Introdução ao estudo de álgebra linear

Júlio César de Jesus Onofre

EAD
Uniube

© 2017 by Universidade de Uberaba

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Universidade de Uberaba.

Universidade de Uberaba
Reitor
Marcelo Palmério

Pró-Reitor de Educação a Distância
Fernando César Marra e Silva

Coordenação de Graduação a Distância
Sílvia Denise dos Santos Bisinotto

Projeto da capa
Agência Experimental Portfólio

Edição
Universidade de Uberaba
Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro Universitário

Catalogação elaborada pelo Setor de Referência da Biblioteca Central Uniube

---

O6i Onofre, Júlio César de Jesus.
Introdução ao estudo de álgebra linear / Júlio César de Jesus Onofre. – Uberaba: Universidade de Uberaba, 2017.
176 p. : il.

Programa de Educação a Distância – Universidade de Uberaba.
Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7777-703-7

1. Matrizes (Matemática). 2. Álgebra linear. I. Universidade de Uberaba. Programa de Educação a Distância. II. Título.

CDD 512.9434

Sobre o autor

Júlio César de Jesus Onofre

Mestre em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos – UFSCar – 2002. Bacharel e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa – 1999. Ex-professor dos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia Elétrica e Engenharia de Produção na Universidade de Uberaba – Uniube. É professor do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Cefet/MG.

Sumário

Apresentação

Neste livro, abordaremos os principais conceitos relacionados à área da matemática superior conhecida como álgebra linear, fato este que justifica o título: **Introdução ao estudo de álgebra linear**.

Enfatizaremos o estudo das matrizes, dos determinantes e dos sistemas de equações lineares, pois a álgebra linear está fundamentada no fato de que hoje existe uma variedade de áreas de aplicações para seus conceitos e resultados, como é o caso da computação gráfica, do cálculo diferencial e integral e da programação linear.

Não aprofundaremos em todos os conceitos, nem tampouco nas áreas de suas aplicações, visto que suas utilizações em tais áreas possuem abordagens mais específicas e técnicas. Nossa intenção é introduzir os principais conceitos básicos que, posteriormente, serão utilizados e se farão necessários em seus estudos e teorias relacionadas diretamente ou indiretamente à álgebra linear.

Esperamos que se empenhe no estudo deste livro e, assim, perceba a sua utilidade para o futuro desempenho de sua profissão.

Capítulo 1

Estudo das matrizes

Júlio César de Jesus Onofre

Introdução

Abordaremos, neste capítulo, o estudo das matrizes – conteúdo essencial no estudo das ciências exatas –, utilizando-nos de definições, exemplos e atividades. Alguns resultados e/ou conceitos serão evidenciados por meio de exemplos e de atividades, e outros, por meio de definições. Esses métodos são justificados pela proposta deste livro e, consequentemente, deste capítulo, que é o de trazer uma abordagem clara, direta, aplicável e objetiva, desta ferramenta denominada matriz.

Objetivos

Ao final deste capítulo, esperamos que você seja capaz de:

- definir uma matriz qualquer;
- determinar a respectiva ordem de uma matriz;
- estabelecer a igualdade entre duas matrizes;
- estabelecer as operações algébricas de adição, subtração e multiplicação de matrizes;

- analisar e efetuar cálculos algébricos sobre uma, duas ou mais matrizes e analisar quando tais cálculos são possíveis de serem efetuados;
- determinar a matriz inversa de uma matriz dada e estabelecer a condição de existência da mesma.

Esquema

- Matrizes: definições e exemplos
- Relações e operações básicas
- Matrizes inversas
- Resumo
- Atividades
- Referências

1.1 Matrizes: definições e exemplos

Abordaremos alguns tópicos relacionados ao objeto matriz. Antes, gostaríamos de compartilhar com você algo interessante a respeito das matrizes e dos determinantes, tão intrigante como a famosa questão: "Quem veio primeiro, o ovo ou a galinha?"

E é exatamente esta a questão: O que veio primeiro, as matrizes ou os determinantes?

Provavelmente, se você já tiver estudado ou ouvido falar destes assuntos, responderia as matrizes, visto que o determinante é atualmente definido por meio destas. Mas isso não é bem verdade. Segundo

Domingues (IEZZI; HAZZAN, 1995), em um de seus textos titulado “Cayley e a Teoria das Matrizes”, no final do Capítulo V do livro **Fundamentos de matemática elementar** – sequências, matrizes, determinantes e sistemas – Volume 4, o conceito de determinante já era usado para resolução de sistemas de equações lineares, antes mesmo do surgimento das matrizes. Isso é sem dúvida algo não muito difícil de imaginar, já que matematicamente o conceito de determinante pode ser visto como uma função envolvendo números, mas hoje sabemos que todo estudo envolvendo tais objetos são abordados com o auxílio de matrizes.

Interessante isso, não é mesmo? Mas vamos aos nossos estudos.

Vejamos com atenção a seguinte situação-problema:

Situação-problema 1

Suponha que um empresário possua três empresas que fabricam três tipos de produto, a saber, o Produto A, o Produto B e o Produto C. A pedido deste empresário, foi feito um levantamento referente à produção semanal de suas empresas em relação à quantidade de cada um dos produtos. Para uma análise mais clara e objetiva, tal coleta de dados foi disposta em linhas e colunas, ficando assim o relatório:

	Produto A	**Produto B**	**Produto C**
Fábrica 1	1500	750	1000
Fábrica 2	0	1500	1000
Fábrica 3	700	700	700

Cada valor refere-se às unidades fabricadas por semana. A disposição destes dados, desta forma, propicia a análise rápida de vários fatos, não é mesmo? Sendo assim, faça a atividade proposta a seguir.

AGORA É A SUA VEZ

Atividade 1

Suponha que você fosse o empresário citado anteriormente. Com base nos dados fornecidos na tabela, por sua equipe de trabalho, responda às perguntas:

1.1 Qual das empresas produz mais unidades de produtos por semana?

1.2 Por semana, são produzidas quantas unidades do produto C?

1.3 Supondo que você deva reduzir custos e queira fechar uma das empresas de forma que sua produção diminuísse o mínimo possível, qual destas você fecharia?

1.4 Ainda sobre a redução de custos, se, em vez de fechar uma de suas fábricas, você optasse por parar de fabricar um de seus produtos, afetando o mínimo possível de sua produção, qual dos produtos você escolheria?

Bom, ao executar a atividade anterior com base na tabela apresentada, você deve ter percebido que, ao organizar tais informações por este meio (tabela), as respostas para tais questionamentos foram de certa forma mais fáceis de serem alcançadas, não é mesmo?

O que isso tem a ver com nossa abordagem de matrizes?

Afirmamos que tal relação está diretamente ligada ao estudo de matrizes, pois quando dispomos informações numéricas em linhas e colunas, na realidade, estamos construindo matrizes. Sendo assim, veja a seguinte definição:

IMPORTANTE!

Definição: Uma matriz $A,\ m\times n$ (lê-se *m* por *n*) é uma tabela de $m\cdot n$ números (reais ou complexos) dispostos em m filas horizontais, que chamaremos de linhas e n filas verticais que chamaremos de colunas.

Tal definição apresentada acima se refere a números, sendo estes reais ou imaginários, mas também podemos construir matrizes formadas por funções, e outros objetos matemáticos, mas nossa abordagem aqui será apenas de matrizes, cujos elementos são números reais e, em alguns casos, funções polinomiais. Vejamos alguns exemplos:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\\ 4 & -6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 7\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}x & x^2 & 1\\ -2 & 5 & -x\end{bmatrix}$$

Na definição dada, foi explicitado que uma matriz que possui m linhas e n colunas é chamada de matriz m por n. Tais números referem-se à ordem da matriz; assim, quando dizemos que uma matriz é de ordem $m\times n$, estamos dizendo que a mesma possui m linhas e n colunas. Por exemplo, no caso das matrizes *A*, *B* e *C*, dadas anteriormente temos:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\\ 4 & -6\end{bmatrix}$$ possui **3 linhas** e **2 colunas** $\rightarrow$ ordem igual **3 × 2**

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ possui **2 linhas** e **2 colunas** $\rightarrow$ ordem igual **2 × 2**

$C = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ -2 & 5 & -x \end{bmatrix}$ possui **2 linhas** e **3 colunas** $\rightarrow$ ordem igual **2 × 3**

Podemos representar uma matriz que possui m linhas e n colunas também da seguinte forma:

$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ na qual a_{ij} é o elemento que está na linha i e na coluna j da matriz, com $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

EXEMPLIFICANDO!

Suponha que quiséssemos determinar a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2 \times 3}$, em que o termo $a_{ij} = i + j$, ou seja, o termo que está na linha i e na coluna j é igual à soma dos valores da linha e da coluna que este ocupa; nestas condições a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2 \times 3}$ fica totalmente definida, veja:

- ordem da matriz procurada é 2 x 3; com isso, sabemos que ela possui 2 linhas e 3 colunas;

- em relação aos termos desta matriz, i representa o número da linha e j o número da coluna, assim i poderá assumir os valores 1 ou 2 e j os valores 1, 2 ou 3.

Usando a expressão geral dada dos termos a_{ij}, teremos:

$i=1$ e $j=1$ $\rightarrow$ $a_{11}=1+1=2$ $i=1$ e $j=2$ $\rightarrow$ $a_{12}=1+2=3$ $i=1$ e $j=3$ $\rightarrow$ $a_{13}=1+3=4$ $i=2$ e $j=1$ $\rightarrow$ $a_{21}=2+1=3$ $i=2$ e $j=2$ $\rightarrow$ $a_{22}=2+2=4$ $i=2$ e $j=3$ $\rightarrow$ $a_{23}=2+3=5$	Logo, a matriz *A* procurada será: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$

IMPORTANTE!

Algumas matrizes possuem características especiais que as diferenciam das demais; por este fato, iremos chamá-las aqui de **matrizes especiais**.

Vejamos algumas delas:

- **Matriz linha**

É toda matriz do tipo $1\times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo: $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

- **Matriz coluna**

É toda matriz do tipo $m\times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo: $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

- **Matriz nula**

É a matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz quadrada**

É toda matriz que tem o mesmo número de linhas e de colunas.

Exemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz diagonal**

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entenda aqui diagonal principal como sendo os termos a_{ij}, tais que $i = j$.

- **Matriz identidade (ou unidade)**

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz triangular**

É toda matriz quadrada em que os termos acima da diagonal principal são todos nulos (triangular inferior) ou em que os termos abaixo da diagonal principal são todos nulos (triangular superior). Ou seja, dada uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ esta é chamada de:

- triangular inferior, se $a_{ij} = 0$ para $i < j$;
- triangular superior, se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ é triangular inferior já que $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$;

$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é triangular superior já que $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

PARADA PARA REFLEXÃO

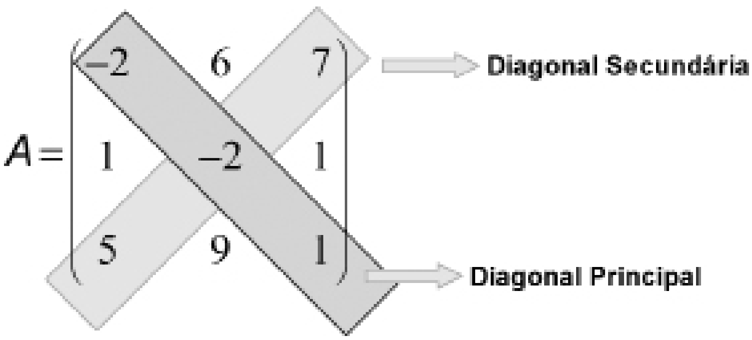
Considerando a definição de matrizes triangulares dada, você seria capaz de responder se existe alguma matriz que é simultaneamente triangular superior e triangular inferior? E a cardinalidade (número de elementos) desta classe de matrizes é finita ou infinita?

Vamos pontuar aqui, por meio de um exemplo, algumas definições que estão relacionadas com a classe de **matrizes quadradas**, que é o conceito de diagonal principal e de diagonal secundária. Vejamos:

Dada a matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, como dito anteriormente, temos que sua diagonal principal é composta dos termos a_{ij}, em que $i=j$, sendo assim, sua diagonal principal será formada pelos termos: $a_{11}=-2$, $a_{22}=-2$ e $a_{33}=1$.

Sua diagonal secundária será formada pelos termos a_{ij}, em que $i+j=\underbrace{3}_{\text{ordem da matriz }A}+1$, ou seja, $i+j=4$. Assim, sua diagonal secundária será formada pelos termos: $a_{13}=7$, $a_{22}=-2$ e $a_{31}=5$. Observe, por exemplo, que o termo $a_{32}=9$ não será um elemento da diagonal secundária, pois a soma dos índices de posição deste elemento é igual a cinco, veja: $3+2=5\neq 4$.

Assim temos a seguinte representação:



Agora, vamos praticar um pouco os conceitos abordados até o momento. Resolva as atividades a seguir.

AGORA É A SUA VEZ

Atividade 2

Para cada uma das matrizes dadas a seguir, utilizando as leis de formação, determine seus elementos e classifique-as:

a) $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 \;\; se \;\; i = j; \\ 0 \;\; se \;\; i \neq j. \end{cases}$;

b) $B = \left(b_{ij}\right)_{4\times 4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 \;\; se \;\; i + j = 4; \\ 0 \;\; se \;\; i + j \neq 4. \end{cases}$

Atividade 3

Determine a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2}$ tal que $a_{ij} = 3i + 2j$.

Atividade 4

Encontre uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$.

Após esta abordagem inicial sobre o nosso principal objeto de estudo – as matrizes –, vejamos outra situação em que podemos aplicar tais objetos.

Pensemos juntos na seguinte situação-problema:

Situação-problema 2

Suponha que duas lojas comercializam três produtos diferentes, cujos preços são fornecidos pelas matrizes linha a seguir:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Loja 1} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Produto A} & \text{Produto B} & \text{Produto C} \\ \left(600 \right. & 500 & \left. 300 \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Loja 2} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Produto A} & \text{Produto B} & \text{Produto C} \\ \left(500 \right. & 500 & \left. 400 \right) \end{array}$$

Se uma pessoa, não muito ligada às questões de melhor preço (isto é, menor preço), resolver comprar duas unidades de cada um dos produtos, sendo uma unidade adquirida na Loja 1 e a segunda unidade adquirida na Loja 2, esta pessoa pagaria 1100 reais pelas duas unidades do produto A, 1000 reais pelas duas unidades do produto B e 700 reais pelas duas unidades do produto C. Usando as próprias matrizes, obteríamos o mesmo resultado da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 600 & 500 & 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 & 500 & 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600+500 & 500+500 & 300+400 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1100 & 1000 & 700 \end{pmatrix}$$

E, assim, esta pessoa pagaria no total 2800 reais. Por outro lado, se essa pessoa analisasse, primeiramente, a melhor forma de adquirir tais produtos, poderia ter economizado até 200 reais, não é mesmo?

Mas este exemplo foi introduzido aqui para que você pudesse observar que podemos estabelecer operações algébricas entre as matrizes e consequentemente entre seus termos. Tratemos agora destas operações.

1.2 Relações e operações básicas

1.2.1 Igualdade de matrizes

Vamos analisar as matrizes a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Observe-as e escreva o que você percebe em relação às matrizes *A* e *B*.

Agora, faça o mesmo em relação às matrizes A e C.

Certamente você respondeu que as matrizes A e B são iguais, pois possuem todos os elementos nas respectivas posições iguais e o número de linhas e de colunas também iguais e que as matrizes A e C são diferentes, mesmo sendo matrizes de mesma ordem e possuindo três elementos respectivamente iguais. Não é mesmo?

SINTETIZANDO...

Temos que duas matrizes A e B são iguais, se elas tiverem a mesma ordem **e** todos os seus elementos considerando as respectivas posições também iguais, um a um. Consequentemente, A e B serão diferentes, se suas ordens forem diferentes **ou** se algum de seus elementos for diferente, considerando a posição dos mesmos. Por exemplo, as matrizes A e C, apesar de possuírem ordens iguais e os elementos $a_{11} = c_{11}$, $a_{12} = c_{12}$, $a_{21} = c_{21}$, têm $a_{22} = -4$ e $c_{22} = 10$, ou seja, $a_{22} \neq c_{22}$.

1.2.2 Adição e subtração de matrizes

Sabemos que, na matemática, como na grande maioria das ciências, quase tudo converge para o mais natural das coisas. Tanto a adição e a subtração, quanto a multiplicação, são operações dadas por definições, então, o mais natural ao somar e subtrair duas matrizes é somar e subtrair seus elementos termo a termo, não é mesmo? Já a multiplicação não será bem assim. Vejamos como são definidas a adição e a subtração de matrizes.

IMPORTANTE!

Definição: Dadas as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, chamamos de matriz soma de A por B $\left(A+B\right)$ a matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, onde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ e a matriz diferença de A por B $\left(A-B\right)$ a matriz $D=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}$, onde $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Em resumo, temos: $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$ e $A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$.

Por exemplo, considere as matrizes $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 12 & 7\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$ Logo:

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 12 & 7\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0 & 2+12 & -3+7\\ 1+5 & 3+3 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 14 & 4\\ 6 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

e

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 12 & 7\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-0 & 2-12 & -3-7\\ 1-5 & 3-3 & -4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -10 & -10\\ -4 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

$A+C=\nexists$ e $A-C=\nexists$ (não existem), já que as ordens das matrizes são diferentes.

Algo interessante que também podemos observar neste exemplo ou diretamente pela definição apresentada é que a operação de adição de matrizes é comutativa, ou seja, $A + B = B + A$.

PARADA PARA REFLEXÃO

E a subtração? A subtração é comutativa? Pense sobre isso!

AGORA É A SUA VEZ

Faça agora algumas atividades:

Atividade 5

Um fabricante de determinado produto produz três modelos A, B e C. Cada um dos modelos é produzido parcialmente em duas fábricas, uma localizada na cidade de Uberaba (E_1) e a finalização na cidade de Uberlândia (E_2). O custo de lançamento no mercado de Belo Horizonte é composto pelo custo de produção e o custo de transporte de cada produto, de acordo com as matrizes abaixo:

$$\begin{array}{cc} \text{Custo de Produção} & \text{Custo de transporte} \end{array}$$
$$E_1 = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 200 & 15 \\ 300 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Custo de Produção} & \text{Custo de transporte} \end{array}$$
$$E_2 = \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 100 & 30 \\ 150 & 40 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array}$$

Com base nestes dados, responda às perguntas abaixo:

a) Para colocar no mercado de Belo Horizonte o Modelo A, o fabricante terá um custo de quantos reais por produto?

b) Para colocar no mercado de Belo Horizonte os três modelos, o fabricante terá um custo de quantos reais por produto?

c) Como poderíamos, utilizando matrizes, esboçar os custos totais de produção e transportes de cada um dos modelos?

Atividade 6

Determine os valores de x e de y, sabendo que a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2}$ é uma matriz que satisfaz às seguintes condições:

- $a_{ij} = i + 5j$;
- $A = \begin{pmatrix} 2x & 11 \\ x+2y & 2x+3y \\ 8 & x^2+4 \end{pmatrix}$.

Atividade 7

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, efetue, quando possível, as operações a seguir:

a) $A+B$

b) $B+A$

c) $A+C$

d) $D+A$

Atividade 8

Determine a matriz X dada na equação:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sugestão: Como todas as matrizes envolvidas são de ordem 2, temos, necessariamente, que a matriz *X* será de ordem 2, logo utilize a matriz *X* como sendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e determine os possíveis valores de *a*, *b*, *c* e *d*.

Atividade 9

Observe a resolução da equação do 1º grau, a seguir:

$$-1 + 2 = x - 5 \quad \rightarrow \quad 1 = x - 5 \quad \rightarrow \quad 1 + 5 = x \quad \rightarrow \quad 6 = x \quad \rightarrow \quad x = 6$$

Lance mão dos mesmos passos ou regras utilizadas na resolução da equação do 1º grau acima e resolva a atividade 8 anterior, isolando a matriz incógnita *X* e perceba como a determinação por meio deste processo fica mais fácil.

Dando continuidade ao estudo das operações algébricas relacionadas às matrizes, veremos o produto de um número real por uma matriz.

1.2.3 Produto de um número real (escalar) por uma matriz

IMPORTANTE!

Definição: Dada a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e um escalar r, a multiplicação deste escalar pela matriz A será a matriz $rA = \left(ra_{ij}\right)_{m \times n}$, isto é, multiplicamos cada termo desta matriz pelo número r.

Por exemplo, vejamos uma situação-problema, na qual poderíamos aplicar tal operação:

Situação-problema 3

Suponha que a temperatura ambiente de três alimentos A, B e C são respectivamente 10ºC, 20ºC e 40ºC. Neste caso, poderíamos representar tais temperaturas por meio da seguinte matriz linha:

$$\begin{array}{rccc} & \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \\ \text{Temperatura } (^{\circ}\text{C}) & \big(\; 10 & 20 & 40 \; \big) \end{array}$$

Supondo que esses alimentos sejam conservados em uma câmara fria e que, a cada minuto, a tal câmara age nos alimentos que se encontram em seu interior diminuindo-lhes um décimo da temperatura, poderíamos encontrar a taxa de diminuição da temperatura por minuto de cada um dos alimentos da seguinte forma:

No primeiro minuto $(t = 1)$ temos uma redução de temperatura de:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \\ \dfrac{1}{10} \cdot & \big(\; 10 & 20 & 40 \; \big) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \\ \big(\; 1 & 2 & 4 \; \big) \end{array}$$

No segundo minuto $(t = 2)$ temos uma redução de temperatura de:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \\ \dfrac{2}{10} \cdot & \big(\; 10 & 20 & 40 \; \big) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

E de uma forma geral, em t minutos temos uma redução de temperatura de:

$$\begin{array}{ccc} \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{t}{10}\cdot 10 & \frac{t}{10}\cdot 20 & \frac{t}{10}\cdot 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Alimento A} & \text{Alimento B} & \text{Alimento C} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} t & 2t & 4t \end{pmatrix}$$

Assim, poderíamos obter a temperatura de cada um dos alimentos, no instante t qualquer. Por exemplo, após 1 minuto os alimentos teriam a seguinte temperatura: $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 36 \end{pmatrix}$, ou seja, o alimento A teria a temperatura de 9ºC, o alimento B, 18ºC, e o alimento C, 36ºC.

Vejamos outro exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$. Determine, nestas condições, a matriz $B = \frac{1}{2}\cdot A$. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, tal matriz é obtida efetuando de forma direta e natural, o produto do escalar $\frac{1}{2}$ a cada um dos termos da matriz A, vejamos:

$$B = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 10 & \frac{1}{2}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\cdot 8 & \frac{1}{2}\cdot(-12) & \frac{1}{2}\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

AGORA É A SUA VEZ

Faça agora algumas atividades!

Atividade 10

Considerando as matrizes $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0 & -12\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, determine:

a) $2A$

b) $\frac{1}{3}(B+C)$

c) $3A-(B+C)$

d) $\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}C$

Atividade 11

Determine a matriz *X* tal que $2X+3A=-5X$, sabendo que a matriz $A=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 8\end{pmatrix}$.

Agora, vamos verificar como é efetuada a multiplicação de duas matrizes, bem como as condições necessárias para efetuarmos tal operação. Antes, veremos como é efetuado o produto de uma matriz linha por uma matriz coluna, regra esta base para efetuar o produto entre duas matrizes. Vejamos!

1.2.4 Produto de duas matrizes

Dada a matriz linha $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ e a matriz coluna $B=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$, o produto da matriz *A* pela matriz *B* é efetuado da seguinte forma:

$$A.B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \left(-2.2 + 1.5 + 4.(-7)\right) = \left(-4 + 5 - 28\right) = \left(-27\right)$$

Logo, $A.B = (-27)$, matriz quadrada de ordem igual a 1.

Você deve estar se perguntando...

Mas o que foi feito no exemplo anterior?

Foi feito o seguinte: pegamos a soma dos produtos efetuados multiplicando o 1º termo de *A* com o 1º termo de *B*, o 2º termo de *A* com o 2º termo de *B* e o 3º termo de *A* com o 3º termo de *B*. Veja o mesmo processo, mas considerando a notação simbólica a_{ij} para os termos de *A* e b_{ij} para os termos de *B*. Veja:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \left(a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31}\right) = \left(c_{11}\right)$$

na qual, c_{11} é o termo da matriz $C = A.B$.

Mas, agora, uma pergunta...

E se tivéssemos o número de elementos da linha de *A* (número de colunas de *A*) ou o número de elementos da coluna de *B* (número de linhas de *B*) diferentes, seria possível efetuar este produto termo a termo?

Vejamos:

suponha que *A* tivesse 4 elementos, por exemplo, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e *B* permanecesse com 3 elementos, isto é $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. Nesse caso, teríamos: $A.B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\ .2 + 1\ .5 + 4\ .\ (-7) + 3\ .\ ? \end{pmatrix}$ e não seria possível determinar tal produto, não é mesmo? O mesmo fato ocorreria se o número de elementos da coluna de *B* fosse diferente do número de elementos da linha de *A*.

Mas o que isso significa?

Voltando ao parágrafo anterior, procuramos destacar o que significa o número de elementos da linha de *A* e o número de elementos da coluna de *B*. Escreva aqui o que estes representam, para cada uma destas matrizes:

- Número de elementos da linha de *A* é igual a_________________ .
- Número de elementos da coluna de *B* é igual a _______________ .

EXPLICANDO MELHOR

Sendo assim, **somente é possível multiplicar uma matriz linha *A* por uma matriz coluna *B*, se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas da matriz *B***.

E esta é exatamente a condição necessária e suficiente para que se possa efetuar este tipo de multiplicação.

Agora, ainda considerando o exemplo anterior, se, em vez da matriz coluna *B*, de ordem 3 x 1, tivéssemos uma matriz *B* de ordem 3 x 2, ou seja, se tivéssemos uma matriz de 3 linhas e 2 colunas, poderíamos aplicar o processo acima duas vezes, veja:

Considerando $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$, teríamos:

$$A.B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{-2.2 + 1.5 + 4.(-7)}_{Matriz\ A\ pela\ 1^a coluna\ de\ B} & \underbrace{-2.3 + 1.5 + 4.6}_{Matriz\ A\ pela\ 2^a coluna\ de\ B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 23 \end{pmatrix}$$

Observe que a ordem dessa matriz produto foi 1 x 2; isso ocorreu porque, ao multiplicar a linha <u>1</u> da matriz *A* pela coluna <u>1</u> da matriz *B* determinamos o elemento $c_{\underline{1}\,\underline{1}}$ da matriz *AB* e, ao multiplicar a linha <u>1</u> da matriz *A* pela coluna <u>2</u> da matriz *B,* determinamos o elemento $c_{\underline{1}\,\underline{2}}$ da matriz *A B*.

Depois desta abordagem, vamos juntos calcular o produto da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ pela matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1º Passo:

Verificação da condição necessária para existência do produto *AB* e determinação da ordem da matriz *AB*:

- Número de **colunas** de *A* = ______________________________ .

- Número de **linhas** de *A* = ______________________________ .

- Número de **colunas** de B = ______________________________ .

- Número de **linhas** de B = ______________________________ .

Conclusão: já que o número de **colunas de *A*** é igual ao número de **linhas de *B*,** é possível determinar a matriz produto AB e a ordem desta matriz é 2 x 2.

2º Passo:

Determinação dos elementos da matriz *AB*.

c_{11}: Soma dos produtos dos números da **1ª linha de *A*** com os números da **1ª coluna de *B***, logo c_{11} = ______________________________ .

c_{12}: Soma dos produtos dos números da **1ª linha de *A*** com os números da **2ª coluna de *B***, logo c_{12} = ______________________________ .

c_{21}: Soma dos produtos dos números da **2ª linha de *A*** com os números da **1ª coluna de *B***, logo c_{21} = ______________________________ .

c_{22}: Soma dos produtos dos números da **2ª linha de *A*** com os números da **2ª coluna de *B***, logo c_{22} = ______________________________ .

Como todas as linhas de *A* foram multiplicadas por todas as colunas de *B,* o processo chega ao fim.

3º Passo:

Determinação da matriz *AB*

Como $A.B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, temos $A.B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$.

Este é o processo que utilizamos para calcular o produto de duas matrizes, independentemente de qual sejam as ordens envolvidas, desde que tais ordens satisfaçam à condição de que o número de colunas da primeira matriz a ser multiplicada seja igual ao número de linhas da segunda matriz a ser multiplicada.

Resumindo, temos o seguinte esquema:

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = (A.B)_{m\times q}$$

$$n = p$$

Antes de partimos para as atividades, vejamos uma situação-problema referente à multiplicação entre matrizes.

Situação-problema 4

Os inseticidas são aplicados às plantas a fim de eliminar os insetos prejudiciais. Sabe-se que uma parte destes pesticidas é absorvida pelas plantas e esta quantidade é absorvida pelos animais herbívoros que se alimentam destas plantas que receberam os inseticida. Suponha que temos três tipos de produtos e quatro tipos de plantas. Representemos por a_{ij} a quantidade (em miligramas) de inseticida i que foi absorvida pela planta j e os dados são representados pela seguinte matriz: (Adaptado do livro: **Introdução à álgebra linear com aplicações** – 8. ed. – Bernard Kolman e David R. Hill).

$$A = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Inseticida 1} \\ \text{Inseticida 2} \\ \text{Inseticida 3} \end{array}$$

(colunas: Planta 1, Planta 2, Planta 3, Planta 4)

Suponha agora que existam três classes de animais herbívoros, e que b_{ij} representa o número de plantas do tipo i que um animal do tipo j come por mês, tal informação é apresentada pela tabela seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \text{Herbívoro 1} & \text{Herbívoro 2} & \text{Herbívoro 3} \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \\ \text{Planta 3} \\ \text{Planta 4} \end{array}$$

Nestas condições, o elemento $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + a_{i4} \cdot b_{4j}$, fornece-nos a quantidade de inseticida i absorvida pelo animal j, ou seja, o elemento c_{ij} da matriz $AB = (c_{ij})_{3\times3}$ nos fornece exatamente os valores absorvidos de cada um dos inseticidas por cada um dos animais. Por exemplo, a quantidade de inseticida 3, absorvida pelo herbívoro 1, foi:

$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} + a_{34} \cdot b_{41} = 4 \cdot 20 + 1 \cdot 28 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 40 = 448\,mg.$$

De modo geral, teríamos a seguinte matriz:

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 2 \cdot 20 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 & 2 \cdot 12 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 16 & 2 \cdot 8 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 20 \\ 3 \cdot 20 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 30 + 5 \cdot 40 & 3 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 12 + 5 \cdot 16 & 3 \cdot 8 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 20 \\ 4 \cdot 20 + 1 \cdot 28 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 40 & 4 \cdot 12 + 1 \cdot 15 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 16 & 4 \cdot 8 + 1 \cdot 15 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 20 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 364 & 165 & 161 \\ 376 & 170 & 174 \\ 448 & 199 & 187 \end{bmatrix}$$

AGORA É A SUA VEZ

Agora é sua hora de praticar um pouco as multiplicações envolvendo matrizes. Assim, faça as seguintes atividades.

Atividade 12

Calcule produto *AB*, quando este existir, considerando as matrizes *A* e *B* dadas a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Atividade 13

Considere as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times3}$ definida por $a_{ij} = i - j$, $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times4}$ definida por $b_{ij} = i$ e $C = \left(c_{ij}\right)_{4\times4}$, onde $C = AB$. Nestas condições, determine:

a) c_{11} b) c_{23}

Atividade 14

Determine os valores de x, y e z, para que tenhamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 & 0 \\ x-y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & y-z \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainda sobre multiplicações entre matrizes, gostaríamos de fazer aqui uma observação.

Você deve perceber que o produto entre matrizes nem sempre é comutativo, isto é, nem sempre, dadas duas matrizes A e B, os produtos AB e BA serão iguais. Para você perceber isto, basta escolher, por exemplo, uma matriz A de ordem 2×3 e uma matriz B de ordem 3×1, que nos darão uma matriz produto AB de ordem 2×1, cuja matriz produto BA nem estará definida, ou seja, $AB \neq BA$.

Veremos agora uma classe muito importante e especial de matrizes: as matrizes inversas.

1.3 Matrizes inversas

Dos estudos do conjunto dos números reais, sabemos que o número $\frac{1}{2}$ é o inverso de 2, fato este justificado, pois, $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, em que 1 é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, 1 é o número cuja multiplicação por qualquer número real dará este mesmo número real, e vice-versa. Sendo assim, como ficaria esta ideia aplicada à teoria das matrizes?

Primeiramente, precisamos encontrar o elemento neutro da multiplicação entre matrizes. Façamos isso da seguinte forma:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $AB = A$ e $BA = A$, ou seja, a matriz **elemento neutro** da multiplicação. Façamos os cálculos:

$$AB = A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Assim, pela igualdade de matrizes, temos que:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=2 \\ 3a+4c=3 \\ 3b+4d=4 \end{cases}$$

Deste sistema de quatro equações e quatro variáveis, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+4c=3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b+2d=2 \\ 3b+4d=4 \end{cases}$$

Resolvendo estes sistemas, encontramos *a* = 1, *b* = 0, *c* = 0 e *d* = 1, ou seja, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se efetuarmos o produto desta matriz *B* pela matriz *A*, também verificaremos que *BA* = *A*, ou seja, a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes que procurávamos. Como este tipo de matriz já apareceu no início deste capítulo, sabemos que neste caso dado esta matriz *B* encontrada recebe o nome de matriz identidade, ou unidade de ordem 2.

Isto será verdade, independentemente da ordem da matriz quadrada, ou seja, as **matrizes identidades (ou unidades) são elementos neutros da multiplicação de matrizes**, considerando respectivamente a ordem das mesmas, ou seja:

- para as matrizes quadradas de ordem 1, $I_1 = (1)$ é o elemento neutro para esta classe de matrizes;

- para as matrizes quadradas de ordem 2, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro para esta classe de matrizes;
- para as matrizes quadradas de ordem 3, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro para esta classe de matrizes;
- e de uma forma geral, para as matrizes quadradas de ordem n, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro para esta classe de matrizes, ou seja, o elemento neutro da multiplicação será a matriz quadrada de ordem n, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os restantes todos nulos (iguais a 0).

Como ficaria a questão do elemento inverso de uma matriz?

Neste caso, o elemento inverso da matriz A, chamado de matriz inversa de A, será a matriz denotada por A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$ e $A^{-1}.A = I$, na qual I representa a matriz identidade de mesma ordem que A.

Por se tratar de uma abordagem introdutória, esta se baseará apenas numa determinação da matriz inversa, utilizando cálculos algébricos relacionados à propriedade que esta matriz possuir e que foi colocado anteriormente. Não utilizaremos, neste capítulo, métodos mais específicos para determinação da matriz inversa, como é o caso do método de **Gauss-Jordan** ou a determinação por uma fórmula matricial.

SAIBA MAIS

Karl Friedrich Gauss nasceu em Braunschweig (Alemanha), no ano de 1777. Faleceu em Göttingen (Alemanha), no ano de 1855. Foi matemático, astrônomo e físico.

Uma de suas famosas façanhas refere-se à seguinte história: o diretor de sua escola, Butner, pediu que os alunos somassem os números inteiros de um a cem. Mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss o solucionou, dando como resposta 5050. Sabemos hoje que tal raciocínio está diretamente ligado à fórmula da soma de uma progressão aritmética.

Camille Marie Ennemond Jordan nasceu em Lyon (França) no ano 1838. Faleceu em Paris (França) no ano de 1922. Foi matemático. É conhecido pelos seus trabalhos em teoria dos grupos e análise.

Fonte: Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Gauss.html>. Acesso em: 4 jun. 2010.

Pensando puramente na propriedade que a matriz inversa possui, que são as identidades $A.A^{-1} = I$ e $A^{-1}.A = I$, vejamos como podemos determinar uma matriz inversa. Vamos lá.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$ duas matrizes. Se *B* é a matriz inversa de *A*, calcule o valor de *x*+*y*.

Temos então que $B = A^{-1}$. Observe então que este exercício aborda matriz inversa e também igualdade de matriz.

Precisamos primeiramente determinar a matriz inversa de *A. S*endo assim, considere $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A.A^{-1} = I_2$ e $A^{-1}.A = I_2$. Escolhendo uma das equações, por exemplo, a primeira, temos:

$$A.A^{-1}=I_2 \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1.a+2.c & 1.b+2.d\\1.a+4.c & 1.b+4.d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\a+4c & b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}a+2c=1\\a+4c=0\\b+2d=0\\b+4d=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a+2c=1\\a+4c=0\end{cases} \; e \; \begin{cases}b+2d=0\\b+4d=1\end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, determinamos que a = 2, b = –1, $c=-\dfrac{1}{2}$ e $d=\dfrac{1}{2}$. Agora, teríamos que verificar se a matriz assim obtida satisfaz também à equação $A^{-1}.A=I_2$. Ao efetuar o produto, teremos:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

O que nos leva a concluir que a matriz inversa de A será a matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$. Como temos pelo enunciado do exercício que $B=A^{-1}$, segue a igualdade de matrizes $\begin{pmatrix}2 & -1\\x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$, logo $x=-\dfrac{1}{2}$ e $y=\dfrac{1}{2}$. Portanto $x+y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$.

AGORA É A SUA VEZ

Agora é hora de praticar! Portanto, utilizando as definições e ideias abordadas nos exemplos anteriores, resolva as atividades propostas a seguir.

Atividade 15

Para cada uma das matrizes quadradas abaixo, efetue o produto destas pelas suas respectivas matrizes identidades, comprovando a propriedade de elemento neutro destas:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -5\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ \sqrt{7} & -6 & 10\\ 1/2 & -4 & 0\end{bmatrix}$

Atividade 16

Calcule, quando existir, a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas abaixo:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Importante: No conjunto das matrizes, como no conjunto dos números reais, nem sempre uma matriz quadrada possuirá uma matriz inversa. Você observará isso, ao procurar a matriz C^{-1}, nessa atividade.

Atividade 17

Sabendo que a inversa da matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ é a matriz $B=\begin{pmatrix}3 & x+y\\ 2x-y & 3\end{pmatrix}$, faça o que se pede:

a) Determine a matriz A^{-1};

b) Calcule o valor de x^y.

Resumo

Vimos neste capítulo que:

- Quando afirmado que uma matriz tem m linhas e n colunas, implicitamente dizemos que a matriz possui uma ordem $m \times n$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$ possui **3 linhas** e **2 colunas** $\rightarrow$ ordem igual **3 × 2**

- Quando afirmado que duas matrizes são iguais as mesmas são de mesma ordem e seus elementos identicamente os mesmos.

Exemplo: Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, temos que $A = B$

.

- As operações de adição, de subtração e de multiplicação são efetuadas conforme os exemplos abaixo:

Exemplos:

- Adição e subtração

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+12 & -3+7 \\ 1+5 & 3+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 & 4 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 & 2-12 & -3-7 \\ 1-5 & 3-3 & -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

- Multiplicação

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 20 + 3\cdot 28 + 4\cdot 30 + 3\cdot 40 & 2\cdot 12 + 3\cdot 15 + 4\cdot 12 + 3\cdot 16 & 2\cdot 8 + 3\cdot 15 + 4\cdot 10 + 3\cdot 20 \\ 3\cdot 20 + 2\cdot 28 + 2\cdot 30 + 5\cdot 40 & 3\cdot 12 + 2\cdot 15 + 2\cdot 12 + 5\cdot 16 & 3\cdot 8 + 2\cdot 15 + 2\cdot 10 + 5\cdot 20 \\ 4\cdot 20 + 1\cdot 28 + 6\cdot 30 + 4\cdot 40 & 4\cdot 12 + 1\cdot 15 + 6\cdot 12 + 4\cdot 16 & 4\cdot 8 + 1\cdot 15 + 6\cdot 10 + 4\cdot 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 364 & 165 & 161 \\ 376 & 170 & 174 \\ 448 & 199 & 187 \end{bmatrix}$$

Esta operação, possível de ser efetuada apenas quando o número de colunas da 1ª matriz (no nosso caso, igual a 4) for igual ao número de linhas da 2ª matriz (no nosso caso, também igual a 4). Além disso, a matriz resultante terá como número de linhas o número de linhas da 1ª matriz e o número de colunas, o número de colunas da 2ª matriz, conforme o seguinte esquema:

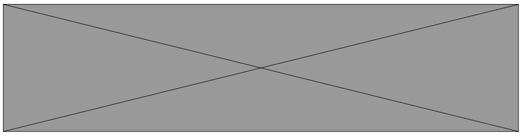
$$\underbrace{A_{m \times n} \cdot B_{p \times q}}_{n = p} = (AB)_{m \times q}$$

- A matriz inversa de uma matriz A é definida como sendo a única matriz (denotada por A^{-1}) que possui as seguintes propriedades multiplicativas:

$A \cdot A^{-1} = I$ e $A^{-1} \cdot A = I$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De fato, $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

E, 

Atividades

Atividade 1

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, D = \left(a_{ij}\right)_{2\times2} \text{ onde } a_{ij} = i^2 - j,$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; F = \left(a_{ij}\right)_{3\times3} \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} i & se \;\; i = j; \\ i \cdot j & se \;\; i \neq j \end{cases} \text{ e } G = \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ 1 & -y \end{pmatrix},$$

faça o que se pede:

a) indique a ordem de cada uma das matrizes;

b) calcule, quando possível, as operações a seguir:

i) $2C + D$ ii) AB iii) BA

iv) $E - F$ v) $F^2 = F.F$

c) determine os valores de *x* e de *y*, para que tenhamos $G = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Atividade 2

Determine a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times3}$, tal que $a_{ij} = 2i + 3j$.

Atividade 3

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A + B + C$; b) $A - B - C$;

c) $2A-\frac{1}{2}B$; d) $2(B-A)-3(C-B)$.

Atividade 4

Calcule os produtos abaixo:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Atividade 5

Determine a matriz inversa das matrizes abaixo:

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Atividade 6

Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine o valor de *a*.

Atividade 7

Dois amigos estão planejando fazer uma compra de frutas. Cada um deles comprará maçãs, tangerinas e laranjas, porém em quantidades diferentes. Na Tabela 1 consta a quantidade de frutas que cada um pretende comprar e na Tabela 2 consta o valor em reais por unidade, de cada uma das frutas existentes nas únicas duas bancas de frutas da feira.

Tabela 1	Maçãs	Tangerinas	Laranjas
Amigo 1	6	3	10
Amigo 2	4	8	5

Tabela 2	Banca 1	Banca 2
Maçã	0,30	0,50
Tangerina	0,15	0,10
Laranja	0,10	0,05

Nestas condições, responda às perguntas abaixo:

a) Qual será o valor que cada um vai pagar respectivamente a cada uma das bancas?

b) O que representa a matriz Produto dos dados numéricos da Tabela 1 pelos da Tabela 2?

Atividade 8

Um casal está planejando fazer compras para o Natal. Cada um deles comprará presentes para seus dois filhos e um para seu cônjuge, a saber, carrinhos, bonecas e perfumes, respectivamente, porém em quantidades diferentes. A Tabela 1 indica a quantidade de cada presente que cada um pretende comprar e a Tabela 2 indica o valor em reais por unidade de cada um dos presentes em lojas diferentes.

Tabela 1	Carrinho	Boneca	Perfume
Pai	3	2	2
Mãe	2	3	1

Tabela 2	Loja 1	Loja 2
Carrinho	5,00	7,50
Boneca	30,00	22,50
Perfume	50,00	60,00

Nestas condições, responda às perguntas abaixo:

a) Qual será o valor que cada um irá pagar respectivamente em cada uma das lojas?

b) O que representa a matriz Produto dos dados numéricos da Tabela 1 pelos da Tabela 2?

Referências

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Sistemas lineares. In:_____. **Fundamentos de matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995. Cap. 6, v. 4.

____; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. Sistemas lineares. In:_____. **Matemática**: volume único. São Paulo: Atual, 2002. Cap. 21.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. Equações lineares e sistemas. In:_____. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Cap. 1.

POOLE, David. Sistemas de equações lineares. In:____. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. Cap. 2.

Capítulo 2

Estudo dos determinantes

Júlio César de Jesus Onofre

Introdução

Neste capítulo, trataremos o assunto determinantes. Como dito no capítulo anterior, eles já eram conhecidos antes mesmos das matrizes, mas optamos pela cronologia que acreditamos ser a mais didática, simples e correta. Prosseguiremos nosso embasamento seguindo a disposição de trilhar por esta interessante área da matemática por meios mais simples, utilizando, para isto, exemplos, atividades, métodos e definições, não necessariamente nesta ordem.

Objetivos

Ao final deste capítulo, esperamos que você seja capaz de:

- calcular o determinante de matrizes de ordem menores ou iguais a três;
- analisar intuitivamente a utilização do Teorema de Laplace, no caso de matrizes quadradas de ordem 3;
- compreender o Teorema de Laplace;
- aplicar o Teorema de Laplace como ferramenta para o cálculo do determinante de matrizes de ordens maiores que 3;

- utilizar o Teorema de Laplace para compreender propriedades relacionadas aos determinantes;
- compreender questões de existência ou não de matrizes inversas, relacionando-as ao seu determinante.

Esquema

- Determinantes: definições e exemplos
- Propriedades de um determinante
- Resumo
- Atividades
- Referências

2.1 Determinantes: definições e exemplos

Certamente você já sabe que os determinantes foram usados antes mesmo das matrizes, e também que uma de suas utilizações é na resolução de sistemas de equações lineares, correto?

O que seria o determinante?

O determinante é definido na matemática como uma função que associa matrizes quadradas a números. Essa forma de associação utiliza conceitos matemáticos que um estudante do ensino médio ou até mesmo um estudante que está começando seus estudos na graduação ainda não possui.

Mais precisamente, tais conceitos estão relacionados a uma área específica da matemática denominada Teoria dos Números. Sendo assim, abordaremos este assunto de forma direta e objetiva, isto é, por meio de regras de obtenção, sem nos preocupar, *a priori*, com a abrangência de sua definição.

Para facilitar sua aprendizagem, apresentaremos alguns métodos e exemplos de como aplicar os determinantes nas matrizes.

IMPORTANTE!

- O cálculo do determinante só poderá ser efetuado quando a matriz envolvida for quadrada, isto é, quando o número de linhas da matriz for igual ao número de colunas. Esta observação é justificada pelo fato de que o domínio de uma função determinante necessariamente deve ser um subconjunto do conjunto das matrizes quadradas.

- A notação normalmente utilizada ao calcularmos ou citarmos o determinante de uma matriz A, tanto aqui em nosso estudo, como na maioria das bibliografias que aparecem tais conteúdos é: $\det A$ ou $|A|$.

Vejamos então como calcular o determinante de uma matriz. Começaremos por uma matriz quadrada de ordem 1, chegando até as matrizes de ordens quaisquer:

- **Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 1**

Método ou regra: Considere a matriz $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ assim temos que $\det A = |A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Exemplo: seja $A = [-3]_{1\times1}$, temos que $\det A = |A| = |-3| = -3$.

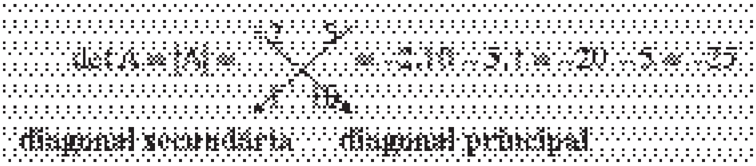
IMPORTANTE!

Embora em uma das notações de determinante utilizemos o módulo dos elementos da matriz A, não podemos confundi-lo com o valor absoluto, pois caso contrário este exemplo não faria sentido, já que o módulo de um número é sempre positivo. Portanto, muita atenção com tais interpretações.

- **Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 2**

Método ou regra: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ Assim, temos que o determinante de A é o número $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ obtido da diferença do produto dos termos da diagonal principal pelos termos da diagonal secundária.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}_{2\times2}$, temos que:



- **Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3**

Método ou regra: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

Assim, temos que o determinante de A é o número

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

que pode ser obtido através do seguinte método denominado **Regra de Sarrus**:

SAIBA MAIS

Pierre Frédéric Sarrus nasceu em Saint-Affrique (França) no ano de 1798 e faleceu no ano de 1861. Foi responsável pela pela famosa regra prática para obtenção de determinantes de ordem 3, a qual recebe seu nome.

Vejamos como é aplicado este método:

Considere a matriz quadrada de ordem 3, na forma geral,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

1º Passo

Escrevem-se os termos da matriz A:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

2º Passo

Escrevem-se ao lado direito (ou abaixo) dos termos as duas primeiras colunas (ou as duas primeiras linhas) da matriz A:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

3º Passo

Começando da diagonal principal, efetua-se o produto dos três termos e adiciona-se o produto das outras duas filas paralelas à diagonal principal, que também são formadas por três termos atribuindo o sinal de $(+)$ nestes, ou seja, conservando os valores dos três produtos obtidos:

$$\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & & & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ & & & + & + & + & \end{array}$$

Desse modo, temos: $+a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, $+a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$, $+a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$.

4º Passo

De forma análoga ao 3º passo, considera-se o produto dos termos da diagonal secundária e das duas filas paralelas a esta, também formadas de três termos, atribuindo o sinal de $(-)$ nestes produtos, ou seja, "mudando o sinal" dos mesmos:

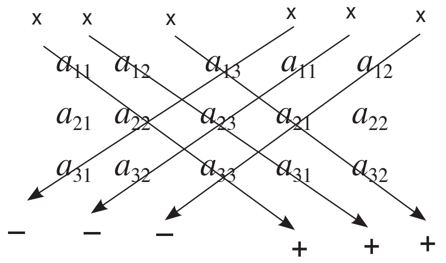
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \times & \times & \times \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ - & - & - & & & & \end{array}$$

Consequentemente, temos nesta etapa:

$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$, $-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$, $+a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

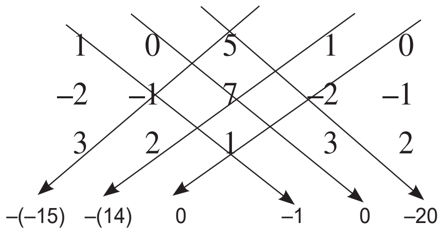
5º Passo

O determinante da matriz será a adição de todos os termos obtidos nos passos 3 e 4, isto é:



$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Exemplo: seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, temos que:



Assim,

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 14 + 0 - 1 - 0 - 20 = 15 - 14 - 1 - 20 = -20 .$$

Antes de prosseguirmos com o exemplo de como deveremos calcular o determinante de matrizes de ordem superior a 3, e com o intuito de fortalecer um pouco mais seus conhecimentos no cálculo de determinantes de matrizes de ordem menores ou iguais a 3, sugerimos as seguintes atividades.

AGORA É A SUA VEZ

Atividade 1

Resolva os determinantes a seguir:

a) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Atividade 2

Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 4x & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Antes de exemplificarmos como procedemos no cálculo do determinante de matrizes de ordem superior a 3, vejamos algo muito interessante que envolve os determinantes, considerando ainda uma matriz de ordem 3. Vejamos:

Pela definição dada anteriormente, sabemos que:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

e que o termo a_{ij} representa o elemento que está na *i*-ésima linha e na *j*-ésima coluna da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Se colocarmos, por exemplo, os termos da 1ª linha desta matriz em evidência, na expressão do $\det A$, obteríamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}=\\
&= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}=\\
&= a_{11}\left(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{33}\right)+a_{13}\left(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}\right)=\\
&= a_{11}\left(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\right)+a_{12}\cdot(-1)\cdot\left(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}\right)=\\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Observe, nesta construção, que:

- os elementos do determinante $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ são obtidos dos elementos da matriz A, eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna. Veja:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$, eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna, temos:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

- os elementos do determinante $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$ são obtidos dos elementos da matriz A, eliminando a 1ª linha e a 2ª coluna. Veja:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$, eliminando a 1ª linha e a 2ª coluna, temos:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

- os elementos do determinante $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$ é obtido dos elementos da matriz A, eliminando a 1ª linha e a 3ª coluna. Veja:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, eliminando a 1ª linha e a 3ª coluna, temos:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Façamos juntos o cálculo de um determinante usando a construção anterior:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, utilizando a **regra de Sarrus**, vista no capítulo anterior:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} ,$$

temos que: $\det A = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 0$.

Agora, se colocássemos os elementos da 1ª linha em evidência, teríamos:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) + 2 \cdot (6 \cdot 7 - 4 \cdot 9) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) + 2 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = \\ &= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{-3} + 2 \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{-6} + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{-3} = -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

O que nos daria o mesmo resultado, não é mesmo? Mas poderíamos questionar: o que está implícito nesta construção? Será que, se em vez de escolhermos os elementos da 1ª linha, tivéssemos escolhido os elementos da 2ª ou da 3ª linha, ou até mesmo da coluna, o resultado seria o mesmo? São perguntas coerentes neste momento, não é mesmo?

O fato que envolve as respostas para essas questões é exatamente o **Teorema de Laplace**. Antes de enunciarmos tal teorema, é preciso definir alguns objetos que aparecem de forma natural na construção anterior, por exemplo.

SAIBA MAIS

Pierre Simon, Marquês de Laplace nasceu em Beaumont-en-Auge (França) no ano de 1749. Faleceu em Paris (França) no ano de 1827. Foi matemático, astrônomo e físico. Um dos seus maiores feitos baseia-se na organização da astronomia matemática, sumarizando e ampliando o trabalho de seus predecessores nos cinco volumes do seu *Mécanique céleste* (*Mecânica celeste*). Tal obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física.

Fonte: Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Laplace.html>. Acesso em: 4 jun. 2010.

Você deve ter percebido, no exemplo anterior, que apareceram três determinantes de ordem 2, obtidos da matriz inicial A, eliminando, neste caso propriamente dito, a linha 1, e as colunas 1, 2 e 3 respectivamente. Cada um desses determinantes é chamado de **menor complementar do elemento** a_{ij}, que denotaremos aqui por D_{ij}, isto é, D_{ij} é o determinante da matriz resultante de A eliminando a linha *i* e a coluna *j*.

Assim, tal definição aplicada à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior nos daria:

$a_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ O menor completar de $a_{11} = 1$ será o determinante

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$a_{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad$ O menor completar de $a_{12} = 2$ será o determinante

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

$a_{13} = 3 \quad \Rightarrow \quad$ O menor completar de $a_{13} = 3$ será o determinante

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

De forma análoga, poderíamos determinar o menor complementar para os outros seis termos da matriz A, embora, no caso do cálculo do determinante, necessitamos apenas dos menores complementares dos termos de uma das filas de A, ou seja, dos menores complementares dos termos de uma das suas linhas ou de suas colunas.

Ainda observando o exemplo anterior, perceba que aparece de forma natural o sinal de menos $(-)$, juntamente com o menor complementar do elemento a_{12}. Na realidade, o que ocorre em cada um dos menores complementares encontrados é o aparecimento natural do termo $(-1)^{i+j}$ juntamente com estes, ou seja, para cada a_{ij}, aparece $(-1)^{i+j} D_{ij}$, e este termo que denotaremos aqui por A_{ij} (no caso da matriz A) é chamado de **cofator** ou **complementar algébrico do termo** a_{ij}, ou seja, para o exemplo anterior temos:

Para $a_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ O cofator de $a_{11} = 1$ será $(-1)^{1+1} D_{11} = D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$

Para $a_{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad$ O cofator de $a_{12} = 2$ será $(-1)^{1+2} D_{12} = -D_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.$

Para $a_{13} = 3 \quad \Rightarrow \quad$ O cofator de $a_{13} = 3$ será $(-1)^{1+3} D_{13} = D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$

Em resumo, dada uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, temos as seguintes definições:

- **Menor complementar** de a_{ij} é o determinante da matriz que obtemos eliminando a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna de A. Notação: D_{ij}.

- **Complemento algébrico** ou **cofator** do elemento a_{ij} será igual ao número $(-1)^{i+j} D_{ij}$, em que D_{ij} é o menor completar de a_{ij}. Notação: A_{ij}.

De posse de tais definições e construções, poderíamos ter escrito, no caso do determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, seu determinante a partir da 1ª linha como sendo: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Ao fazermos a construção inicial de colocar os termos da 1ª linha em evidência, poderíamos ter colocado os termos da 2ª ou da 3ª linha em evidência, como poderíamos ter usado inclusive os elementos de algumas de suas três colunas. Tal fato nos sugere o seguinte teorema, conhecido como **Teorema de Laplace** ou **Desenvolvimento do determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna**:

IMPORTANTE!

Teorema de Laplace – O determinante de uma matriz M de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Nossa intenção não é nos aprofundar nas demonstrações que permeiam as construções e resultados aqui apresentados, mas aplicá-los, bem como manipulá-los de forma correta e prática. Pensando por este ângulo, será omitida aqui a demonstração deste teorema no caso geral, lembrando que para $n = 3$, tal demonstração foi abordada anteriormente. Um exercício bem simples e interessante é pensar no caso $n = 2$.

Vejamos, na prática, como aplicamos o Teorema de Laplace!

- **Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 4**

Calculemos juntos o determinante da matriz abaixo, segundo os elementos de sua terceira coluna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Façamos tal construção em etapas.

1ª Etapa

Identificar os elementos da 3ª coluna:

$a_{13} = 0 \quad ; \quad a_{23} = 2 \quad ; \quad a_{33} = 6 \quad ; \quad a_{43} = 0$

Nesta etapa, escolhemos os termos da 3ª coluna, pois, no enunciado do problema, foi pedido para desenvolvermos tal determinante por esta coluna, mas na prática, caso o problema não exija uma fila (coluna ou linha) específica, a melhor escolha compreende aquela em que se concentram o maior número de zeros, já que estes serão posteriormente multiplicados pelos seus respectivos cofatores.

2ª Etapa

Determinação dos cofatores de cada elemento escolhido na etapa 1.

$$\text{Para } a_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{O cofator de } a_{13} = 0, \text{ será } (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Para } a_{23} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{O cofator de } a_{23} = 2, \text{ será } (-1)^{2+3} D_{23} = -D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Para } a_{33} = 6 \quad \Rightarrow \quad \text{O cofator de } a_{33} = 6, \text{ será } (-1)^{3+3} D_{33} = D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Para } a_{43} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{O cofator de } a_{43} = 0, \text{ será } (-1)^{4+3} D_{43} = -D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Como precisamos calcular os três determinantes acima, é conveniente usar o método mais simples para tais cálculos. Como tais matrizes são de ordem 3, sugiro a regra de Sarrus. Omitiremos aqui tais cálculos. Caso não se lembre, reveja como procedemos anteriormente no cálculo dos mesmos, utilizando a regra citada.

3ª Etapa

Cálculo dos cofatores determinados na etapa 2.

O cofator de $a_{13} = 0$, será $A_{13} = (-1)^{1+3}\, D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18.$

O cofator de $a_{23} = 2$, será $A_{23} = (-1)^{2+3}\, D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -18.$

O cofator de $a_{33} = 6$, será $A_{33} = (-1)^{3+3}\, D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6.$

O cofator de $a_{43} = 0$, será $A_{43} = (-1)^{4+3}\, D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -18.$

4ª Etapa

Cálculo do determinante pelo Teorema de Laplace.

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = \\ &= 0 \cdot 18 + 2 \cdot (-18) + 6 \cdot (-6) + 0 \cdot (-18) = -36 - 36 = -72. \end{aligned}$$

AGORA É A SUA VEZ

Agora, pratique um pouco. Faça as atividades propostas a seguir:

Atividade 3

Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, faça o que se pede:

a) calcule os cofatores dos termos da 4ª coluna da matriz A;

b) utilizando os resultados obtidos na letra (a), juntamente com o Teorema de Laplace, calcule o $\det A$.

Atividade 4

Calcule o determinante das matrizes a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Atividade 5

Calcule os valores de a para que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1$.

Retornando ao estudo dos determinantes, podemos, por meio do *Teorema de Laplace,* verificar algumas propriedades envolvendo os determinantes. Pontuaremos algumas. Para facilitar a compreensão, veremos primeiramente um exemplo e, após o exemplo, o enunciado da propriedade.

2.2 Propriedades de um determinante

Veja com muita atenção o exemplo proposto a seguir:

Exemplo:

Relação do determinante de uma matriz e do determinante de sua transposta

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dada anteriormente. Obtemos, dos cálculos anteriores, que $\det A = -72$.

Considere, agora, a matriz transposta de A, isto é, a matriz $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Desenvolvendo seu determinante pela 4ª coluna, temos:

$$\det A^t = -1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 24 + 4\cdot(-24) = -72$$

Comparando os dois resultados, vemos que os determinantes são iguais. E, assim, tal construção sugere a seguinte propriedade:

Propriedade 1

Dada uma matriz quadrada A temos que $\det A = \det A^t$.

Dando sequência às propriedades, vejamos uma outra situação envolvendo matrizes especiais juntamente com seu determinante.

Exemplo:

Determinante de uma matriz que possui uma linha e/ou coluna nula

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Temos, claramente, que sua 4ª linha é nula. Podemos desenvolver seu determinante, considerando esta linha.

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Tal fato nos sugere a seguinte propriedade:

Propriedade 2

Considere uma matriz quadrada A, que possui ou uma linha nula, ou uma coluna nula. Nestas condições, $\det A = 0$.

Vejamos mais um exemplo envolvendo propriedades relacionadas aos determinantes.

Exemplo:

Multiplicação de uma linha ou coluna por uma constante k

Neste caso, gostaríamos de saber como o processo algébrico de multiplicar uma linha ou uma coluna por uma constante reflete sobre o seu determinante. Assim, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Se multiplicarmos a sua 4ª linha pela constante $k = 10$, qual será o determinante desta matriz resultante?

Sabemos, de cálculos anteriores, que $\det A = -72$.

Considere agora a matriz $\tilde{A}$, sendo a matriz A, cuja 4ª linha foi multiplicada por 10, ou seja, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 10\cdot(-1) & 10\cdot 0 & 10\cdot 0 & 10\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, desenvolvendo seu determinante, pela 4ª linha, por exemplo, temos:

$$\det \tilde{A} = (-10)\cdot(-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 40\cdot(-1)^{4+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 10\cdot 24 + 0 + 0 + 40\cdot(-24) = -720$$

Que é exatamente o valor do $\det A$ multiplicado pela constante $k = 10$, ou seja, $\det \tilde{A} = 10 \cdot \det A$. Assim, tal construção nos sugere a seguinte propriedade:

Propriedade 3

Dadas as matrizes quadradas A e $\tilde{A}$, tais que, $\tilde{A}$ é a matriz A, com uma, e somente uma, de suas linhas ou de suas colunas previamente multiplicada por uma constante k. Assim, temos que $\det \tilde{A} = k \cdot \det A$.

Veremos, agora, uma propriedade que relaciona o determinante de uma matriz com a matriz determinada efetuando uma troca de linhas ou de colunas. Mais especificamente neste caso, a pergunta será: o que ocorre com o determinante de uma matriz ao permutar (trocar) duas linhas ou duas colunas entre si? Ou, ainda, e se, em vez de efetuarmos uma troca, efetuarmos um número par de inversões? E se este número for ímpar?

Seguindo nossa estratégia de abordagem, procuraremos responder a tais perguntas utilizando exemplos. Assim, vamos lá.

Exemplo:

Permutação de linhas ou de colunas

Considere, ainda aqui, a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Construímos, a partir desta,

a seguinte matriz: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, obtida de A, trocando entre si sua 2ª coluna pela 3ª coluna.

Sabemos de cálculos anteriores que $\det A = -72$, calculemos agora o $\det \tilde{A}$.

Como a linha que contém o maior número de zeros é a 4ª, desenvolveremos tal determinante por esta linha. Assim, teremos:

$$\det \tilde{A} = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = (-1)\cdot A_{41} + 0\cdot A_{42} + 0\cdot A_{43} + 4\cdot A_{44} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-24) + 4\cdot(24) = 72$$

Interessante, não é mesmo?

Verifique que, trocando duas filas entre si (no caso anterior, colunas), ocorre uma inversão de sinal no determinante, ou seja, $\det \tilde{A} = -\det A$.

Mas, e se as trocas fossem duas?

Poderíamos analisar isto da seguinte forma, veja:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{\text{Troca da 2ª coluna pela 3ª coluna}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \xrightarrow{\text{Troca da 1ª coluna pela 2ª coluna}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

E, assim, na sequência de operações, temos:

$\det \tilde{A} = -\det A$ e $\det B = -\det \tilde{A} \rightarrow \det B = -(-\det A) = \det A$.

Ou seja, duas trocas de colunas (ou linhas) não alterarão o valor do determinante da matriz. Assim, usando, por exemplo, o Método de Indução Matemática, pode-se concluir a seguinte propriedade:

Propriedade 4

Dadas as matrizes quadradas A e $\tilde{A}$, tais que, $\tilde{A}$ é a matriz A obtida por meio de trocas duas a duas, de suas linhas ou de suas colunas. Nestas condições, temos que:

Número de trocas par $\Rightarrow$ Não altera o determinante da matriz.

Número de trocas ímpar $\Rightarrow$ Altera o sinal do determinante da matriz.

Outra propriedade que vamos abordar aqui é a relação do determinante de uma matriz que possui duas linhas ou duas colunas iguais. Para isto, resolva a seguinte atividade.

AGORA É A SUA VEZ

Atividade 6

Para cada passo a seguir, faça o que se pede:

Passo 1 – Escolha uma matriz quadrada A qualquer de ordem 3, que possua duas linhas iguais ou duas colunas iguais.

Passo 2 – Construa a matriz $\tilde{A}$ partindo da matriz A do passo 1, trocando de posição as duas linhas iguais ou as duas colunas iguais.

Passo 3 – Usando a propriedade 4, dada anteriormente, já que houve uma inversão de linhas ou de colunas, você pode concluir que $\det\tilde{A} =$ ________ .

Passo 4 – Mas, por outro lado, A e $\tilde{A}$ são iguais, sendo assim o $\text{üüi}\tilde{A} =$ ________ .

Passo 5 – Usando o resultado obtido no passo 3, juntamente com o resultado obtido no passo 4, temos que $2 \cdot \det A =$ _______ .

Passo 6 – Portanto, o $\det A$, nestas condições, será igual a ______.

Passo 7 – Enuncie, com suas palavras, a **Propriedade 5**.

Agora, é hora de aplicar um pouco toda esta teoria abordada aqui. Este é um bom caminho para uma boa aprendizagem.

AGORA É A SUA VEZ

Atividade 7

Calcule os determinantes a seguir, utilizando as propriedades vistas anteriormente:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 4 & 4 \\ x & 4 & 1 \\ 3x & 6 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3y^2 & 2 \\ 2y & y^3 & y \\ 4 & y^2 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 14 & 15 & 0 & 15 & 8 & 7 \\ 2 & 13 & 16 & 0 & 16 & 9 & 6 \\ \text{üüüüü} & & & & & & \\ \text{üüüüü} & & & & & & \\ \text{üüüüü} & & & & & & \\ 6 & 9 & 20 & 0 & 20 & 13 & 2 \\ 7 & 8 & 21 & 0 & 21 & 14 & 1 \end{vmatrix}$

Atividade 8

Sabendo que a matriz A é de ordem 3 e que $\det A = 5$, calcule o valor de x, para que $\det(2A) = x - 3$.

Atividade 9

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 21 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

calcule $\det A + \det B - \det A^t - \det B^t$.

Atividade 10

Resolva a equação $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 54$.

Com relação às propriedades envolvendo os determinantes, é importante ressaltar que existem outras, bem como outros métodos para o cálculo dos mesmos, como é o caso do **Teorema de Jacobi** e da **Regra de Chió**. Mas não serão tratadas aqui estas abordagens, pois o nosso intuito principal é o das construções necessárias para aplicações em unidades de conteúdos futuros, e tais abordagens, vistas até o presente momento, são suficientes para isto. Mas, antes de passarmos para o nosso próximo tema, vejamos a última propriedade dos determinantes:

SAIBA MAIS

Carl Gustav Jakob Jacobi nasceu em Potsdam (Alemanha) no ano de 1804 e faleceu em Berlim (Alemanha) no ano de 1851. Foi um brilhante matemático, seus trabalhos abrangem várias áreas, tais como a aplicação das funções elípticas relacionadas à Teoria dos Números, e também atuou em aplicações na área de equações diferenciais. Contribuiu também nos estudos dos determinantes.

Fonte: Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Jacobi.html>. Acesso em: 4 jun. 2010.

Propriedade 6

Dadas as matrizes quadradas A e *B*, de mesma ordem, temos que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Em outras palavras, o determinante da matriz produto será igual ao produto dos respectivos determinantes.

Observação: Esta propriedade também é conhecida como **Teorema de Binet**.

SAIBA MAIS

Jacques Philippe Marie Binet nasceu em Rennes (França) no ano de 1786 e faleceu em Paris (França) no ano de 1856. Dentre algumas de suas contribuições como matemático, atuou na área da Teoria de Matrizes, principalmente na fundamentação desta. Também contribuiu na área de Teoria dos Números em que formulou os famosos Números de Fiibonacci.

AGORA É A SUA VEZ

Comprovemos a validade da mesma, resolvendo a seguinte atividade:

Atividade 11

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Faça o que se pede em cada passo:

Passo 1 – Obtenha a matriz produto $A \cdot B$;

Passo 2 – Calcule $\det(A \cdot B)$;

Passo 3 – Calcule $\det A$;

Passo 4 – Calcule $\det B$;

Passo 5 – Calcule $\det A \cdot \det B$ e compare com o determinante obtido no passo 2.

Provavelmente você observou que os valores dos determinantes $\det(A \cdot B)$ e de $\det A \cdot \det B$ são iguais, comprovando, assim, a validade da propriedade para este caso específico. Sendo assim, utilizando as propriedades vistas, faça as atividades seguintes:

Atividade 12

Sabendo que $\det A = 5$ e que $\det(AB) = -125$, calcule o $\det B$.

Atividade 13

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Sabendo que $\det A \cdot \det A^t = 121$, calcule o $\det A$.

RELEMBRANDO

Lembre-se, matrizes singulares são matrizes quadradas não inversíveis.

Anteriormente, foi abordada a relação entre matrizes singulares e seus determinantes, não é mesmo? Mais especificamente, você verificou que matrizes cujos determinantes eram iguais a 0 (zero), não eram inversíveis, ou seja, eram singulares.

Com base na propriedade 6, observamos isso claramente. Veja:

seja A uma matriz quadrada de ordem n e A^{-1} sua inversa. Nestas condições, temos $A \cdot A^{-1} = I$, em que I é a matriz identidade (ou unidade) de ordem n.

Desta forma, teremos $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det I \rightarrow \det A \cdot \det\left(A^{-1}\right) = \det I$. Por meio de alguns cálculos relativamente simples (se preciso for, utilize em particular a matriz identidade de ordem 3, por exemplo), verifica-se que $\det I = 1$. E, voltando na última equação obtida, temos: $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$. Ou seja, se existir a matriz inversa de A, seu determinante será igual a $\dfrac{1}{\det A}$. Como sabemos, não podemos ter uma divisão por 0 (zero), necessariamente o $\det A \neq 0$, e este fato justifica a existência ou não da matriz inversa. Em resumo, temos:

$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad A$ é uma matriz singular, ou seja, não possui inversa;

$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A$ é uma matriz não singular, ou seja, possui inversa.

AGORA É A SUA VEZ

Utilizando tal construção anterior, resolva a seguinte atividade:

Atividade 14

Determine se as matrizes, a seguir, são inversíveis:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Resumo

Abordamos aqui os conceitos fundamentais da teoria sobre os determinantes. Dentre tais conceitos, vimos que:

- dada uma matriz quadrada A de ordem n, se:

$$n = 1,\ A = \left(a_{11}\right)_{1\times 1} \rightarrow \det A = |A| = a_{11};$$

Exemplo: $A = \left(-4\right)_{1\times 1} \rightarrow \det A = |-4| = -4$

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 17 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - (-1)\cdot 17 = -10 + 17 = 7$$

$$n = 3,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{2\times 2} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$;
Onde tal fórmula pode ser obtida por meio da Regra de Sarrus.

Exemplo:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 14 + 0 - 1 - 0 - 20 = 15 - 14 - 1 - 20 = -20,$$

obtido pela Regra de Sarrus, de acordo com o esquema:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 7 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$$-(-15) \quad -(14) \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -20$$

se $n > 3$, o método que utilizamos é o Teorema de Laplace, que nos diz:

“O determinante de uma matriz M de ordem $n \geq 2$ (e, consequentemente, válido para $n > 3$) é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.”

Exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, assim temos que:

escolhendo a 3ª coluna, para o desenvolvimento e aplicação do Teorema, obtemos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 6 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} =$$

$$= 0 \cdot 18 + 2 \cdot (-18) + 6 \cdot (-6) + 0 \cdot (-18) = -36 - 36 = -72.$$

Já que:

O cofator de $a_{13} = 0,$ será $A_{13} = (\text{-}1)^{1+3} D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18.$

O cofator de $a_{23} = 2,$ será $A_{23} = (\text{-}1)^{2+3} D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -18.$

O cofator de $a_{33} = 6,$ será $A_{33} = (\text{-}1)^{3+3} D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6.$

O cofator de $a_{43} = 0,$ será $A_{43} = (\text{-}1)^{4+3} D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -18.$

- Também foi analisado, por meio da propriedade $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, que uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$, já que, se o $\det A = 0$, com $A \cdot A^{-1} = I$, teríamos: $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I \ \rightarrow \ \det A \cdot \det A^{-1} = \det I \ \rightarrow \ 0 \cdot \det A^{-1} = 1 \ \rightarrow \ 0 = 1$, que nos dá claramente um absurdo matemático, uma contradição! Portanto, se existir A^{-1}, então $\det A \neq 0$.

Atividades

Atividade 1

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. A condição para que o $\det A \neq 0$ é:

a) $a \neq 0$;

b) $a = 0$;

c) $a = 1$;

d) $a = -1$;

e) $a \neq -1$ e $a \neq 1$.

Atividade 2

Calcule o determinante de cada uma das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$, tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & se \ \ i = j; \\ 2+i & se \ \ i \neq j. \end{cases}$.

Atividade 3

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Nestas condições, faça o que se pede:

a) determine a matriz $A.B$;

b) calcule $\det A$ e $\det B$;

c) calcule $\det\left(A.B\right)$;

d) verifique a propriedade $\det\left(A.B\right) = \det A.\det B$.

Atividade 4

Dadas as matrizes quadradas a seguir, faça o que se pede:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) calcule o determinante de *A* e o determinante de *B*;

b) determine as matrizes A^{-1} e B^{-1}.

Atividade 5

Considerando a seguinte matriz, faça o que se pede.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Determine os cofatores dos elementos da 1ª linha da matriz A;

b) Use o Teorema de Laplace para desenvolver o $\det A$ pela 1ª linha.

Atividade 6

Calcule o determinante de cada uma das matrizes quadradas, a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 9 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ -4 & 6 & -1 & -6 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & -3 & 8 & 5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

Atividade 7

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a & 4a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 & 16a^2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Atividade 8

Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 2.

Considere as seguintes propriedades:

(i) $A \cdot B = C^{-1}$ (ii) $B = 2A$ (iii) $\det C = \frac{1}{4}$

Nestas condições, calcule:

a) $\det A$; b) $\det B$.

Referências

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Sistemas lineares. In:_____. **Fundamentos de matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. Equações lineares e sistemas. In:_____. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

POOLE, David. Sistemas de equações lineares. In:____. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.