МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 14

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

30 апреля 2021

Литература

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,
Глава 11. О приближённых методах вычисления собственных значений и собственных векторов,

Метод Якоби

1. Метод Якоби
2. Степенной метод (метод итераций)
   - Пример
3. QR алгоритм
4. Добавление. QR разложение

Семинар 14

Метод вращений:

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,
Глава 11.1 Метод вращений (метод Якоби)

Семинар 14

Метод Якоби. Для самосопряжённых матриц

$$\bar{A}^T = A.$$

Меняем матрицу на

$$A \to \bar{R}^T A R.$$

Находим в матрице A наибольший по модулю недиагональный элемент a_{ij}. На этот раз матрица

$$R(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \cos\varphi & & & & -e^{i\theta}\sin\varphi & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & e^{-i\theta}\sin\varphi & & & & \cos\varphi & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 14

- Для φ формулы те же, но a_{ij} меняется на $|a_{ij}|$:
$$\tan 2\varphi = \frac{2\,|a_{ij}|}{a_{ii} - a_{jj}}.$$

- Угол θ берётся как у a_{ij}:
$$\theta = \arg a_{ij}.$$
Напомним, что
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$
Заметим, что
$$e^{i\theta} = \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|}.$$

Семинар 14

Задача. Найти собственные векторы и собственные значения методом Якоби.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Семинар 14

Наибольший по модулю недиагональный элемент

$$a_{12} = 2 - i.$$

Тогда

$$|a_{12}| = \sqrt{5}, \qquad e^{i\theta} = \frac{2 - i}{\sqrt{5}}.$$

$$a_{11} = 3, \qquad a_{33} = 7.$$

Семинар 14

Находим угол поворота:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\left|a_{ij}\right|}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{2\sqrt{5}}{3-7} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} = \frac{2}{3}.$$

Косинус и синус:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}, \qquad \sin\varphi = -\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Знак у синуса как у

$$\tan 2\varphi < 0.$$

Итак,

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{5}{6}}, \qquad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad e^{i\theta} = \frac{2-i}{\sqrt{5}}$$

Матрица поворота:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & -\frac{2-i}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & 0 \\ \frac{2+i}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 14

Матрица

$$A_1 = \bar{R}^T A R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 8, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Собственные векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ \dfrac{2+i}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{2-i}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Степенной метод

1 Метод Якоби

2 Степенной метод (метод итераций)
- Пример

3 QR алгоритм

4 Добавление. QR разложение

Семинар 14

Пусть $A = A^T$.

Методом итераций можно находить собственные значения A.

Наблюдение. Возьмём базис e_i из собственных векторов

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots.$$

Тогда

$$A^k(e_1, \ldots, e_n) = \left(\lambda_1^k e_1, \ldots, \lambda_n^k e_n\right) = \lambda_1^k \cdot \left(e_1, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k e_2, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k e_n\right).$$

$\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \to 0$, если $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$.

Семинар 14

Пусть $A = A^T$.

Методом итераций можно находить собственные значения A.

Берём произвольный вектор $v^{(0)}$ и находим

$$v^{(k)} = A^k v^{(0)}.$$

- Собственный вектор
$$v^{(k)} = A^{(k)} v^{(0)}$$
при достаточно больших k.

- Собственное значение
$$\lambda = \lim \frac{v_i^{(k)}}{v_i^{(k-1)}}$$
для любого индекса i, где этот предел имеет смысл.

Семинар 14

- Если процесс не сходится, поменять стартовый вектор $v^{(0)}$.
- Если векторы $v^{(k)}$ слишком большие — домножить их на константу

$$v^{(k)} \to \alpha_k v^{(k)}$$

(например, нормировать). Константу α_k при вычислении λ учесть (!).

Семинар 14

У какой матрицы ранга 1 ненулевое собственное значение λ и собственный вектор v? Ответ:

$$X = \lambda \frac{vv^T}{(v, v)}.$$

Действительно,

$$Xu = \lambda v \frac{(v, u)}{(v, v)}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} Xv = \lambda v, \\ Xu = 0, \qquad (u, v) = 0 \end{cases}$$

Семинар 14

Алгоритм нахождения собственных значений:

1. Находим наибольшее собственное значение λ и соотв. собств. вектор v.
2. Переходим к матрице
$$A - \lambda \frac{vv^T}{(v, v)}.$$

Замечание. Другой способ — перейти к ортогональному дополнению к v.

Пример

1. Метод Якоби
2. Степенной метод (метод итераций)
   - Пример
3. QR алгоритм
4. Добавление. QR разложение

Семинар 14

Задача. Методом итераций найти собственные значения

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение-1. См. Jupyter Notebook.

Решение-2 (как на лекции).

Поскольку A — симметричная матрица, ортонормированный базис из собственных векторов

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Это теорема о приведении квадратичной формы к главным осям.

Семинар 14

1. Шаг 1. Будем искать собственный вектор вида

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $Av_1 = \lambda v_1$ принимает вид

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7 = \lambda. \end{cases}$$

Чтобы решить его методом итераций перепишем его в виде

$$\begin{cases} \lambda^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} + 7 \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}} \left(6x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 2\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}} \left(-2x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)}\right). \end{cases}$$

Семинар 14

Методом итераций находим решение

$$\begin{cases} \lambda^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} + 7 \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}\left(6x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 2\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^{(k)}}\left(-2x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)}\right). \end{cases}$$

Получаем

$$\lambda_1 = 9, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Семинар 14

1. Шаг 2. Ищем второй базисный вектор

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Av_2 = \lambda v_2.$$

Собственные векторы ортогональны и мы добавляем условие

$$(v_1, v_2) = 0.$$

Семинар 14

Получаем систему

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 = \lambda x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Из последнего выражения удобно выразить x_2. Далее решаем методом итераций

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 2x_3 \\ \lambda^{(k+1)} = \dfrac{8x_1^{(k)} + 10x_3^{(k)}}{2x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)}} \\ x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda^{(k)}}\left(2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda^{(k)}}\left(2x_1^{(k)} + 7x_3^{(k)}\right). \end{cases}$$

Берём вектор, ортогональный v_1, скажем

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Метод итераций сойдётся к

$$\lambda_2 = 6, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Последнее собственное значение находим из условий

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} A.$$

А собственный вектор из условия

$$(v_1, v_3) = 0, \qquad (v_2, v_3) = 0.$$

Получаем

$$\lambda_3 = 3, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

QR алгоритм

1. Метод Якоби
2. Степенной метод (метод итераций)
   - Пример
3. QR алгоритм
4. Добавление. QR разложение

Семинар 14

QR-алгоритм нахождения собственных значений матрицы A.

- Полагаем $A_0 = A$.
- На каждом шаге берём QR разложение
$$A_k = Q_k R_k.$$
В качестве следующей матрицы берём
$$A_{k+1} = R_k Q_k.$$
- Собственные числа — диагональные элементы предельной матрицы (если она существует).

Семинар 14

Доказатьство сходимости QR-алгоритм в случае, когда выполнены следующие три условия:

1. матрица симметрична $A = A^T$;
2. все собственные значения положительны и различны;
3. у Q^T существует LU разложение,

можно найти в
http://pi.math.cornell.edu/~web6140/TopTenAlgorithms/QRalgorithm.html

Семинар 14

Идея доказательства.[1] Пусть

$$A = QR = Q\Lambda Q^T,$$

где Λ — диагональная.

1. Замечаем, что
$$A^k = Q\Lambda^k Q^T = (Q_1 \dots Q_k)(R_k \dots R_1).$$

2. Используем LU разложение $Q^T = LU$, получаем:
$$Q\Lambda^k L\Lambda^{-k} = (Q_1 \dots Q_k)(R_k \dots R_1)U^{-1}\Lambda^{-k}.$$

3. Честно проверяем, что $\Lambda^k L\Lambda^{-k}$ стремится к единичной матрице, поэтому выражение слева стремится к ортогональной матрице Q.

4. Поскольку QR разложение единственно, $(Q_1 \dots Q_k) \to Q$, в частности, $Q_k \to E$, и $(R_k \dots R_1)U^{-1}\Lambda^{-k} \to E$, откуда и вытекает сходимость
$$A_k = (Q_1 \dots Q_k)^T A(Q_1 \dots Q_k) \to \Lambda.$$

.

[1] Дополнительный материал.

Семинар 14

Задача. При помощи QR-алгоритма найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение: См. Jupyter Notebook. На шаге 15

$$A_{15} \approx \begin{pmatrix} 8.99999609e+00 & 3.42548289e-03 & -6.27225062e-07 \\ 3.42548289e-03 & 6.00000390e+00 & -1.83106304e-04 \\ -6.27225064e-07 & -1.83106304e-04 & 3.00000001e+00 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения

$$\lambda_1 = 9, \qquad \lambda_2 = 6, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Добавление. QR разложение

1. Метод Якоби
2. Степенной метод (метод итераций)
   - Пример
3. QR алгоритм
4. Добавление. QR разложение

Семинар 14

Способы нахождения QR разложение:

1. Метод Грамма-Шмидта.
2. Через преобразование Хаусхолдера
$$H_u(x) = x - 2\langle x, u\rangle u.$$
Это отражение относительно гиперплоскости, проходящей через начало координат.
3. Через повороты Гивенса (вращения в 2-мерном подпространстве).