МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 6

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

26 февраля 2021

Эрмитово скалярное произведение

1. Эрмитово скалярное произведение.
2. Многочлены Лежандра.
3. Многочлены Чебышёва.

Семинар 6

Задача. Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) =$$

$$= (u,u) + (u,v) + \overline{(u,v)} + (v,v) = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2 .$$

Семинар 6

Задача. Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом пространстве.

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) =$$

$$= (u,u) + (u,v) + \overline{(u,v)} + (v,v) = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2 .$$

Таким образом

$$\mathrm{Re}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Остаётся воспользоваться тем, что

$$(u, v) = \mathrm{Re}(u, v) + i\,\mathrm{Im}(u, v).$$

и что

$$\mathrm{Im}(u, v) = -\mathrm{Re}(u, iv).$$

Действительно,

$$(u, iv) = i(u, v) = i(\mathrm{Re}(u, v) + i\,\mathrm{Im}(u, v)) = -\mathrm{Im}(u, v) + i\,\mathrm{Re}(u, v).$$

В последнем слагаемом видно действительную и мнимую часать. Действительная часть суть $-\mathrm{Im}(u, v)$.

Семинар 6

Получаем **ответ**

$$(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) - \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

В самом последнем слагаемом мы воспользовались:

$$\|iv\| = \|v\|.$$

Семинар 6

Замечание. Этот же ответ можно получить, рассмотрев $\|u - tv\|$, где $t \in \mathbb{C}$.

Семинар 6

Далее мы будем аппроксимации непрерывных функций на отрезке $f \in C[-1,1]$ по той или иной норме.

- $\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx \to \min \quad \to \quad$ многочлены Лежандра $P_n(x)$.
- $\max_{[-1,1]} |f(x) \to \min \quad \to \quad$ многочлены Чебышёва 1го рода $T_n(x)$.
- $\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \to \min \quad \to \quad$ многочлены Чебышёва 2го рода $U_n(x)$.

Многочлены Лежандра

1. Эрмитово скалярное произведение.
2. Многочлены Лежандра.
3. Многочлены Чебышёва.

Семинар 6

Q: Как лучшее всего приблизить вектор v вектором из подпространства $u \in\subset U$?

A: Ортогонально спроектировать

$$u = \mathrm{pr}_U\, v.$$

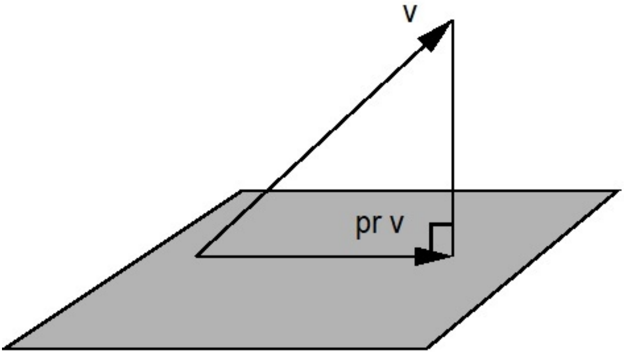

Рис.: Проекция на подпространство

Семинар 6

Формула для ортогональной проекции $\operatorname{pr} v$ получается из условия

$$(v - \operatorname{pr} v, u_i) = 0,$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — базис U.

- Случай 1. Проекция v на прямую $\langle u \rangle$.

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$$

Здесь $\operatorname{pr}_u v = \lambda u$. Находим λ из условия

$$(v - \lambda u, u) = 0.$$

- Случай 2. Пусть $u_1, \dots, u_k$ — ортонормированный базис U:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Аналогично случаю 1:

$$\mathrm{pr}_U v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k,$$

где

$$\lambda_j = \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle}.$$

Семинар 6

- Общий случай. Пусть $u_1, \dots, u_k$ — произвольный базис U. Ортогональная проекция
$$\mathrm{pr}_U v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k,$$
находится из условий
$$\begin{cases} (\mathrm{pr}_U v, u_1) = 0 \\ \dots \\ (\mathrm{pr}_U v, u_k) = 0. \end{cases}$$
Коэффициенты λ_i находится из СЛУ:
$$\begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & \dots & (u_k, u_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, u_1) \\ \dots \\ (v, u_k) \end{pmatrix}.$$
$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$
где
$$\lambda_j = \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle} \mathbf{u}_j.$$

Семинар 6

Определим многочлены Лежандра при помощи формулы Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Докажем, что это ортогональная[1] система многочленов:

$$(P_m, P_n) = 0, \qquad m \neq n,$$

$$(P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}.$$

[1] Не ортонормированная — длина векторов не равна 1.

Семинар 6

Пример. Несколько первых многочленов Лежандра:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\\
P_3(x) &= \tfrac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)\\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right).
\end{aligned}
$$

Докажем это. Нужно изучить интеграл

$$(P_m, P_n) = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{1} \frac{d(x^2-1)^m}{dx^m} \frac{d(x^2-1)^n}{dx^n} dx.$$

Посмотрим на интеграл

$$\int_{-1}^{1} R(x) P_n(x) dx,$$

где $R(x)$ — произвольный многочлен.

Семинар 6

Напомним формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

Семинар 6

Докажем по индукции, что

$$\int_{-1}^{1} R(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^n}dx = \int_{-1}^{1} R^{(k)}(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}dx, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

База: $k = 0$. Тривиально.

Семинар 6

Шаг.
$$\int_{-1}^{1} R^{(k)}(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}dx = \int_{-1}^{1} R^{(k)}(x)d\left(\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\right)$$
Интегрируем по частям, получаем:
$$R^{(k)}(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} R^{(k+1)}(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}dx.$$

Семинар 6

Осталось заметить, что первое слагаемое равно 0:

$$R^{(k)}(x)\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\bigg|_{-1}^{1}$$

Действительно, $(x^2-1)^n$ имеет в ± 1 корни кратности n. Если $k < n$, то у

$$\frac{d(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}$$

останутся корни в ± 1.

Семинар 6

Заметим, что

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n}+\dots\right) =$$
$$= \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\dots(n+1)x^n+\dots$$

это многочлен степени n со старшим коэффициентом

$$\frac{(2n)!}{2^n n!^2}.$$

Семинар 6

По только что доказанному:

$$(P_m(x), P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx$$

Если $m > n$, то $P_m^{(n)}(x) = 0$. Поэтому

$$(P_m, P_n) = 0, \qquad m \neq n.$$

Семинар 6

Если $m = n$, то

$$(P_n(x), P_n(x)) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{(2n)!}{2^n n!}(x^2-1)^n dx$$

Интергрирую по частям, несложно получить:

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 1} = \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Таким образом

$$(P_n(x), P_n(x)) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} \cdot \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Семинар 6

Задача Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1,1]$:

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{2} \alpha_k P_k(x) \right\| \to \min,$$

где

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\left(x^2 - 1\right)^k \right), k = 1, \ldots, n$$

многочлены Лежандра.

1. $f_1(x) = xe^{-x}$,

Какая линейная комбинация векторов $\sum \alpha_k P_k(x)$ ближе всего к вектору f?
Ортогональная проекция f!

$$\alpha_k = \frac{(f, P_k(x))}{(P_k(x), P_k(x))}.$$

Семинар 6

Обозначим $I_n = \int_{-1}^{1} x^n e^{-x} dx$. Тогда

$$I_n = -\int_{-1}^{1} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x} dx^n =$$
$$= -\frac{1}{e} + (-1)^n e + n \int_{-1}^{1} e^{-x} x^{n-1} dx$$

Таким образом

$$I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e} + (-1)^n e.$$

При этом

$$I_0 = e - \frac{1}{e}.$$

Семинар 6

Таким образом

$$I_0 = e - \frac{1}{e}, \qquad I_1 = -\frac{2}{e}$$

$$I_2 = e - \frac{5}{e}, \qquad I_3 = \frac{2e^2 - 16}{e}.$$

Семинар 6

Находим α_0. Здесь $P_0(x) = 1$. Поэтому

$$\alpha_0 = \frac{(f, P_0(x))}{(P_0(x), P_0(x))} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx = -\frac{1}{e}.$$

Семинар 6

Находим α_1. Здесь $P_1(x) = x$. Поэтому

$$(P_1(x), P_1(x)) = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{(f, P_1(x))}{(P_1(x), P_1(x))} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx = \frac{3}{2}\left(e - \frac{5}{e}\right).$$

Семинар 6

Находим α_2. Здесь $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$. Поэтому

$$(P_2(x), P_2(x)) = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{(f, P_2(x))}{(P_2(x), P_2(x))} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{2} xe^{-x}\,dx =$$
$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}I_1\right) == \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{2e^2-16}{e} - \frac{1}{2}\frac{2}{e}\right) = \frac{5}{2}\left(3e - \frac{23}{3}\right).$$

Семинар 6

Ответ:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{e}, \qquad \alpha_1 = \frac{3}{2}\left(e - \frac{5}{e}\right), \qquad \alpha_2 = \frac{5}{2}\left(3e - \frac{23}{3}\right).$$

Многочлены Чебышёва

1. Эрмитово скалярное произведение.
2. Многочлены Лежандра.
3. Многочлены Чебышёва.

Семинар 6

Нормы Чебышёва для функций на отрезке $[-1, 1]$:

0. Максимум модуля на отрезке:

$$\|f\|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)|.$$

1. Площадь под графиком на отрезке:

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

Семинар 6

Многочлен Чебышёва первого рода $T_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$:

$$\| T_n \|_0 = \max_{[-1,1]} |T_n(x)| \to \min .$$

Семинар 6

Несколько первых многочленов Чебышёва первого рода:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Семинар 6

Несколько первых многочленов Чебышёва второго рода:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \end{aligned}$$

Семинар 6

Многочлен Чебышёва второго рода $U_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^n, интеграл от абсолютной величины которого по отрезку $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение:

$$\| T_n \|_1 = \int_{-1}^{1} |U_n(x)| \, dx \to \min .$$

Семинар 6

Многочлены Чебышёва 1го рода $T_n(x)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \ .$$

Семинар 6

Многочлены Чебышёва 2го рода $U_n(x)$:

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x).$$

Семинар 6

Многочлены Чебышёва 2го рода $T_n(x)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x) \ . \end{aligned}$$

Семинар 6

Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

А именно

$$\langle T_m, T_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Семинар 6

Задача. Введём на множестве многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leq N}$ степени не более N от одной переменной скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_N = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i)g(x_i),$$

где $x_0, \ldots, x_{N-1}$ — нули многочлена Чебышёва степени N. Докажите, что многочлены Чебышёва $T_0, \ldots, T_{N-1}$ ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причём

$$\langle T_j, T_j\rangle_N = \frac{N}{2}$$

при $j > 0$ и $\langle T_0, T_0\rangle_N = N$.

Семинар 6

- Найдём нули многочлена Чебышёва:

$$T_N(x) = \cos(N \arccos x) = 0,$$

Поэтому нули

$$x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2N}, \qquad k = 0, \dots N-1.$$

Семинар 6

- Рассматривается сумма:

$$a_{mn} = \langle T_m, T_n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \cos m\theta_k \cos n\theta_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\cos(m+n)\theta_k + \cos(m-n)\theta_k \right]$$

Семинар 6

Далее рассмотрим сумму

$$s(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(k + \frac{1}{2})\theta = \cos\frac{1}{2}\theta + \dots + \cos(N - \frac{1}{2})\theta$$

Заметим, что

$$s(\theta) = \frac{\sin N\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

при $\theta \neq 0$ и

$$s(0) = N.$$

Семинар 6

Итак, наша сумма:

$$a_{mn} = \langle T_m, T_n \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\cos \frac{(m+n)\pi}{N} (k + \frac{1}{2}) + \cos \frac{(m-n)\pi}{N} (k + \frac{1}{2}) \right]$$

Если $m \neq n$, то по доказанному тодждеству:

$$a_m n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin N \frac{(m+n)\pi}{N}}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{(m+n)\pi}{N}} + \frac{\sin N \frac{(m-n)\pi}{N}}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{(m-n)\pi}{N}} \right].$$

И это равно нулю, т.к. в числителях $\sin k\pi = 0$.
Утверждение доказано.

Семинар 6

Если $m = n \neq 0$, то

$$a_{nn} = \langle T_m, T_n \rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\cos\frac{(2n)\pi}{N}(k+\frac{1}{2}) + \cos 0\right]$$

Первое слагаемое опять же равно нулю и

$$a_{nn} = \frac{N}{2}.$$

Если же $m = n = 0$, то

$$a_{nn} = \langle T_m, T_n \rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[2\cos 0] = N.$$

Семинар 6

Задача. Пусть f — произвольная действительная функция. Предположим, что $P(x)$ — такой многочлен степени $n-1$, что

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle T_j, f\rangle_n}{\langle T_j, T_j\rangle_n} T_j(x_m)$$

для всех $m = 0, \ldots, n-1$. Докажите, что $P(x)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа функции f с узлами в точках $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

Семинар 6

- Многочлены Чебышёва $T_0(x), \ldots, T_{n-1}(x)$ порождают пространство многочленов $\mathbb{R}[x]_{<n}$ степени не более $n-1$.

- Многочлен
$$P_f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle T_j, f\rangle_n}{\langle T_j, T_j\rangle_n} T_j(x)$$
суть ортогональная проекция функции на f на $\mathbb{R}[x]_{<n}$.

- Эта проеция зависит только от значения f в узлах $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Поэтому для функции f и для её многочлена Лагранжа g мы получаем одинаковую проекцию:
$$P_f(x) = P_g(x).$$

- Многочлен Лагранжа g уже лежит в $\mathbb{R}[x]_{<n}$. Поэтому его проекция совпадает с ним самим
$$P_g(x) = g(x).$$

Утверждение доказано.