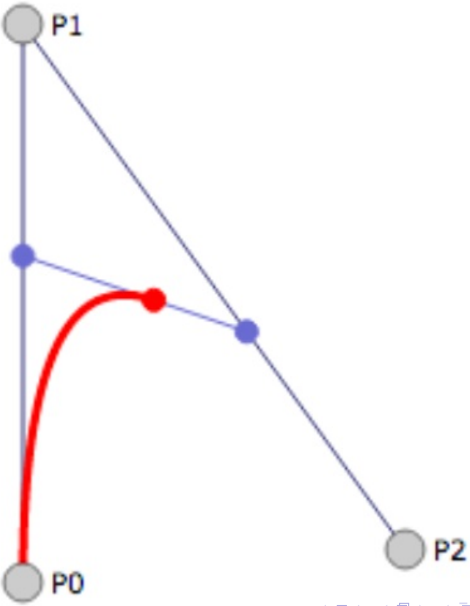
Рекурсивное определение. Кривая степени ноль — это точка:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0}(t) = \mathbf{P}_0$$

Кривая Безье степени n — линейная комбинация кривых Безье степени $n-1$.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_{n-1}}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_n}(t)$$

Семинар 3



Семинар 3

Задача. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.

Нужно доказать:

- Касание первого отрезка ломаной в точке P_0:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} B_{P_0 P_1 \ldots P_n} = \alpha_n (P_1 - P_0)$$

- Касание последнего отрезка ломаной в точке P_n:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} B_{P_0 P_1 \ldots P_n} = \beta_n (P_n - P_{n-1})$$

для некоторых констант α_k, β_k.

Семинар 3

Докажем касание первого отрезка ломаной (касание последнего отрезка доказывается аналогично).

Доказательство по индукции:

- База. $n = 1$.

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

Поэтому

$$B'(0) = P_1 - P_0.$$

- Шаг. Пусть при $k < n$.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{B}_{P_0 P_1 \ldots P_k} = \alpha_k (P_1 - P_0).$$

Используем рекурсивное кривых Безье.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_n}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{n-1}}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_n}(t)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}_{P_0 P_1 \ldots P_n} = -\mathbf{B}_{P_0 P_1 \ldots P_{n-1}}(t) + (1-t)\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{n-1}}(t) +$$
$$+\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_n}(t) + t\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_n}(t)$$

- Кривая Безье проходит через опорные точки, поэтому:

$$\mathbf{B}_{P_0P_1\ldots P_{n-1}}(0) = P_0, \qquad \mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_n}(0) = P_1$$

- По предположению индукции:

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_{n-1}}(t) = \alpha_{n-1}(P_1 - P_0)$$

- Подставляем:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathbf{B}_{P_0P_1\ldots P_n} = -\mathbf{B}_{P_0P_1\ldots P_{n-1}}(0) - \mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_{n-1}}(0) + \mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_n}(0) =$$
$$= -P_0 + P_1 + \alpha_{n-1}(P_1 - P_0) = (\alpha_{n-1} + 1)(P_1 - P_0).$$

Явная формула.

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i =$$
$$= (1-t)^n \mathbf{P}_0 + \binom{n}{1} (1-t)^{n-1} t \mathbf{P}_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} (1-t) t^{n-1} \mathbf{P}_{n-1} + t^n \mathbf{P}_n$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Семинар 3

Напомним формулу биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Семинар 3

Задача Построить кривую Безье:

$$P_0(-1,-1), \qquad P_1(1,3), \qquad P_2(2,4), \qquad P_1(7,-1).$$

Решение. Применить явную формулу.