МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 17

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов

(*ВШЭ*)

28 мая 2021

Материал прошлых семинаров

1. Материал прошлых семинаров
   - Положительные матрицы
   - Продуктивные матрицы
   - Линейное программирование
2. Базис Грёбнера.

Положительные матрицы

Семинар 17

Задача. Найти самую влиятельную вершину в ориентированном графе с помощью алгоритма PageRank с $\beta = 0.15$, где матрица смежности графа равна

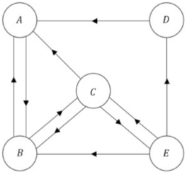
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Семинар 17

Изменим договорённость. Будем считать, что из вершины i выходит ребро в вершину j, если в строке i на j-том месте стоит 1. То есть матрица инциндентности "*пишется по строчкам*".
Иными словами, матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует граф



Решение. Составляем матрицу P — транспонируем A и делим каждый столбец на сумму чисел в нём.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге сумма чисел в каждом столбце P должна равняться 1:

$$(1, \ldots, 1)P = (1, \ldots, 1).$$

Семинар 17

Далее, считаем dampling factor $= 1 - \beta$.

Берём матрицу

$$P_\beta = \frac{\beta}{n} \cdot 1_{n\times 1} + (1-\beta)\cdot P,$$

где n — число вершин в графе, $1_{n\times 1}$ — матрица из одних единиц.

Семинар 17

Находим PageRank для вершин — итеративно применяем

$$P_\beta^m \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \qquad m = 1, \dots,$$

пока процесс “не стабилизируется”. Получаем набор рангом $r_1, \dots, r_n$. Искомая вершина та, которой соответствует наибольшее число — ранг r_i.

Продуктивные матрицы

1. Материал прошлых семинаров
   - Положительные матрицы
   - Продуктивные матрицы
   - Линейное программирование
2. Базис Грёбнера.

Семинар 17

Матрица A продуктивна, если $A \geq 0$ и существует вектор $x > 0$ т.,ч.

$$Ax < x.$$

Утверждение

Матрица A продуктивна $\Leftrightarrow$ $E - A$ обратима и $(E-A)^{-1} \geq 0$.

Следствие. Неразложимая матрица $A \geq 0$ продуктивна $\Leftrightarrow$ её собственное значение Фробениуса-Перрона $\lambda_A < 1$.

Семинар 17

Задача. Рассмотрим национальную экономику, производственные процессы в которой разукрупнены до уровня 2 секторов производства. Соблюдается постоянство удельного выпуска при постоянных пропорциях затрат независимо от масштабов производства. Информация о промежуточных затратах и валовом выпуске представлена в таблице.

	A	B	Total Output
A	2	1	10
B	3	4	10

Найдите вектор конечного спроса. Постройте матрицу расходных (технологических) коэффициентов. Вычислите леонтьевскую обратную для данной экономики. Выясните, является ли модель Леонтьева, представленная в данной задаче, продуктивной.

Семинар 17

Указания. Фактичекси у нас задана 2×2 матрица P и вектор b в последнем столбце.

Конечный спрос — то, что останется от полного производства после всех издержек, т.е. $b - P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Матрица расходных коэффициентов C — матрица отношений (p_{ij}/b_i) (делим по строчкам).

Леонтьевская матрица — это $(E - C)^{-1}$.

Семинар 17

Задача. Решить задачу ЛП и найти "теневые цены", отвечающие каждому ограничению.

$$1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Замечание. "Теневые цены" — это переменные двойственной задачи. Т.е. нужно также решить двойственную задачу.

Семинар 17

Решение:

1. Рассматриваем двойственную задачу:

$$3y_1 + 2y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -1y_1 + 1y_2 \leq 1 \\ 1y_1 + 1y_2 \leq 3 \\ 1y_1 - 1y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Находим допустимое множество решений двойственной задачи. Это пятиугольник с вершинами

$$(0,0) \qquad (0,1) \qquad (1,2) \qquad (2,1) \qquad (1,0).$$

4. Решаем двойственную задачу — находим вершину, где достигается максимум. Это вершина $(2,1)$ и максимум равен 8.

Семинар 17

3. Применяем теорему о дополняющей нежесткости

$$y_i \cdot ((Ax)_i - b_i) = 0,$$
$$x_j \cdot ((A^T y)_j - c_j) = 0.$$

Иными словами, если где-то строгое неравенство $(A^T y)_j < c_j$, то соответствующая переменая $x_j = 0$.

В данном случае для точки $(2, 1)$ выполнено:

$$\begin{cases} -1y_1 + 1y_2 < 1 \\ 1y_1 + 1y_2 = 3 \\ 1y_1 - 1y_2 = 1. \end{cases}$$

Строгое неравенство в первом уравнении, поэтому

$$x_1 = 0.$$

Семинар 17

4. Подставляем $x_1 = 0$ в исходную задачу:

$$1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решением её (например графическим методом — перебираем вершины многоугольника). Получаем ответ:

$$min = 8, \qquad (x_1, x_2, x_3) = (0, 2.5, 0.5).$$

Базис Грёбнера

Семинар 17

Аржанцев И. В
Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений.,
М.: МЦНМО, 2003. — 68 с.

Семинар 17

Как решать полиноминальные уравнения? Например

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Будем искать решения над $\mathbb{C}$.

Семинар 17

Идея: можно добавить уравнений.

Введём понятие идеала I, порождённого многочленами $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Это всевозможные суммы вида

$$I = \left\{ \quad f_1 h_1 + \ldots f_m h_m, \quad \middle| \quad h_i \in F[x_1, \ldots, x_n \right\}].$$

Обозначение:

$$I = (f_1, \ldots, f_m)\,.$$

Семинар 17

Если идеалы совпадают $(f_1, \ldots, f_m) = (g_1, \ldots, g_k)$, то системы

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \ldots \\ f_m = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} g_1 = 0 \\ \ldots \\ g_k = 0 \end{cases}$$

эквивалентны.

Семинар 17

Введём понятие старшего члена многочлена $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Лексикографический порядок.

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \succ x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

если

$$i_1 = j_1, \qquad i_k = j_k, \qquad i_{k+1} > j_{k+1}.$$

Семинар 17

Обозначим старший коэффицент многочлена f за $\operatorname{lt}(f)$.

Хорошее свойство: *старший член произведения — произведение старших членов*

$$\operatorname{lt}(fg) = \operatorname{lt}(f)\operatorname{lt}(g)$$

Семинар 17

Опишем алгоритм Бухбергера построения базиса Грёбнера.

Изначально дан набор полиномов

$$f_1, \ldots, f_m.$$

Мы строим базис идеала

$$I = (f_1, \ldots, f_m),$$

добавляя на каждом шаге многочлен (если на этом шаге базис ещё не построем).

Семинар 17

1. Изначально за базис Грёбнера берём данные многочлены
$$G = \{f_1, \ldots, f_m\}.$$
2. Перебираем пары $f_i, f_j \in G$. Пусть их старшие члены g_i и g_j.
3. Строим по f_i, f_j их S-полином:
$$S_{ij} = \frac{\text{НОК}(g_i, g_j)}{g_i} f_i - \frac{\text{НОК}(g_i, g_j)}{g_j} f_j.$$
Мы берём такую комбинацию, что старший член сокращается.

Семинар 17

4. Редуцируем S-полином S_{ij}: “убиваем” старший коэффициент заменами

$$S_{ij} \to S_{ij} - Q \cdot f_k,$$

где Q — одночлен. Редуцируем, пока это возможно. Если итоговый S_{ij} не 0, то добавляем его в G.

5. Повторяем предыдущие шаги, пока не перебрали все многочлены из G (и Gне перестал увеличиваться).

6. Рано или поздно алгоритм закончится. Итоговое G и есть базис Грёбнера.

Семинар 17

Задача. Найти базис Грёбнера

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Семинар 17

- Находим S-полином S_{12}. Полиномы
$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2 = x + y - z$$
Старшие коэффициенты
$$l(f_1) = x^2, \qquad l(f_2) = x.$$
Их НОК x^2, поэтому
$$S_{12} = \frac{\text{НОК}(g_1, g_2)}{g_1} f_1 - \frac{\text{НОК}(g_1, g_2)}{g_2} f_2 =$$
$$= f_1 - x f_2 = -xy + xz + y^2 + z^2.$$

Семинар 17

Итак для многочленов

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2 = x + y - z \qquad f_3 = y + z^2$$

мы нашли

$$S_{12} = -xy + xz + y^2 + z^2.$$

Начинаем редуцировать S_{12}.
"Убиваем" коэфициенты при x при помощи f_2.

$$S_{12} \to S_{12} - (-y + z) f_2 = 2y^2 - 2yz + 2z^2$$

"Убиваем" коэфициенты при y при помощи f_3.

$$S_{12} \to S_{12} - (2y - 2z) f_3 = -2yz^2 + 2z^3 + 2z^2.$$

Продолжаем:

$$S_{12} \to S_{12} - (-2z^2) f_3 = 2z^2 + 2z^3 + 2z^4.$$

Многочлены можно умножать на ненулевые константы. Получаем

$$f_4 = z^4 + z^3 + z^2.$$

И так далее...

(Дальше мы не получим новых многочленов).

Семинар 17

Многочлены:

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2 = x + y - z \qquad f_3 = y + z^2 \qquad f_4 = z^4 + z^3 + z^2$$

S-полиномы:

$$S_{13} = yf_1 - x^2 f_3 = -x^2 z^2 + y^3 + yz^2 =$$
$$= -z^2 f_1 + (y^2 + z^2) f_3$$

$$S_{23} = yf_2 - xf_3 = -xz^2 + y^2 - yz =$$
$$= -z^2 f_2 + (y - z) f_3$$

$$S_{14} = z^4 f_1 - x^2 f_4 = x^2(-z^3 - z^2) + y^2 z^4 + z^6 =$$
$$= -(z^2 + z^3) f_1 + (y^2 + z^2) f_4$$

Семинар 17

Многочлены:

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2 = x + y - z \qquad f_3 = y + z^2 \qquad f_4 = z^4 + z^3 + z^2$$

S-полиномы:

$$S_{24} = z^4 f_2 - x f_4 = x(-z^3 - z^2) + yz^4 - z^5 =$$
$$= -(z^2 + z^3) f_2 - (z - y) f_4$$

$$S_{34} = z^3 f_3 - y f_4 = -yz^4 - yz^2 + z^5 =$$
$$= (-z^2 - z^4) f_3 + (z^2) f_4$$

Семинар 17

Ответ: базис Грёбнера:

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2 = x + y - z \qquad f_3 = y + z^2 \qquad f_4 = z^4 + z^3 + z^2$$

Имеет ли система полиномиальных уравнений решения? Рассмотрим САУ над $\mathbb{C}$.

Теорема

Система алгебраических уравнений несовместна (т.е. не имеет решений) тогда и только тогда, когда её базис Грёбнера идеала содержит ненулевую константу.

Грубо говоря, если решений нет, то на каком-то шаге мы получим

$$1 = 0.$$

Семинар 17

Замечание. Если мы только ищем корни, и получили

$$1 = 0,$$

то дальше базис Грёбнера можно не считать.

Семинар 17

Теорема

Число решений САУ S конечно тогда и только тогда, когда базис Грёбнера идеала $I(S)$ содержит элементы $f_1, \ldots, f_n$, старшие члены которых являются степенями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно.

Грубо говоря, САУ примет вид

$$\begin{cases} x_1^{k_1} + \dots = 0 \\ \dots \\ x_n^{k_n} + \dots = 0 \\ f_{n+1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \end{cases}$$