**Primer día**

Problema 1

Encontrar tres números enteros positivos *X*, *Y*, *Z* tales que entre el mayor y el menor de ellos la diferencia no es mayor que 5 y además *X*•2159 + *Y*•1779 + *Z*•1149 = 218630.

Problema 2

Tres tristes tigres tragan trigo de un trigal. Tristes están porque sólo trigo tragan. La primera tabla da el nombre de cada tigre, la cantidad mínima y máxima de kilocalorías que puede comer, y la cantidad mínima o máxima (en porcentaje del peso ingerido) que debe comer de cada macronutriente (proteínas, lípidos, hidratos de carbono).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| tigre | mín kcal | máx kcal | mín %prot. | mín %líp. | máx % hidr. carb. |
| Tristán | 6696 | 8184 | 18.5 % | 4.0 % | 70.0 % |
| Tirso | 5670 | 6930 | 16.5 % | 3.5 % | 75.0 % |
| Tatiana | 4653 | 5687 | 13.5 % | 3.0 % | 80.0 % |

Hay tres variedades de trigo. La segunda tabla da la composición nutricional de cada variedad, por cada pastilla de trigo de 100g que no se puede fraccionar, y cuántas pastillas disponibles hay.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| trigo | kcal | proteínas | lípidos | hidr. carb. | past. disponibles |
| germen | 360 | 23.15 | 9.72 | 51.80 | 18 |
| salvado | 216 | 15.55 | 4.25 | 64.51 | 22 |
| harinero | 331 | 10.35 | 1.56 | 74.24 | 30 |

a) Dar un menú posible, es decir, cuántas pastillas de cada variedad darle a cada tigre.

b) Dar todos los menús posibles.

Problema 3

Consideramos las ternas de números enteros positivos (*P*; *Q*; *R*) tales que *P*, *Q*, *R* y *P*2+*Q*2+*R*2 sean primos.

a) Encontrar 9 de ellas.

b) ¿Cuántas de ellas hay tales que P, Q, R son menores que 10000?

**Segundo día**

Problema 4

¿Cuántas ternas de números enteros positivos (*X*, *Y*, *Z*), todos menores que 1000, hay tales que *X*2+*Y*2+*Z*2 es un número que termina en por lo menos seis ceros?

Problema 5

Gastón escribe para cada número *N* entero positivo la tira de números 13+*N*, 23+*N*, 33+*N*, 43+*N*, 53+*N*, 63+*N*, ..., 10003+*N*.

Encontrar los 10 valores más chicos de *N* para los cuales su correspondiente tira no tiene ningún número primo.

Problema 6

Encontrar todos los números *N* de cuatro cifras, tales que de las cifras que aparecen en *N*2 no haya ninguna que no aparece en *N*.

**Primer día**

1

Encontrar cuatro números enteros positivos *A*, *B*, *C*, *D* tales que 3861 ∙ *A* + 2600 ∙ *B* + 2070 ∙ *C* + 64350 ∙ *D* = 10362690

2

¿Cuántos divisores de 20092010 terminan en 127?

Nota: Un número termina en 127 cuando sus 3 últimas cifras decimales son 1, 2, 7 en ese orden. Por ejemplo 90127, pero no 5721, que termina en 721.

3

a) Encontrar cuatro números enteros positivos *A*, *B*, *C*, *D* tales que el producto de las seis sumas posibles de dos de ellos sea 68428800.

b) ¿Cuáles son todas las cuaternas de números *A*, *B*, *C*, *D* de este tipo?

**Segundo día**

4

Los números *abacanados* son los enteros positivos que no se pueden escribir como la suma de tres cuadrados perfectos. Por ejemplo 7 es abacanado, pero 8=22+22+02 no.

a) Encontrar un número abacanado mayor que 210.

b) ¿Cuántos números abacanados hay entre 210 y 2010?

5

Ariel descompone el número *N* como producto de enteros positivos mayores que 1 y suma estos factores. Calcular cuántos resultados distintos puede obtener...

a) si *N* = 20100.

b) si *N* = 39916800.

6

Dado un primo *P*, se define *F*(*P*) como la posición de *P* en la lista de los números primos. Por ejemplo, *F*(2) = 1, *F*(3) = 2, *F*(5) = 3 y *F*(17) = 7.

 Luego, dado un número *N* construímos la lista de números *N*, *F*(*N*), *F*(*F*(*N*)),... hasta encontrar el primer valor de la lista que no sea primo. Por ejemplo, para *N* = 17 la lista es 17, 7, 4 y ahí termina, dado que 4 no es primo; para *N* = 16, la lista sólo tiene al 16. Definimos el orden de *N* como la longitud de esta lista. Por ejemplo, el orden de 17 es 3 y el orden de 16 es 1.

Calcular la suma de los órdenes de todos los números entre 1 y *N* inclusive:

a) Para *N* = 18799716

b) Para *N* = 201082010

**Primer día**

1

Buscar todas las soluciones de la ecuación

*XA* + *YB* = 454119265.

en las que *X*, *Y*, *A*, *B* sean todos enteros positivos mayores que 1.

2

Para armar un dado primo, se quieren 6 números primos P, Q, R, S, U, V que sean todos distintos y P+Q = R+S = U+V.

a) Encontrar *P*, *Q*, *R*, *S*, *U*, *V* que cumplan esta condición y que en total sumen por lo menos 1000.

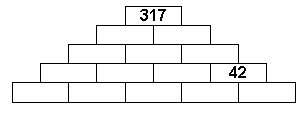
b) ¿Cuáles se deben elegir para que se cumpla esa condición y la diferencia entre el mayor y el menor de los 6 números sea lo más chica posible? ¿Es la única elección posible?

3

La Tranquilísima tiene tres gustos de yogurt. El yogurt de frutilla tiene 192 kilocalorías (kcal) y cuesta $2,27. El de durazno tiene 184 kcal y cuesta $2,35. El de vainilla tiene 203 kcal y cuesta $2,17. Durante los 31 días del mes se quiere comer un yogurt cada día, de manera que no se coman dos del mismo gusto en días consecutivos y que la cantidad de kilocalorías sea menor a 6000. ¿Cuál es el menor costo posible?   
Y para comer un yogurt por día durante 365 días sin repetir en días consecutivos con menos de 71900 kcal ¿cuál es el menor costo posible?

**Segundo día**

4

Se tiene una pirámide formada por bloques rectangulares. Cada bloque tiene un número entero positivo que es igual a la suma de los dos de abajo. Además los números de la misma fila están ordenados de menor a mayor (más chico a la izquierda).

Completar la pirámide con los números que faltan. ¿Cuántas formas de llenarla hay?

5

Encontrar un número primo *ABCDEF* de 6 cifras tal que los tres números de 2 cifras *AB*, *CD*, *EF* sean también todos primos.

6

En el país de "Las Mil y Una Noches" tres hermanos recibieron en herencia *N* camellos. Según el testamento, los camellos debían repartirse de la siguiente forma: 1/*A* de ellos para el hermano mayor, 1/*B* para el segundo y 1/*C* de los camellos para el hermano menor. Estaban perplejos, porque no se podía repartir de esa manera y que a cada uno de los tres hermanos le tocara una cantidad entera de camellos.

Lucas, un vecino, los salvó: les regaló 1 camello. Entonces al repartir los *N*+1 camellos, a cada hermano le tocó ahora una cantidad entera de camellos, y sobró 1 camello, que regalaron al vecino, en agradecimiento.  
Hallar todos los posibles valores de *N*, *A*, *B*, *C* enteros positivos con *A* < *B* < *C* tales que se cumple esta historia. Por ejemplo *N*=11, *A*=2, *B*=4, *C*=6.

**Primer día**

1

a) Encontrar *A*, *B*, *C*, *D* enteros positivos tales que

*A*2 + *B*3 + *C*4 + *D*5 = 55000

b) De todos los enteros entre 1 y 100000, buscar el mayor que no se puede escribir como *A*2 + *B*3 + *C*4 + *D*5, con A, B, C, D enteros positivos.

2

¿Cuáles son todos los números de la forma *AABBCC* que tienen al menos 150 divisores?

*Aclaración: Los divisores de 60 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60.*

3

Para cada *F* = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 hallar al menos una pareja de enteros positivos *C* y *M* tal que *C*/*M* = 1/*F* y además *C* y *M* juntos se escriben usando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 exactamente una vez.  
Por ejemplo si *F* = 7, no sirve 63152/442064 porque usa el 0 y repite el 2, el 4 y el 6. Tampoco sirve 1863/27945 = 1/15 porque *F* no es como se pide.

**Segundo día**

4

Martín escribió todos los números *K* de 6 cifras tales que existe un entero positivo *N* tal que *K* divide a 2244*N*. ¿Cuántos números escribió en total?

5

a) Encontrar 4 números primos de 2 cifras, tales que las 8 cifras que aparecen en total son todas distintas, y la suma de los 4 números es la menor posible.

b) Encontrar 3 números primos de 3 cifras, tales que las 9 cifras que aparecen en total son todas distintas, y la suma de los 3 números es la menor posible.

c) Encontrar 2 números primos de 4 cifras, tales que las 8 cifras que aparecen en total son todas distintas, y la suma de los 2 números es la menor posible.

6

Hallar todos los enteros positivos *N* tal que la suma de las cuartas potencias de las cifras de *N* sea igual a *N*.

Por ejemplo, la suma de las cuartas potencias de las cifras de 2008 es 16 + 0 + 0 + 4096 = 4112, así que 2008 no sirve.

**Primer día**

1

Encontrar dos números primos positivos *p* y *q*, ambos mayores que 2007, tales que *q* - *p* = 2 y además *p* + *q* + 1 también sea primo.

2

Calcular de cuántas formas se pueden elegir cinco números enteros *A*, *B*, *C*, *D* y *E* tales que

0 < *A* < *B* < *C* < *D* < *E* < 100

y

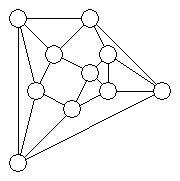
*A* - 0 <= 25, *B* - *A* <= 25, *C* - *B* <= 25, *D* - *C* <= 25, *E* - *D* <= 25, 100 - *E* <= 25.

3

Nicolás quiere colorear todos los circulitos del siguiente dibujo de color rojo, azul, amarillo y verde, de manera que cada circulito tenga un solo color y los circulitos que están unidos directamente por un segmento de los marcados tengan colores diferentes.

a) Dar una posible forma en que se pueda colorear.

b) ¿Cuántas formas posibles hay en total?



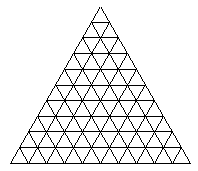
**Segundo día**

4

Un pequeño club tiene tres divisiones: atletismo, básquet y ciclismo. Cada mes, los socios pagan $49 si pertenecen a una sola división, pero si pertenecen a dos pagan $40 *a cada una*, porque les hacen descuento. Por ahora nadie está anotado en las tres. La recaudación del mes pasado fue de $3831 en atletismo, $11756 en básquet, y $2007 en ciclismo. ¿Cuántos socios tiene cada división, y cuántos el club?

5

¿Cuántos triángulos equiláteros de cualquier tamaño y orientación hay dibujados en esta figura?



6

Para construir una lista de números, primero se elige un número entero positivo cualquiera. Para obtener el siguiente se sigue este proceso:

* Si el número es par, se lo reemplaza por su mitad.
* En cambio, si el número es impar se le suma 2007.

A partir de este resultado se vuelve a aplicar el mismo proceso para obtener uno a uno los números siguientes. Por ejemplo, si inicialmente se elige 10, la lista de números queda

10 -> 5 -> 2012 -> 1006 -> 503 -> 2510 -> ...

a) ¿Cuántos son los números que se pueden elegir como número inicial para que en algún momento vuelva a aparecer el número inicial?

b) ¿Cuáles son? (Describir el conjunto.)