

מיונים



מבני נתונים, אילת בוטמן מבוסס על הספר מבוא ©
לאלגוריתמים בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה
אין להפיץ או לשנות ללא הסכמה

מיונים

- מיון הכנסה

$O(n^2)$

- מיון בעזרת עץ חיפוש בינרי מאוזן:

- בנה עץ AVL ע"י הכנסת האיברים בזה אחר זה.

- סרוק את העץ ב- inorder

$O(n \log n)$

- מיון ערימה:

- בנה ערימה.

- הוצא את האיברים בזה אחר זה (הוצא בכל שלב את המינימלי)

$O(n \log n)$

דוגמא: מיון-מיזוג

הקלט: סדרה S של n איברים.

הפלט: סדרה S ממוינת.

האלגוריתם:

$\text{MergeSort}(S, p, r)$

if $p > r$ return

$q = (p+r)/2$

$\text{MergeSort}(S, p, q)$

$\text{MergeSort}(S, q+1, r)$

$\text{Merge}(S, p, q, r)$

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

• בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c .

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

- בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c .
- הזמן שלוקח למזג שתי סדרות ממוינות לינארי בסכום אורכי הסדרות

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

--	--	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

--	--	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13					
----	--	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13					
----	--	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21				
----	----	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21				
----	----	--	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47			
----	----	----	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47			
----	----	----	--	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47	56		
----	----	----	----	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47	56		
----	----	----	----	--	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47	56	78	
----	----	----	----	----	--

21	56	78
----	----	----

13	47	85
----	----	----

13	21	47	56	78	85
----	----	----	----	----	----

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

- בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c .
- הזמן שלוקח למזג שתי סדרות ממוינות לינארי בסכום אורכי הסדרות
- לכן נרשום נוסחה רקורסיבית עבור $T(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(n/2) + bn & n \geq 2 \end{cases}$$

סיכום - מיונים

- Insertion sort $O(n^2)$
- Selection sort $O(n^2)$
- Bubble sort $O(n^2)$
- Quick sort Average case: $O(n \log n)$,
 Worse case: $O(n^2)$
- Heapsort $O(n \log n)$
- Mergesort $O(n \log n)$

הכי טוב שאנחנו רואים הוא...

$$O(n \log n)$$

האם זה הדוק?

משפט

כל אלגוריתם מיון **מבוסס השוואות** עורך
 $\Omega(n \cdot \log n)$ השוואות במקרה הגרוע

נשים לב

- זהו החסם התחתון הראשון שאנחנו רואים בקורס
- קשה להוכיח חסם תחתון "לכל אלגוריתם"
 - קשה לתפוס "לכל"
- מוכיחים עבור משפחה רחבה ככל האפשר של אלגוריתמים
 - כן מניחים משהו על איך האלגוריתם עובד
- החסם התחתון הוא "מעניין" ומלמד אותנו משהו חדש
 - אם המשפחה "גדולה מספיק"
 - בפרט, הוא אומר לנו באיזו שיטה לא נצליח לשפר את הסיבוכיות

אלגוריתמי מיון מבוססי השוואות

- המשפחה עליה נוכיח חסם תחתון:
אלגוריתמי מיון מבוססי השוואות

אלגוריתמי מיון מבוססי השוואות

- המשפחה עליה נוכיח חסם תחתון:
אלגוריתמי מיון מבוססי השוואות

הגדרה:

אלגוריתם מיון מבוסס השוואות מקבל כקלט מערך $[a_1, \dots, a_n]$ של n פריטים, וצובר אינפורמציה על ידי השוואות זוגות מהם. כל השוואה (האם $a_i > a_j$) מחזיר "כן" או "לא" ונספר כפעולה בודדת. האלגוריתם יכול להחליף את הסדר בין האיברים ללא עלות כתלות בתשובות ההשוואות. בסוף הריצה, האלגוריתם מוציא פרמוטציה של הקלט.

האם אלו מיונים מבוססי השוואות?

- Insertion sort
- Selection sort
- Bubble sort
- Quick sort
- Heapsort
- Mergesort

כן! ולכן זוהי משפחה "מעניינת" –
היא "תוספת" המון אלגוריתמים מעניינים

רעיון ההוכחה

- נראה שלכל מיון מבוסס השוואות ניתן להציג עץ החלטה המתאר רק את השאלות המתבצעות במהלך האלגוריתם.

רעיון ההוכחה

- נראה שלכל מיון מבוסס השוואות ניתן להציג עץ החלטה המתאר רק את השאלות המתבצעות במהלך האלגוריתם.

- מניתוח עץ ההחלטה נגיע לתובנה שכמות ההשוואות המתבצעת במקרה הגרוע לאלגוריתם המיון הטוב ביותר הוא $\Omega(n \cdot \log n)$

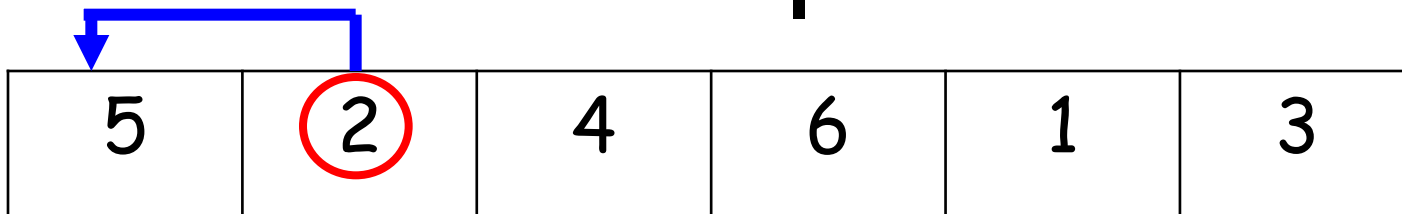


מיון הכנסה

5	2	4	6	1	3
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה



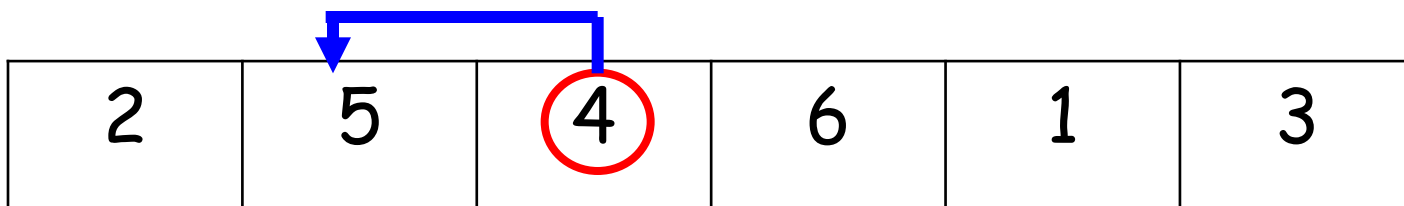


מיון הכנסה

2	5	4	6	1	3
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה



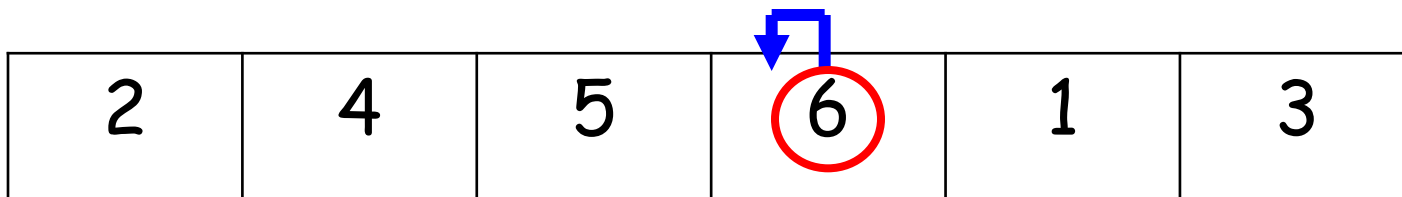


מיון הכנסה

2	4	5	6	1	3
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה



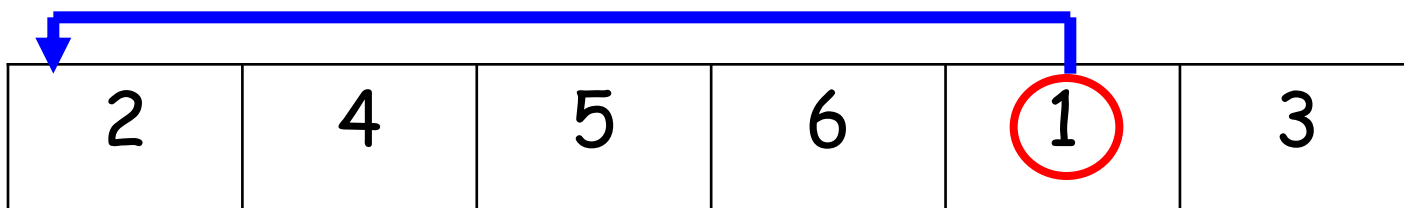


מיון הכנסה

2	4	5	6	1	3
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה



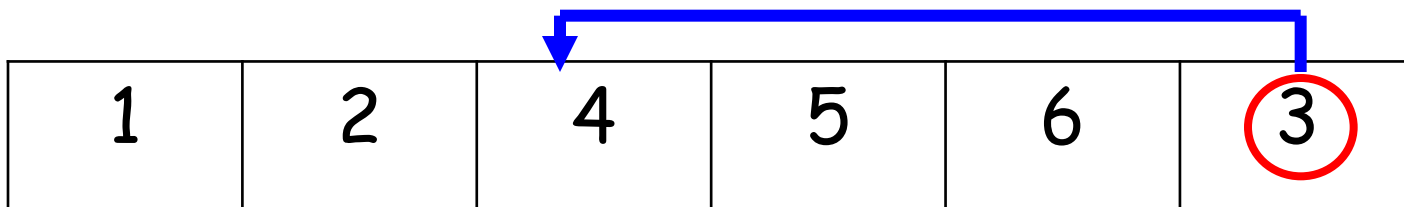


מיון הכנסה

1	2	4	5	6	3
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה





מיון הכנסה

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



מיון הכנסה

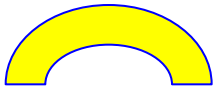
5	2	4	6	1	3
2	5	4	6	1	3
2	4	5	6	1	3
2	4	5	6	1	3
1	2	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6

הקלטיים האפשריים למיון האיברים: $\{1,2,3\}$

$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$
1	2	3
1	3	2
2	3	1
2	1	3
3	1	2
3	2	1


הקלטיים האפשריים למיון האיברים: $\{1,2,3\}$

$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	אינדקס התוצאות		
1	2	3	1	2	3
1	3	2	1	3	2
2	3	1	3	1	2
2	1	3	2	1	3
3	1	2	2	3	1
3	2	1	3	2	1



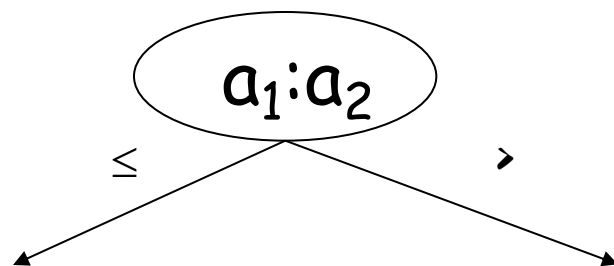
a[1]	a[2]	a[3]
?	?	?


עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
?	?	?

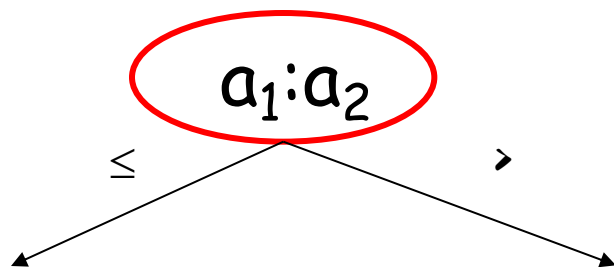
עץ החלטה

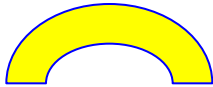




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1	2	3

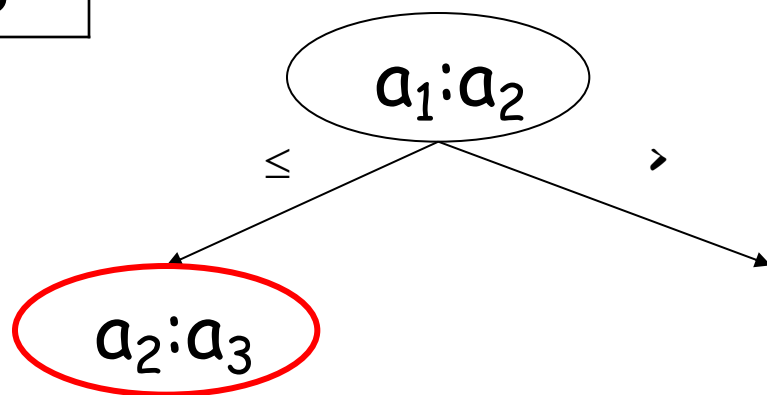
עץ החלטה





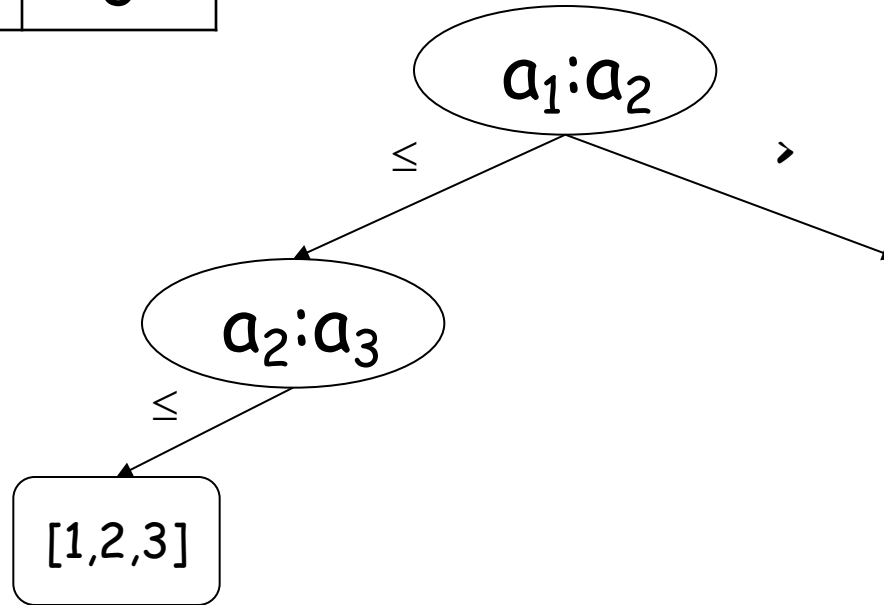
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1	2	3


עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1	2	3

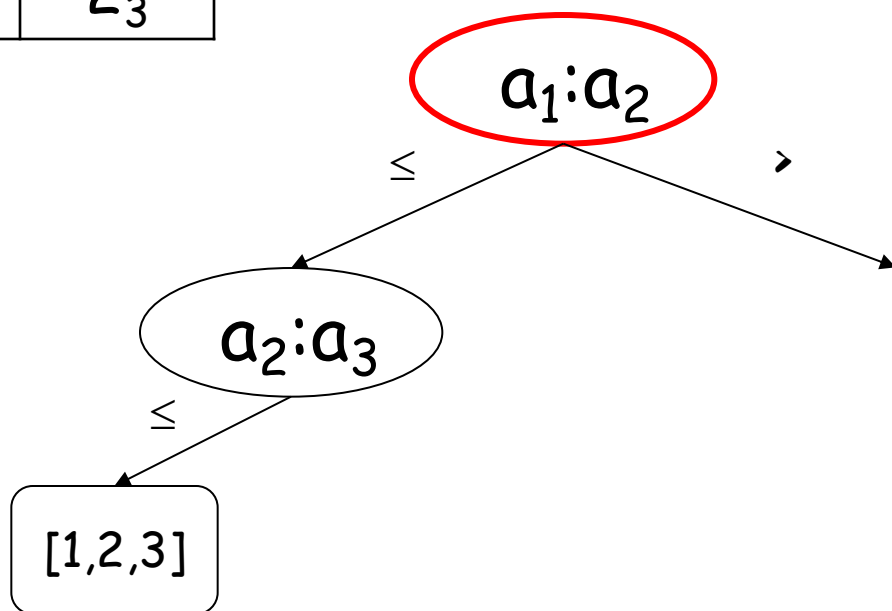
עץ החלטה






$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_1	3_2	2_3

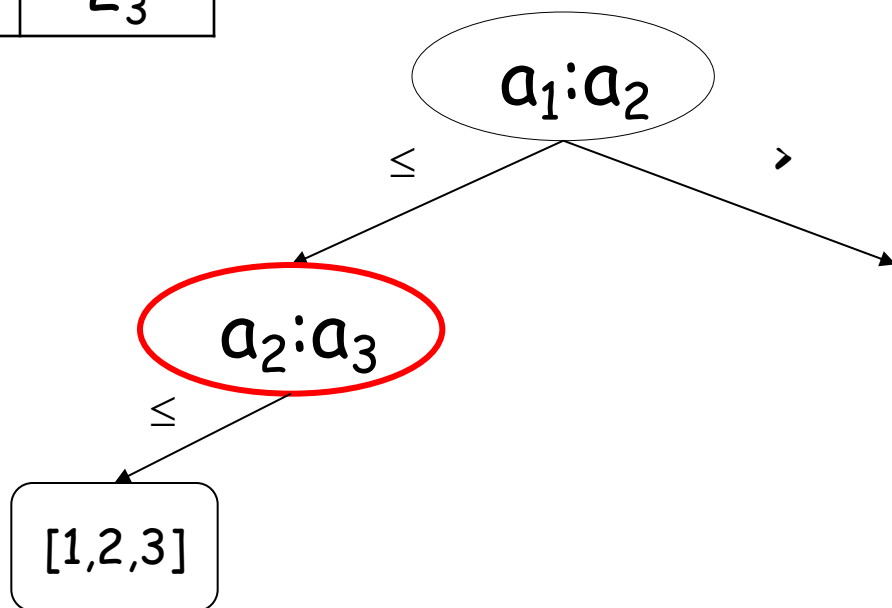
עץ החלטה






$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_1	3_2	2_3

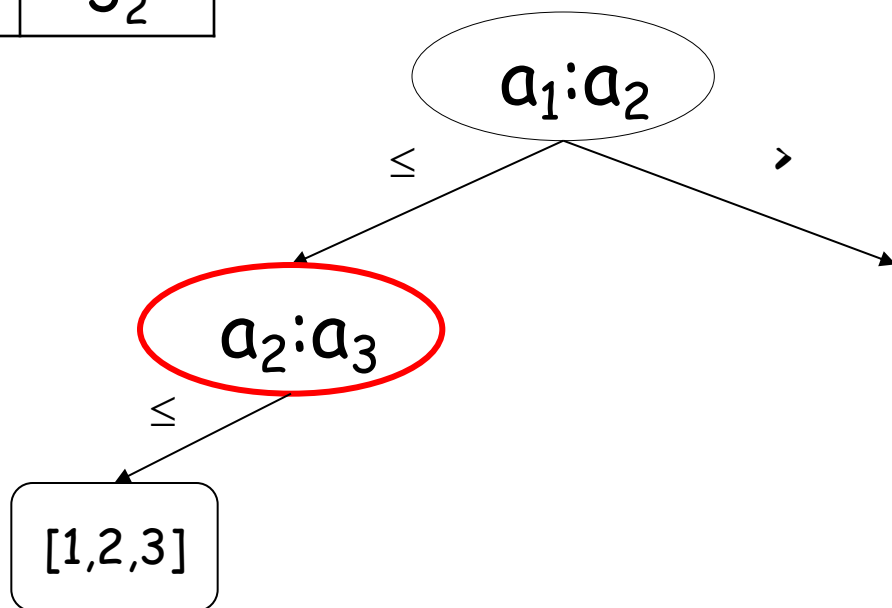
עץ החלטה

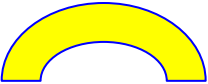




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_1	2_3	3_2

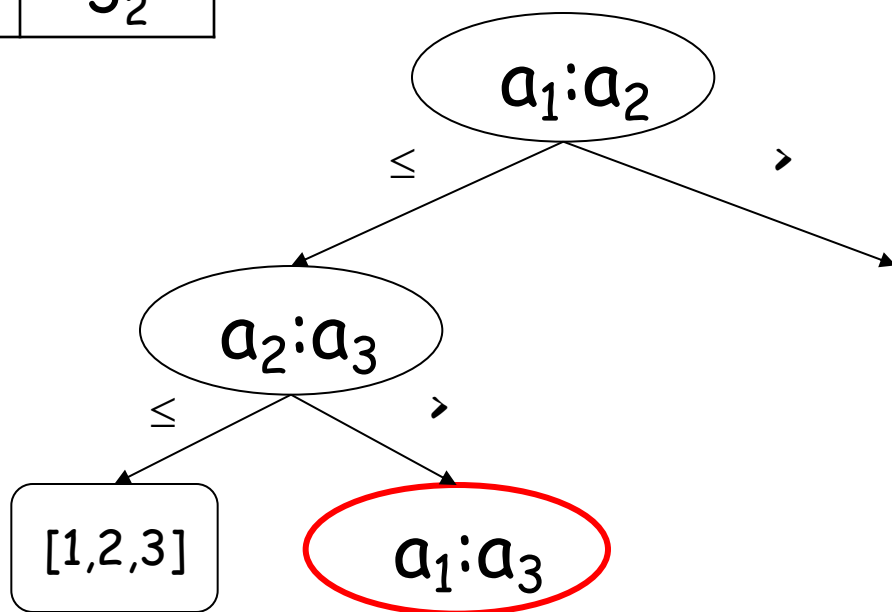
עץ החלטה





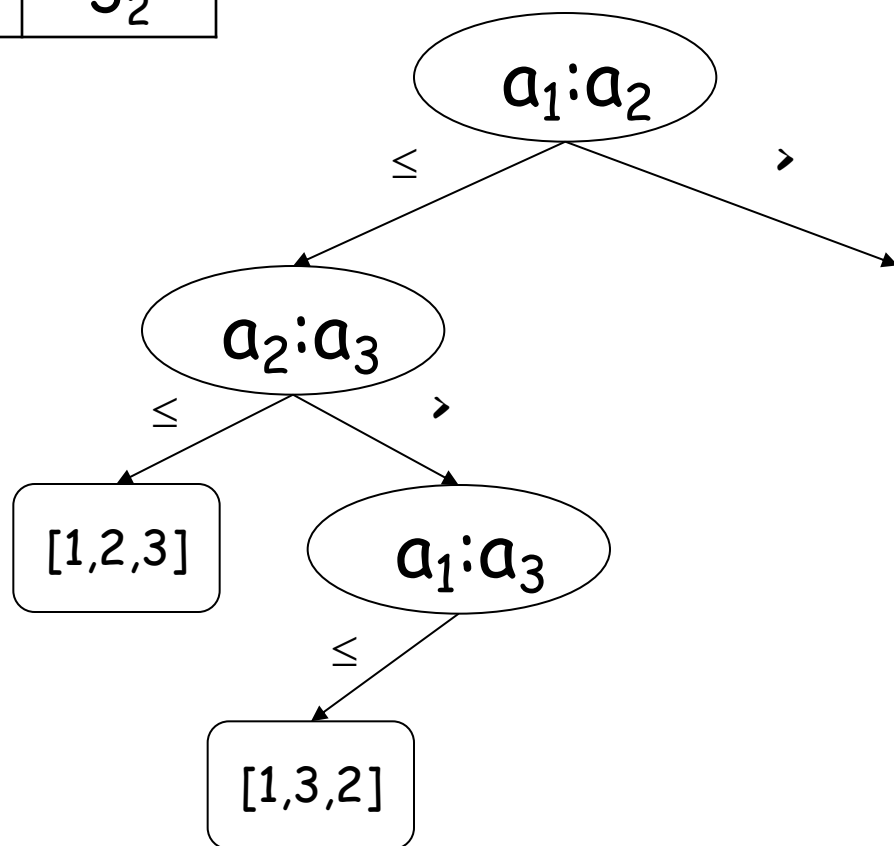
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_1	2_3	3_2

עץ החלטה



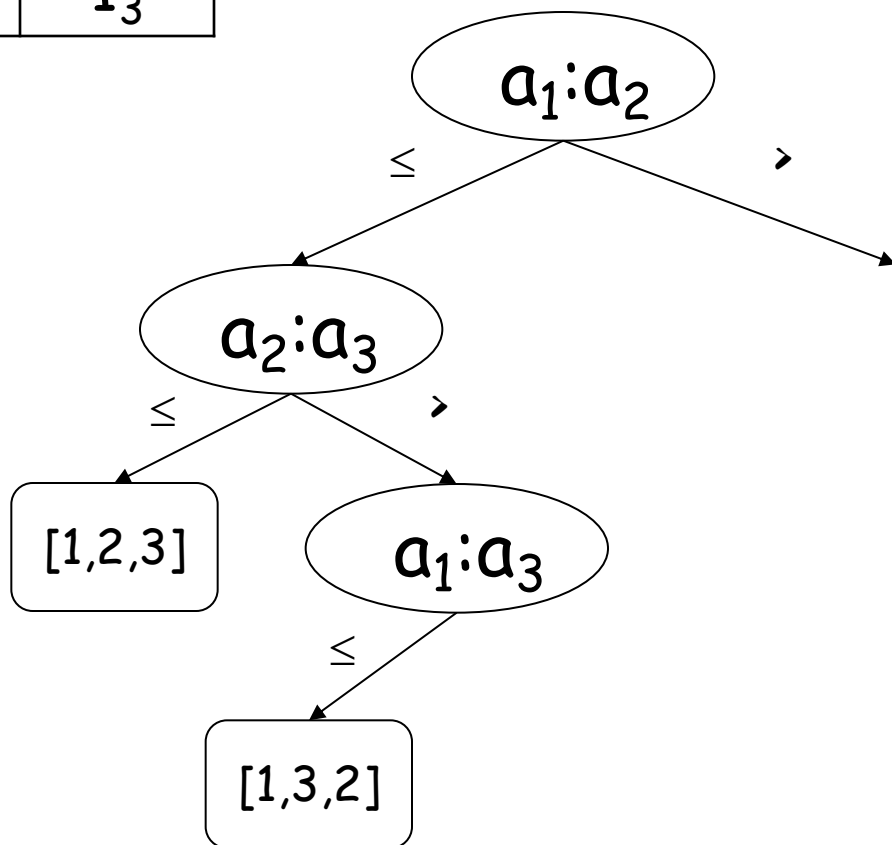
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_1	2_3	3_2

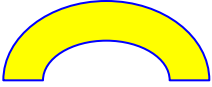
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	3_2	1_3

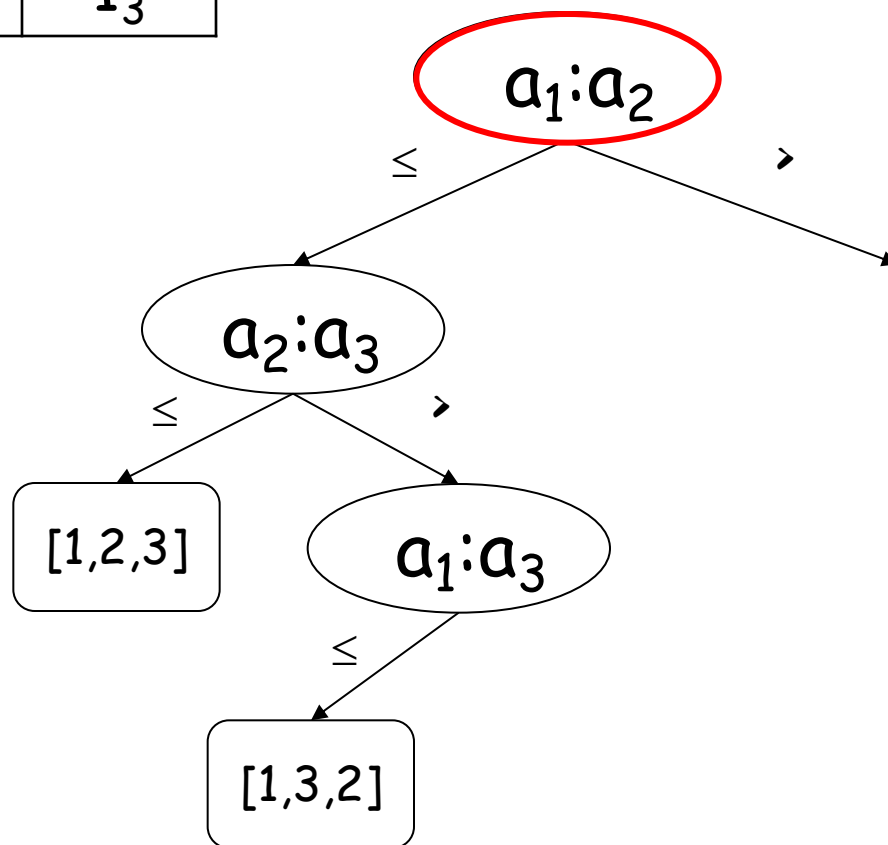
עץ החלטה






$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	3_2	1_3

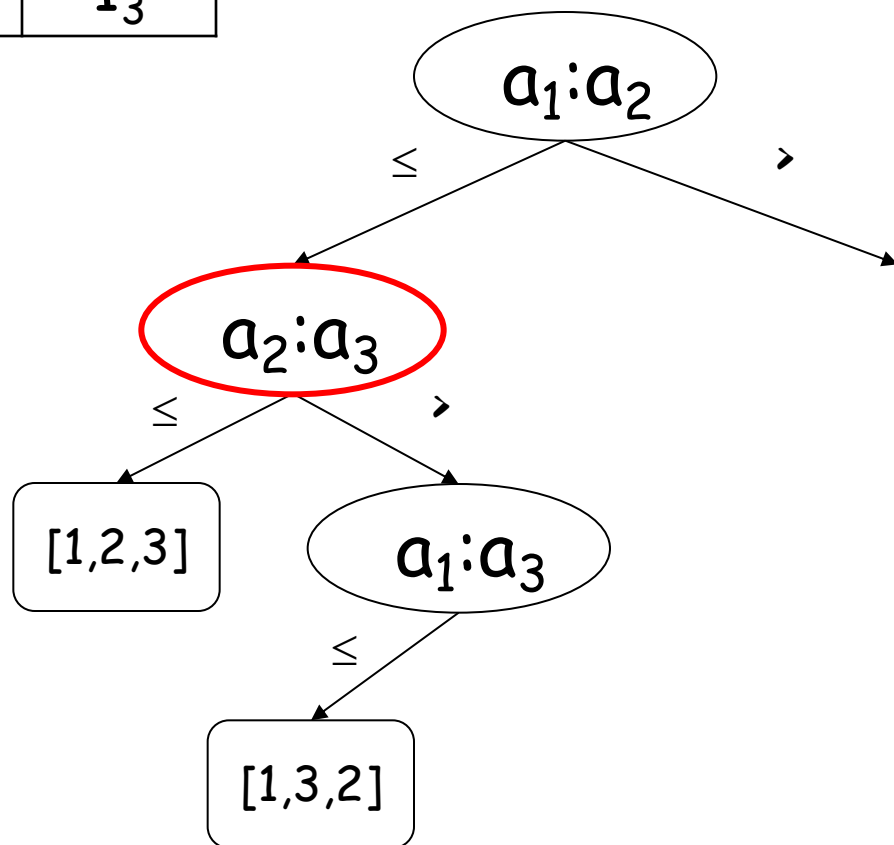
עץ החלטה






$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	3_2	1_3

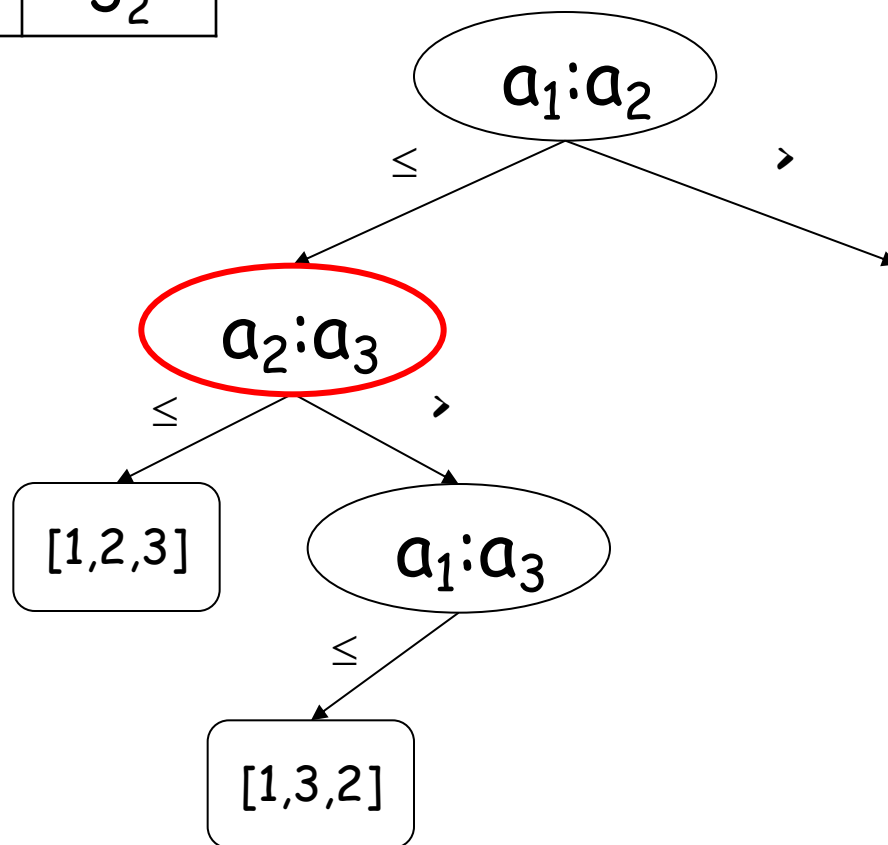
עץ החלטה

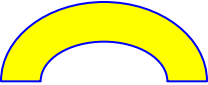


a[1]	a[2]	a[3]
2 ₁	1 ₃	3 ₂



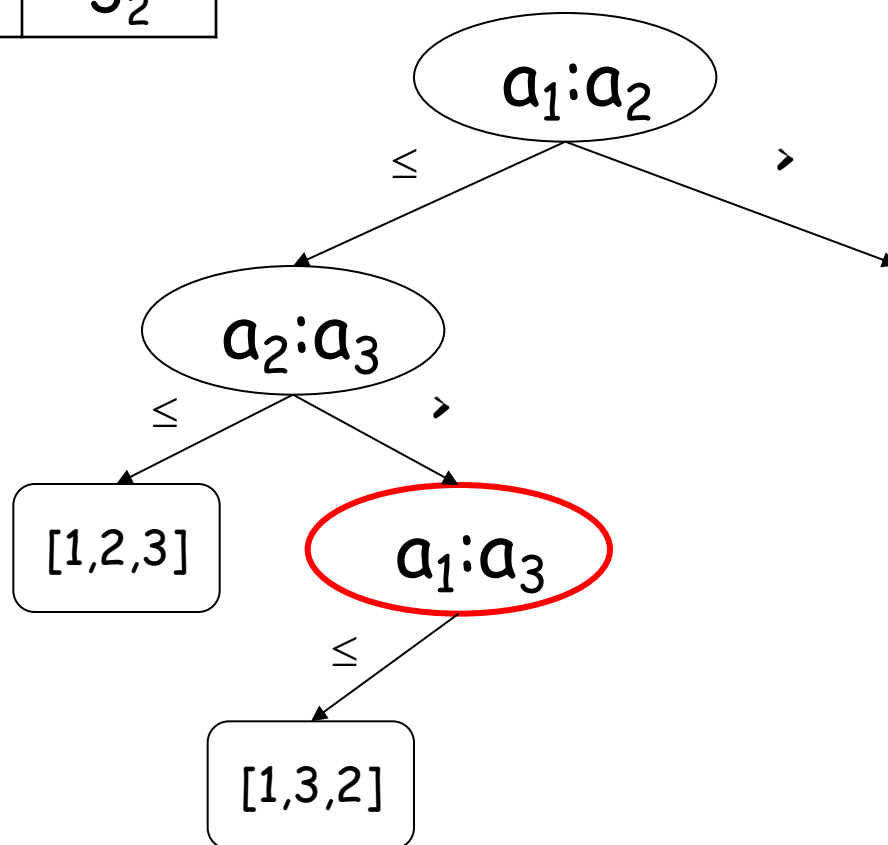
עץ החלטה

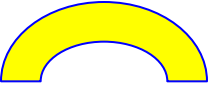




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	1_3	3_2

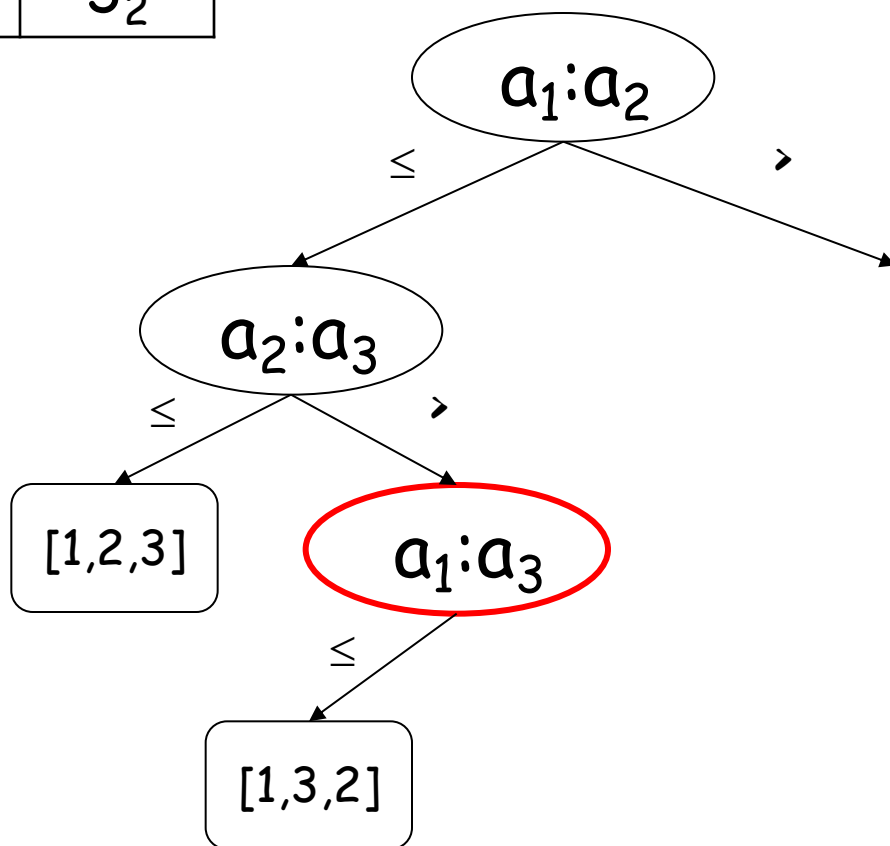
עץ החלטה





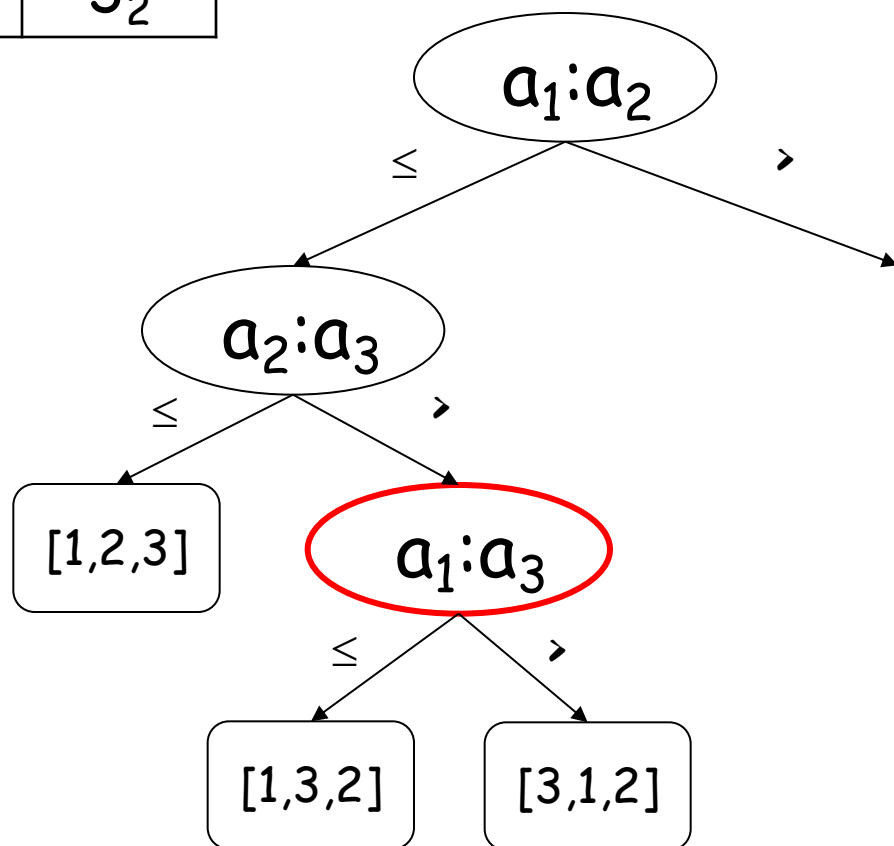
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_3	2_1	3_2

עץ החלטה



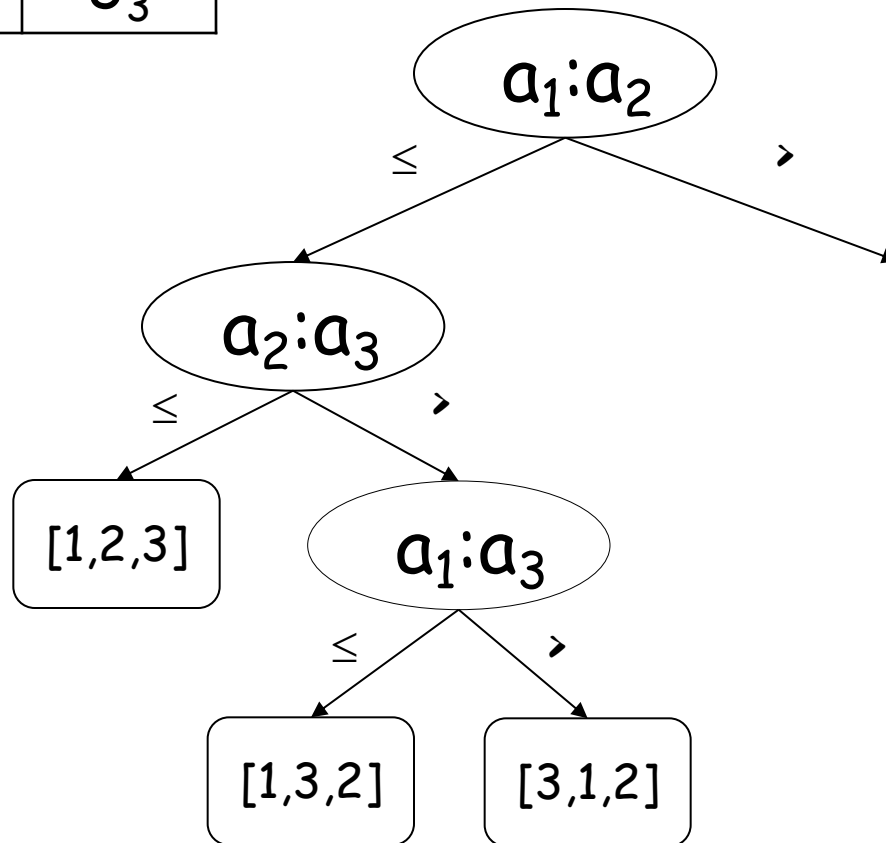
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_3	2_1	3_2

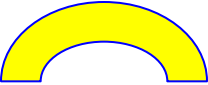
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	1_2	3_3

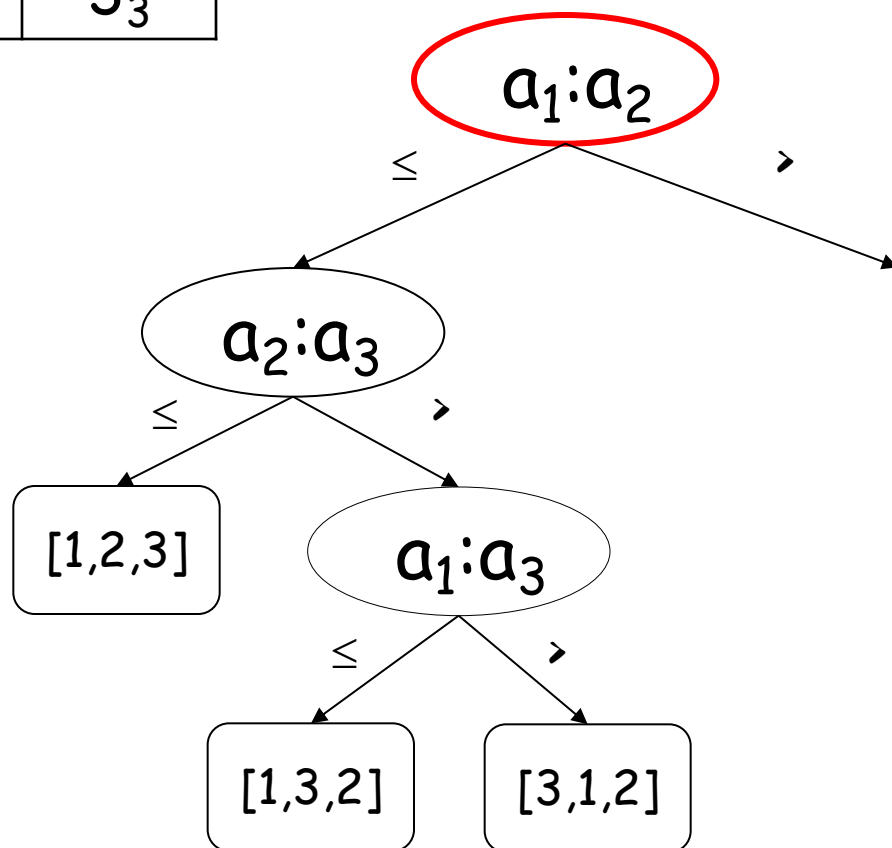
עץ החלטה

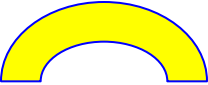




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_1	1_2	3_3

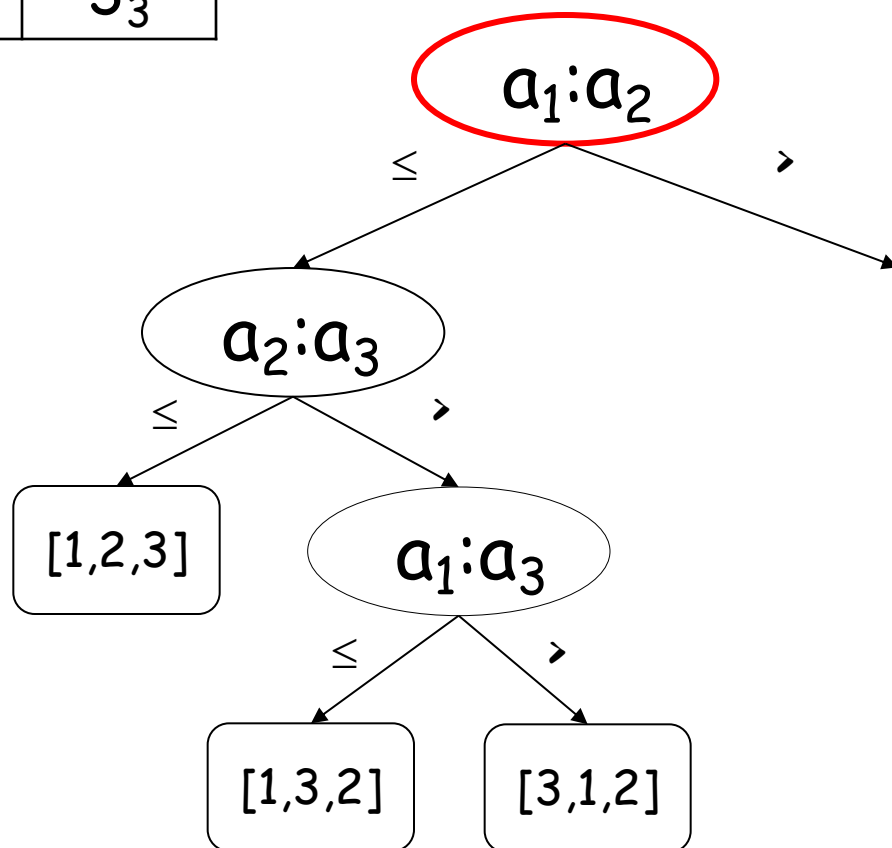
עץ החלטה

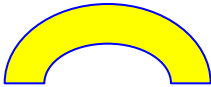




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_1	3_3

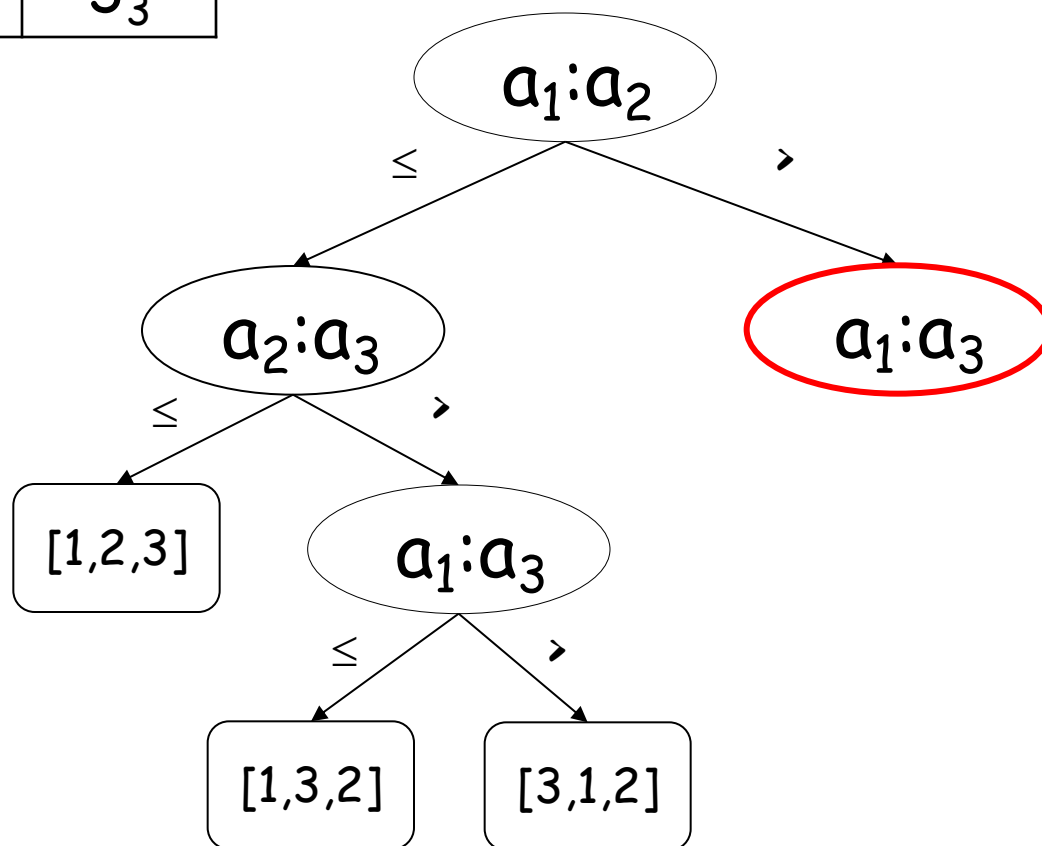
עץ החלטה

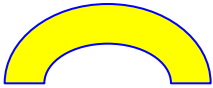




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_1	3_3

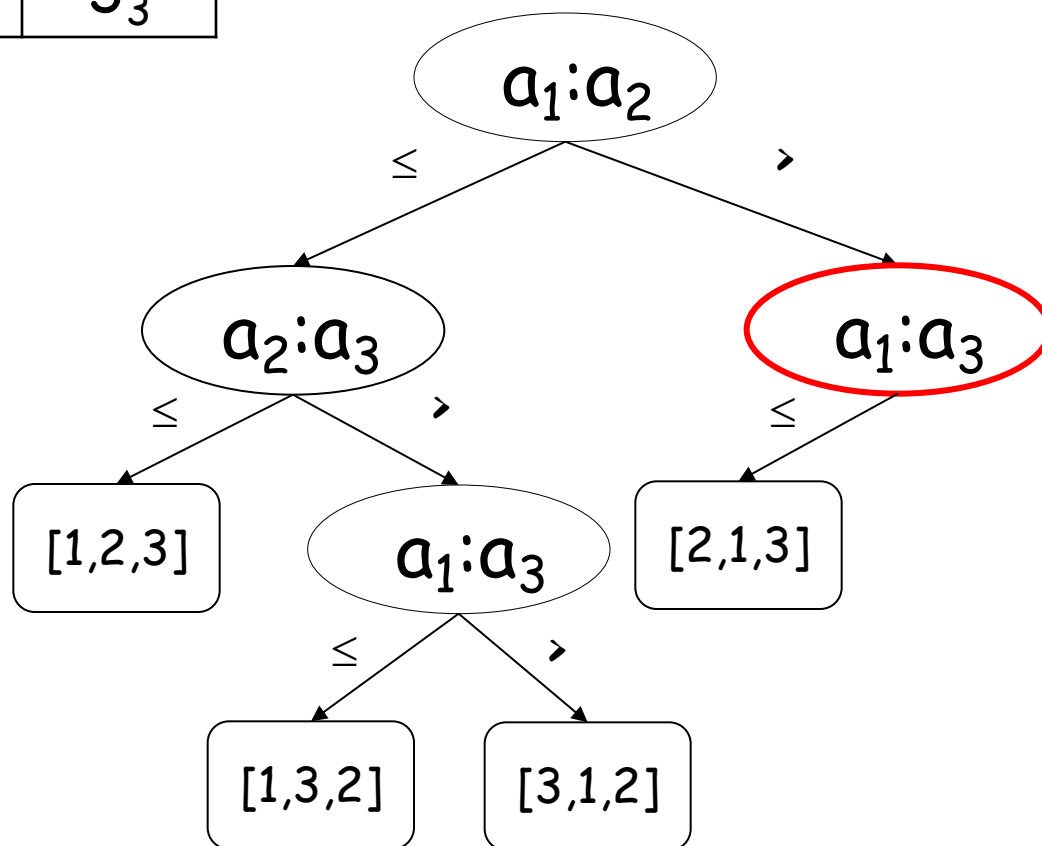
עץ החלטה





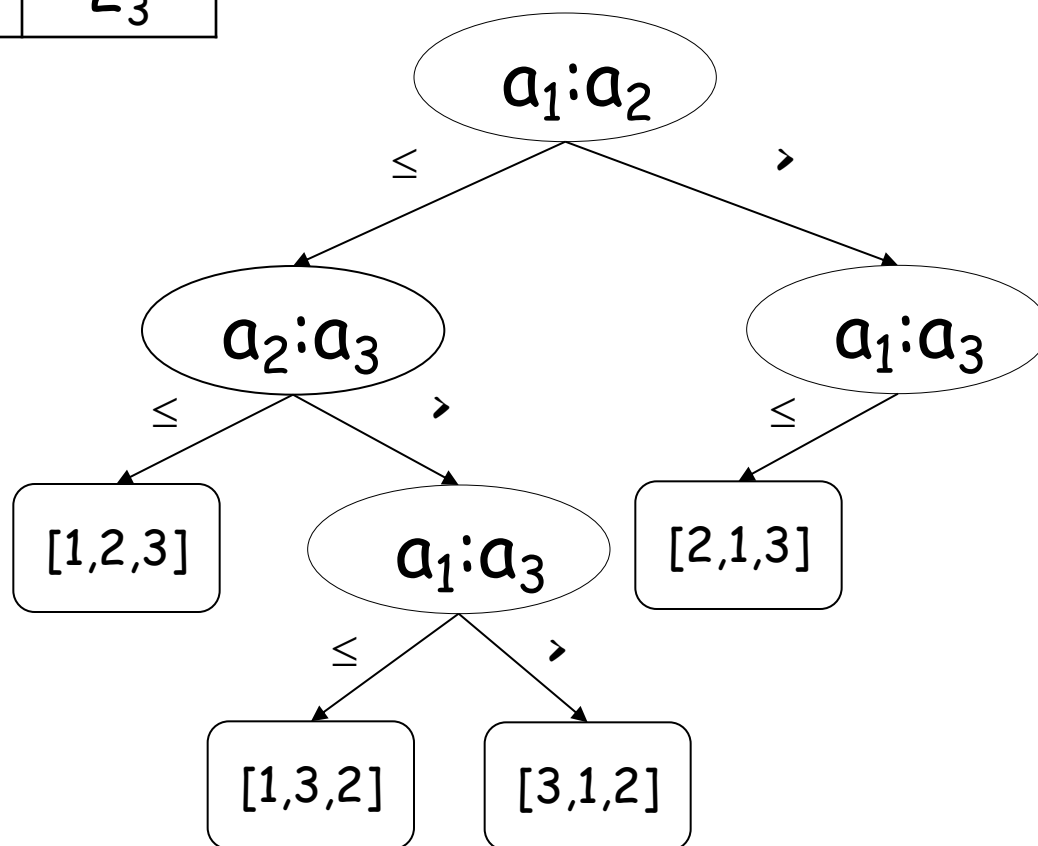
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_1	3_3

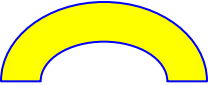
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
3_1	1_2	2_3

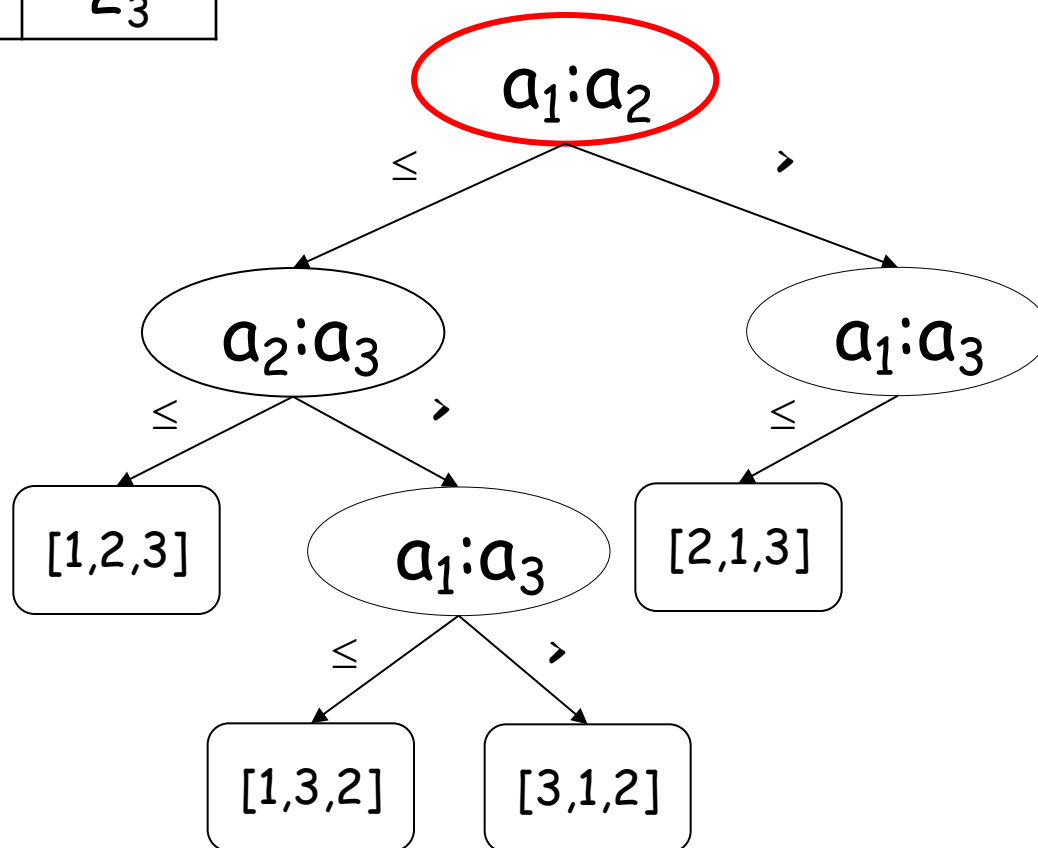
עץ החלטה

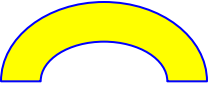




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
3_1	1_2	2_3

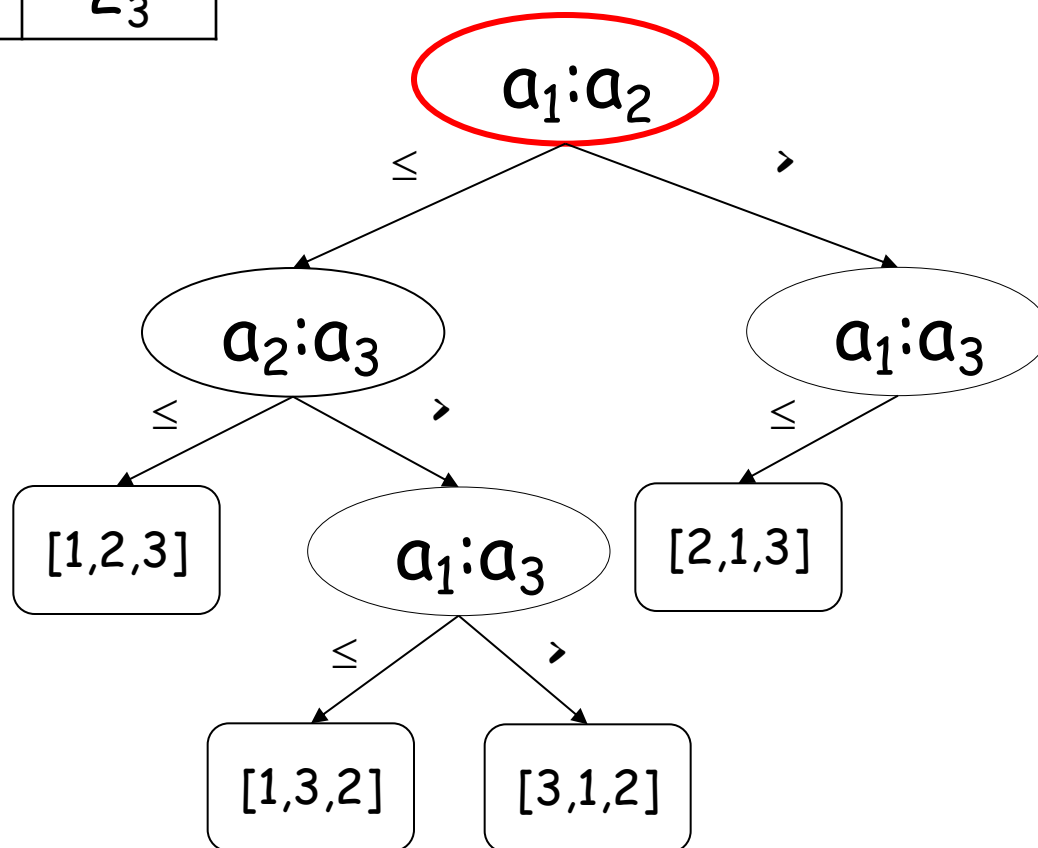
עץ החלטה

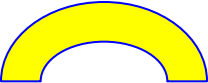




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	3_1	2_3

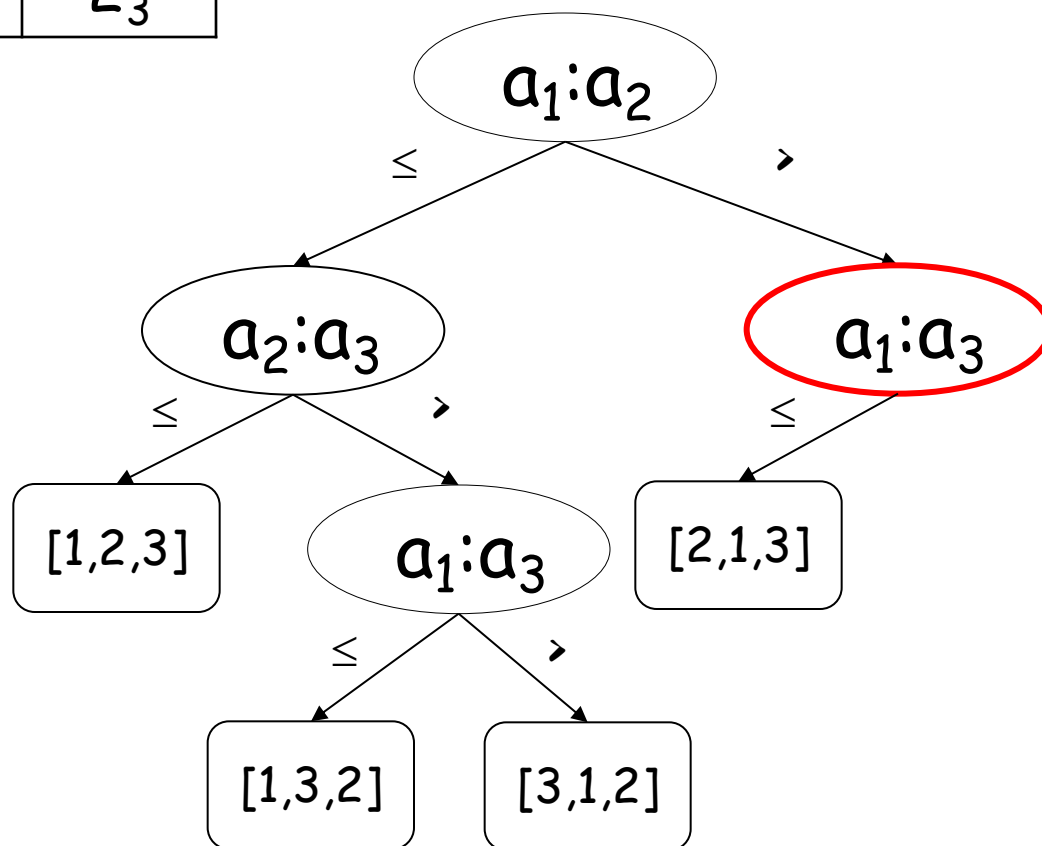
עץ החלטה

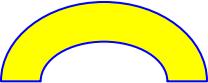




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	3_1	2_3

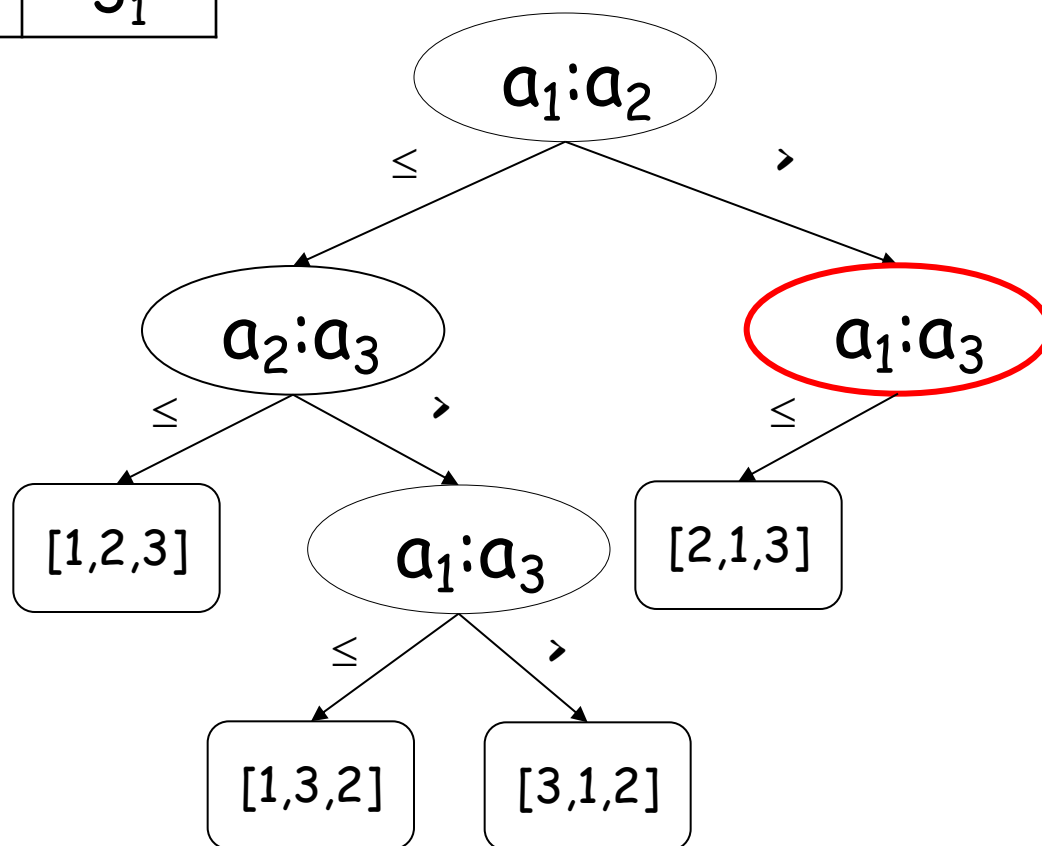
עץ החלטה

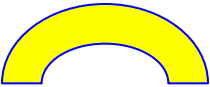




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_3	3_1

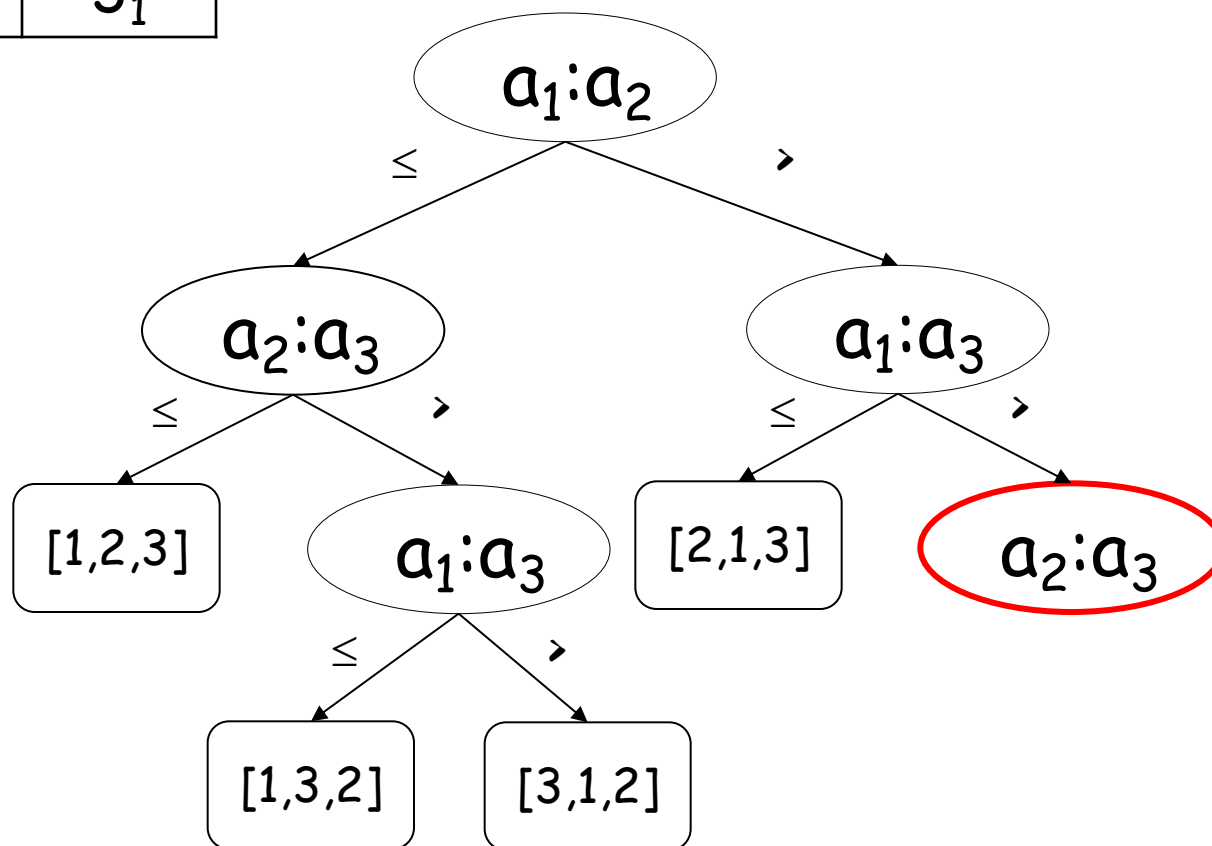
עץ החלטה





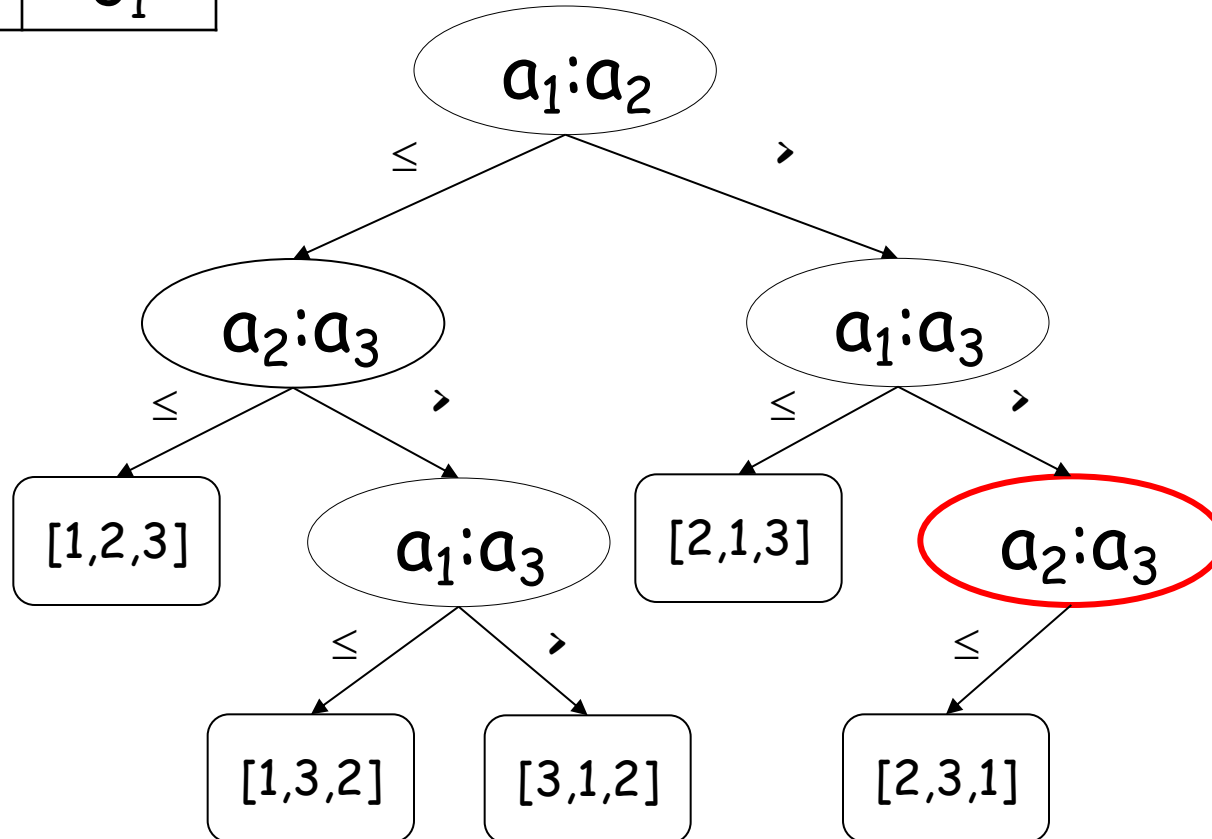
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_3	3_1

עץ החלטה



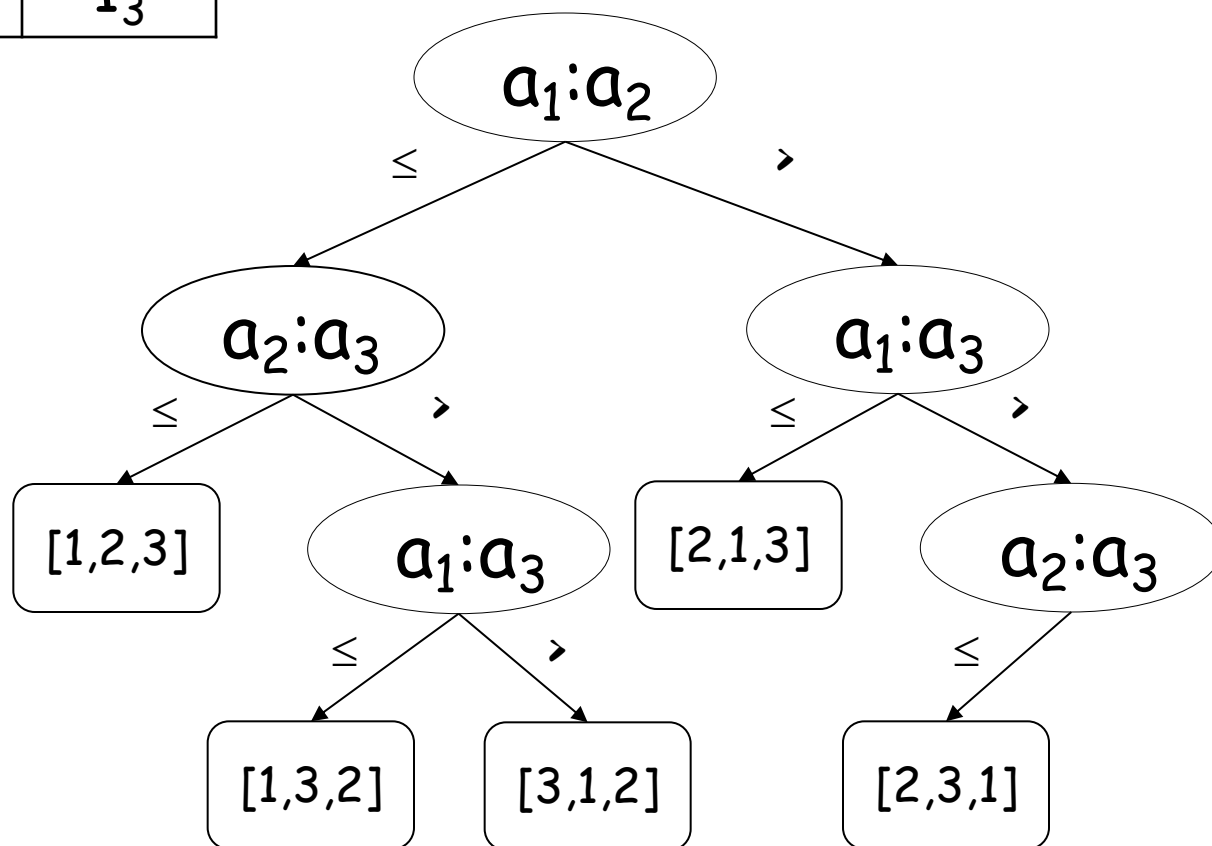
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_2	2_3	3_1

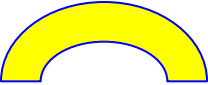
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
3_1	2_2	1_3

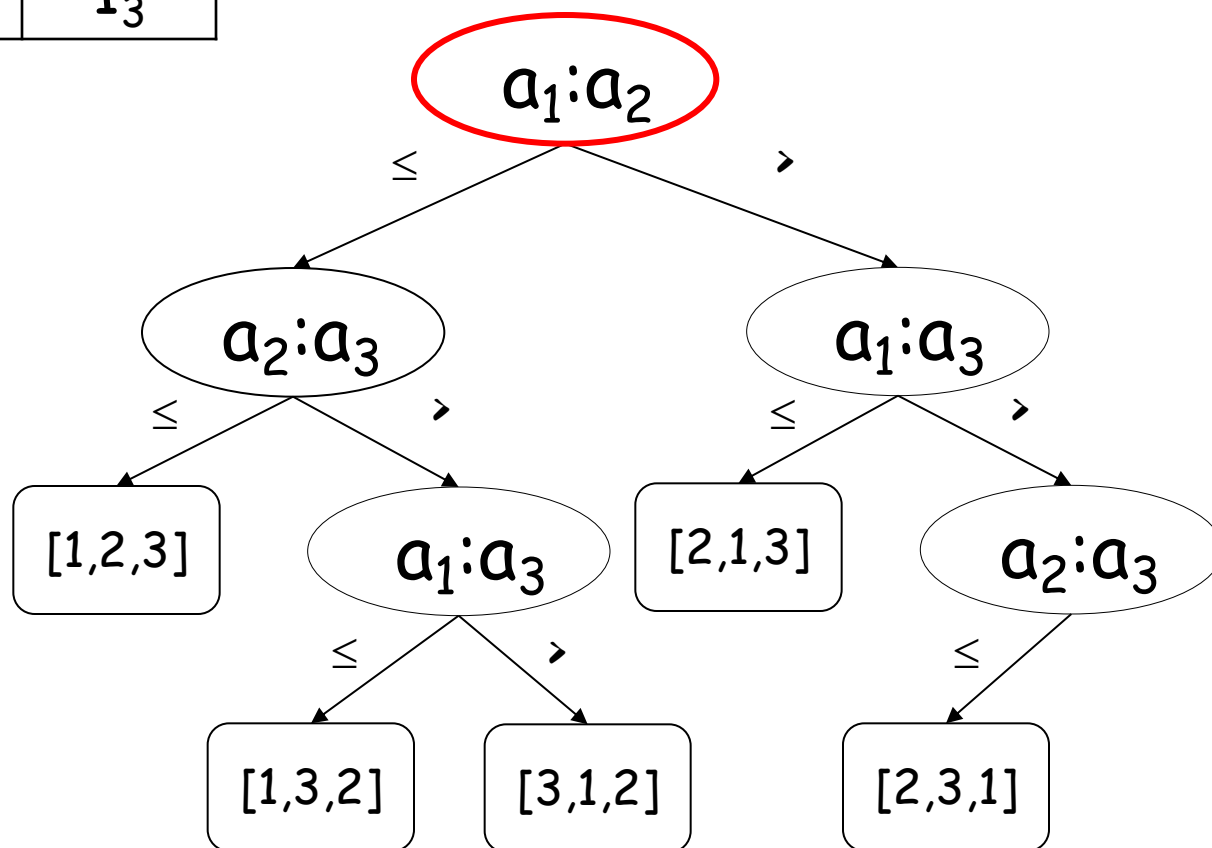
עץ החלטה





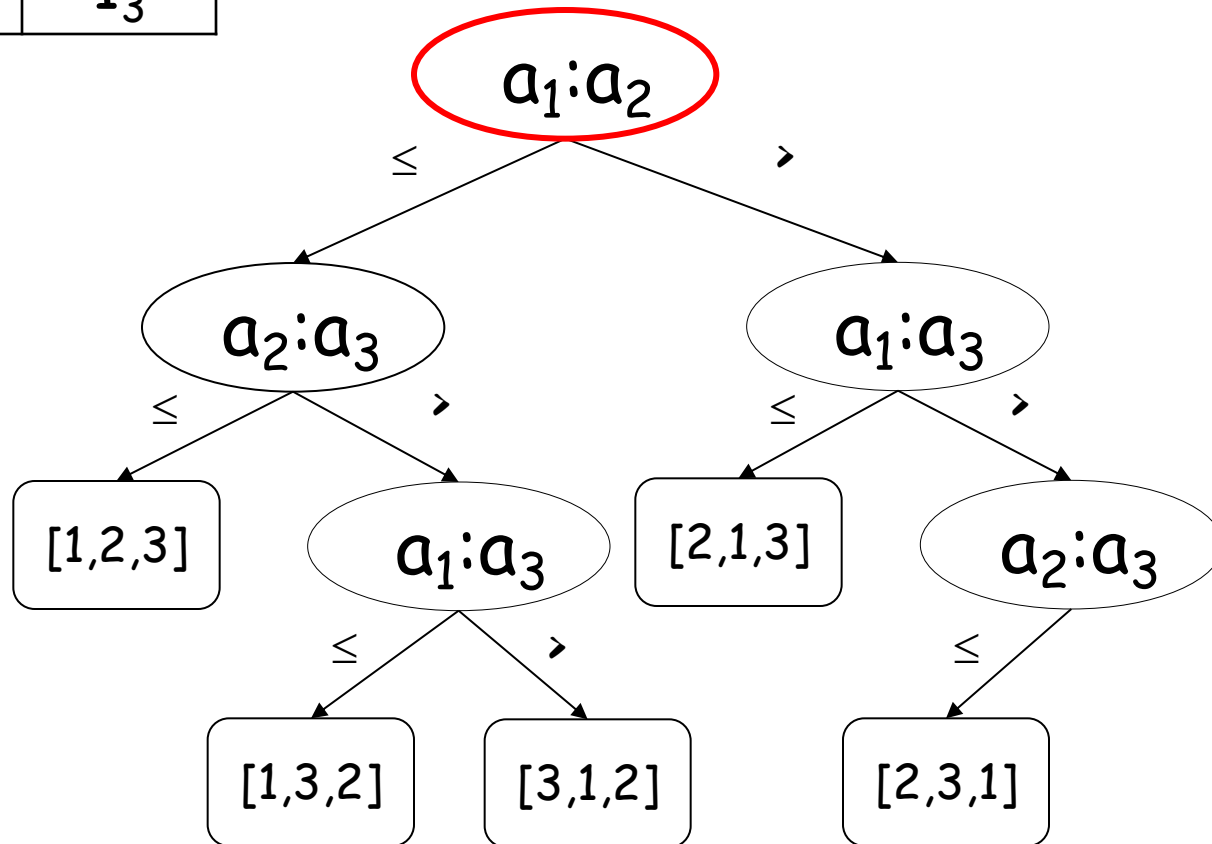
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
3_1	2_2	1_3

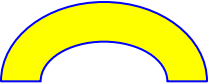
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_2	3_1	1_3

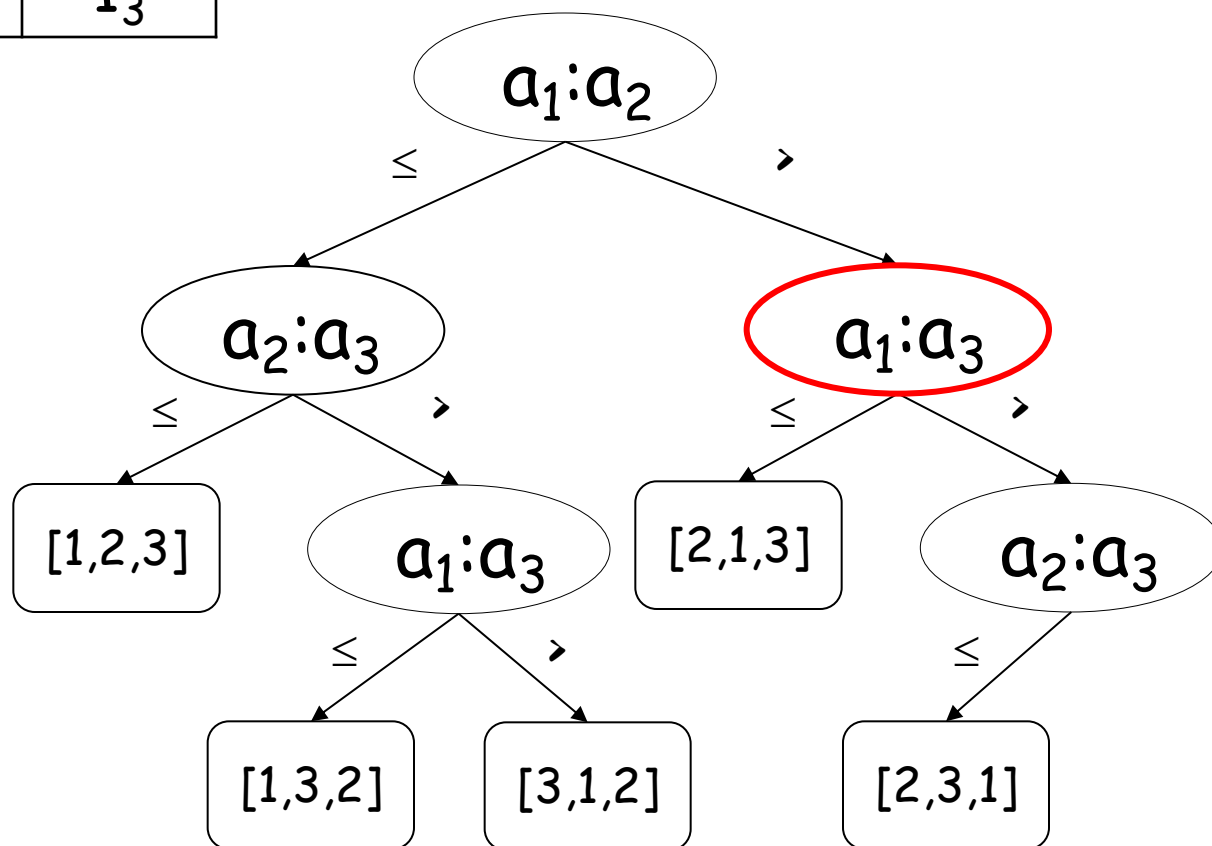
עץ החלטה





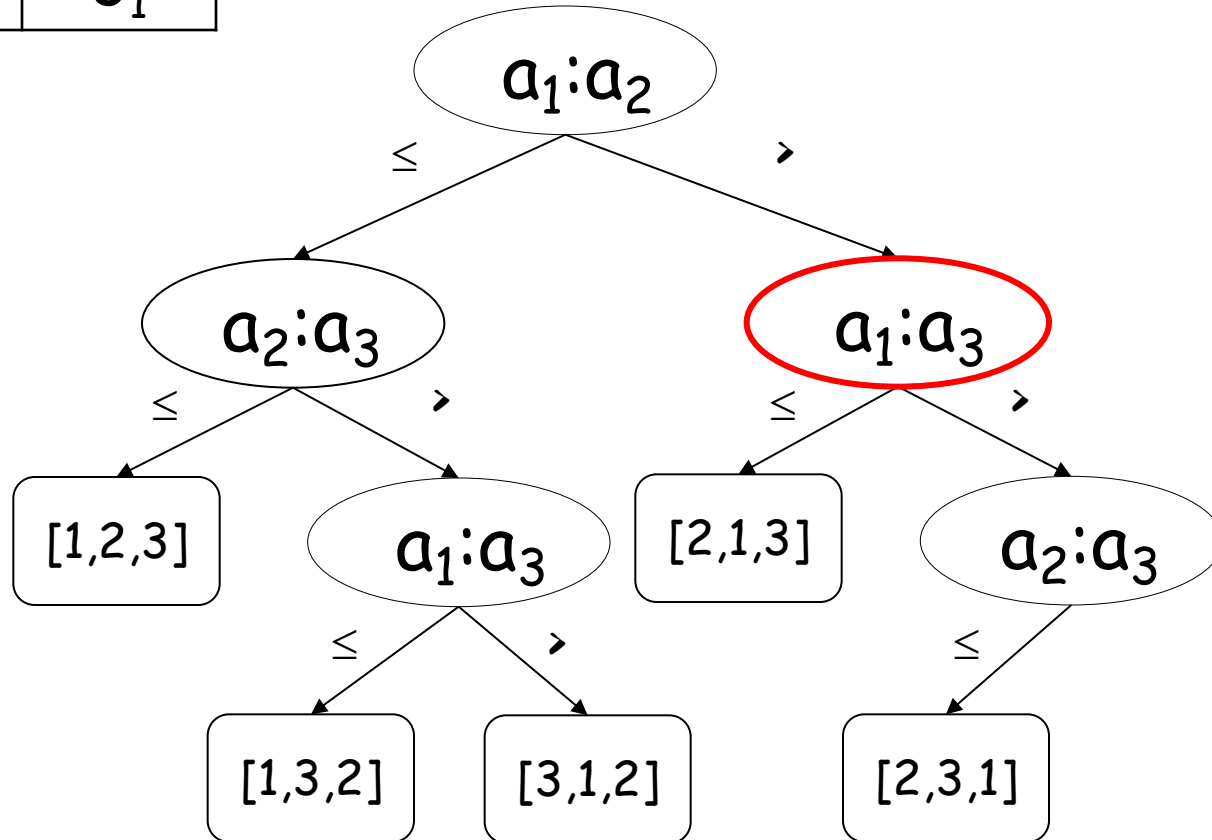
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_2	3_1	1_3

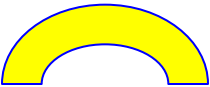
עץ החלטה



$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_2	1_3	3_1

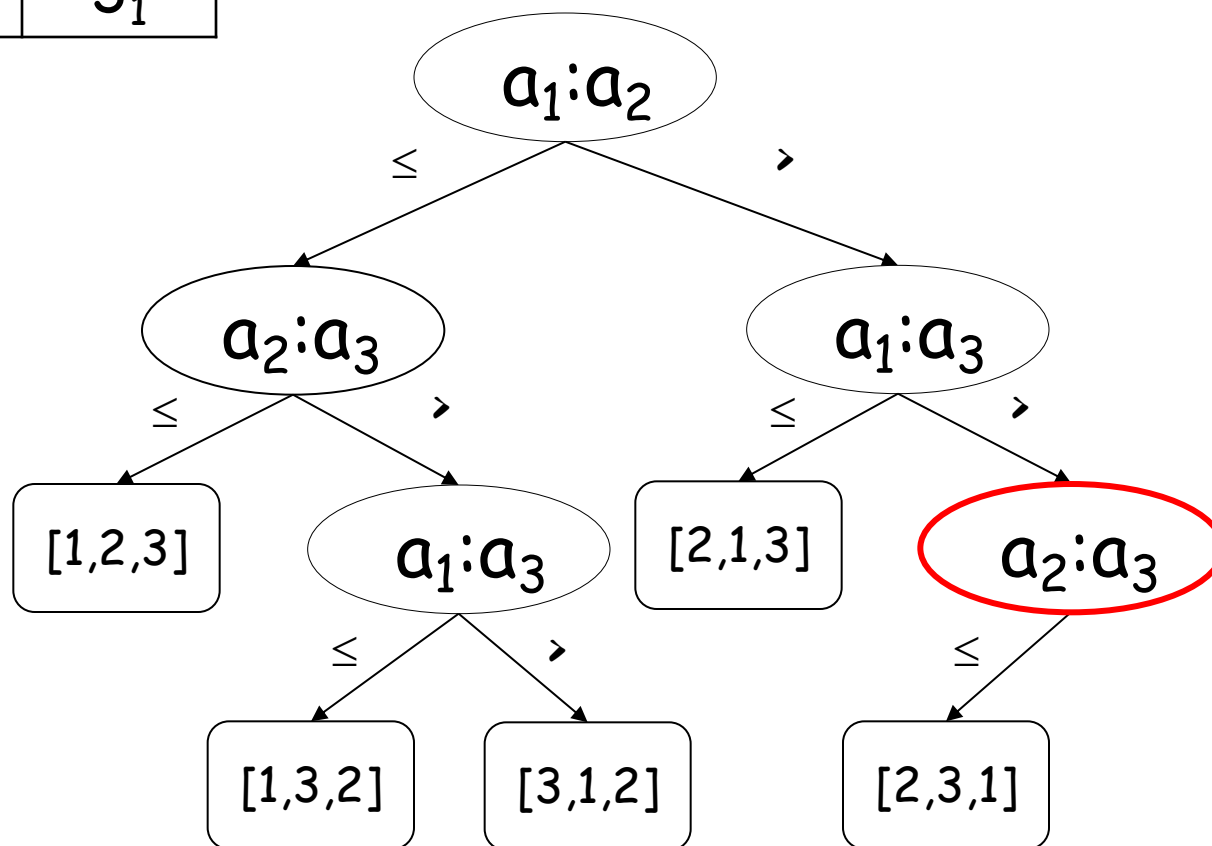
עץ החלטה

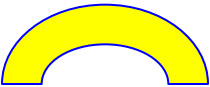




$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
2_2	1_3	3_1

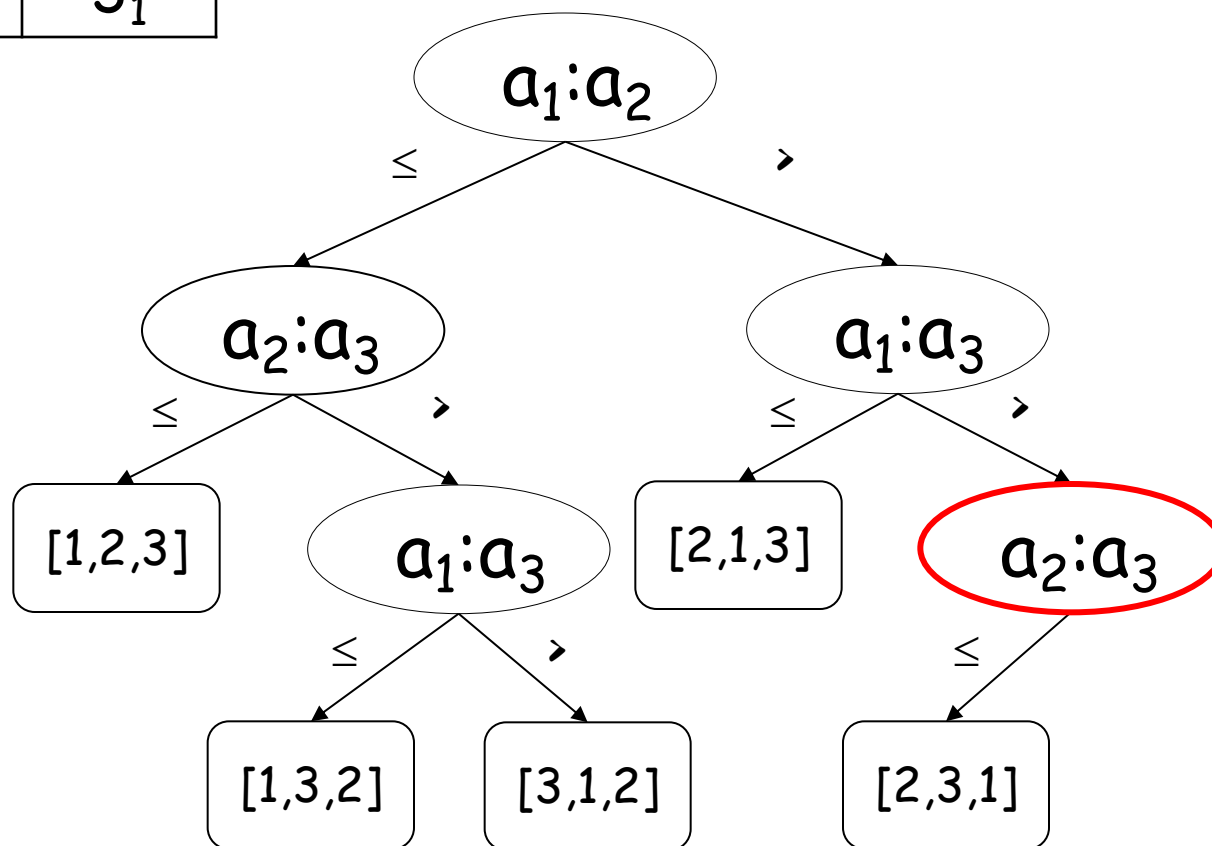
עץ החלטה





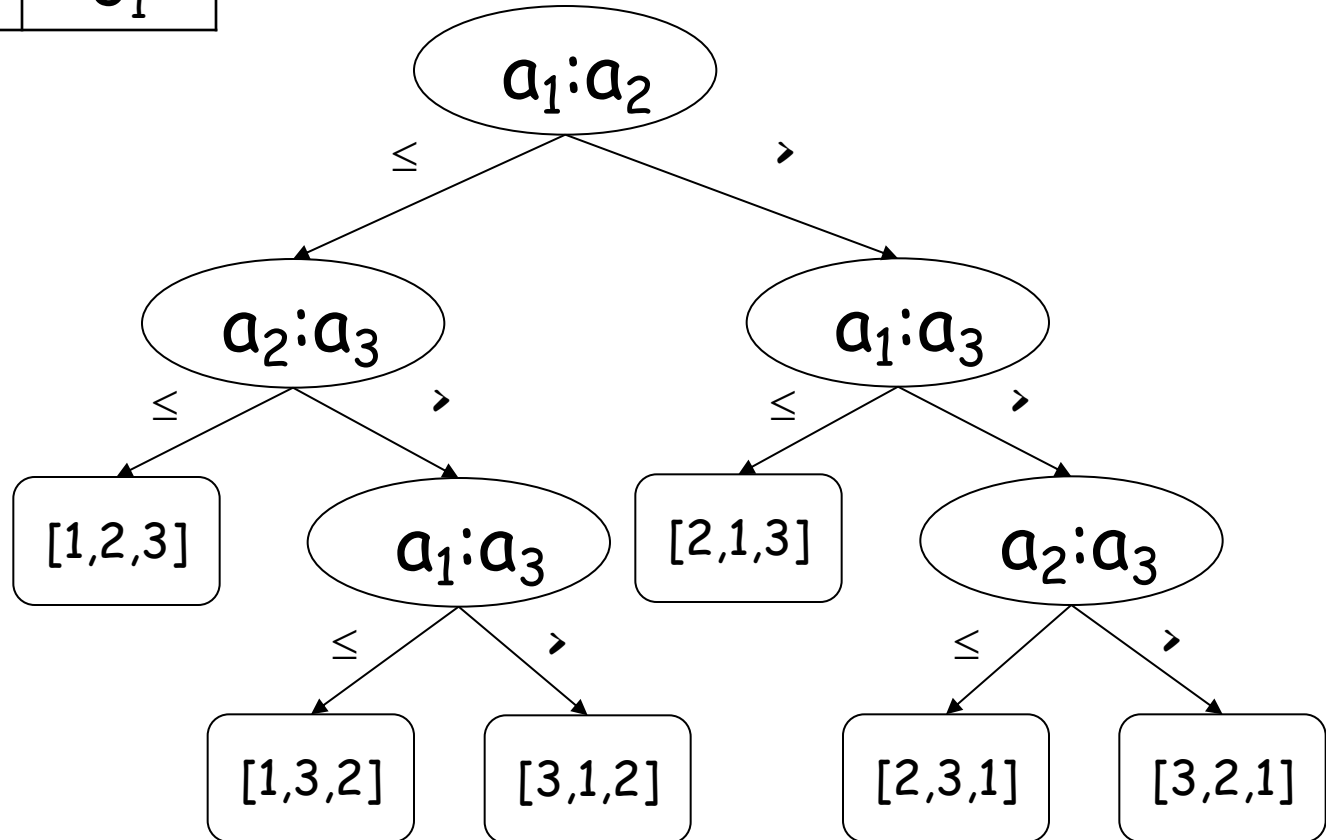
$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_3	2_2	3_1

עץ החלטה

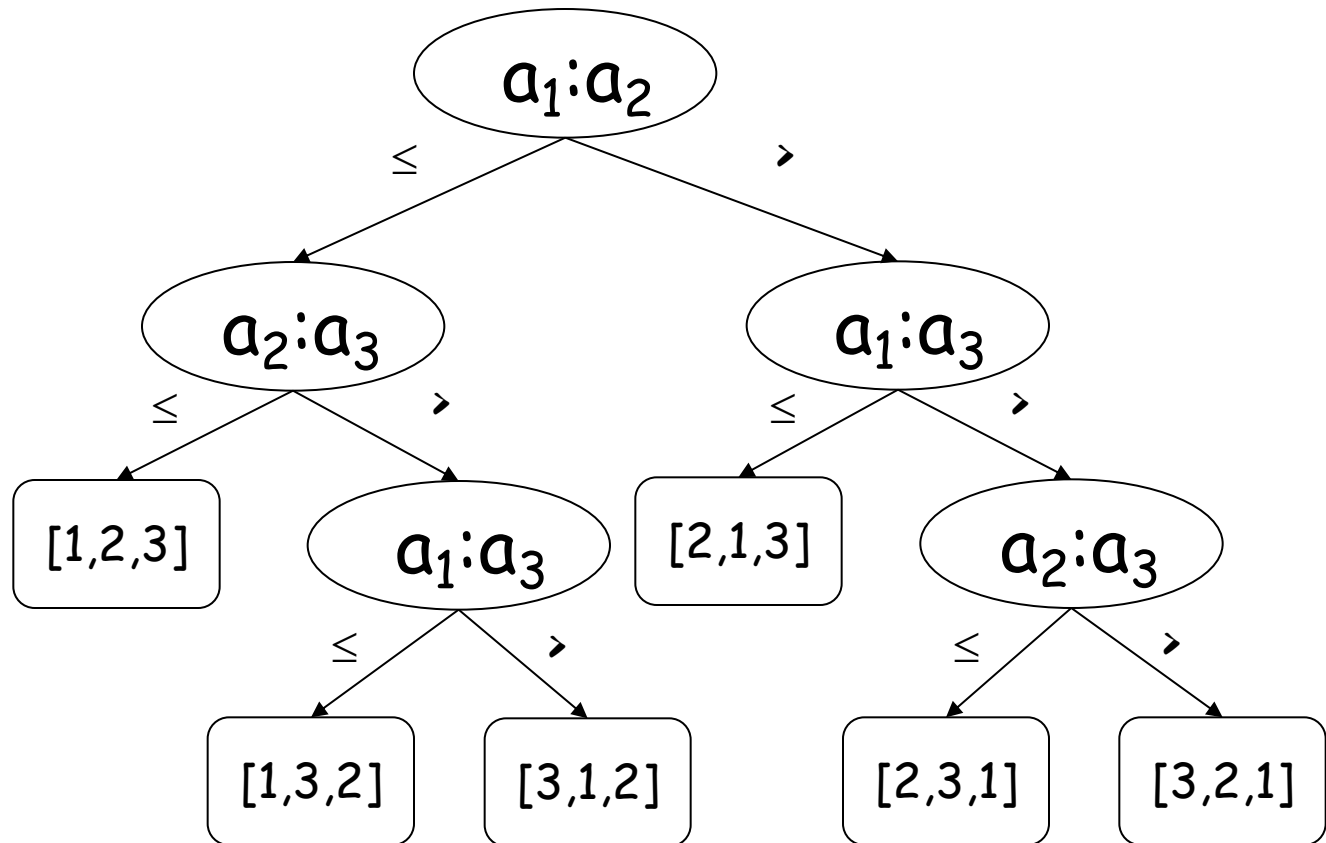


$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$
1_3	2_2	3_1

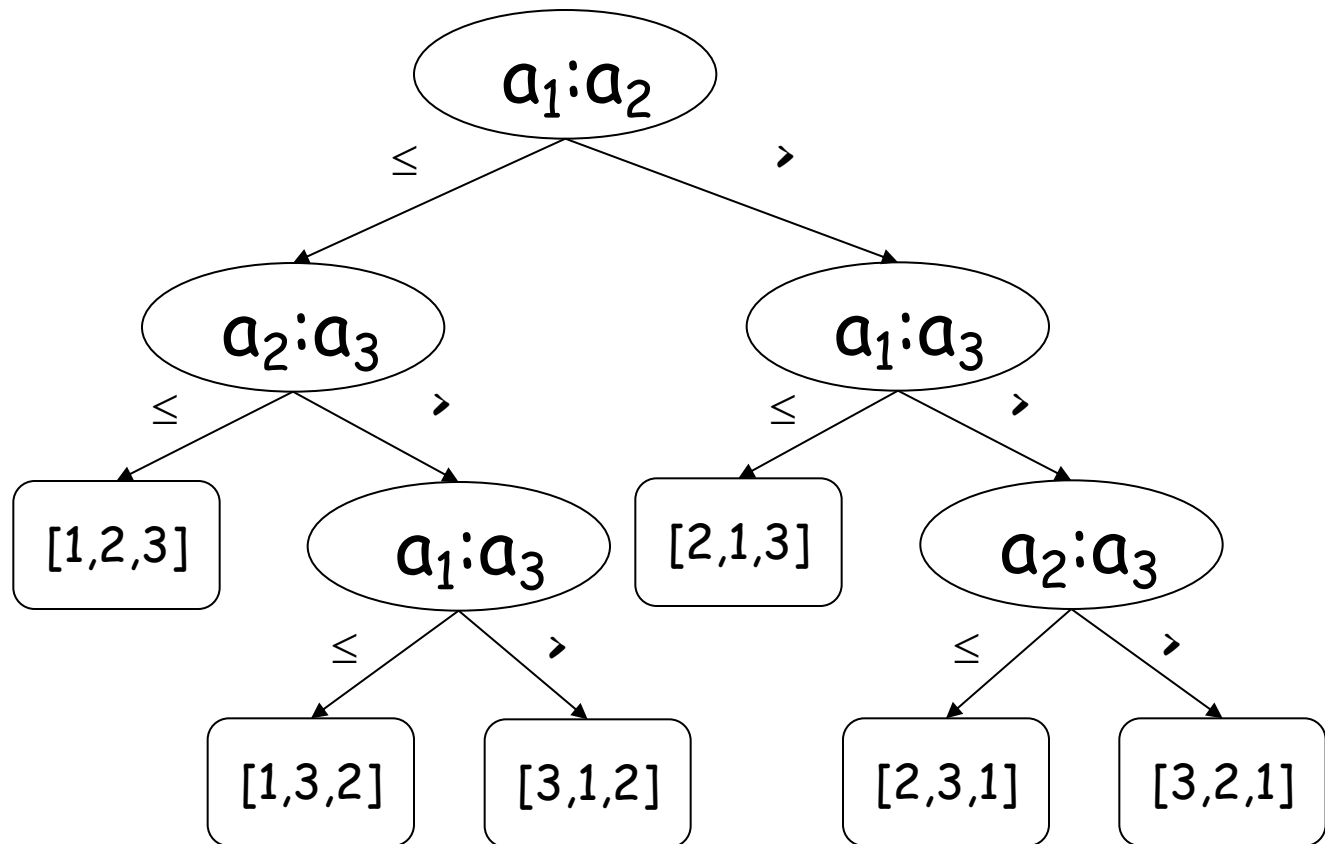
עץ החלטה



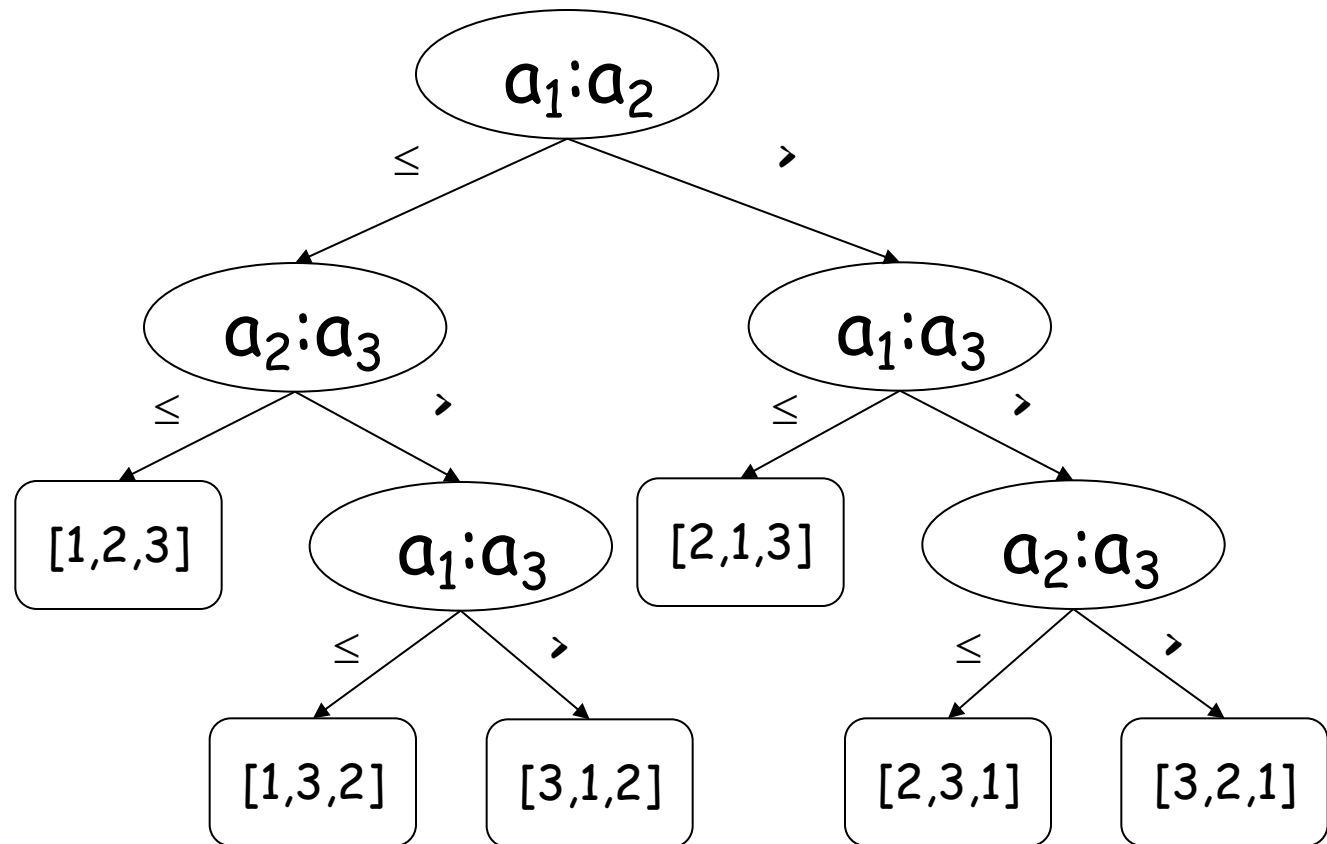
מהו מסלול בעץ?



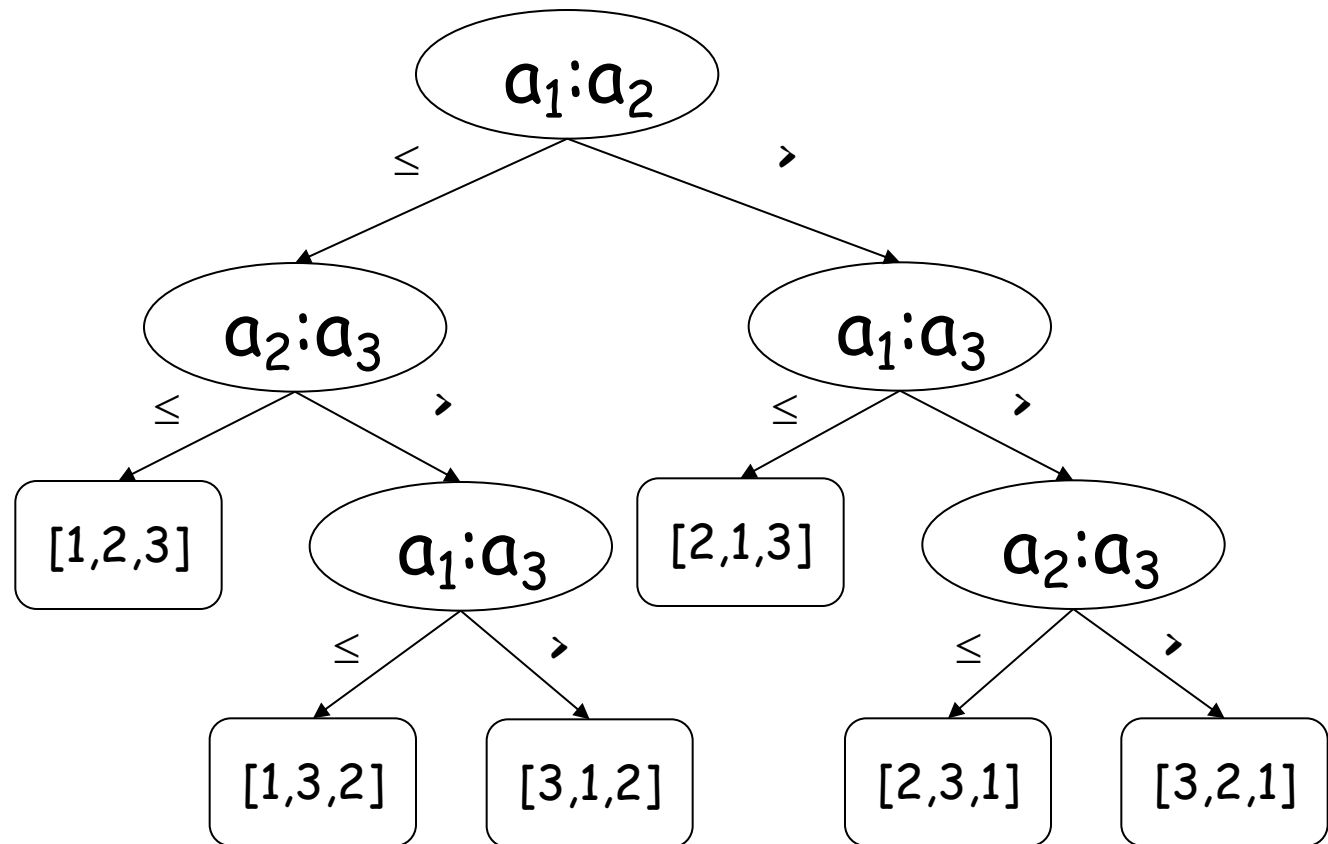
מהו מסלול בעץ? ריצה מסוימת



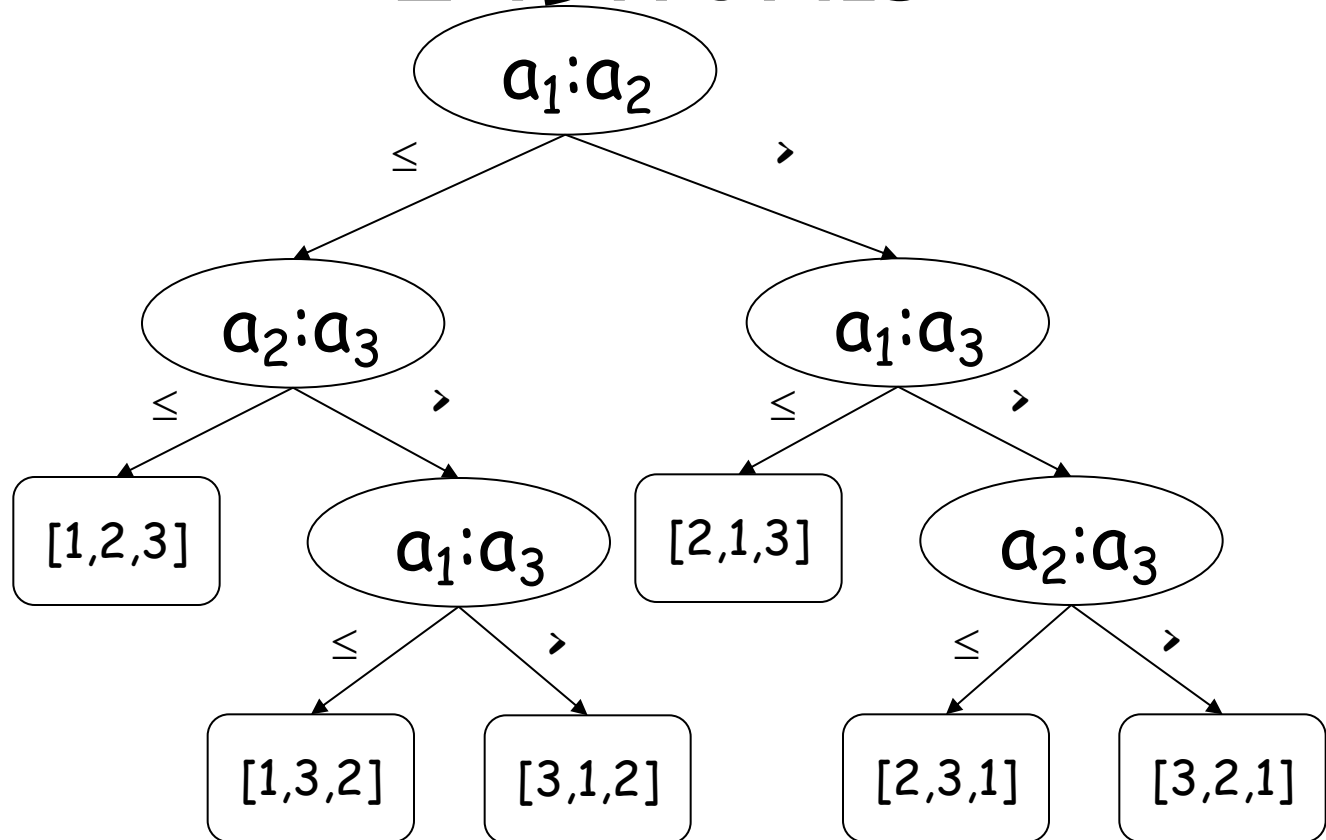
מה מציין עלה?



מה מציין עלה? פלט אפשרי של המיון

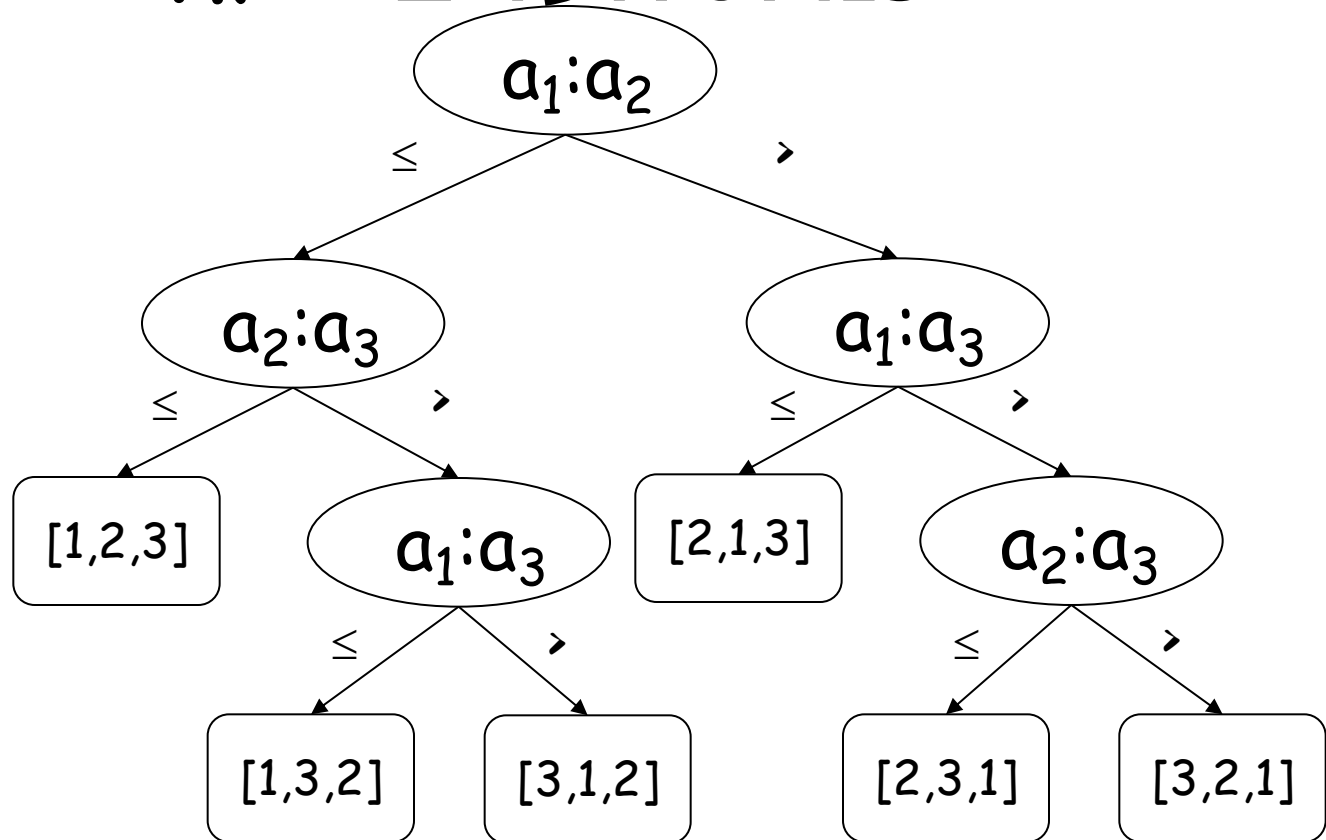


מסקנה: = כמות העלים

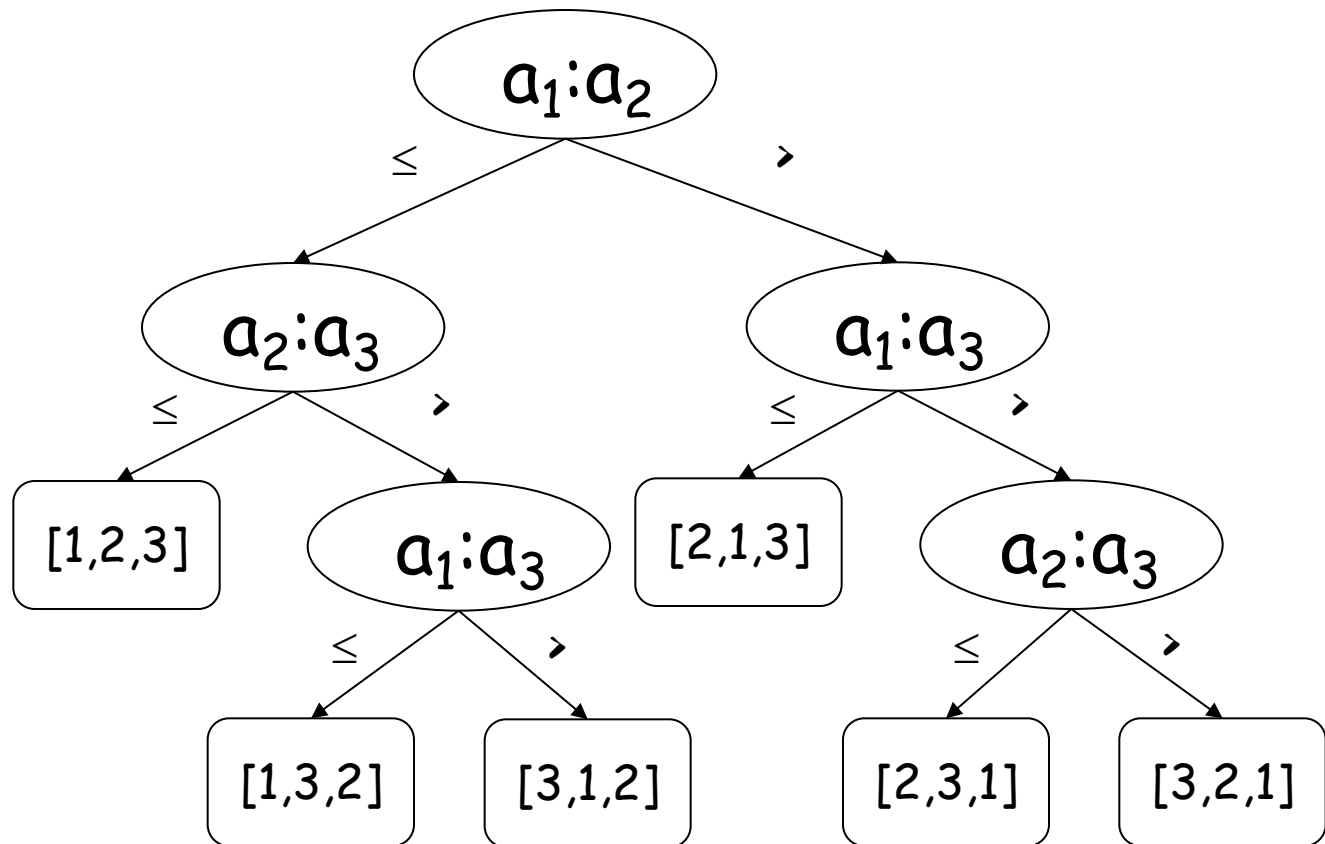


מסקנה:

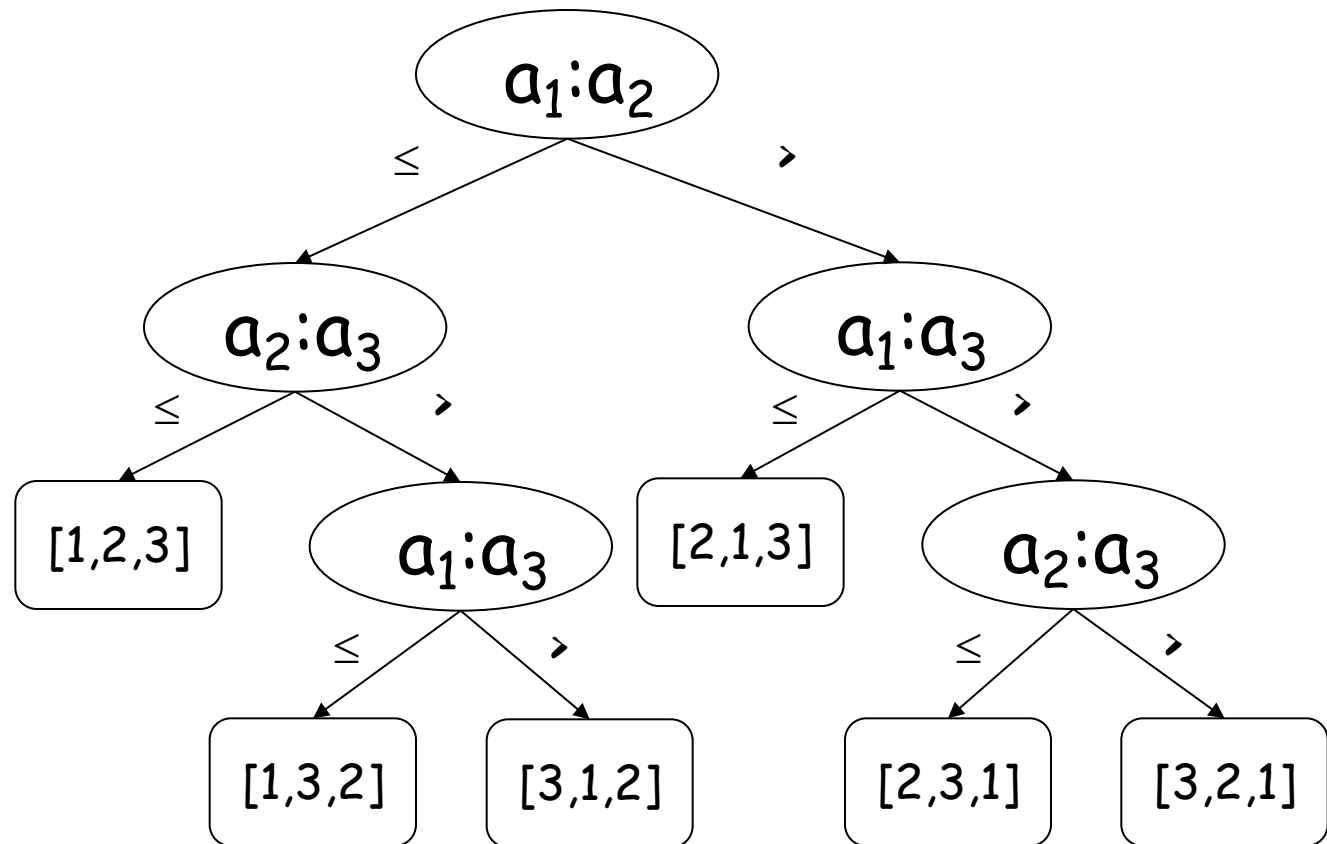
כמות העלים $n!$



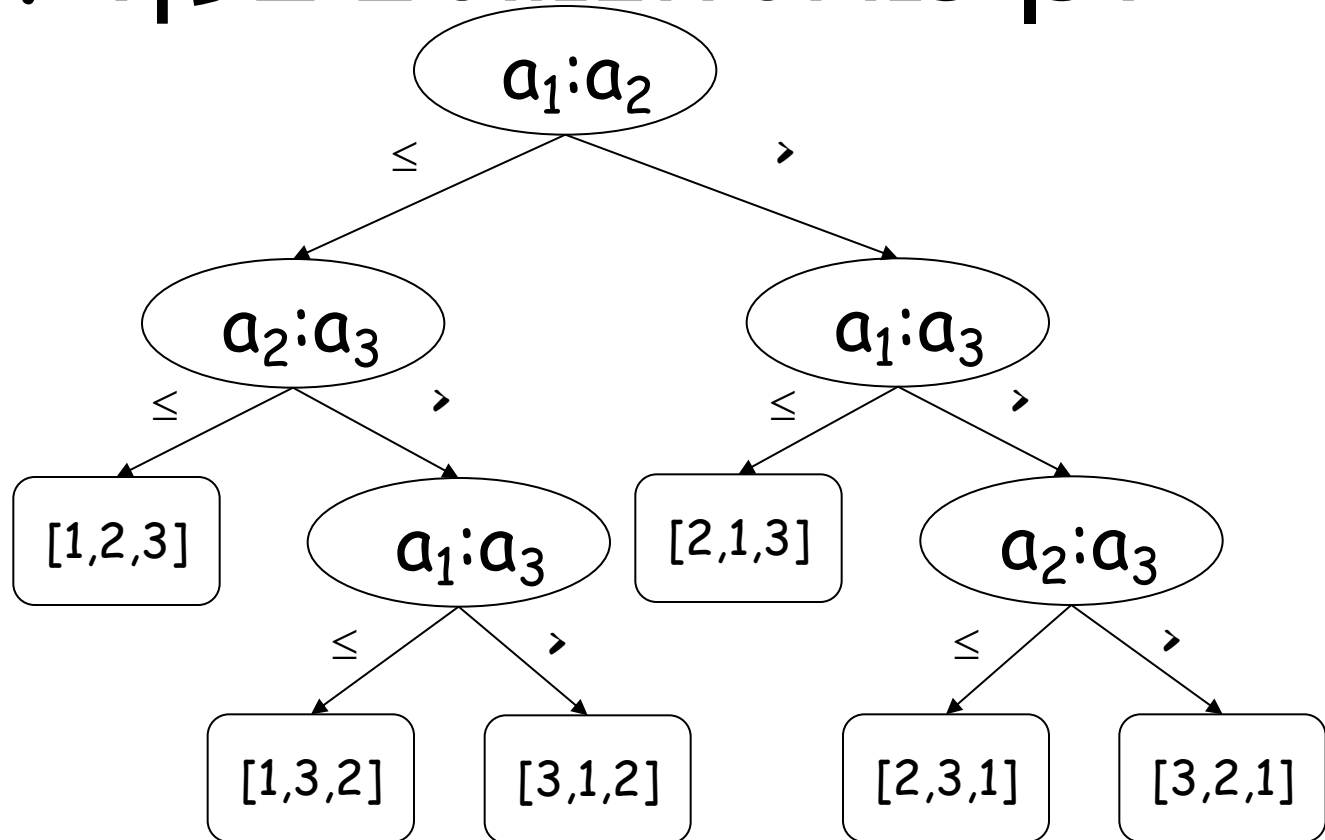
איזה סוג הוא עץ החלטה ?



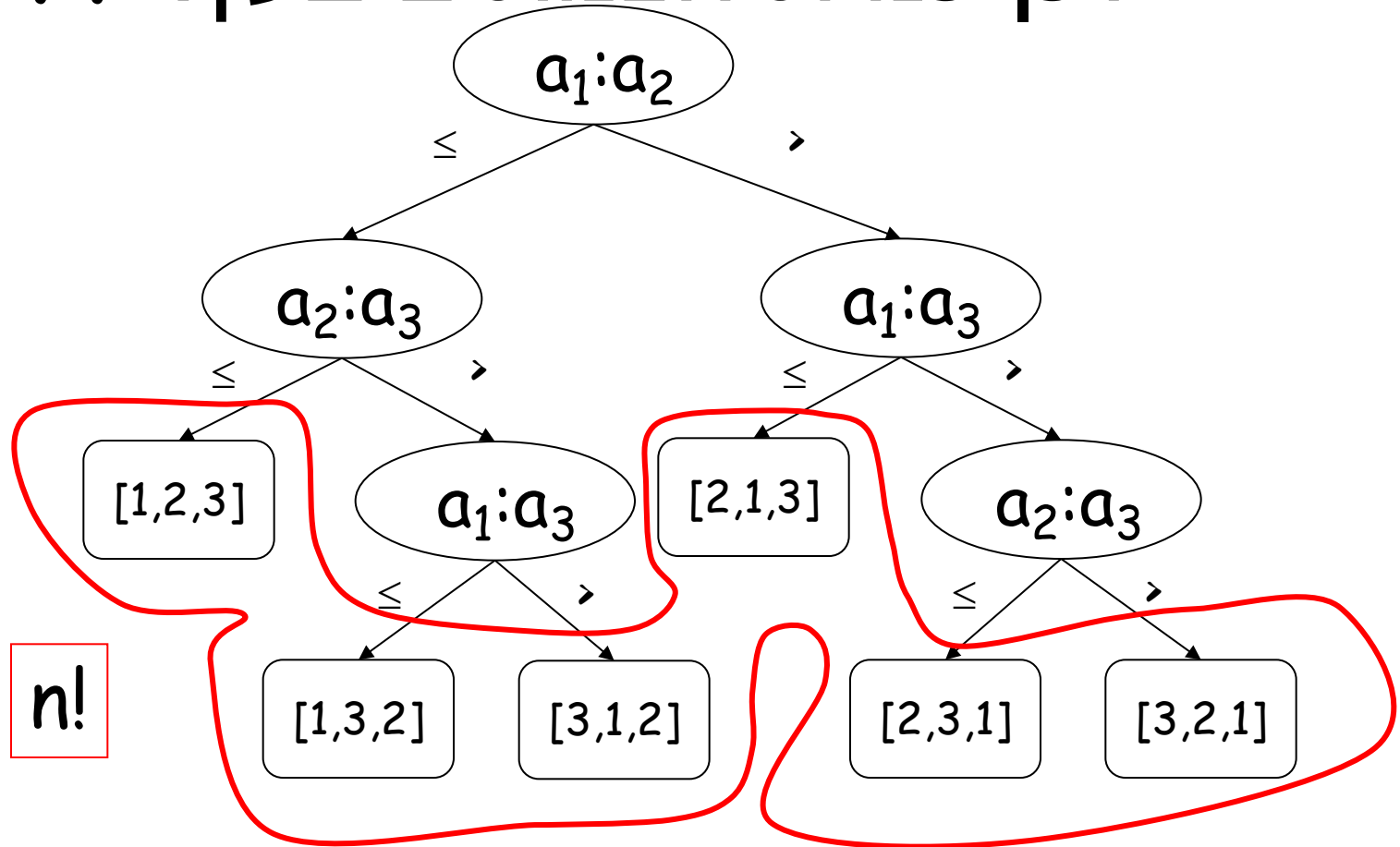
איזה סוג הוא עץ החלטה ? עץ מלא



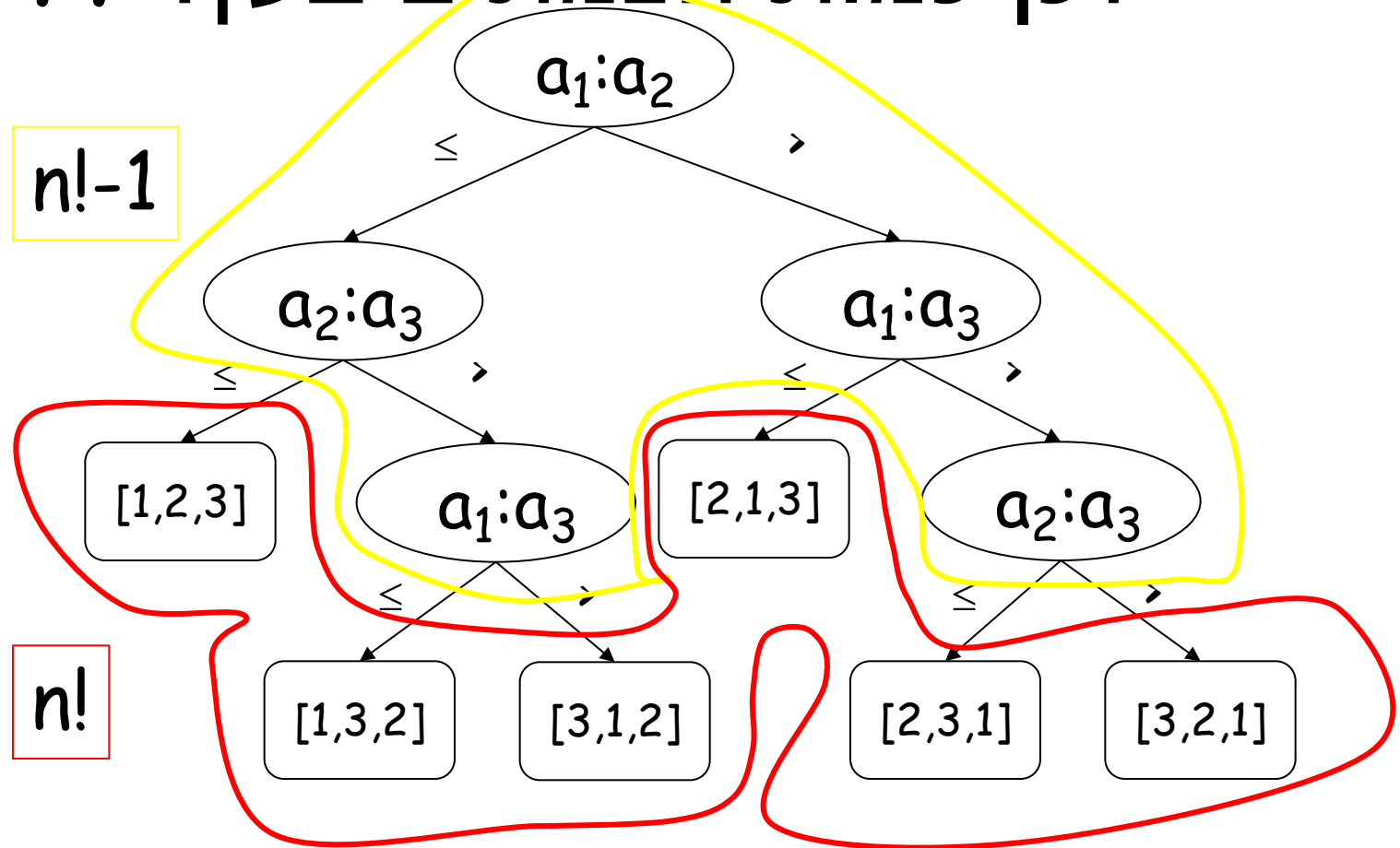
כמות העלים = $n!$ והעץ מלא.
 לכן כמות הצמתים בעץ: ??



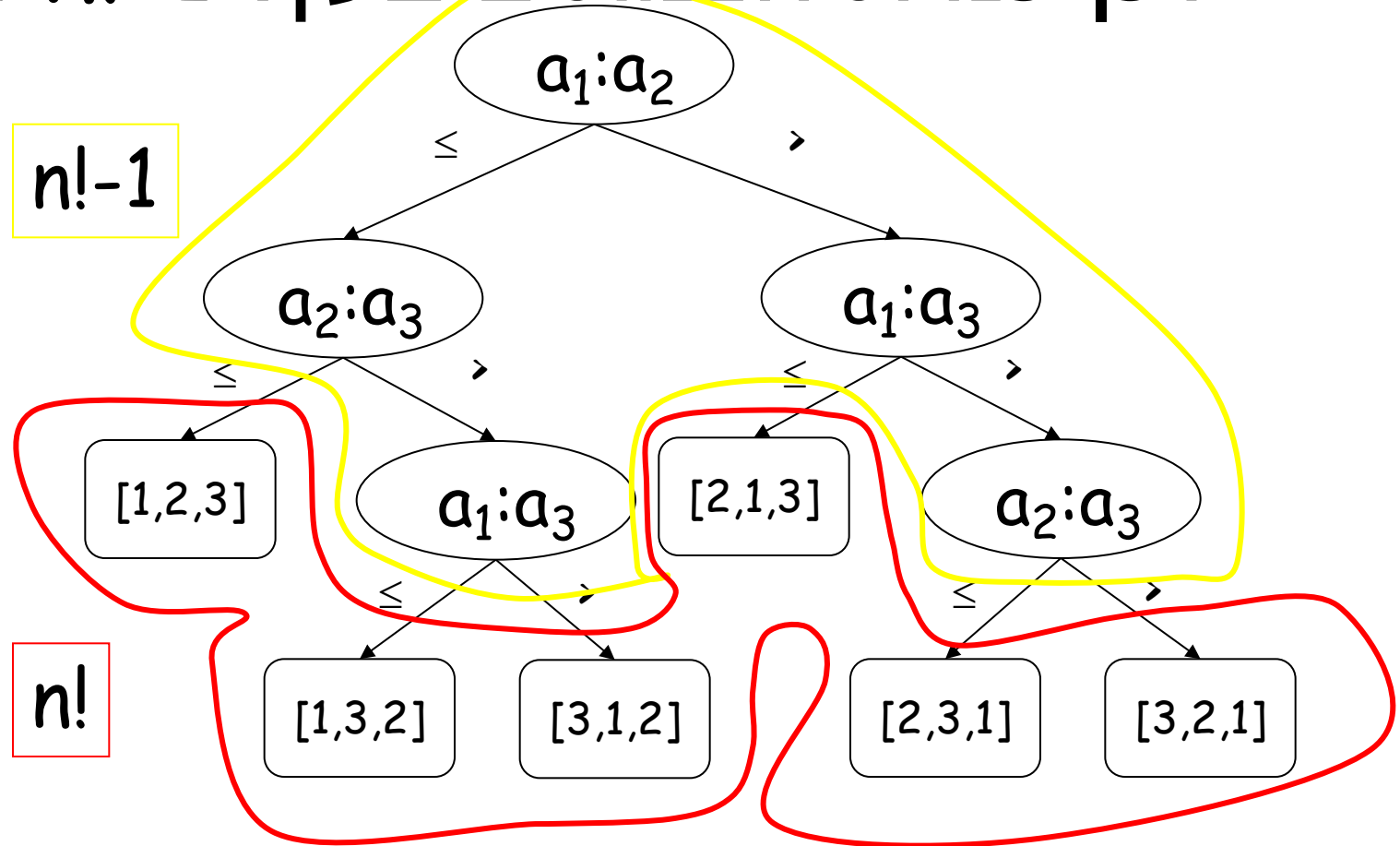
כמות העלים = $n!$ והעץ מלא.
 לכן כמות הצמתים בעץ: ??



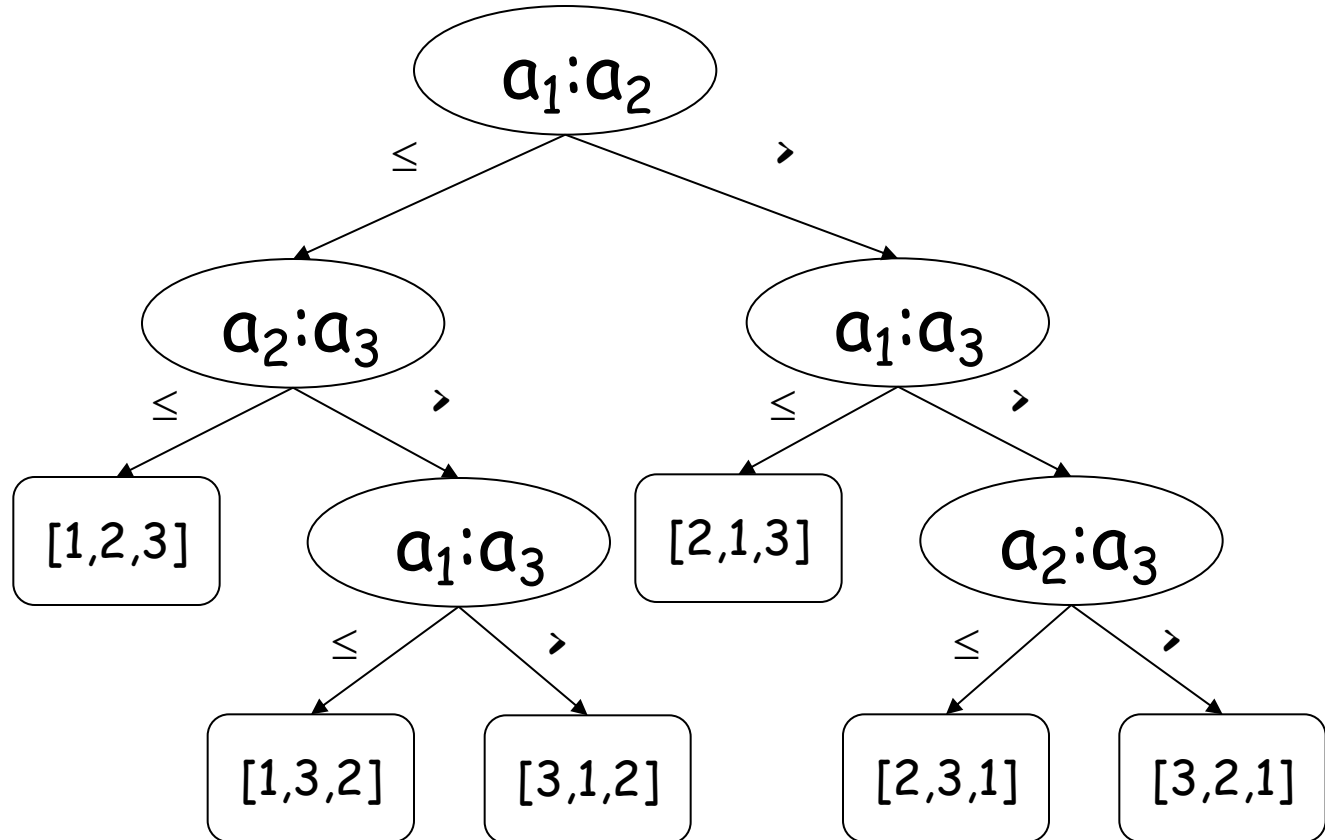
כמות העלים = $n!$ והעץ מלא.
 לכן כמות הצמתים בעץ: ??



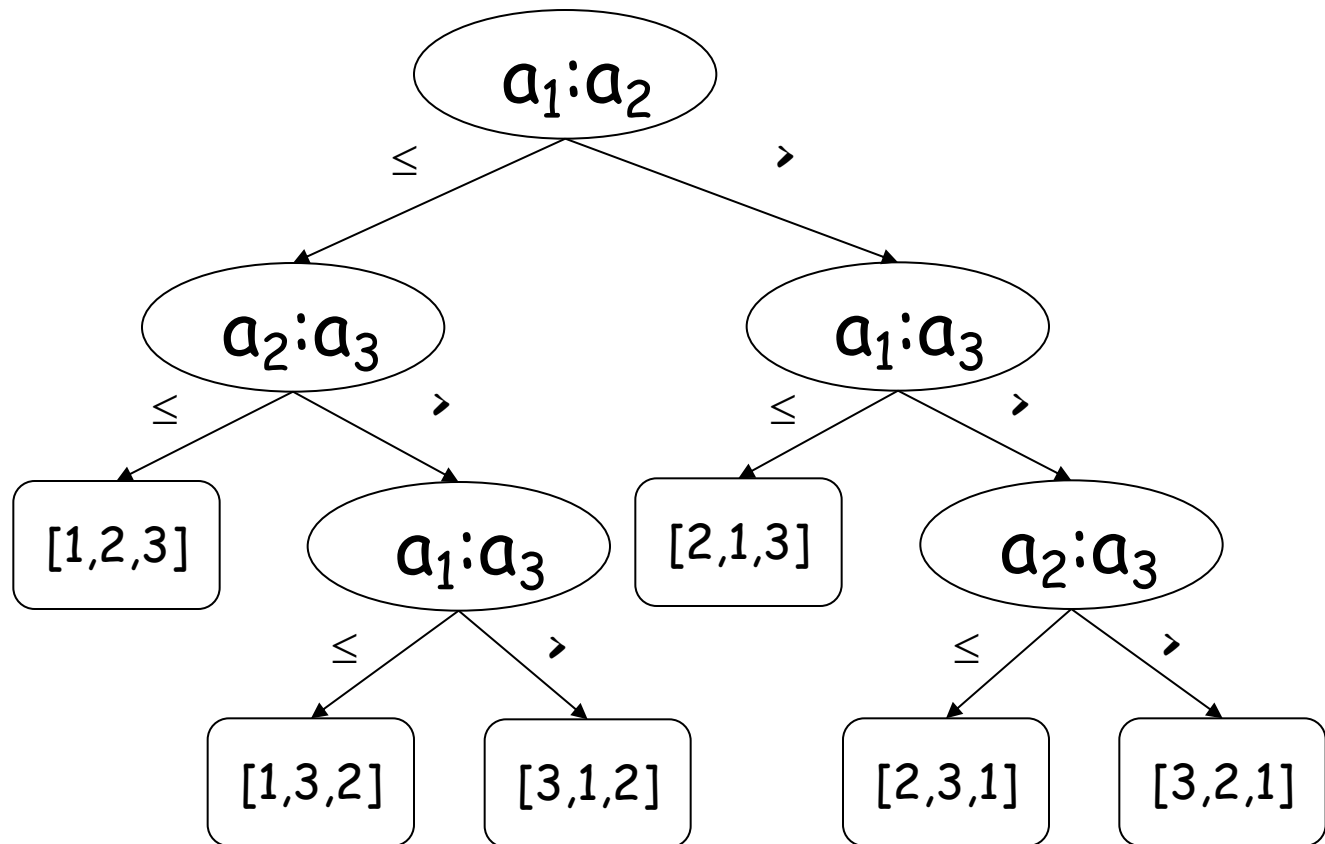
כמות העלים = $n!$ והעץ מלא.
 לכן כמות הצמתים בעץ: $2 \cdot n! - 1$



מהו מסלול בעץ?

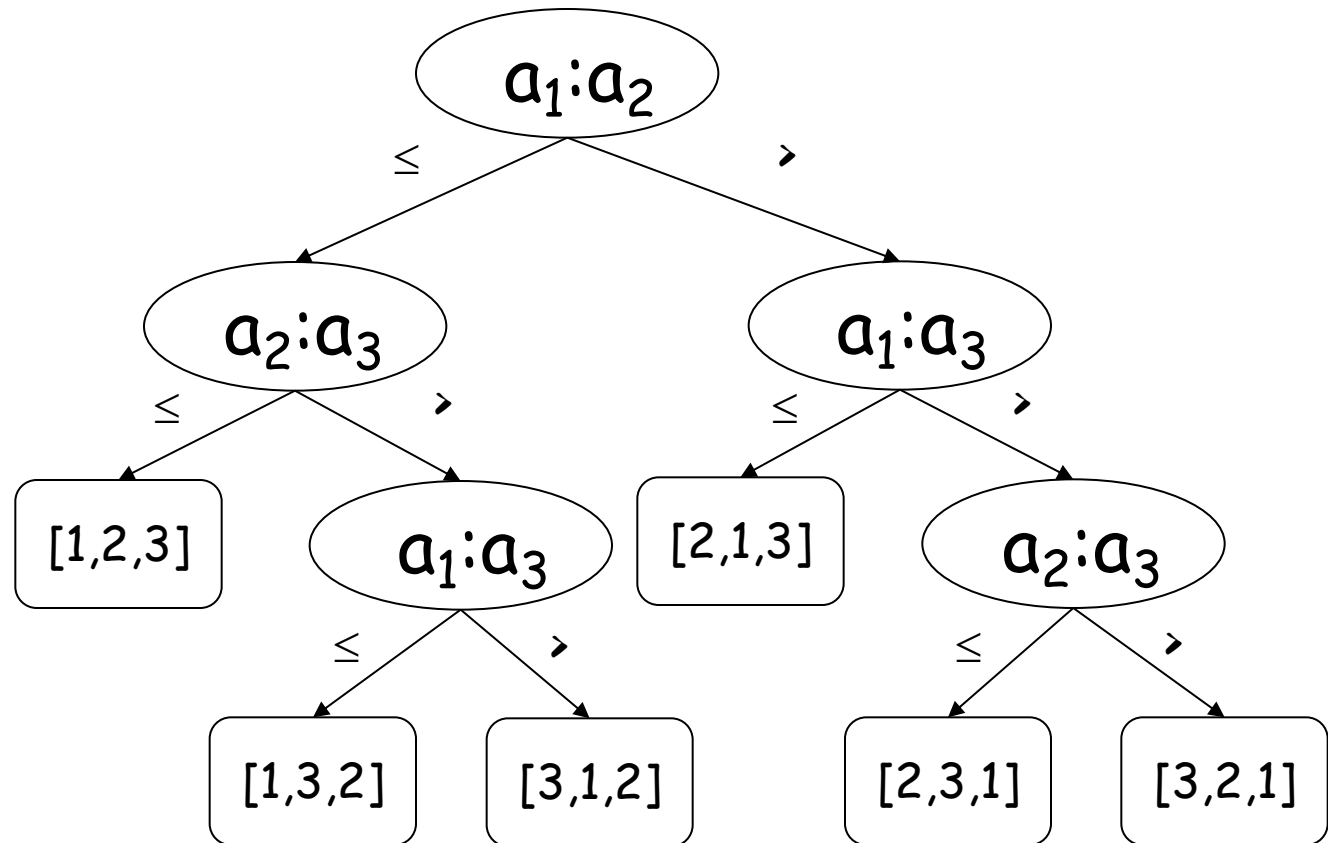


מהו מסלול בעץ? ריצה מסוימת



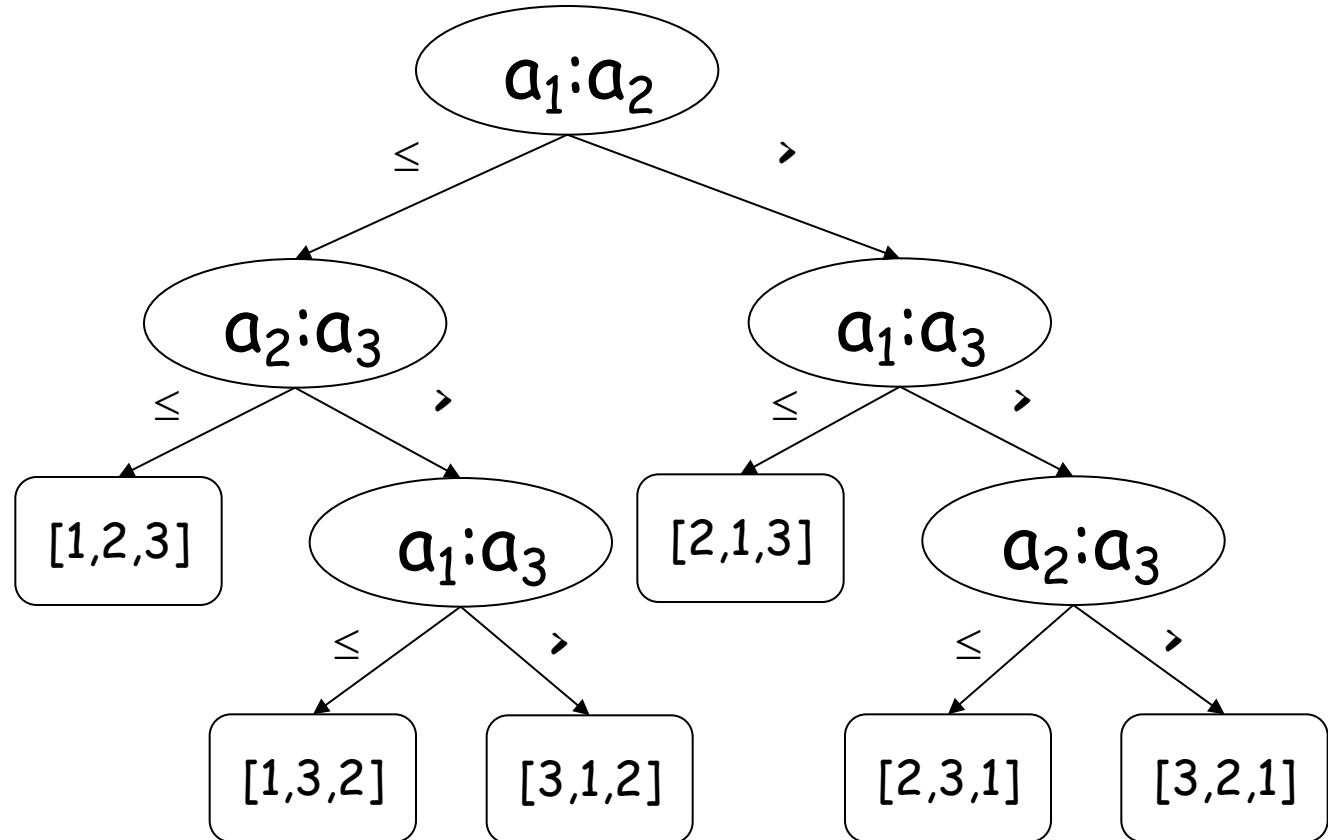
מה מייצג גובה העץ?

מספר ההשוואות שאלגוריתם המיון מבצע במקרה הגרוע

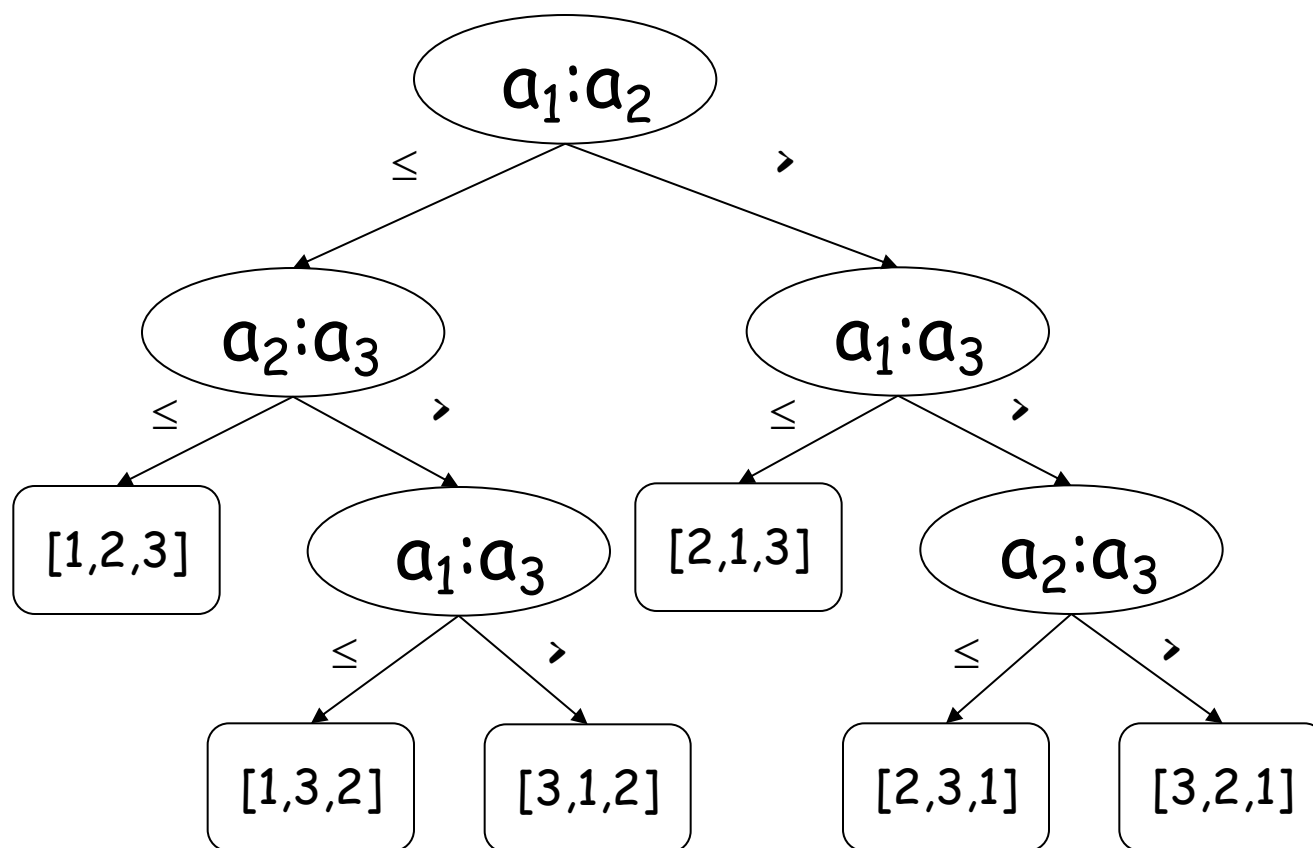


מסקנה:

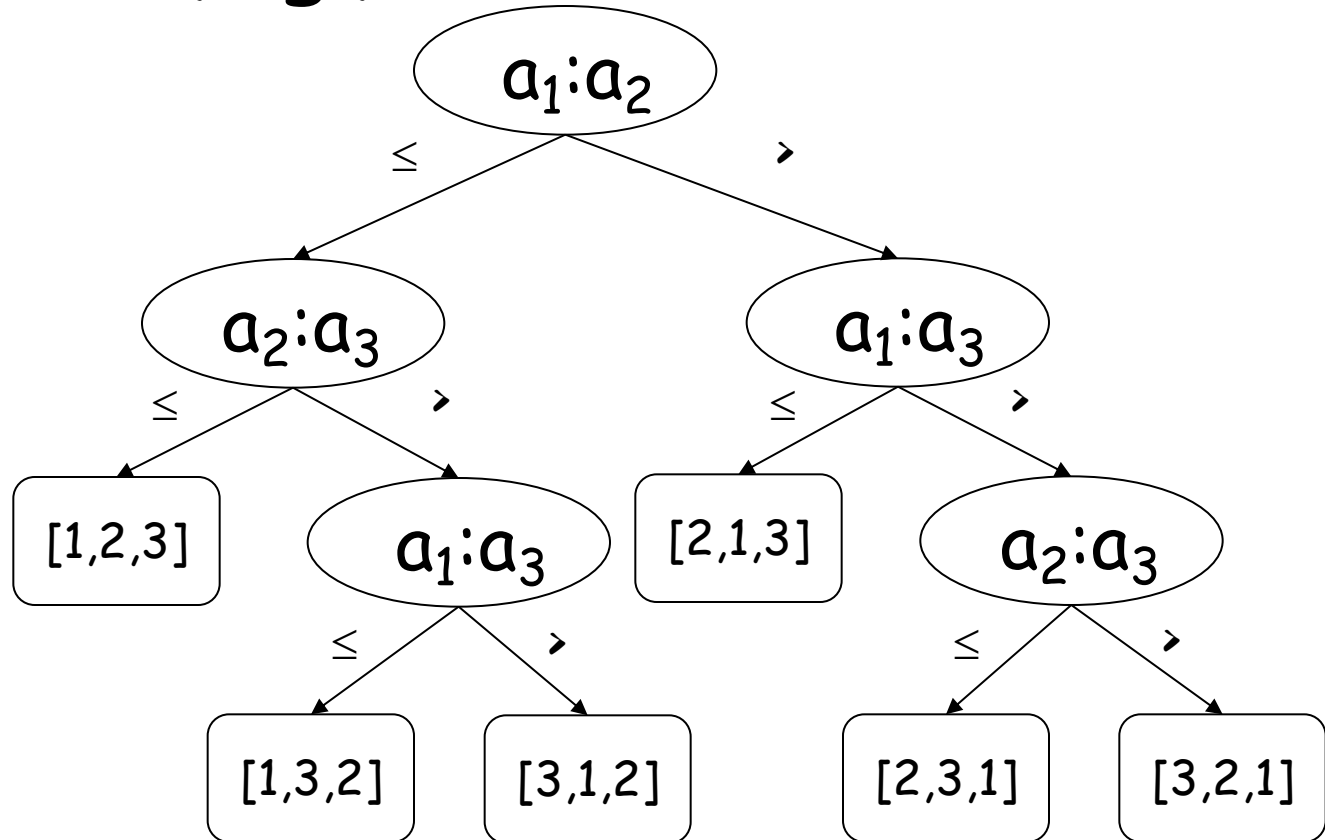
עץ ההחלטה לאלגוריתם המיון הטוב ביותר הינו העץ הנמוך ביותר
האפשרי



מה גובה העץ במקרה הטוב ביותר?



בעץ החלטה $2 \cdot n! - 1$ צמתים
ולכן גבהו $\Omega(\log(2 \cdot n! - 1))$



$$\Omega(\log(2 \cdot n! - 1)) = \Omega(n \cdot \log n)$$

$$\log(2 \cdot n! - 1) = \Theta(\log n!)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n < n \cdot n \dots n = n^n$$

$$n! < n^n$$

$$\log n! < \log n^n$$

$$\log n! < n \cdot \log n$$

$$\Omega(\log(2 \cdot n! - 1)) = \Omega(\log(n \cdot \log n))$$

$$\log(2 \cdot n! - 1) = \Theta(\log n!)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n > (n/2)^{(n/2)}$$

$$n! > (n/2)^{(n/2)}$$

$$\log n! > \log (n/2)^{(n/2)}$$

$$\log n! > (n/2) \cdot \log (n/2) = (n/2) \cdot (\log n - 1)$$

מבט נוסף על ההוכחה

- לכל אלגוריתם דטרמיניסטי, פרמוטציית הפלט תלויה אך ורק על פי ההשוואות
- כל השוואה – פיצול ל-2 אפשרויות
- אם אלגוריתם מבצע פחות מ $k < \log(n!)$ השוואות, אזי מספר הפלטים האפשריים הוא לכל היותר $2^k < n!$
- מספר הפלטים שצריך לתמוך בהם הוא $n!$
- אלגוריתם כזה לא תומך בכל הפלטים האפשריים

מה למדנו?

- כל אלגוריתם מבוסס השוואות ניתן לייצג כעץ השוואות
- כל אלגוריתם מבוסס השוואות **דטרמיניסטי** מבצע לפחות $\Omega(n \log n)$ השוואות
- באופן מדויק יותר, לכל אלגוריתם כזה קיים קלט בגודל n שעבורו האלגוריתם מקיים לפחות $\log(n!) = \Omega(n \log n)$ השוואות

מה זה לא תופס?

- מה לגבי **זמן ממוצע** של האלגוריתם?
- מה לגבי **אלגוריתמים אקראיים**?
- אלגוריתמים שאינם מבוססי השוואות?

מה לגבי אלגוריתם עם זמן ריצה ממוצע?

- משפט: כל אלגוריתם דטרמיניסטי מבוסס השוואות, **מספר ההשוואות הממוצע** הוא לפחות $\Omega(n \log n)$

מה ההבדל?

- לפני כן היה אכפת לנו על אורך המסלול הארוך ביותר בעץ ההחלטה
- כעת, אנחנו מעוניינים באורך המסלול הממוצע בעץ ההחלטה
- הרעיון: המסלול הממוצע הקטן ביותר הוא דווקא בעץ מאוזן
- בעץ מאוזן – המסלול הממוצע הוא באורך $\log(n!)$

מה לגבי אלגוריתם רדנומי?

- משפט: כל אלגוריתם רנדומי מבוסס השוואות, מספר ההשוואות הממוצע הוא לפחות $\Omega(n \log n)$

מה לגבי אלגוריתם רדנומי?

- משפט: כל אלגוריתם רנדומי מבוסס השוואות, מספר ההשוואות הממוצע הוא לפחות $\Omega(n \log n)$
- לא נראה את ההוכחה

יתכן מיון שאינו מבוסס השוואות?



יתכן מיון שאינו מבוסס השוואות?

כן!
בתרגול



שאלה

• האם השאלה הבאה נכללת בחסם התחתון שראינו?

– בהינתן אלגוריתם עם n קלטים, סדר את האיברים כך ש $n/2$ האיברים הקטנים ביותר מופיעים לפני $n/2$ הגדולים ביותר?

שאלה

- האם השאלה הבאה נכללת בחסם התחתון שראינו?

– בהינתן אלגוריתם עם n קלטים, סדר את האיברים כך ש $n/2$ האיברים הקטנים ביותר מופיעים לפני $n/2$ הגדולים ביותר?

- אם כן – מה המסקנה?
- אם לא – איפה ההוכחה נופלת? ומה האלגוריתם הכי מהיר שאתם יכולים לחשוב עליו שפותר את זה?

שאלה

יתכן מיון שאינו מבוסס השוואות?

דוגמא מיון מניה



מיון מניה

הנחות:

- אברי הקלט מספר שלם בתחום 0 עד k .
- הקלט הוא מערך $A[1..n]$.
- הפלט: מערך $B[1..n]$ אברי המערך A ממוינים.
- מערך עזר: $C[1..k]$.

Counting sort(A, B, k)

for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

for $j \leftarrow 1$ to n do

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$

for $i \leftarrow 1$ to k do

$C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$

for $j \leftarrow n$ downto 1 do

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

Counting sort(A, B, k)

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C						

for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	0	0	0	0	0	0

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B								

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	0	1	0	0	0

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	0	0	1	0	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	0	0	1	1	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	1	0	1	1	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	1	0	2	1	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	1	0	2	2	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	0	2	2	0	1

for $j \leftarrow 1$ to n do $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	0	2	3	0	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	0	2	3	0	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	2	2	3	0	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	2	4	3	0	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	2	4	7	0	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	2	4	7	7	1

for $i \leftarrow 1$ to k do $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$	$B[8]$
B								

	$C[0]$	$C[1]$	$C[2]$	$C[3]$	$C[4]$	$C[5]$
C	2	2	4	7	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B							3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	2	2	4	7	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B							3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	2	2	4	6	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

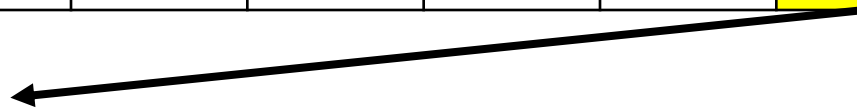


	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0					3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	2	2	4	6	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0					3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	4	6	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0				3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	4	6	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0				3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	4	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0		2		3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	4	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B		0		2		3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	3	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2		3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	1	2	3	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

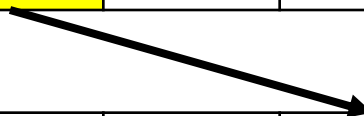
	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2		3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

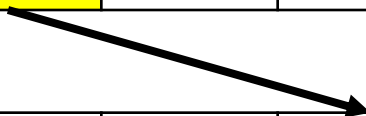


	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2	3	3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	5	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2	3	3	3	

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	4	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2	3	3	3	5

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	4	7	8

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

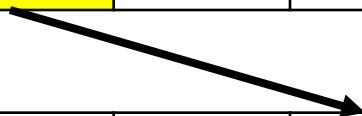
	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0		2	3	3	3	5

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	4	7	7

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

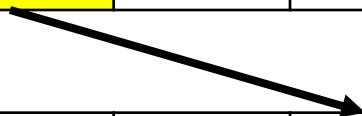


	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	3	4	7	7

for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5

	C[0]	C[1]	C[2]	C[3]	C[4]	C[5]
C	0	2	2	4	7	7

Counting sort(A, B, k)

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$
for $j \leftarrow 1$ to n do
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$
for $i \leftarrow 1$ to k do
 $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$
for $j \leftarrow n$ downto 1 do
 $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
 $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

Counting sort(A, B, k)

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

$\Theta(n)$ for $j \leftarrow 1$ to n do

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$

for $i \leftarrow 1$ to k do

$C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$

for $j \leftarrow n$ downto 1 do

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

Counting sort(A, B, k)

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

$\Theta(n)$ for $j \leftarrow 1$ to n do

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 1$ to k do

$C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$

for $j \leftarrow n$ downto 1 do

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

Counting sort(A, B, k)

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

$\Theta(n)$ for $j \leftarrow 1$ to n do

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 1$ to k do

$C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$

$\Theta(k)$ for $j \leftarrow n$ downto 1 do

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

Counting sort(A, B, k)

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 0$ to k do $C[i] \leftarrow 0$

$\Theta(n)$ for $j \leftarrow 1$ to n do

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1 ; C[i] = |\{key = i\}|$

$\Theta(k)$ for $i \leftarrow 1$ to k do

$C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1] ; C[i] = |\{key \leq i\}|$

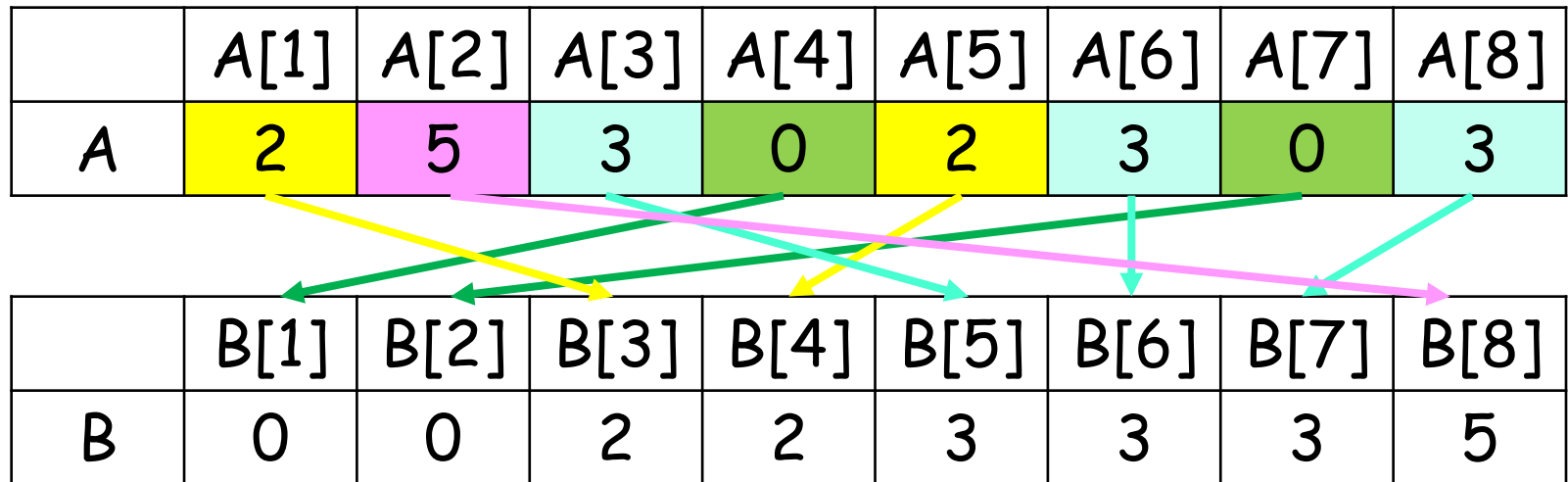
$\Theta(k)$ for $j \leftarrow n$ downto 1 do

$B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$

$C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

$\Theta(n+k)$

מיון יציב



מיון יציב

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5

מיון יציב

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5


מיון יציב

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5

מיון יציב

	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
A	2	5	3	0	2	3	0	3



	B[1]	B[2]	B[3]	B[4]	B[5]	B[6]	B[7]	B[8]
B	0	0	2	2	3	3	3	5



המיון ילמד במסגרת שיעור התרגיל

נספח – מיון בסיס

מיון בסיס (radix sort)

מיון בסיס שימש למיון כרטיסיות מחשב.



מיון בסיס (radix sort)

מאילוצי המכונה: מיון מבוסס ספרה אחרי ספרה



מיון בסיס (radix sort)

גישה אנושית: מיון מהסיבית המשמעותית



מיון בסיס (radix sort)

מיון בסיס: מיון מספרת האחדות



מיון בסיס (radix sort)

3 2 9

4 5 7

6 5 7

8 3 9

4 3 6

7 2 0

3 5 5

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9
4	5	7
6	5	7
8	3	9
4	3	6
7	2	0
3	5	5

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7			
6	5	7			
8	3	9			
4	3	6			
7	2	0			
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7			
8	3	9			
4	3	6			
7	2	0			
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9			
4	3	6			
7	2	0			
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

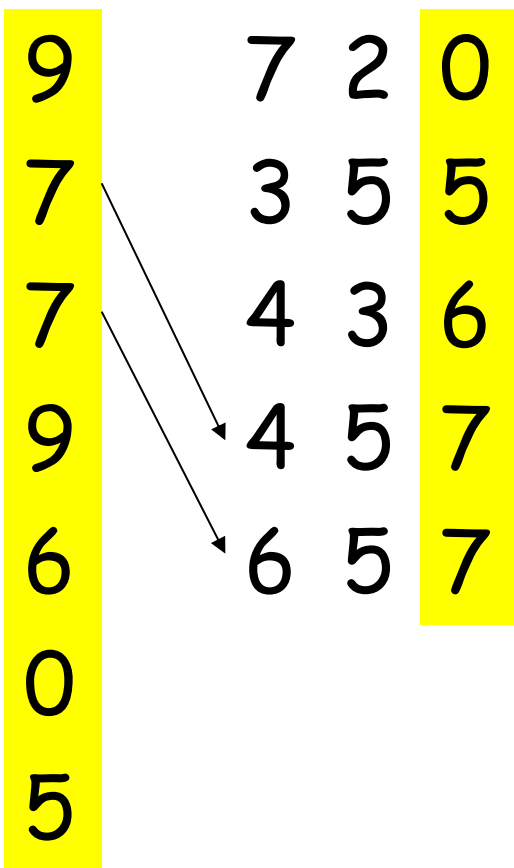
3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6			
7	2	0			
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0			
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0			
3	5	5			



מיון בסיס (radix sort)


3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0	3	2	9
3	5	5			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0	3	2	9
3	5	5	8	3	9

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0	3	2	9
3	5	5	8	3	9



מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0	3	2	9
3	5	5	8	3	9



מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0
4	5	7	3	5	5
6	5	7	4	3	6
8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7
7	2	0	3	2	9
3	5	5	8	3	9

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5			
6	5	7	4	3	6			
8	3	9	4	5	7			
4	3	6	6	5	7			
7	2	0	3	2	9			
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6			
8	3	9	4	5	7			
4	3	6	6	5	7			
7	2	0	3	2	9			
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7			
4	3	6	6	5	7			
7	2	0	3	2	9			
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9
4	3	6	6	5	7			
7	2	0	3	2	9			
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9
4	3	6	6	5	7	3	5	5
7	2	0	3	2	9			
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9
4	3	6	6	5	7	3	5	5
7	2	0	3	2	9	4	5	7
3	5	5	8	3	9			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0
4	5	7	3	5	5	3	2	9
6	5	7	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9
4	3	6	6	5	7	3	5	5
7	2	0	3	2	9	4	5	7
3	5	5	8	3	9	6	5	7

מיון בסיס (radix sort)

3 2 9

4 5 7

6 5 7

8 3 9

4 3 6

7 2 0

3 5 5

7 2 0

3 5 5

4 3 6

4 5 7

6 5 7

3 2 9

8 3 9

7 2 0

3 2 9

4 3 6

8 3 9

3 5 5

4 5 7

6 5 7

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9			
6	5	7	4	3	6	4	3	6			
8	3	9	4	5	7	8	3	9			
4	3	6	6	5	7	3	5	5			
7	2	0	3	2	9	4	5	7			
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6			
8	3	9	4	5	7	8	3	9			
4	3	6	6	5	7	3	5	5			
7	2	0	3	2	9	4	5	7			
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9			
4	3	6	6	5	7	3	5	5			
7	2	0	3	2	9	4	5	7			
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5			
7	2	0	3	2	9	4	5	7			
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7			
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7	7	2	0
3	5	5	8	3	9	6	5	7			

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7	7	2	0
3	5	5	8	3	9	6	5	7	8	3	9

מיון בסיס (radix sort)

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7	7	2	0
3	5	5	8	3	9	6	5	7	8	3	9

כיצד נבצע את המיון של כל עמודה?

3	2	9
4	5	7
6	5	7
8	3	9
4	3	6
7	2	0
3	5	5

7	2	0
3	5	5
4	3	6
4	5	7
6	5	7
3	2	9
8	3	9

7	2	0
3	2	9
4	3	6
8	3	9
3	5	5
4	5	7
6	5	7

3	2	9
3	5	5
4	3	6
4	5	7
6	5	7
7	2	0
8	3	9

דרושה תכונת היציבות

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7	7	2	0
3	5	5	8	3	9	6	5	7	8	3	9

נמיין כל עמודה במיון מניה

3	2	9	7	2	0	7	2	0	3	2	9
4	5	7	3	5	5	3	2	9	3	5	5
6	5	7	4	3	6	4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7	8	3	9	4	5	7
4	3	6	6	5	7	3	5	5	6	5	7
7	2	0	3	2	9	4	5	7	7	2	0
3	5	5	8	3	9	6	5	7	8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

7	2	0	3	2	9
3	2	9	3	5	5
4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7
3	5	5	6	5	7
4	5	7	7	2	0
6	5	7	8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

באינדוקציה על מספר העמודות

7	2	0	3	2	9
3	2	9	3	5	5
4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7
3	5	5	6	5	7
4	5	7	7	2	0
6	5	7	8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

באינדוקציה על מספר העמודות
• נניח שהמספר ממיון לפי $n-1$
העמודות הימניות ונוכיח לעמודה
ה- n -ית

7	2	0	3	2	9
3	2	9	3	5	5
4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7
3	5	5	6	5	7
4	5	7	7	2	0
6	5	7	8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

- באינדוקציה על מספר העמודות
- נניח שהמספר ממיון לפי $n-1$ העמודות הימניות ונוכיח לעמודה ה- n -ית
 - מיון העמודה ה- n -ית:

7	2	0	3	2	9
3	2	9	3	5	5
4	3	6	4	3	6
8	3	9	4	5	7
3	5	5	6	5	7
4	5	7	7	2	0
6	5	7	8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

- באינדוקציה על מספר העמודות
- נניח שהמספר ממיון לפי $n-1$ העמודות הימניות ונוכיח לעמודה ה- n -ית
 - מיון העמודה ה- n -ית:
 - **שתי ספרות שונות**, מסדר נכון כי הספרה המשמעותית קובעת את הסדר ולפיה מתבצע המיון בשלב האחרון. 😊

7	2	0	→	3	2	9
3	2	9		3	5	5
4	3	6		4	3	6
8	3	9	↪	4	5	7
3	5	5		6	5	7
4	5	7		7	2	0
6	5	7		8	3	9

נכונות האלגוריתם מיון בסיס

באינדוקציה על מספר העמודות

- נניח שהמספר ממיון לפי $n-1$ העמודות הימניות ונוכיח לעמודה ה- n -ית
- מיון העמודה ה- n -ית:

- שתי ספרות שונות, מסדר נכון כי הספרה המשמעותית קובעת את הסדר ולפיה מתבצע המיון בשלב האחרון. 😊

- **שתי ספרות זהות**, על פי הנחת האינדוקציה "זנב" המספר ממיון והשלב הנוכחי בוצע על ידי מיון יציב ולכן הסדר שהיה נשמר 😊

7	2	0	→	3	2	9
3	2	9		3	5	5
4	3	6		4	3	6
8	3	9	↪	4	5	7
3	5	5		6	5	7
4	5	7		7	2	0
6	5	7		8	3	9

סיבוכיות זמן ריצה

- נתונים n מספרים
- כל ספרה בתחום שבין 1 ל- k
- והמספר בין d ספרות
- עלות כל שלב ("עמודה"): $\Theta(n+k)$
- d עמודות ולכן: $\Theta(d \cdot n + d \cdot k)$