Extrema des fonction de plusieurs variables

EXTREMA LIBRES ET POINTS CRITIQUES

Exercice 1 : Soient $f_1(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 1$ et $f_2(x,y) = x^2 + y^3$.
1) Déterminer les points critiques de f_1 et de f_2.
2) Etudier les extrema locaux et globaux de f_1, en utilisant la dédinition.
3) En calculant , pour $y \neq 0$, $f_2(0,y)$, étudier les extrema locaux de f_2.

Exercice 2 : En utilisant la définition et un changement de variable adéquats pour se ramner en $(0,0)$, étudier les extrema locaux de f_1 et de f_2 où:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y, \qquad et \qquad f_2(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y.$$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = -y\left(\ln(y)^2 + x^2\right)$.
1) Détreminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer les points critiques de f.
3)En utilisant les dérivées partielles d'ordre 2, étudier les extrema locaux et globaux de f

Exercice 4 : Trouver et déterminer la nature des points critiques des fonctions

1) $f_1(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
2) $f_2(x,y,z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y - 4x - 5$.
3) $f_3(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$,
4) $f_4(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Exercice 5 : Déterminer les extrema locaux des fonctions ci-dessous. Est-ce que ce sont des extrema globaux?

1) $f_1(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$, 2) $f_2(x,y) = x^3 + xy^2 - y^3$, 3) $f_3(x,y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$.

Exercice 6 : Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est utilisée. Des études ont montré qu'en laboratoire la durée de l'infection pouvait être modelisée par

$$D(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y le dosage en mg du second. Comment minimiser la durée de l'infection ?

EXTREMA SOUS CONTRAINTES

Exercice 7 : Soient $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\right\}$.
1) Illustrer géométriquement l'ensemble K.
2) Montrer que f admet un maximum sur$K$, et déterminer ce maximum.

Exercice 8 : Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema des fonctions f_1 et de f_2 sous la (les) contrainte(s) indiquée(s) :
1) $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$.
2) $f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sous les contraintes $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ et $2\sin\left(x^2+y^2+z^2\right) = 1$.
3) $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 9 : 1) Minimiser la distance de P_1 à P_2 où

- P_1 est un point de l'éllipsoide d'équation $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0$,
- P_2 est un point du plan d'équation $x + y + z - 10 = 0$.

2)Quelle est la plus longue distance du point $(2,1)$ au cercle d'équation $x^2+y^2 = 4$
3)Chercher la distance minimale de la courbe d'équation $y^2 - x^3 = 0$ au point $(-1,0)$

EXERCICES D'EXAMENS

Exercice 10 (Contrôle final S1− 2010/2011) : La température au point de coordonnées (x, y, z) de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ vaut : $T(x, y, z) = xz + yz$. Quels sont les points les plus chauds et les plus froids.

Exercice 11 (Contrôle final S1- 2011/2012) : Soient f et g deux applications de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ *et* $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$.

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $f \in C^{\infty}(U)$.

2) On pose: pour $(x, y) \in U$, $h(x, y) = f(x, y) - \frac{7}{6}g(x, y)$. Trouver les points critiques de h sur U et éudier leurs nature.

3) On pose $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ g(x, y) = 0\right\}$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'il existe 4 points où $f_{|\Gamma}$ peut présenter des extrema.

- Démontrer que Γ est un fermé borné de U.
- Donner la valeur maximale et la valeur minimale de $f_{|\Gamma}$.

4) On pouvait déduire, de la question 2, deux des extrema de $f_{|\Gamma}$. Expliquez comment.

5) Trouver les extrema de h en tant que fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

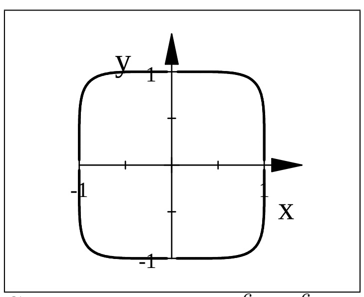
Exercice 12 (Contrôle intermédiaire-2016/2017) : On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1) Trouver les points critiques de f et donner leur nature.

2) Vérifier que $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 - 2$.

3) En déduire que les extrema locaux de f sont globaux.

Exercice 13 (Contrôle intermédiaire-2016/2017) : Déterminer les points de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine O, sachant que la réprésentation graphique de cette courbe est la suivante :



Courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$

NB : $2^{\frac{2}{3}} = 1.59$.

Exercice 14 (Contrôle intermédiaire-2017-2018) : On aimerait trouver un champ rectangulaire d'aire maximale délimité par une clôture de longueur l donnée. Soient x et y les longueurs des côtés du champ rectangulaire.

1) Donner la longueur de la clôture et l'aire du champ en fonction de x et y.

2) S'agit-il d'un problème d'extrema liés? Si oui donner la fonction à optimiser et la contrainte.
3) Trouver, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, l'aire maximale du champ rectangulaire délimité par une clôture de longueur 16 (faire le test).