Esercizio 81. Un supermercato ha sia una fila rapida che una super-rapida. Sia X_1 il numero di clienti che passano per la fila rapida in un certo giorno e sia X_2 quelli che passano invece per la fila super-rapida nello stesso giorno. Supponiamo che la densità discreta sia:

		x_2			
		0	1	2	3
	0	.08	.07	.04	.00
	1	.06	.15	.05	.04
x_1	2	.05	.04	.10	.06
	3	.00	.03	.04	.07
	4	.00	.01	.05	.06

a) Trovare $P[X_1 + X_2] < 5$;
b) Verificare se X_1 e X_2 sono indipendenti o scorrelate.

c) Trovare $P[X_2 < 2 | X_1 > 1]$

(Risposta: a) 0.71 - c) $\frac{0.13}{0.51}$)

Esercizio 82. Annie e Alvie si sono accordati per pranzare insieme tra mezzogiorno (0:00PM) e le 1:00PM. Indichiamo il tempo di arrivo di Annie con X, mentre con Y quello di Alvie e supponiamo che siano indipendenti con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Qual è il valor medio del tempo che aspetterà il primo arrivato? (Suggerimento: $h(X,Y) = |X - Y|$).

(Risposta: $\frac{1}{4}$)

Esercizio 83. Date due variabili aleatorie X ed Y dimostrare che

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y]$$

e

$$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X,Y]$$

Esercizio 84. a) Usando le proprietà del valore atteso mostrare che $Cov[aX + b, cY + d] = acCov[X, Y]$.

b) Usando la parte (a) insieme alle proprietà di varianza e deviazione standard provare che $Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X, Y)$ quando a e c hanno lo stesso segno.

c) Cosa accade se a e c hanno segni opposti?

Esercizio 85. Un istruttore ha dato ai suoi studenti un quiz diviso in due parti. Per uno studente a caso, sia X il numero di punti fatti nella prima parte e Y i punti fatti nella seconda. Supponiamo che la distribuzione congiunta di X e Y sia data dalla seguente tabella: * a) Se il punteggio totale è dato dalla somma delle due parti, qual è il valore atteso dei voti? b) Se il punteggio totale è dato dal massimo dei due risultati, qual è il valore atteso dei voti? c) Verificare che X e Y sono correlate

(Risposta: a) 12.6 - b) 9.6)

*

X\Y	0	5	10	15
0	0.02	0.06	0.02	0.10
5	0.04	0.15	0.20	0.10
10	0.01	0.15	0.14	0.01

Esercizio 86. Siano X_1 ed X_2 con distribuzione congiunta in figura.

a) Trovare $E[X_2|X_1 = k]$ per $k = 1, 2, 3$.

b) Descrivere la variabile aleatoria $E[X_2|X_1]$.

c) Calcolare $E[X_2]$

(Risposta: a) $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$ - c) 1)

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	f_{X_2}
0	1/9	1/9	0	2/9
1	2/9	1/9	2/9	5/9
2	0	1/9	1/9	2/9
f_{X_1}	1/3	1/3	1/3	1

Esercizio 87. X e Y hanno densità congiunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{\{y>0\}}(x,y) \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}(x,y).$$

Trovare il valore atteso di X^2 dato Y.

(Risposta: $\frac{Y^2}{3}$)

◇ Se $\mathbb{P}[A] = 0,6$ e $\mathbb{P}[B] = 0,5$ allora $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$. [V] [F]

◇ $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ allora A e B sono indipendenti. [V] [F]

◇ Non esistono variabili casuali con densità $f(x)$ dispari, cioè tale che $f(x) = -f(-x)$. [V] [F]

◇ Sia $a > 0$. Allora $\mathbb{P}(X < a) \leq \mathbb{P}(|X| < a)$. [V] [F]

◇ Se la coppia (X, Y) di v.c ha densità simmetrica $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y,X}(y, x)$ allora $\mathbb{P}(X \geq Y) = 0.5$. [V] [F]

◇ Se $\mathbf{E}(X^2) = 0$ allora $\mathbf{E}(X) = 0$. [V] [F]

- $\diamond$ Siano $X, Y \sim Bernoulli(p)$ ed indipendenti. Allora $\mathbf{E}[XY] = p^2$. [V] [F]
- $\diamond$ Per ogni variabile casuale X a quadrato integrabile vale $\mathbf{E}[X^2] \geq (\mathbf{E}[X])^2$. [V] [F]
- $\diamond$ Se $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[C|A \cap B] = 1/2$ allora $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = 1/8$. [V] [F]
- $\diamond$ Se $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{4}$ e $\mathbb{P}[B] = \frac{1}{4}$ allora $\mathbb{P}[A \cap B] = 0$. [V] [F]
- $\diamond$ Sia $X \simeq Exp(\lambda)$. Allora $\mathbb{P}[X > t+s|\ X > t] = \mathbb{P}[X > s],\ \forall t, s \geq 0$ [V] [F]
- $\diamond$ Se $\mathbf{E}[X] = 2$ allora $\mathbf{E}[X^2] = 4$. [V] [F]

- $\diamond$ Se $\mathbf{E}[X] = 2$ allora $\mathbf{E}[\frac{1}{X}] = \frac{1}{2}$. [V] [F]
- $\diamond$ Siano $X \sim Exp(\lambda_1)$ e $Y \sim Exp(\lambda_2)$ ed indipendenti. Allora $X + Y \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ [V] [F]
- $\diamond$ Siano A_1 ed A_2 due eventi indipendenti. Allora $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A_1]\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[B|A_2]\mathbb{P}[A_2]$. [V] [F]
- $\diamond$ Se $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[B] = \frac{3}{4}$ allora $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$. [V] [F]
- $\diamond$ Rispondendo a caso a queste sei domande la probabilità di sbagliarne esattamente una è $\frac{6}{64}$. [V] [F]
- $\diamond$ Siano $X, Y \sim Bernoulli(p)$ ed indipendenti. Allora $\mathbf{E}[\min(X, Y)] = p^2$. [V] [F]

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme su $[0, 1]$. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{P}(Y - X \leq \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{P}(Y - X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

$\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{P}(Y - X \leq \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$

$\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti è corretta

Siano X e Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p indipendenti. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{P}(X + Y = 0) = 2(1 - p)$

$\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{P}(X - Y = 0) = 1 - p(1 - p)$

$\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{P}(X + Y = 0) = 2(1 - p)^2$

$\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{P}(X - Y = 0) = 1 - 2p(1 - p)$

Quattro coppie di gemelli sono disposte in riga casualmente. La probabilità che ognuno sia vicino al proprio gemello è:

$\boxed{\text{A}}$ $8!$

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{2^4 4!}{8!}$

$\boxed{\text{C}}$ $\frac{2^4}{8!}$

$\boxed{\text{D}}$ $\frac{4!}{8!}$