МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 16

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

21 мая 2021

Линейное программирование

Семинар 16

Кормен, Т.Х.
Алгоритмы: построение и анализ.,
М.: ООО “И.Д.Вильямс”, 2013. — 1328 с.
Глава 29. Линейное программирование

Семинар 16

Немного истории. “Классика”:

1. *Метод исключения Фурье-Моцкина* (Фурье, 1827).
   Алгоритм решения линейных неравенств.

“XX век”:

1. *Симплекс-метод* (Данциг, 1947).
   Эффективен, но не полиномиален.
2. *Метод эллипсоидов* (Хачиян, 1979).
   Полиномиальный (но на практике не так эффективен, как симплекс-метод).
3. *Метод внутренней точки* (Жадан, 1984)
   Полиномиальный. Может быть эффективнее симплекс-метода.

Семинар 16

LP в Python:

`https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.linprog.html`

Семинар 16

Задача линейного программирования:

- Ищем максимум (или минимум) линейной функции

$$c_1x_1 + \ldots c_nx_n \to \max$$

- На множестве, заданном линейными ограничениями.

  Неравенствами:

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j,$$

  или равенствами:

$$p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n = q_j$$

Семинар 16

Кратко пишем так:

$$\begin{cases} c^T x \to \max \\ Ax \leq b \\ p^T x = q. \end{cases}$$

Семинар 16

Заметим, что область допустимых значений

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ p^T x = q \end{cases}$$

это выпуклый многогранник W.

Точка $x \in W$ — допустимое решение.

Оптимальное решение — это допустимое решение, где **целевая функция**

$$c^T x \to \max .$$

Семинар 16

- Задача неразрешима (infeasible), если нет допустимых решений.

- Задача неограничена (unbounded), если есть допустимые, но нет оптимального решения.

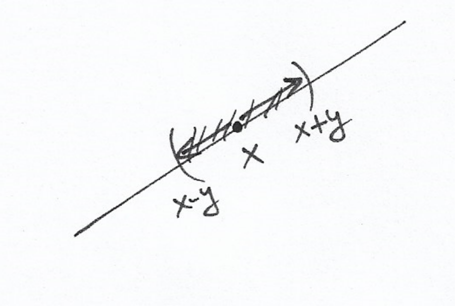
Семинар 16

Упражнение. Приведите пример задачи линейного программирования, для которой допустимая область является неограниченной, но оптимальное целевое значение конечно.

Семинар 16

x — вершина выпуклого многогранника W, если $\nexists\, y$ т.,ч.

$$x + y \in W, \qquad x - y \in W.$$



Семинар 16

Утвреждение

Пусть

- W — выпуклый многогранник,
- в W нет ни одной прямой l,
- целевая функция φ ограничена на V.

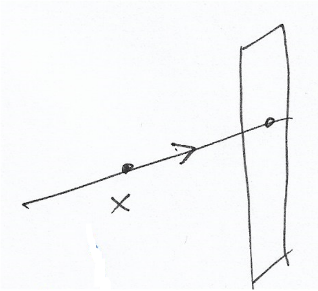
Тогда $\forall x \in W$ существует вершина $y \in W$ т.,ч.

$$\varphi(y) \geq \varphi(x).$$

Семинар 16

Доказательство.[1]

- Т.к. x — не вершина, существует часть прямой в W, проходящая через x.
- Идём по ней в сторону неубывания φ, пока не упрёмся в грань.
- И т.д., повторяем процесс. Размерность грани убывает, в итоге попадём в вершину y.



[1] Всё можно строго формализовать.

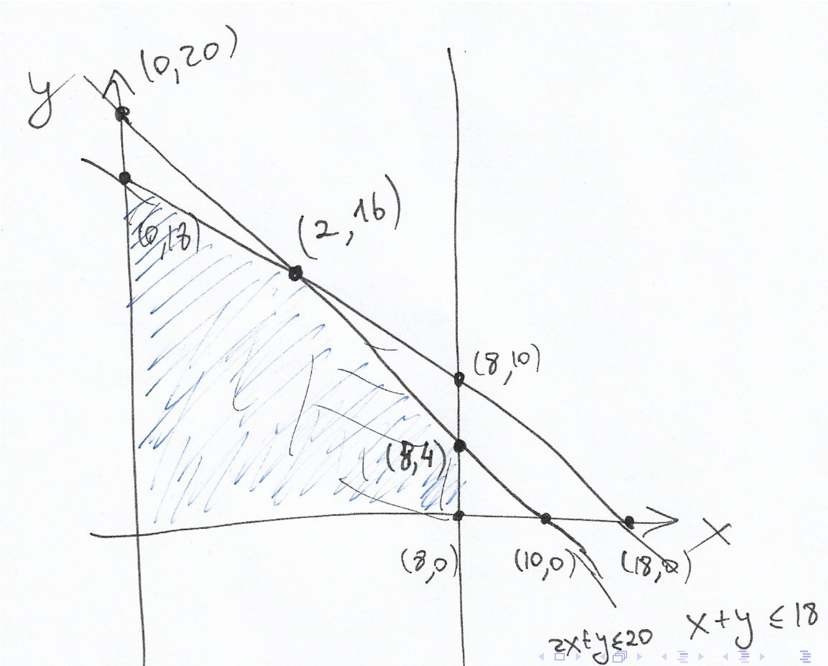
Семинар 16

Рассмотрим **пример:**

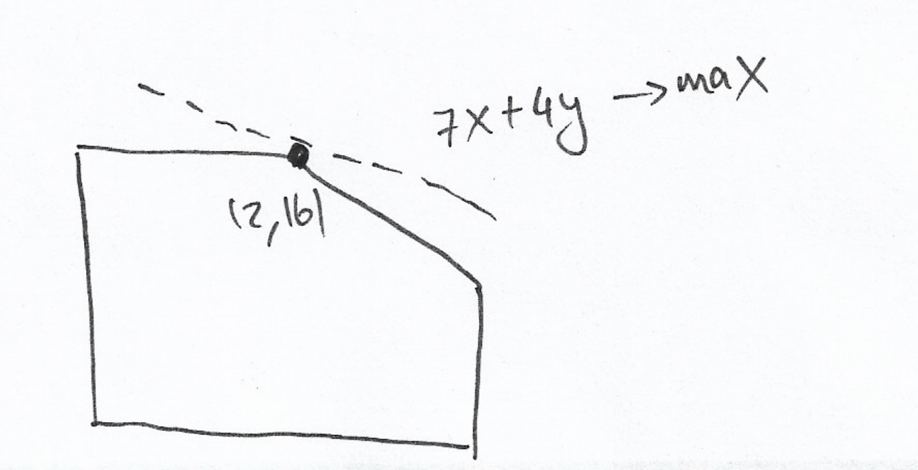
$$\begin{cases} 7x + 4y \to \max \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 18 \\ x \leq 8 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Можно убедиться, что максимум достигается в вершине $(2, 16)$ (и равен 78).

Семинар 16



Семинар 16



Примеры задач LP

Семинар 16

1. “Задача о диете”.
2. Задача о рюкзаке[2].

[2] см. Кормен “Алгоритмы”, Глава 16. Жадные алгоритмы

Пример 3. Максимальный поток:

G — ориент. граф

$c(u,v) \geq 0$ — пропуск. способн. ребра

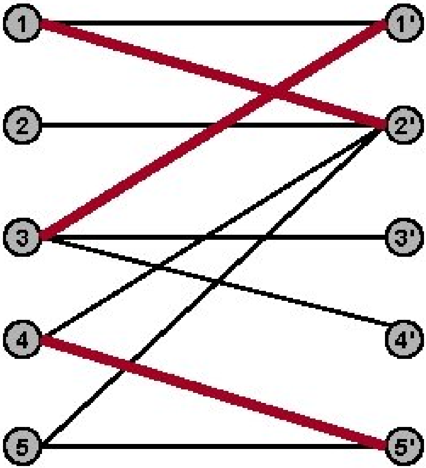
Семинар 16

$f(u,v)$ - поток через ребро (u,v)

$$\begin{cases} \sum\limits_{v} f(s,v) \to \max \\ f(u,v) \leq c(u,v) \\ f(u,v) = -f(v,u) \\ \sum\limits_{v \in V} f(u,v) = 0, \quad \text{если } u \neq s,t. \end{cases}$$

Семинар 16

Пример 4. Максимальные паросочетная в двудольном графе:



$$x_e = \begin{cases} 0, & \text{если нет ребра } e \\ 1, & \text{если есть} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{e \in E} x_e \to \max \\ x_e \geqslant 0 \\ \sum\limits_{e \in E_u} x_e \leq 1 \end{cases}$$

E_u — инцинд. верш. и рёбра

Канонический вид, стандартный вид

Семинар 16

Стандартный вид задачи линейного программирования:

$$c^T x \to \max$$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Как привести к стандартному виду?

1. *От минимизации переходим к максимизации* (меняем знак).

$$c^T x \to \min \quad \Leftrightarrow \quad -c^T x \to \max.$$

2. *Делаем все переменные неотрицательными.*

$$x = x^+ - x^-, \quad \text{где } x^+, x^- \geq 0.$$

Семинар 16

3. *Избавляемся от равенств.*

$$Ax = b, \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} Ax \le b \\ Ax \ge b. \end{cases}$$

4. *Меняем знак неравенств.*

$$Ax \ge b \qquad \Leftrightarrow \qquad -Ax \le -b.$$

Семинар 16

Упражнение. Привести к стандартной форме

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 - x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Семинар 16

Канонический вид задачи линейного программирования:

$$c^T x \to \max$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Семинар 16

Как привести к каноническому виду?

Вводим вспомогательные переменные (slack variables).

Заменяем каждое неравенство

$$\sum a_{ij}x_j \leq b_i$$

на

$$\begin{cases} s_i = b_i - \sum a_{ij}x_j \\ s_i \geq 0. \end{cases}$$

Семинар 16

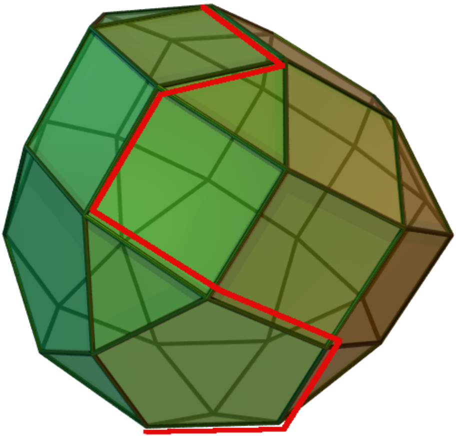
Упражнение. Привести к канонической форме

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 \ge 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Симплекс-метод “для чайников”

Семинар 16

Идея симплекс-метода: переходить по рёбрам от вершине к вершине, пока не найдём решение — оптимальную вершину.



Симплекс-метод (на примере)

Прежде всего, стан. форма $\longrightarrow$ канон. форма

$$7x+4y \to max \qquad\qquad 7x+4y \to max$$

$$\begin{cases} 2x+y \le 20 \\ x+y \le 18 \\ x \le 8 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+y+s_1 = 20 \\ x+y+s_2 = 18 \\ x+s_3 = 8 \\ x, y, s_i \ge 0. \end{cases}$$

Семинар 16

Обозначим

$$p = 7x + 4y$$

Составляем таблицу:

p	x	y	s1	s2	s3	
1	-7	-4	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	20
0	1	1	0	1	0	18
0	1	0	0	0	1	8

Далее повторяем, пока в нижней строке есть элементы < 0.

1. Находим наименьший элемент в верхней строке. Он лежит в главном столбце.

p	x	y	s1	s2	s3	
1	-7	-4	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	20
0	1	1	0	1	0	18
0	1	0	0	0	1	8

Семинар 16

2. Делим все свободные члены b_i на элементы главного стобца a_i.
   Если $a_i \leq 0$ пишем значение "бесконечность"[3].
   Главная строка – где полученное значение минимально.

p	x	y	s1	s2	s3		
1	-7	-4	0	0	0	0	
0	2	1	1	0	0	20	10
0	1	1	0	1	0	18	18
0	1	0	0	0	1	8	8

[3] это ограничение до чего можно менять параметр, чтобы существовало решение

Семинар 16

3. Далее “a la метод Гаусса”:
   - умножаем главную строку на константу — делаем коэффициент в главном стобце $= 1$.
   - делаем остальные коэффициенты в главном столбце $= 0$. Из каждого ряда вычитаем главный, умноженный на константу.

p	x	y	s1	s2	s3	
1	-7	-4	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	20
0	1	1	0	1	0	18
0	1	0	0	0	1	8

p	x	y	s1	s2	s3	
1	0	-4	0	0	7	56
0	0	1	1	0	-2	4
0	0	1	0	1	-1	10
0	1	0	0	0	1	8

Семинар 16

p	x	y	s1	s2	s3		
1	-7	-4	0	0	0	0	
0	2	1	1	0	0	20	10
0	1	1	0	1	0	18	18
0	1	0	0	0	1	8	8

p	x	y	s1	s2	s3		
1	0	-4	0	0	7	56	
0	0	1	1	0	-2	4	4
0	0	1	0	1	-1	10	10
0	1	0	0	0	1	8	inf

p	x	y	s1	s2	s3		
1	0	0	4	0	-1	72	
0	0	1	1	0	-2	4	inf
0	0	0	-1	1	1	6	6
0	1	0	0	0	1	8	8

p	x	y	s1	s2	s3	
1	0	0	3	1	0	78
0	0	1	-1	2	0	16
0	0	0	-1	1	1	6
0	1	0	1	-1	0	2

Семинар 16

Как только процесс остановится:

- берём в столбцах только с одной 1 значение из правой части.
- остальные коэффициенты $= 0$.

p	x	y	s1	s2	s3	
1	0	0	3	1	0	78
0	0	1	-1	2	0	16
0	0	0	-1	1	1	6
0	1	0	1	-1	0	2

Получили искомое решение $(2, 16)$.

Двойственность

Двойственная задача

Семинар 16

Двойственность

Пусть A - это $m \times n$ матрица.

$$(P)\begin{cases} c^T x \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

прямая задача

(станд. форма ~~канонич. вид~~)

$x \in \mathbb{R}^n$

$$(D)\begin{cases} b^T y \to \min \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

двойств. задача

$y \in \mathbb{R}^m$

Семинар 16

	$c^T x \to \max$	$b^T y \to \min$
(m условий)	$Ax \le b$	$y \ge 0$, $y \in \mathbb{R}^m$
(n условий)	$x \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$	$A^T y \ge c$

Добавление. Двойственность в общем виде

Семинар 16

Этот материал взят из лекций М. Бабенко (“Линейное программирование” на YouTube, “Комбинаторная оптимизация” в ШАД).

Семинар 16

Двойственность

$$
(P)\quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n : \quad x_i \geqslant 0, \quad x_i \leqslant 0, \quad x_i - \text{произв.} \\ Ax \lesseqgtr b \\ c^T x \longrightarrow \max/\min \end{cases}
$$

прямая задача

$$
(D)\quad \begin{cases} y \in \mathbb{R}^m : \quad y_j \geqslant 0, \quad y_j \leqslant 0, \quad y_j - \text{произв.} \\ A^T y \lesseqgtr c \\ b^T y \longrightarrow \min/\max \end{cases}
$$

двойственная задача

Семинар 16

Двойственная задача LP (общий случай)

В общем случае задача LP:

найти $x \in \mathbb{R}^n$

условие: $x_i \geq 0$, $x_i \leq 0$, x_i - нет огранич.] 3 возможных ограничения на коорд. x_i

каждое условие

$Ax \lesseqgtr b$] либо $>$, либо $<$, либо $=$

функционал $c^T x \to max/min$] либо ищем max, либо min.

Пусть A - это $m \times n$ матрица.

Правила построения двойств. задачи

1) Меняем $\min \longleftrightarrow \max$

$c^T x \longrightarrow \max/\min$ vs $b^T y \longrightarrow \min/\max$

Семинар 16

2) ~~Рав-ва~~ Условия $Ax \lessgtr b$ соотв. услов. $y \in \mathbb{R}^m$: $y_j \geq 0$, $y_j \leq 0$ или y_j - произв.

Их по m штук.

Рав-во $(Ax)_j = b_j \longleftrightarrow y_j$ - произв.

2а) Если $c^T x \to \max$

$$(Ax)_j \leq b_j \longleftrightarrow y_j \geq 0$$

$$(Ax)_j \geq b_j \longleftrightarrow y_j \leq 0$$

2б) Если $c^T x \to \min$

$$(Ax)_j \geq b_j \longleftrightarrow y_j \geq 0$$

$$(Ax)_j \leq b_j \longleftrightarrow y_j \leq 0$$

3) Условия $x \in \mathbb{R}^n$: $x_i \geq 0$, $x_i \leq 0$ или x_i - произв. соотв. $A^T y \lessgtr c$

Их n штук.

x_i — произв. $\longleftrightarrow$ $(A^T y)_i = c_i$

3а) Если $c^T x \longrightarrow \max$ (и $b^T y \longrightarrow \min$)

$x_i \geqslant 0 \longleftrightarrow (A^T y)_i \leq b_i$

$x_i \leq 0 \longleftrightarrow (A^T y)_i \geqslant b_i$

3б) Если $c^T x \longrightarrow \min$ (и $b^T y \longrightarrow \max$)

Сильная и слабая двойственность

Семинар 16

Теорема

(Слабая двойственность) Для любых $\bar{x}$ — решения (P) и $\bar{y}$ — решения (D) выполнено

$$c^T\bar{x} \le b^T\bar{y}.$$

Доказательство:

$$c^T\bar{x} \le (A^T\bar{y})^T\bar{x} = (Ax)^T y \le b^T y.$$

Семинар 16

Следствие:(из слабой двойственности)

- (P) неограниченна $\Rightarrow$ (D) неразрешима,
- (D) неограниченна $\Rightarrow$ (P) неразрешима,

Семинар 16

Упражнение. Проверить, что для следующей задачи и (P), и (D) неразрешимы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \to \max \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Теорема

(Сильная двойственность) Если существует оптимательное решение $\bar{x}$ для (P), то

- существует и оптимальное решение $\bar{y}$ для (D)
- достигается равенство
$$c^T\bar{x} = b^T\bar{y}.$$

Интересные примеры двойственности

Семинар 16

$$\text{Комбинаторная задача} \longmapsto \underset{(\text{NP-трудная})}{\overset{x_i \in \mathbb{Z}}{\text{ILP}}} \longmapsto \overset{x_i \in \mathbb{R}}{\text{LP задача}} \longmapsto \text{Двойств. задача} \longmapsto \text{Решение} \,/\, \text{Другая комбинаторная задача}$$

Семинар 16

Двойственность:

- Максимальный поток $\rightarrow$???
- Максимальное паросочетание в двудольном графе $\rightarrow$???

Двойственность:

- Максимальный поток $\leftrightarrow$ Минимальный разрез.
- Максимальное паросочетание $\leftrightarrow$ Наименьшее вершинное покрытие.

Семинар 16

Теорема Кёнига

В любом двудольном графе число рёбер в наибольшем паросочетании равно числу вершин в наименьшем вершинном покрытии.