



Trasformata di Laplace

Esercizi

Metodi matematici per l'ingegneria

June 13, 2024



**Politecnico
di Torino**



Table of Contents

1 Trasformata di Laplace per funzioni

► Trasformata di Laplace per funzioni

► Transformata di Laplace di Distribuzioni

► Anti Trasformata di Laplace



Appunti

1 Trasformata di Laplace per funzioni

se $\int_a^b |f(t)| dt < +\infty$ $[a, b] \subset [0, +\infty)$ $\Omega_f := \{s \in \mathbb{C} : f(t) \cdot e^{-st} \text{ è sommabile}\}$
allora $\mathcal{L}[f(t)](s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

la convergenza della trasformata di Laplace dipende solamente dalla parte reale (λ) di s
 $\in \Omega_f$

$$\lambda_f := \inf\{\operatorname{Re}(s) : f(t) \cdot e^{-st} \text{ è sommabile}\}$$



Esercizio 1

1 Trasformata di Laplace per funzioni

Trova l'insieme Ω_f e la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = t \cdot \sin(\omega t) \cdot H(t)$$

Quale risposta è corretta?

1. Non posso trasformare la funzione
2. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$, $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
3. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$, $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
4. $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$, $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$



Esercizio 2

1 Trasformata di Laplace per funzioni

Trova l'insieme Ω_f e calcola la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = (t - 3) \cdot H(t - 2) \cdot e^{t+1}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\lambda_f = 1, \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{3-2s} \cdot \frac{2-s}{(s-1)^2}$

2. $\lambda_f = 0, \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{3-2s} \cdot \frac{2-s}{(s-1)^2}$

3. $\lambda_f = 1, \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{3-3s} \cdot \frac{2-s}{(s-2)^2}$

4. $\lambda_f = 0, \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{3-3s} \cdot \frac{2-s}{(s-2)^2}$



Esercizio 3

1 Trasformata di Laplace per funzioni

Trova l'insieme Ω_f e calcola la trasformata di Laplace di:

$$f(t) = H(t) \cdot e^{t-1} + H(t-2) \cdot \cos(t)$$

Quale risposta è corretta?

1. $\lambda_f = 1, \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + \cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s-2)^2+1}$
2. $\lambda_f = 0, \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + \cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s-2)^2+1}$
3. $\lambda_f = 0, \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + \cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$
4. $\lambda_f = 1, \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{s-1} + \cos(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \sin(2) \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$



Table of Contents

2 Trasformata di Laplace di Distribuzioni

- ▶ Trasformata di Laplace per funzioni
- ▶ **Trasformata di Laplace di Distribuzioni**
- ▶ Anti Trasformata di Laplace



Esercizio 1

2 Transformata di Laplace di Distribuzioni

Calcola la trasformata di Laplace di:

$$T = t^4 \cdot \delta_3$$

Quale risposta è corretta?

1. $L[T](s) = 81 \cdot e^{3s}$

2. $L[T](s) = -81 \cdot e^{3s}$

3. $L[T](s) = 81 \cdot e^{-3s}$

4. $L[T](s) = -81 \cdot e^{-3s}$



Table of Contents

3 Anti Trasformata di Laplace

- ▶ Trasformata di Laplace per funzioni
- ▶ Transformata di Laplace di Distribuzioni
- ▶ Anti Trasformata di Laplace



Appunti

3 Anti Trasformata di Laplace

La **Trasformata di Laplace** è **iniettiva** $\implies \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$

Formula di Heaviside: $M_j = \frac{1}{(l-j)!} \left\{ \frac{d^{l-j}}{ds^{l-j}} \left[(s - p_M)^l \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s=p_M}$

Espansione in fratti semplici $\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)}$

se il grado del numeratore $N(s)$ è maggiore o uguale al grado del denominatore $D(s)$, allora, la distribuzione nel dominio del tempo avrà almeno una delta di Dirac.



Esercizio 1

3 Anti Trasformata di Laplace

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^3 + 3s^2 + s + 3}$$

Quale risposta è corretta?

1. $[e^{3t} + \cos(t)] \cdot H(t)$
2. $[e^{3t} + \cos(t)] \cdot H(t - 3)$
3. $[e^{-3t} + \cos(t)] \cdot H(t - 3)$
4. $[e^{-3t} + \sin(t)] \cdot H(t)$



Esercizio 2

3 Anti Trasformata di Laplace

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 4}{(s + 1)(s - 2)^2}$$

Quale risposta è corretta?

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\frac{8}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t$ | 3. $\frac{8}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{-t} \cdot t \cdot H(t)$ |
| 2. $\frac{1}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{8}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t \cdot H(t)$ | 4. $\frac{8}{9} \cdot e^{-t} \cdot H(t) + \frac{1}{9} \cdot e^{2t} \cdot H(t) + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} \cdot t \cdot H(t)$ |



Esercizio 3

3 Anti Trasformata di Laplace

Calcola la anti trasformata di Laplace di:

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 3}{s^3 - 4s^2 - 15s + 18}$$

Quale risposta è corretta?

1. $\delta_0 - \frac{7}{20} \cdot e^t \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{-6t} \cdot H(t)$
2. $-\frac{7}{20} \cdot e^t \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{6t} \cdot H(t)$
3. $\delta_0 - \frac{7}{20} \cdot e^t \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{6t} \cdot H(t)$
4. $-\frac{7}{20} \cdot e^t \cdot H(t) - \frac{7}{12} \cdot e^{-3t} \cdot H(t) + \frac{89}{15} \cdot e^{-6t} \cdot H(t)$



Trasformata di Laplace

Thank you for listening!

Any questions?