תרגיל בית 11 באלגברה לינארית - 89113

1. לכסנו אוניטרית את המטריצות הבאות:

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(ג)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית והפיכה, ויהי $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ המורכב מו"ע של A, כך ש־ $\forall i \exists \lambda_i : Av_i = \lambda_i v_i$. הוכיחו: אם $Ax = y$ אז:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle y, v_i\rangle}{\lambda_i} v_i$$

3. הראו ש־ $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2iw \\ 2z + (4+2i)w \end{pmatrix}$$

היא נורמלית. ממ"פ סטדרטית.

4. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T : V \to V$ הרמיטית. הוכיחו שקיימת S נורמלית כך ש $T = S^2$.

5. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית עם n ע"ע אי שליליים. הוכיחו: $tr(A^2) \leq tr(A)^2$.

6. יהיו $u, v \in V$ שני וקטורים כך $|u| = |v|$. הוכיחו כי קיימת $T : V \to V$ אוניטרית כך ש $T(u) = v$. [הדרכה: התחילו במקרה ש $|u| = |v| = 1$]

ערך מוחלט הכוונה פה לנורמה

7. 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל **C**, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי שהוא גם אנטי-הרמיטי וגם אוניטרי.

I. הוכח שהערכים העצמיים של T הם מתוך הקבוצה $\{i, -i\}$.

II. האם האופרטור $T + iI$ ניתן לליכסון? נמק היטב.

אנטי הרמיטי הכוונה

T*=-T