

1 確率

1.1 条件付き確率

ある事象 $X = x$ が与えられた下で, $Y = y$ となる確率のこと。

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

1.2 ベイズの定理

ある事象 $X = x$, $Y = y$ に対して、以下が成り立つ。

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x)P(Y = y|X = x)}{P(Y = y)}$$

1.3 期待値、分散、標準偏差

1.3.1 期待値

確率変数 f の期待値 $E(f)$ は以下のように表される。

$$E(f) = \int P(X = x)f(X = x)dx$$

離散系の場合は

$$E(f) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)f(X = x_i)$$

1.3.2 分散

確率変数 f の分散 $\text{Var}(f)$ は以下のように表される。ただし、 μ は f の期待値とする。

$$\text{Var}(f) = E((f - \mu)^2)$$

また、以下のようにも表すことができる。

$$\text{Var}(f) = E(f^2) - \mu^2$$

また、 f と確率変数 g との共分散 $\text{Cov}(f, g)$ は以下のように表される。ただし、 ν は g の期待値とする。

$$\text{Cov}(f, g) = E((f - \mu)(g - \nu))$$

$$\text{Cov}(f, g) = E(fg) - \mu\nu$$

1.3.3 標準偏差

確率変数 f の分散を $\text{Var}(f)$ とするとき、標準偏差 σ は以下のように表される。

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(f)}$$

1.4 確率分布

1.4.1 ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布は以下のように表される。

$$P(X = k|p) = p^k(1 - p)^{1-k} \quad (k = 0, 1)$$

1.4.2 二項分布

ベルヌーイ分布を多試行に拡張したもの。試行回数を n とすると、以下のよう表される。

$$P(X = k|p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

1.4.3 カテゴリカル分布

ベルヌーイ分布を多値に拡張したもの。取りうる値が M つあるとすると、以下のよう表される。

$$P(X = \vec{k}|\vec{p}) = \prod_{m=1}^M p_m^{k_m}$$

1.4.4 ガウス分布

平均 μ , 標準偏差 σ の正規分布。以下のよう表される。

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$