МАГОЛЕГО
Линейная алгебра в приложениях
Семинар 1

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(ВШЭ)

22 января 2020

Линейная алгебра в приложениях

Телеграм-чат:

https://t.me/LA_magolego_2021

Линейная алгебра в приложениях

Темы курса (subject to change):

- Псевдообратная матрица, SVD-разложение (+ логистическая регрессия).
- Интерполяционный многочлен, функции от матрицы, кривые Безье.
- Метрические и нормированные пространства
- Погрешности вычислений, итеративные методы вычислений
- Вычисление собственных значений, круги Гершгорина
- Функции от матрицы
- Теорема Фробениуса — Перрона (положительные матрицы + приложения в экономике).
- Линейное программирование
- Базис Грёбнера

Литература

Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski,
Linear Algebra for Economists,

Шевцов Г.С.,
Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты,

Е.Е. Тыртышников,
Матричный анализ и линейная алгебра,

Е.Е. Тыртышников,
Методы численного анализа,

Gregoire Allaire, Sidi Mahmoud Kaber,
Numerical Linear Algebra,

Ликбез по линейной алгебре

1. Ликбез по линейной алгебре.
   - Полилинейные отображения, нормальные формы.
2. Ликбез по линейной алгебре.

Семинар 1

Мы будем рассматривать пространства

$$V = \mathbb{R}^n \qquad \text{или} \qquad \mathbb{C}^n.$$

Можно считать, точка пространства — это набор из n чисел[1]

$$v = (v_1, \ldots, v_n).$$

Напомним терминологию и некоторые утверждения из линейной алгебры.

[1] Хотя, как говорится, "A true gentleman never chooses a basis."

Терминология

- Подпространство $U \subset V$.
- Линейно независимо множество векторов $v_1, \ldots, v_k$.
- Линейная оболочка $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
- Базис линейного пространства:

  $$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

  .
- Размерность линейного пространства $\dim V$.

Терминология

- Система линейных уравнений
$$Ax = b$$

- Матрица
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ранг матрицы (=ранг системы столбцов = ранг системы строк).

Терминология

- Произведение матриц
$$AB = (Ab_1, \ldots, Ab_k)$$

- Определитель матрицы
$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}.$$

- Обратная матрица
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

1. Ликбез по линейной алгебре.
   - Полилинейные отображения, нормальные формы.
2. Ликбез по линейной алгебре.

Терминология

- Линейное отображение
$$A : V \to W$$

- Канонический вид линейного отображения:
$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Образ $\operatorname{Im} A$, ядро $\operatorname{Ker} A$ и ранг $\operatorname{rk} A$ линейного отображения:
$$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} A.$$

ЖНФ

Линейный оператор

$$A : V \to V.$$

Жорданова нормальная форма (над $\mathbb{C}$):

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}\left(J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_k}\right),$$

где

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Терминология

- Пусть
$$V = U \oplus W$$
Проектор
$$P : V \to V,$$
т.,ч. на U оператор тождественный, а на W — нулевой.

- P — проектор $\Leftrightarrow P^2 = P$.

Терминология

- Линейная функция (=ковектор)

$$\alpha : V \to \mathbb{K}$$

- Двойственное (сопряжённое) пространство V^* = пространство ковекторов.

- Вектор — линейная функция на ковекторе:

$$\alpha(v) = v(\alpha) = \langle \alpha, v \rangle.$$

Если $\dim V < \infty$, то

$$\left(V^*\right)^* = V.$$

Терминология

- Билинейная функция
$$B : V \times V \to \mathbb{K}$$
В матричном виде:
$$B(u, v) = u^T B v.$$
- Квадратичная форма:
$$q_B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} B \mathbf{x}.$$
- Нормальный вид квадратичной формы (над $\mathbb{R}$):
$$Q_n(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$
где $0 \leq p, q$ и $p + q \leq n$.

Семинар 1

Пусть C — матрица замены координат, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Подчеркнём: слева — старые координаты, а справа — новые. Тогда

- для линейных операторов
$$A' = C^{-1}AC, \tag{1}$$
- для билинейных форм
$$B' = C^T BC. \tag{2}$$

Терминология

- Евклидово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ = симметричная положительно определённая билинейная форма.

- В ортонормированном базисе
$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

- Длина вектора:
$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

- Неравенство Коши-Буняковского:
$$|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2 .$$

Терминология

- В комплексном случае роль евклидовых пространств играют унитарные = эрмитовы пространства.
- В ортонормированном базисе
$$(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n.$$

Главные оси

Приведение пары форм к главным осям:

- A — симметричная билинейная форма,
- A — скалярное произведение (=симметричная положительно определённая билинейная форма),

Канонический вид:

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad B = E$$

Терминология

- Сопряжённая матрица:
$$(A^* u, v) = (u, Av).$$

- Самосопряжённый оператор $A^* = A$.

Ортогональные операторы

Ортогональный оператор в евклидовом пространстве:

$$\omega(Au, Av) = \omega(u, v).$$

Ортогональная матрица:

$$A^T = A^{-1}.$$

Псевдообратная матрица, SVD-разложение

1. Ликбез по линейной алгебре.
   - Полилинейные отображения, нормальные формы.

2. Ликбез по линейной алгебре.

Семинар 1

Пусть A — $n \times n$ матрица. **Обратная матрица** A^{-1} задаётся формулой:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Для любой невырожденной матрицы

$$\det A \neq 0$$

обратная матрица существует и единственна.

Семинар 1

Формула для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

где C — матрица алгебраических дополнений:

$$C = \left((-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Семинар 1

Обратная матрица к A не всегда существует (например, A — не квадратная).

Но мы найдём такую **псевдообратную матрицу** A^+, что для ЛСУ

$$Ax = b$$

вектор A^+b — решение методом наименьших квадратов наименьшей длины.

SVD разложение

Пусть A — $m \times n$ матрица над $\mathbb{R}$. SVD-разложение:

$$A = U\Sigma V^T,$$

где

1. U — ортогональная $m \times m$ матрица,
2. V — ортогональная $n \times n$ матрица,
3. а Σ — это диагональная матрица:

   $$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0),$$

   с неотрицательными собственными значениями на диагонали:

   $$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0.$$

SVD разложение

SVD-разложение над $\mathbb{C}$ определяется аналогично:

$$A = U\Sigma V^*,$$

но

1. ортогональные матрицы U, V заменяются на унитарные,
2. а V^* — это комплексное сопряжение:

$$V^* = \bar{V}^T,$$

3. все значения диагональной матрицы Σ вещественны и неотрицательны:

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0.$$

SVD разложение

Теорема

Для любой (вещественной или комплексной $n \times m$) матрицы A существует SVD разложение.

Псевдообратная матрица

SVD-разложение:

$$M = U\Sigma V^*.$$

Тогда псевдообратная матрица:

$$M^+ = V\Sigma^+ U^*,$$

где

$$\Sigma^+ = \left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_k}, 0, \ldots, 0\right).$$

Если M — это $m \times n$ матрица, то M^+ — это $n \times m$ матрица.

Семинар 1

Пусть A — $m \times n$ матрица. Псевдообратная матрица A^+ задаётся условиями:

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^* = AA^+$
4. $(A^+A)^* = A^+A$

Семинар 1

Алгоритмы нахождения псевдообратной матрицы:

- Если A — квадратная и обратимая

$$A^{+} = A^{-1}$$

Семинар 1

- Если столбцы A линейно независимы. Тогда A^*A обратима и
$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*.$$

- Если строчки A линейно независимы. Тогда AA^* обратима и
$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

Семинар 1

Пусть A — матрица размера $m \times n$ и

$$\operatorname{rk} A = k$$

. Тогда A можно представить в виде

$$A = BC,$$

где

- B — матрица размера $m \times k$ (столбцы линейно независимы)
- C — матрица размера $k \times n$ (строки линейно независимыми).

Тогда:

$$A^{+} = C^{+} B^{+}$$

Иными словами,

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}.$$

Семинар 1

Построение рангового разложения матрицы

$$A = BC.$$

Приводим A методом Гаусса к ступенчатому виду X (по строкам). Тогда

- C получается из X удалением нулевых строк,
- B получается из A взятием соответствующих линейно независимых столбцов (pivot columns).

Семинар 1

Алгоритм нахождения SVD-разложения (над $\mathbb{R}$)

$$M = U\Sigma V^T$$

1. Берём $A^T A$.
2. Находим канонический вид и канонический базис $A^T A$.
3. Сингулярные значения — корни из полученных собственных значений.
4. Канонический базис U — столбцы матрицы AA^T (столбцы V — канонический базис $A^T A$).
5. Столбцы U и V связаны соотношениями

$$Av_i = \sigma_i u_i, \qquad A^T u_i = \sigma_i v_i.$$