Instituto Tecnológico Autónomo de México

El problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes

Tesis

que para obtener el título de

licenciado en matemáticas aplicadas

presenta

Ilan Jinich Fainsod

Asesor: DR RAMÓN ESPINOSA ARMENTA

México, D.F. 2018

"Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada "**El problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes**", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación".

AUTOR

Fecha

Firma

6×10^6

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Prefacio

PUEDEN QUITAR ESTA PARTE

Índice general

Capítulo 1

El modelo

"Matchmaker, matchmaker, Make me a match, Find me a find, Catch me a catch"

1.1. Descripción del problema

Imaginemos que en una ciudad tenemos m universidades y n personas que desean ir a una de estas escuelas, cada universidad tiene un límite alumnos que puede admitir y por esto no todas las personas pueden asistir a su universidad "favorita", este tipo de cota puede ser común si dos o más escuelas comparten recursos o personal como es el caso de las universidades publicas que dependen en conjunto del presupuesto del gobierno. Además, podemos agregar el supuesto de que las escuelas tienen cotas inferiores, usualmente por razones de dinero o de personal a una escuela no le conviene abrir o aceptar a menos de que entren una cantidad considerable de alumnos a esta. Adicionalmente, tenemos el supuesto de que todos los alumnos tienen una lista de preferencias no exhaustiva (en muchos casos si es exhaustiva) de que universidad prefieren y de forma análoga las universidades tienen una lista de preferencias sobre los alumnos, cada escuela y persona tienen necesidades diferentes a los demás, algunos podrían preferir la escuela que está más cerca de sus casas, otros la que te prepara mejor académicamente y otros entre muchas razones podrían preferir la que tenga el mejor ambiente social.

En notación matemática lo que hacemos es suponer que tenemos n alumnos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con las restricciones:

1.
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ asiste a la universidad } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.1}$$

2.
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ abre.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.2}$$

3.
$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Cada estudiante es admitido en máximo una universidad.

4.
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.4}$$

Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

5.
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geq \ m_j \times y_j \tag{1.5}$$

Cada universidad necesita admitir a una cantidad considerable de alumnos para abrir.

6.
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{j,k} \cdot x_{i,j} \leq N_k. \tag{1.6}$$

donde

$$w_{j,k}{}^{1} = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ es parte de la restricción } k. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.7}$$

[1] w_j, k es constante

para toda $k = 1, 2, \ldots, p$ [2].
La cota superior de las universidades puede ser común.

7.
$$x_{i,j} \leq y_j \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.8}$$
Los solicitantes únicamente pueden asistir a universidades abiertas.

Es importante mencionar que no hay garantía de que todos los alumnos sean admitidos en alguna universidad, algunos se pueden quedar sin estudiar. No todas las universidades necesariamente tienen cotas superiores, inferiores o comunes; en ciertas situaciones se puede considerar que para cierta universidad j, M_j puede ser igual a infinito o m_j puede ser igual a cero.

Para definir las preferencias de una forma un poco más formal, hacemos uso de la matriz de preferencias

Definición 1.1. Definimos la **matriz de preferencias** para un problema con n estudiantes y con m universidades como una matriz con n filas y m columnas donde la primera entrada de la celda (i, j) represente el orden de preferencia que le asigna el solicitante i a la universidad j y análogamente la segunda entrada representa el orden de preferencia que le da la universidad j a la persona i. La matriz podría tener lugares vacíos en caso de listas no exhaustivas.

Para que dejar más clara la definición es necesario mostrar un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Supongamos que contamos con tres solicitantes α, β y γ y con tres universidades A, B y C y la matriz de preferencias

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} & \begin{pmatrix} 1,3 & 2,2 & 3,1 \\ 3,1 & 1,3 & 2,2 \\ 2,2 & 3,1 & 1,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

aquí por ejemplo el orden preferencias de α es (A, B, C) y el orden de preferencias de C es (γ, β, α). △

[2] donde p es el número de restricciones comunes.

Para continuar es necesario introducir un criterio de estabilidad y otro de optimalidad, para ello enunciamos dos definiciones.

Definición 1.2. Gale y Shapley (1962) Decimos que una asignación de solicitantes a universidades es inestable si existen dos solicitantes α y β asignados a universidades A y B respectivamente, con la propiedad de que α prefiere estar en B que en A y B prefiere tener a α que a B. Es decir, existen una universidad y un solicitante que se prefieren entre ellos a sus respectivas asignaciones. Además a esto, decimos que una asignación es inestable si existe una universidad cerrada A y m_j solicitantes $\alpha_1, \alpha, 2, \ldots, \alpha_{m_j}$, con la propiedad de que los m_j solicitantes prefieren estar en A a su situación actual, en este caso se le llama a A **universidad bloqueadora**.
Alternativamente una asignación de solicitantes a universidades es **estable** si no es inestable.

Definición 1.3. Gale y Shapley (1962) Una asignación es considera **optima** si cada solicitante esta mejor o igual respecto a sus preferencias que en cualquier otra asignación estable.

A continuación mostramos un par de ejemplos de cómo funcionan las definiciones para dejar todo más claro.

Ejemplo 1.2. Retomando el ejemplo 1.1.
El conjunto de parejas $(\alpha, A),\ (\beta, B)\ y\ (\gamma, C)$ es estable porque a pesar de las preferencias de las universidades cada persona esta con su primera opción, es decir, los solicitantes prefieren a su universidad más que a cualquier otra. Esta además es óptima porque cada solicitante está en su primera opción.

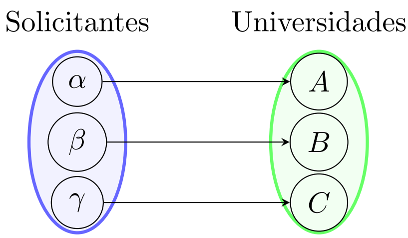

Figura 1.1: Emparejamiento estable.

△

Ejemplo 1.3. Retomando el ejemplo 1.1.
El conjunto de parejas (α, A), (γ, B) y (β, C) es inestable porque γ prefiere a A que a su universidad actual (B) y A prefiere a γ que a su universidad actual (α).

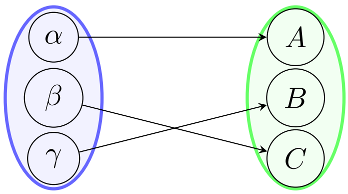

Figura 1.2: Emparejamiento inestable.

△

Surgen algunas preguntas de aquí ¿siempre existe un emparejamiento estable? ¿cómo se encuentra? Para resolverlas primero consideraremos el caso en el que $M_j = 1$ para toda universidad j y donde además no hay cotas inferiores o comunes, que es mejor conocido como el problema del matrimonio estable.

1.2. El problema del matrimonio estable

En el pequeño Shtetl de Anatevka, había muchos hombres y muchas mujeres jóvenes con el deseo de casarse. Yenta, la casamentera del pueblo, tenía el trabajo y la obligación de emparejar a todos estos jóvenes. Esta tarea sonara fácil pero no lo es, cada joven tenía distintas preferencias y cada uno de ellos necesitaba un trato especial, "el matrimonio es para toda la vida y no es algo que hay que tomar como si fuera cualquier cosa" decía Yenta. Retomando los conceptos de la última sección, se desea que el emparejamiento de estos jóvenes sea estable y optimo si es que es posible.[3] En

[3] Este problema hace el supuesto de que las relaciones solo pueden ser entre un hombre y una mujer y que esto es reflejado por sus preferencias. Esto no manifiesta la realidad o las opiniones del autor y se hace únicamente con fines matemáticos.

términos matemáticos, supongamos que tenemos n hombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m mujeres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones:

1. $$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ se casa con } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.9}$$

2. $$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.10}$$

   Cada hombre se casa con máximo una mujer.

3. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.11}$$

   Cada mujer se casa con máximo un hombre.

Es claro, a partir de la definición del problema que este es un caso particular del problema original. Aprovechando lo que se hizo en la sección anterior la definición de la matriz de preferencias, un emparejamiento estable y de un emparejamiento optimo son análogas a las definiciones 1.1, 1.2 y 1.3. Existen diversos resultados sobre el problema del matrimonio estable, uno de los más famosos es por Gale y Shapley que encontraron un algoritmo que siempre encuentra un emparejamiento estable y además lo hace sin muchas complicaciones.

Un supuesto adicional que haremos es que el número de hombres es exactamente igual al número de mujeres. Esto se verá después que es relativamente sencillo de generalizar al caso en el que el número de hombres y de mujeres no es igual.

1.2.1. Algoritmo de Gale Shapley

En 1962 David Gale y Lloyd Stowell Shapley demostraron que para el problema del matrimonio estable siempre se puede encontrar un emparejamiento estable óptimo para los hombres, esto se hizo enunciando un algoritmo y mostrando su convergencia. El algoritmo queda representado por el siguiente código y es conocido como el algoritmo de Gale Shapley.

Algoritmo 1: Gale Shapley

---

input : Una matriz de preferencias para n hombres y n mujeres
output: Un emparejamiento.

Cada hombre le propone a la primera mujer de su lista;
Cada mujer que recibe más de una propuesta acepta la que este más arriba en su lista y rechaza al resto ;
repeat
    Los hombres no emparejados le proponen a la siguiente mujer en su lista;
    Cada mujer que recibe una propuesta escoge la que está más arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su pareja actual;
    Las mujeres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until *hasta que todos los hombres tengan pareja*;

Para dejar la explicación un poco más clara es importante mostrar un ejemplo de cómo funciona el algoritmo y cuál es su resultado final.

Ejemplo 1.4. Gale y Shapley (1962) Supongamos que para 4 hombres y 4 mujeres tenemos la matriz de preferencias

$$\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1,3 & 2,2 & 3,1 & 4,3 \\ 1,4 & 2,3 & 3,2 & 4,4 \\ 3,1 & 1,4 & 2,3 & 4,2 \\ 2,2 & 3,1 & 1,4 & 4,1 \end{pmatrix}.$$

En primera estancia, α le propone matrimonio a A, β le propone matrimonio a A, γ le propone matrimonio a B y δ le propone matrimonio a C.

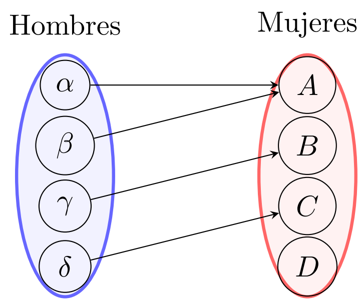

Figura 1.3: Primera iteración.

En segunda instancia, A acepta la propuesta de α y β le propone matrimonio a B.

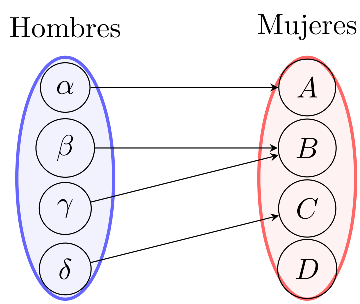

Figura 1.4: Segunda iteración.

En tercera instancia, B acepta la propuesta de β y γ le propone matrimonio a C.

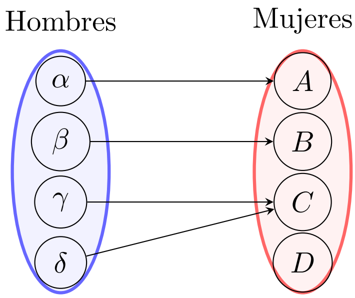

Figura 1.5: Tercera iteración.

En cuarta instancia, C acepta la propuesta de γ y β le propone matrimonio a A.

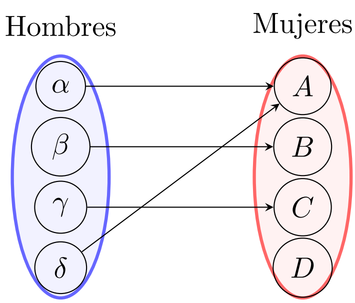

Figura 1.6: Cuarta iteración.

En quinta instancia, A acepta la propuesta de δ y α le propone matrimonio a B.

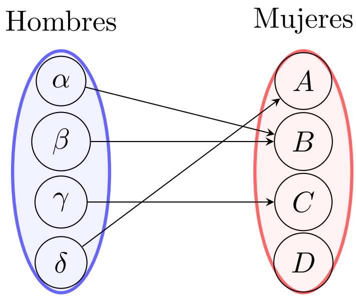

Figura 1.7: Quinta iteración.

En sexta instancia, B acepta la propuesta de α y β le propone matrimonio a C.

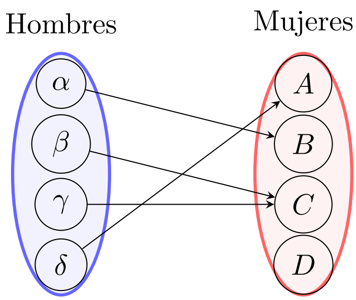

Figura 1.8: Sexta iteración.

En séptima instancia, C acepta la propuesta de β y γ le propone matrimonio a A.

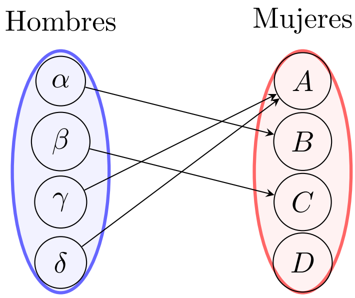

Figura 1.9: Séptima iteración.

En octava instancia, A acepta la propuesta de γ y δ le propone matrimonio a B.

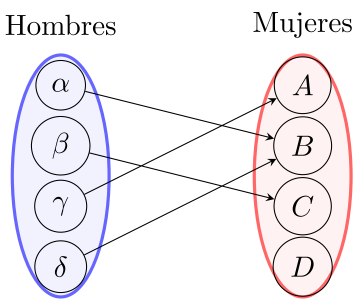

Figura 1.10: Octava iteración.

En novena instancia, B acepta la propuesta de δ y α le propone matrimonio a C.

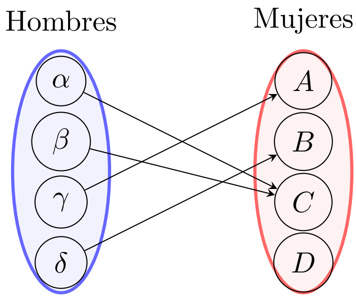

Figura 1.11: Novena iteración.

En decima instancia, C acepta la propuesta de α, β le propone matrimonio a D y D acepta la propuesta de β. Después de 10 pasos en el algoritmo, todos los hombres ya están emparejados, es decir, el algoritmo convergió en un emparejamiento. Cabe mencionar que el número total de propuestas fue 13.

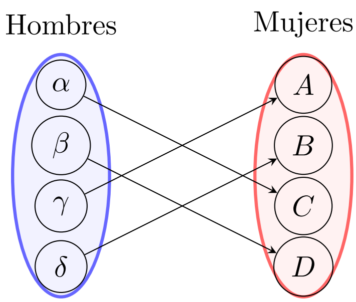

Figura 1.12: Decima iteración.

$\triangle$

Lo importante de este algoritmo no es solo que produce un emparejamiento, adicional a esto como lo muestra el siguiente teorema, el emparejamiento resultante es estable.

Teorema 1.4 (Teorema de Gale Shaley)**.** *Gale y Shapley (1962)*
El algoritmo de Gale Shapley termina en un emparejamiento estable.

Demostración. Supongamos que el emparejamiento producido por el algoritmo no es estable. Esto es, un hombre α y una mujer A se prefieren entre ellos que a sus respectivas parejas.
Como α prefiere a A más que a su esposa entonces, α le propuso matrimonio primero a A que a su propia esposa. Además, como A prefiere a α que a su esposo entonces, A hubiera rechazado a su esposo y se hubiera quedado casada con α lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, el algoritmo de Gale Shapley termina siempre en un emparejamiento estable. □

Un resultado inmediato de esto es que siempre, sin importar como sean las preferencias, existe un emparejamiento estable.

Corolario 1.5. *Dada una matriz de preferencias arbitraria existe un emparejamiento estable.*

Demostración. Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley, sabemos por el teorema 1.4 que este siempre acaba en un emparejamiento estable. Por lo tanto, siempre existe un emparejamiento estable. □

Una vez que sabemos que el algoritmo siempre converge, nos interesa conocer que tan rápido lo hace y si tiene algunas ventajas el emparejamiento resultante. El lema 1.6 nos ayuda a llegar a estos resultados y los corolarios 1.7 y 1.8 nos dan una idea de que tan bueno es el algoritmo.

Lema 1.6. *Knuth (1997)*
Bajo el emparejamiento obtenido por Gale Shapley, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja.

Demostración. Supongamos que en el emparejamiento de Gale Shapley m ($m \geq 2$) hombres terminan con la última mujer de su lista como pareja, eso significa que cada uno de esos m hombres invitó a salir a todas las mujeres. Entonces cada mujer fue invita a salir por lo menos m veces, lo cual es una contradicción porque el algoritmo acaba cuando invitan a salir a la última mujer y a esta solo la invitan a salir una vez. Por lo tanto, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja. □

Dos consecuencias casi inmediatas de esto son que bajo el algoritmo la gran mayoría de los hombres no terminan con su última opción y que el algoritmo converge relativamente rápido.

Corolario 1.7. *Si en un emparejamiento estable por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas, entonces existe dos o más emparejamientos estables en el problema.*

Demostración. Llamemos M al emparejamiento estable donde por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas y llamemos M' al emparejamiento de Gale Shapley. Por el teorema 1.4 sabemos que el algoritmo de Gale Shapley siempre acaba en un emparejamiento estable y además en ese emparejamiento estable solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja por el lema 1.6. Por lo tanto m y m' son diferentes y como ambos son emparejamientos estables entonces el número de emparejamientos estables en el problema es mayor o igual a dos. □

Corolario 1.8. *El número máximo de propuestas en el algoritmo es* $n^2 - n + 1$

Demostración. Por el lema 1.6 sabemos que a lo más un hombre acaba emparejado con la última mujer de su lista, por lo tanto, el peor emparejamiento posible para el algoritmo es uno donde $n-1$ hombres terminan con la penúltima mujer de sus respectivas listas y un hombre termina con la última. Para llegar a esta situación de acuerdo con el algoritmo, los $n-1$ hombres deben de realizar $n-1$ propuestas cada uno y el otro hombre debe de realizar n propuestas. Esto es $(n-1)(n-1)+n$ propuestas que es igual a $n^2 - n + 1$ propuestas. □

Observación 1.9. La complejidad del algoritmo de Gale Shapley es del orden de n^2.

Ejemplo 1.5. Si retomamos el ejemplo 1.4 podemos ver que para 4 personas hubo $4^2 - 4 + 1 = 13$ propuestas que es el máximo número posible de estas de acuerdo con el corolario 1.8. △

A partir de esto ya podemos resolver el problema en el que la cantidad de hombres y de mujeres es distinta. El siguiente resultado muestra que sin importar el número de hombres o de mujeres, el algoritmo igual converge.

Teorema 1.10. *Gale y Shapley (1962)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria con n hombres y m mujeres, el algoritmo de Gale Shapley converge a un emparejamiento estable

Demostración. Supongamos que la cantidad de hombres es más chica que la cantidad de mujeres ($n < m$), en este caso el algoritmo acaba cuando n de las m mujeres reciben una propuesta. Si suponemos que la cantidad de hombres es mayor a la cantidad de mujeres ($n > m$), en este caso el algoritmo acaba después de que $n - m$ hombres son rechazados por todas las mujeres y las propuestas de m de los hombres son aceptadas.

Además de forma análoga al teorema 1.4 se puede ver que el emparejamiento producido es estable. □

A partir de esto podemos generalizar el algoritmo de Gale Shapley para que permita un número distinto de hombres y de mujeres.

Algoritmo 2: Gale Shapley para un número distinto de hombres y mujeres

---

input : Una matriz de preferencias para n hombres y m mujeres
output: Un emparejamiento.

```
Cada hombre le propone a la primera mujer de su lista;
Cada mujer que recibe más de una propuesta acepta la que este
  más arriba en su lista y rechaza al resto ;
repeat
    Los hombres no emparejados le proponen a la siguiente
      mujer en su lista;
    Cada mujer que recibe una propuesta escoge la que está más
      arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su
      pareja actual;
    Las mujeres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until hasta que todos los hombres tengan pareja o hasta que
  sean rechazados por todas las mujeres;
```

El algoritmo de Gale Shapley no es el único algoritmo que existe para producir un emparejamiento estable, y si se cambia el algoritmo el emparejamiento producido podría ser totalmente diferente al producido por el primero. De forma inmediata se puede crear un algoritmo igual al de Gale Shapley con la única diferencia de que las mujeres les proponen a los hombres, esto está representado por el siguiente código.

Algoritmo 3: Gale Shapley para las mujeres

input : Una matriz de preferencias para n hombres y m mujeres

output: Un emparejamiento.

```
Cada mujer le propone al primer hombre de su lista;
Cada hombre que recibe más de una propuesta acepta la que este
  más arriba en su lista y rechaza al resto;
repeat
    Las mujeres no emparejados le proponen al siguiente hombre
      en su lista;
    Cada hombre que recibe una propuesta escoge la que está más
      arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su
      pareja actual;
    Los hombres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until hasta que todas las mujeres tengan pareja o o hasta que
  sean rechazadas por todas los hombres;
```

El siguiente ejemplo ilustra que el emparejamiento obtenido es distinto en ciertas situaciones y que por lo tanto los emparejamientos estables no son únicos.

Ejemplo 1.6. Retomando el ejemplo 1.1.
Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley para los hombres obtenemos en primera estancia el siguiente emparejamiento estable.

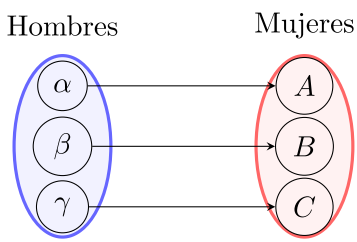

Figura 1.13: Resultado del algoritmo si los hombres proponen.

Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley para las mujeres obtenemos en primera estancia el siguiente emparejamiento estable.

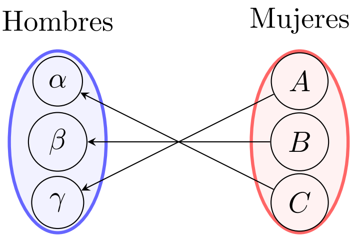

Figura 1.14: Resultado del algoritmo si las mujeres proponen.

Es fácil ver que los dos emparejamientos estables son distintos. △

Corolario 1.11. *Dada una matriz de preferencias arbitraria, la cantidad de emparejamientos estables es mayor o igual a 1.*

Demostración. Con el corolario 1.5 podemos garantizar la existencia y con el ejemplo 1.6 mostramos que no podemos garantizar la unicidad de este. □

Para continuar, podemos generalizar el problema del matrimonio estable a uno que permite a los hombres casarse con varias mujeres cambiando su cota superior de uno a cualquier otro número. Este es conocido como el problema de admisión a universidades.

1.3. El problema de admisión a universidades

Supongamos que en una ciudad hay n personas que desean entrar a m universidades, los solicitantes tienen una lista de preferencias en donde reflejan a que universidades prefieren entrar y de forma análoga las universidades tienen una lista preferencias con la información de a quien prefieren admitir. Adicional a esto para cada universidad existe un número máximo de alumnos que pueden admitir, esta restricción es natural porque la cantidad de personal y de espacio en las universidades es limitado. En términos matemáticos, supongamos que tenemos n solicitantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones:

1.
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ entra a estudiar a } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.12}$$

2.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Cada solicitante entra solo a una universidad.

3.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

Es claro que esto es una generalización del problema del matrimonio estable y un caso particular del problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes. Podemos retomar las definiciones la matriz de preferencias, un emparejamiento estable y de un emparejamiento optimo como análogas a las definiciones 1.1, 1.2 y 1.3.

En el siguiente código exhibimos un análogo al algoritmo de Gale Shapley para este problema, el cual encuentra un emparejamiento estable y que además lo hace relativamente rápido. Para el caso general este algoritmo es conocido como el de "aceptación diferida".

Algoritmo 4: Gale Shapley para admisión a universidades

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j.
output: Un emparejamiento.

```
Cada solicitante aplica a la primera universidad de su lista;
Cada universidad que recibe más de solicitudes a su cota
  superior acepta las que solicitudes que están más arriba en su
  lista y rechaza al resto. ;
repeat
    Los solicitantes no emparejados solicitan entrar a la
      siguiente universidad en su lista;
    Cada universidad que recibe alguna solicitud acepta hasta M_j
      solicitantes de los primeros de su lista entre los que
      aplicaron a ella y sus admitidos actuales;
    Las universidades rechazan a los alumnos no aceptados;
until hasta que cada uno de los solicitantes sea admitido por
  alguna universidad o rechazado por todas;
```

Este algoritmo al igual que su análogo en el matrimonio estable encuentra siempre un emparejamiento estable.

Corolario 1.12. *Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector M de cotas superiores arbitrario, el algoritmo de Gale Shapley siempre encuentra un emparejamiento estable.*

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema 1.4, supongamos que el emparejamiento producido por el algoritmo no es estable. Esto es, un solicitante α que esta admitido en una universidad B (o en ninguna) prefiere estar en una universidad A y simultáneamente una universidad A tiene admitido a un alumno β y preferiría tener a α que a β como estudiante.
Como α prefiere a A más que a su universidad entonces, α solicito entrar primero a A que a su propia universidad. Además, como A prefiere a α que a β entonces de acuerdo con el algoritmo, A hubiera rechazado a β y se hubiera quedado con α como alumno lo cual es una contradicción (el

argumento para cuando α no fue aceptado en ninguna universidad es el mismo).
Por lo tanto, el algoritmo de Gale Shapley termina siempre en un emparejamiento estable. $\square$

Este algoritmo además de ser producir un emparejamiento estable también cada solicitante esta mejor o igual en este emparejamiento que en cualquier otro emparejamiento estable. Para hacer la demostración primero introducimos una definición y un lema.

Definición 1.13. Gale y Shapley (1962) Decimos que una universidad es **posible** para un aplicante si existe una asignación estable en la que esta persona asiste a esa universidad.

Lema 1.14. *Gale y Shapley (1962)*
Supongamos que en un paso arbitrario del algoritmo ningún estudiante ha sido rechazado por una universidad posible para él, además supongamos que una universidad A después de llenarse recibiendo a los estudiantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ rechaza a α, entonces A no es posible para α.

Demostración. Sabemos por hipótesis que para toda $i = 1, \ldots, q$, β_i prefiere a A que a todas las universidades que no lo han rechazado y además que cualquier universidad que lo rechazo previamente no es posible para él. Supongamos que existe un emparejamiento estable en el que α asiste a A, entonces alguna β_i no asiste a A porque α tomo su lugar. Este emparejamiento es inestable porque β_i prefiere a A que a su asignación actual porque A es su mejor asignación posible y A prefiere tener a β_i que a α, lo cual es claramente una contradicción y por lo tanto A no es posible para α. $\square$

Teorema 1.15. *Gale y Shapley (1962)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario, el emparejamiento producido por el algoritmo es óptimo para los solicitantes.

Demostración. La prueba es por inducción. Primero que nada, sabemos que si en el primer paso del algoritmo una universidad rechaza a un alumno es porque esta universidad no es posible para el aplicante, si suponemos que esta universidad es posible para el llegamos rápidamente a una contradicción porque esto quisiera decir que la universidad rechazo a un mejor estudiante que la tenía como primera opción para meterlo a él y por lo tanto el emparejamiento no sería estable. Luego por el lema 1.14 sabemos que en los siguientes pasos del algoritmo ningún estudiante es rechazado por una universidad posible para él y por lo tanto el emparejamiento obtenido es óptimo. □

El algoritmo mencionado anteriormente no es único, de cambiarlo el emparejamiento obtenido podría cambiar significativamente. En primera instancia el algoritmo puede ser modificado para que sea óptimo para las universidades en lugar de para los solicitantes. El siguiente algoritmo produce este resultado y las demostraciones se hacen de forma análoga a las mencionadas anteriormente, como propiedades importantes vale la pena mencionar que produce un emparejamiento estable y que cada universidad está mejor en este emparejamiento que en cualquier otro emparejamiento.

Algoritmo 5: Gale Shapley para admisión a universidades modificado

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j.

output: Un emparejamiento.

Cada universidad invita a los primeros j_i solicitantes en su lista a estudiar ahí ;

Cada alumno que recibe más de una solicitud acepta las más alta en su lista y rechaza el resto. ;

repeat

> *Las universidades que no alcanzaron su cota superior invitan a los siguientes alumnos de su lista de acuerdo con cuantos lugares tienen;*
>
> *Cada solicitante que recibe una solicitud acepta la más alta en su alta entre su actual universidad y las que lo invitaron;*
>
> *El alumno rechaza el resto de las invitaciones;*

until *hasta que cada universidad este llena o cuando todos los estudiantes sean admitidos en una universidad.*;

1.3.1. El teorema de los hospitales rurales

Existe una extensión de este problema llamada el problema de hospitales y residentes médicos que es básicamente lo mismo a este problema con la excepción de que en vez de tener universidades tenemos hospitales y en vez de que existan estudiantes queriendo estudiar en esta tenemos estudiantes médicos que quieren hacer su residencia en este. Una pregunta interesante que se hizo fue ¿qué pasa con los hospitales no populares? Algunos hospitales por su naturaleza no llamaban la atención de los estudiantes de medicina, un ejemplo de esto eran los que estaban en una zona rural, los residentes preferían ir a hospitales en zonas urbanas más pobladas porque contaban con fama de ser mejores hospitales y además tenían más pacientes. La pregunta original puede ser modificada en ¿existe una modificación al algoritmo que produzca un emparejamiento estable y además asigne más residentes en los hospitales poco populares que el resultado del algoritmo Gale Shapley? A raíz de esto David Gale y Marilda Sotomayor en 1985 demostraron que la cantidad de gente que asiste a universidad es la misma en cualquier emparejamiento estable. Este resultado se puede poner en términos de nuestro problema original, para llegar a este es necesario primero demostrar un lema.

Lema 1.16. *Gusfield y Irving (1989)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario, sea M el emparejamiento obtenido por el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades y sea M' un emparejamiento estable arbitrario. Si una universidad A no se llena en M' entonces todo solicitante que entro a A en M también fue asignado a A en M'.

Demostración. Supongamos que α fue admitido en A en la asignación M pero no en M', por hipótesis A no está llena en M' entonces tenemos una contradicción porque significaría que α en M' está en una mejor universidad posible que A, lo cual no es posible porque la asignación en M por el teorema 1.15 es óptima. Por lo tanto, si una universidad A no se llena en M' entonces todo solicitante que entro a A en M también fue asignado a A en M'. □

Teorema 1.17. *Teorema de los hospitales rurales*
Gale y Sotomayor (1985)

Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario:

1. *Cada universidad recibe el mismo número de solicitantes en cada asignación estable.*

2. *Exactamente el mismo número de solicitantes quedan como no asignados en cada emparejamiento estable.*

3. *Si una universidad no se llena en un emparejamiento estable recibe exactamente el mismo número de solicitantes en cualquier asignación estable.*

Demostración. Sea M el emparejamiento obtenido por Gale Shapley y sea M' un emparejamiento estable arbitrario. Prime notamos que si una persona no fue asignada a ninguna universidad en M entonces tampoco en M', esto es por el lema 1.14 porque ninguna universidad es posible para él. Por lo tanto, el número de personas asignadas en M' no puede exceder el de M.
Ahora por el lema 1.16, si una universidad se llena en M entonces también está llena en M'. Simultáneamente por el lema 1.16, si a una universidad le sobran lugares en M' entonces en M tiene mínimo la misma cantidad de lugares. Por lo tanto, el número de personas asignadas en M no puede exceder el de M'. Luego, podemos concluir que para toda universidad tiene el mismo número de estudiantes asignados en M y en M' que es lo mismo a cada universidad recibe el mismo número de solicitantes en cada asignación estable.
Una conclusión inmediata de arriba y de que ningún estudiante que es no asignado en M puede ser admitido en M' es que exactamente el mismo número de solicitantes quedan como no asignados en cada emparejamiento estable.
Una segunda conclusión inmediata de arriba y del lema 1.16 es que si una universidad no se llena en un emparejamiento estable recibe exactamente el mismo número de solicitantes en cualquier asignación estable.
Por lo tanto, concluimos que se cumplen 1, 2 y 3. □

Para seguir avanzando, podemos ver qué sucede si al problema de admisión a universidades le agregamos cotas inferiores. Esto es, las universidades necesitan a un número mínimo de personas para ver si les conviene abrir.

1.4. Cotas inferiores

Casi de la misma manera a la sección anterior, supongamos que en una ciudad hay n personas que desean entrar a m universidades, los solicitantes tienen una lista de preferencias en donde reflejan a que universidades prefieren entrar y de forma análoga las universidades tienen una lista preferencias con la información de a quien prefieren admitir. En cada universidad existe un número máximo de alumnos que pueden admitir al igual que un número mínimo que necesitan para abrir, estas restricciones son de carácter natural porque la cantidad de personal y de espacio en las universidades es limitado y además necesitan que sea costeable. En términos matemáticos, supongamos que tenemos n solicitantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones:

1. $$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ entra a estudiar a } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.15}$$

2. $$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ abre.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.16}$$

3. $$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.17}$$

   Cada solicitante entra solo a una universidad.

4. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.18}$$

   Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

5. $$x_{i,j} \leq y_j \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.19}$$

   Los solicitantes únicamente pueden asistir a universidades abiertas.

6.
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geq \; m_j \times y_j \tag{1.20}$$

Cada universidad necesita admitir a una cantidad considerable de alumnos para abrir.

Una pregunta inicial que surge es si todos los resultados obtenidos para el problema sin cotas inferiores o comunes se siguen cumpliendo, una vez que agregamos las cotas inferiores ¿el emparejamiento estable siempre existe? ¿De existir este es óptimo? ¿Se obtiene con facilidad? Para comenzar es posible mostrar que el emparejamiento estable no siempre existe.

Ejemplo 1.7. Biró y cols. (2010)
Supongamos que tenemos dos universidades A y B, A solo puede admitir a dos alumnos y necesita admitir a dos alumnos para entrar y B solo puede admitir a un alumno y necesita a un alumno para abrir. Además, contamos con dos solicitantes α y β, la matriz de preferencias del problema está dada por

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,1 & 2,1 \\ \beta & 2,2 & 1,2 \end{pmatrix}.$$

Lo primero que notamos es que A o B tienen que estar cerradas porque la suma de las cotas inferiores es tres y solo contamos con dos estudiantes. Si A cierra entonces tenemos dos emparejamientos posibles, en el primero α es admitido en B y no es estable porque α prefiere estar en A, β prefiere estar en A a no estar en ningún lado y A prefiere tener a los dos estudiantes que cerrar .

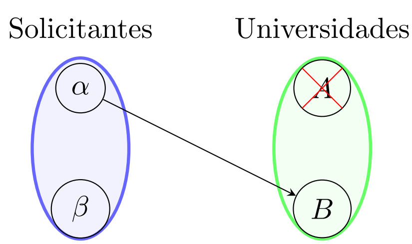

Figura 1.15: Primer caso.

En el segundo caso β es admitido en B y este emparejamiento no es estable porque B prefiere tener a α que a β y α prefiere estudiar que no estudiar.

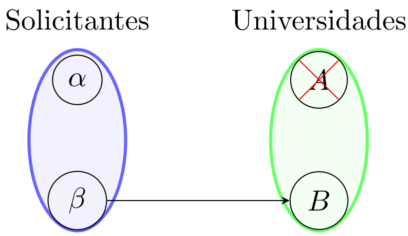

Figura 1.16: Segundo caso.

Si B cierra entonces solo tenemos un emparejamiento posible en el que α y β son admitidos en A, este no es estable porque B prefiere tener a β que cerrar y β prefiere estar en A que en B.

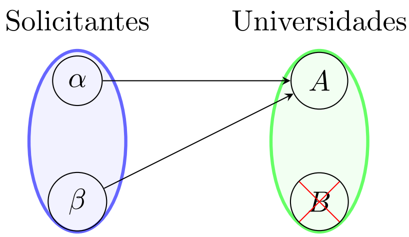

Figura 1.17: Tercer caso.

$\triangle$

A partir de este ejemplo queda claro que si extendemos el problema agregando cotas inferiores perdemos la garantía de existencia de un emparejamiento estable en nuestro problema. Es posible además construir un algoritmo a partir del algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades que converja en caso de que exista a un emparejamiento estable o que saque como resultado si no existe un emparejamiento estable para este problema, el algoritmo esta dado por el siguiente código. Antes de mostrarlo vale la pena recordar que si tienes m universidades entonces existen $2^m - 1$

(corolario A.13) posibles combinaciones de qué universidades mantienen abiertas y cuales cierran.

Algoritmo 6: Gale Shapley para admisión a universidades con cotas inferiores.

---

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j y un vector N en donde la entrada j representa la cota inferior de la universidad j.

output: Un emparejamiento o un mensaje.

repeat

Se selecciona una de las $2^m - 1$ combinaciones, se escoge primero las opciones que cierren menos universidades de las todavía no escogidas;

Se le aplica el algoritmo de Gale Shapley para admisión de universidades a la combinación de universidades abiertas y se obtiene una asiignación;

Si la asignación obtenida es factible, el algoritmo acaba y saca como output el emparejamiento;

until *Hasta encontrar un emparejamiento estable factible o hasta tratar todas las combinaciones*;

Si el algoritmo trato todas las combinaciones y no encontró un emparejamiento estable factible entonces saca un mensaje diciendo que este no existe;

Corolario 1.18. *Dada una matriz de preferencias arbitraria, un vector de cotas superiores arbitrario y un vector de cotas inferiores arbitrario, el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades con cotas inferiores converge.*

Demostración. Supongamos que existe una combinación de universidades abiertas que cuenta con una asignación estable y el algoritmo no la encuentra. Esto es, existe una combinación de universidades en las que el emparejamiento estable producido por Gale Shapley no es factible, pero en

la que si existe un emparejamiento estable factible, lo cual es una contradicción al teorema 1.17 porque todos los emparejamientos estables asignan exactamente el mismo número de personas a cada universidad y por lo tanto si el emparejamiento encontrado por el algoritmo no es factible eso implicaría que todas las asignaciones estables no son factibles.
Cómo se escoge las opciones que cierren menos universidades de las todavía no escogidas podemos garantizar que de encontrar un emparejamiento estable factible este no tiene una universidad bloqueadora. Además, porque el algoritmo trata todas las combinaciones y porque el corolario 1.12 nos garantiza que dada una combinación de universidades abiertas el algoritmo siempre encuentra un emparejamiento estable, entonces podemos concluir que de existir un emparejamiento estable factible el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades con cotas inferiores lo va a encontrar y por lo tanto el algoritmo converge a lo deseado. □

Este algoritmo a diferencia de los anteriores en que tiene la enorme desventaja de que no es muy eficiente, si el número de universidades es muy grande el algoritmo podría no acabar porque el poder de computo necesario para correrlo es exponencial respecto al número de universidades, esto queda fundamentado por el siguiente resultado.

Corolario 1.19. *La complejidad del algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades con cotas inferiores es del orden de* $2^m \cdot m^2$*, donde* m *es el número de universidades.*

Demostración. En el peor escenario no existe una asignación estable factible para el problema, en este caso se realiza $2^m - 1$ veces el algoritmo de Gale Shapley, que por la observación 1.9 tiene como complejidad m^2. Por lo tanto, el número máximo de pasos que tiene el algoritmo es aproximadamente $(2^m - 1) \cdot m^2 = 2^m \cdot m^2 - m^2$ y podemos concluir que la complejidad del algoritmo es del orden de $2^m \cdot m^2$. □

A continuación mostramos un ejemplo de cómo funciona el algoritmo para dejarlo más claro.

Ejemplo 1.8. Biró y cols. (2010)
Supongamos que tenemos dos universidades A y B, A tiene como cota inferior a dos estudiantes y solo puede admitir a dos solicitantes, B necesita

a tres estudiantes para abrir y tiene como cota superior a tres alumnos. Además, a esto contamos con tres solicitantes α, β y γ, la matriz de preferencias para este problema es

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,1 & ,1 \\ \beta & 1,2 & 2,1 \\ \gamma & , & 1,2 \end{pmatrix}.$$[4]

En el primer paso del algoritmo las dos universidades se mantienen abiertas, α aplica a A, β aplica a A y γ aplica a B. A y B aceptan a los tres alumnos llegando a una asignación estable pero no factible.

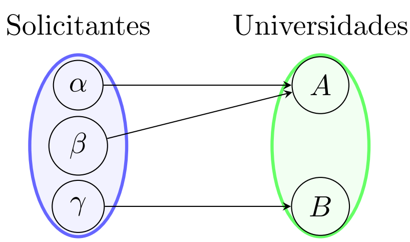

Figura 1.18: Primera iteración.

En el segundo paso del algoritmo A cierra y B se mantiene abierto. α no aplica a ninguna universidad, β aplica a B y γ aplica a B. B acepta a los dos alumnos llegando a un emparejamiento estable pero no factible.

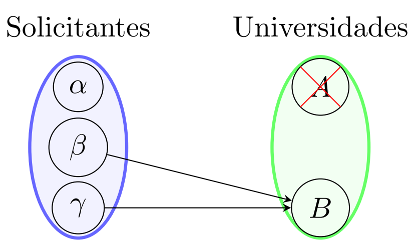

Figura 1.19: Segunda iteración.

[4]Note que la lista de preferencias en este caso es no exhaustiva.

En el tercer paso del algoritmo B cierra y A se mantiene abierto. γ no aplica a ninguna universidad, α aplica a A y α aplica a A. A acepta a los dos alumnos llegando a un emparejamiento estable factible. Después de 3 pasos en el algoritmo, encontramos un emparejamiento estable factible, es decir, el algoritmo convergió.

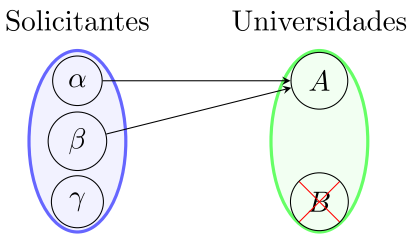

Figura 1.20: Tercera iteración.

$\triangle$

Al igual que en las secciones anteriores el algoritmo puede ser modificado para que sea optimo para las universidades, los resultados de convergencia y de complejidad son analogos a los mostrados. Además a esto, Biró y cols. (2010) propone una heuristica para resolver este problema de forma rapida. En general hay que tener cuidado al usarla porque el algoritmo ignora la existencia de universidades bloqueadoras y podria no llegar a una solución a pesar de que para ese problema en particular si exista una asignación estable.

Algoritmo 7: Heuristica para admisión a universidades con cotas inferiores.

---

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j y un vector N en donde la entrada j representa la cota inferior de la universidad j.
output: Un emparejamiento o un mensaje.

```
U ← un vector de tamaño m con los nombres de todas las universidades;
repeat
    Se aplica el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades considerando que las escuelas que aparecen en U estan abiertas y las que no estan cerradas obteniendo un emparejamiento M;
    if M es factible then
        El algoritmo acaba y saca como output el emparejamiento;
    else
        Sea A la universidad con el cociente entre el número asignado de estudiantes y su cota inferior mínimo ;
        U ← U \ A (Al vector U le quitamos la universidad A) ;
until Hasta encontrar un emparejamiento estable factible o mientras U sea no vacio;
Si U esta vacio, saca un mensaje diciendo que no se encontro el emparejamiento;
```

En el capitulo **??** se analizara la complejidad computacional de ver si existe una asignación estable para este problema A continuación veremos que pasa cuando agregamos cotas comunes al problema y ver si las cosas se siguen compartando igual o parecido a los subproblemas mostrados anteriormente. Analizaremos el problema sin considerar las cotas inferiores por simplicidad.

1.5. Cotas comunes

Considerando un problema muy similar al original mencionado al principio del capitulo, supongamos que en una ciudad hay n personas que desean entrar a m universidades, los solicitantes tienen una lista de preferencias en donde reflejan a que universidades prefieren entrar y de forma análoga las universidades tienen una lista preferencias con la información de a quien prefieren admitir. En cada universidad existe un número máximo de alumnos que pueden admitir y estas en conjunto tienen cotas superiores comunes, estas restricciones son de carácter natural porque las universidades pueden tener recursos compartidos como es el caso por ejemplo de becas gubernamentales. En términos matemáticos, supongamos que tenemos n solicitantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones

1. $$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ asiste a la universidad } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.21}$$

2. $$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.22}$$

   Cada estudiante es admitido en máximo una universidad.

3. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.23}$$

   Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

4. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{j,k} \cdot x_{i,j} \leq N_p \tag{1.24}$$

   donde

   $$w_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ es parte de la restricción } k. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.25}$$

para toda $k = 1, 2, \ldots, p$ [5].
La universidades tienen cotas superiores comunes.

Aquí ponemos como modificación al problema original el hecho que ignoramos la existencia de cotas inferiores. Además, en lugar de usar la matriz de preferencias definida por 1.1 utilizaremos una lista de preferencias que tiene la ventaja de ser un poco más simple para expresar las cotas comunes.

Definición 1.20. Definimos la **lista de preferencias** para un problema con n estudiantes, con m universidades y p restricciones como una función P de tal forma que si α es un estudiante $P(\alpha)$ es el orden de preferencia que le asigna a las universidades, si A es una universidad $P(A)$ es el orden de preferencia que le asigna a los estudiantes salvo que el primer lugar denota la cota inferior de A y el segundo lugar la superior de A. Además, si denotamos a $\mathcal{C}$ como el **sistema de conjuntos de universidades** (ver A.10) que esta conformado por los conjuntos de universidades que forman cada restricción y denotamos a C_k como el conjunto de universidades que forman parte de la restricción común k para todo $k = 1, 2, \ldots, p$. Entonces $P(C_k)$ representa el orden de preferencias de la cota C_k para todo $k = 1, 2, \ldots, p$. Para definir el orden de preferencias de una cota común hacemos los siguientes supuestos:

1. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe una universidad A que pertenece a C_k y además existe un estudiante α que pertenece a $P(A)$. Entonces, α pertenece a $P(C_k)$.

2. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe un estudiante α que petenece a $P(C_k)$. Entonces, existe una universidad A que pertenece a C_k tal que α pertenece a $P(A)$.

3. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe una universidad A que petenece a C_K y además existen dos estudiantes α y β de tal forma que A prefiere a α que a β. Entonces, α aparece antes que β en $P(C_K)$.

[5]donde p es el número de restricciones comunes.

4. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existen dos estudiantes α y β, de tal forma que α aparece antes que β en $P(C_k)$. Entonces, toda universidad A que pertenece a C_k prefiere tener a α que a β en caso que aparazcan en $P(A)$.

Ejemplo 1.9. Biró y cols. (2010) Una lista de preferencias y cómo funciona

No siempre existe una asignación estable

Ejemplo 1.10. Contraejemplo de que no siempre existe usando 1.9

Capítulo 2

Problemas NP-Completos

2.1. Clases de complejidad

Algo que nos interesa mucho cuando atacamos un problema de computación es que tan dificíl es de resolver y si existe una mejor manera de hacerlo. La complejidad computacional nos permite estudiar esto. Para encarrilarnos hay que empezar con algunas definiciones y ejemplos.

Definición 2.1. Se dice que un problema es un problema de decisón si admite dos posibles respuestas "Si" o "No". Resolverlo es encontrar todas las soluciones en las que la respuesta es "Si".

Existen dos clases de problemas de decisión que nos interesan, los que son faciles de verificar (NP) y los que son faciles de resolver (P)-

Definición 2.2. Un problema esta en la clase NP si existe un algoritmo polinomial para verificar que la respuesta de una solución dada es "Si".

Ejemplo 2.1 (Problema del clima). Supongamos que Mariana le dice a Adrián que esta lloviendo, si Adrián decide verificar si esto es cierto solo tiene que realizar tres pasos:

1. Caminar a la ventana.

2. Abrir la ventana.

3. Ver el cielo.

Por lo tanto a Adrián le toma un tiempo constante verificar si esta lloviendo lo que implica que este problem esta en NP.

Definición 2.3. Se dice que un problema de decisión esta en P si existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.

Observación 2.4 ($P \subseteq NP$). Si un problema de decisión pertenece a P entonces pertenece a NP.

Observación 2.5. Si A es un problema de decisión en P y existe un algoritmo polinomial que reduce resolver el problema de decisión B a resolver el problema A entonces B esta en P.

Vale la pena mencionar algunos ejemplos de problemas que estan en P:

1. El problema de admisión a universidades.
2. Verificar si un numero es primo.
3. Encontrar la ruta más corta entre dos vertices en una gráfica.
4. El problema de la ruta critica.

Una conjetura famosa que vale la pena mencionar es ¿si $P = NP$?, es decir si todo problema en NP tambien se enecuentra en P. La persona que lo demuestra además de ganar fama y trabajo va a ser acredor a un permio de un millon de dolares.

2.2. El $3 - SAT$

Un problema de gran importancia para entender las clases de complejidad es el $3 - SAT$, la raíz de todo el estudio necesario para estudiar el problema ¿$P = NP$? se remonta a enteder este problema.

Definición 2.6 (conjunctive normal form.)**.**

2.3. Problemas NP-Completos

“Chaos is a ladder’

Definición 2.7. Qué es un problema NP-completo.

Teorema 2.8 (Teorema de Cook-Levin)**.** *El 3-SAT es NP-Completo.*

Donde esta la demostración.

Capítulo 3

Conclusiones

Concluyo que

Apéndice A

Teoría de Conjuntos

Definición A.1. Lipschutz (1998)
Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos; los objetos son llamados **elementos** del conjunto.

Definición A.2. La **cardinalidad** de un conjunto Ω es la cantidad de elementos que tiene.

Definición A.3. Definimos al **conjunto vacio** $\emptyset$ como aquel que no tiene ningun elemento.

Definición A.4. Dado un conjunto Ω arbitrario, decimos que un conjunto A es **subconjunto** de Ω si todos los elementos de A son elementos de Ω. Esto se denota como $A \subseteq \Omega$.

Observación A.5. Dado un conjunto Ω arbitrario, $\emptyset \subseteq \Omega$.

Definición A.6. Definimos la **union** entre dos conjuntos A y B como el conjunto $A \cup B$ que contiene a todos los elementos que estan en A y a todos los elementos que estan en B.

Definición A.7. Definimos la **intersección** entre dos conjuntos A y B como el conjunto $A \cap B$ que contiene a todos los elementos que estan en A y en B. Es decir, si un elemento esta en A y no esta en B, entonces no esta en $A \cap B$.

Definición A.8. Decimos que dos conjuntos son **ajenos** si la interesección entre ellos es vacia.

Definición A.9. Definimos la **resta** entre dos conjuntos A y B como el conjunto $A \setminus B$ que contiene a todos los elementos que estan en A pero no estan en B.

Definición A.10. Decimos que $\mathcal{C}$ es un **sistema de conjuntos** de Ω si cada elemento de $\mathcal{C}$ es un conjunto de elementos de Ω. Es decir, $\mathcal{C}$ es un conjunto cuyos elementos son subconjutos de Ω.

Definición A.11. Decimos que $\mathcal{P}(\Omega)$ es el **conjunto potencia** de un conjunto Ω si $\mathcal{P}(\Omega)$ es un sistema de conjuntos que contiene a todos los subconjuntos de Ω.

Teorema A.12. *Si la cardinalidad de Ω es n, entonces la cardinalidad de su conjunto potencia es 2^n.*

Demostración. La prueba se hace por inducción matemática.
Supongamos que $n = 0$, entonces $\Omega = \emptyset$. El conjunto vacio unicamente se tiene como subconjunto a si mismo y como $2^0 = 1$, el teorema es cierto para $n = 0$.
Supongamos que $n = 1$, entonces Ω tiene dos posibles subconjuntos: Ω y $\emptyset$. Como $2^1 = 2$, el teorema es cierto para $n = 1$.
Supongamos que para alguna n arbitraria el teorema es cierto y supongamos que la cardinalidad de Ω es $n + 1$. Sea ω un elemento arbitrario de Ω y consideremos a Ω^* como $\Omega \setminus \omega$. Ahora, como la cardinalidad de Ω^* es n sabemos por hipotesis que la cardinalidad de su conjunto potencia es 2^n.
Luego, notamos que los subconjuntos de Ω son unicamente de dos formas: los que contienen a ω y los que no. El grupo de los que no contienen a Ω son el conjunto potencia de Ω^* y el grupo de los que contienen a ω puede ser visto como los elementos del conjunto potencia de Ω^* unidos a ω. Por lo tanto la cardinalidad de $\mathcal{P}(\Omega)$ es el doble a la cardinalidad $\mathcal{P}(\Omega^*)$ que por hipotesis es 2^n lo que implica que la cardinalidad de $\mathcal{P}(\Omega)$ es $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ y por lo tanto, el teorema es cierto para toda n. $\square$

Corolario A.13. *Si la caridinalidad de Ω es n, entonces la cantidad de subconjuntos no vacios que tiene es $2^n - 1$.*

Demostración. Por el teorema A.12 sabemos que la cantidad de subconjuntos que tiene Ω es 2^n, si quitamos el conjunto vacio nos quedamos con $2^n - 1$ subconjuntos. $\square$

Definición A.14. Biró y cols. (2010)
Decimos que $\mathcal{C}$ es un **sistema anidado de conjuntos** si para todo par de conjuntos no ajenos, S y S', se tiene que S es un subconjunto de S' o que S' es un subconjunto de S.

Observación A.15. Si la cardinalidad de Ω es mayor a 2, su conjunto potencia no es sistema anidado de conjuntos.

Definición A.16. Decimos que una colección de conjuntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una **partición** de un conjunto A, si

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i = A.$$

Apéndice B

Teoría de Gráficas

Definición B.1. Espinosa y cols. (2016)
Una **gráfica** es una pareja $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **vértices** y E es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de cardinalidad 2 de V y estos son llamados **aristas**.

Definición B.2. Espinosa y cols. (2016)
El **grado** de un vértice v es el número de aristas que inciden en v, se denota $d(v)$.

Definición B.3. Espinosa (2017) Se dice que una gráfica es **bipartita**, si su conjunto de vertices puede ser partido en dos subconjuntos ajenos X y Y, de tal forma que cada arista tiene un extremo en X y otro en Y. Esta partición tiene el nombre de **bipartición** de la gráfica.

Referencias

Biró, P., Fleiner, T., Irving, R. W., y Manlove, D. F. (2010). The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, *411*(34), 3136 - 3153.

Espinosa, R. (2017). *Matemáticas discretas* (2.ª ed.). Alfaomega Grupo Editor.

Espinosa, R., Jinich, I., y Tame, A. (2016). Gráficas químicas. *Laberintos e Infinitos*(41), 31–36.

Gale, D., y Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, *69*(1), 9–15.

Gale, D., y Sotomayor, M. (1985). Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, *11*(3), 223 - 232.

Gusfield, D., y Irving, R. W. (1989). *The stable marriage problem: Structure and algorithms.* Cambridge, MA, USA: MIT Press.

Knuth, D. E. (1997). *Stable marriage and it's relation to other combinatorial problems: An introduction to the mathematical analysis of algorithms* (Vol. 10). American Mathematical Society.

Lipschutz, S. (1998). *Shaums's outline of theory and problems of set theory and related topics.* McGraw-Hill.

Roth, A. E. (2014). *Who gets what–and why.* Eamon Dolan/Houghton Mifflin Harcourt.

Roth, A. E., y Sotomayor, M. A. O. (1990). *Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis*. Cambridge University Press.