Distribuzioni

Esercizi

Metodi Matematici per l'ingegneria

9 aprile 2025

Politecnico di Torino

Table of Contents

Appunti

1 Derivata Distribuzionale

$$\langle T', \varphi(x)\rangle = -\langle T, \varphi'(x)\rangle$$

- **Linearità** : $(\lambda T_1 + \mu T_2)' = \lambda T_1' + \mu T_2'$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $(T(ax+b))' = aT'(ax+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$
- $((g(x)T(x))' = g'(x)T(x) + g(x)T'(x)$ con $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

- $T'_{f(x)} = T_{f'(x)} + \sum_{i=1}^{k}[f(x_i^+) - f(x_i^-)] \cdot \delta_{x_i}$ $\quad$ *with* $\quad f(x_i^\pm) := \lim_{x \to x_i^\pm} f(x)$

Esercizio 1

Calcola la derivata distribuzionale della distribuzione regolare indotta da:

$$f(x) = sign(x) + 2x$$

con la seguente definizione di sign(x):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Quale risposta è quella corretta?

1. $f'(x) = T_2 + 2\delta_0$
2. $f'(x) = T_2$
3. $f'(x) = T_3 + 2\delta_0$
4. $f'(x) = T_0 + 2\delta_0$

Esercizio 2

Calcola la derivata distribuzionale della seguente distribuzione:

$$T = e^{x^2} \cdot \delta_{-1} + T_{-3 \cdot sign(x)}$$

con la seguente definizione di sign(x):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Quale risposta è quella corretta?

1. $T' = e \cdot \delta'_{-1} - 6\delta_0$
2. $T' = e \cdot \delta_{-1} - 6\delta_0$
3. $T' = e \cdot \delta'_{-1} + 6\delta_0$
4. $T' = 6\delta'_{-1} - e \cdot \delta_0$

Esercizio 3

Sia $\varphi(x) \in \mathbb{D}$ una funzione test tale che $\varphi'(0) = -2$ risolvi e semplifica:

$$\lambda = \langle (\sin x) \cdot \delta_0'', \varphi(x) \rangle$$

Quale risposta è quella corretta?

1. non possiamo risolvere l'esercizio perchè $\varphi(x)$ è ignoto
2. δ_0
3. -4
4. $2 \cdot \delta_0'$

Esercizio 4

1 Derivata Distribuzionale

Trova tutte le distribuzioni $T \in \mathbb{D}'$ per le quali la seguente equazione risulta vera:

$$T' = 2 \cdot \delta_{-2} - 6 \cdot \delta_1 + \delta_4'$$

Quale risposta è corretta?

1. $T = T_{H(t+2)} - 6 \cdot T_{H(t-1)} + \delta_4 + c$
2. There is no combination of distributions that can create T'
3. $T = T_{H(t+2)} - 6 \cdot T_{H(t-1)} + \delta_4$
4. $T = 2 \cdot T_{H(t+2)} - 6 \cdot T_{H(t-1)} + \delta_4 + c$

Table of Contents

2 Limiti di Distribuzioni

- $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in\mathbb{D}$
- $\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S, \qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
- Teorema della media integrale per integrali definiti
  $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$ con $a,b\in\mathbb{R}, a\le b, c\in(a,b)$

Esercizio 1

Sia $T_n = n^n \cdot \delta_n$ una sequenza di distribuzioni, determina se la sequenza converge o meno, e in caso affermativo determina la distribuzione a cui la sequenza converge.

Quale risposta è corretta?

1. Il limite non converge
2. converge a: 0
3. converge a: δ_n
4. converge a: δ_0

Esercizio 2

Sia $T_n = n \cdot \left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_0\right)$ una sequenza di distribuzioni, dimostra che la sequenza non converge in $\mathbb{D}'$.

Esercizio 3

Determina il limite (nel senso delle distribuzioni) a cui T_{f_n} converge:

$$f_n = n \cdot P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x)$$

con $P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x)$ definita come la funzione porta con centro 0 e ampiezza $\frac{4}{n}$.
La funzione porta può essere definita come:

$$P_{\left[-\frac{2}{n};\frac{2}{n}\right]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{2}{n} \end{cases}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\delta_{\frac{1}{n}}$
2. δ_0
3. $4 \cdot \delta_0$
4. Il limite non esiste

Distribuzioni *Thank you for listening!*

Any questions?