МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 8

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

12 марта 2021

Аппроксимация полиномов

1. Аппроксимация полиномов.
2. Альтернанс Чебышёва.
3. Матричные нормы.

Семинар 8

Повторим то, что было ранее про об аппроксимацию.

Семинар 8

Задача. Построить многочлен степени $< n$, аппроксимирующий многочлен

$$f = c_0 x^n + \cdots + c_n$$

на отрезке $[a, b]$ по норме

$$|h|_0 = \max_{[a,b]} |h(x)|$$

Решение. Берём

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

Искомый многочлен:

$$f - c_0 \bar{T}_n(x).$$

Семинар 8

Многочлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

наименее отклоняется от нуля относительно нормы

$$|h|_0 = \max_{[a,b]} |h(x)|$$

на отрезке $[a, b]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом 1:

$$\bar{T}_n(x) = x^n + \dots$$

Пример.

$$f(x) = 2x^3 + x^2, \qquad x \in [a, b] = [1, 3].$$

Поскольку

$$T_3 = 4x^3 - 3x,$$

то

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = x^3 - 6x^2 + \frac{45x}{4} - \frac{13}{2}.$$

Искомый многочлен:

$$f(x) - 2\bar{T}_n(x) = 13x^2 - \frac{45x}{2} + 13.$$

Семинар 8

Задача. Построить многочлен степени $< n$, аппроксимирующий многочлен

$$f = c_0 x^n + \cdots + c_n$$

на отрезке $[a, b]$ по норме

$$|h|_1 = \int_a^b |h(x)| dx.$$

Решение. Берём

$$\bar{U}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} U_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

Искомый многочлен:

$$f - c_0 \bar{U}_n(x).$$

Семинар 8

Многочлен

$$\bar{U}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} U_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

наименее отклоняется от нуля относительно нормы

$$|h|_1 = \int_a^b |h(x)|dx$$

на отрезке $[a, b]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом 1:

$$\bar{U}_n(x) = x^n + \dots$$

Семинар 8

Пример.

$$f(x) = x^3, \qquad x \in [a, b] = [0, 2].$$

Поскольку

$$U_3 = 8x^3 - 4x,$$

то

$$\bar{U}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} U_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right) = x^3 - 3x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Искомый многочлен:

$$f(x) - \bar{U}_n(x) = \frac{1}{2}\left(6x^2 - 5x + 1\right).$$

Семинар 8

Задача Построить многочлен $p(x)$ степени ≤ 3, аппроксимирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по норме

$$\|h\| = \sqrt{\int_a^b \frac{h(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}.$$

Решение. Когда метрика идуцируется скалярным произведением, в данном случае

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

берём ортогональную проекцию на подпространство.

$T_i(x)$ — ортогональный базис подпространства, поэтому **ответ:**

$$p(x) = \lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_3 T_3,$$

где

$$\lambda_j = \frac{\langle f, T_j \rangle}{\langle T_j, T_j \rangle}.$$

Альтернанс Чебышёва

Семинар 8

Задача. Для $f(x) = \sqrt{x}$ найти наилучшее линейное приближение на отрезке $[1, 64]$ в норме $\max_{[1,64]} |f(x)|$.

Воспользуемся **Чебышевским альтернансом**.

Семинар 8

Теорема

Чтобы многочлен $Q_n(x)$ степени n был многочленом наилучшего равномерного приближения непрерывной функции $f(x)$, необходимо и достаточно существования на $[a, b]$ по крайней мере $n+2$ точек

$$x_0 < \ldots < x_{n+1}$$

таких, что

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n\|$$

где $i = 0, \ldots, n+1, \alpha = \pm 1$ одновременно для всех i.

Точки $x_0 < \ldots < x_{n+1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, называются точками чебышёвского альтернанса.

Литература

Бахвалов, Н. С.; Жидков, Н. П.; Кобельков, Г. Н.,
Численные методы,
Глава 4. $ 6 Методы наилучшего равномерного приближения,

Семинар 8

Теорема

. Многочлен наилучшего равномерного приближения непрерывной функции единственен.

Семинар 8

Пример.

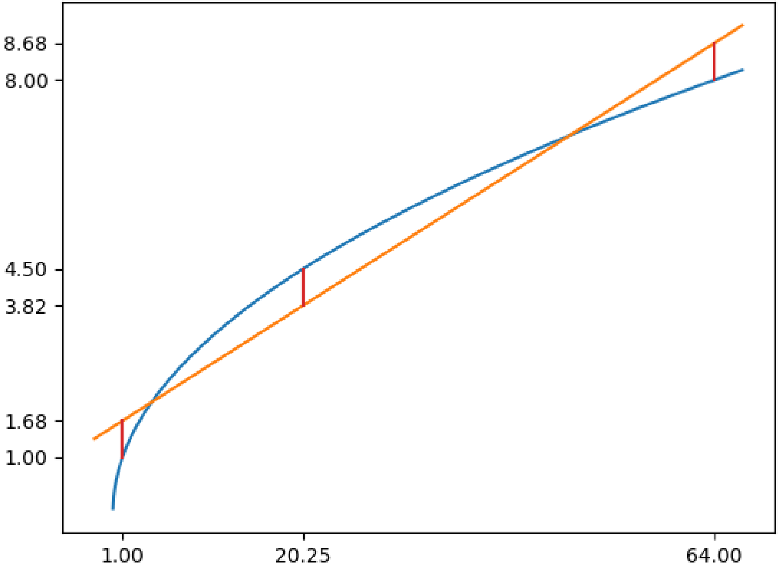
- Приблизим выпуклую функцию на отрезке $[a, b]$ линейной функцией

$$Q(x) = a_0 + a_1 x.$$

- Поскольку функция выпукла, то экстремум у $f(x) - Q(x)$ на отрезке только один $d \in [a, b]$. Поэтому точки альтернанса:

$$x_0 = a, \qquad x_1 = d, \qquad x_2 = b.$$

Семинар 8



Семинар 8

Уравнения на альтернанс Чебышёва:

$$f(a) - (a_0 + a_1 a) = \pm\Delta$$
$$f(d) - (a_0 + a_1 d) = \mp\Delta$$
$$f(b) - (a_0 + a_1 b) = \pm\Delta.$$

Но это 3 уравнения на 4 неизвестных: a_0, a_1, Δ, d. Нужно добавить 4ое уравнение, что d — экстремум:

$$f'(d) - a_1 = 0$$

Семинар 8

$$\begin{aligned}
f(a) - (a_0 + a_1 a) &= \pm\Delta \\
f(d) - (a_0 + a_1 d) &= \mp\Delta \\
f(b) - (a_0 + a_1 b) &= \pm\Delta \\
f'(d) - a_1 &= 0
\end{aligned}$$

Как решать? Вычитая из 3ьго ур-ния 1ое находим a_1:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Потом находим d из

$$f'(d) = a_1.$$

Наконец, складывая 1ое и 2ое уравнение, получаем

$$a_0 = \frac{f(a) + f(d) - a_1(a + d)}{2}.$$

Пример. Функция

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad [a, b] = [1, 64].$$

Решение. Получаем

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{9}.$$

Потом находим d из

$$f'(d) = a_1 \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{81}{4}.$$

Наконец, складывая 1ое и 2ое уравнение, получаем

$$a_0 = \frac{f(a) + f(d) - a_1(a + d)}{2} = \frac{113}{72}.$$

Семинар 8

Ответ: наилучшее линейное приближение функции $\sqrt{x}$ на интервале от 1 до 64:

$$\frac{1}{9}x + \frac{113}{72}.$$

Матричные нормы

Семинар 8

- **Матричные нормы** — это нормы на матрицах + *свойство субмультипликативности:*
$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

- **Индуцированная норма**. Любая норма на $\mathbb{R}^n$ задаёт норму на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax| .$$

Семинар 8

Примеры индуцированных матричных норм:

- Для $|x|_1 = \sum |x_i|$ получаем максимум суммы модулей элементов в столбцах:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- Для евклидовой метрике $|x|_2$ получаем максимальное сингулярное значение:

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A).$$

- Для $|x|_\infty = \max |x_i|$ получаем максимум суммы модулей элементов в строках:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Семинар 8

Пример матричной нормы, НЕ индуцированной из векторной нормы — норма Фробениуса:

$$\|A\|_{\mathsf{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2(A)}.$$

Семинар 8

Задача. Найти все нормы $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\sigma(A)$ для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Семинар 8

Первая норма — сумма модулей элементов в столбцах:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |m_{ij}| \, .$$

Получаем для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

что

$$\|A\|_1 = \max(4, 3, 0) = 4.$$

Семинар 8

Вторая норма — максимальное сингулярное значение

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_{AA^*}}.$$

Получаем:

$$AA^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\det\left(AA^* - \lambda x\right) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3, \qquad \sigma_2 = 2, \qquad \sigma_3 = 0.$$

Ответ:

$$\|A\|_2 = 3.$$

Семинар 8

Третья норма — сумма модулей элементов в строках:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}| \,.$$

Получаем для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

что

$$\|A\|_\infty = \max(2, 3, 2) = 3.$$

Семинар 8

Задача. Докажите, что векторной норме $|\bar{x}|_\infty$ соответствует индуцированная матричная норма $|M\|_\infty$.

Решение. По определению матричной нормы

$$\|A\|_\infty = \max_{|x|_\infty = 1} |Ax|_\infty .$$

Рассматриваемая векторная норма:

$$|x|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| .$$

То есть $\|A\|_\infty$ находится как максимум из

$$\begin{cases} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n| \to \max \\ \max\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) = 1. \end{cases}$$

Делаем все коэффициенты в сумме максимально возможными:

$$x_j = \pm 1, \qquad x_j = \operatorname{sgn}(a_{ij}).$$

Тогда

$$|a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n| = |a_{i1}| + \dots + |a_{in}|.$$

Утверждение доказано:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Семинар 8

Задача. Докажите, что векторной норме $|\bar{x}|_2$ соответствует индуцированная матричная норма $\sigma(M)$.

Решение. По определению матричной нормы

$$\|A\|_2 = \max_{|x|=1} |Ax|_2 .$$

Рассматриваемая матричная норма:

$$|x|_2 = \sqrt{(x,x)}.$$

Семинар 8

Воспользуемся SVD разложением

$$A = U\Sigma V^*.$$

Тогда

$$|Ax|_2^2 = (Ax, Ax) = x^* A^* Ax =$$
$$= x^* V\Sigma^* U^* U\Sigma V^* x = x^* V\Sigma^* \Sigma V^* x.$$

Семинар 8

Поскольку Σ — диагональная матрица,

$$\Sigma^*\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Обозначим $y = V^*x$. Поскольку V — ортогональная матрица

$$|y| = \left|V^*x\right|.$$

Семинар 8

Получаем, что

$$\|A\|_2^2 = \max_{|y|=1} y^* \Sigma^* \Sigma y.$$

То есть $\|A\|_2^2$ находится как

$$\begin{cases} \sigma_1^2 y_1^2 + \dots + \sigma_n^2 y_n^2 \to \max \\ y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1 \end{cases}$$

Поскольку $\sigma_1 \leq \sigma_j$:

$$\sigma_1^2 y_1^2 + \dots + \sigma_n^2 y_n^2 \leq \sigma_1^2 (y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

и равенство достигается при $y_1 = 1, y_j = 0$ при $j \neq 1$.

Утверждение доказано:

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_{A^*A}}.$$

Семинар 8

Задача. Является ли матричной нормой

$$f(A) = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|.$$

Решение. Если $n = 1$, то да. Иначе нет.

Рассмотрим матрицу из одних единиц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$AA = \begin{pmatrix} n & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Получаем

$$n = \|AA\| > 1 = \|A\| \, \|A\|.$$

Значит, это норма, но не матричная.

Семинар 8

Задача. Найти x, y, z, t для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$