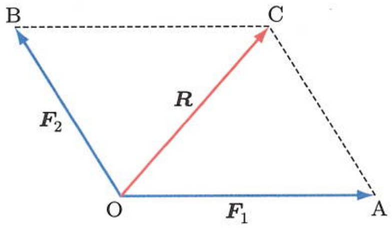
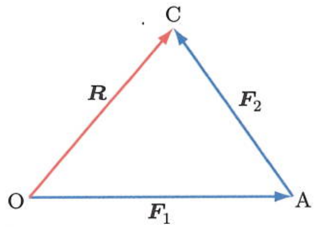
1.2 1点にはたらく力の合成と分解

1.2.1 2力の合成

2力が1点にはたらくとき，この2力と同じはたらきをする一つの力を求めることを**2力の合成**といい，合成された一つの力を**合力**（resultant force）という．**図1.2**のように，1点Oにはたらく2力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表すとき，この2力の合力を求めるには，OA，OBを2辺とする平行四辺形OACBをつくり，その対角線OCによってできる $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の力 $\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の合力である．このようにして求める方法を**力の平行四辺形**の法という．また図1.2より，OB∥AC，OB ＝ AC であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．このことより**図1.3**のように，$\boldsymbol{F}_2$ の力をAを始点とする $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せば，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が求める合力 $\boldsymbol{R}$ となる．これを**力の三角形**という．

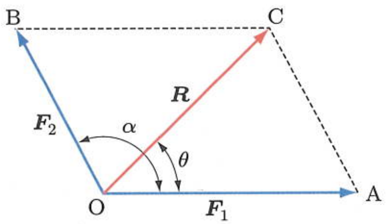


▶図1.2　力の平行四辺形



▶図1.3　力の三角形

以上は図による解法であるが，計算によって求めるには，**図1.4**のように，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ のなす角を α，合力 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{F}_1$ のなす角を θ とすると，△OACにおいて余弦定理により，



▶図1.4　2力の合成

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)$$
$$= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (1.1)$$

とすればよい．また，正弦定理により，

$$\frac{F_2}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad \therefore\ \sin\theta = \frac{F_2}{R}\sin\alpha \qquad (1.2)$$

となる．式(1.1)，(1.2)により，合力 $\boldsymbol{R}$ の大きさとその方向が求められる．

例題 1.1　1点Oにはたらく2力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ の大きさが20 N，15 N，また，そのなす角 α が120°のとき，その合力を求めよ．

解答　式(1.1)より，合力の大きさはつぎのように求められる．

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} = \sqrt{20^2 + 15^2 + 2\times 20\times 15\cos 120°}$$
$$= 18.03 \qquad \therefore\ 18.0\,\mathrm{N}$$

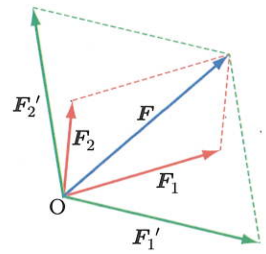
式(1.2)より，合力と力 $\boldsymbol{F}_1$ とのなす角 θ はつぎのようになる．

$$\sin\theta = \frac{F_2}{R}\sin\alpha = \frac{15}{18.03}\sin 120° = 0.7205 \qquad \therefore\ \theta = 46.1°$$

1.2.2 力の分解

一つの力をそれと同じはたらきをする二つ以上の力に分けることを**力の分解**という．分解によって得られた力を，もとの力の**分力**（component of force）という．力を分解するには合成の逆を行えばよい．

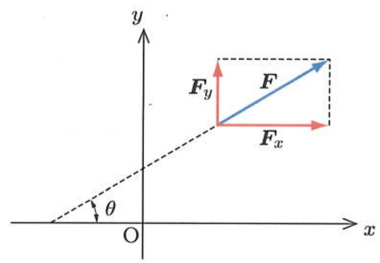
図1.5のように，一つの力を分解する方法は無数にある．このことより，二つの力に分解する場合，分解する力を含む平面内で二つの分力の方向を与えるか，一つの分力を与えるかの条件をつければ，一つの解が求まる．**図1.6**のように，力 $\boldsymbol{F}$ を含む平面内に任意の直交座標軸をとり，その両軸方向への分力に分けることを考える．力 $\boldsymbol{F}$ の作用線と x 軸とのなす角を θ とすると，x 軸方向への分力 $\boldsymbol{F}_x$，y 軸方向への分力 $\boldsymbol{F}_y$ は，



▶図1.5　力の分解

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta \\ F_y &= F\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ を力 $\boldsymbol{F}$ の x 方向成分，y 方向成分という．直角分力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ がわかっているとき，力の大きさ F と x 軸の正の方向とのなす角 θ は，つぎの式から求められる．



▶図1.6　直角分力

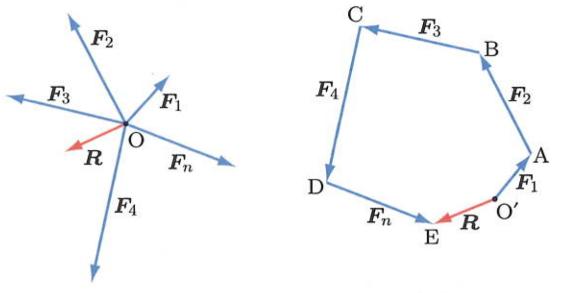
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (1.4)$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \qquad (1.5)$$

1.2.3 3力以上の力系の合成

いま，**図1.7**(a)のように，1点Oにはたらく力を，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ とする．この合力を求めるには，図(b)のように任意の点O′をとり，点O′より力 $\boldsymbol{F}_1$ に相当する

$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$ をひき，A から力 $\boldsymbol{F}_2$ に相当する $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をひき，順に繰り返して最後に力 $\boldsymbol{F}_n$ に相当するベクトルの終点を E とすると，$\overrightarrow{\mathrm{O'E}}$ が求める合力 $\boldsymbol{R}$ を表す．このようにしてつくられた多角形を，**力の多角形**（polygon of force）という．

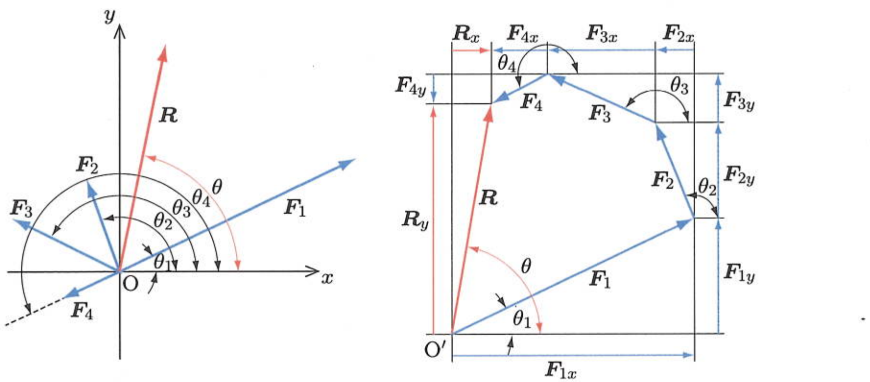


（a）　　　（b）

▶図 1.7　力の合成

これは，力の三角形の法により，$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ を求め，つぎに $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ に $\boldsymbol{F}_3$ を加え，さらに $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$ に $\boldsymbol{F}_4$ を加えるというように，図形の上に連続的に力の三角形の法を利用したものである．この力の多角形は，平面図形でなくてもよい．

同一平面内に力がある場合，**図 1.8** のように，O を原点とする任意の直交座標軸 x，y をとり，力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ と x 軸の正の方向とのなす角を θ_1，θ_2，…，θ_n，合力 $\boldsymbol{R}$ と x 軸の正の方向とのなす角を θ とすると，各力の座標軸（x，y）方向の成分と合力の x，y 成分 R_x，R_y の間につぎの式が成り立つ．



▶図 1.8　1 点にはたらく多くの力の合成

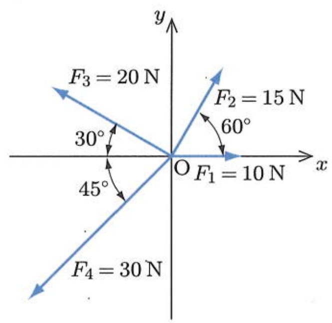
$$\left.\begin{aligned} R_x &= F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 + \cdots + F_n\cos\theta_n = \sum_{i=1}^{n} F_i\cos\theta_i \\ R_y &= F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2 + \cdots + F_n\sin\theta_n = \sum_{i=1}^{n} F_i\sin\theta_i \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

したがって，合力の大きさと方向はつぎのように求められる．

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\cos\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\sin\theta_i\right)^2} \quad (1.7)$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\sin\theta_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i\cos\theta_i} \quad (1.8)$$

例題 1.2　**図 1.9** のように，1 点 O に 4 力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ がはたらいているとき，その合力を求めよ．



▶図 1.9

解答　計算を表に整理すると，**表 1.1** のようになる．

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-21.03)^2 + (1.78)^2}$$
$$= 21.1\,\mathrm{N}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1.78}{-21.03} = -0.0846$$

$$\therefore\ \theta = 175.2°$$

したがって，合力の大きさは 21.1 N，x 軸となす角は 175.2° である．

▶表 1.1

F_i	θ_i	$\cos\theta_i$	$\sin\theta_i$	F_{ix}	F_{iy}
$F_1 = 10$ N	0°	1.0000	0.0000	10.00	0.00
$F_2 = 15$ N	60°	0.5000	0.8660	7.50	12.99
$F_3 = 20$ N	150°	−0.8660	0.5000	−17.32	10.00
$F_4 = 30$ N	225°	−0.7071	−0.7071	−21.21	−21.21
				$R_x = -21.03$	$R_y = 1.78$

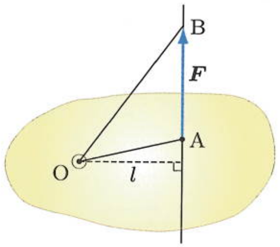
1.3 力のモーメント

1.3.1 力のモーメント

図 1.10 のように，軸 O で固定された物体に，軸 O に垂直な平面上の作用線が軸の位置を通らない力 $\boldsymbol{F}$ をはたらかせると，この物体は軸 O のまわりに回転する．このとき，力 $\boldsymbol{F}$ の大きさと軸から力 $\boldsymbol{F}$ の作用線までの距離 l が大きいほど，物体を回転させる能力は大きい．このように，物体を回転させようとする力のはたらきを**力のモーメント**（moment of force）という．その大きさを N とすると，

$$N = Fl \tag{1.9}$$

で表される．ここで，l を**モーメントの腕**（arm）という．また大きさだけでなく，物体を回転させようとする向きも考え，同一平面上ではたらく力のモーメントは時計回りのモーメントを負，反時計回りのモーメントを正とする．このように，力のモーメントは大きさのほかに向きをもつ量であるからベクトル量である．スパナでボルトを締め付けたり，自転車のペタルを足で踏むのは，いずれも力のモーメントを加えて回転を与えているのである．



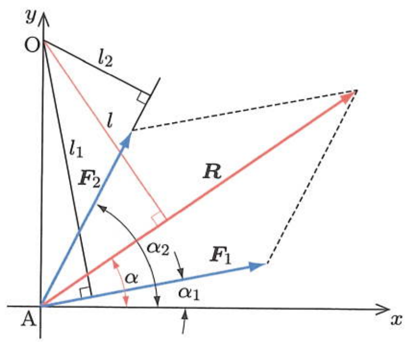
▶図 1.10　力のモーメント

力のモーメントの定義から，力 $\boldsymbol{F}$ の軸 O のまわりのモーメントの大きさは図 1.10 の △OAB の面積の 2 倍になっている．力のモーメントの単位は，力 $\boldsymbol{F}$ に N，腕の長さ l に m の単位を用いて，N·m である．

1 点 A にはたらく 2 力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ とその合力 $\boldsymbol{R}$ と，同一平面上にある任意の点 O のまわりのモーメントについて調べてみる．**図 1.11** のように，A を原点とする直交座標軸 x，y を考える．力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，合力 $\boldsymbol{R}$ と x 軸とのなす角を α_1，α_2，α とし，点 O より $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{R}$ の作用線への距離を l_1，l_2，l とすると，つぎの関係が成り立つ．

$$l_2 = \mathrm{OA}\cos\alpha_2 \qquad l_1 = \mathrm{OA}\cos\alpha_1$$

$$l = \mathrm{OA}\cos\alpha$$



▶図 1.11　2 力のモーメントとその合力のモーメント

また，点 O のまわりの $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{R}$ のモーメントを N_1，N_2，N とすれば，

$$N_1 = F_1 l_1 = F_1 \cdot \mathrm{OA}\cos\alpha_1$$

$$N_2 = F_2 l_2 = F_2 \cdot \mathrm{OA}\cos\alpha_2$$

となる．したがって，つぎの式が得られる．

$$N_1 + N_2 = \mathrm{OA}(F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2) \tag{1.10}$$

また，

$$N = Rl = R\cdot\mathrm{OA}\cos\alpha = \mathrm{OA}\cdot R\cos\alpha \tag{1.11}$$

と表される．ところが，$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ の合力であるから，その x 方向分力の間に

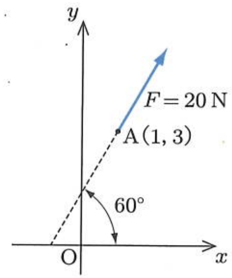
$$F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 = R\cos\alpha \tag{1.12}$$

の関係が成り立つ．したがって，式(1.10)～(1.12)より，つぎの式が導かれる．

$$N_1 + N_2 = N \tag{1.13}$$

このように，1 点にはたらく 2 力の，この力と同一平面上の任意の点のまわりのモーメントの和は，その合力のモーメントに等しい．3 力以上の場合も順次二つずつ加えていけばよいから，同様のことが成り立つ．すなわち，同一平面内で **1 点にはたらく多くの力のその平面内の任意の点に関するモーメントの代数和は，その合力のモーメントに等しい**．

例題 1.3　**図 1.12** のように，点 A(1, 3) を着力点とし，作用線が x 軸と 60° の角をなす大きさ 20 N の力 $\boldsymbol{F}$ の原点 O のまわりのモーメントを求めよ．ただし，x 軸，y 軸の 1 目盛は 1 m とする．



▶図 1.12

解答　力 $\boldsymbol{F}$ の直角分力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ を求めると，

$$F_x = F\cos 60° = 20 \times \frac{1}{2} = 10\,\mathrm{N}$$

$$F_y = F\sin 60° = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17.3\,\mathrm{N}$$

となる．力 $\boldsymbol{F}$ によるモーメントは，その分力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ によるモーメントの和に等しいから，原点 O のまわりのモーメント N は，

$$N = 17.3 \times 1 - 10 \times 3 = -12.7\,\mathrm{N\cdot m}$$

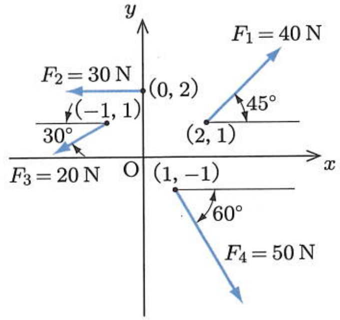
となる．したがって，時計回りの方向 12.7 N·m である．

例題 1.3 のように，直接原点から力 $\boldsymbol{F}$ の作用線までの距離を求めてモーメントを計算するより，分力を考えて求めるほうが簡単な場合がある．

$$l = \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots + F_n l_n}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{1.20}$$

これらの式により，大きさと作用線の位置を求めることができる．

例題 1.4　**図 1.20** に示す 4 力の合力を求めよ．



▶図 1.20

解答▶　計算を表に整理すると，**表 1.2** のようになる．

▶表 1.2

F_i	θ_i	F_{ix}	F_{iy}	x_i	y_i	$F_{iy}x_i - F_{ix}y_i$
$F_1 = 40$	45°	28.28	28.28	2	1	$28.28 \times 2 - 28.28 \times 1 = 28.28$
$F_2 = 30$	180°	−30.00	0.00	0	2	$0.00 \times 0 - (-30.00 \times 2) = 60.00$
$F_3 = 20$	210°	−17.32	−10.00	−1	1	$-10.00 \times (-1) - (-17.32) \times 1 = 27.32$
$F_4 = 50$	−60°	25.00	−43.30	1	−1	$-43.30 \times 1 - 25.00 \times (-1) = -18.30$
		$R_x = 5.96$	$R_y = -25.02$			$N = 97.30$

$$R_x = 5.96 \qquad R_y = -25.02$$

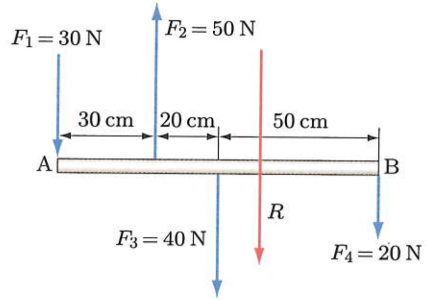
$$R = \sqrt{(5.96)^2 + (-25.02)^2} = \sqrt{661.52} = 25.72 \qquad \therefore\ 25.7\ \text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-25.02}{5.96}\right) \text{ より } \qquad \theta = -76.6°$$

また，原点からの距離 d はつぎのようになる．

$$d = \frac{N}{R} = \frac{97.30}{25.72} = 3.8$$

例題 1.5　**図 1.21** のように平行力がはたらいているとき，その合力を求めよ．



▶図 1.21

解答▶　上向きの力を正とすると，合力 $\boldsymbol{R}$ の大きさはつぎのようになる．

$$\begin{aligned} R &= -F_1 + F_2 - F_3 - F_4 \\ &= -30 + 50 - 40 - 20 \\ &= -40\ \text{N} \end{aligned}$$

点 A のまわりのモーメントのつりあいより，

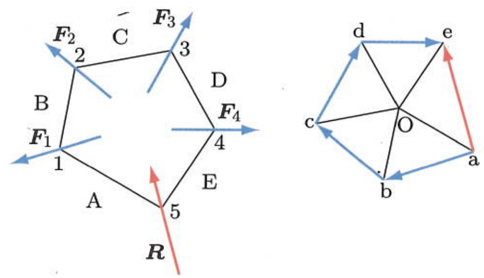
合力 $\boldsymbol{R}$ の作用線までの距離 l は，つぎのように求められる．

$$-40\,l = 50 \times 30 - 40 \times 50 - 20 \times 100 \qquad \therefore\ l = 62.5$$

したがって，大きさ 40 N，作用線は点 A より右 62.5 cm のところにある下向きの力となる．

図式で求める方法を 4 力の場合を例にとって述べよう．**図 1.22**(a)のような着力点の異なる同一平面上にある力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ を合成するには，力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ で区切られた平面に A，B，C，D，E の記号をつけ，A，B の境界の力 $\boldsymbol{F}_1$ を AB の力，B，C の境界の力 $\boldsymbol{F}_2$ を BC の力といい，$\overrightarrow{ab}$，$\overrightarrow{bc}$ で表す．同様にして $\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ は CD，DE の力といい，$\overrightarrow{cd}$，$\overrightarrow{de}$ で表す．このような記号をつける方法を**バウの記号法**（Bow's notation）という．ところで，図(b)のように，$\overrightarrow{ab}$，$\overrightarrow{bc}$，$\overrightarrow{cd}$，$\overrightarrow{de}$ の順に加えていくと，$\overrightarrow{ae}$ が合力 $\boldsymbol{R}$ の大きさと向きを示す．このようにしてできた力の多角形を**示力図**（force diagram）という．

合力の作用線を求めるには，図(b)のように，任意の点 O をとり，その点 O と示力図の多角形の各頂点とを結ぶ．このとき，この点 O を**極**（pole），Oa，Ob などを



(a) 連力図　　(b) 示力図

▶図 1.22　図式による力の合成

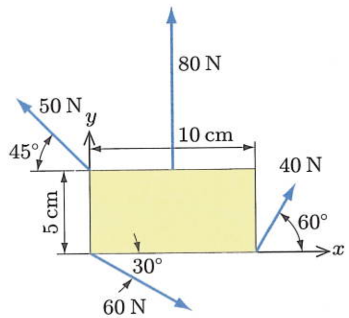
射線（ray）という．

力 $\boldsymbol{F}_1$ の作用線上に任意の点 1 をとり，点 1 より区域 B に Ob に平行線をひき，力 $\boldsymbol{F}_2$ の作用線との交点を 2 とする．点 2 より区域 C に Oc に平行線をひき，力 $\boldsymbol{F}_3$ の作用線との交点 3，同様にして力 $\boldsymbol{F}_4$ の作用線との交点 4 を求め，点 4 より Oe にひいた平行線と，点 1 より Oa にひいた平行線との交点を 5 とすると，点 5 が合力 $\boldsymbol{R}$ の作用線上の点である．よって，点 5 より $\overrightarrow{\mathrm{ae}}$ に平行線をひき，その上に $\overrightarrow{\mathrm{ae}}$ を移せば，合力 $\boldsymbol{R}$ が求められる．このとき，点 1，2，3，4，5 を結んでできる多角形を**連力図**（funicular polygon），また，直線 12，23，34，45，51 を**索線**（string）とよぶ．

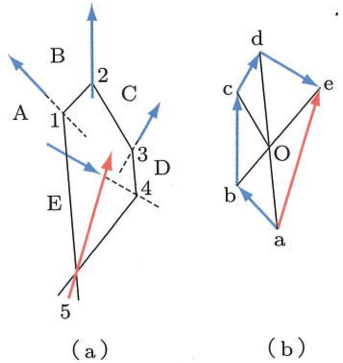
点 5 が合力 $\boldsymbol{R}$ の作用線上の点であることはつぎのようにしてわかる．$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ の各力を連力図の索線方向への分力として書き換えると，$\boldsymbol{F}_1$ の分力は示力図から $\overrightarrow{\mathrm{aO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Ob}}$，$\boldsymbol{F}_2$ の分力は $\overrightarrow{\mathrm{bO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Oc}}$ である．ところが，$\overrightarrow{\mathrm{Ob}}$，$\overrightarrow{\mathrm{bO}}$ は索線 12 上にあるから，合力は 0 となる．同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{cO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Oc}}$，$\overrightarrow{\mathrm{dO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Od}}$ もつりあう．残るのは $\overrightarrow{\mathrm{aO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Oe}}$ であるから，合力 $\boldsymbol{R}$ は $\overrightarrow{\mathrm{aO}}+\overrightarrow{\mathrm{Oe}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{aO}}$ の作用線は 15，$\overrightarrow{\mathrm{Oe}}$ の作用線は 45 である．したがって，索線 15 と 45 との交点 5 は合力の作用線上の点となる．

例題 1.6　**図 1.23** のようにはたらく 4 力の合力を図式により求めよ．

解答▶　**図 1.24**（a）のように，力の作用線の位置を与えられた長さに比例した長さで定め，作用線を描く．その上に，各力の大きさに比例した長さで力を描いてバウの記号をつける．つぎに，図（b）の示力図，図（a）の連力図を描く．この図より，合力は，作用線が図（a）の点 5 を通り，大きさ 126 N，向きは x 方向となす角 73° の力である．



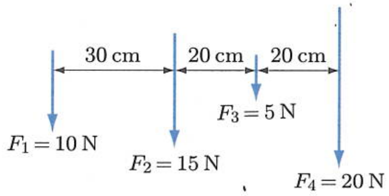
▶図 1.23



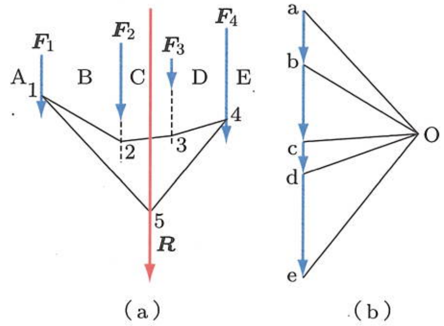
▶図 1.24

例題 1.7　**図 1.25** に示す平行力の合力を図式で求めよ．

解答▶　**図 1.26**（a），（b）にその連力図と示力図を示す．図より，合力の作用線は $\boldsymbol{F}_1$ の作用線より右 42 cm のところにあり，大きさは 50 N で向きは下向きである．



▶図 1.25



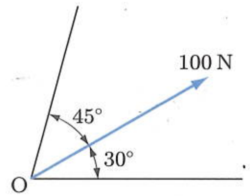
▶図 1.26

演習問題

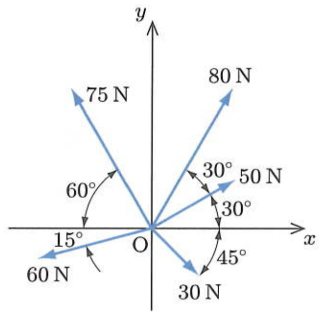
1.1　20 N と 30 N の力が 60° の角をなしてはたらくとき，その合力を求めよ．

1.2　**図 1.27** のように，100 N の力を二つの作用線の方向に分解せよ．

1.3　**図 1.28** のように，1 点にはたらく 5 力の合力を求めよ．



▶図 1.27

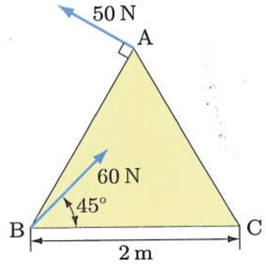


▶図 1.28

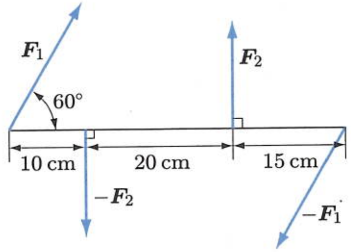
1.4　図 1.28 に示す 5 力の合力を図式で求めよ．

1.5　モーメントが面積で表されることを利用して，同一平面内で 1 点にはたらく多くの力の任意の点に関するモーメントの和は，その合力のモーメントに等しいことを示せ．

1.6　**図 1.29** のように，正三角形 ABC の頂点 A，B に力がはたらいているとき，頂点 C のまわりのモーメントを求めよ．



▶図 1.29



▶図 1.30

1.7 **図 1.30** において，$F_1 = 8$ N，$F_2 = 6$ N とするとき，この二つの偶力のモーメントの和を求めよ．

1.8 作用線間の距離が 10 cm になるように，大きさ 30 N の力を力の右側に平行移動したとき，発生する偶力のモーメントを求めよ．

1.9 同じ向きに平行で，作用線間の距離が 50 cm，大きさがそれぞれ 20 N，30 N の 2 力 F_1，F_2 の合力を求めよ．

1.10 問題 1.9 で F_1，F_2 の向きが反対のとき，その合力を求めよ．

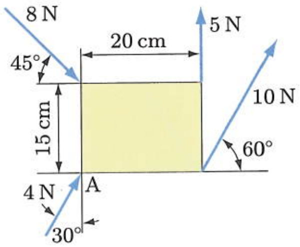
1.11 **図 1.31** のようにはたらく 4 力の合力を求めよ．

1.12 **図 1.32** のようにはたらく 4 力の合力を求めよ．

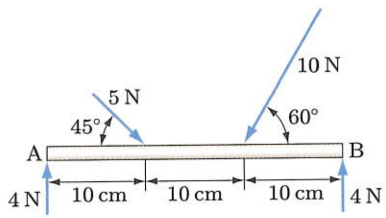
1.13 **図 1.33** のような平行力の合力を求めよ．

1.14 図 1.31 の 4 力の合力を図式により求めよ．

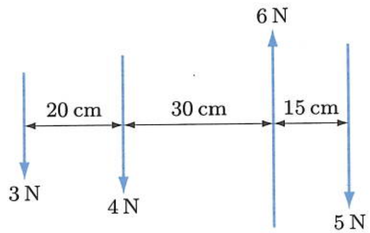
1.15 図 1.33 の 4 力の合力を図式により求めよ．



▶図 1.31



▶図 1.32



▶図 1.33

EQUILIBRIUM OF FORCE

第 2 章 力のつりあい

2.1 1 点にはたらく力のつりあい

物体に 2 力以上の力がはたらいているとき，その物体が力のはたらいていないときと同じ状態であれば，これらの力はつりあっているという．

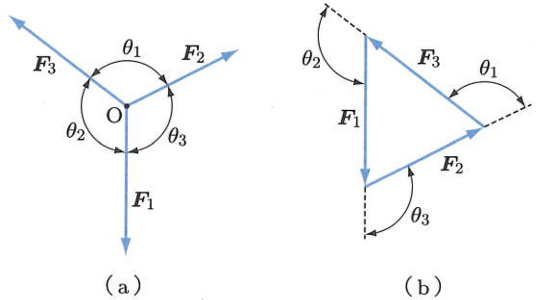
1 点にはたらく力がつりあうには，それらの合力が 0 になっていればよい．したがって，1 点にはたらく 2 力の大きさが等しく，向きが反対であればつりあう．たとえば，台の上に物体がのっているとする．このとき，物体はそれにはたらく重力 W で台を押すが，台はその重力と大きさが等しく，反対向きの力 $-W$ で物体を押し上げている．つまり，この物体には重力 W と台が物体を押し上げる力 $-W$ がはたらくから，$W + (-W) = 0$ となる．すなわち，合力が 0 となってつりあっているのである．

図 2.1（a）のように，1 点 O にはたらく 3 力 F_1，F_2，F_3 がつりあっているとき，この合力は 0 であるから，この 3 力によってできる力の多角形は閉じて，図（b）のようになる．このとき，三角形の内角は $180° - \theta_1$，$180° - \theta_2$，$180° - \theta_3$ となる．この三角形に正弦定理を用いると，

$$\frac{F_1}{\sin(180° - \theta_1)} = \frac{F_2}{\sin(180° - \theta_2)} = \frac{F_3}{\sin(180° - \theta_3)}$$

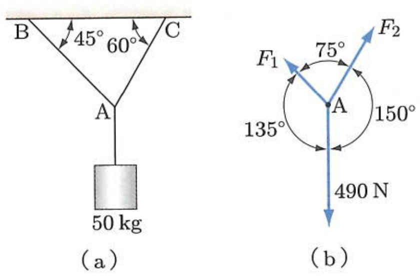
$$\therefore \quad \frac{F_1}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{F_3}{\sin\theta_3} \qquad (2.1)$$

が成り立つ．すなわち，3 力の大きさと，各力の作用線とのなす角の間に式(2.1)の関係が成り立っているとき，3 力がつりあっているのである．これをラミの定理（Lami's theorem）という．



▶図 2.1　3 力のつりあい

例題 2.1　**図 2.2**(a)のように，水平面と 60°，45° の角をなす綱で 50 kg の物体をつるした．このとき，綱に作用する力の大きさを求めよ．



(a)　(b)

▶図 2.2

解答▶　綱 AB，AC に作用する力をそれぞれ $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ とする．図(b)のように，点 A にはこの $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ と，鉛直下向きに $50g$，すなわち 490 N の重力がはたらいて，つりあっている*．

式(2.1)より，

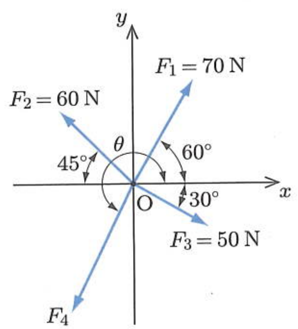
$$\frac{F_1}{\sin 150^\circ} = \frac{F_2}{\sin 135^\circ} = \frac{490}{\sin 75^\circ}$$

$$F_1 = 490 \times \frac{\sin 150^\circ}{\sin 75^\circ} = 254 \qquad F_2 = 490 \times \frac{\sin 135^\circ}{\sin 75^\circ} = 359$$

となる．したがって，綱 AB に作用する力の大きさは 254 N，綱 AC に作用する力の大きさは 359 N である．

同一平面上で 1 点 O に多数の力がはたらくとき，それらがつりあっているということは，その合力が 0 であるということで，このことを図式で表すと，力の多角形が閉じているということである．計算による場合は，点 O を原点とする任意の直交座標軸を考え，その軸方向の分力をつくり，各軸方向の分力の和を $\sum_i F_{ix}$，$\sum_i F_{iy}$ とすると，$\sum_i F_{ix} = 0$，$\sum_i F_{iy} = 0$ であればよい．

例題 2.2　**図 2.3** のように，1 点 O に 3 力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ がはたらいている．これにどのような力を加えるとつりあうかを求めよ．



▶図 2.3

解答▶　大きさ F_4 で，x 軸となす角が θ である力を加えるとつりあうとする．

$$\sum_i F_{ix} = 0,\quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \text{より，}$$

$$\sum_i F_{ix} = 70\cos 60^\circ + 60\cos 135^\circ + 50\cos(-30^\circ) + F_4\cos\theta = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 70\sin 60^\circ + 60\sin 135^\circ + 50\sin(-30^\circ) + F_4\sin\theta = 0$$

これより，

$$F_4\cos\theta = -35.9 \qquad F_4\sin\theta = -78.0$$

$$\therefore\ F_4 = \sqrt{(F_4\sin\theta)^2 + (F_4\cos\theta)^2} = \sqrt{(-78.0)^2 + (-35.9)^2} = 85.9\,\mathrm{N}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{F_4\sin\theta}{F_4\cos\theta} = \frac{-78.0}{-35.9} = 2.17$$

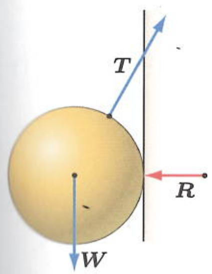
$$\therefore\ \theta = 245.3^\circ$$

となる．したがって，大きさ 85.9 N，x 軸とのなす角 245.3° の力を加えればよい．

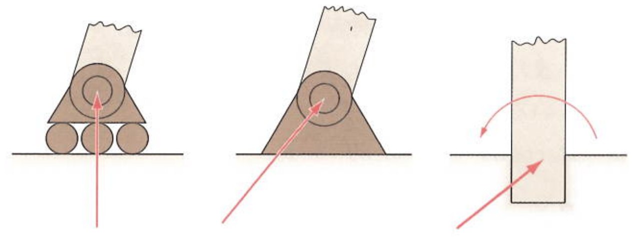
2.2 接触点，支点にはたらく力

物体にはたらく力のつりあいの問題を考えるとき，物体と物体との接触点，また，物体の運動を拘束する支点にはたらく力がどのようになっているかの知識が必要になる．

二つの物体 A，B が接触し，A が B を押すと，作用・反作用の法則により，A は B から同じ力で押し返される．この反作用による力を接触点における**反力**（reaction force）という．このとき，接触面の状態がなめらかで摩擦がなければ，反力の方向は接触面に垂直な方向である．実際には摩擦はあるが，問題によってはこれを無視して近似的に取り扱ってよい場合が多い．**図 2.4** のように，質量 M の球が糸でなめらかな壁につるしてある．このとき，球と壁との接触点にはたらく力は壁の面に垂直であり，この反力 $\boldsymbol{R}$ と重力 $\boldsymbol{W}$（大きさ $W = Mg$），糸の張力 $\boldsymbol{T}$ とがつりあっている．



▶図 2.4　反力

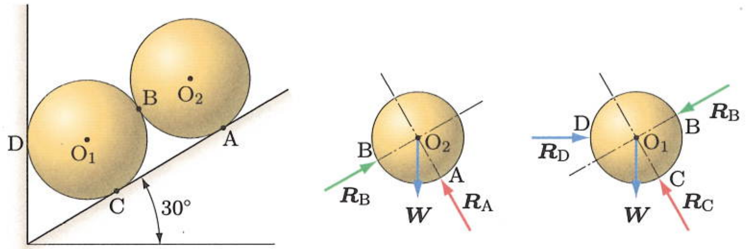

(a) 移動支点　(b) 回転支点　(c) 固定支点

▶図 2.5　支点

*質量 m [kg] の物体にはたらく重力の大きさ W は，$W = mg$（g は重力加速度）と表される．詳しくは 5.1.2 項を参照のこと．

物体の運動を拘束する支点は，普通，**図 2.5** に示す 3 種類に分けられる．図(a)のように，一定方向への移動が可能な支点を**移動支点**といい，反力は移動方向に垂直な方向にはたらく．図(b)のように，回転だけが自由であるものを**回転支点**といい，反力は作用線が回転の中心を通る力になる．図(c)のように，移動も回転もできない支点を**固定支点**といい，反力を生じるだけでなく，モーメントも受けるから，モーメントの反作用も生じる．

例題 2.3 **図 2.6** のように，水平方向と 90°，30° の傾きをもつなめらかな板の間に，質量 5 kg の半径の等しい球を入れたとき，接触点 A，B，C，D における反力の大きさを求めよ．



▶図 2.6

解答▶ 接触点 A，B，C，D における反力を $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$，$\boldsymbol{R}_C$，$\boldsymbol{R}_D$ とする．球 O_2 に対して，反力 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ と球 O_2 にはたらく重力 $\boldsymbol{W}$ はつりあっている．30° の板の方向とそれに垂直な方向の分力を考えると，$W = 5g$ [N] より，

$$R_B = 5g\sin 30° = 24.5 \qquad R_A = 5g\cos 30° = 42.4$$

となる．また，球 O_1 に対して，反力 $\boldsymbol{R}_B$，$\boldsymbol{R}_C$，$\boldsymbol{R}_D$ と球 O_1 にはたらく重力 $\boldsymbol{W}$ はつりあっているから，

$$R_D\cos 30° = 5g\sin 30° + R_B$$

$$R_D = \frac{5g\sin 30° + 5g\sin 30°}{\cos 30°} = 10g\tan 30° = 56.6$$

$$R_C = R_D\sin 30° + 5g\cos 30° = 70.7$$

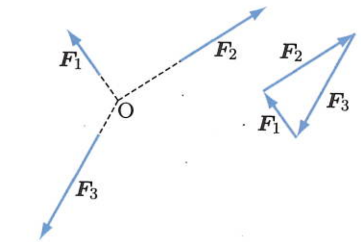
となる．したがって，A，B，C，D における反力の大きさは，$R_A = 42.4$ N，$R_B = 24.5$ N，$R_C = 70.7$ N，$R_D = 56.6$ N となる．

2.3 着力点の異なる力のつりあい

同一平面上ではたらく着力点の異なる力を合成するとき，その平面上に任意の直交座標軸をとり，その原点に着力点がくるように各力を平行移動した．このとき，各力は平行移動した力と偶力に置き換えられることを学んだ．すなわち，1 点にはたらく力がつりあうためには合力が 0 であればよかったが，着力点の異なる同一平面上の力のつりあいの場合には，合力が 0 であっても，偶力が残れば回転する．したがって，つりあっているためには任意の点のまわりの各力のモーメントの和も 0 でなければならない．すなわち，つぎの式が成り立たなければならない．

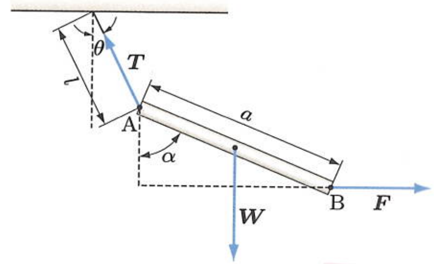
$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_i F_{ix} = \sum_i F_i\cos\theta_i = 0 \\ R_y &= \sum_i F_{iy} = \sum_i F_i\sin\theta_i = 0 \\ N &= \sum_i N_i = \sum_i (F_{iy}x_i - F_{ix}y_i) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

このことより，着力点の異なる 2 力がつりあうには，その作用線が一致し，大きさが等しく，向きが反対であればよい．また，平行でない 3 力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ がつりあうには，**図 2.7** のように，これらの 3 力の合力が 0 であると同時にそれらの力の作用線が 1 点で交わればよい．



▶図 2.7 着力点の異なる力のつりあい

例題 2.4 **図 2.8** のように，質量 M の一様な棒の一端を長さ l の糸でつるし，他端に水平力 $\boldsymbol{F}$ を加えてつりあわせたとき，糸と棒が鉛直線となす角を求めよ．

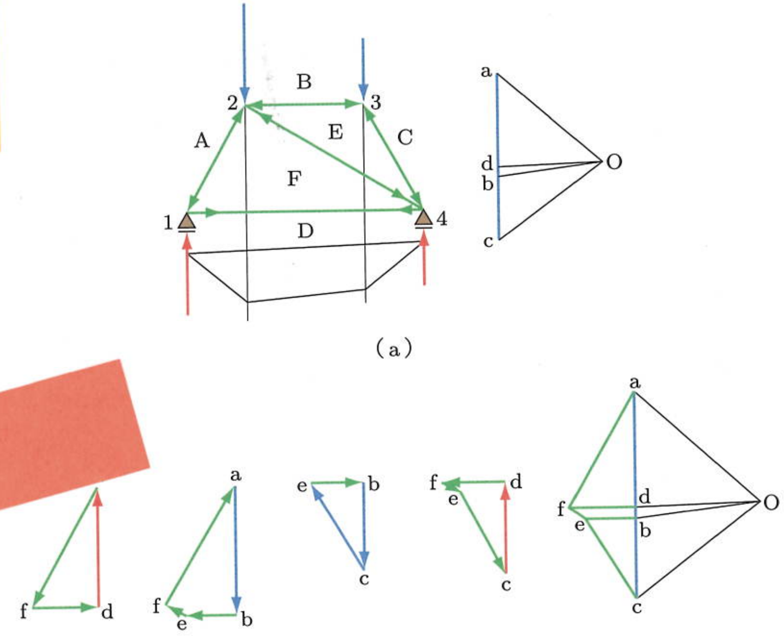


▶図 2.8

解答▶ 糸と棒が鉛直線となす角をそれぞれ θ，α とし，糸の張力を $\boldsymbol{T}$ とする．$\boldsymbol{T}$ と重力 $\boldsymbol{W}$（大きさ $W = Mg$），$\boldsymbol{F}$ はつりあっているから，$\sum_i F_{ix} = 0$，$\sum_i F_{iy} = 0$ より，

$$F - T\sin\theta = 0 \qquad \therefore\ F = T\sin\theta \qquad ①$$

$$T\cos\theta - W = 0 \qquad \therefore\ W = T\cos\theta \qquad ②$$



（a）

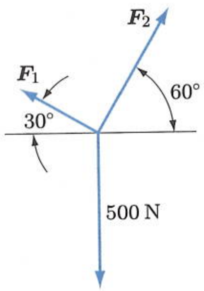
（b）節点 1　（c）節点 2　（d）節点 3　（e）節点 4　（f）

▶図 2.18　クレモナの図式解法

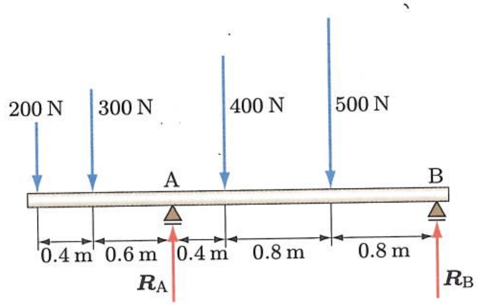
材かがわかる．このように未知の力が二つ以下の節点からはじめて，各部材にはたらく力を順次図式的に求める方法を**クレモナ**（Cremona）**の方法**という．

演習問題

2.1　**図 2.19** において，500 N の力とつりあう力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ の大きさを求めよ．



▶図 2.19



▶図 2.20

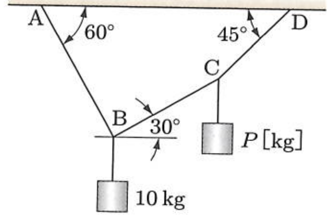
2.2　**図 2.20** に示すはりの反力 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ の大きさを求めよ．

2.3　問題 2.2 を図式で解いてみよ．

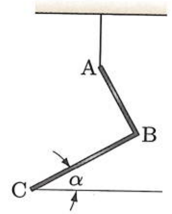
2.4　10 kg と P［kg］の物体をロープでつると，**図 2.21** に示すような位置で静止した．ロープ AB，BC，CD の張力の大きさおよび P の値を求めよ．

2.5　直角に曲がった一様な太さの針金が，天井より**図 2.22** のように糸でつり下げられている．ここで，AB = 10 cm，BC = 15 cm のとき，角 α を求めよ．

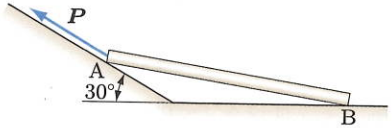
2.6　**図 2.23** のように，質量 200 kg の一様な太さの鉄材の一端 A は傾角 30° のなめらかな斜面に，他端 B は水平のなめらかな床にあって，斜面に沿って大きさ P の力で引っ張られて静止している．A，B における反力および力 P の大きさを求めよ．



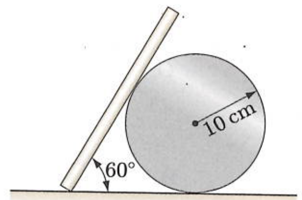
▶図 2.21



▶図 2.22



▶図 2.23



▶図 2.24

2.7　**図 2.24** のように，半径 10 cm の円筒に一様な断面の質量 0.50 kg，長さ 30 cm の棒をたてかけたところ，床との傾き 60° の位置で静止した．棒と円筒との接触面はなめらかであるが，ほかの接触面はなめらかでないとき，棒にはたらく円筒からの反力および床からの反力を求めよ．

2.8　**図 2.25** のように，箱のなかに 2 個の丸鋼棒が入っている．丸鋼棒 O_1，O_2 はそれぞれ質量 30 kg，20 kg，半径 15 cm，10 cm である．接触点 A，B，C，D にはたらく力の大きさを求めよ．ただし，面はすべてなめらかであるとする．

2.9　長さ l で一様な断面のまっすぐな棒をその両端 A，B につけた糸で支えてぶら下げた．糸の水平線に対する角が α，β（$\alpha > \beta$）のとき，棒の水平に対する傾きを求めよ．

2.10　**図 2.26** は，くい A を抜く装置である．点 E に下向きに 500 N の力を加えるとき，AC にはたらく引張力の大きさを求めよ．ただし，$\alpha = 5°$ とする．

$$
\left.
\begin{aligned}
x_G &= \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots}{W} = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i} \\
y_G &= \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + \cdots}{W} = \frac{\sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i} \\
z_G &= \frac{w_1z_1 + w_2z_2 + w_3z_3 + \cdots}{W} = \frac{\sum_i w_i z_i}{\sum_i w_i}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.5}
$$

で与えられ，物体に固定された1点であることがわかる．

ここで，微小部分を0に近づけて，その極限をとれば，

$$
x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}w}{\int \mathrm{d}w} \qquad y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}w}{\int \mathrm{d}w} \qquad z_G = \frac{\int z\,\mathrm{d}w}{\int \mathrm{d}w} \tag{3.6}
$$

のように積分を用いて表すことができる．

均質な物体では，重力の大きさは体積に比例するから，物体の体積を V とすると，式(3.6)はつぎのように書くことができる．

$$
x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}V}{V} \qquad y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{V} \qquad z_G = \frac{\int z\,\mathrm{d}V}{V} \tag{3.7}
$$

同様に，均質で一様な厚さの薄い板や，一様な断面の細い針金などでは，その重力の大きさは面積や長さに比例するから，板の面積を A，線の長さを L とすると，

$$
\text{板の場合} \quad x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{A} \qquad y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{A} \tag{3.8}
$$

$$
\text{線の場合} \quad x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}L}{L} \qquad y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}L}{L} \tag{3.9}
$$

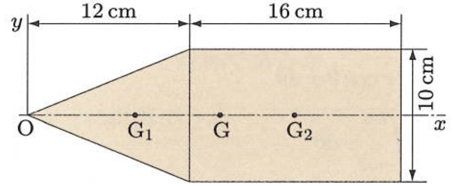
より求めることができる．このようにして求められる，物体の形状だけから決まる点を図心（centroid）という．均質な物体の重心は，その物体の図心に一致する．

3.2 物体の重心

3.2.1 規則的な図形の重心

物体が対称軸をもてば重心は対称軸上にある．そして，二つの対称軸をもてば，その交点が重心の位置になる．物体が点対称であればその点が重心である．また，物体を重心のわかっているいくつかの部分に分けることができる場合，各部分の重心にはたらく平行力の合力を求めて，重心の位置を求めることができる．以下で，いくつかの例題によってさまざまな図形の重心を求めてみよう．

例題 3.1 **図 3.2** に示す平面板の重心の位置を求めよ．



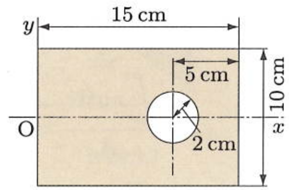
▶図 3.2

解答 図のように座標軸をとる．x 軸に関して対称であるから，重心は x 軸上にある．この図形を三角形と長方形に分け，三角形の重心を G_1，長方形の重心を G_2 とすると，$OG_1 = 8$ cm，$OG_2 = 20$ cm となる．重心の x 座標を x_G とすれば，y 軸のまわりのモーメントを考えて，つぎの式が成り立つ．

$$
220\,x_G = 160 \times 20 + 60 \times 8 \qquad \therefore \quad x_G = 16.7
$$

したがって，重心は x 軸上で原点より右へ16.7 cmのところにある．

例題 3.2 **図 3.3** のような長方形の板に円形の穴があいている．この板の重心の位置を求めよ．



▶図 3.3

解答 図のように座標軸をとる．x 軸に関して対称であるから，重心の x 座標を求めればよい．y 軸のまわりのモーメントを考えれば，穴のない板のモーメントは穴のあいている板のモーメントと穴の部分のモーメントの和である．したがって，重心の x 座標 x_G は，

$$
15 \times 10 \times 7.5 = 4\pi \times 10 + x_G(15 \times 10 - 4\pi)
$$

$$
\therefore \quad x_G = \frac{15 \times 10 \times 7.5 - 4\pi \times 10}{15 \times 10 - 4\pi} = 7.3
$$

となり，重心は半径2 cmの穴の中心より左へ2.7 cmのところにある．