МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 5

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

19 февраля 2021

Исправление

Эрмитова интерполяция. Многочлен H, который в заданных точках z_i совпадает с значениями исходной функции и её первых m_i производных:

$$H^{(j)} = f^{(j)}(z_i), \qquad i = 0, \dots, k, \qquad j = 0, \dots m_i.$$

Такой многочлен степени не более $m_0 + \dots m_i - 1$ существует и единственен.

Число производных в каждой точке — своё.

Решение Задач к Семинару 4

Решение Задач к Семинару 4

Семинар 5

Метрическое пространство — это пара (X, d), состоящая из некоторого множества X и функции расстояния

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

удовлетворяющей следующим свойствам

1. $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (аксиома тождества).
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии).
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Функцию расстояния также называют метрикой.

Семинар 5

Задача Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых огранченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве).

Решение Да. Рассмотрим рациональные числа $\mathbb{Q}$ и в нём отрезки:

$$\left[\sqrt{2}-\frac{1}{n}, \sqrt{2}+\frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q}.$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{2}-\frac{1}{n}, \sqrt{2}+\frac{1}{n}\right] \bigcap \mathbb{Q} = \varnothing.$$

Семинар 5

Норма в векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — это неотрицательная вещественное-значная функция

$$p\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

обладающая следующими свойствами:

1. $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V$,
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in V$
$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Семинар 5

Теорема (Минковского)

Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является единичным шаром $B_1^\nu(0)$ с центром в нуле относительно некоторой нормы ν тогда и только тогда, когда B:

1. замкнуто,
2. ограничено
$$B \subset B_R(0),$$
3. содержит окрестность нуля
$$B_\varepsilon(0) \subset B,$$
4. выпукло
$$u, v \in B \quad \Rightarrow \quad [u, v] \subset B,$$
5. центрально симметрично
$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad -x \in B.$$

Семинар 5

Задача. Пусть

$$B(x,y) = \left\{x^2 + axy + 4y^2 \le 1\right\}.$$

При каких a на множестве $\mathbb{R}^2$ существует норма ν такая, что $B(x,y)$ — единичный шар относительно неё?

Найдите в этом случае $\nu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

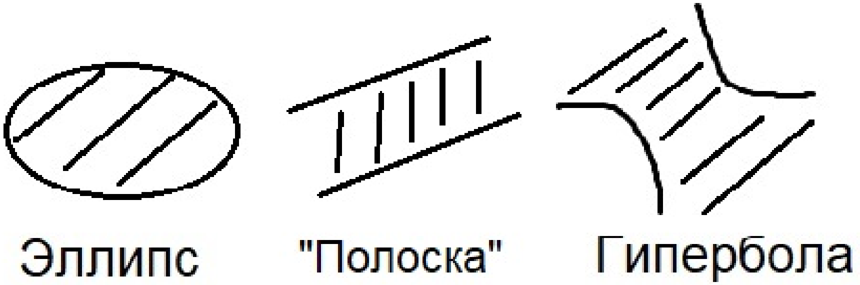
Решение. Приведём квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа (выделим полные квадраты)

$$x^2 + axy + 4y^2 = \left(x + \frac{a}{2}y\right)^2 + \left(4 - \frac{a^2}{4}\right)y^2.$$

Семинар 5

Как выглядит множество

$$B(x,y)=\left\{\left(x+\frac{a}{2}y\right)^2+\left(4-\frac{a^2}{4}\right)y^2\le 1\right\}$$



При $|a| \geq 4$ множество $B(x, y)$ неограниченно — поэтому нормы ν НЕ существует.

При $|a| < 4$ множество $B(x, y)$ — это эллипс (с внутренностью). Эллипс (кривая) получается из окружности линейной заменой координат.

При линейной замене координат норма переходит в норму (её определение не зависит от координат). Для окружности норма ν — это евклидова метрика.

Вывод. $B(x, y)$ задаёт норму ν при $|a| < 4$.

Семинар 5

Ничего удивительного: положительно определённая квадратичная форма

$$q(x) = x^T Qx$$

задаёт евклидову метрику.

В данном случае

$$x^2 + axy + 4y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Задача. Вычислить $\nu\big((2 \quad 1)\big)$.

Решение -1 (именно для этой метрики).

$$\nu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \sqrt{\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{(2)^2 + a\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 1^2} = \sqrt{2a+8}.$$

Задача решена.

Семинар 5

Задача. Вычислить $\nu\big((2 \quad 1)\big)$.

Решение -2 (для любой метрики).
Найдём при каких $\lambda > 0$ вектор λv попадает в единичный шар.

$$\lambda^2(2^2 + a \cdot 2 + 4 \cdot 1^2) \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \le \frac{1}{\sqrt{2a+8}}.$$

С другой стороны, по определению нормы

$$\nu(\lambda v) = |\lambda|\,\nu(v),$$

поэтому вектор λv попадает в единичный шар при $\lambda \le \frac{1}{\nu(v)}$.

Поэтому $\nu\big((2 \quad 1)\big) = \sqrt{2a+8}$.
Задача решена.

Семинар 5

Семинар 5

Q: Как лучшее всего приблизить вектор v вектором из подпространства $u \in\subset U$?

A: Ортогонально спроектировать
$$u = \mathrm{pr}_U\, v.$$

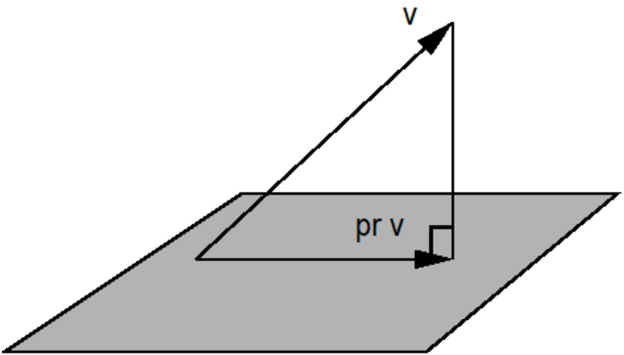


Рис.: Проекция на подпространство

Семинар 5

Формула для ортогональной проекции $\mathrm{pr}\, v$ получается из условия

$$(v - \mathrm{pr}\, v, u_i) = 0,$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — базис U.

- Случай 1. Проекция v на прямую $\langle u \rangle$.

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$$

Здесь $\mathrm{pr}_u\, v = \lambda u$. Находим λ из условия

$$(v - \lambda u, u) = 0.$$

- Случай 2. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — ортонормированный базис U:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Аналогично случаю 1:

$$\mathrm{pr}_U v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

где

$$\lambda_j = \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle}.$$

Семинар 5

- Общий случай. Пусть $u_1, \dots, u_k$ — произвольный базис U. Ортогональная проекция
$$\mathrm{pr}_U v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k,$$
находится из условий
$$\begin{cases} (\mathrm{pr}_U v, u_1) = 0 \\ \dots \\ (\mathrm{pr}_U v, u_k) = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты λ_i находится из СЛУ:
$$\begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & \dots & (u_k, u_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, u_1) \\ \dots \\ (v, u_k) \end{pmatrix}.$$

Семинар 5

Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке $C[-1,1]$.

Примеры скалярных произведений:

- $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$
- $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Семинар 5

Строим ортогональную систему многочленов для скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

Получаем многочлены Лежандра

$$(P_m, P_n) = 0, \qquad m \neq n,$$

$$(P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}.$$

Пример. Несколько первых многочленов Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\ P_3(x) &= \tfrac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \\ P_4(x) &= \tfrac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right). \end{aligned}$$

Семинар 5

Задача Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1, 1]$:

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{2} \alpha_k P_k(x) \right\| \to \min,$$

где $P_k(x)$ — многочлены Лежандра. Функция

$$f(x) = x^3.$$

Семинар 5

Какая линейная комбинация векторов $\sum \alpha_k P_k(x)$ ближе всего к вектору f?
Ортогональная проекция f!

$$\alpha_k = \frac{(f, P_k(x))}{(P_k(x), P_k(x))}.$$

Семинар 5

Находим α_0. Здесь $P_0(x) = 1$. Поэтому

$$\alpha_0 = \frac{(f, P_0(x))}{(P_0(x), P_0(x))} = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

Находим α_1. Здесь $P_1(x) = x$. Поэтому

$$(P_1(x), P_1(x)) = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{(f, P_1(x))}{(P_1(x), P_1(x))} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{3}{5}.$$

Семинар 5

Находим α_2. Здесь $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$. Поэтому

$$(P_2(x), P_2(x)) = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{(f, P_2(x))}{(P_2(x), P_2(x))} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{2} x^3 dx = 0.$$

Семинар 5

Ответ:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{3}{5}, \qquad \alpha_2 = 0.$$

Семинар 5

Формула Родрига для многочленов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Это ортогональная[1] система многочленов:

$$(P_m, P_n) = 0, \qquad m \neq n,$$

$$(P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}.$$

[1] Не ортонормированная — длина векторов не равна 1.