МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 2

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

29 января 2021

Теория. Лекция 1

Псевдообратная матрица A^+:

$$AA^+A = A,$$

$$A^+AA^+ = A,$$

$$(AA^+)^* = AA^+$$

$$(A^+A)^* = A^+A$$

Решение Задач к Семинару 1

Решение Задач к Семинару 1

Если столбцы A линейно независимы, то

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{|a_1|^2 + \dots |a_n^2|} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Если строки A линейно независимы, то

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{|a_1|^2 + \dots |a_n^2|} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Решение Задач 1-3:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Решение Задач к Семинару 1

Задача 4: Найти $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{+}$.

Действительно,

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}.$$

Матрица

$$G = A^{T}A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

суть матрица Грамма для столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение Задач к Семинару 1

Таким образом

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ в задаче:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{+} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5: Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{+}$.

Действительно,

$$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}.$$

Матрица

$$G = AA^{T} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

суть матрица Грамма для строк

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$(AA^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ в задаче:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{+} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Как находить скелетное разложение (разложение полного ранга)?

$$A = FG,$$

где

1. A — это $m \times n$ матрица, $\operatorname{rk} A = r$.
2. F — это $m \times r$ матрица,
3. G — это $r \times n$ матрица.

Решение Задач к Семинару 1

ШАГ 1. Пусть A — матрица приведённого ступенчатого вида по строкам.

F и G легко видны:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix}$$

"Приведённый" означает:

- все ведущие элементы равны 1,
- под ними и над ними стоят 0.

Решение Задач к Семинару 1

Скелетное разложение для матриц приведённого ступенчатого вида по строкам

- F составлена из столбцов с ведущими элементами A,
- G составлена из ненулевых строк A.

Решение Задач к Семинару 1

ШАГ 2. Общий случай.

Достаточно привести A к приведённому ступенчатому виду.

Ответ строится аналогично.

Задача 6

Пусть A — произвольная $m \times n$ матрица. Преобразуем A к приведённому ступенчатому виду по строкам B. Пусть $i_1, \ldots, i_r$ — номера столбцов B с ведущими коэффициентами. Рассмотрим матрицы:

- F составлена из столбцов A с номерами $i_1, \ldots, i_r$,
- G составлена из ненулевых строк B.

Доказать, что

$$A = FG,$$

и что это разложение полного ранга (скелетное разложение) матрицы A.

Решение Задач к Семинару 1

Напомним, что любая матрица приводится к своему каноническому виду (приведённому ступенчатому виду по строкам) при помощи элементарных преобразований строк:

1. перестановка двух строк местами
$$R_i \leftrightarrow R_j;$$
2. умножение строки матрицы на ненулевую константу
$$\lambda R_i \to R_i, \qquad \lambda \neq 0;$$
3. прибавление к одной строке другой строки, умноженной на константу
$$R_i + \lambda R_j \to R_i, \qquad i \neq j.$$

Решение Задач к Семинару 1

Все элементарные преобразования — умножения слева на матрицу.

1. Перестановка строки i и j местами: меняем на A на $T_{ij}A$, где

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

2. Умножить i-тую строку на k: меняем на A на $D_i(\lambda)A$, где

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

3. Прибавить к i-той строке j-тую, умноженную на λ: меняем на A на $L_{ij}(\lambda)A$, где

$$L_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Существование скелетного разложения:

- Приведём матрицу A к каноническому виду:

$$A = PB,$$

где P — произведение элементарных матриц.

- Для канонического вида формула для скелетного разложения уже доказана:

$$B = \hat{F}G,$$

где $\hat{F}$ — столбцы $i_1, \ldots, i_r$ матрицы B.

- Напомним формулу для произведения матриц:

$$PB = (Pb_1, \ldots, Pb_n)\,.$$

- Поэтому

$$A = FG,$$

где $F = P\hat{F}$ — это столбцы $i_1, \ldots, i_r$ матрицы A.

Задача 7. Найти разложение полного ранга (скелетное разложение)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приводим к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем ответ:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Легко проверить:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задача 8. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{+}.$$

1. Находим скелетное разложение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом $A = FG$, где

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

2. Находим F^+, где
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Так как столбцы линейно независимы,
$$F^+ = (F^*F)^{-1}F^*.$$
Далее,
$$F^*F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Таким образом,
$$F^+ = (F^*F)^{-1}F^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

3. Находим G^+, где
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Так как строки линейно независимы,
$$G^+ = G^*(GG^*)^{-1}.$$
Далее,
$$GG^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Таким образом,
$$G^+ = G^*(GG^*)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $A = FG$, поэтому

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение Задач к Семинару 1

Задача 9. Пусть E_{ij} — матрица размера $n \times n$ такая, что её элементы в i-той строке и j-том столбце равны 1, а все остальные элементы равны 0.

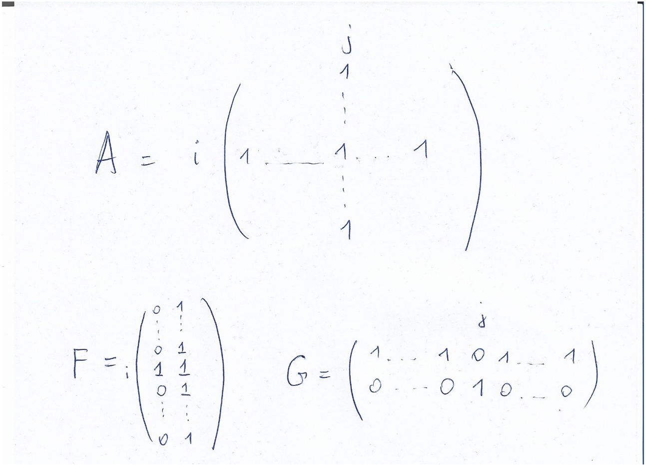

Рис.: Рис. 1

Решение Задач к Семинару 1

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^* F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^* F)^{-1} F^* = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 & 1 & 1 \dots 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & 0 & 1 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

$$GG^* = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^*(GG^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & n-1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение Задач к Семинару 1

$$A^+ = G^+ F^+ =$$

$$= \frac{1}{n-1}\;\begin{array}{r} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & n-1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{n-1}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 \dots -1 & n-1 & -1 \dots -1 \\ 1 \dots 1 & 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\;\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} & i \downarrow & \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} -1 \; \dots \; -1 & n-1 & -1 \; \dots \; -1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ -1 \; \dots \; -1 & n-1 & -1 \; \dots \; -1 \\ \hline n-1 \; \dots \; n-1 & 0 & n-1 \; \dots \; n-1 \\ \hline -1 \; \dots \; -1 & n-1 & -1 \; \dots \; -1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ -1 \; \dots \; -1 & n-1 & -1 \; \dots \; -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Семинар 2

Для любого ЛСУ

$$Ax = b$$

существует псевдорешение

$$A^{+}b.$$

Это

1. решение методом наименьших квадратов

$$\|Ax - b\| \to \min,$$

2. наименьшей длины

$$\|x\| \to \min.$$

Семинар 2

Задача Найти решение системы линейных уравнений наименьшей длины

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 7, \\ 3x + 4y - z = 6. \end{cases}$$

1. Находим псевдообратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{+} = \frac{1}{186} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 14 & 20 \\ 68 & -49 \end{pmatrix}.$$

2. Находим ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{186} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 14 & 20 \\ 68 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{93} \begin{pmatrix} 71 \\ 109 \\ 91 \end{pmatrix}.$$

SVD разложение

Пусть A — $m \times n$ матрица над $\mathbb{R}$. SVD-разложение:

$$A = U\Sigma V^T,$$

где

1. U — ортогональная $m \times m$ матрица,
2. V — ортогональная $n \times n$ матрица,
3. а Σ — это диагональная матрица:

   $$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0),$$

   с неотрицательными собственными значениями на диагонали:

   $$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0.$$

SVD разложение

SVD-разложение над $\mathbb{C}$ определяется аналогично:

$$A = U\Sigma V^*,$$

но

1. ортогональные матрицы U, V заменяются на унитарные,
2. а V^* — это комплексное сопряжение:

$$V^* = \bar{V}^T,$$

3. все значения диагональной матрицы Σ вещественны и неотрицательны:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0.$$

SVD разложение

Теорема

Для любой (вещественной или комплексной $n \times m$) матрицы A существует SVD разложение.

Семинар 2

Алгоритм нахождения SVD-разложения

$$A = U\Sigma V^*.$$

1. Находим собственные значения λ_i матрицы A^*A. Сингулярные значения

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

Так мы нашли $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$.

2. Находим канонический базис v_i матрицы A^*A:

$$(A^*A - \lambda_i E)v_i = 0.$$

Канонический базис нужно взять ортонормированным. Это столбцы V.

3. Находим столбцы U через соотношение

$$Av_i = \sigma_i u_i.$$

Если $\sigma_i = 0$, то берём векторы единичной длины, ортогональные остальным u_i.

Семинар 2

Задача. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Находим $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

1. Находим собственные значения $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda_i E) = 0.$$

В данном случае

$$\det\left(\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9).$$

Итак, сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{25} = 5, \qquad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3.$$

Семинар 2

1. Находим собственные векторы

$$(A^T A - \lambda_i E) v_i = 0.$$

Собственное значение $\lambda_1 = 25$:

$$A^T A - 25E = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение единичной длины:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Семинар 2

1. Находим собственные векторы

$$(A^T A - \lambda_i E)v_i = 0.$$

Собственное значение $\lambda_2 = 9$:

$$A^T A - 9E = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение единичной длины:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1. Итак, на данный момент

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1. Находим столбцы U через соотношение

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Для $\sigma_1 = 5$:

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Семинар 2

1. Находим столбцы U через соотношение

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Для $\sigma_1 = 3$:

$$u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Семинар 2

1. Итак, матрица U имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & * \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & * \end{pmatrix}$$

Оставшиеся столбцы берём так, чтобы U была ортогональной:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Семинар 2

Получаем ответ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Семинар 2

Замечания

1. Этот алгоритм удобнее применять, если $m \geq n$. Если $m < n$, то удобнее найти SVD для A^* и потом ещё раз сопрячь.

   Дело в том, что если A — $m \times n$ матрица, то матрица A^*A имеет размер $n \times n$, а AA^* — размер $m \times m$.

2. Сингулярные значения обычно берут упорядоченными:
   $$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0.$$

3. Решения
   $$(A^*A - \lambda_i E)v_i = 0$$
   нужно нормировать (т.е. брать векторы единичной длины). Если решение неоднозначно, то нужно брать ортогональные решения.

4. Если $\sigma_i = 0$, то векторы u_i нужно брать единичной длины и ортогональные остальным u_j.

Семинар 2

Обоснование алгоритма:

$$A^* A = V \Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V \Sigma^* \Sigma V^*.$$

Таким образом

$$A^* A = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^*$$

Семинар 2

Покажем, что

$$A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i.$$

Поскольку V — унитарная, то $V^* V = E$. С другой стороны,

$$V^* V = \left(V^* v_1, \ldots, V^* v_n\right).$$

Поэтому $V^* v_i = e_i$. Таким образом

$$A^* A v_i = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^* v_i = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} e_i = V \sigma_i^2 e_i = \sigma_i^2 v_i.$$

Семинар 2

Из того, что

$$A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i$$

следует, что:

1. собственные значения $A^* A$ — это σ_i^2,
2. соответствующие собственные векторы — это столбцы v_i матрицы V.

Поскольку V — унитарна, векторы v_i попарно ортогональны и имеют единичную длины.

Семинар 2

Скелетное разложение через SVD:

$$A = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} = U_1 \left(\Sigma_r V_1^* \right).$$

Иными словами,

$$F = U_1, \qquad G = \Sigma_r V_1^*.$$

Семинар 2

Псевдообратная через SVD

$$M = U\Sigma V^*.$$

Тогда псевдообратная матрица:

$$M^+ = V\Sigma^+ U^*,$$

где

$$\Sigma^+ = \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_k}, 0, \dots, 0\right).$$