МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 7

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

5 марта 2021

Свойства многочленов Чебышёва

1. Свойства многочленов Чебышёва.
2. Аппроксимация полиномов.
   - Минимаксаная аппроксимация.
   - Минимум интеграла модуля разности.
3. “Старый долг” (Ядро и образ).

Семинар 7

Многочлен Чебышёва первого рода $T_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$:

$$\| T_n \|_0 = \max_{[-1,1]} |T_n(x)| \to \min .$$

Семинар 7

Несколько первых многочленов Чебышёва первого рода:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Семинар 7

Многочлены Чебышёва 1го рода $T_n(x)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \ . \end{aligned}$$

Семинар 7

Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

А именно

$$\langle T_m, T_n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Семинар 7

Задача. Введём на множестве многочленов $\mathbb{R}[x]_{<N}$ степени менее N от одной переменной скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_N = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i) g(x_i),$$

где $x_0, \ldots, x_{N-1}$ — нули многочлена Чебышёва степени N. Докажите, что многочлены Чебышёва $T_0, \ldots, T_{N-1}$ ортогональны друг другу относительно этого скалярного произведения, причём

$$\langle T_j, T_j \rangle_N = \frac{N}{2}$$

при $j > 0$ и $\langle T_0, T_0 \rangle_N = N$.

Семинар 7

Задача. Пусть f — произвольная действительная функция. Предположим, что $P(x)$ — такой многочлен степени менее n, что

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle T_j, f \rangle_n}{\langle T_j, T_j \rangle_n} T_j(x_m)$$

для всех $m = 0, \ldots, n-1$. Докажите, что $P(x)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа функции f с узлами в точках $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

Семинар 7

- Многочлены Чебышёва $T_0(x), \dots, T_{n-1}(x)$ порождают пространство многочленов $\mathbb{R}[x]_{<n}$ степени меньше, чем n.

- Многочлен
$$P_f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle T_j, f \rangle_n}{\langle T_j, T_j \rangle_n} T_j(x)$$
суть ортогональная проекция функции на f на $\mathbb{R}[x]_{<n}$.

- Эта проеция зависит только от значения f в узлах $x_0, \dots, x_{n-1}$. Поэтому для функции f и для её многочлена Лагранжа g мы получаем одинаковую проекцию:
$$P_f(x) = P_g(x).$$

- Многочлен Лагранжа g уже лежит в $\mathbb{R}[x]_{<n}$. Поэтому его проекция совпадает с ним самим
$$P_g(x) = g(x).$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Рассмотрим линейное отображение:

$$y = \frac{2x - (b + a)}{b - a}.$$

Оно переводит $x \in [a, b]$ в $y \in [-1, 1]$.

Поэтому многочлен степени n и старшим коэффициентом 1, наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$, равен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (b + a)}{b - a}\right)$$

при $n \geq 1$ (и $\bar{T}_0(x) = 1$).

Семинар 7

Замечание

Линейная замена координат не меняет интерполяции:

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle \bar{T}_j, f\rangle_N}{\langle \bar{T}_j, \bar{T}_j\rangle_N} \bar{T}_j(x_m),$$

где сумма берётся в корнях многочлена $\bar{T}_N(x)$.

Аппроксимация полиномов

1. Свойства многочленов Чебышёва.
2. Аппроксимация полиномов.
   - Минимаксаная аппроксимация.
   - Минимум интеграла модуля разности.
3. “Старый долг” (Ядро и образ).

Семинар 7

Нормы Чебышёва для функций на отрезке $[-1, 1]$:

0. Максимум модуля на отрезке:

$$\|f\|_0 = \max_{[-1,1]} |f(x)|.$$

1. Площадь под графиком на отрезке:

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

Минимаксаная аппроксимация

1. Свойства многочленов Чебышёва.
2. Аппроксимация полиномов.
   - Минимаксаная аппроксимация.
   - Минимум интеграла модуля разности.
3. "Старый долг" (Ядро и образ).

Семинар 7

Задача Найти наилучшее приближение функции $f = 2x^3 + x^2$ многочленом степени не более 3 на отрезке $[1, 3]$ по норме $\max_{[1,3]} |f(x)|$.

Семинар 7

Задача. Построить многочлен степени $< n$, аппроксимирующий многочлен

$$f = c_0 x^n + \dots + c_n$$

на отрезке $[a, b]$ по норме

$$|h|_0 = \max_{[a,b]} |h(x)|$$

Решение. Берём

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

Искомый многочлен:

$$f - c_0 \bar{T}_n(x).$$

Семинар 7

Многочлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

наименее отклоняется от нуля относительно нормы

$$|h|_0 = \max_{[a,b]} |h(x)|$$

на отрезке $[a, b]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом 1:

$$\bar{T}_n(x) = x^n + \dots$$

Пример.

$$f(x) = 2x^3 + x^2, \qquad x \in [a, b] = [1, 3].$$

Поскольку

$$T_3 = 4x^3 - 3x,$$

то

$$\bar{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = x^3 - 6x^2 + \frac{45x}{4} - \frac{13}{2}.$$

Искомый многочлен:

$$f(x) - \bar{T}_n(x) = 13x^2 - \frac{45x}{2} + 13.$$

Минимум интеграла модуля разности

1. Свойства многочленов Чебышёва.
2. Аппроксимация полиномов.
   - Минимаксаная аппроксимация.
   - Минимум интеграла модуля разности.
3. “Старый долг” (Ядро и образ).

Семинар 7

Многочлен Чебышёва второго рода $U_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^n, интеграл от абсолютной величины которого по отрезку $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение:

$$\| T_n \|_1 = \int_{-1}^{1} |U_n(x)| \, dx \to \min .$$

Семинар 7

Задача. Построить многочлен степени ≤ 2, аппроксимирующий $f = x^3$ на отрезке $[0, 2]$ по норме

$$|h| = \int_0^2 |h(x)| dx.$$

Семинар 7

Несколько первых многочленов Чебышёва второго рода:

$$
\begin{aligned}
U_0(x) &= 1\\
U_1(x) &= 2x\\
U_2(x) &= 4x^2 - 1\\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x\\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Семинар 7

- Замена координат: отображение $y = x - 1$ переводит $[0, 2]$ в $[-1, 1]$.
- Функция $h(x) = f(x) - g(x)$ наименее отклоняется от нуля на отрезке $[0, 2]$.
- $U_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом $\frac{1}{2^n}$ и наименьшим интегралом модуля на отрезке $[-1, 1]$.
- Поэтому
$$h(y) = f(y) - g(y) = CU_3(y).$$

Семинар 7

Подставим значения:

$$g(y) = f(y) - CU_3(y) = (y+1)^3 - C(8y^3 - 4y).$$

Чтобы $g(y)$ был многочленом степени ≤ 2 нужно $C = \dfrac{1}{8}$. Получаем

$$g(y) = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^3 - \frac{1}{2}y) = 3y^2 + \frac{5}{2}y + 1.$$

Остаётся подставить $y = x - 1$:

$$g(x) = 3x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Семинар 7

Задача. Построить многочлен степени $\leq n$, аппроксимирующий многочлен

$$f = c_0 x^{n+1} + \cdots + c_{n+1}$$

на отрезке $[a, b]$ по норме

$$|h|_1 = \int_a^b |h(x)| dx.$$

Решение. Берём

$$\bar{U}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} U_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

Искомый многочлен:

$$f - c_0 \bar{U}_n(x).$$

Семинар 7

Многочлен

$$\bar{U}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} U_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

наименее отклоняется от нуля относительно нормы

$$|h|_1 = \int_a^b |h(x)| dx$$

на отрезке $[a, b]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом 1:

$$\bar{U}_n(x) = x^n + \ldots$$

“Старый долг” (Ядро и образ)

1. Свойства многочленов Чебышёва.

2. Аппроксимация полиномов.
   - Минимаксаная аппроксимация.
   - Минимум интеграла модуля разности.

3. “Старый долг” (Ядро и образ).

Семинар 7

Рассмотрим произвольное линейное отображение:

$$A : V \to W.$$

- Образ

$$\operatorname{Im} A = \{\, w \in W \quad : \quad w = A(v), \qquad v \in V \,\}.$$

- Ядро

$$\operatorname{Ker} A = \{\, v \in V \quad : \quad A(v) = 0 \,\}.$$

Семинар 7

В матричном виде:

- Образ — линейная комбинация столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} v^1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} v^n.$$

- Ядро задаётся СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + \dots + a_{1n}x^n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x^1 + \dots + a_{mn}x^n = 0 \end{cases}$$

Семинар 7

Доказать тождества:

1. $\mathrm{Im}(AA^+) = \mathrm{Im}(AA^*) = \mathrm{Im}\, A$.
2. $\mathrm{Ker}(AA^+) = \mathrm{Ker}(AA^*) = \mathrm{Ker}\, A^* = \mathrm{Ker}\, A^+$.
3. $\mathrm{Im}\, A^+ = \mathrm{Im}\, A^*$.
4. $\mathrm{Ker}\, A^+ = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$.
5. $\mathrm{Im}\, A^+ = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$.

Семинар 7

Задача. Докажем, что

$$\operatorname{Im} AA^{+} = \operatorname{Im} A.$$

“Инвариантное доказательство” (не зависит от базиса).

- $\subset$ Для любого оператора B выполнено

  $$\operatorname{Im} AB \subset \operatorname{Im} A.$$

  Поэтому

  $$\operatorname{Im} AA^{+} \subset \operatorname{Im} A.$$

- $\supset$ Свойство псевдообратной матрицы:

  $$A = AA^{+}A.$$

  Поэтому

  $$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^{+}A \subset \operatorname{Im} AA^{+}.$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Утверждение. Если $\operatorname{Im} B_1 = \operatorname{Im} B_2$, то

$$\operatorname{Im} AB_1 = \operatorname{Im} AB_2.$$

Доказательство утверждения

$$\operatorname{Im} AB = \{\, w \in W \quad : \quad w = A(u), \qquad u \in \operatorname{Im} B \,\}$$

И мы получаем одно и то же множество для B_1 и B_2.

Семинар 7

Утверждение. Если $\operatorname{Im} B_1 = \operatorname{Im} B_2$, то

$$\operatorname{Im} AB_1 = \operatorname{Im} AB_2.$$

Доказательство утверждения

$$\operatorname{Im} AB = \{\, w \in W \quad : \quad w = A(u), \qquad u \in \operatorname{Im} B \,\}$$

И мы получаем одно и то же множество для B_1 и B_2.

Замечание. Здесь $B_1, B_2 : V \to W$ могут быть произвольными отображениями. Утверждение верно как при $V = W$, так и при $V \neq W$.

Следствие. Если B — невырожденная матрица, то

$$\operatorname{Im} AB = \operatorname{Im} A.$$

Действительно, $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} E$.

Семинар 7

Задача. Докажем, что

$$\operatorname{Im} AA^* = \operatorname{Im} A.$$

Идея — приведём матрицу A к удобному виду. Рассмотрим SVD разложение.

$$A = U\Sigma V^*, \qquad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0).$$

Тогда

$$AA^* = U\Sigma V^* V\Sigma^* U^* = U\Sigma\Sigma^* U^* = U \operatorname{diag}(|\sigma_1|^2, \dots, |\sigma_k|^2, 0, \dots, 0) U^*.$$

Применяем предыдущее утверждение. Оба образа совпадут с

$$\operatorname{Im} \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0).$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Задача. Докажем, что
$$\operatorname{Im} A^* = \operatorname{Im} A^+.$$

Идея — приведём матрицу A к удобному виду. Рассмотрим SVD разложение.
$$A = U\Sigma V^*, \qquad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0).$$

Тогда
$$A^* = V\Sigma^* U^*, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^*.$$

Применяем предыдущее утверждение. Оба образа совпадут с
$$\operatorname{Im} V \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0).$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Задача. Докажем, что
$$\operatorname{Ker} AA^* = \operatorname{Ker} A^*.$$

Действительно,
$$(AA^* v, v) = (A^* v, A^* v),$$
поэтому
$$AA^* v = 0 \qquad \Leftrightarrow A^* v = 0.$$
Это и есть равенство ядер.
Утверждение доказано.

Семинар 7

Задача. Докажем, что
$$\operatorname{Ker} AA^{+} = \operatorname{Ker} A^{+}.$$

- $\supset$ Для любого оператора A выполнено
$$\operatorname{Ker} AB \supset \operatorname{Ker} B.$$
Поэтому
$$\operatorname{Ker} AA^{+} \supset \operatorname{Ker} A^{+}.$$

- $\subset$ Свойство псевдообратной матрицы:
$$A^{+} = A^{+}AA^{+}.$$
Поэтому
$$\operatorname{Ker} A^{+} = \operatorname{Ker} A^{+}AA^{+} \supset \operatorname{Ker} AA^{+}.$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Наблюдение. По определению

$$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0),$$

где справа стоит полный прообраз.

Семинар 7

Наблюдение. По определению
$$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0),$$
где справа стоит полный прообраз.

Следствие 1. Если A — невырожденная матрица, то
$$\operatorname{Ker} AB = \operatorname{Ker} B.$$
Действительно,
$$\operatorname{Ker} AB = B^{-1}(A^{-1}(0)) = B^{-1}(0) = \operatorname{Ker} B.$$

Следствие 2. Если $\operatorname{Ker} A_1 = \operatorname{Ker} A_2$, то

$$\operatorname{Ker} A_1 B = \operatorname{Ker} A_2 B.$$

Действительно,

$$\operatorname{Ker} A_i B = B^{-1}(\operatorname{Ker} A_i).$$

И мы получаем одно и то же выражение для обоих A_i.

Семинар 7

Задача. Докажем, что

$$\operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} A^+.$$

Идея — приведём матрицу A к удобному виду. Рассмотрим SVD разложение.

$$A = U\Sigma V^*, \qquad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0).$$

Тогда

$$A^* = V\Sigma^* U^*, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^*.$$

Применяем предыдущее утверждение. Оба образа совпадут с

$$\operatorname{Ker} \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0) U^*.$$

Утверждение доказано.

Семинар 7

Задача. Доказать, что

$$\operatorname{Ker} A^{+} = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

1. Уже доказано:

$$\operatorname{Ker} A^{+} = \operatorname{Ker} A^{*}$$

2. Векторы из $\operatorname{Ker} A^{*}$ задаются условием $A^{*}u = 0$. Далее,

$$A^{*}u = 0 \qquad \Leftrightarrow (A^{*}u, v) = 0 \quad \forall v.$$

3. По определениею A^{*} для любых векторов

$$(A^{*}u, v) = (u, Av)$$

   Поэтому

$$(A^{*}u, v) = 0 \quad \forall v \qquad \Leftrightarrow u \perp Av \forall v.$$

   Последнее и означает, что $u \perp \operatorname{Im} A$.

Утверждение доказано.

Семинар 7

Задача. Доказать, что
$$\operatorname{Im} A^{+} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

1. Воспользуемся тем, что $A = (A^{+})^{+}$. По ранее доказанному
$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \left(\operatorname{Ker}(A^{+})^{+}\right)^{\perp} = \left(\left(\operatorname{Im} A^{+}\right)^{\perp}\right)^{\perp}.$$

2. В евклидовом пространство
$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

   Поэтому
$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \left(\operatorname{Ker}(A^{+})^{+}\right)^{\perp} = \left(\left(\operatorname{Im} A^{+}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{Im} A^{+}.$$

Утверждение доказано.