МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ПРИЛОЖЕНИЙ

И. К. Козлов

# Дифференциальная геометрия в задачах

Москва 2019 год

**УДК 514.7**
**ББК 22.15**

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор А. О. Иванов, Мехмат МГУ,
д.ф.-м.н., доцент С. В. Соколов, МФТИ.

И. К. Козлов
Дифференциальная геометрия в задачах.

Учебное издание

Учебное пособие напечатано по решению Ученого Совета механико-математического факультета МГУ.

М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2019. — 230 с.

Книга представляет собой конспект семинаров по дифференциальной геометрии и топологии, проводимых автором на механико-математическом факультете МГУ. В этом учебном пособии собраны воедино многие ключевые задачи по дифференциальной геометрии и топологии, решение которых позволит студентам овладеть базовыми техниками дифференциальной геометрии и тензорного анализа. Все задачи снабжены решениями. Учебное пособие рассчитано на студентов, аспирантов и всех интересующихся геометрией. Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867).



**ISBN 978–5–9500628–3–4**

# Оглавление

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальная геометрия и топология — важный раздел математики, изучение которого необходимо для понимания других обязательных курсов стандартной программы Мехмата МГУ, включая курсы по оптимальному управлению, аналитической механике, основам механики сплошных сред и физике. Эта книга является коротким учебным пособием по проведению семинаров по дифференциальной геометрии, в котором собраны воедино многие ключевые базовые задачи по дифференциальной геометрии и топологии. Данным пособием смогут воспользоваться как студенты, которые захотят получше разобраться в мехматовском курсе, так и преподаватели при подготовке к семинарам по дифференциальной геометрии. Мы признательны кафедре дифференциальной геометрии и приложений, поддержавшей издание этой книги.

И.о. декана Мехмата МГУ
профессор В. Н. Чубариков

Председатель РИСО Мехмата МГУ
В. Б. Демидович

# Часть I

# Тензоры

# Тема 1

# Определение и примеры тензоров

В каждом разделе мы будем стараться давать основные задачи по данной тематике. Дополнительные задачи по каждой теме можно найти в [1] или [2]. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями линейной алгебры, математического анализа и топологии.

## 1.1 Теоретический материал

### 1.1.1 Понятие тензора

**Определение 1.1. Тензор** $T$ типа $(p, q)$ на линейном пространстве $V$ над полем $\mathbb{K}$ — это полилинейное отображение

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to \mathbb{K}.$$

Число $r = p + q$ называется **валентностью** или **рангом**[1] тензора $T$.

[1] Термин “ранг” не очень удачен — для билинейных форм и операторов нужно отличать ранг тензора и ранг соответствующей матрицы.

Примеры тензоров:

(0) Тензор типа $(0,0)$ — скаляр $c \in \mathbb{K}$.

(1) Тензор типа $(1,0)$ — вектор $v : V^* \to \mathbb{K}$.

(2) Тензор типа $(0,1)$ — ковектор $\alpha : V \to \mathbb{K}$.

(3) Тензор типа $(0,2)$ — билинейная форма

$$B : V \times V \to \mathbb{K}.$$

(4) Тензор типа $(2,0)$ — билинейная форма на $V^*$, т.е.

$$Q : V^* \times V^* \to \mathbb{K}.$$

(5) Тензор типа $(1,1)$ — линейный оператор

$$A : V^* \times V \to \mathbb{K}.$$

(6) Линейная форма объёма на линейном пространстве $V^n$

$$\Omega : \underbrace{V^n \times \cdots \times V^n}_{n} \to \mathbb{K}$$

является (абсолютно кососимметричным) тензором типа $(0,n)$ на $V^n$.

**Замечание 1.2.** Мы будем обычно рассматривать тензоры на конечномерных вещественных или комплексных пространствах (т.е. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). В дифференциальной геометрии тензоры обычно заданы на касательных пространствах к многообразиям.

### 1.1.2 Компоненты тензора

Введём естественный базис в пространстве тензоров. Пусть

- $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V$,
- $x^1, \ldots, x^n$ — соответствующие (линейные) координаты[2] на $V$,
- $e^1, \ldots, e^n$ — двойственный базис $V^*$, т.е.

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Любой тензор задаётся набором из $n^{p+q}$ своих **компонент** — значений на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}\right).$$

Получаем разложение по базису

$$T = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p, \\ j_1, \ldots, j_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q},$$

где через $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ обозначен тензор, который

- принимает значение 1 на наборе $\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}\right)$
- и равен 0 на любом другом наборе базисных векторов и ковекторов.

[2]В дифференциальной геометрии, чтобы работало правило суммирования Эйнштейна, индексы у координат нужно писать сверху.

При замене координат $x^i \to x^{i'}$ компоненты меняются по **тензорному закону**

$$(1.1) \qquad T^{i'_1\ldots i_p{}'}_{j_1{}'\ldots j_q{}'} = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p,\\ j_1,\ldots,j_q}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial x^{i_1{}'}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p{}'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1{}'}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q{}'}},$$

где $T^{i'_1\ldots i_p{}'}_{j_1{}'\ldots j_q{}'}$ — компоненты тензора в “новых” координатах $x^{i'}$.

**Договорённость 1.3 (Правило суммирования Эйнштейна).** При работе с тензорами преполагается *суммирование по обозначенным буквами повторяющимся верхним и нижним индексам.* Эти индексы пробегают все свои возможные значения. Знак суммы при этом опускается.

Например, формула (1.1) записывается как

$$T^{i'_1\ldots i_p{}'}_{j_1{}'\ldots j_q{}'} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial x^{i_1{}'}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p{}'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1{}'}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q{}'}}.$$

## 1.2 Тензоры и матрицы

**Задача 1.4.** Доказать, что числа

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(1,1)$.

*Первое решение Задачи 1.4.* Чтобы доказать, что $\delta^i_j$ — тензор, проверим, что при замене координат компоненты меняются по тензорному закону, т.е. что

$$\delta^{i'}_{j'} = \delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Действительно,

$$\delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = j', \\ 0, & \text{если } i' \neq j'. \end{cases}$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой для производной сложной функции:

$$\frac{\partial f(y(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Задача 1.4 решена. $\square$

*Второе решение Задачи 1.4.* $\delta^i_j$ — это компоненты тождественного оператора id. Этот оператор в любом базисе задаётся единичной матрицей. Задача 1.4 решена. $\square$

**Задача 1.5.** Образует ли набор чисел

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тензор типа $(0,2)$?

*Решение Задачи 1.5.* Покажем, что $\delta_{ij}$ — не тензор. Пусть $C$ — матрица замены координат. Тогда в матричном виде тензорный закон для тензоров валентности 2 записывается следующим образом:

- для тензоров т. $(1,1)$ (т.е. для линейных операторов)

$$A' = CAC^{-1}, \tag{1.2}$$

- для тензоров т. $(0,2)$ (т.е. для билинейных форм)

$$B = C^T B' C \qquad \Leftrightarrow \qquad B' = \left(C^{-1}\right)^T BC^{-1}, \tag{1.3}$$

- для тензоров т. $(2,0)$ (т.е. для билинейных форм на $V^*$)

$$Q' = CQC^T. \tag{1.4}$$

Здесь во всех пунктах штрихом обозначены матрицы тензоров в новых координатах.

Легко видеть, что если в каком-то базисе матрица билинейной формы единичная $Q = E$, то она не обязана быть единичной во всех остальных базисах[3]. Например, при гомотетии $C = \frac{1}{\lambda}E$ все коэффициенты билинейной формы умножатся на $\lambda^2$. Задача 1.5 решена. □

**Замечание 1.6.** В формулах (1.2) – (1.4) мы считаем, что координаты векторов и ковекторов (записанные в столбик) связаны соответственно по формулам

$$v' = Cv, \qquad \alpha = C^T\alpha'.$$

Формулы (1.2) – (1.4) несложно проверить, воспользовавшись тем, что значение тензора на наборе векторов и ковекторов не зависит от выбора базиса. Например, для билинейных форм получаем

$$(u')^T B' v' = u^T C^T B' C v = u^T B v.$$

**Замечание 1.7.** Тензоры ранга 2 задаются матрицами, и полезно помнить, что некоторые тензорные выражения суть покомпонентная запись операций над матрицами. Например,

- выражение $a^i_j v^j$ соответствует умножению матрицы $a^i_j$ на вектор-столбец $v^j$:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots, & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_i v^i \\ \vdots \\ a^n_i v^i \end{pmatrix},$$

[3]Единственное исключение — одномерное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$.

- а равенство
$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}$$
является покомпонентной записью тождества
$$JJ^{-1} = E,$$
где $J$ — матрица Якоби:
$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots, & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

**Задача 1.8.** Если $G = (g_{ij})$ — невырожденный тензор типа $(0, 2)$ на $V$ (т.е. невырожденная билинейная форма), то элементы обратной матрицы $G^{-1} = (g^{ij})$ являются компонентами тензора типа $(2, 0)$.

*Первое решение Задачи 1.8.* Обратная матрица $G^{-1}$ меняется при замене координат по тому же закону, что и матрица билинейной формы на $V^*$:
$$\left(\left(C^{-1}\right)^T GC^{-1}\right)^{-1} = CG^{-1}C^T.$$
Это следует из формул (1.3) и (1.4). Задача 1.8 решена. □

*Второе решение Задачи 1.8.* Компоненты $g^{ij}$ задаются формулой

(1.5) $$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j.$$

(Это покомпонентная запись формулы $G^{-1}G = E$.) Матрица $G^{-1}$ определена однозначно, поэтому достаточно проверить, что формула останется верной, если $g_{kj}$ и $g^{ik}$ меняются как тензоры типа $(0, 2)$ и $(2, 0)$ соответственно. Тогда

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^p}g_{qj}\frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Суммируя по $k'$, получаем

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{qj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta^q_p = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{pj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Используя исходное равенство (1.5), получаем, что

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = \delta^i_j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'},$$

что и требовалось доказать. Задача 1.8 решена. □

*Третье решение Задачи 1.8.* Билинейная форма на $V$ (т.е. тензор типа $(0,2)$) задаётся линейным отображением[4]

$$G : V \to V^*.$$

Поэтому обратное отображение

$$G^{-1} : V^* \to V$$

будет билинейной формой на $V^*$ (т.е. тензором типа $(2,0)$). Задача 1.8 решена. □

**Замечание 1.9.** Для любых линейных пространств $V$ и $W$ (над одним полем $\mathbb{K}$) существует естественная биекция между билинейными отображениями

$$P : V \times W \to \mathbb{K}$$

и линейными отображениями

$$\hat{P} : V \to W^*.$$

[4]Отметим, что если $e_i$ — базис $V$, а $e^i$ — двойственный базис в $V^*$, то матрица этого отображения совпадает с матрицей Грамма $g_{ij}$ в базисе $e_i$.

Отображения $P$ и $\hat{P}$ связаны формулой

$$P(v, w) = \hat{P}(v)(w), \qquad \forall v \in V, w \in W.$$

Поэтому линейные отображения

$$A : V \to V, \qquad B : V \to V^*$$

задают тензоры типа $(1, 1)$ и $(0, 2)$ соответственно.

## 1.3 Нахождение компонент тензора

**Задача 1.10.** Найти компоненту $T_1^{11}$ тензора

$$T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

в базисе

$$f_1 = 3e_2, \qquad f_2 = -e_1.$$

*Ответ в Задаче 1.10.* $T_1^{11} = \frac{2}{3}$.

*Решение Задачи 1.10.* По определению,

$$T_1^{11} = T(f_1, f^1, f^1).$$

Выражение $f_i$ через $e_i$ мы знаем. Остаётся выразить $f^j$ через $e^j$.

**Лемма 1.11.** *Если матрица перехода между базисами равна $A$, то матрица перехода между двойственными базисами равна $(A^T)^{-1}$. Иными словами,*

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & \dots, & e_n \end{pmatrix} A \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1, & \dots, & f^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1, & \dots, & e^n \end{pmatrix} (A^T)^{-1}.\end{gathered}$$

*Доказательство Леммы 1.11.* Нужно доказать, что

$$\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \end{pmatrix} A \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть значения базиса из ковекторов на базисе из векторов. С одной стороны,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \end{pmatrix} A = EA = A.$$

С другой стороны, если

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = X.$$

Таким образом, $X = A$. Лемма 1.11 доказана. □

В данном случае

$$\begin{pmatrix} f_1, & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

Получаем,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Находим компоненту тензора

$$T_1^{11} = T(f_1, f^1, f^1) =$$
$$= \left(e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2\right) \left(3e_2, \frac{1}{3}e^2, \frac{1}{3}e^2\right) =$$
$$= e^1 \left(3e_2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) +$$
$$+2e^2 \left(3e_2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) =$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 1.10 решена. □

**Определение 1.12.** Тензор **(абсолютно) кососимметричен**, если при перестановке любых двух индексов он меняет знак. Иными словами, тензор кососимметричен, если для любой перестановки индексов $\sigma$

$$T_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(k)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) T_{i_1 \ldots i_k}.$$

В частности, компонента кососимметричного тензора равна нулю, если какие-либо его индексы совпадают.

**Задача 1.13.** Пусть $T_{ijk}$ — кососимметричный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компонента $T_{123}$ равна 2 в базисе $e_1, e_2, e_3$. Вычислить его компоненты в базисе

$$f_1 = e_2, \qquad f_2 = -e_3, \qquad f_3 = e_1 + e_2.$$

*Ответ в Задаче 1.13.*

$$T_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (-2),$$

остальные компоненты равны нулю.

*Решение Задачи 1.13.* После замены координат кососимметричный тензор останется кососимметричным, поэтому в данном случае достаточно найти компоненту $T_{1'2'3'}$.

$$T_{1'2'3'} = T(f_1, f_2, f_3) = T(e_2, -e_3, e_1 + e_2) = \\ = -T_{231} - T_{232} = -T_{123} - 0 = -2.$$

Задача 1.13 решена. □

## 1.4 Инвариантные тензоры

**Определение 1.14.** Тензор называется **инвариантным**, если его компоненты не меняются при замене координат.

В этом разделе будем считать[5], что $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ (например, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

**Задача 1.15.** Описать все инвариантные тензоры ранга 2.

*Ответ в Задаче 1.15.*

- Только нулевые тензоры типа $(0, 2)$ и $(2, 0)$ являются инвариантными.
- Инвариантные тензоры типа $(1, 1)$ — это скалярные операторы $\lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

*Решение Задачи 1.15.* Единственные матрицы $A$ и $Q$, которые удовлетворяют условиям

(1.6)
$$CAC^{-1} = A \qquad \text{и} \qquad CQC^T = Q, \qquad \forall C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),$$

это нулевая матрица $Q = 0$ и скалярная $A = \lambda E$. Действительно, для диагональных матриц

$$C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

[5]Для полей конечной характеристики, например $\mathbb{Z}_2$, ответы могут быть другими.

тождество (1.6) имеет вид

$$a_j^i = a_j^i \frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \qquad q_{ij} = q_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

Получаем, что $Q = 0$, а $A$ диагональна. Элементы на диагонали у $A$ равны, т.к. она инвариантна относительно перестановки базисных векторов. Задача 1.15 решена. $\square$

**Задача 1.16.** Доказать, что все ненулевые инвариантные тензоры имеют тип $(p, p)$.

*Решение Задачи 1.16.* При гомотетии $x' = \lambda x$ компоненты $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ тензора типа $(p, q)$ умножаются на $\lambda^{p-q}$. Поэтому при $p \neq q$ единственный инвариантный тензор — нулевой. Задача 1.16 решена. $\square$

**Задача 1.17.** Доказать, что ненулевыми инвариантными тензорами ранга $\leq 4$ являются

(1) скаляры $c \in \mathbb{K}$;

(2) скалярные операторы $\lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$;

(3) и тензоры ранга 4 вида

$$\alpha\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2} + \beta\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{1.7}$$

*Указание.* Тензор инвариантен тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно элементарных преобразований. Их три типа.

(1) Перестановка местами двух координат:

$$x^i \leftrightarrow x^j.$$

(2) Умножение координаты на ненулевое число:

$$x^i \to \lambda x^i.$$

(3) Прибавление к одной координате другой, умноженной на некоторую константу:

$$x^i \to x^i + \lambda x^j.$$

*Решение Задачи 1.17.* Осталось рассмотреть случай тензоров типа $(2,2)$. В этом доказательстве в формулах нет суммирования по повторяющимся верхним и нижним индексам.

(1) *У инвариантного тензора ненулевыми могут быть только компоненты вида*

$$T^{ii}_{ii}, \qquad T^{ij}_{ij}, \qquad T^{ji}_{ij}, \tag{1.8}$$

*где $i \neq j$.*

Действительно, при замене координат, заданной диагональной матрицей

$$x^i \to \lambda^i x^i,$$

все компоненты тензора умножаются на соответствующую константу

$$T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \to \frac{\lambda^{i_1}\lambda^{i_2}}{\lambda^{j_1}\lambda^{j_2}} T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}.$$

Если все $\lambda^i$ — различные числа, то только компоненты с одинаковыми наборами верхних и нижних индексов (1.8) остаются неизменными.

(2) *Все компоненты одного вида из* (1.8) *равны:*

$$T^{ii}_{ii} = T^{i'i'}_{i'i'}, \qquad T^{ij}_{ij} = T^{i'j'}_{i'j'}, \qquad T^{ji}_{ij} = T^{j'i'}_{i'j'},$$

*для любых $i \neq j, i' \neq j'$.* Это так, потому что тензор инвариантен относительно перестановок базисных векторов.

(3) *Покажем, что инвариантные тензоры ранга* 4 *имеют вид* (1.7), *т.е. что*

$$T^{ii}_{ii} = 0.$$

Очевидно, что указанные в ответе тензоры (1.7) инварианты. Прибавляя их линейную комбинацию, всегда можно добиться того, что все коэффициенты, отличные от $T^{ii}_{ii}$, равны нулю:

$$T^{ij}_{ij} = 0, \qquad T^{ji}_{ij} = 0.$$

Если коэффициент $T^{ii}_{ii} \neq 0$, то, деля на него, мы получаем тензор

$$T = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i \otimes e_i \otimes e_i. \tag{1.9}$$

Остаётся показать, что тензор (1.9) не является инвариантным. Действительно, прибавление к $i$-тому базисному вектору $j$-того, умноженного на константу

$$e_i \to e_i + \lambda e_j$$

не сохраняет тензор $T$:

$$\begin{gathered} e^j \otimes e^j \otimes e_j \otimes e_j + e^i \otimes e^i \otimes e_i \otimes e_i \neq \\ \neq \left(e^j - \lambda e^i\right) \otimes \left(e^j - \lambda e^i\right) \otimes e_j \otimes e_j + \\ + e^i \otimes e^i \otimes (e_i + \lambda e_j) \otimes (e_i + \lambda e_j) \,. \end{gathered}$$

Задача 1.17 решена. □

**Задача 1.18.** Пусть $T_{ij}v^i v^j$ — инвариант (т.е. в каждом базисе задан набор чисел $T_{ij}$ так, что для любого вектора $v$ число $T_{ij}v^i v^j$ не зависит от базиса). Доказать, что $T_{ij} + T_{ji}$ — тензор типа $(0, 2)$.

*Решение Задачи 1.18.* В каждом базисе набор чисел $T_{ij}$ задаёт квадратичную форму

$$Q(v) = T_{ij}v^i v^j.$$

По условию форма $Q(v)$ не зависит от выбора базиса. Любая квадратичная форма определяет симметричную билинейную форму по формуле

$$B(u,v) + B(v,u) = Q(u+v) - Q(u) - Q(v).$$

Остаётся заметить, что $T_{ij} + T_{ji}$ — это компоненты билинейной формы $2B(u,v)$. Задача 1.18 решена. $\square$

**Задача 1.19.** Пусть для каждого базиса в $\mathbb{R}^n$ задан набор чисел

$$S^1, \ldots, S^n,$$

причем для любого тензора $T_i$ типа $(0,1)$ "свёртка" $S^i T_i$ не зависит от базиса. Доказать, что числа $S^i$ образуют тензор типа $(1,0)$.

*Первое решение Задачи 1.19.* По условию корректно определено линейное отображение

$$S : V^* \to \mathbb{K},$$

заданное формулой

$$S(T) = S^i T_i.$$

$S$ — вектор, т.к. линейный функционал на ковекторах — это вектор (для конечномерных пространств $V^{**} \cong V$). Задача 1.19 решена. $\square$

*Второе решение Задачи 1.19.* По условию для любого ковектора $T_i$ выполнено

$$S^{i'} T_{i'} = S^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} T_i = S^i T_i.$$

Поскольку числа $T_i$ — произвольные, коэффициенты при них должны быть равны:

$$S^i = S^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Это доказывает, что при замене координат числа $S^i$ меняются как тензор типа $(1, 0)$. Задача 1.19 решена. $\square$

## 1.5 Тензорные поля

Пусть $M$ — гладкое многообразие (поскольку утверждения в следующих задачах локальны, можно считать $M = \mathbb{R}^n$).

**Задача 1.20.** Пусть $x$ — критическая точка гладкой функции $f$ на $M$:

$$df|_x = 0.$$

Доказать, что гессиан[6] функции

$$\operatorname{Hess} f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right),$$

является тензором типа $(0, 2)$ в точке $x \in M$ (т.е. на $T_x M$).

*Решение Задачи 1.20.* Рассмотрим две системы локальных координат $x^i$ и $x^{i'}$. По формуле для производной сложной функции дифференциал функции $df$ — это тензорное поле типа $(1, 0)$ на $M$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

[6] Гессианом мы называем квадратичную форму, соответствующую матрице Гессе — матрице вторых производных функции. Иногда в литературе гессианом также называют определитель матрицы Гессе.

Два раза применяя эту формулу, получаем формулу для второго дифференциала

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

Второе слагаемое, меняющееся не по тензорному закону, исчезает, т.к. $\dfrac{\partial f}{\partial x^k} = 0$. Задача 1.20 решена. □

**Задача 1.21.** Пусть $f$ — гладкая функция от переменных $x^1, \ldots, x^n$, а $P$ — точка, в которой все её производные до порядка $(k-1)$ включительно равны нулю. Доказать, что числа

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} \right|_P ,$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(0, k)$.

*Решение Задачи 1.21.* Так же, как и в Задаче 1.20 мы получаем, что в точке $P$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1'} \ldots \partial x^{i_k'}} = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i_k'}}.$$

Все остальные слагаемые будут равны нулю, т.к. в них присутствуют частные производные меньшего порядка (это легко доказать по индукции). Задача 1.21 решена. □

**Задача 1.22.** Пусть $F(x^1, \ldots, x^n)$ — однородный многочлен степени $k$ в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что числа

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}$$

являются компонентами тензора типа $(0, k)$.

*Решение Задачи 1.22.* Немедленно следует из Задачи 1.21 (точка $P$ — начало координат). Задача 1.22 решена. □

**Определение 1.23. Тензорным полем** типа $(p, q)$ на гладком многообразии $M$ называется семейство тензоров $T_x$, заданных на касательных пространствах $T_x M$, компоненты которых $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$ гладко зависят от точки $x$ в любых локальных координатах на $M$.

**Замечание 1.24.** Тензорное поле также определяют как соответствие, которое любым локальным координатам $x^1$, $\ldots$, $x^n$ сопоставляет набор гладких функций $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$, которые при замене локальных координат $x^i \to x^{i'}$ меняются по тензорному закону (1.1).

Задача 1.20 является частным случаем следующего общего факта.

**Задача 1.25.** Доказать, что если тензорное поле $T$ типа $(p, q)$ на многообразии $M$ обращается в ноль в точке $x$:

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) = 0,$$

то частные производные $\dfrac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k}$ образуют тензор типа $(p, q+1)$ на $T_x M$.

*Решение Задачи 1.25.* Аналогично Задаче 1.20. Задача 1.25 решена. □

## 1.6 Отображение тензорных пространств

Утверждение о том, что линейные отображения

$$A : V \to V, \qquad B : V \to V^*$$

задают тензоры типа $(1, 1)$ и $(0, 2)$ соответственно, можно немного обобщить.

**Задача 1.26.** Пусть $\mathcal{T}_n^m$ — пространство всех тензоров типа $(m, n)$. Показать, что для любого линейного отображения тензорных пространств

$$F : \mathcal{T}_n^m \to \mathcal{T}_q^p$$

его компоненты в стандартном базисе образуют тензор типа $(p + n, q + m)$.

*Указание.* Речь идет о полилинейном отображении

$$F_T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p+n} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q+m} \to \mathbb{K},$$

которое на базисных элементах задаётся формулой

$$\begin{aligned} F_T\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_{n+p}}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{m+q}}\right) = \\ = F\left(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_n} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}\right) \\ \left(e^{i_{n+1}}, \ldots, e^{i_{n+p}}, e_{j_{m+1}}, \ldots, e_{j_{m+q}}\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

*Решение Задачи 1.26.* Отображение $F_T$ является тензором типа $(p+n, q+m)$, поскольку формулу (1.10) можно записать инвариантно, чтобы она не зависела от выбора базиса:

$$\begin{aligned} F_T\left(\alpha^1, \ldots, \alpha^{n+p}, v_1, \ldots, v_{m+q}\right) = \\ = F\left(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^n \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\right) \\ \left(\alpha^{n+1}, \ldots, \alpha^{n+p}, v_{m+1}, \ldots, v_{m+q}\right) \end{aligned}$$

для любых $\alpha^i \in V^*, v_j \in V$. Отображение $F_T$ соответствует отображению $F$, поскольку согласно (1.10) компонента

$$(F_T)^{i_1 \ldots i_{p+n}}_{j_1 \ldots j_{m+q}}$$

равна компоненте образа базисного тензора

$$F\left(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_n} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}\right)^{i_{p+1} \ldots i_{p+n}}_{j_{m+1} \ldots j_{m+q}}.$$

Задача 1.26 решена. $\square$

Компоненты $F^{s_1\ldots s_p\,j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\,i_1\ldots i_m}$ тензора из Задачи 1.26 задаются формулой

$$F(T)^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_q} = \sum_{i_\alpha, j_\beta} F^{s_1\ldots s_p\,j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\,i_1\ldots i_m} T^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_n}.$$

Несложно доказать даже чуть более общее утверждение.

**Утверждение 1.27.** *Если для каждого базиса задан набор чисел*

$$B^{s_1\ldots s_p\,j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\,i_1\ldots i_m},$$

*и для любого тензора $C \in \mathcal{T}^{m+k}_{n+l}$ "свёртка"*

$$A^{s_1\ldots s_p\,u_1\ldots u_k}_{t_1\ldots t_q\,v_1\ldots v_l} = \sum_{i_\alpha, j_\beta} B^{s_1\ldots s_p\,j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\,i_1\ldots i_m} C^{i_1\ldots i_m\,u_1\ldots u_k}_{j_1\ldots j_n\,v_1\ldots v_l}$$

*является тензором типа $(p+k, q+l)$, то набор чисел*

$$B^{s_1\ldots s_p\,j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\,i_1\ldots i_m}$$

*задаёт тензор типа $(p+n, q+m)$.*

# Тема 2

# Операции над тензорами

## 2.1 Теоретический материал

Операции над тензорами:

(1) **Сложение тензоров одного типа и умножение тензора на скаляр**.

$$S, T \to S + T; \qquad \text{и} \qquad T \to \alpha T, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Операции выполняются покомпонентно:

$$(\alpha S + \beta T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \alpha S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \beta T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Иными словами, *пространство $\mathcal{T}^p_q$ тензоров типа* $(p, q)$ *является линейным пространством.*

(2) **Тензорное произведение**. Тензору $S$ типа $(p, q)$ и тензору $T$ типа $(k, l)$ сопоставляется тензор $S \otimes T$ типа $(p + k, q + l)$:

$$(S \otimes T)(\alpha^1, \dots \alpha^p,\ \beta^1, \dots \beta^k;\ u_1, \dots, u_q,\ v_1, \dots v_l) =$$
$$= S(\alpha^1, \dots \alpha^p,\ u_1, \dots, u_q)\ T(\beta^1, \dots \beta^k;\ v_1, \dots v_l),$$

для любых ковекторов $\alpha^i, \beta^j$ и любых векторов $u_k, v_l$. Проще говоря, часть аргументов подставляется в $S$, оставшиеся аргументы — в $T$, и получившиеся числа перемножаются.

Компоненты тензорного произведения суть произведения соответствующих компонент множителей:

$$(S \otimes T)^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+l}} = S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \; T^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{j_{q+1} \dots j_{q+l}}.$$

(3) **Перестановка нижних индексов**[1]:

$$(T^\sigma)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}, \qquad \sigma \in S_q.$$

Аналогично определяется **перестановка верхних индексов**[2].

Наличие этих операций позволяет говорить о *симметричных и кососимметричных тензорах* (см. Раздел 3).

(4) **Свёртка** тензора сопоставляет тензору типа $(p, q)$ тензор типа $(p-1, q-1)$. Компоненты свёртки получаются из компонент старого тензора суммированием по одному верхнему и одному нижнему индексу:

$$T^{i_1 \dots \underline{i_k} \dots i_p}_{j_1 \dots \underline{j_l} \dots j_q} \to T^{i_1 \dots \underline{s} \dots i_p}_{j_1 \dots \underline{s} \dots j_q}.$$

(a) Значение вектора на ковекторе[3] — это свёртка их тензорного произведения

$$\langle \alpha, v \rangle = \alpha_i v^i = (\alpha \otimes v)^i_i\,.$$

[1] Обозначение оправдано тем, что $(T^\sigma)^\tau = T^{\sigma\tau}$ для любых перестановок $\sigma, \tau$.

[2] Перестановка верхних индексов с нижними не является тензорной операцией, см. Задачу 2.6.

[3] Свёртка возникает именно благодаря наличию естественного отображения $V^* \times V \to \mathbb{K}$.

(b) След оператора — простейший пример свёртки

$$\operatorname{tr} A = A_i^i.$$

**Замечание 2.1.** Если даны два тензора $S$ и $T$, то их свёрткой иногда называют свёртку их тензорного произведения $S \otimes T$.

Следующие операции выражаются через ранее описанные:

(1) **Симметризация и кососимметризация (альтернирование)**. Тензору сопоставляется симметричный или кососимметричный (по верхним или нижним индексам) тензор того же вида:

$$\operatorname{Sym} T_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}},$$

$$\operatorname{Alt} T_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}.$$

*Симметричные (кососимметричные) тензоры при симметризации (соответственно альтернировании) переходят в себя*[4].

Аналогично определяются симметризация и альтернирование по любому набору нижних (или верхних) индексов.

Симметризацию по некоторому набору индексов мы также иногда будем обозначать круглыми скобками, а альтернирование — квадратными:

$$T_{(i_1 \dots i_k)} := \operatorname{Sym} T_{i_1 \dots i_k}, \qquad T_{[i_1 \dots i_k]} := \operatorname{Alt} T_{i_1 \dots i_k}. \tag{2.1}$$

[4] См. Задачу 3.11.

(2) **Поднятие и опускание индекса.** Операция опускания индекса — это свёртка тензора с данной билинейной формой $g_{ij}$ на $V$. Пример — опускание первого индекса на первое место:

$$S_{ij_1\ldots j_q}^{i_2\ldots i_p} = g_{ik} T_{j_1\ldots j_q}^{ki_2\ldots i_p}.$$

Аналогично, поднятие индекса — это свёртка тензора с данной билинейной формой $q^{ij}$ на $V^*$. Пример — поднятие последнего индекса на последнее место:

$$S_{j_1\ldots j_{q-1}}^{i_1 i_2\ldots i_p j} = T_{j_1\ldots j_{q-1}k}^{i_1 i_2\ldots i_p} q^{kj}.$$

Поднимать и опускать можно любой индекс на любое место. Желательно чётко указывать, какой индекс на какое место поднимается/опускается[5].

**Замечание 2.2.** Билинейная форма на $V$ — это линейное отображение

$$G : V \to V^*.$$

Невырожденная форма $g_{ij}$ устанавливает изомофизм между $V$ и $V^*$. Поэтому, *если на $V$ задана невырожденная билинейная форма*[6]*, то можно и поднимать, и опускать индексы.* Компоненты $q^{ij}$ соответствующей билинейной формы на $V^*$ — это элементы $g^{ij}$ обратной матрицы[7] $G^{-1}$:

$$q^{ij} = g^{ij}, \qquad g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

[5]Этот момент иногда опускается, если порядок индексов не принципиален, и подойдет любой тип операции.

[6]Например, если $V$ — евклидово, псевдоевклидово или симплектическое пространство.

[7]См. Задачу 1.8.

## 2.2 Примеры решения задач

**Задача 2.3.** Для векторов

$$u = e_1 - 3e_2 + e_3, \qquad v = 3e_1 + e_3$$

и ковекторов

$$\xi = e^2 + e^3, \qquad \eta = e^1 - e^2 + 2e^3$$

(1) вычислить $\xi \otimes \eta(u, v)$,

(2) проальтернировать тензор $\xi \otimes \eta$,

(3) просимметрировать тензор $u \otimes v$.

*Ответ в Задаче 2.3.*

(1) $\xi \otimes \eta(u, v) = -10$.

(2) Искомый тензор:

$$\mathrm{Alt}(\xi \otimes \eta) = -\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1) -$$
$$-\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^1) + \frac{3}{2}(e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2).$$

Короче этот ответ записывается как

$$\mathrm{Alt}(\xi \otimes \eta) = -\frac{1}{2}e^1 \wedge e^2 - \frac{1}{2}e^1 \wedge e^3 + \frac{3}{2}e^2 \wedge e^3.$$

(3) Компоненты тензора $S = \mathrm{Sym}(u \otimes v)$ имеют вид (у симметричного тензора $S^{ij} = S^{ji}$)

$$S^{11} = 3, \quad S^{12} = -\frac{9}{2}, \quad S^{13} = 2,$$
$$S^{22} = 0, \quad S^{23} = -\frac{3}{2}, \quad S^{33} = 1.$$

*Решение Задачи 2.3.* (1) По определению

$$\xi \otimes \eta(u, v) = \xi(u) \cdot \eta(v).$$

Поскольку значение ковектора $\alpha_i e^i$ на векторе $v^j e_j$ равно $\alpha_i v^i$, получаем

$$\begin{gathered}\xi(u) = (e^2 + e^3)(e_1 - 3e_2 + e_3) = -2,\\ \eta(v) = (e^1 - e^2 + 2e^3)(3e_1 + e_3) = 5,\\ \xi(u) \cdot \eta(v) = (-2) \cdot 5 = -10.\end{gathered}$$

(2) По определению операции альтернирования $\operatorname{Alt} T$

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

В данном случае компоненты тензора $T = \xi \otimes \eta$:

$$\begin{gathered}T_{21} = 1, \quad T_{22} = -1, \quad T_{23} = 2,\\ T_{31} = 1, \quad T_{32} = -1, \quad T_{33} = 2.\end{gathered}$$

Так как $T_{[ij]}$ — кососимметричный тензор

$$T_{[ji]} = -T_{[ij]},$$

и достаточно вычислить коэффициенты при $i < j$. Получаем

$$T_{[12]} = -\frac{1}{2}, \quad T_{[13]} = -\frac{1}{2}, \quad T_{[23]} = \frac{3}{2}.$$

Тот же ответ получится, если заметить, что тензор $\xi \otimes \eta$ задаётся матрицей[8]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

а тензор $\operatorname{Alt}(\xi \otimes \eta)$ — матрицей $\frac{A - A^T}{2}$.

[8]Здесь элемент $T^{ij}$ стоит в $i$-той строке и $j$-том столбце матрицы $A$. Эта матрица получается при умножении вектора-столбца $\xi$ на вектор-строку $\eta$.

(3) По определению операции симметризации $\operatorname{Sym} T$

$$T^{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right).$$

В данном случае компоненты тензора $T = u \otimes v$:

$$T^{11} = 3, \quad T^{13} = 1, \quad T^{21} = -9,$$
$$T^{23} = -3, \quad T^{31} = 3, \quad T^{33} = 1.$$

Тот же ответ можно получить, если заметить, что тензор $u \otimes v$ задаётся матрицей[9]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а тензор $\operatorname{Sym}(u \otimes v)$ — матрицей $\frac{A+A^T}{2}$.

Задача 2.3 решена. □

**Задача 2.4.** Поднять (опустить) индекс у тензора

$$T = e_1 \otimes e^2 + 3e_2 \otimes e^1$$

с помощью скалярного произведения, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Ответ в Задаче 2.4.*

$$T_{11} = 6, \quad T_{12} = 9, \quad T_{21} = 1, \quad T_{22} = 1,$$

$$T^{11} = -1, \quad T^{12} = 1, \quad T^{21} = 9, \quad T^{22} = -6.$$

[9]Для симметричных матриц не нужно думать о порядке индексов — ответ для матриц $A$ и $A^T$ одинаковый.

*Решение Задачи 2.4.* По определению операции опускания индекса[10]

$$T_{ij} = g_{ik} T^k_j. \tag{2.2}$$

В данном случае,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 2, \quad g_{21} = 1, \quad g_{22} = 3,$$

$$T^1_1 = 0, \quad T^1_2 = 1, \quad T^2_1 = 3, \quad T^2_2 = 0.$$

Получаем,

$$T_{11} = g_{11} T^1_1 + g_{12} T^2_1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6.$$

Аналогично находятся остальные индексы.

Формула (2.2) — это формула для компонент матричного произведения[11]

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ так же получится, если перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

По определению операции поднятия индекса[12]

$$T^{ij} = T^i_k g^{kj}. \tag{2.3}$$

где $g^{ij}$ — компоненты обратной матрицы к $(g_{ij})$. В данном случае

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

[10] Опускаем верхний индекс на первое место.

[11] Надёжней находить ответ через индексы — не нужно думать о порядке матриц и их транспонировании.

[12] Поднимаем нижний индекс на последнее место.

поэтому

$$g^{11} = 3, \quad g^{12} = -2, \quad g^{21} = -1, \quad g^{22} = 1.$$

Получаем,

$$T^{11} = T^1_1 g^{11} + T^1_2 g^{21} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -1.$$

Аналогично находятся остальные индексы.

Формула (2.3) — это формула для компонент матричного произведения

$$\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ так же получится, если перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Задача 2.4 решена. □

**Задача 2.5.** Найти свёртку тензора

$$2e_1 \otimes e^2 - 3e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^2 - e_3 \otimes e^3.$$

*Ответ в Задаче 2.5.* $T^i_i = -4$.

*Решение Задачи 2.5.* Задача решается прямым вычислением. Свёртка произвольного тензора вида

$$T = \sum_{j=1}^{N} \alpha^j \otimes v_j$$

находится по формуле

$$T^i_i = \sum_{j=1}^{N} \langle \alpha^j, v_j \rangle.$$

Задача 2.5 решена. □

## 2.3 Теоретические задачи

**Задача 2.6.** Доказать, что перестановка индексов для тензоров типа $(1, 1)$ не является тензорной операцией.

*Решение Задачи 2.6.* Несложно подобрать матрицы $C$ и $A$ такие, что

$$\left(CAC^{-1}\right)^T = \left(C^T\right)^{-1} A^T C^T \neq CA^T C^{-1}.$$

Задача 2.6 решена. □

**Задача 2.7.** Пусть $u$ и $v$ — два вектора. Доказать, что

$$u \otimes v = v \otimes u \tag{2.4}$$

тогда и только тогда, когда $u$ и $v$ линейно зависимы.

*Первое решение Задачи 2.7 .* Условие (2.4) эквивалентно тому, что

$$u_i v_j - v_j u_i = 0,$$

т.е. что все $2\times 2$ миноры матрицы $(u, v)$ равны нулю. Это как раз и означает, что ранг этой матрицы равен 1, т.е. векторы линейно зависимы. Задача 2.7 решена. □

*Второе решение Задачи 2.7 .* Тензорные произведения определены инвариантно и не зависят от выбора координат. Если вектора $u, v$ линейно независимы, то их можно включить в базис в качестве первых двух векторов $e_1$ и $e_2$. Тогда

$$e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1.$$

Задача 2.7 решена. □

**Задача 2.8.** Доказать, что если тензор симметричен по индексам $i$ и $j$ и кососимметричен по индексам $j$ и $k$, то он равен нулю.

*Решение Задачи 2.8.* Действительно,

$$T_{ijk} = -T_{ikj} = -T_{kij} = T_{kji} = T_{jki} = -T_{jik} = -T_{ijk}.$$

Задача 2.8 решена. □

**Задача 2.9.** Доказать, что полная свёртка $A_{ij}B^{ij}$ симметричного тензора $A_{ij}$ и кососимметричного тензора $B^{ij}$ равна нулю.

*Решение Задачи 2.9.* Очевидно, что

$$A_{ij}B^{ij} = A_{ji}B^{ij} = -A_{ji}B^{ji}.$$

В то же время сумма не зависит от обозначения индексов, по которым производится суммирование. Задача 2.9 решена. □

### 2.3.1 Определитель как тензорная операция

**Задача 2.10.** Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций[13].

*Ответ в Задаче 2.10.*

$$\det(A^i_j) = n! \left( \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n} \right)^{i_1,\dots,i_n}_{[i_1,\dots,i_n]}$$

Иными словами, нужно

(1) взять $n = \dim V$ раз тензорное произведение оператора $A$ на себя;

[13] Линейные комбинации, перестановка индексов, тензорное произведение и свёртка.

(2) проальтернировать полученный тензор типа $(n, n)$ по всем нижним индексам;

(3) свернуть получившийся тензор $n$ раз, чтобы получить $n! \det A$.

*Указание:* Достаточно проверить эту формулу для полупростых (т.е. диагонализуемых операторов) — они образуют всюду плотное множество в пространстве всех операторов.

*Решение Задачи 2.10.* Проверим формулу для полупростых операторов. Все операции тензорные, поэтому вычисленное число не зависит от базиса, можно сразу рассматривать базис, в котором матрица оператора диагональна.

Пусть $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Тогда

(1) $$\Big(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Big)^{i_1,\ldots,i_n}_{j_1,\ldots,j_n} = \begin{cases} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}, & \text{если все } i_k = j_k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(2) $$\Big(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Big)^{i_1,\ldots,i_n}_{[1,\ldots,n]} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma)\lambda_1 \ldots \lambda_n, \\ \text{если } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, \\ 0, \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(3) Из-за кососимметричности все нижние индексы долж-

ны быть различны

$$\left(\underbrace{A\otimes\dots\otimes A}_{n}\right)^{i_1,\ldots,i_n}_{[i_1,\ldots,i_n]} = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\underbrace{A\otimes\dots\otimes A}_{n}\right)^{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}_{[\sigma(1),\ldots,\sigma(n)]} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\left(\underbrace{A\otimes\dots\otimes A}_{n}\right)^{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}_{[1,\ldots,n]} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\lambda_1\ldots\lambda_n = n!\lambda_1\ldots\lambda_n.$$

Задача 2.10 решена. $\square$

# Тема 3

# Симметричные и кососимметричные тензоры

## 3.1 Теоретический материал

Симметричные и кососососимметричные тензоры можно перемножать, и они образуют две очень простые алгебры.

### 3.1.1 Симметричные тензоры

- Обозначим через $S^k(V)$ пространство симметричных тензоров типа $(k, 0)$ на линейном пространстве $V$.

- **Симметрическое произведение** $\odot$ симметричных тензоров $T_1 \in S^{k_1}(V), T_2 \in S^{k_2}(V)$ — это тензор

  $$T_1 \odot T_2 = \mathrm{Sym}(T_1 \otimes T_2).$$

  По определению $T_1 \odot T_2 \in \mathrm{S}^{k_1+k_2}(V)$.

**Теорема 3.1.** *Прямая сумма всех пространств симметричных тензоров*

$$S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$$

*образует* ***симметрическую алгебру*** $(S(V), \odot)$. *Это (градуированная*[1]*) коммутативная алгебра, изоморфная алгебре многочленов от* $n = \dim V$ *переменных. При этом одночлену* $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ *ставится в соответствие элемент*

$$e_{i_1} \odot \dots \odot e_{i_k} = \mathrm{Sym}\left(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\right).$$

## 3.1.2 Внешняя алгебра

- Обозначим через $\Lambda^k(V)$ пространство кососимметричных тензоров типа $(k, 0)$ на линейном пространстве $V$.
- **Внешнее произведение** $\wedge$ кососимметричных тензоров $S \in \Lambda^p(V), T \in \Lambda^q(V)$ — это тензор

$$S \wedge T = \frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Alt}(S \otimes T). \tag{3.1}$$

  По определению $S \wedge T \in \Lambda^{p+q}(V)$.

**Теорема 3.2.** *Прямая сумма всех пространств кососимметричных тензоров*

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

*образует* ***внешнюю алгебру*** $(\Lambda(V), \wedge)$.

---

[1] Алгебра **градуирована**, если она представлена в виде прямой суммы линейных подпространств $A = \oplus_{i \geq 0} A_i$ т.,ч. $A_i A_j \subset A_{i+j}$. Пример: любой многочлен является суммой однородных, в данном случае индекс $i$ — степень однородного многочлена.

- *Это кососкоммутативная градуированная алгебра: если $S \in \Lambda^p(V), T \in \Lambda^q(V)$, то*

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T. \tag{3.2}$$

- *Если $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства $V$, то элементы*

  $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, *где* $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

  *образуют базис $\Lambda^k(V)$.*

**Замечание 3.3.** Формализм для внешней алгебры $\Lambda(V)$ почти такой же, как для алгебры многочленов.

- Любой элемент $\Lambda(V)$ может быть представлен в виде суммы[2]

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} A^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right).$$

- Умножение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно, поэтому при раскрытии скобок следует помнить, что

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i,$$

  или, более общо, выполнено (3.2).

**Замечание 3.4.** Коэффициент в формуле (3.1) выбран таким образом, что

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} &= k! \operatorname{Alt}(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}. \end{aligned}$$

[2]При рассмотрении внешнего произведения нужно писать знак суммы, потому что суммирование идет не по всем наборам индексов, а только по упорядоченным.

Иными словами, значение внешнего произведения набора векторов $v_i$ на наборе ковекторов $\alpha^j$ — это определитель $\det\left(\langle\alpha^j, v_i\rangle\right)$:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\left(\alpha^1, \ldots, \alpha^k\right) = \begin{vmatrix} \langle\alpha^1, v_1\rangle & \ldots & \langle\alpha^1, v_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha^k, v_1\rangle & \ldots & \langle\alpha^k, v_k\rangle \end{vmatrix}.$$

## 3.2 Операции Sym и Alt

**Задача 3.5.** Найти размерность пространства симметричных и кососиммеричных тензоров типа $(k, 0)$ на $n$-мерном пространстве.

*Ответ в Задаче 3.5.*

- Для кососимметричных тензоров

  $$\dim\Lambda^k(V^n) = C_n^k.$$

  Базис образуют внешние произведения

  $$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(k)}},$$

  где $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

- Для симметричных тензоров

  $$\dim S^k(V^n) = C_{n+k-1}^k.$$

  Базис образуют симметрические произведения

  $$e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}},$$

  где $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.

*Решение Задачи 3.5.* Указанные тензоры образуют базис в соответствующих пространствах.

- Действительно, любой (косо)симметричный тензор может быть представлен как их линейная комбинация.
- Указанные тензоры линейно независимы, так как существуют наборы ковекторов, на которых только один элемент не равен нулю.

Ничего удивительного в том, что для (косо)симметричного тензора мы можем упорядочить индексы, нет. Задача 3.5 решена. □

**Замечание 3.6.** Алгебра симметричных тензоров $S(V)$ изоморфна алгебре многочленов. Напомним, почему количество одночленов степени $k$ от $n$ переменных равно

$$C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{n+k-1}.$$

Любой одночлен $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ задаётся набором чисел

$$k_1, \dots, k_n \geq 0, \qquad k_1 + \dots + k_n = k.$$

Как найти количество способов разбить $k$ единиц на $n$ частей? Взять $n + k - 1$ единиц, после чего заменить $n - 1$ из них на "пробелы" между $n$ числами (если два "пробела" стоят подряд, то число между ними полагается равным 0).

**Задача 3.7.** Доказать, что любой тензор типа $(0, 2)$ однозначно представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров.

*Решение Задачи 3.7.* Для любой матрицы $A$

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Задача 3.7 решена. □

**Задача 3.8.** Доказать, что для тензоров большего ранга утверждение задачи (3.7), вообще говоря, неверно[3].

*Указание.* Посчитать размерности подпространств.

*Решение Задачи 3.8.* Покажем, что сумма размерностей $\dim \Lambda^k(V^n)$ и $\dim S^k(V^n)$ не равна $\dim \mathcal{T}_0^k(V^n)$:

$$C_n^k + C_{n+k-1}^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \\ + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \neq n^k$$

при $k \neq 2$. Заметим, что при $k = 2$ достигается равенство, а при $k > 1, n > 1$ выполнено неравенство

$$\frac{n+k-1}{k} < n,$$

поэтому левая часть растет медленее правой. Остаётся разобрать особые случаи:

- При $k = 1$ все тензоры одновременно симметричны и кососимметричны:

$$\Lambda^1(V^n) = S^1(V^n) = V^n.$$

- Если $n = 1$ и $k > 1$, то ненулевых кососимметричных тензоров нет, и все тензоры симметричны:

$$\Lambda^k(V^1) = 0, \qquad \dim S^k(V^1) = 1.$$

Задача 3.8 решена. □

[3]Единственное исключение — тензоры ранга больше 2 на одномерном пространстве.

**Задача 3.9.** Доказать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования:

$$\mathrm{Sym}\,(T^\sigma) = (\mathrm{Sym}\,T)^\sigma\,, \qquad \mathrm{Alt}\,(T^\sigma) = (\mathrm{Alt}\,T)^\sigma\,.$$

*Решение Задачи 3.9.* Докажем для альтернирования, для симметрирования доказательство аналогично. Пусть $\sigma \in S_k$ — перестановка индексов, а $T$ — произвольный тензор типа $(0,k)$. Тогда

$$\mathrm{Alt}\,(T^\sigma)_{i_1\ldots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k} \mathrm{sgn}\,\tau\,(T^\sigma)_{i_{\tau(1)}\ldots i_{\tau(k)}} =$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k} \mathrm{sgn}\,\tau\, T_{i_{\sigma\tau(1)}\ldots i_{\sigma\tau(k)}}.$$

Если обозначить $\zeta = \sigma\tau$, то полученное выражение равно

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\frac{1}{k!}\sum_{\zeta\in S_k} \mathrm{sgn}\,\zeta\, T_{i_{\zeta(1)}\ldots i_{\zeta(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{Alt}\,T_{i_1\ldots i_k} = (\mathrm{Alt}\,T)^\sigma_{i_1\ldots i_k}\,,$$

что и требовалось доказать. Задача 3.9 решена. □

**Задача 3.10.** Доказать, что полное альтернирование "поглощает" частичное:

$$T_{[[i_1,\ldots,i_k],j_1,\ldots,j_l]} = T_{[i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l]}.$$

Доказать аналогичное утверждение для симметрирования:

$$T_{((i_1,\ldots,i_k),j_1,\ldots,j_l)} = T_{(i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l)}.$$

*Решение Задачи 3.10.* Операции полного и частичного альтернирования легко переставить местами, воспользовавшись Задачей 3.9:

$$T_{[[i_1,\ldots,i_k],j_1,\ldots,j_l]} = \mathrm{Alt}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma\, T_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(k)},j_1\ldots j_l}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \ (\operatorname{Alt} T)_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}, j_1 \dots j_l} = \operatorname{Alt} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}, j_1 \dots j_l}.$$

Последнее равенство верно, т.к. все слагаемые в сумме равны.

Для симметризации доказательство аналогично. Задача 3.10 решена. □

**Задача 3.11.** Для операторов симметризации Sym и альтернирования Alt доказать, что

(1) они являются проекторами, т.е. что

$$\operatorname{Sym}(\operatorname{Sym}) = \operatorname{Sym}, \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt};$$

(2) их композиция равна нулю (если ранг тензора больше 1)

$$\operatorname{Sym}(\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt}(\operatorname{Sym}) = 0.$$

*Решение Задачи 3.11 .* Все утверждения легко следуют из Задачи 3.9.

(1) Равенство $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt}$ является утверждением Задачи 3.10 при $l = 0$. Равенство $\operatorname{Sym}(\operatorname{Sym}) = \operatorname{Sym}$ доказывается аналогично.

(2) Оба равенства доказываются аналогично, докажем последнее

$$\operatorname{Alt}(\operatorname{Sym} T)_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \ (\operatorname{Sym} T)_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \ (\operatorname{Sym} T)_{i_1 \dots i_k} = 0,$$

т.к. в группе $S_k$ поровну чётных и нечётных перестановок.

Задача 3.11 решена. □

## 3.3 Внешнее и симметрическое произведения

**Задача 3.12.** Доказать, что для любых симметричных тензоров

$$S_i \in S^{k_i}(V), \qquad i = 1, \ldots, m$$

выполнено равенство

$$S_1 \odot \cdots \odot S_m = \mathrm{Sym}\left(S_1 \otimes \cdots \otimes S_m\right).$$

Аналогично для любых кососимметричных тензоров

$$A_i \in \Lambda^{k_i}(V), \qquad i = 1, \ldots, m$$

выполнено равенство

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_m = \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \ldots k_n!} \mathrm{Alt}\left(A_1 \otimes \cdots \otimes A_m\right).$$

Эти равенства выполнены вне зависимости от расстановки скобок в левой части, и как следствие симметрическое и внешние произведения ассоциативны.

*Указание.* Согласно Задаче 3.10

$$\mathrm{Sym}\left(\mathrm{Sym}(A_1) \otimes A_2\right) = \mathrm{Sym}\left(A_1 \otimes A_2\right),$$
$$\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(A_1) \otimes A_2\right) = \mathrm{Alt}\left(A_1 \otimes A_2\right).$$

*Решение Задачи 3.12 .* Согласно указанию

$$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 =$$
$$= \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{(k_1 + k_2)! k_3!} \mathrm{Alt}\left(\frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \mathrm{Alt}\left(A_1 \otimes A_2\right) \otimes A_3\right) =$$
$$= \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} \mathrm{Alt}\left(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3\right).$$

Аналогично доказываются утверждения для симметричного произведения и большего числа сомножителей. $\square$

## 3.4 Линейные дифференциальные формы

В этом разделе $k$-формами мы называем кососимметричные тензоры типа $(0,k)$. Подчеркнём, что речь идет о тензорах, а не о тензорных полях. Линейные пространства предполагаются конечномерными.

**Задача 3.13.** Доказать, что 1-формы $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \neq 0. \tag{3.3}$$

*Решение Задачи 3.13.* Если ковектора $\alpha^i$ линейно независимы, то их можно дополнить до базиса $\alpha^1, \ldots \alpha^n$ пространства $V^*$. Форма объёма $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \neq 0$. □

**Задача 3.14.** Доказать, что $p$-форму $\omega$ можно представить в виде

$$\omega = \alpha \wedge \theta,$$

где $\alpha$ — ненулевая 1-форма, тогда и только тогда, когда

$$\alpha \wedge \omega = 0.$$

*Решение Задачи 3.14.* Дополним $\alpha$ до базиса

$$e^1 = \alpha, e^2, \ldots e^n$$

пространства $V^*$. Если $\alpha \wedge \omega = 0$, то в форме $\omega$ все слагаемые имеют вид $e^1 \wedge \theta_i$. □

**Задача 3.15.** Доказать, что любая $(n-1)$-форма в $n$-мерном пространстве разложима (т.е. является внешним произведением 1-форм.)

*Указание.* Можно воспользоваться Задачей 3.14. Любая форма $\eta \in \Lambda^{n-1}(V)$ задаёт линейное отображение

$$L_\eta : \Lambda^1(V) \to \Lambda^n(V) \approx \mathbb{K},$$
$$\alpha \to \alpha \wedge \eta.$$

*Решение Задачи 3.15.* Т.к. $L_\eta$ — линейное отображение,

$$\dim \operatorname{Ker} L_\eta \geq n - 1.$$

Возьмем базис $e^1, \dots, e^n$ т.,ч. $e^2, \dots, e^n \in \operatorname{Ker} L_\eta$. Так как любая $(n-1)$-форма имеет вид

$$\eta = \sum_i C_i e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge \dots e^n,$$

и базис выбран т.,ч.

$$e^2 \wedge \eta = \dots = e^n \wedge \eta = 0,$$

форма $\eta$ имеет вид

$$\eta = C_1 e^2 \wedge \dots \wedge e^n.$$

Задача 3.15 решена. □

**Задача 3.16.** Доказать, что 2-форму $\omega$ можно представить в виде

$$\omega = \alpha \wedge \beta,$$

где $\alpha, \beta$ — 1-формы, тогда и только тогда, когда

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

*Указание.* Воспользоваться следующей теоремой о каноническом виде кососимметричной билинейной формы.

**Теорема 3.17.** *Для любой кососимметричной билинейной формы $\Omega$ на конечномерном линейном пространстве*[4] *$V$ существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица $\Omega$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

*где $E_k$ — единичная $k \times k$ матрица.*

**Следствие 3.18.** *Перенумерацией координат матрицу* (3.4) *можно привести к виду*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

*Решение Задачи 3.16.* По Следствию 3.18 линейную 2-форму $\omega$ всегда можно привести к виду

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 + \cdots + dx^{2k-1} \wedge dx^{2k}.$$

В этом базисе легко видно, что для $\omega \neq 0$

$$\omega \wedge \omega = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = e^1 \wedge e^2.$$

Последнее эквивалентно тому, что ранг матрицы равен 2. Задача 3.16 решена. $\square$

[4] В этой теореме $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, чтобы можно было отличать кососимметричные формы от симметричных.

## 3.5 Форма объёма

**Задача 3.19.** Пусть $g_{ij}$ — (невырожденная[5]) билинейная форма на вещественном линейном пространстве $V^n$. Доказать, что выражение

$$\sqrt{|\det g_{ij}|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{3.6}$$

меняется как тензор типа $(0, n)$ при замене координат $x^i$ с положительным якобианом[6].

*Решение Задачи 3.19.* Перейдем от координат $(x^i)$ к координатам $\left(x^{i'}\right)$

$$\sqrt{|\det g_{i'j'}|}dx^{1'} \wedge \cdots \wedge dx^{n'} =$$
$$= \sqrt{\left|\det g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right|}\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^{i_n}}dx^{i_n}\right).$$

- В подкоренном выражении за скобки выносится модуль определителя матрицы $\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)$

$$\sqrt{\left|\det g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right|} = \sqrt{|\det g_{ij}|}\left|\det\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right|.$$

  В матричном виде это утверждение ещё нагляднее. Если $B = C^T B' C$, то

$$\det B = \det\left(C^T B' C\right) = (\det C)^2 \det B'.$$

[5] Вырожденной билинейной форме соответствует нулевая форма объёма.

[6] Якобиан здесь — определитель матрицы Якоби.

- Во внешнем произведении, если упорядочить координаты $x^{i'}$, возникает определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)$.

$$\left(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\prod_{i=1}^n\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\sigma(i)}}\right)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n=$$
$$=\det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n.$$

- Если определитель якобиана положительный

$$\det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)>0,$$

то полученные два числа сокращаются.

Задача 3.19 решена. □

**Замечание 3.20.** Утверждение в Задаче 3.19 специально сформулировано таким образом, чтобы оно было верно как для тензоров на линейных пространствах, так и для тензорных полей на многообразиях.

**Замечание 3.21.** Необычная формулировка Задачи 3.19 связана с тем, что выражение (3.6) задаёт не тензор, а **псевдотензор**. Псевдотензор отличается от тензора наличием знака якобиана в формуле преобразования компонент
(3.7)
$$T^{i'_1\dots i_p'}_{j_1'\dots j_q'}=\operatorname{sgn}\left(\det\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}.$$

**Следствие 3.22.** *Если на пространстве $V$ задана ориентация, то форму объёма* (3.6) *можно считать тензором.*

## 3.6 Оператор двойственности Ходжа

Пусть $V^n$ — $n$-мерное вещественное линейное пространство, на котором заданы

(1) скалярное произведение[7] $g$,

(2) ориентация.

**Оператор двойственности Ходжа**[8] $*$ — операция, которая отображает (линейные) $k$-формы на $V$ в $(n-k)$-формы:

$$* : \Lambda^k(V^n) \to \Lambda^{n-k}(V^n), \qquad 0 \le k \le n$$

и которая характеризуется следующим свойством. Если $e_1, \dots, e_n$ — положительно ориентированный ортонормированный базис $V$, то

$$*e^1 \wedge \dots \wedge e^k = e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n.$$

Переставляя индексы, получаем чуть более общую формулу

$$\begin{aligned} &*e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где индексы $j_1 \dots, j_{n-k}$ дополняют набор индексов $i_1 \dots, i_k$ до полного набора $1, \dots, n$.

**Задача 3.23.** Доказать следующие утверждения.

(1) Для любой $k$-формы $\alpha$

$$* (*\alpha) = (-1)^{k(n-k)}\alpha. \tag{3.9}$$

[7] Т.е. $g$ — симметричный положительно определённый тензор типа $(0, 2)$.

[8] Также **звезда Ходжа** или **дуальность Ходжа**.

(2) Для любых $k$-форм $\alpha, \beta$

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha. \tag{3.10}$$

*Решение Задачи 3.23.* Формулы (3.11) и (3.10) линейны по $\alpha$ и $\beta$, поэтому достаточно доказывать их для базисных $k$-форм

$$\alpha = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \qquad \beta = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}. \tag{3.11}$$

(1) После перенумерации координат можно считать, что базисная $k$-форма имеет вид

$$\alpha = e^1 \wedge \dots \wedge e^k.$$

Остаётся дважды применить формулу (3.8):

$$\begin{gathered} *\left(*\alpha\right) = *\left(e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n\right) = \\ = \operatorname{sgn}(\sigma) e^1 \wedge \dots \wedge e^k = (-1)^{k(n-k)}\alpha, \end{gathered}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix}$.

(2) Обозначим индексы базисных форм (3.11) через $I = \{i_1 \dots, i_k\}$ и $J = \{j_1 \dots, j_k\}$. Несложно явно проверить, что

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \begin{cases} 0, & I \neq J, \\ e^1 \wedge \dots \wedge e^n, & I = J. \end{cases} \tag{3.12}$$

Задача 3.23 решена. □

Дадим теперь инвариантное определение звезды Ходжа, не зависящее от выбора базиса.

**Определение 3.24.** Фиксируем форму объема[9] на пространстве $(V^n, g)$:

$$\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{3.13}$$

**Оператор двойственности Ходжа** отображает $k$-форму $\alpha$ в $(n-k)$-форму $*\alpha$ по формуле:

$$(*\alpha)_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!}\omega_{i_1\dots i_k, i_{k+1}\dots i_n}\alpha^{i_1\dots i_k}. \tag{3.14}$$

Здесь $\alpha^{i_1\dots i_k}$ получается из $\alpha_{i_1\dots i_k}$ поднятием индексов при помощи скалярного произведения $g$:

$$\alpha^{i_1\dots i_k} = g^{i_1 j_1}\dots g^{i_k j_k}\alpha_{j_1\dots j_k}.$$

Звезда Ходжа также может быть определена по следующей формуле (3.16).

**Задача 3.25.** Продолжим скалярное произведение $g$ с $V^n$ на $\Lambda^k(V^n)$, на разложимых $k$-формах

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \qquad \beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$$

положив его равным

$$(\alpha, \beta) = \det\left((\alpha_i, \beta_j)\right). \tag{3.15}$$

Доказать, что для любых $k$-форм $\alpha$ и $\beta$

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\omega. \tag{3.16}$$

Также доказать, что звезда Ходжа $*$ — ортогональный оператор:

$$(*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta). \tag{3.17}$$

[9] Форма объёма на ориентированном евклидовом пространстве — это $n$-форма, см. Раздел 3.5

*Решение Задачи 3.25.* Формулы (3.16) и (3.17) также линейны по $\alpha$ и $\beta$, поэтому достаточно доказывать их для базисных форм (3.11).

- По формуле (3.15), если $e^1, \dots, e^n$ — ортономированный базис в $V^* = \Lambda^1(V)$, то базисные $k$-формы $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ образуют ортонормированный базис $\Lambda^k(V)$.
- Звезда Ходжа переводит ортонормированный базис в ортонормированный, поэтому выполнено (3.17).
- Формула (3.16) следует из формулы (3.12).

Задача 3.25 решена. □

**Задача 3.26.** Выписать явные формулы для оператора $*$ в $\mathbb{R}^3$ (на формах степени $0, 1, 2, 3$) для случая, когда метрика диагональна.

*Ответ в Задаче 3.26.* Пусть метрика на $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ имеет вид

$$ds^2 = I_x dx^2 + I_y dy^2 + I_z dz^2.$$

Тогда форма объема равна

$$\omega = \sqrt{|I_x I_y I_z|} dx \wedge dy \wedge dz,$$

а звезда Ходжа следующим образом действует на базисных формах

$$\begin{gathered}
*1 = \omega, \quad * \omega = 1, \\
*dx = \frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x} dy \wedge dz, \quad * dy = \frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_y} dx \wedge dz, \\
*dz = \frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_z} dx \wedge dy, \quad * (dy \wedge dz) = \frac{I_x}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}} dx, \\
* (dx \wedge dz) = \frac{I_y}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}} dy, \quad * (dx \wedge dy) = \frac{I_z}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}} dz.
\end{gathered}$$

*Решение Задачи 3.26.* Все формулы можно проверить явно по определению оператора $*$. Заметим, что благодаря тождествам $*1 = \omega$ и (3.11) достаточно описать действие оператора $*$ на 1-формах. Для примера явно вычислим $*dx$ (двумя способами).

(1) Применим формулу (3.14). По определению, коэффициент формы объема

$$\omega_{123} = \sqrt{|I_x I_y I_z|}.$$

После поднятия индекса $dx$ переходит в $\dfrac{1}{I_x}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Откуда

$$(*dx)_{23} = \frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x}.$$

(2) Применим формулу (3.16). В данном случае метрика диагональна, поэтому

$$(dx, dx) = \frac{1}{I_x}, \qquad (dx, dy) = 0, \qquad (dx, dz) = 0.$$

Отсюда немедленно получаем, что в $*dx$ только коэффициент при $dy \wedge dz$ не равен нулю, и он равен $\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x}$.

Задача 3.26 решена. □

**Замечание 3.27.** Оператор двойственности Ходжа можно определить на любом ориентированном римановом многообразии $(M^n, g)$ по формуле (3.14). Формулы (3.10), (3.11), (3.16) и (3.17) останутся выполненными, т.к. они $C^\infty(M)$-линейны по $\alpha$ и $\beta$.

# Часть II

# Тензорные поля

# Тема 4

# Векторные поля

Мы предполагаем, что читатели знакомы с понятием гладкого многообразия и с базовыми понятиями топологии. Есть довольно много книг, включая [3–12], в которых они довольно подробно описываются.

## 4.1 Определение касательного вектора

- **Касательный вектор** к многообразию можно определить тремя эквивалентными способами:

  (1) Как набор чисел, меняющийся по определённому закону при замене координат (т.е. как тензор типа $(1, 0)$).

  (2) Как класс эквивалентных кривых.

  (3) Как дифференциальный оператор на пространстве гладких функций.

  В разных ситуациях удобно использовать различные определения вектора.

- **Касательное пространство** $T_pM$ к многообразию $M$ в точке $p$ — это множество всех касательных векторов в этой точке.

- **Векторное поле** — это семейство (касательных) векторов, компоненты которых гладко зависят от точки.

### 4.1.1 Вектор как тензор типа $(1, 0)$

**Определение 4.1. Касательный вектор** в точке $p$ гладкого многообразия $M$ — это отображение, которое сопоставляет каждой системе локальных координат в окрестности точки $p$ набор чисел $(v^1, \dots, v^n)$, которые при замене координат меняются по следующему закону:

$$v^{i'} = \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i. \tag{4.1}$$

**Задача 4.2.** Рассмотрим вектор $(1, 0)$ в точке $(x, y)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти его компоненты в полярных координатах.

*Ответ в Задаче 4.2.*[1] $\left(\cos\varphi, -\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)$.

*Решение Задачи 4.2.* Честно применим формулу (4.1). На плоскости в полярных координатах

$$\begin{pmatrix} v^r \\ v^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

[1] Лучше использовать запись $\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, чтобы не перепутать, какие компонеты к каким координатам относятся.

Остаётся вспомнить, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Задача 4.2 решена. □

### 4.1.2 Касательный вектор кривой

**Определение 4.3.** Рассмотрим кривые $\gamma(t)$, проходящие через точку $p$ при $t = 0$. Будем считать две такие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ эквивалентными, если их вектора скорости в точке $p$ равны

$$\left.\frac{d\gamma_1}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\gamma_2}{dt}\right|_{t=0}.$$

**Касательный вектор** в точке $p$ гладкого многообразия $M$ — это класс эквивалентных кривых, проходящих через эту точку.

**Задача 4.4.** Доказать, что касательное пространство $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ в единице $E$ к группе $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ состоит из матриц[2] с нулевым следом

$$\mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \quad \mathrm{tr}A = 0\}.$$

*Решение Задачи 4.4.* То, что любой касательный вектор должен удовлетворять этому условию, легко показать, взяв произвольную кривую $X(t) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ и продифференцировав тождество

$$\det X(t) = E.$$

Несложно проверить, что

$$\det\left(E + tA + o(t^2)\right) = \mathrm{tr}A + o(t^2).$$

[2]Поскольку $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ — подмногообразие $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, мы можем считать каждое его касательное пространство подпространством соответствующего касательного пространства $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Размерность этого подпространства совпадает с размерностью подмногообразия

$$\dim \mathrm{sl}\,(n, \mathbb{R}) = \dim \mathrm{SL}\,(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1,$$

поэтому это подпространство и касательное пространство совпадают. Задача 4.4 решена. □

### 4.1.3 Векторы как дифференциальные операторы

**Определение 4.5.** **Касательное векторное поле** на гладком многообразии $M$ — это $\mathbb{R}$-линейный[3] оператор на пространстве гладких функций $\mathrm{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} v : \mathrm{C}^\infty(M) &\to \mathrm{C}^\infty(M), \\ f &\to v(f), \end{aligned} \tag{4.2}$$

удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

**Замечание 4.6.** Касательный вектор может быть определён аналогично как удовлетворяющее тождеству Лейбница $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$v : \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}.$$

**Задача 4.7.** Найти производную функции $f$ в точке $P$ по направлению вектора $\xi$:

$$f = x^2y + xz^2 - 2, \qquad P = (1, 1, -1), \qquad \xi = (1, -2, 4).$$

*Ответ в Задаче 4.7.* $\xi(f)(P) = -7.$

[3] $\mathbb{R}$-линейность означает, что $v(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 v(f_1) + c_2 v(f_2)$ для любых $c_i \in \mathbb{R}, f_i \in C^\infty(M)$.

*Решение Задачи 4.7.* Если векторное поле $v$ в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то производная функции $f$ вдоль $v$ равна

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

В данном случае

$$\xi = (1, -2, 4) = 1\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y} + 4\frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому

$$\xi(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{\partial f}{\partial z}\right)(P) =$$
$$= \big((2xy + z^2) - 2(x^2) + 4(2xz)\big)\,(P) = 3 - 2 - 8 = -7.$$

Задача 4.7 решена. □

Покажем, что любое касательное векторное поле в смысле Определения 4.5 является линейным дифференциальным оператором.

**Задача 4.8.** Доказать, что любой удовлетворяющий тождеству Лейбница линейный оператор

$$\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$$

в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Задача 4.8 может быть решена при помощи леммы Адамара.

**Лемма 4.9** (Лемма Адамара). *Пусть*

$$f : U \to \mathbb{R}$$

*— гладкая функция, определённая в выпуклой окрестности $U$ точки $0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существуют такие гладкие функции*

$$g_1, \ldots, g_n : U \to \mathbb{R},$$

*что для всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ имеет место равенство*

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \, g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

*Доказательство Леммы 4.9.* Лемма Адамара доказывается при помощи формулы Ньютона–Лейбница:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),$$

где

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt.$$

Лемма 4.9 доказана. □

*Решение Задачи 4.8.* Нужно доказать, что в любых локальных координатах $x^i$ существуют такие функции $v^i$, что

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это возможно, только если

$$v^i = v(x^i).$$

Остаётся показать, что

$$v(f) = v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что мы доказываем утверждение в начале координат. Дважды используя лемму Адамара, получаем, что любая функция имеет вид

$$f(x) = f(0) + \sum_i x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + \sum_{i,j} x^i x^j h_{ij}(x).$$

Посмотрим, как действует оператор $v$ на каждом из этих слагаемых:

- $v(f(0)) = 0$. Более того, $v(c) = 0$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$, так как

  $$v(c) = cv(1) = cv(1 \cdot 1) = c(v(1) + v(1)) = 2cv(1).$$

- Для второго слагаемого по формуле Лейбница

  $$v\left(x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\right) = v\left(x^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + x^i v\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\right).$$

  При $x^i = 0$ второе слагаемое исчезает.

- Производная третьего слагаемого в нуле равна нулю:

  $$v\left(x^i x^j h_{ij}(x)\right) = v(x^i) x^j h_{ij}(x) + x^i v\left(x^j h_{ij}(x)\right),$$

  поскольку в каждом слагаемом будут нулевые сомножители $x^i = 0$.

В производной выжило только одно слагаемое. Мы получили требуемое равенство:

$$v(f)(0) = v\left(x^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

Задача 4.8 решена. $\square$

## 4.2 Градиент функции

**Определение 4.10.** Пусть $f$ — гладкая функция на римановом[4] многообразии $(M, g)$. **Градиент** функции $f$ — векторное поле $\operatorname{grad} f$, получающееся из дифференциала $df$ поднятием индекса:

$$\operatorname{grad} f^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{4.3}$$

**Задача 4.11.** Записать градиент функции $\operatorname{grad} f$ в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в сферических координатах в пространстве $\mathbb{R}^3$.

*Ответ в Задаче 4.11.* На плоскости в полярных координатах

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

В пространстве в сферических координатах[5]

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

*Решение Задачи 4.11 .* Нужно применить формулу (4.3). В матричном виде формула (4.3) имеет вид

$$\operatorname{grad} f = G^{-1} \mathrm{d} f,$$

где $\operatorname{grad} f$ и $\mathrm{d}f$ записаны как вектор-столбцы.

---

[4]**Риманово многообразие** $(M, g)$ — это многообразие, на котором задано симметричное положительно определённое тензорное поле типа $(0, 2)$. Иными словами, в каждом касательном пространстве $T_xM$ задано евклидово скалярное произведение, гладко зависящее от точки $x \in M$.

[5]Где $\theta$ — угол с осью $z$.

В полярных координатах метрика $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, т.е. в координатах $(r, \varphi)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$g^{rr} = 1, \qquad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2},$$

откуда легко получается ответ. В сферических координатах вычисления аналогичны. Задача 4.11 решена. □

**Задача 4.12.** Доказать, что для любой гладкой функции $f$ на римановом многообразии $(M, g)$ её градиент $\operatorname{grad} f$

(1) ортогонален её поверхности уровня[6] $\{f = \mathrm{const}\}$;

(2) задаёт направление наибольшего роста функции $f$ в соответствующей точке.

*Указание.* В п. 1 нужно доказать, что для любого $u \in T_x N$, где

$$N = \{f = \mathrm{const}\},$$

выполнено тождество

$$(u, \operatorname{grad} f) = g_{ij} u^i \operatorname{grad} f^j = 0.$$

В п. 2 нужно доказать, что среди векторов длины $\|\operatorname{grad} f\|$, производная функции $f$ вдоль $\operatorname{grad} f$ максимальна:

$$\operatorname{grad} f(f) = \max_{\|v\| = \|\operatorname{grad} f\|} v(f).$$

[6]Мы считаем поверхность уровня неособой, т.е. $\operatorname{grad} f \neq 0$.

*Решение Задачи 4.12.* (1) Действительно,

$$g_{ij}u^i \operatorname{grad} f^j = g_{ij}u^i g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^k} =$$
$$= \delta_i^k u^i \frac{\partial f}{\partial x^k} = u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = u(f) = 0,$$

т.к. $u$ — касательный вектор к поверхности уровня.

(2) Из п. 1 следует, что пространство распадается в ортогональную прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = T_xN \oplus \langle \operatorname{grad} f\rangle.$$

Поэтому любой вектор $v$ длины $\|v\| = \|\operatorname{grad} f\|$ имеет вид

$$v = \cos\varphi \operatorname{grad} f + \sin\varphi\, u$$

для некоторого вектора $u \in T_xN$. В данном случае

- $u(f) = 0$, т.к. $u \in T_xN$.
- $\operatorname{grad} f(f) > 0$, т.к. метрика $g_{ij}$ положительно определена:

$$\operatorname{grad} f(f) = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} \geq 0.$$

Поэтому

$$v(f) = \cos\varphi \operatorname{grad} f(f) \leq \operatorname{grad} f(f),$$

и равенство достигается только при $\varphi = 0$, т.е. при $v = \operatorname{grad} f$.

Задача 4.12 решена. □

## 4.3 Коммутатор векторных полей

**Определение 4.13. Коммутатор** векторных полей — это коммутатор соответствующих дифференциальных операторов, т.е.

$$[u,v](f) := u(v(f)) - v(u(f)).$$

**Задача 4.14.** Проверить, что коммутатор векторных полей $[u,v]$ — снова векторное поле, и что в локальных координатах $x^i$ компоненты коммутатора задаются формулой

$$[u,v]^i = \left( u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right). \tag{4.4}$$

*Решение Задачи 4.14.* Достаточно проверить, что в каждой системе локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ коммутатор $[u,v]$ задаётся дифференциальным оператором вида

$$w^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

и что его компоненты $w^i$ задаются формулой (4.4). Иными словами, нужно показать, что

$$[u,v](f) = \left( u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это проверяется явно:

$$[u,v](f) = u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) - v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

При раскрытии скобок слагаемые

$$u^j v^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}, \qquad \text{и} \qquad - v^j u^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}$$

сокращаются, и мы получаем требуемое равенство. Задача 4.14 решена. □

**Задача 4.15.** Вычислить коммутатор векторных полей

$$u = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \qquad v = (-y, x)$$

на плоскости с координатами $x, y$.

*Указание.* В полярных координатах

$$u = \partial_r, \qquad v = \partial_\varphi.$$

*Ответ в Задаче 4.15.* $[u,v] = 0$

*Решение Задачи 4.15.* Коммутатор — векторное поле, поэтому достаточно доказать равенство $[u,v] = 0$ в полярных координатах. Это так, потому что коммутатор базисных векторных полей равен нулю. Задача 4.15 решена. $\square$

**Задача 4.16.** Пусть $u, v$ — векторные поля на многообразии $M$, касающиеся подмногообразия $N$. Доказать, что векторное поле $[u,v]$ тоже касается подмногообразия $N$, и что

$$\left[ u\big|_N, v\big|_N \right] = [u,v]\big|_N.$$

*Указание.* Воспользоваться следующим утверждением, характеризующем подмногообразия.

**Лемма 4.17.** *Если $N^m \subset M^{n+m}$ — подмногообразие, то для любой точки $x \in N^m$ существуют локальные координаты $(x^1, \ldots, x^{n+m})$, в которых подмногообразие $N^m$ является подпространством*

$$x^{m+1} = \mathrm{const}, \qquad \ldots \qquad x^{n+m} = \mathrm{const}\,.$$

*Решение Задачи 4.16.* В координатах из Леммы 4.17 векторные поля $u$ и $v$ в точках подмногообразия $N$ имеют вид

$$u = \left(u^1, \ldots, u^m, 0, \ldots, 0\right), \qquad v = \left(v^1, \ldots, v^m, 0, \ldots, 0\right).$$

Посмотрим на выражение для коммутатора

$$[u, v]^i = \sum_{j=1}^{n+m} \left( u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right). \tag{4.5}$$

- При $1 \le i \le n$ формулы для компонент коммутатора на $M$ и $N$ совпадают:

  $$[u, v]^i = \sum_{j=1}^{m} \left( u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right),$$

  поскольку по условию

  $$u^j = v^j = 0, \qquad 1 \le j \le n. \tag{4.6}$$

- Пусть $i > m$. Покажем, что

  $$[u, v]^i = 0,$$

  это как раз и означает, что коммутатор $[u, v]$ касается $N$. По условию $u^i = v^i = 0$ на поверхности $N$:

  $$x^{m+1} = \mathrm{const}, \qquad \dots \qquad x^{n+m} = \mathrm{const}\,.$$

  Вектора $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ являются касательными векторами к этой поверхности. Поэтому

  $$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = 0, \qquad i > m, \quad 1 \le j \le m.$$

  С учетом (4.6) все слагаемые в выражении для коммутатора (4.5) равны нулю.

Задача 4.16 решена. $\square$

**Задача 4.18.** Векторное поле $v_A$ в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ называется линейным, если

$$v_A^i(x^1, \ldots, x^n) = A_k^i x^k,$$

где $A$— некоторая постоянная матрица. Доказать, что коммутатор линейных векторных полей есть снова линейное векторное поле, и что

$$[v_A, v_B] = -v_{[A,B]}.$$

*Решение Задачи 4.18.* Доказательство прямым вычислением:

$$[v_A, v_B]^i = \left(A_k^j x^k\right) \frac{\partial\left(B_l^i x^l\right)}{\partial x^j} - \left(B_k^j x^k\right) \frac{\partial\left(A_l^i x^l\right)}{\partial x^j} =$$
$$= \left(A_k^j B_j^i - B_k^j A_j^i\right) x^k = [B, A]_k^i \, x^k.$$

Задача 4.18 решена. □

**Задача 4.19.** Рассмотрим векторные поля

$$\xi = y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial y}$$

на плоскости. Существуют ли локальные координаты $(u, v)$ в окрестности точки $x = 1, y = 1$ такие, что

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial v}.$$

Иными словами, можно ли одновременно выпрямить векторные поля $\xi, \eta$ в окрестности точки $x = 1, y = 1$?

*Решение Задачи 4.19.* Нет, векторные поля $\xi$ и $\eta$ нельзя выпрямить, потому что их коммутатор не равен нулю

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x} \neq 0.$$

Коммутатор — векторное поле, поэтому его равенство нулю не зависит от выбора координат. Задача 4.19 решена. □

**Замечание 4.20.** Верен следующий общий факт.

**Теорема 4.21.** *Набор ненулевых векторных полей* $v_1, \ldots, v_k$ *можно одновременно выпрямить в окрестности точки, т.е. можно найти такие локальные координаты* $x^1, \ldots, x^n$ *т.,ч.*

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

*тогда и только тогда, когда эти векторные поля попарно коммутируют*

$$[v_i, v_j] = 0.$$

**Задача 4.22.** Доказать, что векторные поля на гладком многообразии $M$ удовлетворяют **тождеству Якоби**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \tag{4.7}$$

*Указание:* Можно доказать более общее утверждение — тождеству Якоби удовлетворяет множество линейных операторов $\mathrm{End}(V)$ на любом линейном пространстве $V$.

*Решение Задачи 4.22.* Действительно, для любых линейных операторов $A, B, C$

$$\begin{aligned}
[A, [B, C]] &= ABC - ACB - BCA + CBA, \\
[B, [C, A]] &= BCA - BAC - CAB + ACB, \\
[C, [A, B]] &= CAB - CBA - ABC + BAC.
\end{aligned}$$

Складывая эти выражения, получаем ноль. Векторные поля — линейные операторы на $C^\infty(M)$, поэтому для них тоже выполнено (4.7). Задача 4.22 решена. □

## 4.4 Тензор Нийенхейса

**Задача 4.23.** Пусть $A^i_j$ — тензорное поле типа $(1, 1)$ на многообразии $M$. Доказать, что формула

$$N(X, Y) = A^2\,[X, Y] - A\,[AX, Y] - A\,[X, AY] + [AX, AY], \tag{4.8}$$

где $X, Y$ — векторные поля на $M$, определяет тензорное поле типа $(1,2)$.

**Определение 4.24.** Тензор $N$, заданный формулой (4.8), называется **тензором Нийенхейса** поля эндоморфизмов $A$.

*Решение Задачи 4.23.* В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на $M$ компоненты тензора $N$ задаются по формуле

$$N_{ij}^k = N\left(\partial_i, \partial_j\right)^k. \tag{4.9}$$

Нужно доказать, что компоненты меняются по тензорному закону:

$$N_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}N_{ij}^k.$$

Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

**Утверждение 4.25.** *Отображение* $N(X, Y)$*, заданное формулой* (4.8)*, является* $C^\infty(M)$ *линейным по* $X$ *и* $Y$*, т.е. для любых векторных полей* $X_i, Y_j$

$$\begin{aligned} N(X_1 + X_2, Y) &= N(X_1, Y) + N(X_2, Y), \\ N(X, Y_1 + Y_2) &= N(X, Y_1) + N(X, Y_2), \end{aligned}$$

*и для любых гладких функций* $f$ *и* $g$ *выполнено*

$$N(fX, gY) = fgN(X, Y). \tag{4.10}$$

Действительно, формула (4.9) следует из Утверждения 4.25, поскольку тогда

$$N\left(\partial_{i'}, \partial_{j'}\right)^{k'} = N\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_j\right)^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}N\left(\partial_i, \partial_j\right)^k.$$

*Доказательство Утверждения 4.25.* Нетривиальной является только формула (4.10). Для любых функций $f, g$ и любых векторных полей $X, Y$ выполнена следующая формула для коммутатора:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Поэтому в данном случае

$$A^2[fX, gY] = fgA^2[X, Y] + fX(g)A^2Y - gY(f)A^2X,$$
$$A[A\,(fX)\,, gY] = fgA[AX, Y] + fAX(g)AY - gY(f)A^2X,$$
$$A[fX, A\,(gY)] = fgA[X, AY] + fX(g)A^2Y - gAY(f)AX,$$
$$[A\,(fX)\,, A\,(gY)] = fg[AX, AY] + fAX(g)AY - gAY(f)AX.$$

Складывая эти равенства с нужными знаками, получаем (4.10). Утверждение 4.25 доказано. □

Задача 4.23 решена. □

Тензор Нийенхейса $N_J$ естественным образом возникает в задачах о том, является ли поле эндоморфизмов $J$ **интегрируемым**, т.е. существуют ли такие локальные координаты, в которых компоненты $J$ постоянны $J^i_j = \mathrm{const}$. Например, хорошо известна следующая Теорема 4.27.

**Определение 4.26. Почти комплексная структура** на многообразии $M$ — это тензорное поле $J$ типа $(1, 1)$ т.,ч.

$$J^2 = -\operatorname{id}.$$

**Теорема 4.27** (Теорема Ньюлендера-Ниренберга)**.** *Почти комплексная структура $J$ интегрируема тогда и только тогда, когда её тензор Нийенхейса $N_J$ равен* 0.

**Замечание 4.28.** Аналогично решению Задачи 4.23 можно доказать, что тензор кривизны Римана $R^i_{j,kl}$, заданный формулой (11.1), является тензором типа $(1, 3)$. Опять же для этого достаточно доказать, что выражение (11.1) будет $C^\infty(M)$-линейно по всем своим аргументам.

# Тема 5

# Дифференциальные формы

**Дифференциальная форма порядка** $k$ или $k$**-форма** — это кососимметричное тензорное поле типа $(0, k)$. В локальных координатах дифференциальная $k$-форма задаётся суммой

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Пространство $k$-форм на многообразии $M$ мы будем обозначать через $\Omega^k(M)$. Мы последовательно изучим четыре операции на дифферециальных формах:

- внешнее произведение $\wedge$,
- внешний дифференциал $d$,
- прообраз при отображении $f^*$,
- интегрирование $\int$.

Иногда проще вначале научиться работать с этими операциями в локальных координатах, а потом дать их инвариантное определение.

## 5.1 Операции над дифференциальными формами

### 5.1.1 Внешнее произведение

Операция **внешнего произведения** $\alpha \wedge \beta$ дифференциальных форм на $M$ выполняется поточечно[1] — в каждом касательном пространстве $T_xM$.

Напомним, что внешнее произведение $\wedge$ кососимметрично:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge x^i,$$

поэтому для любой $p$-формы $\alpha$ и $q$-формы $\beta$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

**Задача 5.1.** Вычислить внешнее произведение форм

$$\alpha = 2dx + 3dy \qquad \text{и} \qquad \beta = dx \wedge dy + dy \wedge dz.$$

*Ответ в Задаче 5.1.*

$$\alpha \wedge \beta = 2dx \wedge dy \wedge dz.$$

*Решение Задачи 5.1.* Внешнее произведение дистрибутивно, поэтому можно формально раскрыть скобки. После этого остаётся сгруппировать слагаемые, воспользовавшись кососимметричностью внешнего произведения:

$$\begin{gathered}\alpha \wedge \beta = (2dx + 3dy) \wedge (dx \wedge dy + dy \wedge dz) = \\ = 2dx \wedge dx \wedge dy + 2dx \wedge dy \wedge dz + \\ +3dy \wedge dx \wedge dy + 3dy \wedge dy \wedge dz = \\ = 0 + 2dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 = 2dx \wedge dy \wedge dz.\end{gathered}$$

Задача 5.1 решена. □

[1] См. Раздел 3.1.2.

### 5.1.2 Внешний дифференциал

**Определение 5.2.** **Внешний дифференциал** $k$-формы $\alpha$ — это $(k+1)$-форма $d\alpha$, в локальных координатах определяемая по формуле[2]

$$d\left(\sum f_I d^I\right) = \sum df_I \wedge dx^I.$$

Иными словами,

(1) дифференциал суммы — сумма дифференциалов:

$$d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta,$$

(2) дифференциал формы

$$\alpha = f\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

задаётся формулой

$$d\alpha = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

**Задача 5.3.** Вычислить внешний дифференциал формы

$$\omega = xdy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz.$$

*Ответ в Задаче 5.3.*

$$d\omega = (1-3y^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

*Решение Задачи 5.3.* Доказательство прямым вычислением:

$$d(xdy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz + 3y^2 dy \wedge dx \wedge dz = \\ = (1-3y^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Задача 5.3 решена. □

[2] Здесь $I$ — это мультииндекс, т.е. $dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

**Замечание 5.4.** Внешний дифференциал — это семейство $\mathbb{R}$-линейных отображений

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M),$$

которое характеризуется следующими свойствами:

(1) для 0-форм: $df$ — это дифференциал функции $f$,

(2) для любой формы $\alpha$

$$d(d\alpha) = 0, \tag{5.1}$$

(3) для любых формы $\beta$ и $p$-формы $\alpha$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta). \tag{5.2}$$

**Замечание 5.5.** Внешний дифференциал также можно инвариантно определить по формуле (5.6).

### 5.1.3 Прообраз дифференциальной формы

Пусть $f : M^n \to N^m$ — гладкое отображение гладких многообразий. Напомним, что в каждой точке $p \in M^n$ определён дифференциал отображения

$$d_pf : T_pM^n \to T_{f(p)}N^m.$$

Он порождает отображение дифференциальных форм

$$f^* : \Omega^k(N^m) \to \Omega^k(M^n)$$

по формуле

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}\left(d_pf\left(v_1\right), \dots, d_pf\left(v_k\right)\right).$$

Здесь

- $\omega$ — это $k$-форма на $M^n$,
- $p \in M$ — произвольная точка,
- $v_1, \dots, v_k \in T_pM$ — произвольные вектора в этой точке.

Форма $f^*\omega$ называется **прообразом**[3] $k$-формы $\omega$ при отображении $f$.

*В локальных координатах индуцированная форма $f^*\omega$ находится формальной подстановкой координатных функций $f^i$ в выражение для формы $\omega$.* Если

- $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты на $M^n$,
- $y^1, \dots, y^m$ — локальные координаты на $N^m$,
- эти координаты связаны формулами $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$,
- $k$-форма на $N^m$ имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k},$$

то

$$f^*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(x)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

**Задача 5.6.** Записать форму

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

в цилиндрических координатах.

*Ответ в Задаче 5.6.*

$$\omega = r^2 dr \wedge d\varphi \wedge dz.$$

[3] Также $f^*\omega$ называют **обратным образом** или **индуцированной** формой.

*Решение Задачи 5.6.* Практически с заменой координат можно работать так же, как и с отображением. Подставляя

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

получаем

$$\begin{gathered} \omega = d\,(r\cos\varphi) \wedge d(r\sin\varphi) \wedge dz = \\ = (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) \wedge (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) \wedge dz = \\ = \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) dr \wedge d\varphi \wedge dz = r^2 dr \wedge d\varphi \wedge dz. \end{gathered}$$

Задача 5.6 решена. □

Очевидно, что *прообраз формы согласован с операцией внешнего произведения*: для любых форм $\alpha$ и $\beta$

$$f^*\,(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Проверим, что *прообраз формы также согласован с операцией внешнего дифференцирования.*

**Задача 5.7.** Доказать, что для любого гладкого отображения многообразий $f : M \to N$ и любой формы $\alpha$ на $N$

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha). \tag{5.3}$$

*Решение Задачи 5.7.* Тензорные тождества вида (5.7) можно честно проверять в локальных координатах. Пусть

- $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на $M^n$,
- $y^1, \ldots, y^m$ — локальные координаты на $N^m$,
- эти координаты связаны формулами $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$.

Формула (5.7) $\mathbb{R}$-линейна по $\alpha$. Поэтому достаточно доказывать её для базисных 1-форм

$$\alpha = g(y)dy^{i_1} \wedge \dots dy^{i_k}.$$

С одной стороны,

$$f^*d\left(g(y)dy^{i_1} \wedge \dots dy^{i_k}\right) = f^*\left(\frac{\partial g}{\partial y^i}dy^i\right) \wedge dy^{i_1} \wedge \dots dy^{i_k} =$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial y^i}df^i\right) \wedge df^{i_1} \wedge \dots df^{i_k}.$$

По формуле для производной сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial y^i}df^i = \frac{\partial g}{\partial y^i}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j = \frac{\partial g(f(x))}{\partial x^j}dx^j = dg(f(x)).$$

Таким обазом

$$f^*d\left(g(y)dy^{i_1} \wedge \dots dy^{i_k}\right) = dg(f(x)) \wedge df^{i_1} \wedge \dots df^{i_k} =$$
$$= df^*\left(g(y)dy^{i_1} \wedge \dots dy^{i_k}\right).$$

Задача 5.7 решена. □

*Второе решение Задачи 5.7.* Тождество (5.7) можно вывести из остальных свойств прообраза и внешнего дифференциала. Следующее наблюдение упрощает вычисления.

Заметим, что для любой функции $f$ и любой формы $\alpha$

$$f\alpha = f \wedge \alpha.$$

Поэтому *любая дифференциальная форма локально суть внешнее произведение функций и дифференциалов функций.*

- Проверим тождество (5.3) для произвольной функции $g$. Действительно, для любого векторного поля $v$

$$\langle d(f^*g), v\rangle = v(f^*g) = df(v)(g) = \langle df(v), dg\rangle = \langle f^*dg, v\rangle.$$

- Проверим тождество (5.3) для дифференциала функции $dg$. Оно вытекает из свойства $d^2 = 0$ и тождества (5.3) для функции:

$$f^*d(dg) = 0 = d(df^*g) = d(f^*dg). \tag{5.4}$$

- Покажем, что если тождество (5.3) выполнено для форм $\alpha$ и $\beta$, то оно выполнено и для внешнего произведения $\alpha \wedge \beta$:

$$f^*d\left(\alpha \wedge \beta\right) = df^*\left(\alpha \wedge \beta\right).$$

  Действительно, с одной стороны,

$$f^*d\left(\alpha \wedge \beta\right) = f^*\left(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta\right) = \\ = \left(f^*d\alpha\right) \wedge f^*\beta + (-1)^p f^*\alpha \wedge \left(f^*d\beta\right).$$

  С другой стороны,

$$df^*\left(\alpha \wedge \beta\right) = d\left(f^*\alpha \wedge f^*\beta\right) = \\ = \left(df^*\alpha\right) \wedge f^*\beta + (-1)^p f^*\alpha \wedge \left(df^*\beta\right).$$

  Выражения равны, т.к. по предположению

$$df^*\alpha = f^*d\alpha, \qquad df^*\beta = f^*d\beta$$

- Таким образом для любых функций $f, g^1, \ldots, g^k$ тождество (5.3) будет выполнено для $f, dg^1, \ldots, dg^k$, а следовательно и для формы

$$f dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k = f \wedge dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k.$$

  Поскольку любая форма есть сумма форм такого вида, (5.3) выполнено для всех форм.

Задача 5.7 решена. □

**Следствие 5.8.** *Ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.*

*Доказательство Следствия 5.8.* Пусть $\alpha$ — замкнутая форма на $M^n$ и $i : N^m \to M^n$ — вложение подмногообразия. Тогда индуцированная форма на $N^m$ — это форма $i^*\alpha$. По Задаче 5.7

$$d\,(i^*\alpha) = i^*\,(d\alpha) = 0.$$

Следствие 5.8 доказано. □

### 5.1.4 Интеграл

*Дифференциальную $n$-форму $\omega$ можно* ***интегрировать*** *по компактному ориентированному $n$-мерному многообразию $M^n$.* В локальных координатах или для произвольной поверхности $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ интеграл от формы равен соответствующему кратному интегралу:

$$\int_\Omega f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int \cdots \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n.$$

В общем случае интеграл $\int_{M^n} \omega$ определяется при помощи подходящего разбиения единицы[4] $\{\varphi_\alpha\}$:

$$\int_{M^n} \omega = \sum_\alpha \int_{M^n} \varphi_\alpha\, \omega.$$

**Задача 5.9.** Вычислить интеграл от 1-формы

$$dx + dy$$

по нижней половине эллипса

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

[4]Подробнее определение интеграла от дифференциальной формы см. [3], [5] или [7].

*Ответ в Задаче 5.9:*

$$\int_\gamma dx + dy = \pm 2.$$

**Замечание 5.10.** Знак в ответе зависит от направления обхода (т.е. ориентации половинки эллипса). “+”, если идти от левого конца $(-1, 0)$ к правому $(1, 0)$.

*Первое решение Задачи 5.9 .* Можно применить формулу Ньютона-Лейбница. Если 1-форма точна, т.е. $\alpha = df$, то её интеграл по пути $\gamma(t)$, где $t \in [a, b]$ равен

$$\int_{\gamma(t)} df = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)).$$

В данном случае интеграл от $dx + dy$ равен сумме разностей координат $x$ и $y$ в концевых точках. Задача 5.9 решена. □

*Второе решение Задачи 5.9 .* Параметризуем кривую:

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t), \qquad t \in (\pi, 2\pi).$$

Отметим, что при изменении направления обхода интеграл поменяет знак. Тогда

$$I = \int_{\gamma(t)} dx + dy = \int_\pi^{2\pi} d\cos t + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right).$$

Интегрируя по $t$, получаем

$$I = \left(\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)\Big|_\pi^{2\pi} = 2.$$

Задача 5.9 решена. □

**Замечание 5.11.** В данном случае вычисления во втором решении аналогичны первому, но они работают и в том случае, если форма не точна.

## 5.2 Формула для внешнего дифференциала

**Задача 5.12.** Доказать формулу

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]), \tag{5.5}$$

где $\alpha$ — дифференциальная 1-форма, $X, Y$ — векторные поля, $X(f)$ — производная функции $f$ по направлению векторного поля $X$, а $[X,Y]$ — коммутатор векторных полей $X$ и $Y$.

*Указание.* Многие тензорные тождества можно доказать следующим образом.

(1) Вначале проверяется, что тождество выполняется для базисных тензоров (например $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ или $dx^i$).

(2) После чего проверяется, что обе части тождества одинаково меняются при замене аргументов на сумму $X \to X_1 + X_2$ или умножении их на функции $X \to fX$.

*Решение Задачи 5.12.* • Проверим, что формула (5.5) выполняется для базисных векторов

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Действительно, мы получаем формулу для компоненты дифференциала 1-формы:

$$d\alpha_{ij} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}.$$

Здесь $[X,Y] = \left[\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$

- Докажем формулу (5.5) для произвольных векторных полей
$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$
Очевидно, что (5.5) сохраняется при замене $X$ или $Y$ на сумму векторных полей
$$X \to X_1 + X_2, \qquad Y \to Y_1 + Y_2.$$
Поэтому остаётся проверить, что (5.5) сохраняется при умножении $X$ и $Y$ на функции
$$X \to fX, \qquad Y \to gY.$$
В формуле (5.5) слева функции выносятся за скобки
$$d\alpha(fX, gY) = fgd\alpha(X, Y).$$
Справа же мы получаем следующие слагаемые:
$$\begin{gathered} fX(\alpha(gY)) = fgX(\alpha(Y)) + fX(g)\alpha(Y), \\ gY(\alpha(fX)) = fgY(\alpha(X)) + gY(f)\alpha(X), \\ \alpha([fX, gY]) = fg\left(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\right). \end{gathered}$$
Складывая их, получаем требуемое равенство
$$fgd\alpha(X, Y) = fg\left(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\right).$$

Задача 5.12 решена. □

**Замечание 5.13.** Аналогично может быть доказана формула для дифференциальной формы $\omega$ степени $p$:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \Big(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p)\Big) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p). \end{aligned} \tag{5.6}$$

## 5.3 Локальная интегрируемость форм

**Задача 5.14.** Верно ли, что любое поле тензоров ранга 1 можно (локально) “выпрямить” в окрестности своей неособой точки[5], т.е. найти систему координат, в которой компоненты этого поля будут постоянны? Разобрать отдельно случаи тензоров типа $(1,0)$ и $(0,1)$.

*Ответ в Задаче 5.14.*

- Векторные поля выпрямляются.
- 1-формы не выпрямляются (они выпрямляются тогда и только тогда, когда замкнуты[6]).

*Решение Задачи 5.14.*

- Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [13].

**Теорема 5.15.** *Гладкое векторное поле $v$ выпрямляется в окрестности любой своей неособой точки $P$. Иными словами, в окрестности точки $P$ существуют локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, в которых*

$$v = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

*Доказательство Теоремы 5.15.* Без ограничения общности, точка $P$ — это начало координат $0$ в $\mathbb{R}^n$. Линейной заменой координат всегда можно добиться

$$v^1(0) = 1, \qquad v^2(0) = \dots = v^n(0) = 0.$$

Обозначим через $g(t,p)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i(x), \quad i = 1, \dots, n, \\ x(0) = p. \end{cases}$$

[5]В окрестности нуля “выпрямляется” только нулевое поле.

[6]Это следствие теоремы Пуанкаре, см. Раздел 13.

Возьмём точку $(0, x^2, \ldots, x^n)$ в трансверсальной в начале координат гиперплоскости к $v$ и рассмотрим соответствующее решение задачи Коши:

$$G(x^1, x^2, \ldots, x^n) = g\left(x_1, \left(0, x^2, \ldots, x^n\right)\right).$$

Несложно проверить следующее.

– Отображение $G$ дифференцируемо[7].

– Отображение $G$ — локальный диффеоморфизм. (Несложно проверить, что в 0 у $G$ единичный якобиан.)

– Отображение $G^{-1}$ — выпрямляющее, по построению.

Теорема 5.15 доказана. □

- Если 1-форма $\alpha$ “выпрямляется”, то $d\alpha = 0$. Внешний дифференциал — тензорная операция, поэтому его равенство нулю не зависит от выбора системы координат.

Задача 5.14 решена. □

**Задача 5.16.** Доказать, что 1-форму

$$\alpha = dx + ydz$$

в $\mathbb{R}^3$ никакой заменой координат нельзя привести к форме вида $fdg$.

*Указание.* 1-форма $\alpha$ на $M^{2n+1}$ называется **абсолютно неинтегрируемой**, если

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n} \neq 0$$

ни в какой точке.

[7]По теореме о гладкой зависимости решений задачи Коши от начальных условий.

*Решение Задачи 5.16.* Если $\alpha = fdg$, то $\alpha \wedge d\alpha = 0$, но

$$\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0.$$

Задача 5.16 решена. □

## 5.4 Формула Стокса

**Теорема 5.17** (Теорема Стокса)**.** *Пусть $M^n$ — компактное ориентированное $n$-мерное многообразие с краем, и пусть $\omega$ — $(n-1)$-форма на $M^n$. Тогда*

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega. \tag{5.7}$$

**Замечание 5.18.** Ориентация края $\partial M$ согласована с ориентацией $M$ следующим образом:

- если касательные вектора $v_1, \ldots, v_{n-1}$ задают положительную ориентацию границы $\partial M$,
- то положительную ориентацию $M$ задаёт базис

  $$N, v_1, \ldots, v_{n-1},$$

  где $N$ — вектор внешней нормали.

При другом выборе ориентации в формуле Стокса может возникнуть знак.

**Задача 5.19.** Проверить выполнение формулы Стокса (5.7) для формы $\omega = xdy$ и прямоугольника

$$\{0 \leq x \leq 2, \qquad 0 \leq y \leq 1\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$.

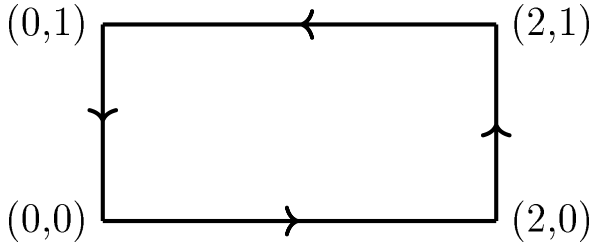


Рис. 5.1: Прямоугольник $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1.$

*Решение Задачи 5.19.* Плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ ориентирована стандартным образом, поэтому граница прямоугольника $P$ ориентирована как на рис. 5.1. Интеграл от $d\omega = dx \wedge dy$ по $P$ равен его площади

$$\int_P d(xdy) = \int_P dx \wedge dy = S(P) = 2.$$

Интеграл по границе равен тому же числу:

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} xdy + \int_{(2,0)}^{(2,1)} xdy + \int_{(2,1)}^{(0,1)} xdy + \int_{(0,1)}^{(0,0)} xdy =$$

$$= 0 + \int_0^1 2dy + 0 + 0 = 2.$$

Задача 5.19 решена. □

**Задача 5.20.** Доказать, что формула Стокса верна и для многообразий без края (т.е. когда $\partial M = \emptyset$). В этом случае

$$\int_{M^n} d\omega = 0$$

*Решение Задачи 5.20.* Достаточно вырезать из многообразия маленький замкнутый диск $D^n$, и два раза применить формулу Стокса для многообразий с краем

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{M^n \setminus D^n} d\omega + \int_{D^n} d\omega = \int_{\partial D^n} \omega - \int_{\partial D^n} \omega = 0.$$

У поверхностей $M^n \backslash D^n$ и $D^n$ противоположные внешние нормали, поэтому интегралы по их границам сократятся. Задача 5.20 решена. $\square$

**Замечание 5.21.** Компактность $M$ нужна, чтобы все интегралы были корректно определены. Формула Стокса также верна, если многообразие $M$ некомпактно, но форма $\omega$ имеет компактный носитель. **Носитель** формы $\omega$ — это замыкание множества точек, где он не равен нулю:

$$\mathrm{supp}(\omega) := \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}.$$

## 5.5 Геометрический смысл операций grad, rot, div

В математическом анализе градиент функции, ротор[8] и дивергенция векторного поля обычно определяют явными формулами[9] в $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Выразим $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}$ и $\operatorname{div}$ через стандартные тензорные операции, чтобы их определения не зависели от выбора координат.

---

[8] В западной литературе ротор обычно обозначается как curl.

[9] Следующие формулы написаны в традиционных обозначениях, не согласующимися с принятыми в этом тексте. В частности, не следует путать формальный оператор $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$ из этой формулы с ковариантной производной.

Рассмотрим $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ как ориентированное риманово многообразие. При помощи звезды Ходжа $*$ и операций поднятия и опускания индекса отождествим

- 0-формы и 3-формы;
- 1-формы и 2-формы с векторными полями.

Тогда все три операции $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}$ *и* $\operatorname{div}$ *отождествятся с операцией внешнего дифференцирования* $d$ *на* 0*,* 1 *и* 2*-формах соответственно.* Действительно, если в последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_2} \Omega^3(\mathbb{R}^3) \longrightarrow 0$$

положить

$$d_0 = \operatorname{grad}, \qquad d_1 = \operatorname{rot}, \qquad d_2 = \operatorname{div},$$

то

(1) grad переводит функции (0-формы) в векторные поля (1-формы);

(2) rot переводит векторные поля (1-формы) в векторные поля (2-формы);

(3) div переводит векторные поля (2-формы) в функции (3-формы).

**Задача 5.22.** Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0.$$

*Решение Задачи 5.22.* Это немедленные следствия того, что

- $*^2 = \pm \operatorname{id}$ по (3.11);
- $d^2 = 0$ по (5.1).

Задача 5.22 решена. $\square$

Аналогичные формулы можно определить и для некоторых классов многообразий (в частности, для ориентированных римановых и псевдоримановых многообразий). При описании этих формул мы будем использовать "музыкальные" обозначения для операций поднятия и опускания индекса на многообразии $M$:

$$\sharp : T^*M \to TM, \qquad \flat : TM \to T^*M.$$

(1) **Градиент** функции $f$ — векторное поле $\operatorname{grad} f$, получающееся из дифференциала $df$ поднятием индекса:

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp$$

Градиент функции можно определить на любом многообразии, на котором задан произвольный тензор[10] типа $(2, 0)$. И уж тем более он определен на любом (псевдо)римановом многообразии $(M, g)$.

В локальных координатах:

$$\operatorname{grad} f^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

(2) **Дивергенция** векторного поля $v$ — это функция $\operatorname{div} v$, заданная формулой

$$\operatorname{div} v = *d*(v^\flat).$$

Дивергенцию можно определить на любом ориентированном (псевдо)римановом многообразии $(M, g)$.

[10] Поэтому в симплектической геометрии гамильтоновы векторные поля также называют косыми градиентами.

(3) **Ротор** векторного поля $v$ можно определить на любом *трёхмерном* ориентированном (псевдо)римановом многообразии $(M^3, g)$ по формуле

$$\operatorname{rot} v = \left(*d(v^\flat)\right)^\sharp.$$

Эта формула корректно определена для любого ориентированного (псевдо)риманова многообразия $(M^n, g)$, но результатом её применения является кососимметричный тензор типа $(n-2, 0)$. Только при $n = 3$ $\operatorname{rot} v$ является векторным полем.

**Определение 5.23. Оператор Лапласа** $\Delta$ суть композиция градиента и дивергенции:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Таким образом, на любом ориентированном (псевдо)римановом многообразии можно определить Лапласиан функции как функцию

$$\Delta f = *d * df.$$

**Замечание 5.24.** Оператор Лапласа — очень важный в математике оператор, и его часто рассматривают не только на пространстве гладких функций, но в более общих случаях, например на пространстве $\mathcal{L}^2$-функций.

# Часть III

# Аффинная связность и ковариантная производная

# Тема 6

# Символы Кристоффеля

Короткое описание понятий аффинной связности и тензора Римана дано в [14].

## 6.1 Теоретический материал

На многообразии задана операция **ковариантного дифференцирования**, если в любой системе координат $x^1, \dots, x^n$ задан набор функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, называемых **символами Кристоффеля**, которые при замене координат $x' = x'(x)$ преобразуются по формуле[1]

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \tag{6.1}$$

В Разделе 8 дано определение ковариантной производной векторного произвольного векторного поля. В этом разделе мы укажем формулы для символов Кристоффеля, для которых ковариантая производная римановой метрики равна нулю.

[1] Символы Кристоффеля — не тензор.

- **Символы Кристоффеля** $\Gamma^k_{ij}$ выражаются через метрику
$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$$
по формуле
$$\Gamma^k_{ij} = \sum_\alpha \frac{g^{k\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right), \tag{6.2}$$
где $g^{ij}$ — компоненты обратной матрицы $G^{-1}$ к матрице Грамма метрики $G = (g_{ij})$.

- Пусть $r(u^1, \ldots, u^n)$ — регулярная поверхность[2] $M^n$ в $\mathbb{R}^N$. Разложим вторые производные $r_{ij}$ на тангенциальную и нормальную составляющую к поверхности:
$$r_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} r_k + n_{ij}, \tag{6.3}$$
где
$$n_{ij} \perp T_x M \qquad \Leftrightarrow \qquad (n_{ij}, r_k) = 0.$$
Коэффициенты $\Gamma^k_{ij}$ в разложении будут **символами Кристоффеля** поверхности $M^n$.

Формула (6.2) более общая[3], чем (6.3), но обычно требует чуть больше вычислений.

## 6.2 Вычисление символов Кристоффеля

**Задача 6.1.** Вычислить символы Кристоффеля на поверхности вращения
$$r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \qquad f(u) \geq 0.$$

[2]Подчеркнем, что формула (6.3) верна для любого $N \geq n$, не только для гиперповерхностей.

[3]Она годится для любой области с (псевдо)римановой метрикой.

*Ответ в Задаче 6.1.* Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}, \quad \Gamma^u_{vv} = \frac{-ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \quad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{f'}{f},$$

$$\Gamma^v_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \Gamma^v_{vv} = 0.$$

*Решение Задачи 6.1.* Найдём символы Кристоффеля как коэффициенты в разложения вторых производных $r(u,v)$ по базису $r_u, r_v, N$:

$$r_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} r_k + q_{ij} N.$$

- Находим канонические базисные вектора $r_u, r_v$:

$$\begin{gathered} r_u = \left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\right), \\ r_v = \left(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0\right). \end{gathered}$$

- Вычисляем вторые производные функции для функции $r(u,v)$:

$$\begin{gathered} r_{uu} = \left(f''\cos v, f''\sin v, g''\right), \\ r_{uv} = r_{vu} = \left(-f'\sin v, f'\cos v, 0\right), \\ r_{vv} = \left(-f\cos v, -f\sin v, 0\right). \end{gathered}$$

- Разложение вектора по базису — стандартная задача по линейной алгебре. Чтобы избавиться от коэффициента при $N$, рассмотрим скалярные произведения векторов $r_{ij}$ с базисными векторами $r_k$. Например, для вектора $r_{uu}$ получим

$$\begin{cases} (r_{uu}, r_u) = (r_u, r_u)\Gamma^u_{uu} + (r_u, r_v)\Gamma^v_{uu}, \\ (r_{uu}, r_v) = (r_u, r_v)\Gamma^u_{uu} + (r_v, r_v)\Gamma^v_{uu}. \end{cases} \tag{6.4}$$

- Из системы уравнений (6.4) находим $\Gamma^u_{uu}$ и $\Gamma^v_{uu}$. Аналогично находятся остальные символы Кристоффеля.

- В общем случае, уравнения на $\Gamma^k_{ij}$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \vdots \\ \Gamma^n_{ij} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (r_{ij}, r_1) \\ \vdots \\ (r_{ij}, r_n) \end{pmatrix},$$

  где матрица $G$ — это матрица первой квадратичной формы. Для поверхности вращения она диагональная, поэтому символы Кристоффеля находятся особенно просто.

Задача 6.1 решена. $\square$

**Задача 6.2.** Найти символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \left((f'(u))^2 + (g'(u))^2\right) du^2 + f^2(u) dv^2$$

*Ответ в Задаче 6.2.* Такой же, как и в Задаче 6.1.

*Решение Задачи 6.2.* Применим формулу (6.2). Чтобы не запутаться, будем использовать для координат обозначения $u, v$ (а не $1, 2$).

- В данном случае матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (f'(u))^2 + (g'(u))^2 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix},$$

  и ненулевые коэффициенты метрики равны

$$g_{uu} = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \qquad g_{vv} = f^2(u).$$

- Находим обратную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)^{-1} & 0 \\ 0 & f^{-2}(u) \end{pmatrix}.$$

Таким образом ненулевые коэффициенты обратной матрицы имеют вид

$$g^{uu} = \frac{1}{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}, \qquad g^{vv} = \frac{1}{f^2(u)}.$$

- Остаётся подставить найденные коэффициенты $g_{ij}$ и $g^{ij}$ в формулу (6.2). Для примера сделаем это для коэффициента $\Gamma^v_{uv}$:

$$\Gamma^v_{uv} = \frac{g^{vu}}{2}\left(\frac{\partial g_{vu}}{\partial u} + \frac{\partial g_{uu}}{\partial v} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial u}\right) +$$
$$+ \frac{g^{vv}}{2}\left(\frac{\partial g_{vv}}{\partial u} + \frac{\partial g_{vu}}{\partial v} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial v}\right) =$$
$$= 0 + \frac{1}{2f^2(u)}\left(\frac{\partial f^2(u)}{\partial u} + 0 - 0\right) = \frac{f'}{f}.$$

Многие коэффициенты равны 0, что упрощает вычисление. Остальные символы Кристоффеля находятся аналогично.

Задача 6.2 решена. □

## 6.3 Некоторые свойства символов Кристоффеля

**Задача 6.3.** Доказать, что разность

$$\Gamma^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}$$

символов Кристоффеля двух связностей $\nabla$ и $\hat{\nabla}$ образует тензорное поле типа $(1,2)$, и что любое тензорное поле типа $(1,2)$ может быть представлено таким образом.

*Решение Задачи 6.3.* Задача следует из (6.1).

- Разность $\Gamma^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}$ — тензор типа $(1,2)$, поскольку в формуле (6.1) исчезает нетензорное слагаемое:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} - \hat{\Gamma}^{i'}_{j'k'} = \left(\Gamma^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}.$$

- Для любого тензора $T^i_{jk}$ типа $(1,2)$ сумма $\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}$ — тоже символы Кристоффеля, потому что при замене координат они меняются по формуле (6.1)

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} + T^{i'}_{j'k'} = \left(\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Задача 6.3 решена. $\square$

**Задача 6.4.** Доказать следующее равенство

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{is} \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^j},$$

где $g = \det(g_{ij})$.

*Решение Задачи 6.4* . По очереди докажем требуемые равенства:

- Первое равенство

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{is} \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}$$

следует из формулы для символов Кристоффеля (6.2). В данном случае

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{g^{i\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^j}.$$

Слагаемые

$$\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} \qquad \text{и} \qquad -\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$$

сокращаются, т.к. $g_{ij} = g_{ji}$, и сумма не зависит от обозначения индексов суммирования.

- Докажем второе равенство

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{is}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}.$$

Определитель $g = \det(g_{ij})$ — функция от компонент матрицы $g_{ij}$. Поэтому по формуле для производной сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial g}{\partial g_{is}}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}.$$

Таким образом остаётся доказать, что

$$g^{is} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{is}}. \tag{6.5}$$

Это комбинация следующих известных утверждений о матрицах.

**Утверждение 6.5.** *Для любой матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) *определитель* $\det A$ *является многочленом от компонент матрицы* $a_{ij}$, *при этом*

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \tag{6.6}$$

*где* $A_{ij}$ *— это алгебраическое дополнение к элементу* $a_{ij}$ *матрицы* $A$*;*

(2) *элементы обратной матрицы — это алгебраические дополнения* $A_{ji}$, *делённые на определитель:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A), \qquad \textit{где} \qquad \operatorname{adj}(A)_{ij} = A_{ji}.$$

*Доказательство Утверждения 6.5.* Формула (6.6) выполнена, потому что определитель можно разложить по строке/столбцу:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Остальные факты общеизвестны. Утверждение 6.5 доказано. □

Формула (6.5) вытекает из Утверждения 6.5, если учесть, что $g_{ij} = g_{ji}$ (и поэтому $g^{ji} = g^{ij}$).

- Третье равенство очевидно.

Все равенства доказаны. Задача 6.4 решена. □

## 6.4 Символы Кристоффеля для стандартных метрик

(1) Цилиндрическая система координат $(r, \varphi, z)$ в $\mathbb{R}^3$:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}.$$

Для полярной системы координат $(r, \varphi)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ ответ такой же.

(2) Сферическая система координат $(r, \theta, \varphi)$ в $\mathbb{R}^3$:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \qquad \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta.$$

(3) Полугеодезическая система координат на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$ds^2 = du^2 + B(u, v)dv^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{vv} = -\frac{B_u}{2}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{B_u}{2B}, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{B_v}{2B}.$$

(4) Конформная (изотермическая) система координат на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{\lambda'_u}{2\lambda}, \qquad \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \frac{\lambda'_v}{2\lambda}, \qquad \Gamma^u_{vv} = -\frac{\lambda'_u}{2\lambda},$$
$$\Gamma^v_{uu} = -\frac{\lambda'_v}{2\lambda}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{\lambda'_u}{2\lambda}, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{\lambda'_v}{2\lambda}.$$

# Тема 7

# Аффинная связность

## 7.1 Теоретический материал.

### 7.1.1 Аффинная связность

Пусть $M$ — гладкое многообразие, а $\Gamma(TM)$ — пространство касательных векторных полей на $M$.

**Определение 7.1. Аффинная связность** $\nabla$ на многообразии $M$ — это $\mathbb{R}$-билинейное отображение

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM),$$
$$X, Y \to \nabla_X Y$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $C^\infty(M)$-линейность по $X$:

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$

(2) правило Лейбница по $Y$:

$$\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y.$$

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется **ковариантной производной** векторного поля $Y$ вдоль векторного поля $X$.

**Замечание 7.2.**

- В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ компоненты ковариантной производной имеют вид

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right),$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^i.$$

- Ковариантную производную вдоль базисного векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ также обозначают через $\nabla_i$, поэтому

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_i Y.$$

- Операцию ковариантного дифференцирования удобно распространить на функции на многообразии, положив, по определению,

$$\nabla_Y(f) = Y(f) = \sum_i Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Тогда правило Лейбница можно записать следующим образом

$$\nabla_Y(fX) = \nabla_Y(f)X + f\nabla_Y X.$$

### 7.1.2 Основная теорема римановой геометрии

**Определение 7.3.** Метрический тензор $g$ на многообразии $M$ с аффинной связностью $\nabla$ **ковариантно постоянен**[1], если для любых касательных векторных полей $X, Y$ и $Z$

$$\nabla_Z (X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y).$$

[1] Указанное условие эквивалентно тому, что $\nabla g = 0$, см. Раздел 8.

Также говорят, что **связность согласована с метрикой**.

**Теорема 7.4** (Основная теорема римановой геометрии)**.** *Любое риманово (и псевдориманово) многообразие обладает единственной симметричной аффинной связностью, согласованной с метрикой.*

Связность с нулевым кручением, относительно которой метрический тензор ковариантно постоянен, также называют **связностью Леви-Чивиты**.

## 7.2 Ковариантная производная векторных полей

**Задача 7.5.** На плоскости с координатами $(x, y)$ задана аффинная связность с символами Кристоффеля

$$\Gamma^1_{11} = y, \qquad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 1$$

(остальные символы Кристоффеля равны нулю). Найти ковариантную производную векторного поля

$$v = (y, 2y) \quad \text{вдоль} \quad \gamma(t) = (t, 2) \quad \text{в точке} \quad P = (3, 2).$$

*Ответ в Задаче 7.5.* $\nabla_{\dot\gamma} v|_P = (4, 2)$.

*Решение Задачи 7.5.* Компоненты искомого вектора находятся по формулам

$$\nabla_{\dot\gamma} v^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt} v^k.$$

В данном случае

$$\dot\gamma(t) = (1, 0), \qquad v(t) = (y(t), 2y(t)) = (2, 4)\,,$$

поэтому

$$\nabla_{\dot\gamma} v^1 = \frac{dv^1}{dt} + \Gamma^1_{11} v^1 = \frac{d\,2}{dt} + y^2 = y^2,$$

$$\nabla_{\dot\gamma} v^2 = \frac{dv^2}{dt} + \Gamma^2_{11} v^1 = \frac{d\,4}{dt} + y = y.$$

Остаётся подставить в полученные компоненты координаты точки $P$. Задача 7.5 решена. $\square$

**Задача 7.6.** Пусть $\nabla$ — аффиная связность на многообразии $M$, и пусть

- $Y \in T_P M$ — касательный вектор в точке $P \in M$,
- $\gamma(t)$ – регулярная кривая на $M$, т.,ч.

$$\gamma(t_0) = P, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = Y,$$

- $X$ — касательное векторное поле на $M$, заданное в точках кривой $\gamma(t)$.

Доказать, что ковариантная производная $\nabla_Y(X)$ в точке $P$ корректно определена и не зависит от продолжения вектора $Y$ и поля $X$ до векторных полей в окрестности точки $P$.

*Решение Задачи 7.6* . Посмотрим на выражение для ковариантной производной

$$(\nabla_{\dot\gamma} X)^i = \dot\gamma^j \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k \right). \tag{7.1}$$

- Первое слагаемое в сумме (7.1) суть производная $X$ вдоль кривой:

$$\frac{d\gamma^j}{dt} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \frac{dX^i}{dt}.$$

- Оставшееся слагаемое в сумме (7.1) зависит только от значений $\dot{\gamma}$ и $X$ в точке кривой.

Поэтому для вычисления формулы (7.1) достаточно знать значения $X$ на кривой $\gamma(t)$. Задача 7.6 решена. $\square$

## 7.3 Тензор кручения

**Определение 7.7. Тензор кручения** $T$ аффинной связности $\nabla$ — это тензор типа $(1, 2)$, определённый формулой

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

**Задача 7.8.** Доказать, что если $T$ — тензор кручения связности $\nabla$, то для любых касательных векторных полей $X, Y$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{7.2}$$

**Следствие 7.9.** *Если связность $\nabla$ симметрична, то*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{7.3}$$

*Решение Задачи 7.8.* Формулу легко доказать в локальных координатах:

$$(\nabla_X Y)^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k,$$
$$(\nabla_Y X)^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j + \Gamma^i_{jk} Y^j X^k,$$
$$[X, Y] = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j.$$

Формула (7.2) теперь легко следует из определения тензора кручения связности:

$$T(X, Y)^i = \left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) X^j Y^k.$$

Задача 7.8 решена. $\square$

**Задача 7.10.** Доказать, что на многообразии с симметричной связностью $\nabla$ коммутатор ковариантно постоянных векторных полей равен нулю:

$$\nabla X = \nabla Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [X, Y] = 0.$$

*Решение Задачи 7.10.* Это немедленное следствие Задачи 7.8. Ковариантная постоянность означает равенство нулю всех ковариантных производных, поскольку

$$(\nabla_X Y)^i = (\nabla Y)^i_{;j} X^j.$$

Поэтому, используя (7.3), получаем

$$\nabla X = \nabla Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y = \nabla_Y X = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] = 0.$$

Задача 7.10 решена. $\square$

# Тема 8

# Ковариантная производная

## 8.1 Теоретический материал

Рассмотрим многообразие $M$ с заданной на нём аффинной связностью $\nabla$. Операцию **ковариантной производной** вдоль векторного поля $X$ можно определить для любого тензорного поля $T$ на $M$ по следующим правилам:

(1) Ковариантная производная $\nabla_X T$ тензорного поля $T$ типа $(p, q)$ — снова тензорное поле типа $(p, q)$.

(2) Для функции $f$ ковариантная производная совпадает с обычной производной вдоль векторного поля

$$\nabla_X f = X(f).$$

(3) Для векторных полей $Y$ ковариантная производная $\nabla_X Y$ задаётся аффинной связностью.

(4) Для 1-формы $\alpha$ ковариантная производная определяется так, чтобы свёртка дифференцировалась по пра-

вилу Лейбница:

$$(\nabla_X \alpha)\, Y = \nabla_X \left(\alpha(Y)\right) - \alpha\left(\nabla_X Y\right)$$

для любого векторного поля $Y$.

(5) Тензорное произведение дифференцируется по правилу Лейбница:

$$\nabla_X \left(S \otimes T\right) = \left(\nabla_X S\right) \otimes T + S \otimes \left(\nabla_X T\right)$$

для любых тензорных полей $S$ и $T$.

В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ ковариантная производная тензорного поля $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$ задаётся формулой

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = X^k \Bigg( \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} + \\ + \Gamma^{i_1}_{ks} T^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \cdots + \Gamma^{i_p}_{ks} T^{i_1 \ldots i_{p-1} s}_{j_1 \ldots j_q} - \\ - \Gamma^{s}_{k j_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \cdots - \Gamma^{s}_{k j_q} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} s} \Bigg). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Формула (8.1) получается, если “скомбинировать” формулы для ковариантной производной векторных полей

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right)$$

и ковариантной производной 1-форм

$$(\nabla_X \alpha)_i = X^j \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} \alpha_k \right).$$

**Ковариантную производную** также можно рассматривать как отображение, сопоставляющее тензорному полю $T$ типа $(p, q)$ тензорное поле $\nabla T$ типа $(p, q+1)$, где[1]

$$(\nabla T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q; k} := (\nabla_k T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

[1] Для удобства мы выделяем новый нижний индекс в $\nabla T$ точкой с запятой.

## 8.2 Вычисление ковариантной производной

**Задача 8.1.** Пусть в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой задана соответствующая ей симметричная риманова связность. Найти ковариантные производные тензорных полей, которые в цилиндрических координатах $(r, \varphi, z)$ имеют компоненты

$$(1)\quad ||g_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\quad \left|\left|t^i_j\right|\right| = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Ответ в Задаче 8.1.*

(1) $\nabla g = 0$.

(2) Ненулевые компоненты во втором случае:

$$(\nabla t)^r_{r;r} = 1, \qquad (\nabla t)^\varphi_{\varphi;r} = 1.$$

*Решение Задачи 8.1.* • $\nabla g = 0$, поскольку связность согласована с метрикой, а $g$ — это метрический тензор в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

**Замечание 8.2.** Можно честно применить формулу для ковариантной производной тензоров типа $(0, 2)$:

$$(8.2) \qquad (\nabla g)_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is}.$$

Вычисления можно немного сократить, если заметить следующее. В цилиндрических координатах ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$(8.3) \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r},$$

Поэтому ненулевыми слагаемыми в формуле (8.2) могут быть только

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} g_{rr}, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} g_{\varphi\varphi}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} g_{\varphi\varphi}.$$

Легко проверяется, что соответствующие компоненты $\nabla T$ равны нулю:

$$(\nabla g)_{\varphi\varphi;r} = \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - 2\Gamma^\varphi_{r\varphi} g_{\varphi\varphi} = 2r - 2\frac{r^2}{r} = 0,$$

$$(\nabla g)_{r\varphi;\varphi} = (\nabla g)_{\varphi r;\varphi} = -\Gamma^r_{\varphi\varphi} g_{rr} - \Gamma^\varphi_{\varphi r} g_{\varphi\varphi} = r - \frac{r^2}{r} = 0.$$

- Применим формулу для ковариантной производной тензоров типа $(1,1)$:

$$(\nabla t)^i_{j;k} = \frac{\partial t^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ks} t^s_j - \Gamma^s_{kj} t^i_s. \tag{8.4}$$

Ненулевые символы Кристоффеля имеют вид (8.3), поэтому ненулевыми слагаемыми в формуле (8.4) могут быть только

$$\frac{\partial t^r_r}{\partial r}, \qquad \frac{\partial t^\varphi_\varphi}{\partial r}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^r_r,$$
$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} t^\varphi_\varphi, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} t^\varphi_\varphi, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} t^r_r, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} t^\varphi_\varphi.$$

Остаётся явно вычислить соответствующие компоненты $\nabla t$:

$$(\nabla t)^r_{r;r} = \frac{\partial t^r_r}{\partial r} = 1, \qquad (\nabla t)^r_{\varphi;\varphi} = \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^\varphi_\varphi - \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^r_r = 0,$$

$$(\nabla t)^\varphi_{\varphi;r} = \frac{\partial t^\varphi_\varphi}{\partial r} + \Gamma^\varphi_{r\varphi} t^\varphi_\varphi - \Gamma^\varphi_{r\varphi} t^\varphi_\varphi = 1,$$

$$(\nabla t)^\varphi_{r;\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} t^r_r - \Gamma^\varphi_{\varphi r} t^\varphi_\varphi = 0.$$

Задача 8.1 решена. $\square$

## 8.3 Свойства ковариантной производной

**Задача 8.3.** Пусть

- $N$ — гладкое подмногообразие риманова многообразия $M$,
- $\nabla^M$ и $\nabla^N$ — связности Леви-Чевитты на $M$ и $N$ соответственно,
- $\gamma(t)$ — гладкая кривая в $N$ и
- $X$ — гладкое поле на $\gamma$, касательное к $N$.

Доказать, что

$$\nabla^N_{\dot\gamma} X = \mathrm{pr}\left(\nabla^M_{\dot\gamma} X\right) \tag{8.5}$$

где pr — ортогональная проекция на касательное пространство к $N$.

*Указание.* Воспользоваться Леммой 4.17.

*Решение Задачи 8.3.* Фиксируем точку $P$ подмногообразия $N$. Пусть

$$\dim N = m, \qquad \dim M = n + m.$$

Используя Лемму 4.17 и делая линейную замену координат, найдём локальные координаты $(x^1, \ldots, x^{n+m})$ в окрестности точки $P$ на $M$, в которых

- подмногообразие $N^m$ является подпространством

$$x^{m+1} = 0, \qquad \ldots \qquad x^{n+m} = 0,$$

- в точке $P$ метрика задаётся единичной матрицей

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij}.$$

В этих координатах оператор проекции просто отбрасывает последние $n$ координат:

$$\operatorname{pr}\left(v^1, \ldots, v^m, v^{m+1}, \ldots, v^{m+n}\right) = \left(v^1, \ldots, v^m\right)$$

Посмотрим теперь внимательно на выражения для ковариантных производных на $N$ и $M$:

$$\nabla^N_{\dot\gamma} X^i = \sum_{j=1}^{m} \dot\gamma^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{m} \Gamma^{i\,(N)}_{jk} X^k\right), \tag{8.6}$$

$$\nabla^M_{\dot\gamma} X^i = \sum_{j=1}^{n+m} \dot\gamma^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{n+m} \Gamma^{i\,(M)}_{jk} X^k\right), \tag{8.7}$$

где через $\Gamma^{i\,(N)}_{jk}$ и $\Gamma^{i\,(M)}_{jk}$ обозначены символы Кристоффеля на $N$ и $M$ соответственно. Нужно доказать, что при $1 \leq i \leq m$ выражения (8.6) и (8.7) совпадают.

- Векторные поля $X$ и $\dot\gamma$ касаются подмногообразия $N$, поэтому они имеют вид

  $$X = \left(X^1, \ldots, X^m, 0, \ldots, 0\right), \quad \dot\gamma = \left(\dot\gamma^1, \ldots, \dot\gamma^m, 0, \ldots, 0\right).$$

  *Поэтому в формуле* (8.7) *все суммы следует брать от* 1 *до* $m$*, как и в* (8.6)*.*

- Остаётся показать, что

  $$\Gamma^{i\,(N)}_{jk} = \Gamma^{i\,(M)}_{jk}, \qquad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

  Посмотрим внимательно на выражения для символов Кристоффеля через метрику:

  $$\Gamma^{i\,(N)}_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{g^{i\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{8.8}$$

  $$\Gamma^{i\,(M)}_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{n+m} \frac{g^{i\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{8.9}$$

Мы считаем, что в точке $P$ матрица $g_{ij}$ единичная, поэтому

$$g^{ij} = 0, \qquad i \neq j.$$

Следовательно *в формуле* (8.9) *ненулевым будет только слагаемое с* $\alpha = i$, *и сумму можно брать от* 1 *до* $m$. Формула (8.7) совпадёт с (8.8), а формула (8.6) — с (8.7) (при $1 \leq i \leq m$).

Задача 8.3 решена. $\square$

### 8.3.1 Ковариантная дивергенция

**Определение 8.4.** Пусть $v$ — векторное поле на многообразии $M$, на котором задана аффинная связность $\nabla$. Функция

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i$$

называется **(ковариантной) дивергенцией** векторного поля $v$.

**Задача 8.5.** Доказать, что для любой (псевдо)римановой связности

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \left( \sqrt{|g|} v^i \right)}{\partial x^i}, \tag{8.10}$$

где $g = \det{(g_{ij})}$.

*Решение Задачи 8.5 .* Это немедленное следствие Задачи 6.4:

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} v^j = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^j} v^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \left( \sqrt{|g|} v^i \right)}{\partial x^i}.$$

Задача 8.5 решена. $\square$

**Задача 8.6.** Доказать, на любом ориентированном римановом многообразии ковариантная дивергенция совпадает с дивергенцией, определённой через звезду Ходжа:

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i = *d * v^\flat. \tag{8.11}$$

Все объекты в формуле (8.11) согласованы с метрикой $g_{ij}$:

- $\nabla$ — связность Леви-Чивиты (т.е. симметричная риманова связность),
- $v^\flat$ — 1-форма, полученная из векторного поля $v$ опусканием индекса:
$$v^\flat_i = g_{ij} v^j,$$
- $*$ — оператор двойственности Ходжа.

*Решение Задачи 8.6.* Это задача неплохо проверяет знание ранее доказанных фактов о символах Кристоффеля и звезде Ходжа $*$.

С одной стороны, для $\nabla_i v^i$ выполнена формула (8.10).

С другой стороны,

$$*d * v^\flat = *d\left(\sum_i v^i \sqrt{|g|}(-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n\right) = \\ = *\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial v^i \sqrt{|g|}}{\partial x^i} \Omega\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial v^i \sqrt{|g|}}{\partial x^i},$$

где через $\Omega$ обозначена форма объема

$$\Omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Мы использовали то, что для звезды Ходжа

$$*f\Omega = f.$$

Чтобы проверить равенство

$$*v^\flat = \sum_i v^i \sqrt{|g|}(-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

можно использовать формулу (3.14), в соответствии с которой

$$\left(*v^\flat\right)_{i_2 \dots i_n} = \Omega_{i_1 \dots i_n} v^{i_1},$$

либо можно использовать вытекающее из (3.16) тождество

$$\alpha \wedge *v^\flat = \alpha(v)\omega,$$

выполненное для любой 1-формы $\alpha$. Задача 8.6 решена. $\square$

## 8.3.2 Форма объёма ковариантно постоянна

**Задача 8.7.** Пусть $M$ — риманово многообразие с метрикой $g_{ij}$. Доказать, что ковариантная производная $n$-формы

$$\omega = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

(формы объёма) относительно римановой связности на $M$ равна нулю.

*Указание.* На любой кривой $\gamma(t)$ можно взять набор параллельных векторных полей $X_1, \dots, X_n$. Тогда

$$\nabla_{\dot\gamma} X_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_{\dot\gamma} g(X_i, X_j) = 0 \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \qquad \nabla_{\dot\gamma} \operatorname{vol}(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

*Решение Задачи 8.7.* Нужно доказать, что для любого векторного поля $X$

$$\nabla_X \omega = 0.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — произвольный набор параллельных (вдоль $X$) касательных векторных полей:

$$\nabla_X X_i = 0.$$

Так как связность согласована с метрикой,

$$\nabla_X g(X_i, X_j) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g\,(X_i, X_j) = \mathrm{const}.$$

Объём параллелепипеда, натянутого на вектора $X_1, \ldots, X_n$, равен $\sqrt{\det g\,(X_i, X_j)}$, поэтому

$$\omega(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{const} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_X(\omega(X_1, \ldots, X_n)) = 0.$$

По свойствам ковариантного дифференцирования

$$\nabla_X(\omega(X_1, \ldots, X_n)) = (\nabla_X\omega)(X_1, \ldots, X_n) +$$
$$+\omega(\nabla_X X_1, X_2, \ldots, X_n) + \cdots + \omega(X_1, X_2, \ldots, \nabla_X X_n).$$

Все слагаемые, кроме $(\nabla_X\omega)(X_1, \ldots, X_n)$, равны нулю, откуда $\nabla_X\omega = 0$, поскольку $X_1, \ldots, X_n$ можно выбрать базисными в касательном пространстве. Задача 8.7 решена. □

*Второе решение Задачи 8.7.* Честно применим формулу для ковариантной производной (8.1). Так как $\omega$ — $n$-форма, $\nabla_X\omega$ — тоже $n$-форма, поэтому достаточно найти только одну её компоненту:

$$(\nabla_X\omega)_{1\ldots n} = X^k\left(\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{k1}\sqrt{|g|}\varepsilon_{s2\ldots n} - \Gamma^s_{kn}\sqrt{|g|}\varepsilon_{12\ldots s}\right) =$$
$$= X^k\left(\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{ki}\sqrt{|g|}\right).$$

Здесь $g = \det\,(g_{ij})$ и $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ — символ Леви-Чивиты[2]. $\nabla_X\omega = 0$ по формуле (6.4). Задача 8.7 решена. □

[2]Т.е. абсолютно антисимметричный единичный тензор

### 8.3.3 Ковариантная и внешняя производные

**Задача 8.8.** Пусть на многообразии $M$ задана симметричная связность $\nabla$. Доказать, что для любой $k$-формы $\omega$

$$\frac{(-1)^k}{k+1} d\omega = \operatorname{Alt}(\nabla\omega). \tag{8.12}$$

*Первое решение Задачи 8.8 .* Можно честно расписать формулу для ковариантной производной (8.1).

$$(\nabla\omega)_{i_1\dots i_k;i_{k+1}} = \frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^{i_{k+1}}} - \Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\dots i_k} - \dots - \Gamma^s_{i_{k+1}i_k}\omega_{i_1\dots i_{k-1}s}.$$

При альтернировании все слагаемые вида $-\Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\dots i_k}$ сократятся с $\Gamma^s_{i_1i_{k+1}}\omega_{si_2\dots i_k}$.

Так как $\operatorname{Alt}(\nabla\omega)$ — кососимметрический тензор, можно считать $i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1}$. Используя кососимметричность $\omega$, получаем, что

$$\operatorname{Alt}\,(\nabla\omega)_{i_1\dots i_{p+1}} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial\omega_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}}}{\partial x^{i_{\sigma(k+1)}}} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\dots\widehat{i}_j\dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}}.$$

Остаётся вспомнить, что коэффициент перед

$$dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{k+1}}$$

в $d\omega$ равен

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\dots\widehat{i}_j\dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}}.$$

Задача 8.8 решена. □

*Второе решение Задачи 8.8 .* Заметим, что обе части формулы (8.12)

(1) являются $\mathbb{R}$-линейными по $\omega$:

$$\mathrm{Alt}\left(\nabla c_1\omega_1 + c_2\omega_2\right) = c_1\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega_1\right) + c_2\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega_2\right),$$
$$d\left(c_1\omega_1 + c_2\omega_2\right) = c_1 d\omega_1 + c_2 d\omega_2;$$

(2) одинаково меняются при умножении на функцию:

$$\mathrm{Alt}\left(\nabla f\omega\right) = \mathrm{Alt}\left(f\nabla\omega + \omega\otimes df\right) =$$
$$= f\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega\right) + \frac{1}{k+1}\omega\wedge df,$$
$$d\left(f\omega\right) = fd\omega + \left(-1\right)^k\omega\wedge df.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любых $p$-формы $\alpha$ и $q$-формы $\beta$

$$\alpha\wedge\beta = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\mathrm{Alt}\left(\alpha\otimes\beta\right),$$

и что

$$\alpha\wedge\beta = \left(-1\right)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

Таким образом остаётся проверить тождество лишь для форм вида

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

Очевидно, что $d\omega = 0$ и

$$\left(\nabla\omega\right)_{i_1\dots i_k;i_{k+1}} = 0 - \Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\dots i_k} - \cdots - \Gamma^s_{i_{k+1}i_k}\omega_{i_1\dots i_{k-1}s}.$$

Так же, как и в предыдущем решении, все слагаемые вида $-\Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\dots i_k}$ сократятся с $\Gamma^s_{i_1i_{k+1}}\omega_{si_2\dots i_k}$. Задача 8.8 решена. □

# Тема 9

# Параллельный перенос и геодезические

## 9.1 Теоретический материал

### 9.1.1 Параллельный перенос

Пусть $M$ — многообразие с заданной на нём аффинной связностью $\nabla$.

**Определение 9.1.** Векторное поле $X$ **параллельно** вдоль кривой $\gamma(t)$ на $M$, если

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X = 0.$$

- В локальных координатах условие параллельности задаётся системой дифференциальных уравнений первого порядка
$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j X^k = 0.$$
- По теореме Пикара-Лефшеца любой касательный вектор $X_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)} M$ может быть единственным образом продолжен до параллельного векторного поля $X_t$ вдоль $\gamma(t)$.

- Говорят, что вектор $X_t \in T_{\gamma(t)}(M)$ получен в результате **параллельного переноса** вектора $X_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}(M)$.

### 9.1.2 Геодезические

**Определение 9.2.** Кривая $\gamma(t)$ — **геодезическая**, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

Иными словами, кривая $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ является геодезической тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению геодезических

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} = 0, \qquad i = 1\ldots, n \tag{9.1}$$

Отметим, что (9.1) — это система из $n$ дифференциальных уравнений второго порядка. В двумерном случае уравнения геодезических имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot u + \Gamma^u_{uu}\dot u^2 + 2\Gamma^u_{uv}\dot u\dot v + \Gamma^u_{vv}\dot v^2 = 0, \\[2ex] \ddot v + \Gamma^v_{uu}\dot u^2 + 2\Gamma^v_{uv}\dot u\dot v + \Gamma^v_{vv}\dot v^2 = 0. \end{cases}$$

Из теоремы существования и единственности решения диффереционального уравнения следует, что через любую точку в любом направлении проходит единственная геодезическая.

**Теорема 9.3.** *Пусть $M$ — регулярная гиперповерхность, $P$ — ее произвольная точка и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор к $M$ в точке $P$. Тогда на $M$ существует геодезическая $\gamma(t)$ т.,ч.*

$$\gamma(0) = P, \qquad \dot\gamma(0) = v.$$

*Более того, геодезическая $\gamma$ единственна в том смысле, что любые две такие геодезических совпадают в пересечении областей определения.*

**Задача 9.4.** Доказать следующие утверждения.

(1) Длина вектора скорости геодезической постоянна.

(2) Если $\gamma(t)$ — геодезическая, то для любой константы $c \in \mathbb{R}$ кривая $\gamma(ct)$ тоже геодезическая.

*Решение Задачи 9.4.* (1) Достаточно продифференцировать скалярный квадрат вектора скорости и воспользоваться формулой для разложения вектора ускорения

$$\frac{d}{dt}(\dot\gamma, \dot\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma) = 0.$$

(2) Легко видеть, что

$$\nabla_{\dot\gamma(ct)}\dot\gamma(ct) = c^2 \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

Задача 9.4 решена. □

## 9.2 Параллельный перенос.

**Задача 9.5.** Найти результат параллельного переноса вектора $v$ вдоль кривой $\gamma(t)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

*Решение Задачи 9.5.* В $\mathbb{R}^n$ все символы Кристоффеля нулевые $\Gamma^i_{jk} = 0$, поэтому любое постоянное векторное поле ковариантно постоянно. Поэтому вектор будет переноситься обычным паралелльным переносом. Задача 9.5 решена. □

**Задача 9.6.** Описать явно уравнение параллельного переноса вдоль

(1) параллели на сфере;

(2) меридиана на сфере,

и решить их.

*Ответ в Задаче 9.6.* Рассмотрим сферические координаты $(\varphi, \theta)$ на сфере (где $\theta$ — угол с осью $z$).

(1) Для параллели

$$\varphi(t) = t, \qquad \theta(t) = \theta_0$$

уравнения параллельного переноса имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX^\theta}{dt} - \sin\theta_0 \cos\theta_0 X^\varphi = 0, \\ \dfrac{dX^\varphi}{dt} + \operatorname{ctg}\theta_0 X^\theta = 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Общее решение этих уравнений

$$X^\theta = -C_1 \sin\theta_0 \cos(t\cos\theta_0 + C_2),$$
$$X^\varphi = -C_1 \sin(t\cos\theta_0 + C_2).$$

(2) Для меридиана

$$\varphi(t) = \varphi_0, \qquad \theta(t) = t$$

уравнения параллельного переноса имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX^\theta}{dt} = 0, \\ \dfrac{dX^\varphi}{dt} + \operatorname{ctg} t\, X^\varphi = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Общее решение этих уравнения

$$X^\theta = C_1 \frac{1}{\sin t}, \qquad X^\varphi = C_2.$$

*Решение Задачи 9.6.* В обоих случаях нужно честно написать уравнения параллельного переноса

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j X^k = 0.$$

Для сферы (ненулевые) символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta,$$

потому что в сферических координатах $(\varphi, \theta)$ метрика на сфере (единичного радиуса) равна

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Дифференциальные уравнения (9.2) и (9.3) решаются стандартными методами. Отметим, что уравнение (9.2) эквивалентно

$$\begin{cases} \ddot{X}^\varphi + \cos^2\theta_0 X^\varphi = 0, \\ X^\theta = -\operatorname{tg}\theta_0\, \dot{X}^\varphi, \end{cases}$$

а нетривиальная часть уравнения (9.3) эквивалентна

$$d\ln X^\theta = d\ln\frac{1}{\sin t}.$$

$\square$

**Замечание 9.7.** Для меридиана параллельный перенос можно описать, не проводя вычислений:

- Из соображений симметрии единичный касательный вектор к меридиану при параллельном переносе перейдет в себя (меридиан — геодезическая, т.е. удовлетворяет уравнению $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$).

- При параллельном переносе на римановом многообразии сохраняется скалярное произведение (и сохраняется ориентация на ориентированном многообразии). Поэтому при параллельном переносе сохраняются углы и длины векторов.

- Значит вектор длины $l$, имеющий угол $\alpha$ с параллелью, перейдет в вектор той же длины, имеющий тот же угол.

## 9.3 Нахождение геодезических

**Задача 9.8.** Пусть $F : M \to M$ — некоторая изометрия, переводящая риманово многообразие $M$ в себя, и регулярная кривая $\gamma \subset M$ совпадает со множеством неподвижных точек изометрии $F$, т.е. $\gamma = \{x \in M | F(x) = x\}$. Докажите, что в этом случае кривая $\gamma$ — геодезическая на $M$.

*Решение Задачи 9.8.* Через любую точку риманова многообразия в любом направлении проходит единственная геодезическая. Рассмотрим геодезическую $\hat{\gamma}$, проходящую через точку кривой $\gamma(t)$ в направлении её касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$.

Изометрия переводит геодезические в геодезические[1]. Поэтому $F(\hat{\gamma})$ — тоже геодезическая. С другой стороны, изометрия сохраняет точку геодезической $\gamma(t)$ и её касательный вектор $\dot{\gamma}(t)$. Значит, геодезическая перешла в себя. Все точки геодезической $\hat{\gamma}$ неподвижны, и, значит, $\hat{\gamma} = \gamma$. Задача 9.8 решена. $\square$

Сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы, называется **большой окружностью**[2].

**Задача 9.9.** Доказать, что геодезические сферы — это большие окружности и только они.

[1]Изометрия сохраняет метрику, а, следовательно, и символы Кристоффеля с уравнениями геодезических.

[2]Иногда используется другой термин — “большой круг”

Уравнения геодезических — довольно непростое дифференциальное уравнение. Для его решения на практике обычно нужно либо найти хорошие координаты, либо воспользоваться симметриями многообразия, либо угадать первый интеграл.

*Первое решение Задачи 9.9 .* Попробуем честно решить уравнения геодезических.

В сферических координатах $(\Theta, \varphi)$ метрика имеет вид $ds^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2$. Символы Кристоффеля при этом равны

$$\Gamma^{\Theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\Theta\cos\Theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\Theta} = \Gamma^{\varphi}_{\Theta\varphi} = \operatorname{ctg}\Theta$$

Получаем уравнения геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} - \sin\Theta\cos\Theta\dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\operatorname{ctg}\Theta\dot{\varphi}\dot{\Theta} = 0. \end{cases}$$

Можно (хотя и не так просто) показать, что общее решение уравнений геодезических имеет вид

$$\operatorname{ctg}\Theta = a\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Чтобы не возиться с этим уравнением, воспользуемся симметричностью сферы:

- Угадываем частное решение. Легко видно, что при

  $$\Theta(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \dot{\Theta}(0) = 0$$

  геодезическая — это кривая $\Theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. экватор.

- Вращения задают изометрии сферы. Группа вращений пространства SO(3) транзитивно действует на сфере (любую точку можно перевести в любую другую). Более того, при помощи вращения можно перевести любой касательный вектор на сфере в любой другой касательный вектор. Поэтому все остальные геодезические получаются из экватора вращениями. Значит, геодезические — большие круги и только они.

Задача 9.9 решена. □

*Второе решение Задачи 9.9 .* Можно воспользоваться Задачей 9.8. Каждая большая окружность — это множество точек сферы, остающихся неподвижными при симметрии относительно соответствующей плоскости, проходящей через начало координат. Задача 9.9 решена. □

**Задача 9.10.** Привести пример многообразия $M$, у которого

(1) существуют две точки, через которые проходят различные геодезические;

(2) существуют две точки, которые нельзя соединить геодезической.

*Решение Задачи 9.10.* (1) Можно взять сферу $S^2$ и полюса на ней.

(2) Можно взять кольцо на плоскости, и точки, которые нельзя в кольце соединить отрезком.

Задача 9.10 решена. □

**Задача 9.11.** Доказать, что любые две точки связного многообразия можно соединить "ломаной" (т.е. кривой, состоящей из конечного числа отрезков геодезических).

*Решение Задачи 9.11.* Любые две достаточно близкие точки можно соединить (кратчайшей) геодезической. Поэтому множество точек $Ox$, куда можно прийти из точки $x \in M$ по "геодезической ломаной" — открытое множество. Связное многообразие не может распасться в дизъюнкное объединение нескольких нетривиальных открытых множеств. Задача 9.11 решена. □

## 9.4 Геодезические на поверхности Лиувилля

**Задача 9.12.** Показать, что на области с метрикой

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$$

(**поверхность Лиувилля**) геодезические определяются уравнением

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) - a}} = 0, \tag{9.4}$$

где a — произвольная постоянная.

**Замечание 9.13.** Это "симметричная" форма записи выполнения одного из двух уравнений

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\psi(v) - a}{\varphi(u) + a}, \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{\varphi(u) + a}{\psi(v) - a}.$$

*Решение Задачи 9.12.* Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}, \qquad \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)},$$
$$\Gamma^u_{vv} = -\frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}, \qquad \Gamma^v_{uu} = -\frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)},$$
$$\Gamma^v_{vv} = \frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}.$$

Получаем уравнения геодезических

$$\begin{cases} \ddot{u} + \dfrac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}\dot{u}^2 + \dfrac{\psi'_v}{\varphi + \psi}\dot{u}\dot{v} - \dfrac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}\dot{v}^2 = 0, \\[2ex] \ddot{v} - \dfrac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}\dot{u}^2 + \dfrac{\varphi'_u}{\varphi + \psi}\dot{u}\dot{v} + \dfrac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}\dot{v}^2 = 0. \end{cases} \tag{9.5}$$

Будем считать, что $v = v(u)$ (случай $u = u(v)$ разбирается аналогично и приводит к тому же результату). Вспомним формулу для второго дифференциала:

$$\frac{d^2 v(u)}{dt^2} = \frac{d^2 v}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{du}\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Исходя из формулы для второго дифференциала, вычтем из второго уравнения системы (9.5) первое уравнение этой системы, помноженное на $\dfrac{dv}{du}$. Если воспользоваться формулой для производной сложной функции $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{dt}$, то $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2$ удастся вынести за скобки

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2 v}{du^2} - \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)} + \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\frac{dv}{du} - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\left(\frac{dv}{du}\right)^3\right) = 0.$$

Таким образом мы получаем дифференциальное уравнение

$$2(\varphi+\psi)\frac{d^2 v}{du^2} = \psi'_v - \varphi'_u\frac{dv}{du} + \psi'_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \varphi'_u\left(\frac{dv}{du}\right)^3. \tag{9.6}$$

После этого несложно проверить, что уравнение (9.6) эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\psi - \varphi\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2}\right) = 0.$$

Таким образом

$$\psi - \varphi\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = a\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right), \tag{9.7}$$

где $a$ — некоторая константа. Уравнения (9.4) — это другая форма записи равенства (9.7). Задача 9.12 решена. $\square$

## 9.5 Геодезические на подмногообразиях

**Задача 9.14.** Говорят, что два подмногообразия $M_1$ и $M_2$ **касаются вдоль кривой** $\gamma$, если $\gamma \subset M_1 \cap M_2$ и в каждой точке $P \in \gamma$ у них совпадают касательные плоскости

$$T_P M_1 = T_P M_2.$$

Доказать, что если два подмногообразия $M_1, M_2$ риманова многообразия $M$ касаются вдоль некоторой кривой $\gamma$, и $\gamma$ является геодезической на одном из подмногообразий, то $\gamma$ — геодезическая и на другом подмногообразии:

$$\nabla^{M_1}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^{M_2}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

*Указание:* Использовать формулу (8.5).

*Решение Задачи 9.14.* Ковариантные производные одновременно обращаются в ноль, потому что они равны:

$$\nabla^{M_1}_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla^{M_2}_{\dot\gamma}\dot\gamma.$$

Они равны, т.к. согласно формуле (8.5)

$$\nabla^{M_i}_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{pr}_{TM_i}\,(\nabla^{M}_{\dot\gamma}\dot\gamma),$$

т.е. они будут проекцией одного и того же вектора $\nabla^{M}_{\dot\gamma}\dot\gamma$ на одно и то же пространство $T_P M_1 = T_P M_2$. Задача 9.14 решена. $\square$

**Задача 9.15.** Пусть $M$ — регулярная поверхность в евлидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Доказать, что кривая $\gamma(t)$ на $M$ является геодезической тогда и только тогда, когда

(1) параметр на ней пропорционален натуральному $t = cs$,

(2) ускорение кривой ортогонально поверхности:

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M.$$

*Решение Задачи 9.15.* Параметр пропорционален натуральному, т.к. связность согласована с метрикой:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right) = 2\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right)$$

Второе условие будет выполнено, так как в евклидовом пространстве

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathrm{pr}_{TM}\left(\ddot{\gamma}\right).$$

Задача 9.15 решена. □

**Следствие 9.16.** *Любая прямая на регулярной поверхности в евклидовом пространстве является геодезической.*

# Тема 10

# Экспоненциальное отображение

## 10.1 Определение экспоненциального отображения

**Определение 10.1.** Рассмотрим точку $p$ на многообразии $M$ с аффинной связностью $\nabla$. Для любого вектора $v \in T_pM$ существует единственная геодезическая $\gamma_v(t)$ такая, что

$$\gamma_v(0) = p, \qquad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

**Экспоненциальное отображение** — это отображение, которое сопоставляет касательному вектору $v \in T_PM$ точку $\gamma_v(1)$, т.е.

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

Экспоненциальное отображение заведомо определено на некоторой окрестности нуля $U \subset T_PM$ (по теореме существования и единственности решения ДУ).

**Теорема 10.2.** *Существует окрестность нуля в касательном пространстве $U \subset T_PM$, что экспоненциальное отоб-*

*ражение*

$$\exp_P : U \to M$$

*диффеоморфно отображает эту окрестность на окрестность точки $P \in M$.*

По теореме об обратном отображении достаточно доказать, что якобиан отображения невырожден (в нуле касательного пространства).

**Задача 10.3.** Рассмотрим многообразие $M$ с аффинной связностью $\nabla$. Пусть

- $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $P \in M$;
- $e_i = \partial_{x^i}$ — соответствующий канонический базис $T_P M$;
- $v^1, \ldots, v^n$ — линейные координаты на $T_P M$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Доказать, что якобиан экспоненциального отображения в нуле $0 \in T_p M$ является единичной матрицей:

$$\frac{\partial \left(\exp_P\right)^i}{\partial v^j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

*Решение Задачи 10.3.* По определению частной производной

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \exp_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_{te_i}(1).$$

Остаётся воспользоваться тем, что геодезические, проходящие через одну точку в одном направлении, отличаются лишь параметризацией:

$$\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Задача 10.3 решена. $\square$

## 10.2 Нормальные (геодезические) координаты

Экспоненциальное отображение

$$\exp_P : U \to M, \qquad U \subset T_P M$$

позволяет отождествить окрестности

$$U \subset T_P M, \qquad \text{и} \qquad \exp_P(U) \subset M.$$

Рассмотрим линейные координаты на касательном пространстве $T_p M$.

**Определение 10.4.** Соответствующие координаты в окрестности точки $p$ называются **геодезическими** или **нормальными**.

**Задача 10.5.** Пусть связность $\nabla$ симметрична. Доказать, что в нормальных координатах с центром в точке $p$ все символы Кристоффеля обращаются в 0 в этой точке:

$$\Gamma^k_{ij}(p) = 0.$$

*Решение Задачи 10.5.* Для любого вектора $v$ прямая

$$\gamma(t) = t\mathbf{v}$$

является геодезической. Уравнение геодезических для этих прямых имеет вид

$$\Gamma^k_{ij}(x) v^i v^j = 0.$$

Все эти уравнения одновременно выполняются в начале координат для всех векторов $v$. Таким образом при каждом фиксированном $k$ числа $\Gamma^k_{ij}(0)$ задают нулевую квадратичную форму[1], и, следовательно, все они равны нулю. Задача 10.5 решена. □

[1]Здесь мы используем симметричность $\Gamma^k_{ij}$ по нижним индексам.

**Задача 10.6** (Лемма Гаусса)**.** Доказать, что для любой точки $p$ риманова многообразия $M$ образ любой достаточно малой сферы в $T_pM$ под действием экспоненциального отображения $\exp_p$ ортогонален всем геодезическим, проходящим через точку $p$.

*Короткая формулировка леммы Гаусса:* Геодезическая сфера ортогональна ко всем геодезическим радиусам.

*Решение Задачи 10.6.* Рассмотрим сферу радиуса $r$ в касательном пространстве

$$S_r \subset T_pM$$

с центром в начале координат. Рассмотрим отображение

$$F(s,t) = \exp_p(tv(s)),$$

где $v(s) \in S_r$. Тогда вектора

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad F_s = \frac{\partial F}{\partial s}$$

будут касательными к геодезическому радиусу и геодезической сфере соответственно. Нужно доказать, что

$$(F_t, F_s) = 0.$$

Это равенство очевидно выполнено при $t = 0$, поскольку $F(s,0) = p$. Поэтому остаётся доказать, что

$$\frac{d}{dt}\,(F_t, F_s) = 0.$$

Будем доказывать это равенство в точке $(s_0, t_0)$. Обозначим

- $\gamma(t) = F(s_0, t)$ — кривая при фиксированном $s = s_0$,

- $\delta(t) = F(s, t_0)$ — кривая при фиксированном $t = t_0$,
- $\nabla_t = \nabla_{\dot\gamma(t)}$ и $\nabla_s = \nabla_{\dot\delta(s)}$.

В таком случае

$$\frac{d}{dt}\left(F_t, F_s\right) = \nabla_t\left(F_t, F_s\right).$$

Так как связность согласована с метрикой

$$\nabla_t\left(F_t, F_s\right) = \left(\nabla_t F_t, F_s\right) + \left(F_t, \nabla_t F_s\right).$$

Так как $\gamma(t)$ — геодезическая,

$$\nabla_t F_t = 0.$$

**Утверждение 10.7.** *Для симметричной связности*

$$\nabla_s F_t = \nabla_t F_s.$$

*Доказательство Утверждения 10.7.* Достаточно явно написать выражения в локальных координатах:

$$\left(\nabla_s F_t\right)^i = \frac{\partial^2 F^i}{\partial s \partial t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial F^j}{\partial s}\frac{\partial F^k}{\partial t},$$
$$\left(\nabla_s F_t\right)^i = \frac{\partial^2 F^i}{\partial s \partial t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial F^j}{\partial t}\frac{\partial F^k}{\partial s}.$$

Очевидно, что выражения равны, если $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Утверждение 10.7 доказано. □

Переставляя индексы местами и вынося ковариантную производную за скобки, получаем

$$\nabla_t\left(F_t, F_s\right) = \left(F_t, \nabla_s F_t\right) = \frac{1}{2}\nabla_s\left(F_t, F_t\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\|v\right\|^2 = 0,$$

где последнее равенство выполнено, так как все вектора $v$ лежат на сфере фиксированного радиуса. Задача 10.6 решена. □

**Следствие 10.8.** *Рассмотрим обобщённые сферические координаты*

$$(r\,, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$$

*в касательном пространстве $T_P M$. В соответствующих координатах в окрестности точки $P \in M$ (которые называются **полярными координатами**) метрика будет иметь вид*

$$ds^2 = dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} d\varphi^i d\varphi^j. \tag{10.1}$$

## 10.3 Полугеодезические координаты

Координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ в окрестности точки риманова многообразия $P \in M^n$ называются **полугеодезическими**, если в них метрика имеет вид

$$ds^2 = (du^1)^2 + \sum_{i,j\geq 2} g_{ij} du^i du^j. \tag{10.2}$$

**Задача 10.9.** Показать, что в полугеодезических координатах $(u^1, \ldots, u^n)$ первые координатные линии

$$u^2 = \mathrm{const}, \ldots, u^n = \mathrm{const}$$

являются геодезическими, ортогональными поверхностям уровня $u^1 = \mathrm{const}$.

*Решение Задачи 10.9.* Утверждение про ортогональность очевидно. Чтобы доказать, что координатные линии

$$\gamma(t) = \left(t, u_0^2, \ldots, u_0^n\right)$$

являются геодезическими, достаточно доказать, что $\Gamma_{11}^i = 0, i = 1, \ldots, n$. В данном случае

$$\Gamma_{11}^i = \frac{g^{i\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}\right) = -\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial 1}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Задача 10.9 решена. □

**Теорема 10.10.** *В окрестности любой точки риманова многообразия существуют полугеодезические координаты.*

*Построение полугеодезических координат* $(u^1, \ldots, u^n)$:

- Рассмотрим произвольную гиперповерхность
$$P^{n-1} \subset M^n.$$
- Выпустим из каждой точки гиперповерхности $P^{n-1}$ ортогональную ей геодезическую.
- Тогда $(u^2, \ldots, u^n)$ — локальные координаты на гиперповерхности $P^{n-1}$ (продолженные до функций, постоянных на геодезических).
- Координата $u^1$ — натуральный параметр на геодезических, ортогональных к $P^{n-1}$ (равный нулю на $P^{n-1}$).

**Замечание 10.11.** Пусть $N(x)$ — гладкое поле единичных нормалей на $P^{n-1}$. Тогда точка с построенными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$ — это точка
$$\exp_Q\left(u^1\, N(Q)\right),$$
где $Q$ — точка $(u^2, \ldots, u^n)$ на гиперповерхности $P^{n-1}$.

**Задача 10.12.** Проверить, что построенные координаты — полугеодезические, т.е., что метрика имеет вид (10.2).

*Решение Задачи 10.12.* Несложно показать (честно посчитав якобиан отображения), что $(u^1, \ldots, u^n)$ — корректно определенные локальные координаты.

Нужно доказать, что
$$g_{11} = 1, \qquad g_{1i} = 0.$$

По построению метрика будет иметь вид (10.2) на гиперповерхности $P^{n-1}$. Остаётся проверить, что

$$\nabla_1 \left(\partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) = 0.$$

Последнее равенство будет выполнено, так как связность согласована с метрикой

$$\nabla_1 \left(\partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) = \left(\nabla_1 \partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) + \left(\partial_{u^1}, \nabla_1 \partial_{u^i}\right),$$

первая координатная линия — геодезическая

$$\nabla_1 \partial_{u^1} = 0,$$

и связность симметрична

$$\nabla_i \partial_{u^j} = \nabla_j \partial_{u^i}.$$

Задача 10.12 решена. □

**Задача 10.13.** Доказать, что для любой геодезической $\gamma(t)$ и любой точки $x_0$ на ней в окрестности этой точки существуют такие полугеодезические координаты $u^1, \ldots, u^n$, что в них геодезическая $\gamma(t)$ является координатной линией

$$u^2 = 0, \ldots, u^n = 0.$$

*Решение Задачи 10.13.* Достаточно взять гиперповерхность $P^{n-1}$, ортогональную в точке $x_0$ кривой $\gamma(t)$:

$$T_{x_0} P \perp \dot{\gamma}|_{x_0}.$$

Задача 10.13 решена. □

## 10.4 Геодезические — локально кратчайшие

Можно определить **расстояние** $\rho$ между двумя точками риманова многообразия $x, y \in M^n$ как инфинум по длинам всех гладких дуг, соединяющих эти точки:

$$\rho(x,y) = \inf \{l(\gamma) \,|\, \gamma : [a,b] \to M^n, \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y\}.$$

**Задача 10.14** ( Геодезическая — локально кратчайшая)**.** Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Доказать, что для любых двух достаточно близких точек $x_1, x_2 \in \gamma$ отрезок геодезической $\gamma$ является кратчайшей кривой, соединяющей эти точки $x_1$ и $x_2$.

*Решение Задачи 10.14.* Рассмотрим полугеодезические координаты из Задачи 10.13, в которых $\gamma(t)$ — первая координатная линия. Без ограничения общности $u^1(x_2) > u^1(x_1)$. Тогда длина любой другой кривой $\hat{\gamma} = (u^1(t), \ldots, u^n(t))$ удовлетворяет оценкам

$$l = \int_{\hat{\gamma}} \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + \sum_{i,j \geq 2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt \geq$$

$$\geq \int_{\hat{\gamma}} \left\| \dot{u}^1 \right\| dt \geq \int_{\hat{\gamma}} \dot{u}^1 dt = u^1(x_2) - u^1(x_1),$$

причем равенство возможно только при $u^2 = \cdots = u^n = 0$ и $u^1 > 0$, т.е. для отрезка геодезической $\gamma(t)$. Задача 10.14 решена. □

**Задача 10.15.** Доказать, что если кривая $\gamma(t)$, соединяющая точки $P$ и $Q$, имеет наименьшую длину среди кривых, соединяющих эти точки, то эта кривая — геодезическая.

*Решение Задачи 10.15.* Кратчайшая является локально кратчайшей. Локально кратчайшие — геодезические. Локально геодезическая — геодезическая. Задача 10.15 решена. □

Можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 10.16.** *У любой точки $x$ риманова многообразия $M$ существует окрестность $Ox$ т.,ч. любые две точки этой окрестности можно соединить единственной минимальной геодезической, т.е. геодезической, длина которой равна расстоянию между этими точками.*

**Замечание 10.17.** В теореме не утверждается, что две точки можно соединить ровно одной геодезической. Но если окрестность мала, то любая другая геодезическая будет выходить за пределы этой окрестности и не будет минимальна.

## 10.5 Изометрии

**Задача 10.18.** Доказать,что

- любая изометрия плоскости является аффинным преобразованием

$$x \to Ax + b, \qquad A \in \mathrm{O}(n),$$

- и что любая изометрия сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является ограничением некоторого ортогонального преобразования $\mathbb{R}^{n+1}$.

Для решения Задачи 10.18 можно воспользоваться следующим утверждением.

**Теорема 10.19.** *Если изометрия связного риманова многообразия $f : M^n \to M^n$ оставляет на месте точку $f(P) = P$ и тождественно действует на соответствующем касательном пространстве*

$$df|_P = \mathrm{id} : T_P M \to T_P M,$$

*то она является тождественным преобразованием $f = \mathrm{id}$.*

Это немедленное следствие того факта, что через любую точку в любом направлении проходит единственная геодезическая.

**Следствие 10.20.** *Любая изометрия (связных) римановых многообразий*

$$f : M_1 \to M_2$$

*полностью определяется изометричным отображением одного касательного пространства*

$$df : T_P M_1 \to T_{f(P)} M_2.$$

*Решение Задачи 10.18.* Легко видеть, что указанные преобразования реализуют всевозможные изометрии произвольного касательного пространства. Задача 10.18 решена. $\square$

# Тема 11

# Тензор Римана

## 11.1 Теоретический материал

### 11.1.1 Определение тензора Римана

Пусть на многообразии $M$ задана связность $\nabla$. Тогда **тензор кривизны Римана** — это тензор типа $(1,3)$, определяемый по формуле[1]

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{11.1}$$

**Задача 11.1.** Показать, что в локальных координатах компоненты тензора Римана[2] $R^i_{j,kl}$, заданные формулой

$$R(X,Y)Z = R^i_{j,kl}X^kY^lZ^j\frac{\partial}{\partial x^i},$$

имеют вид

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{kj}. \tag{11.2}$$

[1] В некоторых книжках перед всем этим выражением ставится знак "$-$".

[2] Чтобы не запутаться, в нижних индексах тензора Римана мы будем ставить запятую $R^i_{j,kl}$ (хотя в книжках она обычно не ставится).

**Замечание 11.2.** Формула (11.2) верна для любой аффинной связности $\nabla$, не обязательно симметричной. Мы считаем, что $\Gamma^i_{jk} = (\nabla_j \partial_k)^i$, или, иными словами, что

$$\nabla_X Y^i = X^j \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right).$$

*Решение Задачи 11.1.* Задача 11.1 решается прямым вычислением. □

### 11.1.2 Свойства тензора Римана

(1) $R(u,\ v) = -R(v,\ u)$.

Следующие три свойства выполнены, если связность не имеет кручения.

(2) $R(u,\ v)w + R(v,\ w)u + R(w,\ u)v = 0$.

Если связность согласована с метрикой, то

(3) $\langle R(u,\ v)w,\ z\rangle = -\langle R(u,\ v)z,\ w\rangle$.

(4) $\langle R(u,\ v)w,\ z\rangle = \langle R(w,\ z)u,\ v\rangle$.

Отметим, что последнее свойство вытекает из предыдущих трех.

Если связность согласована с метрикой $g_{ij}$, то можно опустить индекс у тензора Римана

$$R_{ij,kl} = g_{is} R^s_{j,kl}.$$

В этом случае свойства тензора Римана можно записать следующим образом[3].

[3]Здесь некоторые свойства собраны воедино.

(1) Кососимметричность

$$R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = -R_{ij,lk}. \tag{11.3}$$

(2) Первое тождество Бьянки

$$R_{i[j,kl]} = R_{ij,kl} + R_{il,jk} + R_{ik,lj} = 0. \tag{11.4}$$

(3) Симметричность относительно пар индексов

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}. \tag{11.5}$$

### 11.1.3 Тензор Риччи и скалярная кривизна

При помощи тензора Римана $R^i_{j,kl}$ можно построить следующие тензоры:

- **тензор Риччи**

  $$R_{ij} = R^s_{i,sj}$$

  получается при свёртке тензора Римана по паре индексов.

- **скалярная кривизна**

  $$R = R^i_i = g^{ij} R_{ji}$$

  получается из тензора Риччи после поднятия индекса и последующей свёртки.

## 11.2 Тензор Римана кривых и поверхностей

**Задача 11.3.** Вычислить тензор кривизны одномерного многообразия с произвольной метрикой.

*Решение Задачи 11.3.* Тензор Римана нулевой

$$R^1_{1,11} = 0,$$

из-за кососимметричности по нижним индексам (11.4). Задача 11.3 решена. □

### 11.2.1 Скалярная и гауссова кривизна

**Теорема 11.4.** *Для двумерного риманова многообразия*

$$R = 2K,$$

*где $R$ — это скалярная кривизна многообразия, а $K$ – гауссова кривизна.*

**Задача 11.5.** Доказать, что для двумерных многообразий тензор Римана имеет вид

$$R_{ij,kl} = K(x)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{11.6}$$

для некоторой функции $K(x)$.

*Решение Задачи 11.5.* Поскольку $\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$, мы можем положить

$$K(x) = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Остаётся заметить, что

- обе части (11.6) одновременно меняют знак при перестановке индексов[4],

- а в остальных случаях, когда $R_{ij,kl}$ не получается из $R_{12,12}$ перестановкой индексов, обе части (11.6) равны нулю.

[4]В соотвествии с формулами (11.4) и (11.5).

Задача 11.5 решена. □

**Задача 11.6.** Если на $n$-мерном многообразии тензор Римана удовлетворяет условию

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

то тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}, \qquad R = n(n-1)K.$$

В частности, для двумерных многообразий

$$R_{ij} = Kg_{ij}, \qquad R = 2K.$$

*Решение Задачи 11.6.* Доказательство прямым вычислением.

- Тензор Римана задаётся формулой

$$R^i_{j,kl} = g^{is}R_{sj,kl} = K\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right).$$

- Тензор Риччи в данном случае имеет вид

$$R_{ij} = R^s_{i,sj} = K\left(\delta^s_s g_{ij} - \delta^s_j g_{is}\right) = (n-1)Kg_{ij}.$$

- Скалярная кривизна имеет вид

$$R = R_{ij}g^{ij} = (n-1)K\delta^i_i = (n-1)nK.$$

Задача 11.6 решена. □

Таким образом остаётся показать, что для двумерных многообразий функция $K(x)$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности. Гауссова кривизна (и тем более скалярная кривизна) не меняется при движении объемлющего пространства, поэтому поверхность можно реализовать любым удобным для нас способом.

**Задача 11.7.** Доказать, что для поверхности-графика

$$z = f(x, y),$$

удовлетворяющей условиям

$$f(0,0) = 0, \qquad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$$

тензор Римана имеет вид

$$R_{ij,kl} = f_{ik} f_{jl} - f_{il} f_{jk}, \tag{11.7}$$

а гауссова кривизна равна

$$K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2. \tag{11.8}$$

*Решение Задачи 11.7 .* Задача решается прямым вычислением. Вычисления упрощаются за счет того, что $f_x(0) = f_y(0) = 0$.

- Канонические базисные векторы:

  $$r_x = (1, 0, f_x), \qquad r_y = (0, 1, f_y).$$

  Получаем матрицу первой квадратичной формы:

  $$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

  Обратная к ней:

  $$G^{-1} = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

- Вторые производные:

  $$r_{ij} = (0, 0, f_{ij}).$$

Поэтому в начале координат матрицы первой и второй квадратичных форм:

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q(0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Получаем формулу (11.8) для гауссовой кривизны:

$$K(0) = \frac{\det Q(0)}{\det G(0)} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Символы Кристоффеля регулярной поверхности находятся по формуле

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^x \\ \Gamma_{ij}^y \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (r_{ij}, r_x) \\ (r_{ij}, r_y) \end{pmatrix}.$$

Поэтому в данном случае

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{f_{ij} f_k}{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

В частности,

$$\Gamma_{jk}^i(0) = 0.$$

- Символы Кристоффеля $R_{j,kl}^i$ находятся по формуле (11.2). В начале координат $f_x = f_y = \Gamma_{jk}^i = 0$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, поэтому вычисления упрощаются:

$$R_{ij,kl}(0) = R_{j,kl}^i(0) = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0) = f_{ik} f_{jl} - f_{il} f_{jk}.$$

Формула (11.7) доказана.

Задача 11.7 решена. □

**Задача 11.8.** Вычислить тензор кривизны для двумерной сферы (единичного радиуса) в сферических координатах.

*Указание.* В двумерном случае у тензора кривизны только одна нетривиальная компонента: *все компоненты* $R_{ij,kl}$ *выражаются через* $R_{12,12}$ *по формулам* (11.4) *и* (11.5).

*Ответ в Задаче 11.8* Ненулевые компоненты тензора Римана:

$$R^{\theta}_{\varphi,\theta\varphi} = \sin^2\theta, \quad R^{\theta}_{\varphi,\varphi\theta} = -\sin^2\theta, \quad R^{\varphi}_{\theta,\varphi\theta} = 1, \quad R^{\varphi}_{\theta,\theta\varphi} = -1.$$

*Решение Задачи 11.8.*

- В сферических координатах $(\varphi,\theta)$ метрика
$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

- Ненулевые символы Кристоффеля:
$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta.$$

- Вычислим компоненту $R_{\theta\varphi,\theta\varphi}$. Для этого найдём компоненту $R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$ по формуле (11.2) и опустим индекс.
$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} &= \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\theta s}\Gamma^{s}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi s}\Gamma^{s}_{\theta\varphi} = \\ &= -\frac{\partial\left(\cos\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \\ &= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta. \end{aligned}$$
Матрица метрики диагональна, поэтому в данном случае
$$R_{\theta\varphi,\theta\varphi} = g_{\theta s}R^{s}_{\varphi\theta\varphi} = R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta.$$

- Все компоненты тензора Римана с опущенным индексом выражаются через $R_{\theta\varphi,\theta\varphi}$ по формулам (11.4) и (11.5):

$$R_{\theta\varphi,\theta\varphi} = R_{\varphi\theta,\varphi\theta} = \sin^2\theta, \qquad R_{\varphi\theta,\theta\varphi} = R_{\theta\varphi,\varphi\theta} = -\sin^2\theta.$$

- Компоненты самого тензора $R^i_{j,kl}$ получаются из $R_{ij,kl}$ поднятием индекса.

Задача 11.8 решена. □

**Задача 11.9.** Доказать, что тензор Риччи симметричен

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

*Решение Задачи 11.9.* Это следует из (11.5), поскольку

$$R_{ij} = R^s_{i,sj} = g^{st} R_{ti,sj} = g^{st} R_{sj,ti} = R^t_{j,ti} = R_{ji}.$$

Задача 11.9 решена. □

**Задача 11.10.** Доказать, что если связность согласована с (псевдо)римановой метрикой, то свёртка тензора Римана по выделенному нижнему индексу тривиальна:

$$R^i_{i,kl} = 0.$$

*Решение Задачи 11.10.* Действительно, свёртка тривиальна, т.к.

$$R^i_{i,kl} = g^{is} R_{si,kl} = -g^{si} R_{is,kl}.$$

Мы использовали симметричность метрики $g^{is} = g^{si}$ и (11.4).
Задача 11.10 решена. □

**Задача 11.11.** Вычислить тензор Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну для многообразия с метрикой

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

*Ответ в Задаче 11.11.* Укажем только ненулевые компоненты тензоров.

- Тензор кривизны Римана

$$R_{xy,xy} = R_{yx,yx} = -R_{xy,yx} = -R_{yx,xy} = -\frac{\lambda \Delta \ln |\lambda|}{2}.$$

- Тензор Риччи

$$R_{xx} = R_{yy} = -\frac{\Delta \ln|\lambda|}{2}.$$

- Скалярная кривизна

$$R = -\frac{\Delta \ln|\lambda|}{\lambda}.$$

*Решение Задачи 11.11.* Решение аналогично Задаче 11.8. Отметим, что в данном случае ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = \frac{\lambda_x}{2\lambda}, \qquad \Gamma^x_{yy} = -\frac{\lambda_x}{2\lambda},$$
$$\Gamma^y_{yy} = \Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = \frac{\lambda_y}{2\lambda}, \qquad \Gamma^y_{xx} = -\frac{\lambda_y}{2\lambda},$$

а, например, компонента $R^x_{yxy}$ тензора кривизны находится по формуле

$$R^x_{yxy} = \frac{\partial \Gamma^x_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma^y_{xy}}{\partial y} + \Gamma^x_{xs}\Gamma^s_{yy} - \Gamma^x_{ys}\Gamma^s_{xy} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)_x - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)_y - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2\right) =$$
$$= -\frac{\partial^2 \ln|\lambda|}{2\partial x^2} - \frac{\partial^2 \ln|\lambda|}{2\partial y^2} = -\frac{\Delta \ln|\lambda|}{2}.$$

Задача 11.11 решена. □

**Следствие 11.12.** *Плоскость Лобачевского — поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны. В модели в верхней полуплоскости с метрикой*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

*гауссова кривизна $K = -1$.*

## 11.3 Тензор Римана и плоскость метрики

**Задача 11.13.** Доказать, что риманово многообразие локально изометрично евклидову тогда и только тогда, когда тензор Римана обращается в ноль.

Иными словами, в окрестности риманова многообразия существуют локальные координаты, в которых метрика имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$ тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки $R^i_{j,kl} = 0$.

*Решение Задачи 11.13.* • Рассмотрим формулу, по которой меняются символы Кристоффеля при замене координат

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

• Мы хотим найти такие координаты $x^{i'}$, что $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$, т.е., что

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

• Введём функции

$$F^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

• Получаем систему дифференциальных уравнений на $F^{i'}_j$:

$$\frac{\partial F^{i'}_j}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} F^{i'}_i.$$

- Чтобы эта система дифференциальных уравнений была разрешима, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial^2 F_j^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 F_j^{i'}}{\partial x^l \partial x^k}.$$

- Это равенство приводит к тому, что $R^i_{j,kl} = 0$.

- Остаётся построить координаты по функциям $F_j^{i'}$, т.е. решить

$$F_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

- Эта система будет иметь решение, если

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j},$$

  что равносильно симметричности связности.

Задача 11.13 решена.

□

# 11.4 Бездивергентность тензора Эйнштейна

## 11.4.1 Второе тождество Бьянки

Есть ещё одно тождество, в котором уже участвуют ковариантные производные тензора Римана.

**Теорема 11.14.** *Пусть связность $\nabla$ согласована с римановой или псевдоримановой метрикой. Тогда*

$$\nabla_u R(v,\ w) + \nabla_v R(w,\ u) + \nabla_w R(u,\ v) = 0.$$

Это тождество называется **вторым тождеством Бьянки**.

Введём обозначение

$$\nabla_i T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q} = T^{i_1,\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q;i}.$$

Тогда второе тождество Бьянки запишется в виде

$$R_{ij,[kl;m]} = R_{ij,kl;m} + R_{ij,mk;l} + R_{ij,lm;k} = 0.$$

*Доказательство Теоремы 11.14.* Это тождество удобно доказывать в геодезических координатах. В этих координатах $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$, поэтому

$$R^i_{j,kl}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0),$$
$$\nabla_m R^i_{j,kl}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k \partial x^m}(0) - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l \partial x^m}(0).$$

При суммировании все смешанные производные сократятся — каждое слагаемое будет входить в формулу дважды с разными знаками. □

**Теорема 11.15.** *Тензор Риччи и скалярная кривизна удовлетворяют тождеству*

$$\nabla_l R^l_m = \frac{1}{2}\nabla_m R. \tag{11.9}$$

*Доказательство Теоремы 11.15.* Это тождество вытекает из второго тождества Бьянки после двукратного поднимания и сворачивания индексов.

$$g^{il} g^{nk} \left(R_{ni,kl;m} + R_{ni,mk;l} + R_{ni,lm;k}\right) = 0.$$

Связность согласована с метрикой, поэтому $\nabla_m g = 0$, поэтому метрический тензор $g_{ij}$ (а также производные от него тензоры $g^{ij}$, $g^i_j$ ) можно свободно вносить и выносить из-под знака ковариантной производной (вообще-то это утверждение — это упражнение, которое нужно проверить).

Поднимем один индекс. У первых двух слагаемых сделаем это при помощи $g^{nk}$, у последнего — при помощи $g^{il}$. Нужно следить за знаками, пользуясь кососимметричностью тензора Римана — поднимать следует именно первый индекс.

$$g^{il}R^k_{i,kl;m} - g^{il}R^k_{i,km;l} - g^{nk}R^l_{n,lm;k} = 0.$$

Сворачивая тензоры Римана, получаем тензоры Риччи

$$g^{il}R_{il;m} - g^{il}R_{im;l} - g^{nk}R_{nm;k} = 0.$$

Ещё раз поднимем индекс

$$R^l_{l;m} - R^l_{m;l} - R^k_{m;k} = 0.$$

Первое слагаемое даёт нам скалярную кривизну, остальные два слагаемых — ковариантную производную тензора Риччи (эти слагаемые равны). Получаем требуемое равенство

$$R_{;m} = 2R^l_{m;l}.$$

Теорема 11.15 доказана. □

Доказанное тождество (11.9) позволяет доказать следующие два факта, описанные ниже.

### 11.4.2 Тензор Эйнштейна

Тензор

$$G_{lm} = R_{lm} - \frac{1}{2}Rg_{lm}$$

называется **тензором Эйнштейна**.

**Теорема 11.16.** *Тензор Эйнштейна бездивергентный*

$$\nabla_l G^{lm} = 0.$$

*Доказательство Теоремы 11.16.* Формула (11.9) может быть записана в виде

$$\nabla_l R^l_m - \frac{1}{2}\delta^l_m \nabla_l R = 0.$$

Остаётся заметить, что

$$\delta^l_m = g^l_m,$$

и внести $g^l_m$ под знак ковариантной производной:

$$\nabla_l (R^l_m - \frac{1}{2} g^l_m R) = 0.$$

Теорема 11.16 доказана. □

### 11.4.3 Пространство Эйнштейна

**Задача 11.17.** Риманово многообразие, в котором

$$R_{ij} = \lambda(x) g_{ij}$$

называется **пространством Эйнштейна**. Доказать, что:

(1) любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

(2) если размерность многообразия больше двух ($n > 2$), то $\lambda(x) = \text{const}$ (в частности, скалярная кривизна пространства Эйнштейна $R = \frac{1}{n}\lambda(x)$ постоянна).

*Решение Задачи 11.17.* (1) Двумерный случай вытекает из Задач 11.5 и 11.6.

(2) Подставляем выражение для тензора Риччи и скалярной кривизны в тождество (11.9):

$$\nabla_l R^l_m - \frac{1}{2}\nabla_m R = \nabla_l \left(\lambda \delta^l_m\right) - \frac{n}{2}\nabla_m \lambda = \frac{2-n}{2}\nabla_m \lambda = 0.$$

Получаем

$$(n-2)\nabla_m \lambda(x) = 0,$$

что при $n > 2$ возможно лишь при $\lambda(x) = \text{const}$.

Задача 11.17 решена. $\square$

# Часть IV

# Степень отображения и когомологии

# Тема 12

# Степень отображения

## 12.1 Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

Пусть $X, Y$ — топологические пространства.

**Определение 12.1.** Два непрерывных отображения топологических пространств $f, g : X \to Y$ называются **гомотопными** (обозначается $f \sim g$), если существует непрерывное отображение

$$H : [0,1] \times X \to Y$$

т.,ч. для любого $x \in X$

$$H(0, x) = f(x), \qquad H(1, x) = g(x).$$

Само отображение $F$ называют **гомотопией**, связывающей отображения $f$ и $g$. Часто отображение $F(t, x)$ обозначают через[1] $F_t(x)$.

[1]Гомотопию можно представлять себе как непрерывное семейство отображений $F_t(x)$.

**Задача 12.2.** Доказать, что любое непрерывное отображение $f : X \to Y$ гомотопно постоянному отображению (т.е. отображению в точку), если

(1) $X = \mathbb{R}^n$,

(2) $Y = \mathbb{R}^n$.

*Решение Задачи 12.2.* Искомые гомотопии, связывающие отображения $f : X \to Y$ с отображением в точку:

(1) $F(\vec{x}, t) = f(t\vec{x})$,

(2) $F(\vec{x}, t) = tf(\vec{x})$.

Задача 12.2 решена. □

**Задача 12.3.** Доказать, что гомотопия является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений.

*Решение Задачи 12.3.* Очевидно:

(1) Рефлексивность: $f \sim f$. Полагаем $F_t(x) = f(x), \quad \forall t$.

(2) Симметричность: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$. Если гомотопия $F(x, t)$ связывает $f$ и $g$, то гомотопия $F(x, 1 - t)$ связывает $g$ и $f$.

(3) Транзитивность: $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$. Если гомотопия $F_1(x, t)$ связывает $f$ с $g$, а гомотопия $F_2(x, t)$ связывает $g$ с $h$, то гомотопия

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

связывает $f$ с $h$.

Задача 12.3 решена. $\square$

**Определение 12.4.** Два топологических пространства $X$ и $Y$ называются **гомотопически эквивалентными** (обозначается $X \sim Y$), если существуют отображения

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to X$$

такие, что

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y .$$

**Задача 12.5.** Доказать, что $\mathbb{R}^n$ **стягиваемо** (т.е. гомотопически эквивалентно точке).

*Решение Задачи 12.5.* Для доказательства стягиваемости пространства достаточно построить гомотопию тождественного отображения и отображения в точку. Для $\mathbb{R}^n$ можно взять гомотетию

$$F(\vec{x}, t) = t\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1].$$

Задача 12.5 решена. $\square$

**Задача 12.6.** Доказать, что $\mathbb{R}^n$ без точки гомотопически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере.

*Решение Задачи 12.6.*

$$\mathbb{R}^n \backslash pt \approx S^{n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{n-1} \times pt,$$

т.к. $\mathbb{R} \sim pt$. Здесь мы воспользовались следующим утверждением.

**Утверждение 12.7.** *Если пространства гомотопически эквивалентны $X_1 \sim X_2, Y_1 \sim Y_2$, то их прямые произведения тоже гомотопически эквивалентны*

$$X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2.$$

*Доказательство Утверждения 12.7.* Гомотопия для произведения — произведение гомотопий. Утверждение 12.7 доказано. ☐

Задача 12.6 решена. ☐

**Задача 12.8.** Доказать, что $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k$ гомотопически эквивалентно $(n-k-1)$-мерной сфере.

*Решение Задачи 12.8.*

$$\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k \approx \left(\mathbb{R}^{n-k} \backslash pt\right) \times \mathbb{R}^k \sim S^{n-k-1} \times pt$$

по Задаче 12.6. Задача 12.8 решена. ☐

## 12.2 Теоретический материал

**Определение 12.9.** Пусть $M^n, N^n$ — гладкие компактные ориентированные многообразия одинаковой размерности $n$. Тогда **степень отображения** $f : M^n \to N^n$ определяется как

$$\deg f := \sum_{y \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det Df(y), \tag{12.1}$$

где

- $p$ — произвольная регулярная точка отображения $f$,
- а $Df(y)$ — якобиан отображения $f$ в точке $y$.

**Замечание 12.10.** Проясним формулу (12.1).

(1) По теореме Сарда множество критических значений отображения $f$ имеет меру ноль. Как следствие, существует регулярное значение $p \in N^n$.

(2) Так как многообразие $M^n$ компактно, в прообразе регулярного значения $p$ лежит конечное число точек

$$f^{-1}(p) = \{y_1, \ldots, y_k\}\,.$$

(3) Так как все точки $y_i$ регулярны, отображение $f$ задаёт диффеоморфизмы

$$f_i : U_i \to V$$

малых окрестностей $U_i$ точек $y_i$ на малую окрестность $V$ точки $p$.

(4) Каждый из диффеоморфизмов $f_i$ либо сохраняет ориентацию, либо меняет её. Степень отображения равна количеству $f_i$, сохраняющих ориентацию, минус количество $f_i$, меняющих её.

**Замечание 12.11.** Ключевые свойства степени отображения:

(1) Степень отображения не зависит от выбора регулярного значения $p$ в формуле (12.1) (т.е. определение 12.9 корректно).

(2) Если отображения $f$ и $g$ гомотопны[2], то их степени равны

$$f \sim g \qquad \Rightarrow \qquad \deg f = \deg g.$$

**Замечание 12.12.** Если многообразия $M^n$ и $N^n$ не ориентированы, то можно рассматривать **степень отображения**

---

[2]Мы предполагаем, что все отображения гладкие, но утверждения останутся верными для непрерывных отображений. Для них степень отображения $f : X \to Y$ определяется через гомологии по формуле $f_*([X]) = \deg(f)[Y]$, где $[X]$ — фундаментальный класс многообразия $X$.

**по модулю 2**. Эта степень является элементом $\mathbb{Z}_2$ и определяется по аналогичной формуле

$$\deg_2 f := \sum_{y \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det Df(y) \pmod 2 \tag{12.2}$$

для произвольного гладкого отображения $f : M^n \to N^n$ компактных многообразий одинаковой размерности. Как и ранее, $y \in N$ — произвольное регулярное значение $f$.

Легко видеть, что

- $\deg_2 f$ — количество элементов $\pmod 2$ в прообразе любого регулярного значения $p$.
- для ориентированных многообразий

$$\deg_2 f = \deg f \pmod 2.$$

Для степени отображения по модулю 2 выполнены свойства, аналогичные описанным в Замечании 12.11.

## 12.3 Простейшие задачи на степень отображения

**Задача 12.13.** Пусть $X, Y, Z$ — гладкие замкнутые ориентированные многообразия одинаковой размерности, а $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — гладкие отображения. Доказать, что

$$\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f.$$

*Решение Задачи 12.13.* Достаточно честно посчитать степень отображения. Пусть

- $z \in Z$ — регулярное значение функции $h = g \circ f$;

- $y_1, \ldots, y_k$ — точки в прообразе $g^{-1}(z)$;
- $x_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$ — точки в прообразе $f^{-1}(y_i)$ при $i = 1, \ldots, k$.

Так как $z$ — регулярное значение для $h$, то $y_i$ и $x_{i,j}$ — регулярные точки для $g$ и $f$ соответственно. По определению степени отображения

$$\deg(g \circ h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn} \det Dh(x_{i,j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn}\left(\det Df(x_{i,j}) \det Dg(f(x_{i,j}))\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn} \det Df(x_{i,j}) \right) \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \deg f \cdot \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) =$$

$$= \deg f \left( \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) \right) = \deg f \deg g.$$

Задача 12.13 решена. □

**Задача 12.14.** Доказать, что замкнутое многообразие ненулевой размерности не стягиваемо (т.е. тождественное отображение не гомотопно отображению в точку).

*Указание:* У тождественного отображения и отображения в точку разные степени (по модулю 2).

*Решение Задачи 12.14.* Тождественное отображение $\mathrm{id} : X \to X$ не может быть гомотопно отображению в точку $\pi : X \to pt \in X$, поскольку у них разные степени отображения:

$$\deg_2 \mathrm{id} = 1, \qquad \deg_2 \pi = 0$$

(у тождественного отображения у любой точки ровно одна точка в прообразе и якобиан является единичной матрицей, у отображения в точку прообраз всех точек, кроме одной, пуст). Задача 12.14 решена. $\square$

**Задача 12.15.** Доказать, что замкнутые многообразия разных размерностей гомотопически не эквивалентны.

*Решение Задачи 12.15.* Доказательство от противного. Пусть для многообразий $M^n, N^m$, где $m \neq n$, существуют непрерывные отображения

$$f : M^n \to N^m, \qquad g : N^m \to M^n$$

т.,ч.

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_M, \qquad g \circ f \sim \mathrm{id}_N .$$

Пусть $m > n$. Тогда с одной стороны,

$$\deg_2 \mathrm{id}_M = 1.$$

С другой стороны

$$\deg_2 g \circ f = 0,$$

так как для любой лежащей в образе точки композиция якобианов $Dg$ и $Df$ будет вырожденным оператором. Действительно,

$$\mathrm{rk}\ (D(g \circ f)) = \mathrm{rk}\ (DgDf) \leq \min(\mathrm{rk}\, Dg, \mathrm{rk}\, Df) \leq n < m.$$

Задача 12.15 решена. $\square$

## 12.4 Примеры вычисления степени отображения

**Задача 12.16.** Доказать, что два отображения

$$f, g : S^1 \to S^1$$

гомотопны тогда и только тогда, когда равны их степени.

*Указание:* Вместо отображений $f : S^1 \to S^1$ можно рассматривать квазипериодические функции $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие свойству

$$\hat{f}(x + 2\pi) = \hat{f}(x) + 2\pi m$$

для некоторого натурального $m \in \mathbb{N}$. Такие квазипериодические функции гомотопны при равных $m$, и гомотопия задаётся отрезком в пространстве функций.

*Решение Задачи 12.16.* Для любого отображения

$$f : S^1 \to S^1$$

обозначим через

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

поднятие отображения $f$ на универсальные накрытия, т.е. отображение, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Через $\pi$ обозначена стандартная проекция $\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Отображение $\hat{f}$ определено однозначно с точностью до прибавления константы.

Задача будет следовать из следующего утверждения.

**Утверждение 12.17.** *Отображения $f, g : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда для их поднятий $\hat{f}, \hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено*

$$\hat{f}(2\pi) - \hat{f}(0) = \hat{g}(2\pi) - \hat{g}(0). \tag{12.3}$$

*Как следствие, степень отображения $f$ равна $k$ тогда и только тогда, когда*

$$\hat{f}(2\pi) - \hat{f}(0) = 2\pi k.$$

*Доказательство Утверждения 12.17.*

- Если отображения $f$ и $g$ гомотопны, то $\hat{f}$ и $\hat{g}$ гомотопны в классе $2\pi$-линейно периодических функций[3]. Разница значений функций $\hat{f}, \hat{g}$ в точках 0 и $2\pi$ принадлежит $2\pi\mathbb{Z}$ и следовательно, не меняется при гомотопии.

- Если выполнено (12.3), то гомотопия

  $$F(x,t) = t\hat{f}(x) + (1-t)\hat{g}(x)$$

  задаёт гомотопию отображений $f$ и $g$.

- Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что отображению

  $$z^k : S^1 \to S^1, \qquad e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$$

  соответствует поднятие $x \to kx$, и что отображение $z^k$ имеет степень $k$. Действительно, у каждой (регулярной) точки будет $k$ прообразов, и в каждой точке знак якобиана равен $\operatorname{sgn} k$.

Утверждение 12.17 доказано. □

Задача 12.16 решена. □

**Задача 12.18.** Привести пример отображения

(1) $f : S^n \to S^n$, для которого $\deg f = k$.

(2) двумерного тора $\mathbb{T}^2$ в двумерную сферу $S^2$, степень которого равна $k$.

(3) степени 0, не гомотопного тождественному отображению (т.е. отображению в точку).

[3]Формально, здесь используется теорема о накрывающей гомотопии. Хотя для накрытия окружности прямой утверждение тривиально.

*Указание:* Явную формулу для “обмотки” одной сферы другой несложно описать в (гипер)сферических координатах.

*Решение Задачи 12.18.* (1) Рассмотрим гиперсферические координаты $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} x^1 &= R\cos(\varphi_1), \\ x^2 &= R\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2), \\ &\dots \\ x^n &= R\sin(\varphi_1)\cdots\sin(\varphi_{n-1})\cos(\varphi_n), \\ x^{n+1} &= R\sin(\varphi_1)\cdots\sin(\varphi_{n-1})\sin(\varphi_n)\,. \end{aligned}$$

Искомое отображение $f_k : S^n \to S^n$ степени $k$ задаётся в этих координатах формулой

$$f_k(\varphi_i) = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$f_k(\varphi_n) = k\varphi_n.$$

Гиперсферические координаты образуют систему координат почти всюду на сфере $S^n$. Легко видеть, что у точки общего положения в этих координатах будет ровно $k$ прообразов и определитель якобиана отображения всегда одного знака (он постоянен и равен $k$).

(2) Пусть

- $(\varphi^1, \varphi^2) \pmod{2\pi}$ — координаты на торе $\mathbb{T}^2$,
- а $(\varphi, \psi)$ — сферические координаты на сфере ($\varphi \pmod{2\pi}, \phi \in [0, \pi]$).

Искомое отображение

$$f_k : \mathbb{T}^2 \to S^2$$

степени $k$ задаётся формулой

$$\varphi = k\varphi^1, \qquad \phi = \frac{\varphi^2}{2}.$$

Отображение, очевидно, непрерывно. Сферические координаты являются гладкими координатами почти всюду на сфере. В этих координатах легко видеть, что у точки общего положения будет $k$ точек в прообразе и определитель якобиана отображения всегда одного знака (он постоянен и равен $\frac{k}{2}$).

(3) Подойдёт проекция тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ на один из своих сомножителей $S^1 \subset \mathbb{T}^2$:

$$\pi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \qquad (\varphi^1, \varphi^2) \to (\varphi^1, 0).$$

Приведём два доказательства того, что отображение не гомотопно отображению в точку.

(a) Окружность $S^1(\varphi^1) = \{\varphi^2 = 0\}$ остаётся при отображении $\pi$ на месте. Покажем, что её нельзя стянуть в точку при непрерывной деформации. Представим тор $\mathbb{T}^2$ как фактор плоскости $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Любой замкнутый путь $\gamma$ на $\mathbb{T}^2$ поднимается до кривой на плоскости, идущей из точки $(0,0)$ в точку $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Поскольку множество $\mathbb{Z}^2$ дискретно, числа $(m,n)$ сохраняются при непрерывной деформации. У стягиваемого пути они равны $(0,0)$, а у $S^1(\varphi^1)$ они равны $(1,0)$, поэтому $S^1(\varphi^1)$ нестягиваемо.

(b) Воспользуемся когомологиями де Рама[4]. По теореме 13.2, если бы $\pi$ было гомотопно отображению в точку, то $[\pi^* d\varphi^1] = 0$, но $\pi^* d\varphi^1 = d\varphi^1$ и

[4] См. Раздел 13.

класс когомологий формы не ноль, так как её интеграл по окружности $S^1(\varphi^1)$ не равен нулю:

$$\int_{S^1(\varphi^1)} d\varphi^1 = 2\pi \neq 0.$$

Задача 12.18 решена. □

**Замечание 12.19.** Отображение, гомотопное отображению в точку, тривиально действует на всех группах (ко)гомологий (и гомотопий), а отображение нулевой степени — только на старших (ко)гомологиях.

**Задача 12.20.** Вычислить степень отображения

$$f : S^2 \to S^2,$$

где $S^2$— это пополненная комплексная плоскость, а

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

— (несократимое) отношение полиномов степени $k$ и $l$.

*Ответ в Задаче 12.20:* $\max(k, l)$.

**Замечание 12.21.** Ответ в задаче не случаен. Так как функция $f(z)$ продолжается до голоморфного отображения

$$\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1,$$

можно воспользоваться следующим общим соображением:

(1) Комплексные многообразия обладают естественной ориентацией.

(2) (Би)голоморные отображения сохраняют эту ориентацию.

(3) Как следствие, степень отображения биголоморфного отображения комплексных многообразий

$$f : P^n_{\mathbb{C}} \to Q^n_{\mathbb{C}}$$

равна количеству точек в прообразе точки общего положения.

*Решение Задачи 12.20.* Функция $f(z)$ продолжается до (гладкого) отображения

$$\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$$

по формуле

$$(z : w) \to \left( w^{k+l} P\left(\frac{z}{w}\right) : w^{k+l} Q\left(\frac{z}{w}\right)\right)$$

Функция $f(z)$ голоморфна

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

поэтому её якобиан во всех регулярных точках положителен[5] . Действительно, если $f'(z) = a + ib$, то в координтах $(x, y) = (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$ матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Остаётся заметить, что у точки общего положения $w_0 \in \mathbb{C}$ будет $\max(k, l)$ прообразов, заданных формулой

$$P(z) - w_0 Q(z) = 0.$$

Задача 12.20 решена. □

[5] Это общий факт. Овеществления комплексных многообразий обладают естественной ориентацией и (би)голоморфные отображения сохраняют их.

## 12.5 Степень отображения сферы

**Задача 12.22.** Пусть $f$ и $g$ — непрерывные отображения пространства $X$ в $n$-мерную сферу $S^n$. Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ ни для какой точки $x$ не являются диаметрально противоположными на сфере $S^n$, то отображения $f$ и $g$ гомотопны.

*Решение Задачи 12.22 .* Представим сферу $S^n$ как единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат. Тогда искомая гомотопия задаётся формулой

$$F(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{||tf(x) + (1-t)g(x)||}.$$

Знаменатель не обращается в ноль, т.к. $f(x) \neq -g(x)$, и, следовательно, векторы $f(x)$ и $g(x)$ либо неколлинеарны, либо совпадают. Задача 12.22 решена. $\square$

**Задача 12.23.** Доказать, что отображение $f : S^n \to S^n$, не имеющее неподвижных точек, гомотопно центральной симметрии на сфере $S^n$.

*Решение Задачи 12.23.* Немедленно следует из задачи 12.22. Задача 12.23 решена. $\square$

**Задача 12.24.** Пусть $i : S^n \to S^n$ — центральная симметрия.

(1) Вычислить $\deg i$.

(2) Доказать, что при нечётных $n$ отображение $i$ гомотопно тождественному отображению.

*Указание:* Нечётномерную сферу можно представить в виде

$$S^{2k-1} = \left\{ (z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \quad |z_0|^2 + \dots |z_k|^2 = R^2 \right\}.$$

*Решение Задачи 12.24.* (1) $\deg i = (-1)^{n+1}$.

Без ограничения общности, можно считать, что базис касательного пространства

$$e_1, \ldots, e_n \in T_x S^n$$

задаёт положительную ориентацию сферы $S^n$, тогда и только тогда, когда вместе с вектором внешней нормали $N$ в точке $x$ набор

$$N, e_1, \ldots, e_n$$

задаёт положительную ориентацию $\mathbb{R}^{n+1}$.

При центральной симметрии вектор внешней нормали $N$ в точке $x$ переходит в вектор внешней нормали $-N$ в точке $i(x) = -x$. Поэтому знак якобиана инволюции $i$ равен знаку определителя отображения

$$(N, e_1, \ldots, e_n) \to (-N, -e_1, \ldots, -e_n),$$

который равен $(-1)^{n+1}$.

(2) Рассмотрим нечётномерную сферу

$$S^{2k-1} = \left\{(z_0, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \quad |z_0|^2 + \ldots |z_k|^2 = R^2\right\}.$$

Тогда гомотопия между тождественным отображением и центральной симметрией задаётся формулой

$$F(z,t) = \left(e^{2\pi i t} z_0, \ldots, e^{2\pi i t} z_k\right), \qquad t \in [0,1].$$

Задача 12.24 решена. □

**Задача 12.25.** Пусть $f$ — отображение $n$-мерной сферы

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \, ||x||^2 = 1\right\}$$

в себя такое, что

$$f(x) \neq -x$$

для всех точек $x \in S^n$.

(1) Доказать, что $\deg f = 1$.

(2) Доказать, что если $n$ чётно, то существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = x$.

*Решение Задачи 12.25.* (1) По задаче 12.22 отображение $f$ гомотопно тождественному отображению id.

(2) Если бы $f(x) \neq x$, то по задаче 12.22 отображение $f$ было гомотопно инволюции $i(x) = -x$. Но по задаче 12.24 при чётном $n$ выполнено $\deg i = -1$. Получаем противоречие с тем, что $f \sim \mathrm{id}$.

Задача 12.25 решена. □

**Задача 12.26.** Пусть отображение $f : S^n \to S^n$ имеет нечётную степень. Доказать, что существует пара диаметрально противоположных точек на сфере $S^n$, которая переходит при отображении $f$ в пару диаметрально противоположных точек.

*Указание:* Рассмотреть отображение

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{||f(x) + f(-x)||} \tag{12.4}$$

и его степень (по модулю 2).

*Решение Задачи 12.26 .* Предположим противное т.е., что

$$f(-x) \neq -f(x). \tag{12.5}$$

Заметим, что $g(-x) = g(x)$ для отображения (12.4), поэтому

$$\deg_2 g = 0$$

(прообраз точки распадается на пары диаметрально противоположных точек).

С другой стороны, отображения $f$ и $g$ гомотопны. Гомотопия задаётся формулой

$$F(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)f(-x)}{||tf(x) + (1-t)f(-x)||}, \qquad t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Знаменатель не обращается в ноль, так как выполнено (12.5). Поэтому

$$\deg g = \deg f \neq 0 \pmod 2).$$

Получаем противоречие. Задача 12.26 решена. □

## 12.6 Теорема Борсука-Улама

**Задача 12.27.** Доказать, что на поверхности Земли всегда найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых давление $P$ и температура $T$ одинаковы (обе функции $P$ и $T$ считаются непрерывными).

*Решение Задачи 12.27.* Вначале докажем следующее утверждение.

**Утверждение 12.28.** *Не существует нечётного непрерывного отображения $g : S^2 \to S^1$ т.,е. такого отображения, что*

$$g(-x) = -g(x)$$

*для всех точек $x \in S^2$.*

*Доказательство Утверждения 12.28.* Рассмотрим ограничение отображения $g$ на экватор $\hat{g} : S^1 \to S^1$.

(1) С одной стороны, $\deg \hat{g} = 0$, т.к. ограничение $g$ на любую полусферу задаёт гомотопию $\hat{g}$ и отображения в точку.

(2) С другой стороны, $\deg \hat{g}$ нечётно, т.к. $\hat{g}$ — нечётное отображение. Действительно, параметризуем $S^1$ стандартным параметром $\varphi \in [0, 2\pi]$.

- Поскольку $\hat{g}(\pi) = -\hat{g}(0)$, половинка окружности $\varphi \in [0, \pi]$ "намотается" на образ $n + \frac{1}{2}$ раз.
- Поскольку отображение нечётно, вторая половинка окружности $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ тоже "намотается" на образ $n + \frac{1}{2}$ раз.
- В итоге при обходе всей окружности мы "обойдём" образ $2n + 1$ раз.

Утверждение 12.28 доказано. □

Если существует отображение $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ т.,ч. $f(-P) \neq f(P)$, то корректно определено отображение $g : S^2 \to S^1$, заданное формулой

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Но $g(-x) = -g(x)$, что противоречит утверждению 12.28.

Задача 12.27 решена. □

**Замечание 12.29.** Задача 12.27 — это частный случай теоремы Бо́рсука–У́лама .

**Теорема 12.30** (Теорема Борсука-Улама)**.** *Для любого непрерывного отображения $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ т.,ч. $f(-x) = f(x)$.*

## 12.7 Отображение матричных групп

**Задача 12.31.** Вычислить степень отображения

$$f_n : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3),$$
$$f_n(A) = A^n.$$

*Ответ:* $\deg f_n = n$.

*Решение Задачи 12.31.* Напомним, что любой элемент группы $\mathrm{SO}(3)$ — это поворот вокруг некой оси $l$ на угол $\alpha$.

(1) Для отображения $A \to A^n$ в прообразе точки общего положения лежит $n$ элементов. Повороту на угол $\alpha$ соответствуют повороты вокруг той же оси на углы $\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$.

(2) Знак каждого якобиана совпадает с $\operatorname{sgn} n$. Если мы возьмем на $\mathrm{SO}(3)$ локальные координаты, две из которых задают ось $l$ поворота, а последняя — угол поворота $\alpha$, то в этих координатах отображение просто умножает последнюю координату на $n$ (по модулю $2\pi$).

Задача 12.31 решена. $\square$

## 12.8 Индексы особых точек

**Определение 12.32.** Пусть $x$ — изолированная особая точка векторного поля $v$ на многообразии $M^n$, т.е.

$$v\big|_x = 0,$$

и в окрестности точки $x$ нет других особых точек. Рассмотрим достаточно малую сферу $S_x(\varepsilon)$ с центром в точке $x$. Векторное поле задаёт отображение $S^n \to S^n$ по формуле

$$y \to \frac{v\big|_y}{\left\| v\big|_y \right\|}.$$

**Индекс** векторного поля $v$ в особой точке $x$ — это степень этого отображения.

**Задача 12.33.** Найти особые точки и вычислить их индексы для следующих векторных полей на плоскости:

(1) $v(x, y) = (x + 2y, 3x + y)$.

(2) $v(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

(3) $v(x, y) = \operatorname{grad}\operatorname{Re}(z^n)$, где $z = x + iy$ и $n \in \mathbb{Z}$.

*Ответ в Задаче 12.33.*

(1) Особая точка: $(0, 0)$. Индекс: $-1$.

(2) Особая точка: $(0, 0)$. Индекс: 2.

(3) При $n > 1$ особая[6] точка: $(0, 0)$. Индекс: $1 - n$.

*Решение Задачи 12.33.* Нужно посчитать, сколько раз повернётся (против часовой стрелки) векторное поле при обходе вокруг каждой изолированной особой точки (против часовой стрелки).

Иногда полезно посмотреть на картинки векторных полей.

(1) Это частный случай задачи 12.34.

*Другое решение.* В координатах

$$x' = x + 2y, \qquad y' = -3x - y$$

векторное поле имеет вид

$$(x', -y').$$

Замена координат положительно ориентирована, поэтому индекс векторных полей в обоих системах координат совпадает.

[6] При $n = 1$ нет особых точек, при $n = 0$ поле $v = 0$, при $n < 0$ начало координат — полюс.

*Третье решение.*[7] Рассмотрим, в каких точках векторное поле горизонтально, в каких — вертикально, и куда при этом направлено векторное поле.

- Поле горизонтально при $3x+y=0$. На единичной окружности
  - в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ поле направлено влево;
  - в точке $\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ поле направлено вправо.
- Поле вертикально при $x+2y=0$. На единичной окружности
  - в точке $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ поле направлено вверх;
  - в точке $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ поле направлено вниз.

При обходе против часовой стрелки мы легко находим углы, на которые поворачивается касательный вектор, а именно мы получаем следующую последовательность направлений и углов:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow \\ \varphi=0 & \varphi=-\frac{\pi}{2} & \varphi=-\pi & \varphi=-\frac{3\pi}{2} & \varphi=-2\pi. \end{array}$$

Итоговый индекс $\operatorname{ind}_0 v = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1$.

(2) В координатах

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

векторное поле имеет вид

$$(u, v).$$

[7]Это решение достаточно эффективно для вычисления индексов особых точек векторных полей на плоскости.

Якобиан положителен везде, кроме начала координат. Точке $(u, v)$ соответствуют две точки $\pm(x, y)$, где

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}, \qquad y^2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}.$$

Поэтому в координатах $(u, v)$ нужно дважды обойти начало координат.

*Другое решение.* На окружности $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ векторное поле имеет вид $r^2(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$.

(3) Особые точки векторного поля $\operatorname{grad}\operatorname{Re} f(z)$ для голоморфной функции $f(z)$ — это точки[8], где $f'(z) = 0$.

Для $f(z) = z^n$ при $n > 1$ получаем одну особую точку: $z = 0$.

В полярных координатах $(\rho, \varphi)$ имеет

$$z^n = \rho^n \cos n\varphi + i\rho^n \sin n\varphi.$$

Получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{Re} z^n = n\rho^{n-1}\cos n\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} - n\rho^{n-2}\sin n\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

При обходе $\varphi \in [0, 2\pi]$ этот вектор поворачивается $n$ раз по часовой стрелке, но сам базис $\partial_r, \partial_\varphi$ поворачивается в декартовых координатах один раз против часовой стрелки. Итого $1 - n$.

Задача 12.33 решена. □

[8] Используем условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Задача 12.34.** Найти индекс особой точки для линейного векторного поля

$$v^i(x^1, \dots, x^n) = A^i_k x^k$$

в $\mathbb{R}^n$, где $A$ — постоянная невырожденная матрица.

*Ответ:* Индекс равен $\pm 1$, знак совпадает с $\operatorname{sgn} \det A$.

*Решение Задачи 12.34.*

- Особая точка изолирована, т.к. матрица $A$ невырождена.
- Поскольку индекс особой точки — целое число, оно не изменится при гомотопии векторного поля, оставляющего особую точку особой и изолированной. Будем непрерывно менять матрицу $A$ в пространстве невырожденных матриц.
- Группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ невырожденных матриц состоит из двух компонент: матриц с положительным определителем

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det A > 0\}$$

и матриц с отрицательным определителем

$$\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det A < 0\}.$$

- Таким образом гомотопией можно привести матрицу $A$ либо к единичной $E$, либо к симметрии относительно плоскости. Легко видеть, что в первом случае индекс поля равен 1, а во втором $-1$.

Задача 12.34 решена. □

# Тема 13

# Когомологии де Рама

Подробнее о связи дифференциальных форм и когомологий см. [15].

## 13.1 Определение когомологий де Рама

(Ко)гомологии — алгебраические инварианты топологических пространств.

- $k$-форма $\alpha$ **замкнута**, если $d\alpha = 0$
- $k$-форма $\alpha$ **точна**, если $\alpha = d\beta$
- Формы $\alpha_1$ и $\alpha_2$ называются **когомологичными**, если их разность точна: $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$.
- **$k$-мерные когомологии** (де Рама) $H^k(M)$ многообразия $M$ — это классы когомологичных замкнутых $k$-форм на $M$.

Иными словами, если мы рассмотрим **цепной комплекс**

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \Omega^3(M) \longrightarrow \cdots$$

то когомологии де Рама определяются как

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}.$$

Свойства когомологий:

(1) Любое отображение многообразий

$$f : M \to N$$

индуцирует отображение когомологий

$$f^* : H^i(M, \mathbb{R}) \to H^i(M, \mathbb{R}).$$

При этом

$$[f^*\alpha] = f^*[\alpha]$$

для любой (замкнутой) $k$-формы $\alpha$.

(2) Когомологии образуют **градуированное кольцо**. Для когомологий де Рама умножение в когомологиях (так называемое $\smile$-умножение[1] или умножение Колмогорова-Александера) порождается операцией внешнего произведения:

$$[\alpha] \smile [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Простейшие факты про когомологии:

- Если многообразие $M$ состоит из $N$ компонент связности, то

$$H^0(M) \cong \mathbf{R}^N.$$

В частности, если многообразие $M$ связно, то

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

Действительно, замкнутые 0-формы — это локально-постоянные функции.

[1] англ. cup product

- Если $i > n$, то $H^i(M^n) = 0$. Действительно, на $n$-мерном многообразии не существует ненулевых $i$-форм при $i > n$.

Не столь тривиальный факт про когомологии:

**Теорема 13.1.** 
- *Если $M^n$ — компактное ориентируемое многообразие, то отображение*
$$\omega \to \int_{M^n} \omega$$
*устанавливает изоморфизм*
$$H^n(M^n) \cong \mathbb{R}.$$
- *В противном случае (если $M$ некомпактно или неориентируемо)*
$$H^n(M^n) \cong 0.$$

### 13.1.1 Когомологии и гомотопии

**Теорема 13.2.** *Если два отображения $f, g : M \to N$ гомотопически эквивалентны, то они индуцируют одинаковые отображения в когомологиях $f^* = g^*$.*

**Замечание 13.3.** Для когомологий де Рама утверждение имеет смысл, если $f$ и $g$ — гладкие. Утверждение верно и для произвольных непрерывных отображений для достаточно хороших классов пространств (например, для многообразий). Нужно только переопределить понятие когомологий: по **теореме де Рама** *когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям* (см., например [16]), определённым для произвольного топологического пространства.

**Следствие 13.4.** *У гомотопически эквивалентных пространств $X \sim Y$ когомологии совпадают $H^k(X) \cong H^k(Y)$.*

В частности,
$$H^k(M \times I^m) \cong H^k(M).$$

## 13.2 Замкнутые и точные формы

**Задача 13.5.** Привести пример замкнутой, но не точной 1-формы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

*Решение Задачи 13.5.* Подойдёт форма $d\varphi$.

- $d\varphi$ — замкнутая форма

  $$d(d\varphi) = 0,$$

  потому что $d^2 = 0$, замкнутость — локальное свойство, и локально мы можем рассматривать $\varphi$ как гладкую (однозначную) функцию.

- $d\varphi$ — не точна

  $$d\varphi \neq df.$$

  Приведём два доказательства этого факта.

  (1) Пусть $d\varphi = df$. Первообразная 1-формы определена с точностью до константы. Поэтому локально $f = \varphi + \mathrm{const}$, но $\varphi$ не продолжается до однозначной функции на всём $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Получаем противоречие.

  (2) Интеграл $d\varphi$ по единичной окружности

  $$S^1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$$

  не равен нулю:

  $$\int_{S^1} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

  Но по формуле Ньютона-Лейбница интеграл от точной 1-формы по любому замкнутому пути равен нулю

  $$\int_{S^1} df = 0.$$

  Поэтому $d\varphi \neq df$.

Задача 13.5 решена. $\square$

**Задача 13.6.** Привести пример замкнутой, но не точной $(n-1)$-формы на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

*Указание.* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$.

*Решение Задачи 13.6.* Подойдёт форма $\pi^*\omega$, где

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$$

— это радиальная проекция на единичную сферу $S^{n-1} = \{\sum x_i^2 = 1\}$, а $\omega$ — форма объема на $S^{n-1}$.

- Форма $\pi^*\omega$ замкнута, поскольку по Задаче 5.7

  $$d\pi^*\omega = \pi^* d\omega = \pi^* 0 = 0.$$

  Во втором равенстве $d\omega = 0$, так как на $S^{n-1}$ нет нетривиальных $n$-форм.

- $\pi^*\omega$ — не точна, потому что её интеграл по $S^{n-1}$ не равен нулю. Пусть $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ — стандартное вложение сферы. Тогда

  $$\int_{S^{n-1}} i^* (\pi^*\omega) = \int_{S^{n-1}} \omega > 0,$$

  так как $\omega$ — форма объёма на $S^{n-1}$. С другой стороны, если бы $\pi^*\omega = d\beta$, то по формуле Стокса и Задаче 5.7

  $$\int_{S^{n-1}} i^* (d\beta) = \int_{S^{n-1}} d (i^*\beta) = 0.$$

Задача 13.6 решена. $\square$

### 13.2.1 Вычисление первых когомологий

**Задача 13.7.** Доказать, что 1-форма $\alpha$ на многообразии точна тогда и только тогда, когда её интеграл по любому замнутому пути равен нулю.

*Решение Задачи 13.7.* В одну сторону очевидно: если форма точна $\alpha = dF$, то по формуле Ньютона-Лейбница для любой кривой $\gamma$ с концами $P$ и $Q$

$$\int_\gamma \alpha = F(Q) - F(P). \tag{13.1}$$

И следовательно $\int_\gamma \alpha = 0$, если кривая замкнута (т.е. если $P = Q$).

В другую сторону. Пусть $\int_\gamma \alpha = 0$ для любого замкнутого пути $\gamma$. Фиксируем $x_0 \in M$. Положим $f(x_0) = 0$ и

$$f(x) = \int_\gamma \alpha,$$

где $\gamma : [0,1] \to M$ — это произвольный (кусочно-гладкий) путь с концами $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$.

- Покажем, что *определение корректно: интегралы по любым двум путям $\gamma_1, \gamma_2$ равны.* Это так, потому что интеграл по замкнутому пути $\gamma_1\gamma_2^{-1}$, получающемуся при движении вначале по $\gamma_1$, а потом по $\gamma_2$ в обратную сторону, будет равен нулю:

  $$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = 0.$$

- Покажем, что *построенная функция $f(x)$ гладкая.*

  Вначале покажем, что для любого пути $\gamma$ с концами $P$ и $Q$

  $$\int_\gamma \alpha = f(Q) - f(P). \tag{13.2}$$

Действительно, рассмотрим произвольный путь $\gamma_0$ из $x_0$ в $P$. Тогда по определению функции $f$

$$f(Q) - f(P) = \int_{\gamma_0 \cup \gamma} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma} \alpha.$$

Далее, фиксируем произвольную точку $y_0$ и рассмотрим её окрестность $U$, гомеоморфную диску $U \approx D^n$. По лемме Пуанкаре любая замкнутая форма на $U$ точна, поэтому $\alpha = dF$ для некоторой гладкой функции $F$. По формуле Ньютона-Лейбница для любого пути $\gamma$ в $U$ выполнены (13.1) и (13.2). Поэтому функции $f$ и $F$ отличаются на константу. Но $F$ — гладкая функция, поэтому $f$ — тоже гладкая.

Задача 13.7 решена. $\square$

**Замечание 13.8.** Результат Задачи 13.7 можно улучшить. Не обязательно рассматривать все пути.

- По формуле Стокса *интегралы от замкнутой формы по гомотопичным циклам равны*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

- В частности, *когомологии односвязного пространства равны нулю*

$$\pi_1(M) = \{e\} \qquad \Rightarrow \qquad H^1(M) = 0.$$

- На практике класс 1-формы $\alpha \in H^1(M)$ определяется её интегралами по некоторому *конечному* числу циклов (например, по порождающим фундаментальной группы).

**Задача 13.9.** Вычислить первые когомологии плоскости без двух точек $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\})$.

*Ответ в Задаче 13.9.*

$$H^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}\right) \cong \mathbb{R}^2. \tag{13.3}$$

Более того, если $S^1_P, S^1_Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ — две окружности с центрами в точках $P$ и $Q$, то отображение

$$\alpha \to \left(\int_{S^1_P} \alpha, \int_{S^1_Q} \alpha\right), \tag{13.4}$$

задаёт изоморфизм (13.3).

*Решение Задачи 13.9.* Без ограничения общности,

$$P = (-1, 0), \qquad Q = (1, 0).$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$H^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}\right) \to \mathbb{R}^2, \tag{13.5}$$

заданный формулой (13.4).

- *Покажем, что гомоморфизм* (13.5) *инъективен.* Пусть $\alpha$ — замкнутая форма. Нужно показать, что если

$$\int_{S^1_P} \alpha = \int_{S^1_Q} \alpha = 0, \tag{13.6}$$

то форма $\alpha$ точна. Рассмотрим три области в $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$:

$$U_1 = \{x < 0\} \setminus \{y = 0, -1 < x < 0\},$$
$$U_2 = \{-1 < x < 1\},$$
$$U_3 = \{x > 0\} \setminus \{y = 0, 0 < x < 1\}.$$

Все они односвязны (более того, гомеоморфны диску), поэтому $\alpha$ на них точна

$$\alpha = dF_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Первообразные $F_i$ на областях $U_i$ определены с точностью до константы

$$F_i' = F_i + c_i, \qquad c_i = \mathrm{const}\,.$$

На пересечении областей $U_i \cap U_j$ первообразные тоже отличаются на константу

$$dF_i = dF_j \qquad \Rightarrow \qquad F_i - F_j = d_{ij}, \qquad d_{ij} = \mathrm{const}\,.$$

Благодаря (13.6) можно подобрать константы $c_i$ т.,ч. $d_{ij} = 0$ и функции $F_i$ “склеятся” в единую функцию $F$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$. По построению $\alpha = dF$.

- *Покажем, что гомоморфизм* (13.5) *сюръективен.* Рассмотрим только случай, когда окружности $S^1_P, S^1_Q$ не содержат внутри себя вторую выкинутую точку плоскости (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть $(\rho_1, \varphi_1)$ и $(\rho_2, \varphi_2)$ — полярные координаты с центрами в точках $P$ и $Q$ соответственно. Тогда

$$\alpha = c_1 d\varphi_1 + c_2 d\varphi_2, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{S^1_P} \alpha = c_1, \qquad \int_{S^1_Q} \alpha = c_2,$$

для любых констант $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 13.9 решена. $\square$

**Замечание 13.10.** Упомянем несколько фактов из алгебраической топологии, проясняющих, почему класс 1-формы определяется её интегралами по некоторым циклам (подробнее см. [17] или [18]).

(1) Первая группа гомологий $H^1(X, \mathbb{Z})$ — это абелинизация фундаментальной группы:

$$H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X) / \left[\pi_1(X), \pi_1(X)\right].$$

(2) По формуле универсальных коэффициентов

$$H^1(X; \mathbb{R}) \cong \operatorname{Hom}\left(\left(H_1(X; \mathbb{Z}\right), \mathbb{R}\right).$$

(3) Когомологии де Рама — это когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$:

$$H^i_{deRham}(X) \cong H^i(X; \mathbb{R}).$$

## 13.3 Когомологии простейших пространств

**Задача 13.11.** Вычислить группы когомологий следующих пространств:

(1) евклидова пространства $\mathbb{R}$,

(2) окружности $S^1$,

(3) двумерного тора $\mathbb{T}^2$,

(4) плоскости без $k$ точек $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$.

**Замечание 13.12.** Некоторые из этих когомологий мы вычислим при помощи теоремы Майера-Вьеториса[2]). Во всех случаях первые когомологии также можно посчитать по аналогии с Задачей 13.7.

[2] см. Раздел 13.5

*Решение Задачи 13.11.* (1) Когомологии **евклидова пространства** $\mathbb{R}^n$:

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Это **лемма Пуанкаре** (*Любая замнутая $k$-форма ($k > 0$) на $\mathbb{R}^n$ точна*).

При $n = 1$ утверждение тривиально: первообразная 1-формы — её интеграл по прямой.

(2) Когомологии $n$**-мерной сферы** $S^n$ (при $n > 0$):

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0, n, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

При $n = 1$ утверждение элементарно. Рассмотрим накрытие

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \pi(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^1.$$

Первообразная прообраза $\pi^*\alpha$ для 1-формы $\alpha$ на $S^1$ будет $2\pi$-периодичной функцией тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \alpha = 0$.

**Замечание 13.13.** В общем случае утверждение может быть доказано при помощи последовательности Майера-Вьеториса (сфера разбивается на дополнения к полюсам $D_1^n$ и $D_2^n$). Последовательность (13.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow\ & H^{i-1}(D_1^n) \oplus H^{i-1}(D_2^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & H^{i-1}(D_1^n \cap D_2^n) \longrightarrow H^i(S^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & H^i(D_1^n) \oplus H^i(D_2^n) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Заметим, что $D_i^n \approx \mathbb{R}^n$ и $D_n^1 \cap D_2^n \sim S^{n-1}$ (сфера без полюсов гомотопотически эквивалентна пересечению полусфер). Поэтому $H^i(D_1^n) \oplus H^i(D_2^n) = 0$ при $i \geq 1$ и, так как последовательность точна,

$$H^i(S^n) = H^{i-1}(S^{n-1}), \qquad i \geq 2.$$

При $i = 1, n > 1$ получаем

$$H^1(S^n) = 0,$$

потому что последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S^n) & \longrightarrow & H^0(D_1^n) \oplus H^0(D_2^n) & \longrightarrow \\ & \longrightarrow & H^0(D_1^n \cap D_2^n) & \longrightarrow & H^1(S^n) & \longrightarrow \\ & \longrightarrow & H^1(D_1^n) \oplus H^1(D_2^n) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

точна и имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow \\ & \longrightarrow & H^1(S^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

(3) Когомологии $n$-**мерного тора** $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{n}$:

$$\dim H^k(\mathbb{T}^n) = \binom{k}{n}.$$

Если представить тор $\mathbb{T}^n$ как произведение $n$ окружностей с координатами

$$\varphi^1, \ldots \varphi^n \pmod{2\pi},$$

то *кольцо* когомологий порождается классами 1-когомологий

$$[d\varphi^1], \ldots, [d\varphi^n].$$

Иными словами, базис $k$-когомологий задают классы форм

$$d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Указанные классы некогомологичны: по формуле Стокса интегралы когомологичных форм по любому (компактному) подмногообразию совпадают — в то же время формы

$$d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$$

являются формами объема для разных $k$-мерных торов

$$\mathbb{T}(\varphi^{i_1}) \times \dots \times \mathbb{T}(\varphi^{i_k}).$$

То, что других классов когомологий нет, можно доказать при помощи последовательности Майера-Вьеториса.

**Замечание 13.14.** Тор $\mathbb{T}^n$ обладает структурой абелевой группы. Все формы $d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$ инвариантны относительно этого действия.

Это общий факт: *когомологии компактной группы Ли совпадают с её эквивариантными когомологиями.* Это так, так как любую форму на компактной группе Ли можно усреднить по действию этой группы.

(4) Когомологии **многообразия, из которого выкинули точку** $M^n \setminus \{P\}$ (при $n \geq 1$).

$$H^k(M \setminus \{P\}) \cong \begin{cases} H^k(M), & \text{если } k \neq n-1, n, \\ 0, & \text{если } k = n, \\ H^{n-1}(M), & \text{если } k = n-1, \\ & \text{ и } M \text{ — компактно}, \\ H^{n-1}(M) \oplus \mathbb{R}, & \text{если } k = n-1, \\ & \text{ и } M \text{ — некомпактно}. \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть последовательность Майера-Вьеториса для пары окрестностей $U, V$, где $V$ — окрестность точки $P$, диффеоморфная диску $D^n$.

Задача 13.11 решена. $\square$

## 13.4 Точные симплектические многообразия

Дифференциальная 2-форма $\omega$ **невырождена**, если её матрица $(\omega_{ij})$ невырождена во всех точках $M$.

**Задача 13.15.** Пусть на многообразии $M$ задана невырожденная 2-форма

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Доказать, что

(1) размерность $M$ четна

$$\dim M = 2n,$$

(2) справедлива формула

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} = \pm n! \sqrt{\det(\omega_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}. \tag{13.7}$$

*Указание.* Воспользоваться теоремой о каноническом виде линейной симплектической структуры (это частный случай Теоремы 3.17):

**Теорема 13.16** (Линейная теорема Дарбу). *Для любой невырожденной линейной 2-формы $\omega$ на конечномерном векторном пространстве $V$ существуют такие линейные координаты $p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n$ на $V$, в которых*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i. \tag{13.8}$$

*Решение Задачи 13.15.* Многообразие чётномерно, потому что по Теореме 13.16 только на чётномерных линейных пространствах существует невырожденная 2-форма. Остаётся доказать формулу (13.7).

Заметим, что $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n}$ является $2n$-формой. По Задаче 3.19 выражение справа тоже локально можно рассматривать как $2n$-форму. Поэтому достаточно доказать (13.7) в одной точке $x$ в подходящих координатах.

Рассмотрим локальные координаты в окрестности точки $x$ и линейной заменой координат приведём форму $\omega$ в точке $x$ к виду (13.8). Таким образом остаётся доказать формулу (13.7) для формы (13.8), т.е. что

$$\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n} = n! dp^1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp^n \wedge dq^n.$$

Действительно, все $\omega$ во внешнем произведении должны давать разные сомножители $dp^i \wedge dq^i$. Для 2-форм внешнее произведение коммутативно, поэтому будет $n!$ одинаковых слагаемых. Формула(13.7) доказана. Задача 13.15 решена. □

**Определение 13.17. Симплектическое многообразие** $(M^{2n}, \omega)$ — это многообразие $M^{2n}$ с заданной на нём невырожденной замкнутой 2-формой $\omega$.

Условия на форму $\omega$ можно записать так:

- $d\omega = 0$ (замкнутость),

- $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n} \neq 0$ (невырожденность[3]).

Симплектическое многообразие $(M^{2n}, \omega)$ будем называть **точным**, если $\omega = d\alpha$.

**Задача 13.18.** Доказать, что не существует точных замкнутых (т.е. компактных и без границы) симплектических многообразий.

*Указание.* Воспользоваться формулой Стокса для формы объёма.

*Решение Задачи 13.18.* От противного. Пусть $\omega = d\alpha$, тогда

$$\omega \wedge \dots \wedge \omega = d(\alpha \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega).$$

- С одной стороны, $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n}$ — невырожденная форма объёма (см. Задачу 13.15). Поэтому

  $$\int_{M^n} \omega \wedge \dots \wedge \omega > 0.$$

- С другой стороны, по формуле Стокса

  $$\int_{M^n} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \int_{M^n} d(\alpha \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega) = 0,$$

  так как у многообразия $M^n$ нет границы (см. Задачу 5.20).

Получаем противоречие. Задача 13.18 решена. $\square$

[3]Здесь неравенство нулю должно выполняться в каждой точке.

**Замечание 13.19.** Так как на компактном симплектическом многообразии $(M, \omega)$ форма объема задаёт нетривиальный класс когомологий и

$$0 \neq [\omega \wedge \cdots \wedge \omega] = [\omega] \smile \cdots \smile [\omega] = [\omega]^n,$$

мы получаем, что *все чётномерные когомологии компактного симплектического многообразия нетривиальны*

$$0 \neq [\omega]^k \in H^{2k}(M, \omega).$$

Отсюда, например, немедленно следует, что *среди сфер $S^n$ только на двумерной сфере $S^2$ существует симплектическая структура.*

## 13.5 Теорема Майера–Вьеториса

Следующая теорема предоставляет достаточно эффективный способ вычисления когомологий.

**Определение 13.20.** Последовательность групп $G_k$ и гомоморфизмов $f_k$

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \longrightarrow \cdots .$$

**точна**, если $\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} f_{k-1}$.

**Теорема 13.21** (Теорема Майера-Вьеториса)**.** *Пусть $M = U_1 \cup U_2$, где $U_1, U_2$ — открытые подмножества многообразия $M$. Тогда короткая точная последовательность коцепей*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{j^*} \Omega^k(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

*где*

$$i^*(\omega) = (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2}), \qquad j^*(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2)|_{U_1 \cap U_2},$$

*порождает длинную точную последовательность когомологий:*
(13.9)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^i(M) & \xrightarrow{i^*} & H^i(U_1)\oplus H^i(U_2) & \xrightarrow{j^*} & \\ & \xrightarrow{j^*} & H^i(U_1\cap U_2) & \longrightarrow & H^{i+1}(M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

*Доказательство.* ШАГ 1. Проверим точность короткой последовательности:

- $\operatorname{Ker} i^* = 0$, так как форма $\omega$ однозначно определяется своими ограничениями на $U_1$ и $U_2$.

- Покажем, что $\operatorname{Im} i^* = \operatorname{Ker} j^*$. Очевидно, что $\operatorname{Im} i^* \subset \operatorname{Ker} j^*$. В другую сторону, если $j^*(\omega_1,\omega_2)=0$, то формы $\omega_1$ и $\omega_2$ совпадают на $U_1\cap U_2$, и их можно “склеить” в форму на всем $M$.

- Проверим, что $j^*$ — сюръективно. Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, подчинённое покрытию $\{U_1,U_2\}$. Тогда

  $$\omega = (\lambda_1\omega)|_{U_1} + (\lambda_2\omega)|_{U_2}$$

  Формы удается корректно ограничить благодаря тому, что $\lambda_i = 0$ на $U_j \backslash (U_1\cap U_2)$.

ШАГ 2. Построим по короткой точной последовательности длинную. Главное — построить отображение

$$H^k(U_1\cap U_2)\to H^{k+1}(M).$$

- Рассмотрим замкнутую форму $\omega\in\Omega^k(U_1\cap U_2)$.

- Пусть $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^k(U_1)\oplus\Omega^k(U_2)$ т.,ч.

  $$j^*(\omega_1,\omega_2)=\omega.$$

- Рассмотрим $(d\omega_1, d\omega_2) \in \Omega^{k+1}(U_1) \oplus \Omega^{k+1}(U_2)$.

- Заметим, что $j^*(d\omega_1, d\omega_2) = 0$, так как $dj^* = j^*d$ и $d\omega = 0$.

- Так как $\operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} i^*$, существует форма $\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ т.,ч.

$$i^*\alpha = (d\omega_1, d\omega_2).$$

- Классу $[\omega] \in H^{k+1}(M)$ соответствует класс $[\alpha] \in H^k(U_1 \cap U_2)$.

За построением удобно следить на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) & \xrightarrow{j^*} & \Omega^k(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow{i^*} & \Omega^{k+1}(U_1) \oplus \Omega^{k+1}(U_2) & \xrightarrow{j^*} & \Omega^{k+1}(U_1 \cap U_2) & &
\end{array}$$

ШАГ 3. Проверка корректности построения и точности построенной последовательности — элементарное упражнение.

$\square$

# Приложение A

# Соглашения и договорённости

В различных книгах и статьях в некоторых формулах могут использоваться другие знаки или коэффициенты.

(1) Операции **внешнего произведения** и альтернирования связаны следующим образом:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = k! \operatorname{Alt}\left(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}\right) = \\ = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(k)}}.$$

Другими словами, значение внешнего произведения ковекторов $\alpha^i$ на наборе векторов $v_j$ — это определитель $\det\left(\langle \alpha^i, v_j \rangle\right)$:

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \left(v_1, \dots, v_k\right) = \begin{vmatrix} \langle \alpha^1, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha^1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha^k, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha^k, v_k \rangle \end{vmatrix}.$$

(2) С другой стороны, **симметрическое произведение** определяется как

$$e^{i_1} \odot \dots \odot e^{i_k} = \operatorname{Sym}\left(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\right),$$

где
$$(\mathrm{Sym}\ T)_{i_1\ldots i_k} = \sum_{\sigma\in S_k} \frac{1}{k!} T_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}}.$$

Как следствие
$$T_1 \odot T_2 = \mathrm{Sym}(T_1 \otimes T_2).$$

(3) **Коммутатор векторных полей** — это коммутатор соответствующих дифференциальных операторов:
$$[u,v](f) := u(v(f) - v(u(f)).$$

(4) **Ориентация** края $\partial M$ согласована с ориентацией $M$ следующим образом:

- если касательные вектора $v_1,\ldots,v_{n-1}$ задают положительную ориентацию границы $\partial M$,
- то положительную ориентацию $M$ задаёт базис
$$N, v_1, \ldots, v_{n-1},$$
где $N$ — вектор внешней нормали.

Как следствие, **формула Стокса** имеет вид
$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega.$$

(5) **Символы Кристоффеля** для аффинной связности $\nabla$ в локальных координатах $(x^1,\ldots,x^n)$ определяются как
$$\Gamma^i_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^i.$$

Как следствие, мы получаем следующие формулы:

(a) **Ковариантная производная** векторного поля имеет вид

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right).$$

(b) **Тензор кручения** $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ задаётся формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

(6) **Тензор Римана** задаётся формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Компоненты $R^i_{j,kl}$, заданные формулой

$$R(X, Y)Z = R^i_{j,kl} X^k Y^l Z^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

имеют вид

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ks} \Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls} \Gamma^s_{kj}.$$

(a) **Тензор Риччи**

$$R_{ij} = R^s_{i,sj}.$$

(b) **Скалярная кривизна**

$$R = R^i_i = g^{ij} R_{ji}.$$

# Литература


[1] Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии.* Москва, URSS. 2016.

[2] Скопенков А. Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах.* — М.: МЦНМО, 2008.

[3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* Факториал Пресс, 2000.

[4] Иванов А. О., Тужилин А.А.: *Лекции по классической дифференциальной геометрии.* Логос, 2009.

[5] Иванов А. О., Тужилин А.А.: *Лекции по дифференциальной геометрии и топологии.* 2011, `http://dfgm.math.msu.su/files/lect2.pdf`

[6] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* — М.: Наука, 1986.

[7] Новиков С. П., Тайманов И. А. *Современные геометрические структуры и поля.* — М.: МЦНМО, 2014.

[8] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* — М.: Наука, 1981.

[9] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.* — М.: Наука, 1987.

[10] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия.* — М.: Наука, 1988.

[11] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли.* — М.: Наука, 1982.

[12] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия* — М.: Факториал, 1998.

[13] Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1971.

[14] Милнор Дж. *Теория Морса.* М., “Мир”, 1965.

[15] Ботт Р., Ту Л. В. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* — М.: Наука, 1989.

[16] Прасолов В. В. *Элементы теории гомологий.* — М.: МЦНМО, 2006.

[17] Хатчер А. *Алгебраическая топология.* — Москва: Издательство МЦНМО, 2011.

[18] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* — М.: Наука, 1989.

**И. К. Козлов,**
**Дифференциальная геометрия в задачах**

М.: Издательство Попечительского совета
механико-математического факультета МГУ, 2019. — 230 с.

Подписано в печать с авторского
электронного оригинал–макета 05.04.2019
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат $60 \times 90$ 1/16. Печ. л. 14,73
Заказ № 238. Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в ППП «Типография “Наука”»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6