集合に関しては割愛し、確率と確率分布について要約する。

1　確率

1.1　条件付き確率

ある事象 $X = x$ が与えられた下で，$Y = y$ となる確率のこと。

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

1.2　ベイズの定理

ある事象 $X = x$，$Y = y$ に対して、以下が成り立つ。

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x)P(Y = y|X = x)}{P(Y = y)}$$

1.3　期待値、分散、標準偏差

1.3.1　期待値

確率変数 f の期待値 $\mathrm{E}(f)$ は以下のように表される。

$$E(f) = \int P(X = x)f(X = x)dx$$

離散系の場合は

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)f(X = x_i)$$

1.3.2　分散

確率変数 f の分散 $\mathrm{Var}(f)$ は以下のように表される。ただし、μ は f の期待値とする。

$$\mathrm{Var}(f) = \mathrm{E}((f-\mu)^2)$$

また、以下のようにも表すことができる。

$$\mathrm{Var}(f) = \mathrm{E}(f^2) - \mu^2$$

また、f と確率変数 g との共分散 $\mathrm{Cov}(f,g)$ は以下のように表される。ただし、ν は g の期待値とする。

$$\mathrm{Cov}(f,g) = \mathrm{E}((f-\mu)(g-\nu))$$

$$\mathrm{Cov}(f,g) = \mathrm{E}(fg) - \mu\nu$$

1.3.3　標準偏差

確率変数 f の分散を $\mathrm{Var}(f)$ とするとき、標準偏差 σ は以下のように表される。

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(f)}$$

1.4　確率分布

1.4.1　ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布は以下のように表される。

$$P(X=k|p) = p^k(1-p)^k \quad (k=0,1)$$

1.4.2　二項分布

ベルヌーイ分布を多試行に拡張したもの。試行回数を n とすると、以下のように表される。

$$P(X=k|p,n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n)$$

1.4.3　カテゴリカル分布

ベルヌーイ分布を多値に拡張したもの。取りうる値が M つあるとすると、以下のように表される。

$$P(X=\vec{k}|\vec{p}) = \prod_{M=1}^{M} p_m^{k_m}$$

1.4.4　ガウス分布

平均 μ, 標準偏差 σ の正規分布。以下のように表される。

$$N(x;\mu,\sigma^2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$