Линейная алгебра в приложениях. Задачи к семинарам

1 Псевдообратные матрицы

1.1 Полезные формулы

Псевдообратная матрица:

1. Если A — квадратная и обратимая
$$A^+ = A^{-1}$$

2. Пусть столбцы A линейно независимы. Тогда A^*A обратима и
$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*. \tag{1}$$

3. Пусть строчки A линейно независимы. Тогда AA^* обратима и
$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}. \tag{2}$$

4. Пусть A — матрица размера $m \times n$ ранга k. Рассмотрим разложение полного ранга (скелетное разложение)
$$A = FG,$$
где
   - F — матрица размера $m \times k$ (столбцы линейно независимы)
   - G — матрица размера $k \times n$ (строки линейно независимыми).

   Тогда:
$$A^+ = G^+F^+$$
   Иными словами,
$$A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*.$$

1.2 Упражнения к Семинару 1

Задача 1.1. Вычислите
$$(1 \quad 0)^+.$$

Задача 1.2. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+.$$

Задача 1.3. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^+.$$

Задача 1.4. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^+.$$

Задача 1.5. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^+.$$

Задача 1.6. Пусть A — произвольная $m \times n$ матрица. Преобразуем A к каноническому виду (т.е. к приведённому ступенчатому виду по строкам) B. Пусть $i_1, \ldots, i_r$ — номера столбцов B с ведущими коэффициентами. Рассмотрим матрицы:

- F составлена из столбцов A с номерами $i_1, \ldots, i_r$,
- G составлена из ненулевых строк B.

Доказать, что
$$A = FG,$$
и что это разложение полного ранга (скелетное разложение) матрицы A.

Задача 1.7. Найти разложение полного ранга (скелетное разложение)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 1.8. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^+.$$

Задача 1.9. Пусть F_{ij} матрица размера $n \times n$ такая, что её элементы в i-той строке и j-том столбце равны 1, а все остальные элементы равны 0. Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу.

Задача 1.10. Докажите:

1. $\operatorname{Im}(AA^+) = \operatorname{Im}(AA^*) = \operatorname{Im} A$.
2. $\operatorname{Ker}(AA^+) = \operatorname{Ker}(AA^*) = \operatorname{Ker} A^*$.
3. $\operatorname{Im} A^+ = \operatorname{Im} A^*$.
4. $\operatorname{Ker} A^+ = \operatorname{Ker} A^*$.
5. $\operatorname{Im} A^+ = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.
6. $\operatorname{Ker} A^+ = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

2 МНК и SVD разложение

Задача 2.1. Найти решение наименьшей длины системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 7, \\ 3x + 4y - z = 6. \end{cases}$$

Задача 2.2. Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших квадратов найти решение наименьшей длины

$$\begin{cases} x - 3y + t = -1, \\ 2y - 3z = -1, \\ x - 2y + z + t = 0, \\ x - 2z + t = 8. \end{cases}$$

Задача 2.3. Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц. Если $B = AU$, где $U^* = U^{-1}$ — унитарная матрица, а A — произвольная матрица порядка n, то

$$B^+ = U^+ A^+ = U^* A^+.$$

Задача 2.4. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.5. Найти SVD для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.6. Найти псевдообратную матрицу A^+, используя SVD:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 9 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.7. Предсказать курс доллара:

дата	23.01	26.01	27.01	28.01	29.01
курс	74.3615	74.8569	75.6354	75.0400	76.1854

3 Аппроксимационные многочлены и сплайны

Задача 3.1. Приблизить следующую функцию $y(x)$ многочленом второй степени по методу наименьших квадратов

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	-0.8	1.6	2.3	1.5

Задача 3.2. Известно, что $f(x)$ — многочлен третий степени такой, что

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -3 \\ f(2) = 17 \\ f(-2) = -19. \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

Задача 3.3. Найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -1. \end{cases}$$

Задача 3.4. Приблизить $\sin x$ сплайном $S(x)$ степени два с узлами $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Найти $S\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Задача 3.5. На плоскости 100 точек, любые 4 из них лежат на параболе виде $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что тогда все 100 будут лежать на одной и той же параболе.

Задача 3.6. Доказать, что кривая Безье касается первого и последнего отрезка ломаной.

Задача 3.7. Построить кривую Безье:

$$P_0(-1,-1)$$
$$P_1(1,3)$$
$$P_2(2,4)$$
$$P_1(7,-1)$$

4 Метрики

Задача 4.1. Будет ли метрикой на $\mathbb{R}$ функция $\rho(x, y) =$

1. $|x^2 - y^2|$,
2. $\sin(x - y)$,
3. $|e^x - e^y|$.

Задача 4.2. Доказать, что шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством. То есть доказать, что если x, y принадлежат шару, то и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит шару.

Задача 4.3. Существует ли убывающая последовательность непустых замкнутых огранченных множеств с пустым пересечением (в произвольном метрическом пространстве).

Задача 4.4. $B(x, y) = \{x^2 + axy + 4y^2 \leq 1\}$. При каких a на множестве $\mathbb{R}^2$ существует норма ν такая, что $B(x, y)$ — единичный шар относительно неё?

Найдите в этом случае $\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 Многочлены Лежандра

Многочлены Лежандра (формула Родрига):

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)}, k = 1, \ldots, n$$

Задача 5.1. 1. Проверить ортогональность $P_2(x)$ и $P_3(x)$ относительно

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

2. Найти $\|P_n(x)\|$

Задача 5.2. Найти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ на $[-1, 1]$:

$$\left\| f - \sum_{k=0} 2^2 \alpha_k P_k(x) \right\| \to \min.$$

Функции:

1. $f_1(x) = xe^{-x}$,
2. $f_2(x) = x^3$,

Задача 5.3. Выразить скалярное произведение через длину вектора в эрмитовом простанстве.

6 Многочлены Чебышёва

6.1 Теория

Многочлены Чебышёва 1го рода $T_n(x)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \ .$$

На отрезке $[-1, 1]$ они задаются формулой

$$T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

$T_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

А именно
$$\langle T_m, T_n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Многочлены Чебышёва 2го рода $T_n(x)$ определяются рекуррентным соотношением:
$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)\ . \end{aligned}$$

6.2 Упражнения

Задача 6.1. **Задача**. Введём на множестве многочленов $\mathbb{R}[x]_{<N}$ степени менее N от одной переменной скалярное произведение
$$\langle f, g\rangle_N = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i)g(x_i),$$
где $x_0, \ldots, x_{N-1}$ — нули многочлена Чебышёва степени N. Докажите, что многочлены Чебышёва $T_0, \ldots, T_{N-1}$ ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причём
$$\langle T_j, T_j\rangle_N = \frac{N}{2}$$
при $j > 0$ и $\langle T_0, T_0\rangle_N = N$.

1. Пусть f — произвольная действительная функция. Предположим, что $P(x)$ — такой многочлен степени менее n, что
$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle T_j, f\rangle_n}{\langle T_j, T_j\rangle_n} T_j(x_m)$$
для всех $m = 0, \ldots, n-1$. Докажите, что $P(x)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа функции f с узлами в точках $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

6.2.1 Аппроксимация функций

Задача 6.2. Построить многочлен степени ≤ 2, аппроксимирующий $f(x) = 2x^3 + x^2$ на отрезке $[1, 3]$ по норме $\max_{[1,4]} |f(x)|$.

Задача 6.3. Построить многочлен степени ≤ 2, аппроксимирующий $f = x^3$ на отрезке $[0, 2]$ по норме
$$|h| = \int_0^2 |h(x)| dx.$$

Задача 6.4. Для $f(x) = \sqrt{x}$ найти наилучшее линейное приближение на отрезке $[1, 64]$ в норме $\max_{[1,4]} |f(x)|$.

Указание: Это задача на альтернанс Чебышёва.

7 Матричные нормы

Задача 7.1. Докажите, что векторной норме $|\bar{x}|_\infty$ соответствует индуцированная матричная норма $|M\|_\infty$.

Задача 7.2. Докажите, что векторной норме $|\bar{x}|_2$ соответствует индуцированная матричная норма $\sigma(M)$.

Задача 7.3. Является ли матричной нормой

$$f(A) = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}| \,.$$

Задача 7.4. Докажите, что

$$A^{-1} \ge \frac{\|E\|}{\|A\|}.$$

Задача 7.5. Найти все нормы $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\sigma(A)$ для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.6. Найти x, y, z, t для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь слева изображена единичная сфера для метрики. В первых двух случаях нужно найти диаметр у образа единичный сферы (максимальное расстояние между противоположными точками).

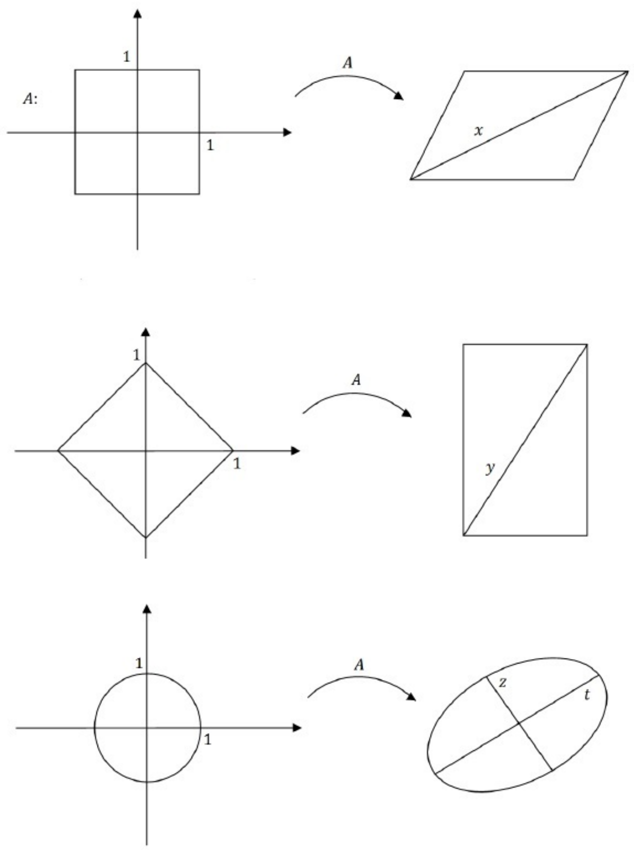


Рис. 1: Рис.

8 Приближения матриц

Задача 8.1. Найти наилучшее приближение ранга 2 по фробениусовой норме для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.2. Найти наилучшее приближение B_1 ранга 1 для матрицы B в норме $\|\cdot\|_2$ и найти $\|B - B_1\|_2$, где

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}.$$

9 Оценка погрешности решений

Задача 9.1. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Элементы главной диагонали могут меняться на ε_1, а элементы правой части на ε_2. Оценить возможное изменение решения для нормы

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^* A\right)}.$$

Задача 9.2. Оцените относительную погрешность приближённого решения $(1, 1)$ системы $Ax = b$ в норме $|\cdot|_1$ с помощью числа обусловленности матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 & -0.1 \\ 5.2 & -2.9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.3. Найдите приближенно обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и оцените погрешность приближения относительно равномерной нормы $\|\cdot\|_\infty$, если элементы матрицы A известны с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

9.1 Теоретические оценки

Задача 9.4. Доказать, что

$$\delta A^{-1} \le \frac{\chi(A)\delta A}{1 - \chi(A)\delta A}.$$

Замечание. Иногда эту огрубляют до

$$\delta A^{-1} \le \chi(A)\delta A.$$

Задача 9.5. Доказать, что если

$$\begin{gathered} (A + \Delta A)\,\hat{x} = b + \Delta b, \\ Ax = b, \end{gathered}$$

то

$$\delta x \le \frac{\chi(A)}{1 - \delta A \cdot \chi(A)} \left(\delta b + \delta A\right),$$

для малых $\delta B, \delta A, \delta x$.

10 Круги Гершгорина

Задача 10.1. Нарисовать круги Гершгорина для матрицы A и с их помощью оценить собственные значения. Вычислить собственные значения и сравнить результаты

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.2. С помощью теоремы Гершгорина нарисовать область, где находятся собственные значения матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.3. Доказать, что определитель матрицы A не равен 0. Нарисовать наименьшую область, содержащую собственные значения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \cos x & \cos^2 x \\ 0 & 5 & \sin^2 x \\ 3\sin^2 x & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

при $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

Задача 10.4. Доказать, что в предыдущих трёх задачах все собственные значения — положительные действительные числа и оценить их.

Указание: если $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ — собственное значение матрицы A, то $\bar{\lambda}$ — тоже её собственное значение.

11 Итеративные методы

Задача 11.1. Решить СЛУ методом итераций:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 31; \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 38, \end{cases}$$

определить номер итерации, после которой погрешность приближения по каждой координате не превосходит 0.01 и найдите соответствующее приближённое решение. Начните с

$$x_0 = (0, 0, 0).$$

Задача 11.2. Решить СЛУ методом Зейделя:

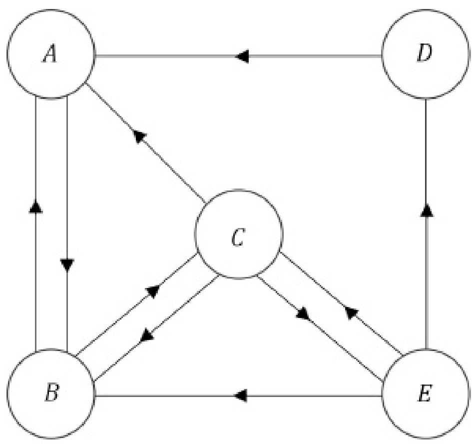
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 35; \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 17; \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 25; , \end{cases}$$

Задача 11.3. Привести СЛУ к виду, удобному для итераций:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -1; \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 39; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14; , \end{cases}$$

12 Положительные матрицы

Задача 12.1. Найти самую влиятельную вершину в графе: .



Задача 12.2. Разложима ли матрица A?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.3. Разложима ли матрица B? Найти λ и v из теоремы Перрона

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.4. Найти самую влиятельную вершину в ориентированном графе с помощью алгоритма PageRank с $\beta = 0.15$, где матрица смежности графа равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.5. Доказать, что следующие критерии неразложимости матрицы $A \geq 0$ эквивалентны:

- Для любых i, j существует последовательность
$$i = i_0, i_1, \dots i_k = j, \qquad a_{i_k i_{k+1}} > 0.$$
- Для любых i, j существует $m < n$ т.,ч.
$$(A^m)_{ij} > 0.$$
- $(E + A)^{n-1} > 0$, где n — порядок матрицы.

13 Вычисление характеристического многочлена

13.1 Метод Данилевского (вычисление характеристического многочлена)

Задача 13.1. Методом Данилевского найти характеристический многочлен

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.2 Метод Крылова (вычисление минимального многочлена)

Задача 13.2. Методом Крылова найти минимальный многочлен

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13.3 Метод Фадеева-Леверрье

Задача 13.3. Методом Фадеева-Леверрье найти характеристический многочлен и обратную матрицу для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

14 Вычисление собственных значений

14.1 Метод вращения и метод Якоби

Задача 14.1. Найти собственные векторы и собственные значения методом вращения

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 14.2. Найти собственные векторы и собственные значения методом Якоби

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица удовлетворяет условию $A^* = A$, что гарантирует, что у неё есть диагональная форма.

14.2 QR-алгоритм

Задача 14.3. При помощи QR-алгоритма найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

14.3 Степенной метод (Метод итераций)

Задача 14.4. Методом итераций найти собственные значения и собственные векторы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

15 Функции от матриц

15.1 Вычисление функций от матрицы

Задача 15.1. Дана жорданова форма

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $f(A)$ для следующих функций:

1. $f(\lambda) = \lambda^{100}$.

2. $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

3. $f(\lambda) = e^{c\lambda}$.

Задача 15.2. Найти $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача 15.3. Найти e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

15.2 Решение линейных ОДУ

Задача 15.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1, \qquad x_1\big|_{t=0} = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, \qquad x_2\big|_{t=0} = 1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3, \qquad x_3\big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

16 Линейное программирование

Задача 16.1. Решить задачу ЛП и найти “теневые цены”, отвечающие каждому ограничению.

$$1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

17 Базис Грёбнера

Задача 17.1. Решить с помощью базисов Грёбнера систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x^2z - 2xz = 0 \\ x^2 + 2yz - 3 = 0 \\ x^4 - y^2z^2 = 0 \end{cases}$$

Задача 17.2. Найти базис Грёбнера

$$\begin{cases} f_1 = x^3y + 2xy^3 - 3x^2y^2 \\ f_2 = xy^2 - 2y^2 + x - 1 \\ f_3 = x^4 \end{cases}$$

и решить систему уравнений $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.