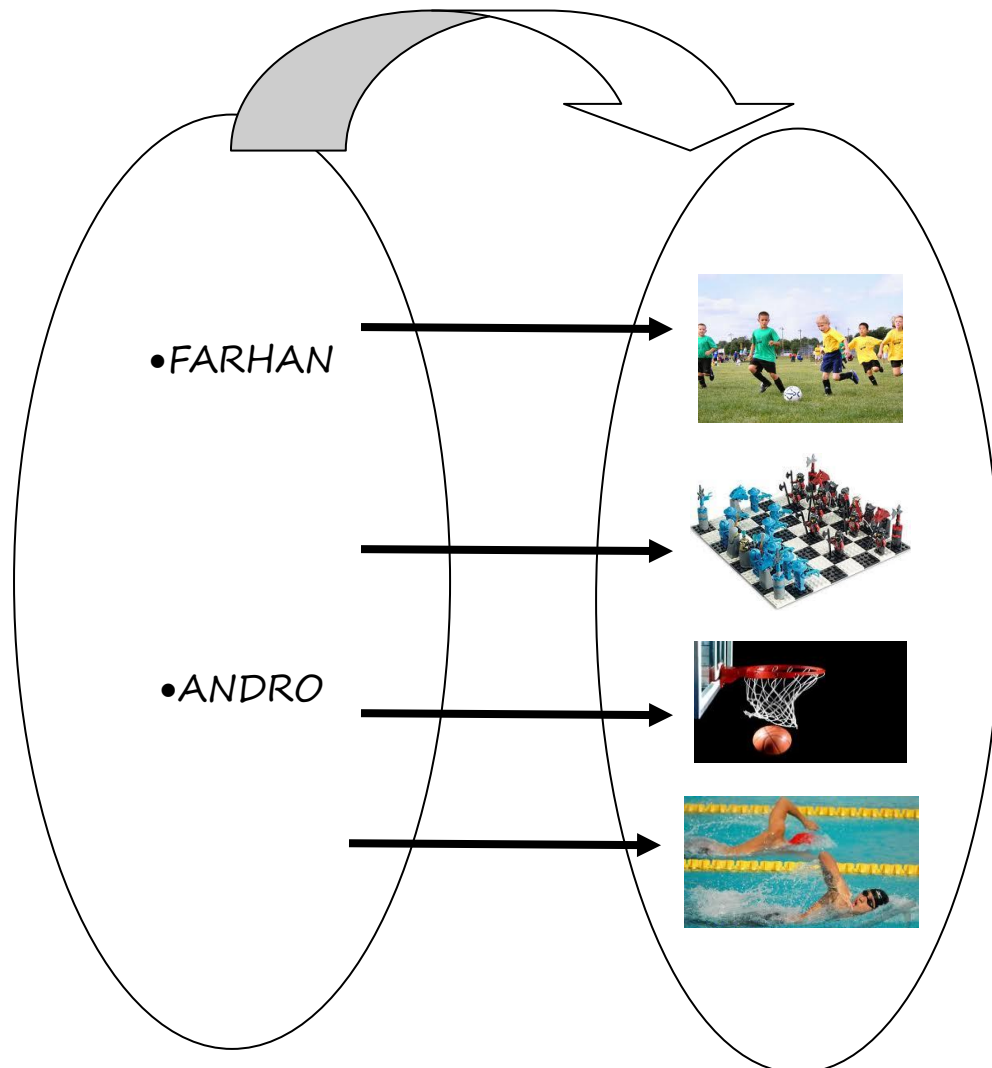


MODUL 2

FUNGSI DAN RELASI



NAMA : _____

KELAS : _____



Sekolah Menengah
Sekolah Alam Bogor
2013 - 2014

Standar Kompetensi		Kompetensi Dasar	
1.	Memahami bentuk aljabar, relasi, fungsi, dan persamaan garis lurus	1.1	Memahami relasi dan fungsi
		1.2	Menentukan nilai fungsi
		1.3	Membuat sketsa grafik fungsi aljabar sederhana pada sistem koordinat Cartesius
		1.4	Menentukan gradien, persamaan garis lurus

INSPIRASI



Perhatikan gambar diatas, sekelompok siswa yang sedang menerima pelajaran di suatu kelas. Setiap siswa menempati kursinya masing-masing. Tidak mungkin seorang siswa menempati lebih dari satu kursi. Demikian pula tidak mungkin satu kursi ditempati oleh lebih dari satu siswa. Dengan demikian, ada keterkaitan antara siswa dengan kursi yang ditempati.

FUNGSI DAN RELASI

A. RELASI

1. Pengertian Relasi

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 1

Gambar disamping menunjukkan suatu kumpulan anak yang terdiri atas Andro, Ara, Dimas dan denisa berada di sebuah toko alat tulis. Mereka berencana membeli buku dan alat tulis. Andro berencana akan membeli buku tulis dan pensil, Ara membeli penggaris dan penghapus, Dimas membeli bolpoin, buku tulis, dan tempat pensil, sedangkan Denisa membeli pensil dan penggaris.

Perhatikan bahwa ada hubungan antara himpunan anak = {Andro, Ara, Dimas, Denisa} dengan himpunan alat tulis = {Buku tulis, pensil, penghapus, bolpoin, tempat pensil}. Himpunan anak dengan himpunan alat tulis dihubungkan oleh kata “membeli”. Dalam hal ini, kata “membeli” merupakan relasi yang menghubungkan himpunan anak dengan himpunan alat tulis.

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.

Latihan Soal !

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.
 - a. Jika dari A ke B dihubungkan relasi “setengah dari”, tentukan himpunan anggota A yang mempunyai kawan di B.
 - b. Jika dari B ke A dihubungkan relasi “kuadrat dari”, tentukan himpunan anggota B yang mempunyai kawan di A.
2. Diketahui $A = \{5, 6, 7, 8\}$ dan $B = \{25, 30, 35, 36, 49, 64\}$.
 - a. Buatlah dua relasi yang mungkin dari A ke B.
 - b. Buatlah dua relasi yang mungkin dari B ke A.
3. Diketahui $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $Q = \{0, 1, 2, 3\}$.
 - a. Buatlah relasi dari P ke Q.
 - b. Buatlah relasi dari Q ke P.

2. Cara Menyajikan Suatu Relasi

Suatu relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu dengan diagram panah, diagram Cartesius dan himpunan pasangan berurutan. Untuk memahami hal tersebut, perhatikan uraian berikut ini.

Pengambilan data pelajaran yang disukai pada empat siswa kelas II diperoleh seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.

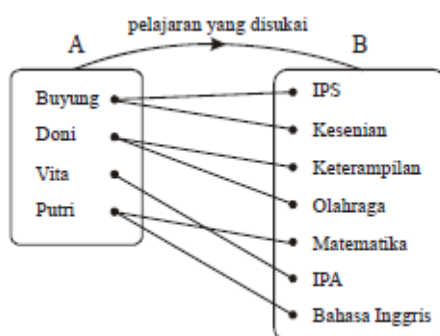
Nama Siswa	Pelajaran yang Disukai
Buyung	IPS, Kesenian
Doni	Keterampilan, Olahraga
Vita	IPA
Putri	Matematika, Bahasa Inggris

Tabel 1 di atas dapat dinyatakan dengan diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan seperti dibawah ini.

Misalkan $A = \{\text{Buyung, Doni, Vita, Putri}\}$, $B = \{\text{IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}\}$, dan “pelajaran yang disukai” adalah relasi yang menghubungkan himpunan A ke himpunan B.

a. Dengan diagram panah

Gambar di bawah menunjukkan relasi pelajaran yang disukai dari himpunan A ke himpunan B. Arah panah menunjukkan anggota-anggota himpunan A yang berelasi dengan anggota-anggota tertentu pada himpunan B.

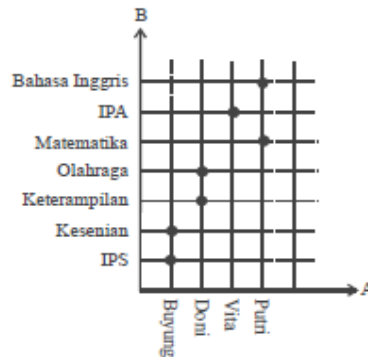


Gambar 2

b. Dengan diagram Cartesius

Relasi antara himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan diagram Cartesius. Anggota-anggota himpunan A berada pada sumbu mendatar dan anggota-anggota

himpunan B berada pada sumbu tegak. Setiap pasangan anggota himpunan A yang berelasi dengan anggota himpunan B dinyatakan dengan titik atau noktah. Gambar 3 menunjukkan diagram Cartesius dari relasi pelajaran yang disukai dari data pada tabel 1.



Gambar 3

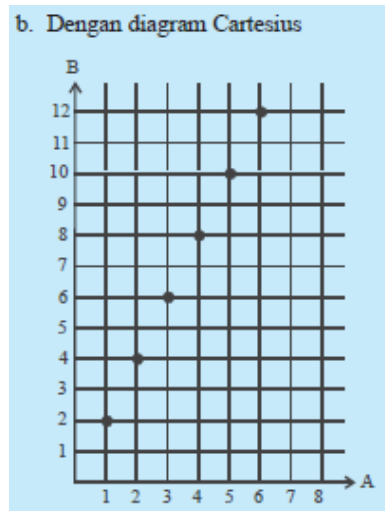
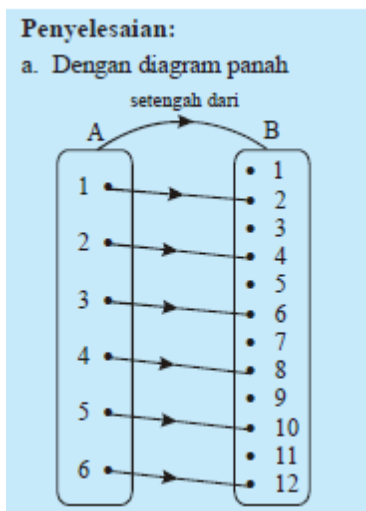
c. Dengan himpunan pasangan berurutan

Himpunan pasangan berurutan dari data pada tabel 1 sebagai berikut : $\{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)\}$.

Contoh soal :

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$; dan relasi dari A ke B adalah relasi “setengah dari”. Nyatakan relasi tersebut dalam bentuk :

- diagram panah;
- diagram Cartesius;
- himpunan pasangan berurutan.

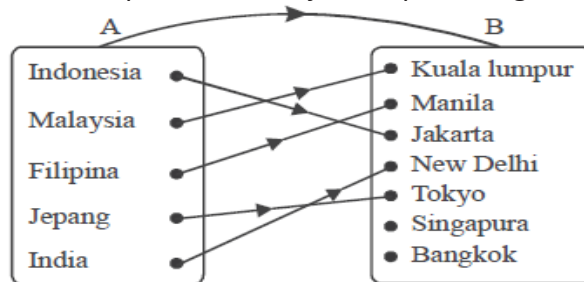


c. Dengan himpunan pasangan berurutan

Misalkan relasi “setengah dari” dari himpunan A ke himpunan B adalah R, maka $R = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12)\}$.

Latihan Soal !

1. Diketahui Sinta suka minum susu dan teh, Ketut suka minum kopi, Ita suka minum teh, dan Tio suka minum sprite. Nyatakan relasi tersebut dalam bentuk
 - a. diagram panah;
 - b. diagram Cartesius;
 - c. himpunan pasangan berurutan.
2. Relasi dari himpunan A ke himpunan B ditunjukkan pada diagram panah berikut.



- a. Nyatakan relasi yang mungkin dari himpunan A ke himpunan B.
 - b. Nyatakan relasi dari A ke B dalam bentuk diagram Cartesius.
 - c. Nyatakan relasi dari A ke B dalam bentuk himpunan pasangan berurutan.
3. Buatlah relasi “akar dari” dari himpunan $P = \{2, 3, 4, 5\}$ ke himpunan $Q = \{1, 2, 4, 9, 12, 16, 20, 25\}$ dengan
 - a. diagram panah;
 - b. diagram Cartesius;
 - c. himpunan pasangan berurutan.

B. FUNGSI ATAU PEMETAAN

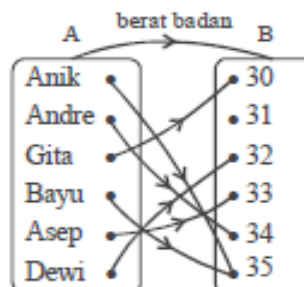
1. Pengertian Fungsi

Untuk memahami pengertian fungsi, perhatikan uraian berikut.

Pengambilan data mengenai berat badan dari enam siswa kelas II disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.

Nama Siswa	Berat Badan (kg)
Anik	35
Andre	34
Gita	30
Bayu	35
Asep	33
Dewi	32



Gambar 4

Gambar 4 merupakan diagram panah yang menunjukkan relasi berat badan dari data Tabel 2. Dari diagram panah pada Gambar 4 dapat diketahui hal-hal sebagai berikut :

- a. Setiap siswa memiliki berat badan

Hal ini berarti setiap anggota A mempunyai kawan atau pasangan dengan anggota B.

b. Setiap siswa memiliki tepat satu berat badan.

Hal ini berarti setiap anggota A mempunyai tepat satu kawan atau pasangan dengan anggota B.

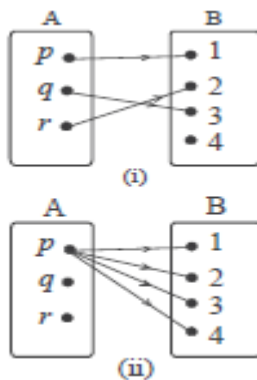
Berdasarkan uraian di atas dapat kita ambil kesimpulan ***bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.*** Relasi yang demikian dinamakan ***fungsi (pemetaan).*** Jadi, fungsi (pemetaan) dari himpunan A ke himpunan B adalah ***relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.***

Syarat suatu relasi merupakan pemetaan atau fungsi adalah :

- Setiap anggota A mempunyai pasangan di B.
- Setiap anggota A dipasangkan dengan *tepat satu* anggota B.
- Anggota B boleh punya pasangan lebih satu anggota atau tidak punya pasangan.

Contoh soal :

Di antara relasi yang disajikan pada diagram panah berikut manakah yang merupakan fungsi ? Berikan alasannya?



Penyelesaian :

- Diagram panah pada (i) merupakan fungsi, karena setiap anggota A mempunyai tepat satu pasangan di B.
- Diagram panah pada (ii) bukan fungsi, karena terdapat anggota A yaitu p mempunyai empat pasangan di B dan ada anggota A yaitu q dan r tidak mempunyai pasangan di B.

2. Notasi dan Nilai Fungsi

Diagram di di bawah menggambarkan fungsi yang memetakan x anggota himpunan A ke y anggota himpunan B. Notasi fungsinya dapat ditulis sebagai berikut.

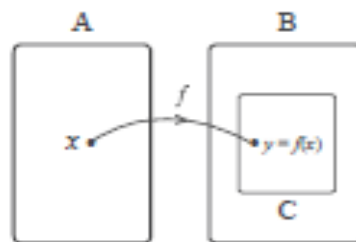
$$f : x \rightarrow y \text{ atau } f : x \rightarrow f(x)$$

dibaca: fungsi f memetakan x anggota A ke y anggota B

Himpunan A disebut **domain (daerah asal)**.

Himpunan B disebut **kodomain (daerah kawan)**.

Himpunan C \subset B yang memuat y disebut **range (daerah hasil)**.



Gambar 5

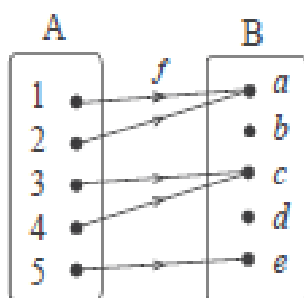
Dalam hal ini, $y = f(x)$ disebut bayangan (peta) x oleh fungsi f . Variabel x dapat diganti dengan sebarang anggota himpunan A dan disebut *variabel bebas*. Adapun variabel y anggota himpunan B yang merupakan bayangan x oleh fungsi f ditentukan (bergantung pada) oleh aturan yang didefinisikan, dan disebut *variable bergantung*. Misalkan bentuk fungsi $f(x) = ax + b$. Untuk menentukan nilai fungsi untuk x tertentu, dengan cara mengganti (menyubstitusi) nilai x pada bentuk fungsi $f(x) = ax + b$.

Contoh soal :

1. Perhatikan diagram panah pada gambar di bawah ini.

Tentukan :

- (i) Domain
- (ii) Kodomain
- (iii) Range
- (iv) Bayangan dari 1, 2, 3, 4, dan 5 oleh fungsi f



Penyelesaian:

- (i) Domain = $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (ii) Kodomain = $B = \{a, b, c, d, e\}$
- (iii) Range = $\{a, c, e\}$
- (iv) Bayangan 1 oleh fungsi f adalah $f(1) = a$.
Bayangan 2 oleh fungsi f adalah $f(2) = a$.
Bayangan 3 oleh fungsi f adalah $f(3) = c$.
Bayangan 4 oleh fungsi f adalah $f(4) = c$.
Bayangan 5 oleh fungsi f adalah $f(5) = e$.

2. Diketahui fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Tentukan $f(x)$ untuk :
- $x = 2$
 - $x = -3$

Penyelesaian:

- (i) Substitusi nilai $x = 2$ ke fungsi $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$,
sehingga $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$f(2) = 2x^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$= 8 - 6 + 1 = 3$$
- (ii) Substitusi nilai $x = -3$ ke fungsi $f(x)$,
sehingga diperoleh $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

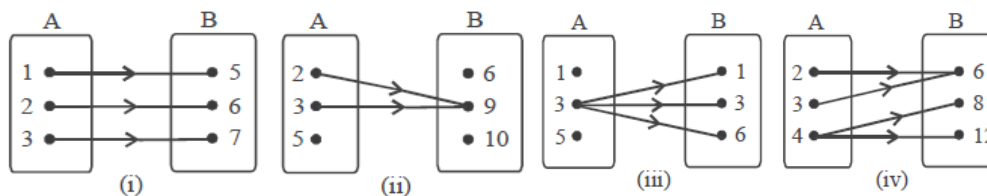
$$f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 3 \times (-3) + 1$$

$$= 18 + 9 + 1$$

$$= 28$$

Latihan Soal !

1. Di antara diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi? Berikan alasannya.



2. Di antara relasi dalam himpunan pasangan berurutan berikut, tentukan manakah yang merupakan suatu fungsi dari himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan pula daerah hasil masing-masing fungsi.
- $\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$
 - $\{(a, 2), (b, 4), (c, 4)\}$
 - $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$
 - $\{(a, 1), (b, 4), (c, 1), (d, 4)\}$
 - $\{(d, 1), (d, 2), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$
3. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow 4x - 1$. Tentukan nilai fungsi f untuk $x = -5, -3, -1, 0, 2, 4$, dan 10 .
4. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = -2x + 3$.
- Tentukan bayangan $x = -1$ oleh fungsi tersebut.
 - Tentukan nilai x jika $f(x) = 1$.

3. Menyatakan Fungsi dalam Diagram Panah, Diagram Cartesius, dan Himpunan Pasangan Berurutan

Kalian telah mempelajari bahwa suatu relasi dapat dinyatakan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Karena fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, maka fungsi juga dapat dinyatakan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

Misalkan $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Jika fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan $f(x) = x - 2$

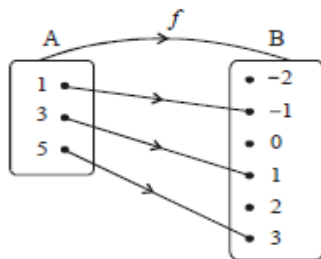
Maka :

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

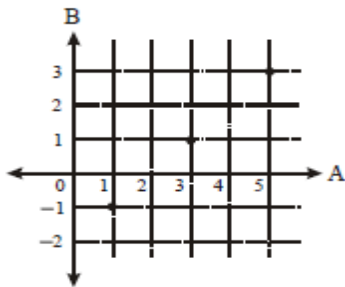
$$f(3) = 3 - 2 = 1$$

$$f(5) = 5 - 2 = 3$$

a. Diagram panah yang menggambarkan fungsi f tersebut sebagai berikut.



b. Diagram Cartesius dari fungsi f sebagai berikut.



c. Himpunan pasangan berurutan dari fungsi f tersebut adalah $\{(1, -1), (3, 1), (5, 3)\}$.

Perhatikan bahwa setiap anggota A muncul tepat satu kali pada komponen pertama pada pasangan berurutan.

4. Menentukan Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari Dua Himpunan

Untuk menentukan banyaknya pemetaan yang mungkin dari dua himpunan, perhatikan uraian berikut.

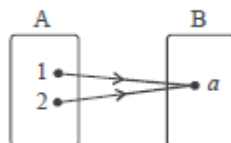
a. Jika $A = \{1\}$ dan $B = \{a\}$ maka $n(A) = 1$ dan $n(B) = 1$. Satu-satunya pemetaan yang mungkin dari A ke B mempunyai diagram panah seperti tampak pada **Gambar 6**.

b. Jika $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a\}$ maka $n(A) = 2$ dan $n(B) = 1$. Pemetaan yang mungkin dari himpunan A ke B tampak seperti diagram panah pada **Gambar 7**.

c. Jika $A = \{1\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka $n(A) = 1$ dan $n(B) = 2$. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada dua, seperti tampak pada diagram panah pada **Gambar 8**.



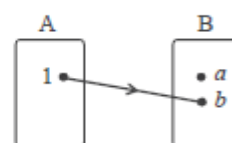
Gambar 6



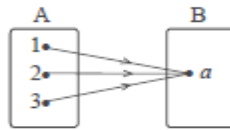
Gambar 7



Gambar 8

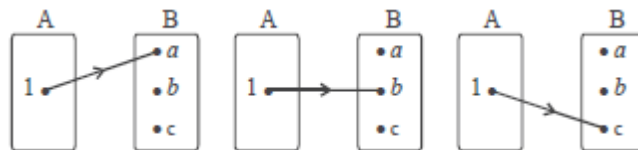


- d. Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a\}$ maka $n(A) = 3$ dan $n(B) = 1$. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada satu, seperti tampak pada diagram panah pada **Gambar 9**.



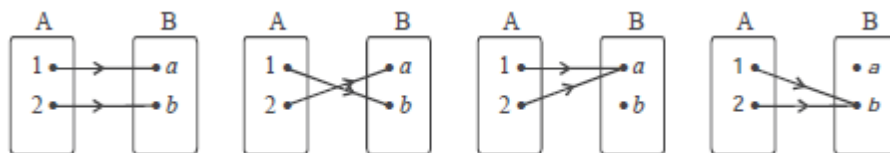
Gambar 9

- e. Jika $A = \{1\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ maka $n(A) = 1$ dan $n(B) = 3$. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada tiga, seperti tampak pada diagram panah pada **Gambar 10**.



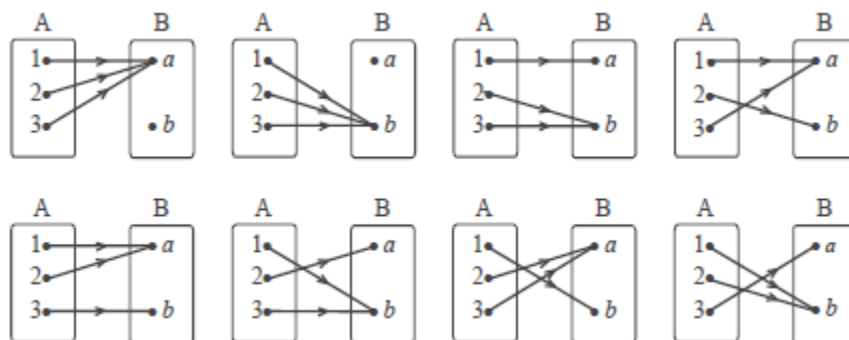
Gambar 10

- f. Jika $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka $n(A) = 2$ dan $n(B) = 2$. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada empat, seperti tampak pada diagram panah pada **Gambar 11**.



Gambar 11

- g. Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka $n(A) = 3$ dan $n(B) = 2$. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada 8, seperti tampak pada diagram panah pada **Gambar 12**.



Gambar 12

Dengan mengamati uraian tersebut, untuk menentukan banyaknya pemetaan dari suatu himpunan A ke himpunan B dapat dilihat pada **Tabel 3**.

Tabel 3.

Banyaknya Anggota		Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari A ke B	Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari B ke A
Himpunan A	Himpunan B		
1	1	$1 = 1^1$	$1 = 1^1$
2	1	$1 = 1^2$	$2 = 2^1$
1	2	$2 = 2^1$	$1 = 1^2$
3	1	$1 = 1^3$	$3 = 3^1$
1	3	$3 = 3^1$	$1 = 1^3$
2	2	$4 = 2^2$	$4 = 2^2$
3	2	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$

Berdasarkan pengamatan pada tabel di atas, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut .

Jika banyaknya anggota himpunan A adalah $n(A) = a$ dan banyaknya anggota himpunan B adalah $n(B) = b$ maka :

1. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah b^a

2. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A adalah a^b

Contoh soal :

Jika $A = \{\text{bilangan prima kurang dari 5}\}$ dan $B = \{\text{huruf vokal}\}$, hitunglah banyaknya pemetaan

a. dari A ke B;

b. dari B ke A, tanpa menggambar diagram panahnya.

Penyelesaian:

a. $A = \{2, 3\}, n(A) = 2$

$B = \{a, e, i, o, u\}, n(B) = 5$

Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B $= b^a$
 $= 5^2 = 25$

b. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A $= a^b$
 $= 2^5 = 32$

Latihan Soal !

- Gambarlah diagram panah yang mungkin dari himpunan A ke himpunan B dari setiap pemetaan berikut.
 - $A = \{p, q\}, B = \{1, 2, 3\}$
 - $A = \{p, q, r\}, B = \{1, 2\}$
- Jika $A = \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbb{B}\}$ dan $B = \{x \mid x \text{ bilangan prima} < 8\}$, tentukan
 - banyaknya pemetaan dari A ke B;
 - banyaknya pemetaan dari B ke A.
- Suatu fungsi dari A ke B didefinisikan sebagai $f(x) = -2x + 7$. Jika $A = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$ dan B adalah himpunan bilangan bulat maka
 - tentukan $f(x)$ untuk setiap $x \in A$;
 - gambarlah fungsi $f(x)$ dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

C. MENENTUKAN RUMUS FUNGSI JIKA NILAINYA DIKETAHUI

Pada pembahasan ini bentuk fungsi yang dipelajari hanya *fungsi linear* saja, yaitu $f(x) = ax + b$. Untuk bentuk fungsi kuadrat dan pangkat tinggi akan dipelajari pada tingkat yang lebih tinggi. Misalkan fungsi f dinyatakan dengan $f : x \rightarrow ax + b$, dengan a dan b konstanta dan x variabel maka rumus fungsinya adalah $f(x) = ax + b$. Jika nilai variabel $x = m$ maka nilai $f(m) = am + b$. Dengan demikian, kita dapat menentukan bentuk fungsi f jika diketahui nilai-nilai fungsinya. Selanjutnya, nilai konstanta a dan b ditentukan berdasarkan nilai-nilai fungsi yang diketahui. Agar mudah memahaminya pelajarilah contoh berikut.

Contoh soal :

Diketahui f fungsi linear dengan $f(0) = -5$ dan $f(-2) = -9$. Tentukan bentuk fungsi $f(x)$.

Penyelesaian:

Karena f fungsi linear, maka $f(x) = ax + b$.

Dengan demikian diperoleh

$$f(0) = -5$$

$$f(0) = a(0) + b = -5$$

$$0 + b = -5$$

$$b = -5$$

Untuk menentukan nilai a , perhatikan langkah berikut.

$$f(-2) = -9$$

$$f(-2) = a(-2) + b = -9$$

$$-2a - 5 = -9$$

$$-2a = -9 + 5$$

$$-2a = -4$$

$$a = \frac{-4}{-2}$$

$$a = 2$$

Jadi, fungsi yang dimaksud adalah $f(x) = ax + b = 2x - 5$.

Latihan Soal !

1. Diketahui suatu fungsi linear $f(x) = 2x + m$. Tentukan bentuk fungsi tersebut jika $f(3) = 4$.
2. Jika $f(x) = ax + b$, $f(1) = 2$, dan $f(2) = 1$ maka tentukan
 - a. bentuk fungsi $f(x)$;
 - b. bentuk paling sederhana dari $f(x - 1)$;
 - c. bentuk paling sederhana dari $f(x) + f(x - 1)$.
3. Diketahui $f(x) = ax + b$. Tentukan bentuk fungsi-fungsi berikut jika
 - a. $f(1) = 3$ dan $f(2) = 5$;
 - b. $f(0) = -6$ dan $f(3) = -5$;
 - c. $f(2) = 3$ dan $f(4) = 4$.
4. Diketahui $f(x) = (x + a) + 3$ dan $f(2) = 7$. Tentukan
 - a. bentuk fungsi $f(x)$;
 - b. nilai $f(-1)$;
 - c. nilai $f(-2) + f(-1)$;
 - d. bentuk fungsi $f(2x - 5)$.

5. Diketahui dua buah fungsi, yaitu $f(x) = 2 - \frac{a}{2}x$ dan $g(x) = 2 - (a - 3)x$. Jika $f(x) = g(x)$, tentukan
- nilai a ;
 - bentuk fungsi $f(x)$ dan $g(x)$;
 - bentuk fungsi $f(x) + g(x)$;
 - nilai $f(-1)$, $f(2)$, $g(1)$, dan $g(4)$

D. MENGHITUNG NILAI PERUBAHAN FUNGSI JIKA NILAI VARIABEL BERUBAH

Suatu fungsi $f(x)$ mempunyai variabel x dan untuk nilai variabel x tertentu, kita dapat menghitung nilai fungsinya. Jika nilai variabel suatu fungsi berubah maka akan menyebabkan perubahan pada nilai fungsinya.

Misalkan fungsi f ditentukan oleh $f: x \rightarrow 5x + 3$ dengan domain $\{x/-1 \leq x \leq 3, x \in \text{bilangan bulat}\}$. Nilai fungsi dari variabel x adalah

$$f(-1) = 5(-1) + 3 = -2;$$

$$f(0) = 5(0) + 3 = 3;$$

$$f(1) = 5(1) + 3 = 8;$$

$$f(2) = 5(2) + 3 = 13;$$

$$f(3) = 5(3) + 3 = 18;$$

Jika variabel x diubah menjadi $x + 3$ maka kita harus menentukan nilai dari fungsi $f(x + 3)$.

Untuk menentukan nilai $f(x + 3)$, terlebih dahulu kalian harus menentukan variabel baru, yaitu $(x + 3)$ sehingga diperoleh nilai-nilai variabel baru sebagai berikut.

$$-1 + 3 = 2$$

$$0 + 3 = 3$$

$$1 + 3 = 4$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 3 = 6$$

Setelah kalian menentukan nilai-nilai variabel baru, yaitu $(x + 3) = 2, 3, 4, 5, 6$, tentukan nilai-nilai $f(x + 3)$ berdasarkan pemetaan $f: (x + 3) \rightarrow 5(x + 3) + 3$. Dengan demikian, diperoleh

$$f(2) = 5(2) + 3 = 13;$$

$$f(3) = 5(3) + 3 = 18;$$

$$f(4) = 5(4) + 3 = 23;$$

$$f(5) = 5(5) + 3 = 28;$$

$$f(6) = 5(6) + 3 = 33;$$

Nilai perubahan fungsi dari $f(x)$ menjadi $f(x + 3)$ yaitu selisih antara $f(x)$ dan $f(x + 3)$, dituliskan $f(x + 3) - f(x)$.

Untuk menentukan nilai perubahan fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan seperti tabel berikut.

Tabel 4.

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = 5x + 3$	-2	3	8	13	18
$x + 3$	2	3	4	5	6
$f(x + 3) = 5(x + 3) + 3$	13	18	23	28	33
$f(x + 3) - f(x)$	15	15	15	15	15

Berdasarkan tabel di atas tampak bahwa untuk semua nilai $x \in \text{domain}$, nilai perubahan fungsi $f(x + 3) - f(x) = 15$. Cara lain untuk menentukan nilai perubahan fungsi sebagai berikut. Tentukan terlebih dahulu fungsi $f(x + 3)$.

Diketahui $f(x) = 5x + 3$ maka

$$f(x + 3) = 5(x + 3) + 3$$

$$= 5x + 15 + 3$$

$$= 5x + 18$$

Nilai perubahan fungsi dari $f(x)$ menjadi $f(x + 3)$ adalah selisih antara $f(x)$ dan $f(x + 3)$ sebagai berikut.

$$f(x + 3) - f(x) = (5x + 18) - (5x + 3)$$

$$= 5x + 18 - 5x - 3$$

$$= 15$$

Latihan Soal !

- Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2x - 6$.
 - Tentukan rumus fungsi yang paling sederhana dari $f(x + 1)$, $f(2x - 1)$, dan $f(x^2)$.
 - Tentukan rumus fungsi untuk $f(x - a)$ untuk suatu bilangan asli a dan tentukan perubahan fungsi $f(x + a) - f(x)$.
- Jika fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = 4x + 3$, untuk x bilangan real maka tentukan rumus fungsi yang paling sederhana dari $f(x - 3)$ dan $f(x) - f(x - 3)$.
- Diketahui fungsi $f(x) = 2x$ untuk suatu x bilangan real.
 - Apakah fungsi $f(-x) = -f(x)$?
 - Bagaimana dengan fungsi $f(x) = x^2$? Apakah $f(-x) = -f(x)$?
- Jika $f(x) = x + 1$ untuk x bilangan ganjil, apakah fungsi $f(-(x + 2)) = f(-x - 2)$?
- Jika $f(x) = 4x - 5$ untuk x bilangan real maka tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $f(x) = f(2x + 1)$.

E. GRAFIK FUNGSI ATAU PEMETAAN

Suatu pemetaan atau fungsi dari himpunan A ke himpunan B dapat dibuat grafik pemetaannya. Grafik suatu pemetaan (fungsi) adalah bentuk diagram Cartesius dari suatu pemetaan (fungsi).

Contoh soal :

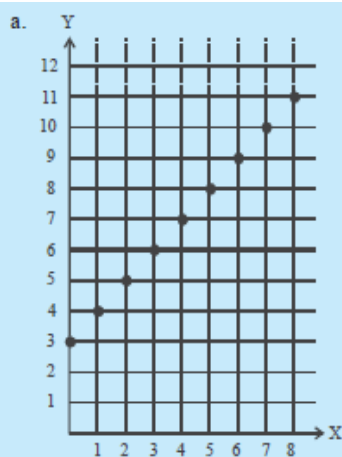
Gambarlah grafik fungsi $f: x \rightarrow x + 3$ dengan domain

- $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \text{bilangan bulat}\}$;
- $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \text{bilangan real}\}$

Penyelesaian:

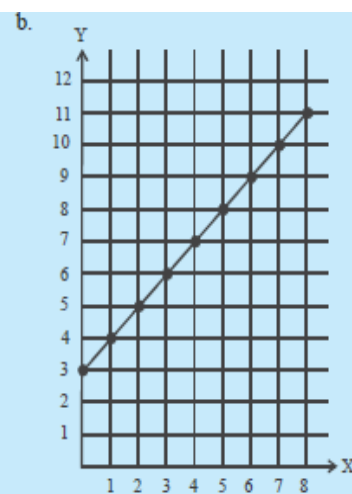
Untuk memudahkan menggambar grafik fungsi $f: x \mapsto x + 3$, kita buat terlebih dahulu tabel yang memenuhi fungsi tersebut, sehingga diperoleh koordinat titik-titik yang memenuhi.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = x + 3$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(x,y)	(0,3)	(1,4)	(2,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,9)	(7,10)	(8,11)



Gambar 2.19

Berdasarkan Gambar 2.19, tampak bahwa grafik fungsi $f: x \mapsto x + 3$, dengan $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \text{bilangan bulat}\}$, berupa titik-titik (noktah) saja.



Gambar 2.20

Pada Gambar 2.20 tampak grafik fungsi $f: x \mapsto x + 3$, dengan $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \text{bilangan real}\}$. Titik-titik yang ada dihubungkan hingga membentuk kurva/garis lurus.

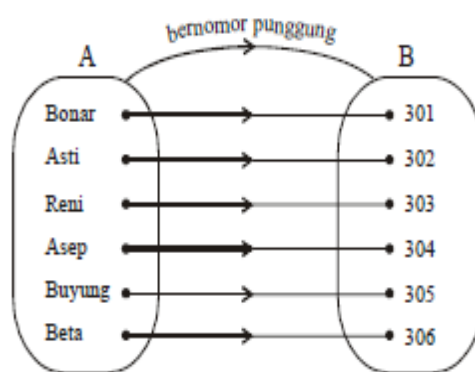
Latihan Soal !

- Fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai $f(x) = x^2 + x$ dengan domain $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ ke himpunan bilangan real.
 - Gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius.
 - Berbentuk apakah grafik tersebut?
- Diketahui fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai $f(x) = 2x^2 - 1$.
 - Gambar grafiknya pada bidang Cartesius jika x adalah variabel pada himpunan bilangan cacah. Berbentuk apakah grafik tersebut?
 - Gambar grafiknya pada bidang Cartesius jika x adalah variabel pada himpunan bilangan real. Berbentuk apakah grafik tersebut?
- Diketahui fungsi $f: x \rightarrow 3x - 5$ dengan domain $P = \{x \mid 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{C}\}$ ke himpunan bilangan real.
 - Gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius.
 - Berbentuk apakah grafik fungsi tersebut?

F. KORESPONDENSI SATU-SATU

Perhatikan deretan rumah di suatu kompleks rumah (perumahan). Setiap rumah memiliki nomor rumah tertentu yang berbeda dengan nomor rumah yang lain. Mungkinkah satu rumah memiliki dua nomor rumah? Atau mungkinkah dua rumah memiliki nomor rumah yang sama? Tentu saja jawabannya tidak. Keadaan sebuah rumah memiliki satu nomor rumah atau satu nomor rumah dimiliki oleh sebuah rumah dikatakan sebagai **korespondensi satu-satu**.

Contoh lain yang menggambarkan korespondensi satu-satu sebagai berikut. Enam orang siswa bermain bola voli dengan nomor punggung 301 – 306. Ternyata Bonar bernomor punggung 301; Asti bernomor punggung 302; Reni bernomor punggung 303; Asep bernomor punggung 304; Buyung bernomor punggung 305; Beta bernomor punggung 306. Selanjutnya, jika kita misalkan $A = \{\text{Bonar, Asti, Reni, Asep, Buyung, Beta}\}$ dan $B = \{301, 302, 303, 304, 305, 306\}$ maka “*bernomor punggung*” adalah relasi dari A ke B. Relasi “*bernomor punggung*” dari himpunan A ke himpunan B pada kasus di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram panah berikut.



Gambar 12

Perhatikan bahwa setiap anggota A mempunyai tepat satu kawan di B. Dengan demikian, relasi “*bernomor punggung*” dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu pemetaan. Selanjutnya, amati bahwa setiap anggota B yang merupakan peta (bayangan) dari anggota A dikawankan dengan tepat satu anggota A. Pemetaan dua arah seperti contoh di atas disebut **korespondensi satu-satu** atau **perkawanan satu-satu**. Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Korespondensi satu-satu adalah fungsi yang memetakan anggota dari himpunan A dan B, dimana semua anggota A dan B dapat dipasangkan sedemikian sehingga setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B dan setiap anggota B berpasangan dengan

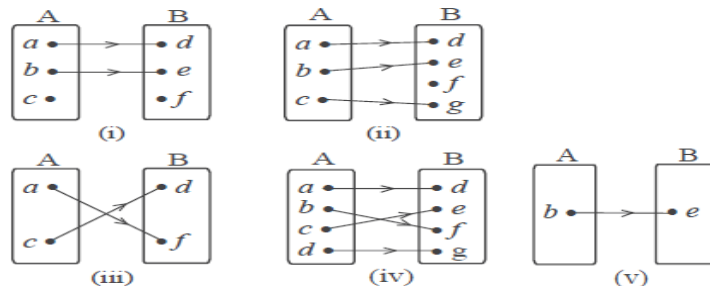
tepat satu anggota A. Jadi, banyak anggota himpunan A dan B harus sama atau $n(A) = n(B)$.

Jika $n(A)=n(B)=n$ maka banyak korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan B adalah $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

N! dibaca : n factorial.

Latihan Soal !

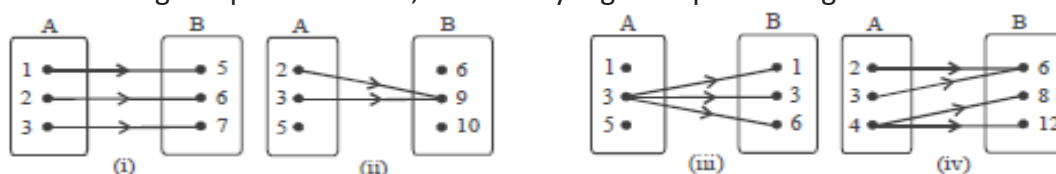
1. Di antara diagram panah di bawah ini, manakah yang menunjukkan korespondensi satu-satu?



2. Di antara dua himpunan berikut ini manakah yang dapat dibuat korespondensi satusatu?
 - a. $A = \{\text{nama hari dalam seminggu}\}$ $B = \{\text{bilangan prima antara 1 dan 11}\}$
 - b. $P = \{a, e, i, o, u\}$ $Q = \{\text{lima kota besar di Pulau Jawa}\}$
 - c. $A = \{\text{nama bulan dalam setahun}\}$ $B = \{\text{nama hari dalam seminggu}\}$
 - d. $C = \{\text{bilangan genap kurang dari 10}\}$ $D = \{\text{bilangan prima kurang dari 10}\}$
3. Berapa banyak korespondensi satusatu yang dapat dibuat dari himpunan berikut?
 - a. $A = \{\text{faktor dari 6}\}$ dan $B = \{\text{faktor dari 15}\}$
 - b. $K = \{\text{huruf vokal}\}$ dan $L = \{\text{bilangan cacah antara 0 dan 6}\}$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.
 - a. Jika dari A ke B dihubungkan relasi “setengah dari”, tentukan himpunan anggota A yang mempunyai kawan di B.
 - b. Jika dari B ke A dihubungkan relasi “kuadrat dari”, tentukan himpunan anggota B yang mempunyai kawan di A.
2. Buatlah relasi “akar dari” dari himpunan $P = \{2, 3, 4, 5\}$ ke himpunan $Q = \{1, 2, 4, 9, 12, 16, 20, 25\}$ dengan
 - a. diagram panah;
 - b. diagram Cartesius;
 - c. himpunan pasangan berurutan.
3. Di antara diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi? Berikan alasannya.



4. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = -2x + 3$.
 - a. Tentukan bayangan $x = -1$ oleh fungsi tersebut.
 - b. Tentukan nilai x jika $f(x) = 1$.
5. Jika $A = \{x \mid -2 < x < 2, x \in B\}$ dan $B = \{x \mid x \text{ bilangan prima} < 8\}$, tentukan
 - a. banyaknya pemetaan dari A ke B ;
 - b. banyaknya pemetaan dari B ke A .
6. Diketahui suatu fungsi linear $f(x) = 2x + m$. Tentukan bentuk fungsi tersebut jika $f(3) = 4$.
7. Diketahui $f(x) = ax + b$. Tentukan bentuk fungsi-fungsi berikut jika
 - a. $f(1) = 3$ dan $f(2) = 5$;
 - b. $f(0) = -6$ dan $f(3) = -5$;
 - c. $f(2) = 3$ dan $f(4) = 4$.
8. Di antara dua himpunan berikut ini manakah yang dapat dibuat korespondensi satu-satu?
 - a. $A = \{\text{nama hari dalam seminggu}\}$
 $B = \{\text{bilangan prima antara 1 dan 11}\}$
 - b. $P = \{a, e, i, o, u\}$
 $Q = \{\text{lima kota besar di Pulau Jawa}\}$
 - c. $A = \{\text{nama bulan dalam setahun}\}$
 $B = \{\text{nama hari dalam seminggu}\}$
 - d. $C = \{\text{bilangan genap kurang dari 10}\}$
 $D = \{\text{bilangan prima kurang dari 10}\}$
9. Berapa banyak korespondensi satu-satu yang dapat dibuat dari himpunan berikut?
 - a. $A = \{\text{faktor dari 6}\}$ dan $B = \{\text{faktor dari 15}\}$
 - b. $K = \{\text{huruf vokal}\}$ dan $L = \{\text{bilangan cacah antara 0 dan 6}\}$
10. Diketahui $K = \text{himpunan warna lampu lalu lintas}$. $L = \text{himpunan titik sudut segitiga ABC}$.
 - a. Gambarkan diagram panah yang menunjukkan korespondensi satu-satu dari himpunan K ke L .
 - b. Berapa banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin terjadi?

SELAMAT MENGERJAKAN