INVESTIGANDO LA PARADOJA DE LA LÍNEA DE COSTA

Mayo 2021

Mátemáticas: Análisis y Enfoques NS

Evaluación Interna

Índice

1. Introducción

Fue durante el verano de 2020. Como todos los años, yo junto a mi familia fuimos de vacaciones a Benidorm. El principal factor que nos enganchó fue el CableSki, un deporte acuático, conocido por su modalidad en barca (esquí naútico) pero que ahí se hace en cable.

Figura 1. Fotografía del Islote de Benidorm desde un plano cenital

Este verano, debido al COVID-19, el Cable Ski cerró por completo debido al gran número de personas que se aglomeran ahí. Ya estando ahí, no tuvimos otra opción que buscar divertirnos de otras formas y fue cuando encontramos que se alquilaban motos acuáticas para salir desde el puerto y dar una vuelta por el islote de Benidorm (figura 1). Fue durante el primer viaje a la isla que se me ocurrió si la isla era lo suficientemente pequeña para poder recorrerla en un tiempo razonable. Si bien durante el primer viaje aprecié que el área de la isla no era muy impactante, pude percibir que la isla tenía una línea costera muy compleja. Si bien, el área es fácilmente medible en hectáreas, tratar de medir sistemáticamente la longitud de la costa parece ser más difícil de lo que uno puede suponer.

Tras una larga investigación descubrí algo realmente interesante. Ya en islas pequeñas como la de Benidorm, la medición de su longitud varía considerablemente según diferentes páginas web (Tripkay, mide la longitud como 350m [1], mientras que LoveValencia, la mide como 400m [2]). Si ya es una grande diferencia, en el caso de islas de mayor tamaño como por ejemplo Lanzarote, esta diferencia se magnifica inmensamente (Instituto Geográfico Nacional, mide la longitud como 247,49km [3], mientras que VerLanzarote asegura que mide menos de 80km [4]). Asombrado por esta diferencia en las mediciones, decidí indagar sobre como los geógrafos miden la longitud de las costas. ¿Existe alguna diferencia en la medición de longitudes según el tamaño de la isla? ¿Alguien recorre la costa con motos de agua, llevando un GPS? ¿Puede ser medida a través de Google Maps? Sin embargo, después de una mayor investigación, rápidamente me di cuenta de que este problema es más complicado de lo que en un principio imaginé.

2. La paradoja de la línea de costa

2.1 ¿De qué trata la paradoja de la línea de costa?

Cualquiera que haya estado en una playa, sabe que no existe una línea clara que divida la tierra y el mar, ya que, por la propia naturaleza de los océanos y mares, esta supuesta línea cambia constantemente. Es por ello, que medir la longitud exacta de una costa es prácticamente imposible, y donde los problemas surgen. Además, las costas también se ven afectadas a lo largo del tiempo por factores como el clima y la erosión. Es debido a todos estos factores, que la longitud de la costa es generalmente estimada mediante la aproximación de curvas complejas a líneas rectas. Sin embargo, esta aproximación conlleva que la longitud de la costa incremente a medida que el tamaño de la regla usada sea más pequeño. Esto se debe a que a medida que la regla mide secciones más pequeñas está teniendo en cuenta mayores detalles y por lo tanto, al haber más secciones que medir, supone que se requiere de un mayor número de reglas para medir la costa, lo que resulta en una mayor longitud total**.** Esto conlleva a que cuando el tamaño de la regla usada tienda a cero, la longitud de la costa tienda a infinito y es ahí donde se encuentra esta paradoja.

Esto es consecuencia de la naturaleza fractal de las líneas costeras. La primera observación de este fenómeno fue realizada por Lewis Fry Richardson y posteriormente desarrollada por Benoît Mandelbrot en el artículo[5]: Mandelbrot, B. (1967). How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science, 156*(3775), 636-638, siendo este, en el que se basa mi investigación. En él, Mandelbrot ahonda sobre el problema de medir las longitudes de las islas y como solución, introduce el concepto de las dimensiones fractales, una medida de la complejidad de la costa.

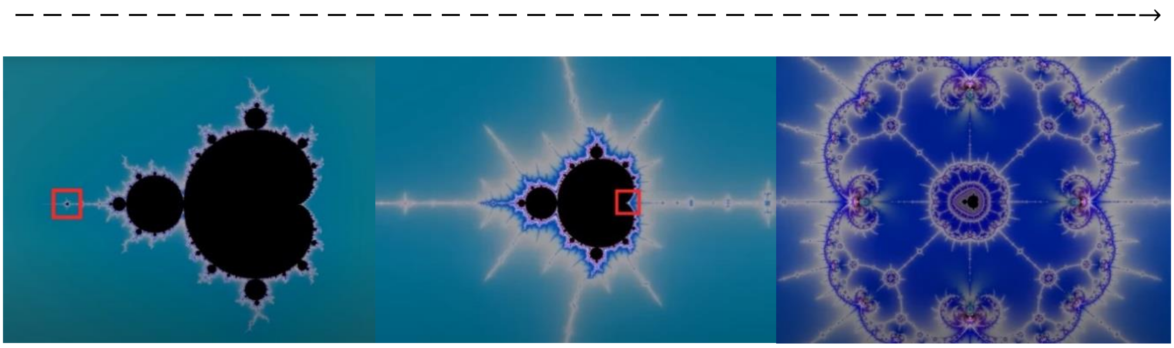
2.2 Propósito de la investigación

En este trabajo **investigo primeramente el concepto de las dimensiones fractales** y, en segundo lugar, busco responder a la pregunta: **¿Cuáles son las dimensiones fractales de las islas españolas; Isla de Cabrera, el islote de Benidorm y Lanzarote?** Estas son tres islas de tamaños completamente diferentes, que, según lo previamente comentado, cuanto más grande la isla, menos precisión existía entre distintas mediciones de la longitud de la línea costera. Mandelbrot, con el concepto de las dimensiones fractales, nos muestra que es mejor medir las islas según la complejidad de sus costas que según una longitud, que nunca va a ser ni precisa ni exacta debido a su propia naturaleza fractal.

3. Fractales y sus dimensiones

3.1 ¿Qué es un fractal?

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas [6]. Su cualidad más distintiva es que los fractales exhiben auto-similitud en diferentes escalas, esto básicamente significa que se puede identificar algún patrón, el cual se puede encontrar repetido infinitas veces en distintas escalas. Un ejemplo muy conocido es el conjunto de Mandelbrot:



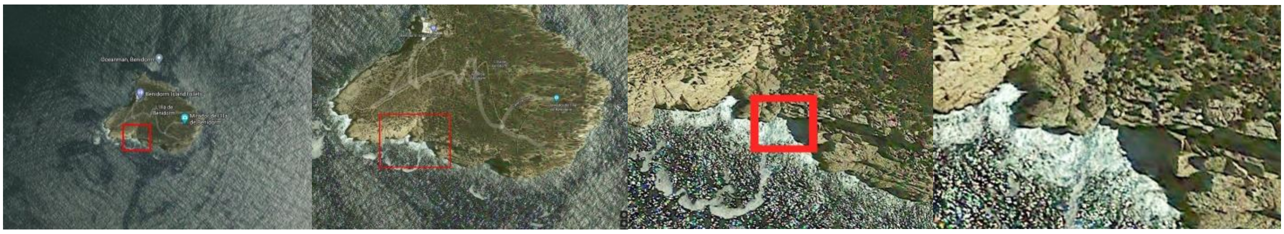
Esta estructura se le puede determinar fractal ya que se puede encontrar un patrón en infinitas escalas dentro de esta estructura.

Asimismo, existen muchos ejemplos de geometría fractal en la naturaleza como se aprecia en las figuras 2, 3, 4 y 5 [7]:

Figura 2. Rayos **Figura 3.** Girasol **Figura 4.** Cola de pavo real **Figura 5.** Romanesco

Entendiendo ya este concepto, como estudio preliminar, decidí comprobar la estructura fractal del islote de Benidorm y la Isla de Cabrera empleando Google Maps.



Como se puede apreciar, a mayor zoom, mayor complejidad de la costa. Es decir, no existe ningún punto en el que la costa de las islas se suavice transformándose en una línea como ocurre en la geometría Euclidiana que se ve representada en la figura 6.

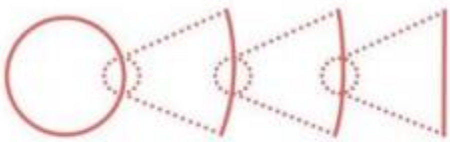


Figura 6. Este círculo demuestra cómo según la geometría Euclidiana, a medida que se hace zoom, este se aproxima a líneas rectas. [8]

Esto supone un gran problema para las personas que pretenden determinar la longitud de una línea costera, ya que en el caso de que utilice reglas, nunca va a existir un punto en el que pueda medir a la perfección un segmento, ya que, a más zoom, más complejidad. Por ello, Mandelbrot determina una nueva forma para poder estudiar las costas, las dimensiones fractales. La dimensión fractal asume una definición alternativa para el concepto de la dimensión. Mandelbrot propone que este tipo de objetos con parámetros "infinitos" pueden ser interpretados usando dimensiones fractales con los que un objeto podría tener una dimensión de un valor no entero (p. ej. 1,262 dimensiones). Para una línea costera, este valor rondaría entre 1 y 2, donde a mayor cercanía al número 2, la línea costera sería más compleja, es decir, más irregular. Sudáfrica sería un claro ejemplo de un país con línea costera "suave" o poco compleja y por lo tanto con una dimensión fractal de 1,02 [8].

3.2 Dimensión de fractales autosimilares

Si bien existen fractales con una estructura muy compleja, los más sencillos son los autosimilares.

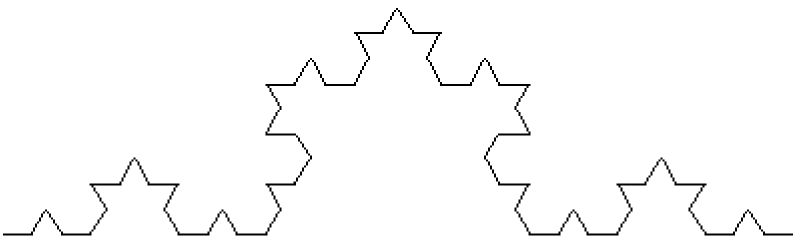


Figura 10. Curva de Koch: Ejemplo de un fractal como autosimilitud exacta. [9]

Esto significa que son estructuras formadas por copias exactas de ellos mismos a menores escalas. Esta simplificación del fractal "tipo" que conocemos se debe a que desde la primera mención del término "fractal" por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975, este concepto ha sido investigado en profundidad por otros matemáticos como Henri Poincaré, Helge von Koch y Waclaw Sierpínski. Estos dos últimos, nos muestran dos ejemplos mucho más sencillos de generar y perfectamente aplicables a la definición del fractal. A continuación se analizara matemáticamente el triángulo de Siepínski:

Triángulo de Sierpínski:

Antes de calcular la dimensión del Triángulo de Sierpínski, me pregunté, ¿se trata de la dimensión de una longitud? Ya que en un primer instante como se aprecia en la primera iteración de la figura 10, se trata de un área, pero como a menores escalas se reduce la superficie considerablemente, consideré el hecho de que podía llegar a tratarse de una longitud. Sin embargo, aunque se redujese muchísimo el área, igualmente iba a seguir quedando pequeñas superficies del triángulo inicial, por lo que también podría tratarse de un área. El volumen quedó descartado en este caso ya que intuitivamente, es imposible determinar esta figura como tal.

Tras una investigación, encontré una forma muy interesante y fácilmente entendible de como se puede analizar la dimensión (D) de un objeto como este.

Figura 10. 5 iteraciones del triángulo de Sierpinski. [10]

En la primera iteración, la figura tiene un tamaño determinado (ya sea una longitud, área o volumen), que, si lo escalo por un factor K, se convertiría en el tamaño que antes era, escalado por K^D. Por lo que si fuese una longitud, la D sería 1, en el caso de que fuese un área sería 2 y en el caso de que fuese un volumen sería 3.

$$\text{Tamaño} \xrightarrow{\text{xK}} \text{Tamaño x } K^D$$

Si nos fijamos en la figura 11. El triángulo de Sierpinski consiste en 3 copias de una versión más pequeña de sí mismo (Hay 3 triángulos azules dentro del rojo). Además, cada versión pequeña (Azul) es una copia del original en un factor de escala $\frac{1}{2}$ ya que es la mitad de ancho que el original (Rojo). Por lo tanto:

$$T_{Rojo} = 3 \cdot T_{Azul} \text{ donde } T_{Azul} = T_{Rojo} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D \text{ por lo que: } \mathbf{Tamaño = 3 \cdot Tamaño} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{D}$$

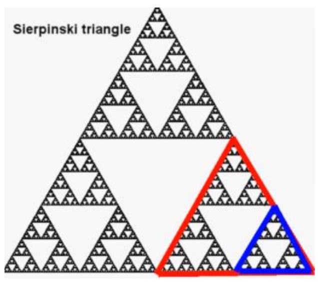


Figura 11. Explicación del triángulo de Sierpinski [11]

Ahora para poder encontrar la dimensión de esta figura se debe despejar D:

$$\text{Tamaño} = 3 \cdot \text{Tamaño} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D$$

$$1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D$$

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{2^D}$$

$$2^D = 3 \qquad (1)$$

$$\log 2^{D} = \log 3$$

$$D \cdot \log 2 = \log 3$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D \approx 1{,}585$$

Como se puede apreciar en la ecuación (1), no existe ningún valor entero D, en el que 2^{D} = 3.

Por lo tanto, podemos decir que se trata de una dimensión fractal. Sin embargo, no nos podemos olvidar de las preguntas formuladas previamente. Entonces, ¿se trata de una longitud, área o volumen? Claramente podemos descartar que sea alguna de las tres ya que el resultado no es un número entero, sin embargo, podemos deducir que debido a que 1,585 se encuentra más cercano a una dimensión 2 (área) que 1 (longitud), el triángulo de Sierpínski tiene características más cercanas a las de un área.

4. La relación entre fractales y líneas costeras

Si bien tanto la curva de Koch como el triángulo de Sierpinski, siguen a la perfección la definición de un fractal, Mandelbrot en su artículo, determina que estructuras como las de una costa se denominan "fractales de autosimilitud estadística", es decir, a escalas menores no se reproducen copias exactas, pero lo que cumplen es que la complejidad nunca se ve reducida. Por ello, en vez de medir las longitudes de dos islas españolas, lo que buscaré es hacer un cálculo lo más preciso posible de la complejidad de sus costas, es decir, su dimensión fractal. Para realizar este cálculo, dos de los métodos más utilizados son: El Método de Hausdorff [12] y el método de Conteo de Cajas [13]. Mandelbrot en su artículo con título "¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?" [5], responde a la pregunta mediante el cálculo de su dimensión fractal en vez de su longitud, proponiendo que la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña es 1,25. Tomando este dato, con el objetivo de determinar la técnica más precisa en cuanto a sus resultados y así poder emplearla en las 3 islas españolas, se aplicarán ambos métodos para determinar la dimensión fractal de la Costa de Gran Bretaña, así pudiendo determinar el más exacto según la cercanía de los resultados al valor D = 1,25.

5. Métodos para calcular la dimensión fractal de las islas

5.1 Método de Hausdorff

Este método consiste en medir la costa a diferentes escalas, mediante el uso de reglas. Por lo tanto, cada **longitud (L_r) de regla (r)**, proporciona, **(N) secciones,** resultando en una **longitud total (L_T)** $L_{T_1} = N_1 \text{ x } L_{r_1}$. Una reducción del valor Lr, resulta teóricamente en un incremento de L_T, si L_r tiende a 0 → L_T tiende a ∞, al estar teniendo en cuenta detalles más finos. Esto se debe a que a medida que la regla mide secciones más pequeñas está teniendo en cuenta mayores detalles y por lo tanto mide esta complejidad que aumenta a escalas más pequeñas.

La relación entre Lt y Lr es ajustada por el uso de la ecuación de una hipérbola del siguiente tipo:

$$L_T = P \cdot L_r^{\ -\alpha} \quad [12]$$

Dónde:

$\alpha = D - 1$

D = *dimensión fractal*

P = *Constante proporcional*

Ya entendiendo esta ecuación, pude ajustarlas para poder obtener una regresión lineal de forma **y = mx + n**, mediante la aplicación de logaritmos en ambos lados en la siguiente ecuación:

$$L_T = P \cdot L_r{}^{1-D}$$

$$\log L_T = \log P \cdot L_r{}^{1-D}$$

$$\log L_T = \log P + \log L_r{}^{1-D}$$

$$\log L_T = \log P + (1-D) \log L_r$$

Teniendo esto, se puede generar una gráfica donde:

y = mx + n:

y = $\log L_T$ m = $(1-D)$ x = $\log L_r$ n = $\log P$

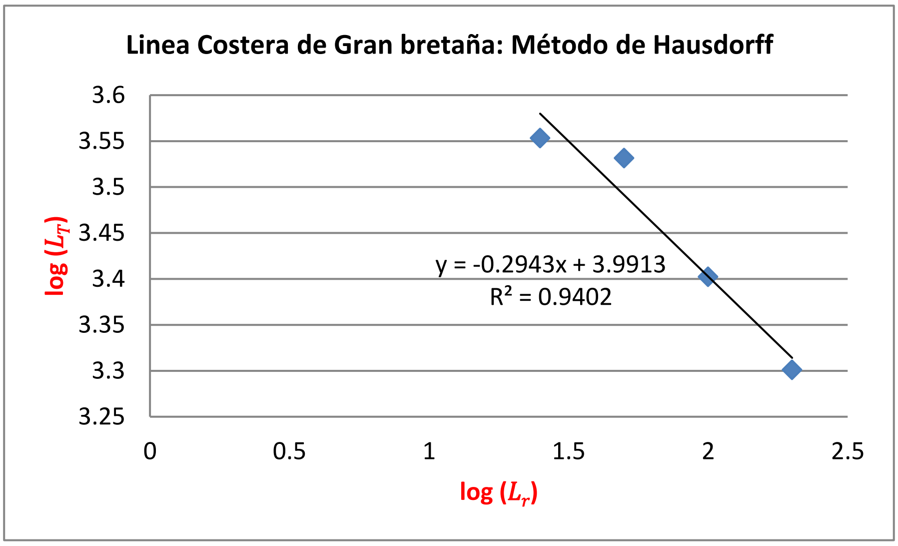
Por lo tanto:

D = 1 – m

5.1.1. EL MÉTODO DE HAUSDORFF APLICADO A LA COSTA DE GRAN BRETAÑA

Mediante Photoshop, coloqué las reglas a lo largo de la costa de Gran Bretaña que según el artículo de Mandelbrot cada una tenía que saltar la mayor distancia posible (como se aprecia con la regla 6 de la primera medición (A) en la Tabla 1), cada vez usando diferentes longitudes de regla (L_r), y así es como he producido las figuras de la tabla 1. Después conté cuantas reglas había a lo largo de la costa (N), para así poder calcular la longitud de la costa (L_T), siendo L_T igual al número de reglas (N) multiplicado por la longitud de cada una (L_r). Con esto consigo hacer el logaritmo tanto de L_r como de L_T, para las 4 escalas y así poder aplicarlo a la gráfica (Excel) con el fin de poder calcular la pendiente y con ello la dimensión fractal de la costa.

Tabla 1	**A** 	**B** 	**C** 	**D** 
Longitud de la Regla (L_r) en kilómetros.	200	100	50	25
log (L_r), (eje x)	**2,301**	**2**	**1,699**	**1,398**
Número de Reglas (N)	10	25,25 (*25 reglas más un cuarto de regla*)	68	143
Longitud de la costa (L_T)	2000	2525	3400	3575
log (L_T), (eje y)	**3,301**	**3,402**	**3,531**	**3,553**



Para averiguar la dimensión fractal:

D = 1 – m

Pendiente (m): Tabla de los datos *Anexo 1*

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = 25{,}366 - \frac{7{,}398 \cdot 13{,}787}{4} = -0{,}1333$$

$$(S_x)^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 14{,}136 - \frac{7{,}398^2}{4} = 0{,}4531$$

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2} = \frac{-0{,}1331}{0{,}4534} = -0{,}2943$$

D = 1 - (- 0,2936) = 1,2936

D ≈ 1,29

Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r): Tabla de los datos *Anexo 1*

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = -0{,}1333$$

$$S_x = \sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \sqrt{0{,}4531}$$

$$S_y = \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}} = \sqrt{47{,}563 - \frac{13{,}787^2}{4}} = \sqrt{0{,}0417}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-0{,}1331}{\sqrt{0{,}4534} \cdot \sqrt{0{,}0427}} = -0{,}9697$$

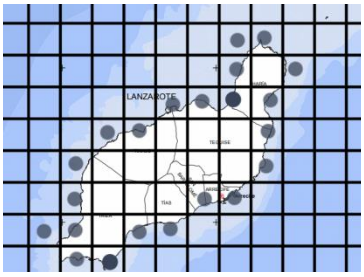
$$R^2 = r^2 = -0{,}9566^2 = 0{,}9402$$

El resultado obtenido (D = 1,29) varía de 0,04 del que propone Mandelbrot (1,25). Esto supone un error de solamente un 3,1%. La diferencia de mi resultado con el de Mandelbrot se puede ver explicada por el hecho de que este método lo he hecho yo mismo, es decir, yo he sido el que ha elegido la colocación de cada una de las reglas a ojo. Esto supone que diferentes personas las hubiesen colocado de distintas maneras, lo que resultaría en distintos valores de la dimensión fractal de la isla. No obstante, el hecho de tener un alto R^2 (0,9402), significa que he sido bastante preciso en la colocación de las reglas a distintas escalas, lo que me ha permitido acercarme bastante al valor 1,25. Si bien este método, ha resultado muy preciso, se probara el Método de Conteo de Cajas, para buscar un mayor acercamiento al valor que propone Mandelbrot.

5.2 Método de Conteo de Cajas

Este método, también conocido como el método de Minkoski-Bouligand, consiste en poner una cuadrícula sobre el fractal, para así poder contar **cuántos cuadrados (N)** cubren el fractal analizado (solo los bordes).

Por ejemplo, a esta escala, la costa de Lanzarote estaría siendo cubierta por 22 cuadrados:



Esto se hace a **distintas escalas (K)**, es decir, el tamaño de los cuadrados de la cuadrícula se hacen cada vez más pequeños, así considerando detalles más finos. La ecuación que relaciona estos términos es la siguiente:

$$N = C \cdot K^{-D} \quad [13]$$

Donde C es una constante de proporcionalidad y D es la dimensión fractal

Al igual que en el anterior método, para poder conseguir transformar esta ecuación a la forma **y = mx + n**, se deben aplicar logaritmos en ambos lados:

$$N = C \times K^{-D}$$

$$\log N = \log (C \times K^{-D})$$

$$\log N = \log C + \log K^{-D}$$

$$\log N = \log C + (-D) \log K$$

Teniendo esto, se puede generar una gráfica donde:

$$y = mx + n$$

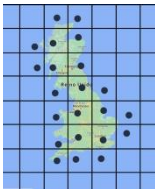
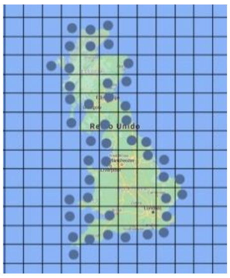
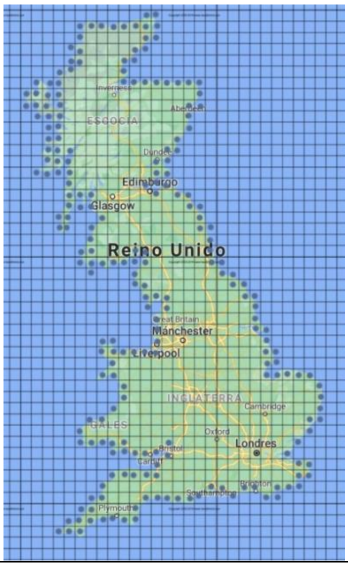
$$y = \log N \qquad m = (-D) \qquad x = \log K \qquad n = \log C$$

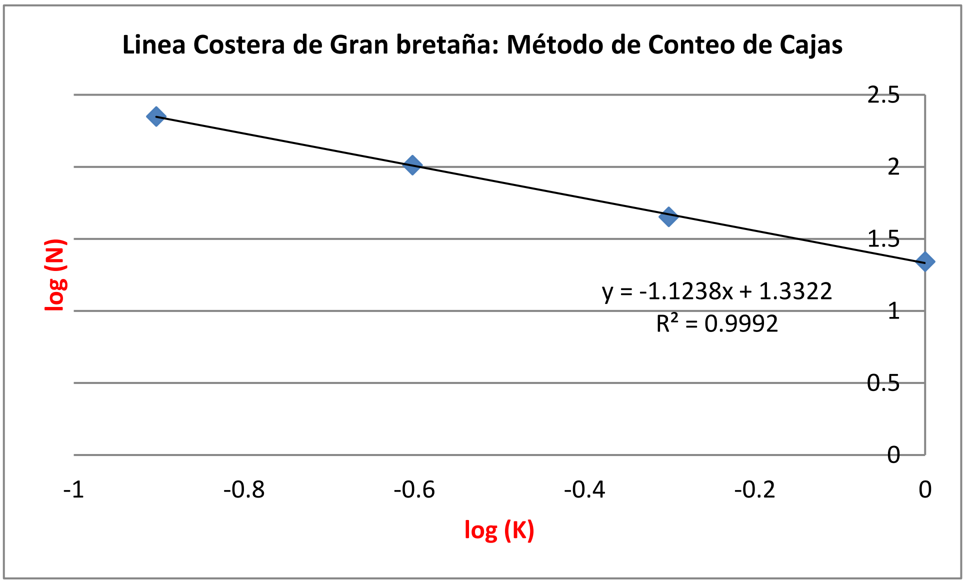
Por lo tanto:

$$D = -m$$

5.2.1. EL MÉTODO DE CONTEO DE CAJAS APLICADO A LA COSTA DE GRAN BRETAÑA

Para este método también utilicé Photoshop. Teniendo las imágenes sacadas de Google Maps, pude colocar las mallas a diferentes escalas (K), cada una reducida por un factor de escala $\frac{1}{2}$ del anterior. A continuación, tuve que contar el número de cajas (N) que tocaban la línea costera. Para no perder la cuenta, cada 10 cajas la remarcaba dos veces.

Tabla 2	**A** 	**B** 	**C** 	**D** 
Factor de escala (K)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
log (K), (eje x)	0	-0,301	-0,602	-0,903
Número de Cajas (N)	22	45	103	224
log (N), (eje y)	1,342	1,653	2,013	2,350



Para averiguar la dimensión fractal:

D = – m

Pendiente (m): Tabla de los datos *Anexo 2*

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = -0{,}5092$$

$$(S_x)^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 0{,}4531$$

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2} = -1{,}1238$$

$$D = -(-1{,}1238) = 1{,}1238$$

$$D \approx 1{,}12$$

Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r): Tabla de los datos *Anexo 2*

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = -0{,}5092$$

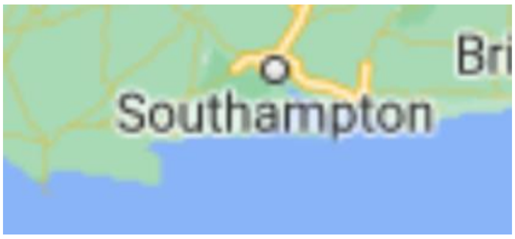
$$S_x = \sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \sqrt{0{,}4531}$$

$$S_y = \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}} = \sqrt{0{,}5727}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = -0{,}9996$$

$$R^2 = r^2 = 0{,}9992$$

Una dimensión fractal de 1,12 supone un error de un 11,6%, respecto al valor de 1,25 que es el medido según Mandelbrot [5]. Si bien, podemos considerar aceptable este error, se puede apreciar como la aplicación del método de Hausdorff se acerca bastante más al valor real. No obstante, considerando el R^2 muy cercano a 1 (0,9992), podemos determinar que he sido mucho más preciso en este método. Este error puede haber sido producido por no haber contado algunos cuadrados en sitios donde se situaban algunos nombres de ciudades, lo que impedía que pudiese ver si en ese sitio había tierra o mar:



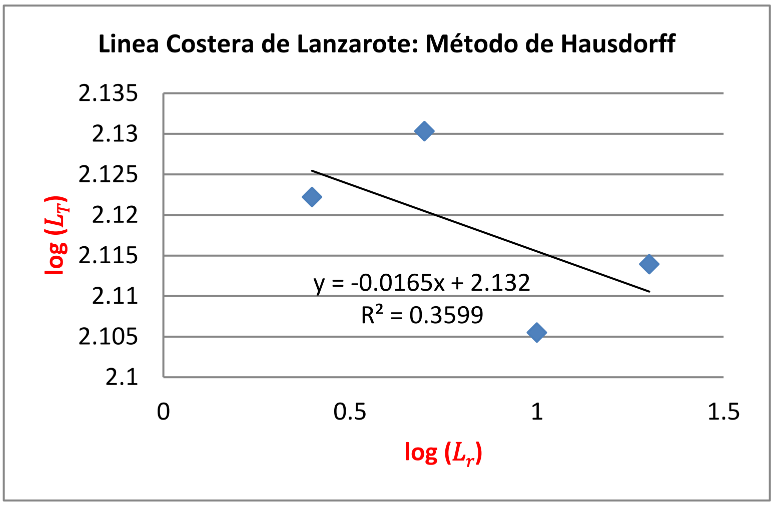
Esto se podría corregir escogiendo un mapa con vacío (sin nombres), no obstante, el resultado no variaría en gran medida. Asimismo, este método normalmente se aplica utilizando softwares como por ejemplo Fiji – ImageJ, sin embargo, en este trabajo, lo he hecho desde Photoshop ya que lo manejo mejor.

Entendiendo que el método de Hausdorff, ha sido considerablemente más exacto en el valor de la dimensión fractal de la costa de gran Bretaña, se procederá a aplicar ese método para 3 islas españolas.

6. Dimensión fractal de 3 islas españolas

6.1 Lanzarote

				
L_r en km	20	10	5	2,5
log (L_r)	**1,301**	**1**	**0,699**	**0,398**
N reglas	6,5	12,75	27	53
L_T en km	130	127,5	135	132,5
log (L_T)	**2,114**	**2,106**	**2,130**	**2,122**



Para averiguar la dimensión fractal:

D = 1 – m

(Tabla de los datos *Anexo 3):*

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}$$

$$m = \frac{-7{,}4715 \cdot 10^{-3}}{0{,}4531} = -0{,}0165$$

D = 1 - (- 0, 0165) = 1, 0165

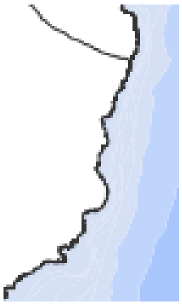
$$D \approx 1{,}02$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$r = \frac{-7{,}4715 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0{,}4531} \cdot \sqrt{0{,}0124}} = -0{,}6008$$

$$R^2 = r^2 = 0{,}3610$$

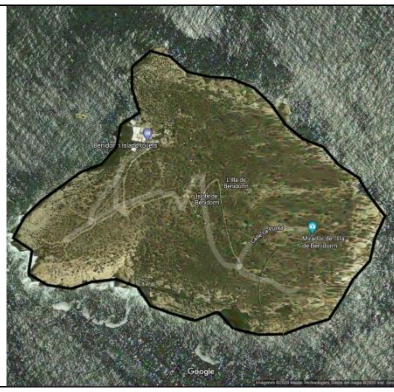
Como se puede apreciar, el bajo R^2 (0,3610) indica que el proceso para calcular la dimensión fractal de Lanzarote ha sido mal elaborado. No entendiendo el motivo de este resultado, me surgió la siguiente pregunta: ¿Cómo puede existir tanta diferencia en la precisión del mismo método en diferentes islas (Gran Bretaña y Lanzarote)? Intentando encontrar alguna respuesta, decidí pensar en las diferencias entre ambas islas. Entre muchas, la que consideré que más podía influir en la aplicación del método de Hausdorff, era la diferencia de escalas a las que la mayor complejidad de las costas se aprecia. Si bien en el caso de Gran Bretaña, ya a primera vista se aprecia una gran complejidad de su costa, en el caso de Lanzarote, donde mayor complejidad se aprecia es en la línea costera, pero no en la totalidad de la isla. Es decir, la complejidad de la costa de Gran Bretaña se aprecia a grandes escalas, sin embargo, en el caso de Lanzarote, la mayor complejidad se encuentra a escalas muy pequeñas:

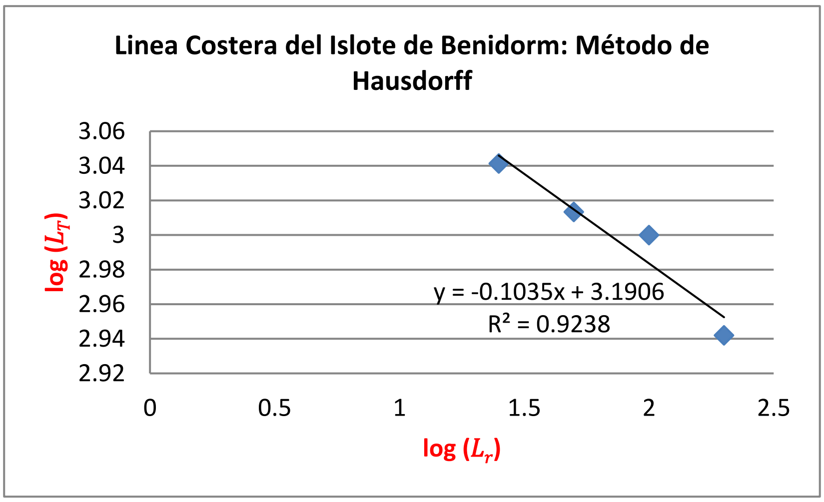


Esto implicaría que las 4 escalas a elegir, deberían ser más o menos cercanas a la escala donde se encuentre su mayor complejidad. Por lo tanto como se han elegido reglas de escalas mucho mayores a donde se encuentra la mayor complejidad de la costa de Lanzarote, el método no consigue llegar a la precisión necesaria para dar un acertado resultado de su dimensión fractal. Sin embargo, lo más seguro es que su dimensión fractal sea muy cercana a 1 ya que el valor de la dimensión fractal se refiere a la totalidad del fractal analizado y no solo a unas determinadas escalas y en este caso a escalas mayores no se aprecia mucha complejidad.

Por ello, para las siguientes islas se escogerán escalas acordes a la escala donde mayor complejidad se aprecie.

6.2 Islote de Benidorm

Tabla 3				
Longitud de la Regla (L_r) en metros.	200	100	50	25
log (L_r)	**2,301**	**2**	**1,699**	**1,398**
Número de Reglas (N)	4,375	10	20,625	44
Longitud de la costa (L_T)	875	1000	1031,25	1100
log (L_T)	**2,942**	**3**	**3,013**	**3,041**



Para averiguar la dimensión fractal:

D = 1 – m

(Tabla de los datos *Anexo 4):*

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}$$

$$m = \frac{-0{,}0469}{0{,}4531} = -0{,}1035$$

$$D = 1 - (-0{,}1035) = 1{,}1035$$

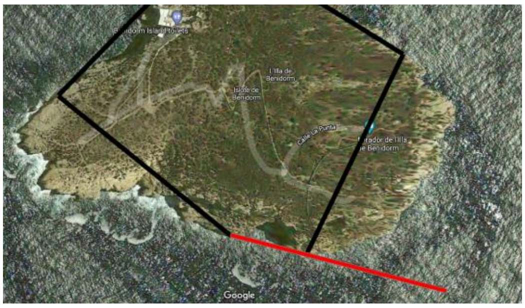
$$D \approx 1{,}10$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$r = \frac{-0{,}0469}{\sqrt{0{,}4531} \cdot \sqrt{5{,}2492 \cdot 10^{-3}}} = -0{,}9614$$

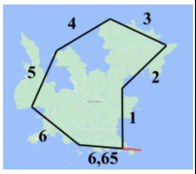
$$R^2 = r^2 = 0{,}9243$$

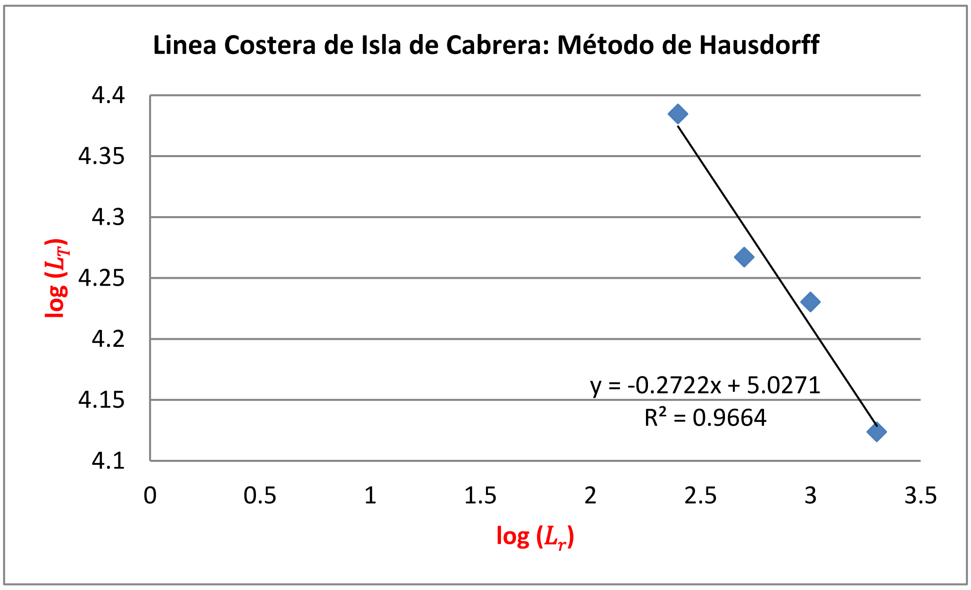
Una dimensión de 1,10 parece tener mucho sentido, ya que a primera vista se aprecia cierta complejidad pero no lo suficiente para un alto valor de dimensión fractal. En este caso, podemos apreciar una precisión mucho mayor en la elección de escalas y la colocación de las reglas, lo que se ve reflejado por el alto R^2 (0,9243). Si bien es un R^2 bastante alto, el hecho de que la última regla colocada, de la primera y tercera escala con longitudes de regla 200 y 50 respectivamente, no cupiese entera, supuso que tuviese que aproximar su longitud. Por ejemplo en el caso de la primera escala, con reglas de 200 metros, la última regla aproximé que era $\frac{3}{8}$ (0,375) partes de una regla de 200 metros:



Estas estimaciones pueden haber desviado ligeramente las coordenadas exactas de los dos puntos, lo que tiene un impacto directo en la precisión del resultado de 1,10.

6.3 Isla de Cabrera

Tabla 4				
Longitud de la Regla (L_r) en metros	2000	1000	500	250
log (L_r)	**3,301**	**3**	**2,699**	**2,398**
Número de Reglas (N)	6,65	17	37	97
Longitud de la costa (L_T)	13300	17000	18500	24250
log (L_T)	**4,124**	**4,230**	**4,267**	**4,385**



Para averiguar la dimensión fractal:

D = 1 – m

(Tabla de los datos *Anexo 5):*

$$m = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}$$

$$m = \frac{-0{,}1233}{0{,}4531} = -0{,}2721$$

D = 1 - (- 0,2721) = 1,2721

$$D \approx 1{,}27$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$r = \frac{-0{,}1233}{\sqrt{0{,}4531} \cdot \sqrt{0{,}0348}} = -0{,}9825$$

$$R^2 = r^2 = 0{,}9654$$

El resultado obtenido de 1,27 con un R^2 de 0,9654, realmente me sorprendió. Si bien sabía que Isla de Cabrera iba a tener una dimensión alta por la elevada complejidad que se aprecia en su costa, no pensé que fuese a llegar a ser mayor que la de Gran Bretaña (1,25). Gran Bretaña tiene un tamaño muy superior al de Isla de Cabrera y sin embargo, Isla de Cabrera tiene una dimensión fractal superior y lo que indica que la complejidad de su línea costera es mayor que la de Gran Bretaña. No obstante, esto es así si consideramos que este valor (1,27) es correcto, ya que si tenemos en cuenta el error en la medición, podría resultar que Gran Bretaña tuviese una mayor, igual o menor dimensión fractal que isla de cabrera. Esto se discutirá a continuación.

7. Discusión y conclusiones

Para concluir, según lo calculado, Lanzarote, el islote de Benidorm e Isla de Cabrera tienen una dimensión fractal de 1,02, 1,10 y 1,27 respectivamente. Debido a que en el cálculo de la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña con el método de Hausdorff, obtuve un error de un 3,1%, tomaré este valor para calcular el error de las dimensiones fractales de las islas españolas ya que no he encontrado ningún artículo que proponga un valor para ninguna de las tres islas. No obstante, lo más probable es que en el caso de Lanzarote, este error sea bastante mayor, y en el caso del Islote de Benidorm e Isla de Cabrera, el error sea prácticamente el mismo ya que he aplicado el método prácticamente de la misma manera.

	Dimensión Fractal	% de Error	Error Absoluto	Valor Máximo	Valor Mínimo
Lanzarote	1,02	3,1	0,03162	1,05162	0,98828 (1,0…)
Islote de Benidorm	1,10	3,1	0,0341	1,1341	1,0659
Isla de Cabrera	1,27	3,1	0,03937	1,30937	1,23063

Según los resultados obtenidos, podemos organizar las tres islas tratadas según la complejidad de sus costas. Lanzarote cuenta con una dimensión fractal de 1,02, siendo menor que la del islote de Benidorm (1,10) y que la de Isla de Cabrera (1,27). Ahora bien, el valor mínimo y máximo de Isla de Cabrera, oscila entre 1,23063 y 1,3097, lo que da a entender que podría a llegar a ser menor, igual o mayor que la de Gran Bretaña. Con las ganas de saber cuál tenía una costa más compleja y por lo tanto una dimensión fractal más alta, decidí buscar la dimensión fractal de Isla de Cabrera en diferentes fuentes, pero lamentablemente, no encontré ningún estudio que la calculase.

En definitiva mi percepción a primera vista de la complejidad de las costas de las islas estudiadas, se ha visto corroborada por unos resultados de sus dimensiones fractales acordes a la complejidad de sus costas, por lo que a la vista, ya podemos estimar entre que valores se puede encontrar la dimensión fractal de una isla, algo muy interesante.

Con respecto al proceso de investigación, se puede sacar una gran conclusión, que se ha visto reflejada especialmente en el cálculo de la dimensión fractal de Lanzarote. La aplicación del método de Haussdorff en esta isla, nos enseña que en islas donde a primera vista solo se aprecia la complejidad de la costa a escalas muy reducidas (como es el caso de Lanzarote), pero no en un plano general, se requieren escalas muy pequeñas para poder alcanzar esa precisión en la medida de su complejidad. Si no se llegan a reglas de escala tan pequeña como en la que se encuentra la mayor parte de la complejidad de la isla, lo que teóricamente "cuanto más pequeña la regla, más grande la longitud" no se cumple. Por ello, después de unos ciertos intentos de escoger las mejores 4 escalas en las diferentes islas, concluí que debía escoger una isla que a primera vista ya tuviese complejidad (como la costa de gran Bretaña) para así poder medir con una escala más razonable su dimensión fractal y poder comprobar prácticamente la teoría de la paradoja de la línea costera.

Por lo que: **No importa el tamaño del fractal analizado, sino la escala a la que se encuentre la complejidad.**

No fue hasta el segundo mes de primero de IB, que sabía de la existencia de los fractales. Fue en clase de Artes Visuales, cuando tuvimos que escoger un artista para analizarlo en la carpeta de procesos. Después de una larga búsqueda de artistas de mi interés, encontré a Escher. Entre sus obras la que más me sorprendió fue Límite circular IV. A partir de ahí comenzó mi proceso de interés por la naturaleza fractal, que se ve reflejado tanto en esta evaluación interna, como en mi estudio comparativo de Artes Visuales.

8. Referencias

[1] Tripkay. 2020. *Isla De Benidorm: ¿Qué Ver Y Hacer? Guía De Benidorm - Tripkay*. [online] Available at: <https://tripkay.com/destination-guides/puntos-interes/isla-de-benidorm/#:~:text=La%20isla%20de%20Benidorm%20es,elevado%20inter%C3%A9s%20ecol%C3%B3gico%20y%20paisaj%C3%ADstico.> [Accessed 15 November 2020].

[2] Love Valencia. 2020. *Isla De Benidorm*. [online] Available at: <https://www.lovevalencia.com/isla-de-benidorm.html#:~:text=La%20isla%20de%20Benidorm%20o,longitud%20aproximada%20de%20400%20metros.> [Accessed 15 November 2020].

[3] Datosdelanzarote.com. 2020. *Longitud De Costa De Lanzarote Según Municipio*. [online] Available at: <http://www.datosdelanzarote.com/itemDetalles.asp?idFamilia=24&idItem=1590> [Accessed 15 November 2020].

[4] Verlanzarote.com. 2020. *Qué Ver En Lanzarote - Ver Lanzarote*. [online] Available at: <http://www.verlanzarote.com/que-ver-lanzarote.html> [Accessed 15 November 2020].

[5] Mandelbrot, B. (1967). How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science, 156*(3775), 636-638. Retrieved November 7, 2020, from http://www.jstor.org/stable/1721427

[6] Investigación y Ciencia. 2020. *¿Qué Es El Fractal De Mandelbrot?*. [online] Available at: <https://www.investigacionyciencia.es/noticias/qu-es-el-fractal-de-mandelbrot-9533#:~:text=f(z)%20%3D%20z2,(0)))%2C%20...> [Accessed 15 November 2020].

[7] 100ciasnaturales.blogspot.com. 2020. *Fractales En La Naturaleza*. [online] Available at: <http://100ciasnaturales.blogspot.com/2014/05/fractales-en-la-naturaleza.html> [Accessed 24 December 2020].

[8] Woo, E., Schubert, H. and Dinallo, A., n.d. *Woo's Wonderful World Of Maths*.

[9] Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. (2020). Retrieved 15 December 2020, from http://www.dma.fi.upm.es/docencia/plan96/geometria_fractal/fractales_clasicos/koch.html

[10] Science4kids.es. 2020. *Programación / Science 4 Kids*. [online] Available at: <http://www.science4kids.es/wp/category/tecnologiaen1minuto/programacion/> [Accessed 24 December 2020].

[11] fractalmath, 2010. *Amazing Properties Of Fractals: Koch Snowflake Perimeter*. [image] Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=tWOngYTC-2E> [Accessed 15 November 2020].

[12] Piña-García, F., Pereda-García, R., De Luis-Ruiz, J., Pérez-Álvarez, R., & Husillos-Rodríguez, R. (2016). Determination of Geometry and Measurement of Maritime-Terrestrial Lines by Means of Fractals: Application to the Coast of Cantabria (Spain). *Journal of Coastal Research, 32*(5), 1174-1183. Retrieved November 7, 2020, from http://www.jstor.org/stable/43893630

[13] CASTELBLANCO, K., 2015. *ALGEBRA DE LAS DIMENSIONES FRACTALES*. Trabajo de grado para optar el título de licenciado en matemáticas. UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

10.Anexos

Anexo 1: Tabla de datos para pendiente y R^2 (Costa de Gran Bretaña: Método de Hausdorff)

Escalas	x	y	xy	x^2	y^2
A	2,301	3,301	7,596	5,295	10,897
B	2	3,402	6,804	4	11,574
C	1,699	3,531	5,999	2,887	12,468
D	1,398	3,553	4,967	1,954	12,624
Total (Suma)	7,398	13,787	25,366	14,136	47,563

Anexo 2: Tabla de datos para pendiente y R^2 (Costa de Gran Bretaña: Método de Conteo de Cajas)

Escalas	x	y	xy	x^2	y^2
A	0	1,342	0	0	1,802
B	-0,301	1,653	-0,498	0,091	2,733
C	-0,602	2,013	-1,211	0,362	4,052
D	-0,903	2,350	-2,122	0,816	5,524
Total (Suma)	-1,806	7,359	-3,832	1,269	14,110

Anexo 3: Tabla de datos para pendiente y R^2 (Lanzarote)

Escalas	x	y	xy	x^2	y^2
A	1,301	2,114	2,750	1,693	4,469
B	1	2,106	2,106	1	4,433
C	0,699	2,130	1,489	0,489	4,538
D	0,398	2,122	0,845	0,158	4,504
Total (Suma)	3,398	8,472	7,189	3,340	17,944

Anexo 4: Tabla de datos para pendiente y R^2 (Islote de Benidorm)

Escalas	x	y	xy	x^2	y^2
A	2,301	2,942	6,770	5,295	8,656
B	2	3	6	4	9
C	1,699	3,013	5,120	2,886	9,080
D	1,398	3,041	4,252	1,954	9,250
Total (Suma)	7,398	11,997	22,141	14,135	35,986

Anexo 5: Tabla de datos para pendiente y R^2 (Isla de Cabrera)

Escalas	x	y	xy	x^2	y^2
A	3,301	4,124	13,613	10,897	17,006
B	3	4,230	12,691	9	17,897
C	2,699	4,267	11,517	7,284	18,209
D	2,398	4,385	10,514	5,750	19,226
Total (Suma)	11,398	17,006	48,336	32,931	72,337