# МАГОЛЕГО
# Линейная алгебра в приложениях
# Семинар 15

Д. И. Пионтковский, И. К. Козлов
(*ВШЭ*)

14 мая 2021

# Литература

Шевцов Г.С.,
*Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты*,
Глава 7. Функции от матрицы,

# Функция от матрицы

1. Функции от матрицы

2. Функция от матрицы.
   - Функции от двумерных матриц.
   - Функции от трёхмерных матриц и общий случай.

3. Как решать линейные ОДУ.

# Семинар 15

Дана жорданова форма

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $f(A)$, где

1. $f(\lambda) = \lambda^{100}$.
2. $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.
3. $f(\lambda) = e^{c\lambda}$.

# Семинар 15

Как находить функцию от матрицы?

Простые случаи:

- Функция — полином $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots x^n$. Просто подставляем:

$$f(A) = a_0 + a_1 A + \dots A^n.$$

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda) = \lambda^{100}.$$

Ответ:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Функция от матрицы f(A) = ?**

- Легко, если найдена ЖНФ (жорданова нормальная форма) матрицы $A$. Берём функцию от каждой жордановой клетки:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

# Семинар 15

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda) = e^{cx}.$$

Применяем формулу

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^{2c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{c} & ce^{c} \\ 0 & 0 & e^{c} \end{pmatrix}.$$

# Семинар 15

По той же формуле:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda) = \sqrt{\lambda}.$$

Ответ:

$$f(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть,

$$\sqrt{A}^2 = A.$$

# Семинар 15

Ключевая идея в общем случае.

*Функция от матрицы* $f(A)$ *суть значение интерполяционного полинома Эрмита* $p(A)$ *на спектре матрицы (с учётом кратностей).*

# Семинар 15

## f(A). Общий случай.

1. Находим минимальный многочлен
$$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_s)^{m_s}.$$

2. Взять Эрмитову интерполяцию:
$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \qquad j = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, s.$$
Подчеркнём, степени $m_i$ — как в минимальном многочлене = порядок наибольшей жордановой клетки с собственным значением $\lambda_i$.

3. Тогда $f(A) = p(A)$. А полином от матрицы мы умеем находить.

# Семинар 15

Можно решить задачу в общем виде:

1. Найти спектральные компоненты $z_{jk_j}$: это функции $g(A)$ от функций т.,ч.
$$g^{(k_j)}(\lambda_j) = 1,$$
а все остальные значения и производные равны нулю.

2. Тогда функция от матрицы — линейная комбинация:
$$f(A) = \sum_{j=1}^{s} \left[ f(\lambda_j) z_{j0} + f'(\lambda_j) z_{j1} + \cdots + f^{(m_j)}(\lambda_j) z_{jm_j} \right].$$

# Функции от двумерных матриц

1. Функции от матрицы
2. Функция от матрицы.
   - Функции от двумерных матриц.
   - Функции от трёхмерных матриц и общий случай.
3. Как решать линейные ОДУ.

# Семинар 15

Вначале посмотрим на несколько примеров.

**Задача**. Найти $f(A)$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и её характеристический многочлне

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

**Решение**. Возможны 3 варианта.

# Семинар 15

1. $A = \lambda_0 E$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$. Ответ тривиален
$$A = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & 0 \\ 0 & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, но $A \neq \lambda_0 E$.

   Тогда минимальный многочлен совпадает с характеристическим $m(\lambda) = \chi(\lambda)$.

   Интерполяционный многочлен Эрмита
   $$p(\lambda) = f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0).$$

   Итоговый ответ:
   $$f(A) = f(\lambda_0)E + f'(\lambda_0)(A - \lambda_0 E).$$

## Семинар 15

**Задача**.
Найти $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

**Решение**. Находим характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 .$$

Здесь

$$f(2) = \sqrt{4} = 2, \qquad f'(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ:

$$f(A) = f(\lambda_0)E + f'(\lambda_0)(A - \lambda_0 E) =$$

$$= 2E + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

# Семинар 15

4. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   Тогда минимальный многочлен совпадает с характеристическим $m(\lambda) = \chi(\lambda)$.

   Интерполяционный многочлен Эрмита

$$g(\lambda) = f(\lambda_1)\frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

# Семинар 15

**Задача**. Найти $e^A$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Решение**. Находим характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 2)^2 .$$

Здесь

$$f(2) = e^2, \qquad f'(2) = e^2.$$

Ответ:

$$f(A) = f(\lambda_0)E + f'(\lambda_0)(A - \lambda_0 E) =$$
$$= e^2 E + e^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Функции от трёхмерных матриц и общий случай

1. Функции от матрицы

2. Функция от матрицы.
   - Функции от двумерных матриц.
   - Функции от трёхмерных матриц и общий случай.

3. Как решать линейные ОДУ.

## Семинар 15

### Утверждение

Количество жордановых $\lambda$-блоков размера $m \times m$ в ЖНФ:

$$2\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^m - \dim\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^{m+1} - \dim\operatorname{Ker}(A-\lambda E)^{m-1}.$$

# Семинар 15

**Задача**. Найти $e^A$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

**Решение**. Находим характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = 1.$$

## Семинар 15

Возможные ЖНФ:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разница:

$$\dim \operatorname{Ker} J_1 = 2, \qquad \dim \operatorname{Ker} J_2 = 1.$$

# Семинар 15

В данном случае ядро одномерно:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Значит ЖНФ

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и минимальный многочлен совпадает с характеристическим.

Функция от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Интерполяционный многочлен $p(t)$ т.,ч.

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), \qquad p'(\lambda_1) = f'(\lambda_1), \qquad p(\lambda_2) = f(\lambda_2).$$

Это многочлен

$$p(t) = \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}(t-\lambda_1)^2 + \frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}(t-\lambda_2) +$$
$$+ \left(\frac{f'(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\right)(t-\lambda_1)(t-\lambda_2).$$

# Семинар 15

Перепишем эту формулу

$$p(t) = f(\lambda_1)\frac{A-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1+\frac{A-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)+$$
$$+f'(\lambda_1)\frac{(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}+f(\lambda_2)\frac{(A-\lambda_1)^2}{\lambda_2-\lambda_2}.$$

# Семинар 15

Находим спектральные компоненты

$$\frac{A-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1+\frac{A-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -3 & 0 & 3\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\frac{(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 3 & -6\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

$$\frac{(A-\lambda_1)^2}{\lambda_2-\lambda_2}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

# Семинар 15

Здесь

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f(1) = e.$$

$$\begin{pmatrix} 3e-1 & e & 1-3e \\ 3e & 3+e & -3-3e \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}$$

# Семинар 15

Найти $\ln A$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен:

$$\det(A - \lambda E) = -(x-1)^3.$$

При этом

$$\operatorname{rk}(A - E) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

поэтому ЖНФ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен Эрмита

$$p(\lambda) = f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + f''(\lambda_0)\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2}.$$

В данном случае

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1, \qquad \ln''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Итоговый ответ:

$$f(A) = f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + f''(\lambda_0)\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Семинар 15

Общая функция для интерполяции Эрмита:

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\left(\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{j!}\varphi_i^{(j)}(\lambda_i)(t-\lambda_i)^j\right)\prod_{j\neq i}(t-\lambda_j)^{n_j}\right],$$

где

$$\varphi_i = \frac{f(t)}{\prod_{j\neq i}(t-\lambda_j)^{n_j}}.$$

Спектральные компоненты $z_{jk_j}$ — компоненты этой двойной суммы.

# Как решать линейные ОДУ

# Семинар 15

**Задача**. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1, & x_1\Big|_{t=0} = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, & x_2\Big|_{t=0} = 1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3, & x_3\Big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

# Семинар 15

Решение СЛДУ:

$$x' = Ax$$

имеет вид

$$x = x_0 e^{At}.$$

# Семинар 15

В данном случае матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Подставляем граничные условия и получаем ответ:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$