<u>אלגברה לינארית 2 - טכניקות ואלגוריתמים</u>

<u>לכסון</u>

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה לכסינה. על מנת למצוא מטריצה מלכסנת:

1. מוצאים את ההפולינום האופייני של המטריצה $f_A(t)$ ע"י חישוב $\det(tI - A)$.
2. מוצאים את הערכים העצמיים $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ של המטריצה. אלו בעצם השורשים של הפולינום האופייני: $f_A(\lambda_i) = 0$ עבור $1 \leq i \leq n$.
3. עבור כל ערך עצמי λ_i, מוצאים בסיס של וקטורים עצמיים למרחב העצמי $V_{\lambda_i} = \ker(\lambda_i I - A)$:
   (א) מוצאים את $d_i = \dim V_{\lambda_i}$.
   (ב) מוצאים וקטורים בת"ל $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{d_i}}$ באמצעות פיתוח של $(\lambda_i I - A) \cdot v = 0$.
4. כותבים את הוקטורים העצמיים (לפי הסדר) בעמודות המטריצה P, שהיא המטריצה המלכסנת.
5. המטריצה האלכסונית D תורכב מהערכים העצמיים של A על האלכסון הראשי (לפי הסדר) ו־0 בכל מקום אחר.
6. יתקיים $A = PDP^{-1}$ או לחלופין $D = P^{-1}AP$.

<u>דוגמא:</u>

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

נלכסן את A ונמצא את המטריצה המלכסנת.

ראשית, נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$f_A(t) = \det(tI - A) = \det(\begin{pmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ -1 & t-2 & 1 \\ 1 & -1 & t-4 \end{pmatrix}) =$$

$$= (t-1)(t-2)(t-4) + (-2)(-1)(-1) - 2 + (t-1) + 2(t-2) - 2(t-4) =$$

$$= (t^2 - 3t + 2)(t-4) - 2 - 2 + t - 1 + 2t - 4 - 2t + 8 =$$

$$= t^3 - 4t^2 - 3t^2 + 12t + 2t - 8t + t - 1 = t^3 - 7t^2 + 15t - 9$$

נמצא את השורשים של הפולינום האופייני, שהם הע"ע של המטריצה. ראשית, ננחש שורש: $\lambda_1 = 1$. כעת נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} & t^2-6t+9 \\ \cline{2-2} t-1 & t^3-7t^2+15t-9 \\ & t^3-t^2 \\ \cline{2-2} & \quad -6t^2+15t-9 \\ & \quad -6t^2+6t \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 9t-9 \\ & \qquad\qquad 9t-9 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

קיבלנו שמתקיים

$$t^3-7t^2+15t-9=(t-1)(t^2-6t+9)=(t-1)(t-3)^2$$

לכן הע"ע העצמי השני הוא $\lambda_2 = 3$.

נמצא ו"ע עבור הע"ע 1:

ראשית, ע"מ לדעת כמה וקטורים עצמיים קיימים עבור הע"ע 1, נמצא את דרגת המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שדרגת המטריצה היא 2, לכן המימד של המרחב העצמי של הע"ע 1 הוא $\dim V_1 = 3-2 = 1$. במילים אחרות, עבור הע"ע 1 קיים ו"ע אחד. נמצא אותו:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &I) -2b-2c=0 \Rightarrow b=-c \\ &II) -a-b+c=0 \Rightarrow -a-b-b=0 \Rightarrow a+2b=0 \\ &III)\, a-b-3c=0 \Rightarrow a-b+3b=0 \Rightarrow a+2b=0 \end{aligned}$$

נבחר $a=2$ ואז $b=-1$ וכן $c=1$. קיבלנו:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נעבור לע"ע 3:

ע"מ לדעת כמה ו"ע קיימים עבור הע"ע 3, נמצא את דרגת המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שהדרגה היא 1, לכן מימד המרחב העצמי המתאים לע"ע 3 הוא $\dim V_3 = 3 - 1 = 2$. לכן קיימים 2 ו"ע המתאימים לע"ע 3.

נחשב:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &I)\, 2a - 2b - 2c = 0 \\ &II)\, -a + b + c = 0 \\ &III)\, a - b - c = 0 \end{aligned}$$

שלוש המשוואות ת"ל, לכן נבחר רק אחת:

$$a - b - c = 0$$

נבחר $a = 2$ וכן $b = 1$ ואז $c = 1$. לכן

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבחר $a = 2$ וכן $b = -2$ ואז $c = 4$. נחלק ב־2 ונקבל

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו ש־A לכסינה ודומה למטריצה אלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כאשר המטריצה המלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מציאת שורשים רציונלים של פולינום

יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום ויהי $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ שבר מצומצם. נסמן $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
אזי אם $f(\frac{p}{q}) = 0$ אז $q|a_n$ וגם $p|a_0$.

<u>דוגמא:</u>
יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ הפולינום $f(x) = 21x^4 + 17x^3 - 26x^2 + 3x + 1$. נמצא את השורשים הרציונליים של הפולינום:
נסמן $a_0 = 1$, $a_n = 21$. לפי המשפט, המונה של השורש הרציונלי צריך לחלק את 1, לכן המועמדים להיות המונה הם $\{1, -1\}$.
באותו אופן, המכנה של השורש הרציונלי צריך לחלק את 21, לכן המועמדים להיות המכנה הם $\{1, 3, 7, 21\}$ (לא כוללים את המספרים השליליים מתוך קונבנציה).
כעת, ניצור את המועמדים להיות שורשים רציונלים מכל הקומבינציות האפשריות:

$$\{1, -1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{1}{21}, \frac{-1}{21}\}$$

את המועמדים הללו נציב בפולינום ונבדוק מתי הוא מתאפס. במקרה הזה, הוא מתאפס כשמציבים את $\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{7}\}$. לכן, אלו השורשים הרציונליים של הפולינום.
<u>**הערה:**</u>
ייתכן שקיימים בנוסף שורשים אי־רציונליים. למשל, עבור הפולינום הנ"ל קיימים גם שני שורשים אי רציונליים: $\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$.

תהליך גראם־שמידט: מציאת בסיס אורתונורמלי

יהי V ממ"פ, תהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל. נבנה מקבוצה זו קבוצה אורתונורמלית $\{u_1, \dots, u_n\}$.
כעת, נגדיר:

$w_1 = v_1$

$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||}$

$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$

$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$

$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||}$

$\vdots$

נמשיך כך, לכל $1 \leq k \leq n$:

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k} \langle v_k, u_i \rangle \cdot u_i$$

$u_k = \frac{w_k}{||w_k||}$

וקיבלנו קבוצה אורתונורמלית $\{u_1, \ldots, u_n\}$, כפי שרצינו.

דוגמא:
נבצע את תהליך גראם־שמידט על הוקטורים הבאים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסדר הבא: קודם v_1, אח"כ v_2 ולבסוף v_3.

$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$||w_1|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$||w_2|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$

$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 =$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$||w_3|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$

$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

וקיבלנו בסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2, u_3\}$.
הערה: אם היינו מבצעים את התהליך בסדר שונה, היינו מקבלים בסיס א"נ שונה.

מציאת שורש חיובי למטריצה נורמלית

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה נורמלית. נמצא לה שורש חיובי, כלומר, נמצא מטריצה $0 \le C \in M_n(\mathbb{F})$ כך שמתקיים $C^2 = A$.

1. A נורמלית, לכן ניתן לבצע עליה לכסון אוניטארי:

   (א) מוצאים את הפולינום האופייני $f_A(t)$.

   (ב) מוצאים את הערכים העצמיים $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

   (ג) מוצאים את הוקטורים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים שמצאנו ומקבלים בסיס של וקטורים עצמיים $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

   (ד) מבצעים את תהליך גראם־שמידט על הבסיס לקבלת בסיס אורתונורמלי $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

   (ה) את הוקטורים של הבסיס האורתונורמלי כותבים בעמודות המטריצה $P \in M_n(\mathbb{F})$, שהיא המטריצה האוניטארית.

   (ו) יתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. מסמנים

$$\sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^*$$

3. יתקיים $(\sqrt{A})^2 = A$.

4. $\sqrt{A}$ אמורה להיות מוגדרת חיובית, מכיוון שהיא צמודה לעצמה וכל הערכים העצמיים שלה הם ממשיים אי־שליליים.

5. **הערה:** אולי זה עובד רק על מטריצות מסויימות? נבדק על שתי מטריצות בלבד.

דוגמא:

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה נורמלית. נמצא למטריצה זו שורש חיובי.

ראשית, נמצא את הפולינום האופייני: נחשב:

$$f_A(t) = \det(tI - A) = \det(\begin{pmatrix} t-1 & -i \\ i & t-1 \end{pmatrix}) = (t-1)^2 + (-1)\cdot(-i)\cdot i =$$

$$= t^2 - 2t + 1 + i^2 = t^2 - 2t + 1 - 1 = t(t-2)$$

לכן הערכים העצמיים הם:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי 0: נחשב:

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I) -a - ib = 0 \Rightarrow a = -ib \\ II)\, ai - b = 0 / \cdot i \Rightarrow -a - bi = 0 \Rightarrow a = -bi \end{array}$$

נציב $a = -i, b = 1$ ונקבל את $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. מכיוון שאנחנו מעוניינית במטריצה מלכסנת אוניטארית, נבצע את תהליך גראם־שמידט על וקטור זה ונקבל:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{(-i \cdot \overline{-i}) + (1 \cdot 1)}} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי 2: נחשב:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I)\, a - ib = 0 \Rightarrow a = ib \\ II)\, ai + b = 0 / \cdot i \Rightarrow -a + bi = 0 \Rightarrow a = bi \end{array}$$

נציב $a = i, b = 1$ ונקבל $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. שוב, נבצע את תהליך גראם־שמידט על הוקטור ונקבל:

$$u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{(i \cdot \bar{i}) + (1 \cdot 1)}} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה האוניטארית המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת, נגדיר:

$$\sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot P^* = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$\sqrt{A}^2 = A$$

בנוסף, $\sqrt{A}$ מוגדרת חיובית כי היא צמודה לעצמה וכל הע"ע שלה אי־שליליים.

<u>מציאת מטריצה מלכסנת אורתוגונלית</u>

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. נמצא את המטריצה המלכסנת האורתוגונלית של A.

1. מוצאים את הפולינום האופייני $f_A(t)$.
2. מוצאים את הערכים העצמיים השונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
3. עבור כל ערך עצמי, מוצאים בסיס למרחב העצמי המתאים לערך העצמי $B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_k}$.
4. מבצעים את תהליך גראם־שמידט על כל בסיס בנפרד ומקבלים בסיסים אורתונורמליים הפורסים את המרחבים העצמיים.
5. כותבים את וקטורי כל בסיס (לפי הסדר) בעמודות של המטריצה $U \in M_n(\mathbb{R})$, שהיא המטריצה האורתוגונלית המלכסנת.
6. מתקיים $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

<u>דוגמא:</u>

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא מטריצה אורתוגונלית U כך שיתקיים $U^{tr}AU = D$ כאשר D אלכסונית.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$f_A(t)=\det(tI-A)=\det(\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix})=$$

$$(t-2)^3-1-1-3(t-2)=t^3-6t^2+12t-8-2-3t+6=t^3-6t^2+9t-4=$$

$$=(t-4)(t-1)^2$$

לכן הערכים העצמיים השונים הם $\lambda_1=4,\ \lambda_2=1$.

נמצא בסיס למרחב העצמי של הערך העצמי 4:

$$V_4=\ker(4I-A)=\ker(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix})\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &I)\,2a-b-c=0 \\ &II)\,-a+2b-c=0 \\ &III)\,-a-b+2c=0 \end{aligned}$$

נבחר $a=b=c=1$ ונקבל $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, כלומר, $V_4=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

נמצא בסיס למרחב העצמי של הערך העצמי 1:

$$V_1=\ker(I-A)=\ker(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix})$$

דרגת המטריצה היא 1, לכן מספר הוקטורים העצמיים שפורשים את המרחב העצמי הוא $3-1=2$.

קל לראות שהעמודה הראשונה כפול 1 ועוד העמודה השנייה כפול -1 יתנו 0, ובצורה דומה, העמודה הראשונה כפול 1 ועוד העמודה השלישית כפול -1 יתנו 0.

לכן הוקטורים יהיו $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ויתקיים

$$V_1=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נבצע את תהליך גראם־שמידט על כל בסיס בנפרד ונקבל:

$$V_4 = span\{\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

$$V_1 = span\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$$

כעת נגדיר:

$$U = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

ונקבל ש־U אורתוגונלית, ומתקיים:

$$U^*AU = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>פירוק מטריצה נורמלית למטריצה הרמיטית ומטריצה אוניטארית</u>

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית. אם כל ערכיה מדומים, ואם היא סימטרית סביב האלכסון הראשי, ניתן לפרק אותה למטריצה הרמיטית $H \in M_n(\mathbb{R})$ ומטריצה אוניטארית $U \in M_n(\mathbb{C})$ באופן הבא:

1. מסמנים $H = \frac{1}{i}A$.
2. מסמנים $U = iI$.
3. מתקיים $A = HU = UH$.

<u>דוגמא:</u>

תהי $A \in M_3(\mathbb{C})$ נורמלית, המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix}2i & 4i & 0\\4i & 3i & 0\\0 & 0 & -i\end{pmatrix}$$

נסמן:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נסמן:

$$U = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

וקיבלנו שמתקיים

$$A = HU = UH$$

כאשר U אוניטארית, H הרמיטית.

<u>ז'רדון מטריצה נילפוטנטית:</u>

יהי V מ"ו, ותהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נילפוטנטית מאינדקס נילפוטנטיות k. נז'רדן את A ונמצא מטריצה מז'רדנת:

1. לכל $k \geq i \geq 1$ נסמן $W_i = \ker(A^i)$. A נילפוטנטית מסדר k, לכן $A^k = 0$, לכן $W_k = V$.

2. נגדיר את B_1 להיות בסיס ל־W_1.

3. $W_1 \subseteq W_2$ ולכן ניתן להרחיב את B_1 לבסיס של W_2. את **הוקטורים החדשים שהוספנו** נגדיר בתור B_2. כעת, יתקיים $B_1 \bigcup B_2$ הוא בסיס ל־W_2, כאשר $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$.

4. נמשיך בצורה זו, כאשר אנחנו מרחיבים בכל פעם את הבסיס שקיבלנו ל־W_{i-1} לבסיס של W_i ומגדירים את הוקטורים החדשים בתור B_i, כך שמתקיים $B = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_k$ בסיס ל־V.
   נבנה מ־B בסיס מז'רדן על ידי כך שנחליף כל B_i ב־C_i מהסוף להתחלה:

   (א) נגדיר $C_k = B_k$.

   (ב) נחשב את d_{k-1} באמצעות הנוסחה:

   $$d_i = rank(A^{i-1}) + rank(A^{i+1}) - 2rank(A^i)$$

   i. אם $d_{k-1} = 0$, נגדיר $C_{k-1} = A \cdot C_k$ ונקבל שמתקיים

   $$B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_{k-2} \bigcup C_{k-1}$$

   הוא בסיס ל־W_{k-1}.

ii. אם $d_{k-1} > 0$ אזי נשלים את

$$B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_{k-2} \bigcup A \cdot C_k$$

לבסיס של W_{k-1}, כאשר לצורך ההשלמה נצטרך לקחת d_{k-1} וקטורים. נגדיר את C_{k-1} להיות הוקטורים של $A \cdot C_k$ יחד עם הוקטורים שלקחנו לצורך ההשלמה. את ההשלמה ניתן לקחת מתוך B_{k-1}.
קיבלנו ש

$$B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots \bigcup B_{k-2} \bigcup C_{k-1}$$

בסיס ל־W_{k-1}.

(ג) ממשיכים בדרך זו: כדי להגדיר את C_{i-1}:

i. מחשבים את d_{i-1}.

א'. אם $d_{i-1} = 0$, מגדירים $C_{i-1} = A \cdot C_i$.

ב'. אם $d_{i-1} > 0$, מגדירים $C'_{i-1} = A \cdot C_i$, ולאחר מכן, לוקחים d_{i-1} וקטורים (מתוך B_{i-1}, למשל) ומשלימים את C'_{i-1} לבסיס של W_{i-1}. מגדירים את C_{i-1} להיות קבוצת וקטורים זו.

(ד) בסוף התהליך, מקבלים בסיס ל־V:

$$C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup \ldots \bigcup C_{k-1} \bigcup C_k$$

(ה) מסדרים מחדש את הוקטורים של הבסיס C:

i. כותבים מחדש כל וקטור בתור הוקטור הבסיסי כפול A בחזקה כלשהי. למשל, $c_1 = A^3 v_1$ כאשר $c_1 \in C$, $v_1 \in B_k$.

ii. מסדרים את הוקטורים בסדר יורד לפי הוקטורים הבסיסיים ולפי החזקות של A. למשל:

$$C = \{A^3 v_4, A^2 v_4, A v_4, v_4, A^2 v_2, A v_2, v_2, v_1\}$$

iii. זהו בסיס מז'רדן ל־A.

(ו) כותבים את הוקטורים של C (לפי הסדר) בעמודות של המטריצה $P \in M_n(\mathbb{C})$ ומקבלים ש־P המטריצה המז'רדנת של A, ומתקיים:

$$P^{-1} A P = J_A$$

<u>דוגמא:</u>

תהי $A \in M_5(\mathbb{C})$ המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את צורת ז'ורדן ואת המטריצה המז'רדנת של A.

ראשית, נמצא את אינדקס הנילפוטנטיות:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

אינדקס הנילפוטנטיות הוא 3.

נגדיר: $W_1 = \ker(A^1)$. נמצא בסיס של W_1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I)\, b + c + e = 0 \\ II)\, c + d + e = 0 \end{matrix} \Rightarrow b = -c - e = d$$

דרגת המטריצה היא 2, לכן נצטרך $5 - 2 = 3$ וקטורים. נסמן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו ש-$B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

נגדיר $W_2 = \ker(A^2)$. נמצא בסיס של W_2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c + d + e = 0$$

נשלים את B_1 לבסיס של W_2 על ידי הוספת וקטור חדש

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו ש־$B_2 = \{v_4\}$.
נגדיר $W_3 = \ker(A^3)$. נמצא בסיס ל־W_3.
W_3 הוא למעשה כל המרחב, לכן נשלים את $B_1 \bigcup B_2$ לבסיס של המרחב כולו על ידי הוספת וקטור חדש

$$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו ש־$B_3 = \{v_5\}$.
נמצא את הבסיס המז'רדן:
ראשית, נגדיר $C_3 = B_3$. כלומר:

$$C_3 = \{v_5\}$$

נמצא כעת את $C_{3-1} = C_2$. לשם כך, נחשב את $d_{3-1} = d_2$:

$$d_2 = rank(A^3) + rank(A) - 2rank(A^2) = 0 + 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

לכן נגדיר $C_2 = A \cdot C_3$. מכאן ש:

$$C_2 = \{A \cdot v_5\} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נמצא כעת את C_1. לשם כך, נחשב את d_1:

$$d_1 = rank(A^2) + rank(A^0) - 2rank(A) = 1 + 5 - 2 \cdot 2 = 2$$

לכן, ראשית נגדיר $C_1' = A \cdot C_2$. מכאן ש:

$$C_1' = \{A \cdot (A \cdot v_5)\} = \{A^2 v_5\} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נשלים את C_1' לבסיס של W_1 על ידי הוספת 2 וקטורים נוספים מתוך B_1:
את v_2 ואת v_3. לכן:

$$C_1 = \{A^2v_5, v_3, v_2\} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

נגדיר

$$C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3 = \{A^2v_5, v_3, v_2, Av_5, v_5\}$$

נסדר מחדש את הבסיס בסדר יורד:

$$C = \{A^2v_5, Av_5, v_5, v_3, v_2\}$$

נכתוב את הוקטורים בעמודות של P:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ז'רדון מטריצה כללית</u>

יהי V מ"ו, ותהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה. נז'רדן את A ונמצא מטריצה מז'רדנת:

1. נמצא את הפולינום האופייני של A: $f_A(t)$.

   (א) עבור פולינום אופייני $f_A(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{n_i}$ ניתן לדעת שהבסיס המז'רדן יהיה מורכב מ־n_i וקטורים עבור λ_i.

2. נסמן את הערכים העצמיים השונים של A: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

3. עבור כל ע"ע λ_i:

(א) מוצאים בסיס של $\ker(A-\lambda_i I)$. מגדירים אותו בתור B_1.

(ב) עבור כל $j>1$, אם $\ker(A-\lambda_i I)^{j-1} \neq \ker(A-\lambda_i I)^j$:

i. משלימים את B_{j-1} לבסיס של $\ker(A-\lambda_i I)^j$, ומגדירים את הוקטורים החדשים בתור B_j.

ii. $j++$.

(ג) כעת, בונים את ה־C־ים:

i. מגדירים $C_l = B_l$ כאשר l הוא המספר עבורו $\ker(A-\lambda_i I)^l = \ker(A-\lambda_i I)^{l+1}$.

ii. מגדירים $C_{l-1} = (A-\lambda_i I)\cdot C_l$. אם ב־$C_{l-1}$ אין מספיק וקטורים כדי לפרוש את $\ker(A-\lambda_i I)^{l-1}$, משלימים אותו לבסיס (באמצעות וקטורים של B_{l-1}).

iii. חוזרים על השלב הקודם (עם אינדקס קטן באחד) עד שמגדירים את C_1.

(ד) כעת, מאחדים את הבסיסים:

$$C'_{\lambda_i} = C_1 \bigcup \ldots \bigcup C_l$$

(ה) מסדרים את הוקטורים בסדר יורד (כמו שעשינו עבור מטריצה נילפוטנטית) ומגדירים קבוצה זו בתור C_{λ_i}.

(ו) כעת, ישנם מספר דברים אותם ניתן לדעת על בלוק הז'ורדן המתאים לע"ע λ_i:

i. מספר הבלוקים של λ_i שווה ל־$\dim(\ker(A-\lambda_i I))$.

ii. גודל הבלוק הגדול ביותר המתאים ל־λ_i שווה למספר הכי קטן k עבורו $\dim(\ker(A-\lambda_i I))^k$ הוא החזקה של $(t-\lambda_i)$ בפולינום האופייני.

4. לאחר שמצאנו לכל λ_i את C_{λ_i}, מגדירים בסיס סדור:

$$C = C_{\lambda_1} \bigcup \ldots \bigcup C_{\lambda_k}$$

כותבים את הוקטורים של C בעמודות המטריצה P לפי הסדר, ומקבלים את המטריצה המז'רדנת.

5. את צורת ז'ורדן אפשר לקבל על ידי הנתונים שקיבלנו במהלך הבנייה או על ידי המכפלה $P^{-1}AP$.

<u>דוגמא:</u>

תהי $A \in M_3(\mathbb{C})$ המטריצה המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את צורת ז'ורדן ואת המטריצה המז'רדנת של A.

ראשית, הפולינום האופייני של A הוא

$$f_A(t) = (t-1)^2(t-3)$$

לכן, הבסיס המז'רדן יהיה מורכב מוקטור אחד עבור הע"ע 3 ומשני וקטורים עבור הע"ע 1.

נמצא את וקטורי הבסיס המז'רדן השייכים לע"ע 3:

$$\ker(A-3I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

הדרגה של המטריצה היא 2, לכן קיים $3-2=1$ וקטורים בבסיס הגרעין.

נבצע פעולות אלמנטריות על המטריצה כדי להקל על מציאת בסיס הגרעין, ונקבל:

$$\ker(A-3I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

לכן נגדיר

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \{v_1\}$$

מצאנו וקטור אחד מתוך אחד עבור הע"ע 3, נגדיר $C_1 = B_1$ וסיימנו. קיבלנו ש:

$$C_{\lambda_1} = \{v_1\}$$

המספר הקטן ביותר k שעבורו $\dim(\ker(A-3I))^k$ הוא החזקה של $(t-3)$ בפולינום האופייני הוא 1, לכן הבלוק הגדול ביותר השייך לע"ע 3 הוא מגודל 1. בנוסף, $\dim(\ker(A-3I)) = 1$, לכן קיים בלוק אחד.

נמצא את וקטורי הבסיס המז'רדן השייכים לע"ע 1:

$$\ker(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

מצאנו וקטור אחד

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן נגדיר

$$B_1 = \{v_2\}$$

נבדוק האם $\ker(A-I) = \ker(A-I)^2$:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שהדרגה של המטריצה $(A-I)^2$ היא 1 (ולכן מימד הגרעין הוא 2), בעוד שהדרגה של $(A-I)$ הייתה 2 (ולכן מימד הגרעין היה 1).
נבצע פעולות אלמנטריות על $\ker(A-I)^2$ ונקבל:

$$\ker(A-I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשלים את B_1 לבסיס של $\ker(A-I)^2$ באמצעות

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$B_2 = \{v_3\}$$

נבדוק האם $\ker(A-I)^2 = \ker(A-I)^3$:

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הגרעין נשאר זהה. באותה מידה, היינו יכולים להגיע למסקנה זו באמצעות החזקה של 1 בפולינום האופייני (שהרי כבר מצאנו 2 וקטורים, והחזקה היא 2).

נחשב את ה־C־ים:

נגדיר $C_2 = B_2$.

כעת, נגדיר

$$C_1 = (A-I)C_2 = (A-I)\cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כפי שראינו קודם, $\dim(\ker(A-I)) = 1$ ולכן אין צורך להוסיף וקטורים ל־C_1 מתוך B_1 על מנת להשלים לבסיס של $\ker(A-I)$.

המספר הקטן ביותר k שעבורו $\dim(\ker(A-I))^k$ הוא החזקה של $(t-1)$ בפולינום האופייני הוא 2, לכן הבלוק הגדול ביותר השייך לע"ע 1 הוא מגודל 2. בנוסף, $\dim(\ker(A-I)) = 1$, לכן קיים בלוק אחד.

נגדיר את C_{λ_2}:

$$C_{\lambda_2} = \{(A-I)\cdot v_3, v_3\}$$

סיימנו עם הע"ע 1.

למעשה, אנחנו כבר יודעים כיצד תראה צורת ז'ורדן:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נמצא את המטריצה המז'רדנת:

נגדיר:

$$C = C_{\lambda_1} \bigcup C_{\lambda_2} = \{(A-I)\cdot v_3, v_3, v_1\} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

לכן המטריצה המז'רדנת תהיה:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

וסיימנו.

מציאת מטריצה אלכסונית חופפת

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. נמצא מטריצה אלכסונית $D \in M_n(\mathbb{R})$ החופפת ל-A.

1. רושמים את המטריצה המקורית לצד מטריצת היחידה, וכך יוצרים מעין מטריצת בלוקים מהצורה:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right)$$

2. מביאים את A לצורה אלכסונית, כאשר פעולות השורה שנעשית על A נעשות גם על I.
על כל פעולת שורה שעושים על A (ולכן גם על I), עושים גם את פעולת העמודה המקבילה על A (ורק על A!).
במילים אחרות, אם הוספנו את השורה השנייה לשורה הראשונה, נוסיף גם את העמודה השנייה לעמודה הראשונה.

3. בסוף התהליך, נקבל במקום מטריצה A את המטריצה האלכסונית החופפת D ובמקום מטריצה I את המטריצה P המקיימת:

$$PAP^{tr} = D$$

דוגמא:

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ המטריצה המוגדרת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

נמצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך שמתקיים $PAP^{tr} = D$.

נסמן:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

נלכסן את המטריצה הזו:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

נבצע את פעולת השורה $R_2 = R_2 + 2R_1$ ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבצע את אותה פעולת עמודה: $C_2 = C_2 + 2C_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבצע את פעולת השורה $R_3 = R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבצע את אותה פעולת עמודה: $C_3 = C_3 - 3C_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבצע את פעולת השורה $R_3 = 2R_3 + 3R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

נבצע את אותה פעולת עמודה: $C_3 = 2C_3 + 3C_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה אלכסונית.

נסמן:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix}$$

<u>מציאת מטריצה סימטרית המתאימה לפולינום ריבועי:</u>

יהי $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום ריבועי, ותהי q תבנית המקיימת

$$q(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$$

נמצא את המטריצה הסימטרית $A \in M_n(\mathbb{R})$ המתאימה לפולינום. במילים אחרות, נמצא מטריצה סימטרית A שמקיימת

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ראשית, נגדיר $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. כעת:

1. המקדם של x_i^2 ב־$f(x)$ שווה לאיבר האלכסוני a_{ii}.
2. האיברים a_{ij}, a_{ji} שווים שניהם למחצית המקדם של $x_i x_j$.

<u>דוגמא:</u>

נמצא את המטריצה הסימטרית המתאימה לפולינום הריבועי

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$$

מטריצה זו היא

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$