סופיר
אילן
342615648

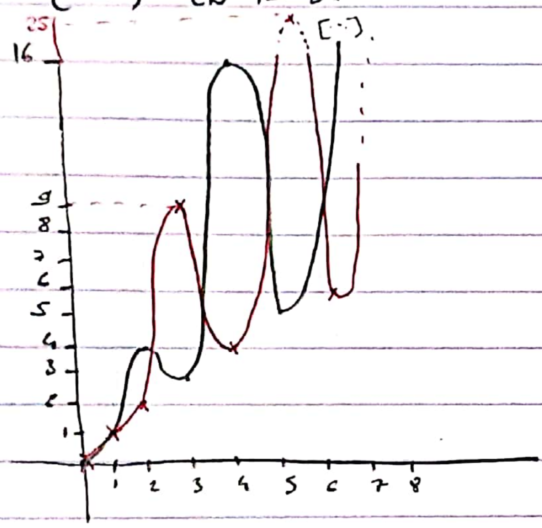
מבני נתונים
מטלה $\cancel{0}$1

שאלה 1:

טענה 1, לא נכונה. דוגמא נגדית:

ניקח $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ אי-זוגי} \\ x^2, & x \text{ זוגי} \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x, & x \text{ זוגי} \\ x^2, & x \text{ אי זוגי} \end{cases}$

לפי הגרף של שתי פונקציות:



ואז לפי הגרף רואים ששתי פונקציות מתעלבות בלי סוף אז לא יהיה אחת מעל השני כמו שראינו בהגדרה.

$\blacksquare$

טענה 2 : נכונה

נגדיר $h(x)=f(x)+g(x)$ וגם נגדיר $i(x)=f(x)\cdot g(x)$

מספיק להוכיח כי:

$$h(x)=O(i(x))$$

כלומר צ"ל כי קיימים x_0, C כך שלכל $x_0<x$ מתקיים:

$$0\le h(x)\le C\cdot i(x)$$

נניח כי $f(x)\ge g(x)$

ולכן עבור $C=2$ ו- $x_0=1$ נקבל כי: $0\le h(x)\le 2\, i(x)$

וגם לפי טענה עזר: $f(x)+g(x)\le 2\cdot f(x)\cdot g(x)$ מתקיים:

$$0\le f(x)+g(x)\le 2\cdot f(x)\cdot g(x)$$

כי לפי ההנחה $f(x)\ge g(x)$ ובנוסף $f(x),g(x)$ פונקציות חיוביות הגדולות מ-1

עכשיו נניח בשלילה כי $2\cdot f(x)\cdot g(x)<f(x)+g(x)$

ולכן $2\cdot f(x)\cdot g(x)-g(x)<f(x)$

ולכן $g(x)\cdot(2\cdot f(x)-1)<f(x)$

אבל אנחנו יודעים כי $2\cdot f(x)-1>1$ ולכן קיבלנו כי $g(x)\cdot C<f(x)$

כאשר $C>1$

סתירה ולכן $f(x)\le g(x)$

■

טענה 3 : הטענה נכונה. דוגמא

קיימת פונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ומספר קבוע k כלשהו בו נקח $k=3$

כך ש: $f(x-k)\ne O(f(x))$

כלומר $f(x-3)\ne O(\frac{1}{x})$

ולכן לפי הגדרה: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{x}}=-\infty$

וגם מקבלים כי $f(\frac{1}{x-3})\gg\frac{1}{x}$

וגם מקבלים כי $f(x-k)\ne O(f(x))$ כי זה [illegible] $f(x-k)=\Omega(f(x))$

שאלה 2:

הכי קל להוכיח את הנ"ל ע"י גבולות, ע"מ להראות ש- $f_i=O(f_j)$ מספיק להראות $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_i}{f_j}\in[0;\infty)$,

וע"מ להראות ש- $f_i=\Theta(f_j)$ מספיק להראות כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_i}{f_j}\in(0,\infty)$:

- $f_1(n)=O f_2(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \Rightarrow f_1(n)\le f_2(n)$
- $f_5(n)=O f_2(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n^n}=0 \Rightarrow f_5(n)\le f_2(n)$
- $f_5(n)=O f_1(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0 \Rightarrow f_5(n)\le f_1(n)$

$f_5\le f_1\le f_2$

- $f_6(n)=O f_4(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2021}{n^2+n\log_2(n^{10})+n+5}=0 \Rightarrow f_6(n)\le f_4(n)$
- $f_6(n)=O f_1(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2021}{n!}=0 \Rightarrow f_6(n)\le f_1(n)$
- $f_4(n)=O f_1(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n\log_2(n^{10})+n+5}{n!}=0 \Rightarrow f_4(n)\le f_1(n)$

$f_6\le f_4\le f_1$

- $f_6(n)=O f_3(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2021}{2^{\log_3(n)}}=0 \Rightarrow f_6(n)\le f_3(n)$
- $f_3(n)=O f_1(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\log_3(n)}}{n!}=0 \Rightarrow f_3(n)\le f_1(n)$
- $f_3(n)=O f_4(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\log_3(n)}}{n^2+n\log_2(n^{10})+n+5}=0 \Rightarrow f_3(n)\le f_4(n)$

$f_6\le f_3\le f_4$

- $f_4(n)=O f_5(n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n\log_2(n^{10})+n+5}{4^n}=0 \Rightarrow f_4(n)\le f_5(n)$

לכן מקבלים כי:

$$\boxed{f_6\le f_3\le f_4\le f_5\le f_1\le f_2}$$

שאלה 3:

1

```
Public static int foo(int m) {
    if (m <= 2) return 1;                         // O(1)
    for (int i = m; i >= m/8; i -= m/2) {         // O(1)
        for (int j = m; j > 2; j = j/2) {         // O(log(m))
            System.out.println(i);
        }
    }
    return foo(m/2);                              // O(log m)
}
```

בחלק הראשון של הקוד עד Syso יש לנו $O(\log(m))\cdot O(1)$ כי
מכפלים בין שני לולאות
אחר כך מגיעים ל "return" הפונקציה קוראת את עצמה עם $(m/2)$
לכן הסיבוכיות של הקוד זה:

$$O(\log(m))\cdot O(\log(m)) = \boxed{O(\log^2(m))}$$

הוכחה:

$$T(m) = \begin{cases} O(1) & m=1 \\ T(m/2) + O(\log m) \end{cases}$$

נפתח ת הנוסחת נסיגה:

$$T(m) = T(m/2) + O(\log m)$$
$$= T(m/4) + O(\log m) + O(\log(m))$$
$$= T(m/8) + O(\log(m)) + O(\log(m)) + O(\log(m))$$
$$\vdots$$
$$= T(m/2^m) + O(\log(m))$$

לכן $\boxed{foo(m) = O(\log^2(m))}$

②

```java
Public static void foo2 (int m) {
    int x = 0;
    for (int i = m ; i >= 3 ; i--)
        for (int j = 1 ; j <= Math.log(i); j++)
            for (int t = 0; t <= m ; t += j)
                x++;
        System.out.println(x);
}
```

הקוד נראה כמו שנחבר ר לולאות:

$$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \cdots + \frac{m}{\log(m)}$$

$$= m \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\log(m)}\right)$$

כי יקבל טור הרמוני רגיל שמתכנס ל $\ln(m)$

$$m \cdot \sum_{k=1}^{\log(m)} \frac{1}{k} = \log(\log(m)) \cdot m$$

לכן בגלל שהלולאות אחת בתוך השנייה נכפיל את הקוד ונקבל

$$\boxed{foo2(m) = O(\log(\log(m)) \cdot m^2}$$

Scanné avec CamScanner