Esercizio 34. Una scatola contiene 100 dadi di cui 80 sono omogenei mentre gli altri sono truccati in modo che la probabilità di ottenere 6 sia uguale a 0.5 mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità 0.1.
Un dado viene estratto dalla scatola e lanciato: sia X la variabile casuale che indica il numero apparso sulla faccia superiore del dado. Calcolare la funzione di densità, il valore atteso e la varianza di X.

(Risposta: $E[X] = 3.7, Var[X] = 3.14$)

Esercizio 35. Un'urna contiene cinque sfere delle quali tre sono contrassegnate con i numeri 1,2 e 3 mentre le altre due sono contrassegnate con il numero 4. Si estraggono senza reimmissione due sfere dall'urna: sia X la variabile casuale che indica la somma dei numeri corrispondenti alle sfere estratte. Si determino:

a) uno spazio dei campioni per l'esperimento di cui sopra;

b) la funzione di densità della variabile casuale X con relativa rappresentazione grafica;

c) la funzione di distribuzione cumulativa di X con relativa rappresentazione grafica;

d) valore atteso e varianza di X;

e) $P[X \geq 7]$ e $P[3 < X \leq 5]$.

(Risposta: d) media 5.6, varianza 2.04 - e) $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{5}$)

Esercizio 36. Un'urna contiene 4 palline rosse e 1 bianca. Si estrae senza reimbussolamento dall'urna fino a che non esce una pallina bianca. Sia N il numero di estrazioni effettuate (inclusa quella in cui esce la pallina bianca).

a) Calcolare e disegnare la distribuzione discreta di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale N.

b) Calcolare valore atteso e varianza.

Si supponga poi di ripetere l'esperimento due volte (in maniera indipendente) e si denotino con N_1 e N_2 il numero di estrazioni effettuate la prima e la seconda volta, rispettivamente. Sia infine $M = N_1 + N_2$.

c) Calcolare valore atteso e varianza di M.

$\Big($Risposta: b) $E[N] = 3, Var[N] = 2$ - c) $E[M] = 6, Var[M] = 4\Big)$

Esercizio 37. Sia X la variabile casuale che descrive il tempo di vita di un oggetto. Supponiamo che X abbia funzione di ripartizione:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-\frac{t}{10}} & \text{se } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Trovare:

a) la probabilità che X assuma valori tra 1.5 e 2;

b) la probabilità che l'oggetto funzioni per più di 5 unità di tempo.

(Risposta: a) $e^{-0.15} - e^{-0.2}$, b) $e^{-0.5}$)

Esercizio 38. Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}t & \text{se } t \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } t \in [1, 2] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t-2) & \text{se } [2, 3) \\ 1 & \text{se } [3, +\infty) \end{cases}$$

Trovare:

a) la probabilità che X prenda valori tra 1.5 e 2;

b) la probabilità che X prenda valori tra 0.5 e 1;

c) la probabilità che X prenda valori maggiori di 1.5.

(Risposta:a) 0 - b) $\frac{1}{4}$ - c) $\frac{1}{2}$)

Esercizio 39. Due palline sono scelte (senza reimbussolamento) a caso da un'urna contenente 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda 1 per ogni pallina bianca estratta. Denotiamo con X la vincita. Quali sono i possibili valori di X e con quali probabilità vengono ottenuti?

(Risposta: $supp(X) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $P[X = -2] = \frac{56}{182}$, $P[X = -1] = \frac{32}{182}$, $P[X = 0] = \frac{2}{182}$, $P[X = 1] = \frac{64}{182}$, $P[X = 2] = \frac{16}{182}$, $P[X = 4] = \frac{12}{182}$)

Esercizio 40. Un esame a crocette ha 5 domande con 4 possibili risposte (di cui solo una corretta). Sia X una variabile casuale che descrive il numero di risposte corrette scegliendo la risposta a caso. Descrivere la funzione di ripartizione di X.

(Risposta: $supp(X) = \{0, \ldots, 5\}$, $P[X = k] = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$)

Esercizio 41. Una moneta viene lanciata finché non esce testa. Sia X il numero di lanci. Descrivere la funzione di ripartizione di X.

Esercizio 42. Sia X una variabile casuale assolutamente continua avente densità

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } x \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Trovare:

a) il valore atteso di X;

b) la probabilità che X assuma valori compresi tra 1.5 e 2;

c) la probabilità che X assuma il valore 1.5

$\Big($Risposta: a) 1 - b) $\frac{3}{8}$ - c) 0$\Big)$

Esercizio 43. Sia X una variabile casuale assolutamente continua avente densità

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{se } x \in [0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare α in modo che f sia effettivamente una funzione di densità.

b) Determinare la corrispondente funzione di ripartizione.

c) Determinare la probabilità che X assuma valori maggiori di 1.

(Risposta a) 2 - c)$2e^{-1} - e^{-2}$:)

Esercizio 44. Un venditore porta a porta vende degli oggetti A a 10 euro e degli oggetti B a 15 euro. Un cliente compra un oggetto A con probabilità 0.1 e un oggetto B con probabilità 0.05. Si supponga che il venditore si presenti un giorno da 200 clienti. Sia quindi X il ricavato dagli oggetti A e Y il ricavato dagli oggetti B. Calcolare il valore atteso di $Z = X + Y$ (supponendo che tutti gli eventuali acquisti siano indipendenti tra di loro).

(Risposta: 350)

Esercizio 45. Sia X una variabile casuale assolutamente continua con densità

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{se } t \in [0,1) \cup [2,3) \\ 2c & \text{se } t \in [1,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare:

a) il valore di c affinché f sia una densità;

b) la funzione di ripartizione di X;

c) valore atteso e deviazione standard di X;

d) $P[X \leq 1.2]$;

e) $P[1.2 < X \leq 3.5]$

f) $P[1.2 \leq X \leq 2.5]$.

(Risposta: a) $\frac{1}{4}$ - c) $E[X] = 1.5,\ \sigma_X = \sqrt{\frac{7}{12}}$ - d) $\frac{7}{20}$ - e) $\frac{13}{20}$ - f) $\frac{21}{40}$)