МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 4

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

12 февраля 2021

Рассмотрим произвольное линейное отображение евклидовых (или эрмитовых) пространств

$$A : V \to W$$

Тогда

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$$

$$W = \operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

Семинар 3

Линейное отображение задаётся изоморфизмом

$$\hat{A} : (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} \to \mathrm{Im}\, A.$$

Псевдообратное отображение задаётся обратным изоморфимом

$$\hat{A}^{-1} : \mathrm{Im}\, A \to (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}.$$

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита

Семинар 3

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычисление:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы $l_i(x)$ определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Иными словами,

$$l_i(x) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Семинар 3

Задача Известно, что $f(x)$ — многочлен третий степени такой, что

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19. \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

Решение Использовать формулу для интерполяционного многочлена Лагранжа.

Семинар 3

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19. \end{cases}$$

Какой многочлен 3ей степени равен нулю в точках $-1, 2$ и -2?

$$c(x+1)(x-2)(x+2)$$

для любой константы c.

Какой из этих многочленов равен 2 в точке $x = 1$?

$$2 \cdot \frac{x+1}{1+1} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x+2}{1+2}.$$

Семинар 3

Представим наш многочлен в виде суммы 4 многочленов:

$$\begin{cases} f_1(1) = 2 \\ f_1(-1) = 0 \\ f_1(2) = 0 \\ f_1(-2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(1) = 0 \\ f_2(-1) = -3 \\ f_2(2) = 0 \\ f_2(-2) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f_3(1) = 0 \\ f_3(-1) = 0 \\ f_3(2) = 17 \\ f_3(-2) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f_4(1) = 0 \\ f_4(-1) = 0 \\ f_4(2) = 0 \\ f_4(-2) = -19. \end{cases}$$

Получаем ответ:

$$2\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x-2}{-1}\cdot\frac{x+2}{3}-3\cdot\frac{x-1}{-2}\cdot\frac{x-2}{-3}\cdot\frac{x+2}{1}+$$
$$+17\cdot\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x+1}{3}\cdot\frac{x+2}{4}-19\cdot\frac{x-1}{-3}\cdot\frac{x+1}{-1}\cdot\frac{x-2}{-4}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{6}(-2+2x-x^2+13x^3).$$

Семинар 3

Задача Найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение Ищем многочлен

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Это система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -1 \\ b + 2c + 3d = 5 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ 2c + 3d = 6 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

Получаем

$$a = 0, \qquad b = -1, \qquad c = -6, \qquad d = 6.$$

Ответ:

$$-x - 6x^2 + 6x^3.$$

Семинар 3

Задача На плоскости 100 точек, любые 4 из них лежат на параболе виде $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что тогда все 100 будут лежать на одной и той же параболе.

Решение

- Если различных точек не более трёх, то тривиально (проводим через них параболу). Далее — есть хотя бы 4 различные точки A, B, C, D.

- Через A, B, C проходит единственная парабола γ. Она задаётся интерполяционным многочленом Лагранжа. Степень многочлена не 0, т.к. точки различны, и не 1, т.к. точки лежат на параболе, а не на прямой.

- Любая другая точка X из 100 лежит на γ вместе с A, B, C (по условию).

Сплайны

Семинар 3

Сплайн $S(x)$ — локально аппроксимируем $f(x)$ полиномом и гладко их сшиваем.

Пример: Сплайн степени 2 — производная $S'(x)$ непрерывна.

Семинар 3

Квадратичный сплайн. Опорные точки:

$$\left[\left(x_0, y_0\right), \left(x_1, y_1\right), ..., \left(x_n, y_n\right)\right],$$

где

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

- На каждом отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ ищем полином

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Семинар 3

- Условие в узлах:

$$S_i(x_i) = y_i.$$

- Непрерывность производной $S'(x)$:

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$$

Граничные условия:

$$S_i'(x_0) = S_n'(x_n) = 0.$$

Семинар 3

Задача Приближить $\sin x$ сплайном $S(x)$ степени два с узлами

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi.$$

Найти

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Семинар 3

Значения в точках:

$$y(\pi k) = \sin(\pi k) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k.$$

Производные:

$$y'(\pi k) = \cos(\pi k) = (-1)^k, \qquad y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0.$$

Семинар 3

Интерполяция на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Многочлен

$$f_1(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Уравнения

$$\begin{cases} f_1(0) = f(0), \\ f_1'(0) = f'(0), \\ f_1(\dfrac{\pi}{2}) = f(\dfrac{\pi}{2}). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 \frac{\pi^2}{4} + a_1 \frac{\pi}{2} + a_0 = 1. \end{cases}$$

Получаем,

$$f_1(x) = \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} x^2 + x.$$

Интерполяция на $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\begin{cases} f_2(\dfrac{\pi}{2}) = f(\dfrac{\pi}{2}), \\ f_2'(\dfrac{\pi}{2}) = f_1'(\dfrac{\pi}{2}), \\ f_2(\pi) = f(\pi). \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} b_2\dfrac{\pi^2}{4} + b_1\dfrac{\pi}{2} + b_0 = 1, \\ 2b_2\dfrac{\pi}{2} + b_1 = 2\dfrac{4-2\pi}{\pi^2}\dfrac{\pi}{2} + 1, \\ b_2\pi^2 + b_1\pi + b_0 = 0. \end{cases}$$

Итак,

$$f_2(x) = \frac{2(\pi-6)}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{16}{\pi} - 3\right)x + (\pi - 4).$$

Ответ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-2\pi}{\pi^2}x^2 + x & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2(\pi-6)}{\pi^2}x^2 - \left(\dfrac{16}{\pi} - 3\right)x + (\pi - 4), & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Семинар 3

Нахождение значения:

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-2\pi}{16} + \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+\pi}{8}.$$

Семинар 3

Кривые Безье. $\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n}$ — кривая Безье с опорными точками $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

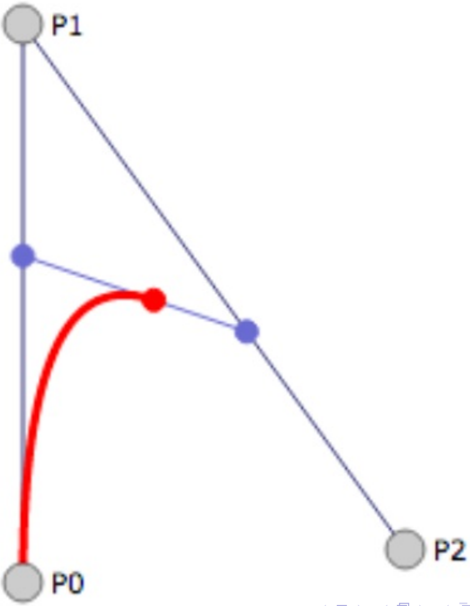
Рекурсивное определение. Кривая степени ноль — это точка:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0}(t) = \mathbf{P}_0$$

Кривая Безье степени n — линейная комбинация кривых Безье степени $n-1$.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_{n-1}}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_n}(t)$$

Семинар 3



Семинар 3

Задача. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.

Нужно доказать:

- Касание первого отрезка ломаной в точке P_0:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} B_{P_0 P_1 \ldots P_n} = \alpha_n (P_1 - P_0)$$

- Касание последнего отрезка ломаной в точке P_n:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} B_{P_0 P_1 \ldots P_n} = \beta_n (P_n - P_{n-1})$$

для некоторых констант α_k, β_k.

Докажем касание первого отрезка ломаной (касание последнего отрезка доказывается аналогично).

Доказательство по индукции:

- База. $n = 1$.

  $$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

  Поэтому

  $$B'(0) = P_1 - P_0.$$

- Шаг. Пусть при $k < n$.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{B}_{P_0 P_1 \dots P_k} = \alpha_k (P_1 - P_0).$$

Используем рекурсивное кривых Безье.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\dots\mathbf{P}_n}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\dots\mathbf{P}_{n-1}}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_n}(t)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}_{P_0 P_1 \dots P_n} = -\mathbf{B}_{P_0 P_1 \dots P_{n-1}}(t) + (1-t)\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\dots\mathbf{P}_{n-1}}(t) +$$
$$+\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_n}(t) + t\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_n}(t)$$

Семинар 3

- Кривая Безье проходит через опорные точки, поэтому:

$$\mathbf{B}_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(0) = P_0, \qquad \mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_n}(0) = P_1$$

- По предположению индукции:

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\dots\mathbf{P}_{n-1}}(t) = \alpha_{n-1}(P_1 - P_0)$$

- Подставляем:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{B}_{P_0P_1\dots P_n} = -\mathbf{B}_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(0) - \mathbf{B}'_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\dots\mathbf{P}_{n-1}}(0) + \mathbf{B}_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_n}(0) =$$

$$= -P_0 + P_1 + \alpha_{n-1}(P_1 - P_0) = (\alpha_{n-1} + 1)(P_1 - P_0).$$

Семинар 3

Задача Построить кривую Безье:

$$P_0(-1,-1), \qquad P_1(1,3), \qquad P_2(2,4), \qquad P_3(7,-1).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i = \\
&= (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + \binom{3}{1}(1-t)^2 t \mathbf{P}_1 + \binom{3}{2}(1-t) t^2 \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3 = \\
&= (1-t)^3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3(1-t) t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 6(1-t) t^2 + 7t^3 \\ -(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 12(1-t) t^2 - t^3 \end{pmatrix}$$

Метрические пространства

Семинар 4

Метрическое пространство — это пара $(X,\ \rho)$, состоящая из некоторого множества X и функции расстояния

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

удовлетворяющей следующим свойствам

1. $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (аксиома тождества).
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии).
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Функцию расстояния также называют метрикой.

Семинар 4

Пример 1. X — конечное множество.

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Пример 2. X — евклидово пространство.

$$\rho(x,y) = \|y - x\|.$$

Семинар 4

Q: Известные примеры метрических пространств?

Семинар 4

Задача. Будет ли метрикой на $\mathbb{R}$ следующие функции $\rho(x, y)$:

1. $|e^x - e^y|$.
2. $|x^2 - y^2|$,
3. $\sin(x - y)$,

Нужно проверить все свойства метрики. Для

$$\rho(x,y) = |e^x - e^y|$$

1. Все значения вещественны $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ и неотрицательны:

$$\rho(x,y) \geq 0.$$

Действительно,

$$|e^x - e^y| \geq 0.$$

Семинар 4

1. Аксиома тождества:
$$\rho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y.$$
Действительно,
$$\rho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow |e^x-e^y|=0 \Leftrightarrow e^x-e^y=0 \Leftrightarrow x=y$$

Семинар 4

3. Аксиома симметрии:
$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$
Действительно,
$$\rho(y, x) = |e^y - e^x| = |e^x - e^y| = \rho(x, y).$$

4. Неравенство треугольника:

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Рассмотрим 2 случая.

1. Пусть $x \geq z$. Тогда $e^x \geq e^z$. Тогда
$$\rho(x,z) = |e^x - e^z| = e^x - e^z = e^x - e^y + e^y - e^z.$$

2. Пусть $x < z$. Тогда по уже доказанному:
$$\rho(x,z) = \rho(z,x) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x) = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Семинар 4

Покажем, что

$$\rho(x, y) = \sin(x - y)$$

не является метрикой.

- Аксиома симметрии:

  $$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

  Не удовлетворяет:

  $$\rho(y, x) = \sin(y - x) \neq \sin(x - y),$$

  если $y - x \neq \pi k$.

Семинар 4

Покажем, что

$$\rho(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$$

не является метрикой.

- Аксиома тождества:

$$\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

  Не удовлетворяет:

$$\rho(x, -x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|x^2 - y^2\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0$$

Семинар 4

Метрика (функция расстояния) на множестве → Норма на линейном пространстве.

Пусть мы знаем длину любого вектора $\|v\|$ из V. Тогда естественная метрика:

$$\rho(x, y) = \|y - x\|.$$

Семинар 4

Норма в векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — это неотрицательная вещественное-значная функция

$$p\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

обладающая следующими свойствами:

1. $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V,$
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in V$
$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Семинар 4

Как задать норму ν на $\mathbb{R}^n$?

Задать единичную сферу

$$S_1(0) = \left\{ v \;\middle|\; \nu(v) = 1 \right\}$$

или единичный шар

$$B_1(0) = \left\{ v \;\middle|\; \nu(v) \leq 1 \right\}.$$

Семинар 4

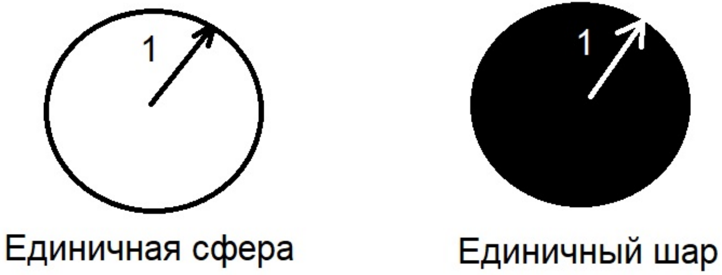


Рис.: Единичные сфера и шар

Семинар 4

Какие свойствами обладает единичный шар B?

Очевидное свойство:

- Центральная симметрия
$$x \in B \qquad \Leftrightarrow -x \in B.$$

Семинар 4

Подмножество $W \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми своими двумя точками $x, y \in W$ оно также содержит отрезок $[x, y]$ их соединяющий.

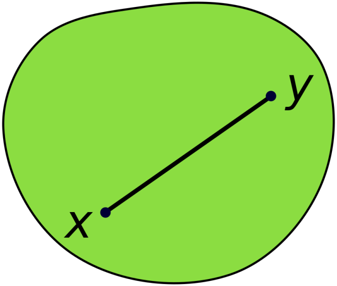


Рис.: Выпуклое множество

Семинар 4

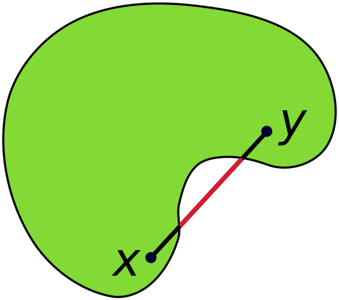


Рис.: Невыпуклое множество

Семинар 4

Задача. Доказать, что шар в нормированном пространстве является **выпуклым множеством**. То есть доказать, что если x, y принадлежат шару, то и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит шару.

Решение.

- При сдвиге шар переходит в шар, а отрезок — в отрезок. Поэтому, без ограничения общности, центр шара — в 0.

- Отрезок $[x, y]$ — это множество точек:

$$z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Пусть x, y лежат в шаре $B_R(0)$:

$$\|x\| \leq R, \qquad \|y\| \leq R.$$

По неравенству треугольника:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha) y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha) y\| =$$
$$= \alpha \|x\| + (1 - \alpha) \|y\| \leq R.$$

Семинар 4

Напомним ещё несколько понятий.

- $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре

$$X \subset B_R(0)$$

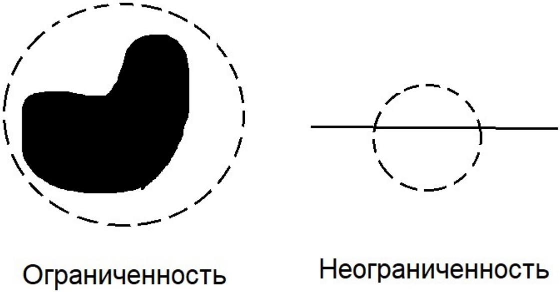


Рис.: Невыпуклое множество

Семинар 4

- $X \subset \mathbb{R}^n$ открыто, если вместе с каждой точки $x \in X$ оно содержит некоторый шар с центром в этой точке
$$B_{\varepsilon(x)} \subset X.$$

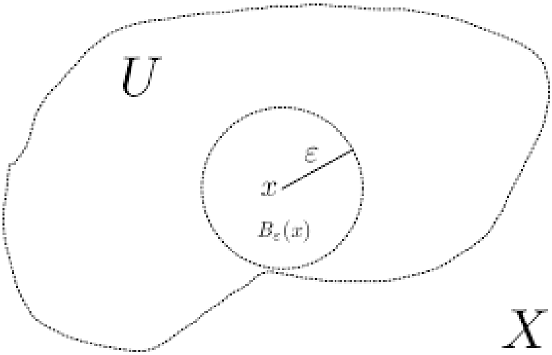


Рис.: Невыпуклое множество

Семинар 4

- Замкнутое подмножество = дополнение до открытого.
- Замкнутое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно.

Семинар 4

- Единичный шар $B_1^{\nu}(0)$ относительно нормы ν **замкнут**.

Если $\nu(v) > 1$, то и $\nu(v + u) > 1$ для малых векторов u (скажем $\nu(u) < \dfrac{\nu(v) - 1}{2}$).

Семинар 4

Важный факт из анализа:

Теорема Вейерштрасса

Любая непрерывная функция на компакте ограниченна и принимает своё минимальное и максимальное значение.

Семинар 4

Рассмотрим "обычную единичную сферу" в $\mathbb{R}^n$:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Это компакт. Норма ν принимает на ней свой минимум m и максимум M.

Семинар 4

Следствия про единичный шар $B_1^\nu(0)$ относительно нормы ν :

- $B_1^\nu(0)$: ограничено
$$B_1^\nu(0) \subset \left\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le \frac{2}{m}\right\}.$$

- содержит окрестность нуля
$$B_1^\nu(0) \supset \left\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le \frac{1}{2M}\right\}.$$

Теорема (Минковского)

Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром $B_1^\nu(0)$ с центром в нуле относительно некоторой нормы ν тогда и только тогда, когда B:

1. замкнуто,
2. ограничено
$$B \subset B_R(0),$$
3. содержит окрестность нуля
$$B_\varepsilon(0) \subset B,$$
4. выпукло
$$u, v \in B \quad \Rightarrow \quad [u, v] \subset B,$$
5. центрально симметрично
$$x \in B \quad \Leftrightarrow -x \in B.$$

Семинар 4

Задача $B(x,y)=\left\{x^2+axy+4y^2\leq 1\right\}$. При каких a на множестве $\mathbb{R}^2$ существует норма ν такая, что $B(x,y)$ — единичный шар относительно неё?

Семинар 4

Как выглядит множество $B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \le 1\}$?

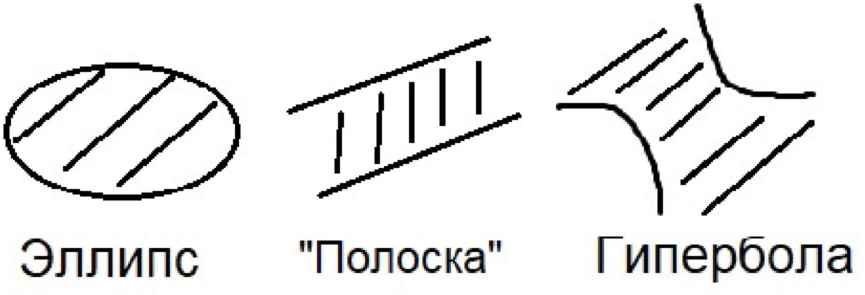


Рис.: Множество