Instituto Tecnológico Autónomo de México

El problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes

Tesis

que para obtener el título de

licenciado en matemáticas aplicadas

presenta

Ilan Jinich Fainsod

Asesor: DR RAMÓN ESPINOSA ARMENTA

México, D.F. 2019

“Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada “**El problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes**”, otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación”.

Ilan Jinich Fainsod

FECHA

FIRMA

Never say that you have reached the very end,
When leaden skies a bitter future may portend;
For sure the hour for which we yearn will yet arrive,
And our marching step will thunder: we survive!

Agradecimientos

A mis abuelos y a mi tío, por siempre cuidarme desde arriba y por lo mucho que los extraño.

A mis abuelas y a mis tía, por todo el amor incondicional y por siempre querer lo mejor de mí.

A mi papá, por inspirarme siempre a ser una mejor persona.

A mi mamá, por hacerme la persona que soy hoy.

A mis hermanos, por siempre estar ahí.

A mis tíos, por siempre apoyarme.

A mi asesor, Ramón Espinosa, por guiarme y preocuparse por mí.

A mis profesores, por todos los retos y aprendizajes que recibí.

A mis amigos, por todas las risas.

A la familia XHash, por darme el mejor trabajo que pude esperar y por apoyarme con este proyecto.

A mis sinodales, por la paciencia y por aceptar revisar este trabajo.

Prefacio

El objetivo de esta tesis es mostrar varios resultados sobre el problema de admisión a universidades con cotas inferiores y sobre el problema de admisión a universidades con cotas comunes.

En el capítulo 1 se define el problema y se enuncian definiciones bastante importantes para entender el problema. En el capítulo 2 se habla sobre clases de complejidad y computación, se introduce la idea de que un problema sea NP-completo y se enuncian las definiciones relacionadas con complejidad computacional. En el capítulo 3 y 4 introducimos el problema del matrimonio estable y el problema de admisión a universidades. Los dos son casos particulares de los problemas que nos interesan. En el capítulo 5 se habla sobre el problema del matrimonio estable introduciendo un concepto conocido como listas con empates, este problema nos ayudara despues a entender algunos resultados de complejidad relacionados con los problemas de esta tesis. En los capítulos 6 y 7 se explican los problemas con inferiores y comunes y se habla sobre la complejidad de los mismos. En los capítulos 8 y 10 hablamos sobre un caso particular del problema de admisión de universidades con cotas comunes y resaltamos varios resultados sobre el mismo. En el capítulo 9 introducimos una estructura algebraica llamada matroides que nos ayudara a entender el final de la tesis.

Para los capítulos 1, 3 y 4 usamos como referencia principal Gale y Shapley (1962); para el capítulo 5 Irving y cols. (2002); para el capítulo 9 Welsh (2010) y para los capítulos 6, 7 , 8 y 10 Biró y cols. (2010).

Índice general

Capítulo 1

El modelo

"Matchmaker, matchmaker, Make me a match, Find me a find, Catch me a catch"

1.1. Descripción del problema

Imaginemos que en una ciudad tenemos m universidades y n personas que desean ir a una de estas escuelas, cada universidad tiene un límite alumnos que puede admitir y por esto no todas las personas pueden asistir a su universidad "favorita", este tipo de cota puede ser común si dos o más escuelas comparten recursos o personal como es el caso de las universidades públicas que dependen en conjunto del presupuesto del gobierno. Además, podemos agregar el supuesto de que las escuelas tienen cotas inferiores, usualmente por razones de dinero o de personal a una escuela no le conviene abrir o aceptar a menos de que entren una cantidad considerable de alumnos a está. Adicionalmente, tenemos el supuesto de que todos los alumnos tienen una lista de preferencias no exhaustiva (en muchos casos si es exhaustiva) de qué universidad prefieren y de forma análoga las universidades tienen una lista de preferencias sobre los alumnos, cada escuela y persona tienen necesidades diferentes a los demás, algunos podrían preferir la escuela que está más cerca de sus casas, otros la que te prepara mejor académicamente y otros entre muchas razones podrían preferir la que tenga el mejor ambiente social.

En notación matemática lo que hacemos es suponer que tenemos n alumnos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con las restricciones:

1. $$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ asiste a la universidad } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.1}$$

2. $$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ abre.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.2}$$

3. $$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

   Cada estudiante es admitido en a lo más una universidad.

4. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.4}$$

   Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

5. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geq \; m_j \times y_j \tag{1.5}$$

   Cada universidad necesita admitir a una cantidad mínima de alumnos para abrir.

6. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{j,k} \cdot x_{i,j} \leq N_k. \tag{1.6}$$

   donde

   $$w_{j,k}{}^{1} = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ es parte de la restricción } k. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.7}$$

[1] w_j, k es constante

para toda $k = 1, 2, \ldots, p$ [2].

La cota superior de las universidades puede ser común.

7.

$$x_{i,j} \leq y_j \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Los solicitantes únicamente pueden asistir a universidades abiertas.

Es importante mencionar que no hay garantía de que todos los alumnos sean admitidos en alguna universidad, algunos se pueden quedar sin estudiar. No todas las universidades necesariamente tienen cotas superiores, inferiores o comunes; en ciertas situaciones se puede considerar que para cierta universidad j, M_j puede ser igual a infinito o m_j puede ser igual a cero.

Para definir las preferencias de una forma un poco más formal, hacemos uso de la matriz de preferencias

Definición 1.1. Definimos la **matriz de preferencias** para un problema con n estudiantes y con m universidades como una matriz con n filas y m columnas donde la primera entrada de la celda (i, j) representa el orden de preferencia que le asigna el solicitante i a la universidad j y análogamente la segunda entrada representa el orden de preferencia que le da la universidad j a la persona i. La matriz podría tener lugares vacíos en caso de listas no exhaustivas.

Para que dejar más clara la definición es necesario mostrar un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Supongamos que contamos con tres solicitantes α, β y γ y con tres universidades A, B y C y la matriz de preferencias

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} & \begin{pmatrix} 1,3 & 2,2 & 3,1 \\ 3,1 & 1,3 & 2,2 \\ 2,2 & 3,1 & 1,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

[2] Donde p es el número de restricciones comunes.

aquí por ejemplo el orden preferencias de α es (A, B, C) y el orden de preferencias de C es (α, β, γ). $\triangle$

Para continuar es necesario introducir un criterio de estabilidad y otro de optimalidad, para ello enunciamos dos definiciones.

Definición 1.2. Gale y Shapley (1962) Decimos que una asignación de solicitantes a universidades es inestable si existen dos solicitantes α y β asignados a universidades A y B respectivamente, con la propiedad de que α prefiere estar en B que en A y B prefiere tener a α que a B. Es decir, existen una universidad y un solicitante que se prefieren entre ellos a sus respectivas asignaciones. Además a esto, decimos que una asignación es **inestable** si existe una universidad cerrada A y m_j solicitantes $\alpha_1, \alpha, 2, \ldots, \alpha_{m_j}$, con la propiedad de que los m_j solicitantes prefieren estar en A a su situación actual, en este caso se le llama a A **universidad bloqueadora**.

Alternativamente una asignación de solicitantes a universidades es **estable** si no es inestable.

Definición 1.3. Gale y Shapley (1962) Una asignación es considera **óptima** si cada solicitante está mejor o igual respecto a sus preferencias que en cualquier otra asignación estable.

A continuación mostramos un par de ejemplos de cómo funcionan las definiciones para dejar todo más claro.

Ejemplo 1.2. Retomando el ejemplo 1.1.
El conjunto de parejas (α, A), (β, B) *y* (γ, C) es estable porque a pesar de las preferencias de las universidades cada persona está con su primera opción, es decir, los solicitantes prefieren a su universidad más que a cualquier otra. Esta además es óptima porque cada solicitante está en su primera opción.

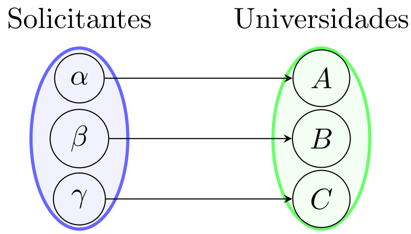


Figura 1.1: Emparejamiento estable.

$\triangle$

Ejemplo 1.3. Retomando el ejemplo 1.1.
El conjunto de parejas (α, A), (γ, B) y (β, C) es inestable porque γ prefiere a A que a su universidad actual (B) y A prefiere a γ que a su universidad actual (α).

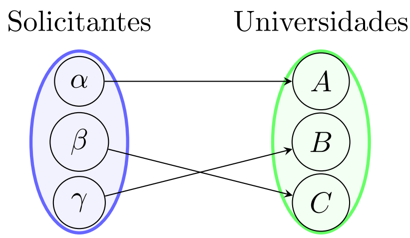


Figura 1.2: Emparejamiento inestable.

$\triangle$

Surgen algunas preguntas de aquí ¿siempre existe un emparejamiento estable? ¿cómo se encuentra? Para resolverlas explicaremos un poco sobre algoritmos y su complejidad. Luego, consideraremos el caso en el que $M_j = 1$ para toda universidad j y donde además no hay cotas inferiores o comunes, que es mejor conocido como el problema del matrimonio estable.

Capítulo 2

Un poco sobre computación

La idea de este capítulo es introducir la idea de complejidad algorítmica. Se habla de qué es un algoritmo, de cuál es el orden de complejidad de un algoritmo y de algunas clases de complejidad de algoritmos. Para empezar a introducir estas ideas son necesarias varias definiciones.

Definición 2.1. Espinosa (2017) Definimos un **algoritmo** como una serie de pasos para resolver un problema. El **tamaño** de un problema es la cantidad de datos necesarios para resolver el problema (las entradas del algoritmo). La **complejidad** de un problema es una función f, donde $f(n)$ es la cantidad de operaciones necesarias para que el algoritmo termine. Además, decimos que $f(n)$ es orden a lo más $g(n)$ si para alguna $K > 0$ se cumple que

$$f(n) \leq Kg(n)$$

para todo n natural.

A partir de esto podemos definir la clase de algoritmos polinomiales, los cuales son muy importantes para entender el contenido de esta tesis.

Definición 2.2. Decimos que un algoritmo es **polinomial** si el algoritmo es de orden a lo más n^k para alguna k en los enteros.

2.1. Clases de complejidad

Algo que nos interesa mucho cuando atacamos un problema de computación es que tan difícil es de resolver y si existe una mejor manera de hacerlo. La complejidad computacional nos permite estudiar esto. Para encarrilarnos hay que empezar con algunas definiciones y ejemplos.

Definición 2.3. Se dice que un problema es un problema de decisión si admite dos posibles respuestas "Si" o "No".

Existen dos clases de problemas de decisión que nos interesan, los que son fáciles de verificar (NP) y los que son fáciles de resolver (P).

Definición 2.4. Un problema está en la clase NP si existe un algoritmo polinomial para verificar que la respuesta de una solución dada es "Si".

Ejemplo 2.1 (Problema del clima)*.* Supongamos que Mariana le dice a Adrián que está lloviendo, si Adrián decide verificar si esto es cierto solo tiene que realizar tres pasos:

1. Caminar a la ventana.
2. Abrir la ventana.
3. Ver el cielo.

Por lo tanto, a Adrián le toma un tiempo constante verificar si está lloviendo lo que implica que este problema está en NP.

Definición 2.5. Se dice que un problema de decisión está en P si existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.

Observación 2.6 ($P \subseteq NP$)*.* Si un problema de decisión pertenece a P entonces pertenece a NP.

Observación 2.7*.* Si A es un problema de decisión en P y existe un algoritmo polinomial que reduce resolver el problema de decisión B a resolver el problema A entonces B está en P.

Vale la pena mencionar algunos ejemplos de problemas que están en P:

1. Verificar si un número es primo.

2. Encontrar la ruta más corta entre dos vértices en una gráfica.

3. El problema de la ruta crítica.

Una conjetura famosa que vale la pena mencionar es ¿si $P = NP$?, es decir si todo problema en NP también se encuentra en P. La persona que lo demuestra además de ganar fama y trabajo va a ser acreedor a un premio de un millón de dólares.

2.2. Problemas NP-Completos

Definición 2.8. Decimos que A un problema es **NP-Completo** si para todo problema B en NP existe una reducción polinomial que reduce el resolver B a resolver A.

Una conclusión inmediata de este problema es la siguiente:

Observación 2.9. Si existe algún algoritmo polinomial para resolver un problema NP-Completo entonces $P = NP$.

Algunos ejemplos de problemas NP-Completos son:

Ejemplo 2.2.
- El problema del agente viajero.
- El problema de 3-coloración.
- El problema de las galerías de arte.

△

En el siguiente capítulo se reduce el problema planteado en el capítulo 1 a su caso más simple, conocido como el problema del matrimonio estable.

Capítulo 3

El problema del matrimonio estable

En el pequeño Shtetl de Anatevka, había muchos hombres y muchas mujeres jóvenes con el deseo de casarse. Yenta, la casamentera del pueblo, tenía el trabajo y la obligación de emparejar a todos estos jóvenes. Esta tarea sonará fácil pero no lo es, cada joven tenía distintas preferencias y cada uno de ellos necesitaba un trato especial, “el matrimonio es para toda la vida y no es algo que hay que tomar como si fuera cualquier cosa”decía Yenta. Retomando los conceptos de la última sección, se desea que el emparejamiento de estos jóvenes sea estable y óptimo si es que es posible.[1] En términos matemáticos, supongamos que tenemos n hombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m mujeres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones:

1. $$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ se casa con } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.1}$$

[1]Este problema hace el supuesto de que las relaciones solo pueden ser entre un hombre y una mujer y que esto es reflejado por sus preferencias. Esto no manifiesta la realidad o las opiniones del autor y se hace únicamente con fines matemáticos.

2.
$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \text{ para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Cada hombre se casa con a lo más una mujer.

3.
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq 1 \text{ para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.3}$$

Cada mujer se casa con a lo más un hombre.

Es claro, a partir de la definición del problema que éste es un caso particular del problema original. Aprovechando lo que se hizo en la sección anterior la definición de la matriz de preferencias, un emparejamiento estable y de un emparejamiento óptimo son análogas a las definiciones 1.1, 1.2 y 1.3. Existen diversos resultados sobre el problema del matrimonio estable, uno de los más famosos es por Gale y Shapley que encontraron un algoritmo que siempre encuentra un emparejamiento estable y además lo hace sin muchas complicaciones.

Un supuesto adicional que haremos es que el número de hombres es exactamente igual al número de mujeres. Esto se verá después que es relativamente sencillo de generalizar al caso en el que el número de hombres y de mujeres no es igual.

3.1. Algoritmo de Gale Shapley

En 1962 David Gale y Lloyd Stowell Shapley demostraron que para el problema del matrimonio estable siempre se puede encontrar un emparejamiento estable óptimo para los hombres, esto se hizo enunciando un algoritmo y mostrando su convergencia. El algoritmo queda representado por el siguiente código y es conocido como el algoritmo de Gale

Shapley.

Algoritmo 1: Gale Shapley

---

input : Una matriz de preferencias para n hombres y n mujeres
output: Un emparejamiento.

Cada hombre le propone a la primera mujer de su lista;
Cada mujer que recibe más de una propuesta acepta la que este más arriba en su lista y rechaza al resto ;
repeat
    Los hombres no emparejados le proponen a la siguiente mujer en su lista;
    Cada mujer que recibe una propuesta escoge la que está más arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su pareja actual;
    Las mujeres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until *hasta que todos los hombres tengan pareja*;

Para dejar la explicación un poco más clara es importante mostrar un ejemplo de cómo funciona el algoritmo y cuál es su resultado final.

Ejemplo 3.1. Gale y Shapley (1962) Supongamos que para 4 hombres y 4 mujeres tenemos la matriz de preferencias

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} & \begin{pmatrix} 1,3 & 2,2 & 3,1 & 4,3 \\ 1,4 & 2,3 & 3,2 & 4,4 \\ 3,1 & 1,4 & 2,3 & 4,2 \\ 2,2 & 3,1 & 1,4 & 4,1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

En la primera iteración, α le propone matrimonio a A, β le propone matrimonio a A, γ le propone matrimonio a B y δ le propone matrimonio a C.

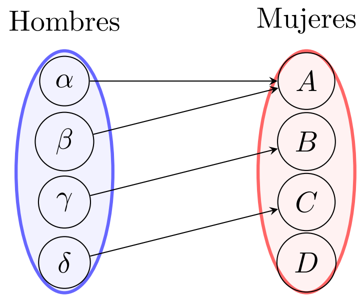


Figura 3.1: Primera iteración.

En la segunda iteración, A acepta la propuesta de α y β le propone matrimonio a B.

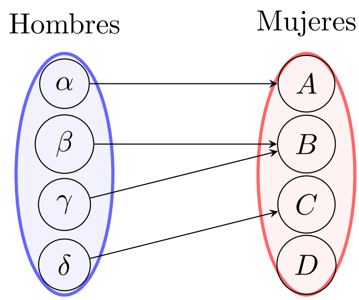


Figura 3.2: Segunda iteración.

En la tercera iteración, B acepta la propuesta de β y γ le propone matrimonio a C.

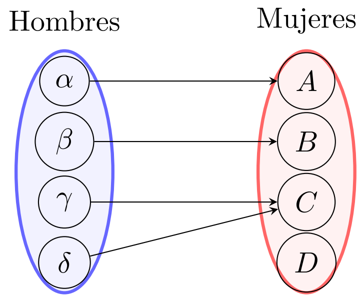


Figura 3.3: Tercera iteración.

En la cuarta iteración, C acepta la propuesta de γ y β le propone matrimonio a A.

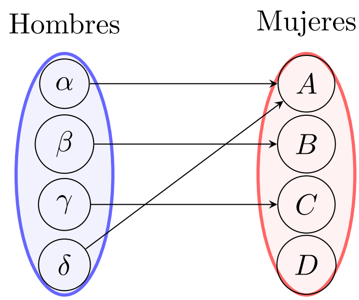


Figura 3.4: Cuarta iteración.

En la quinta iteración, A acepta la propuesta de δ y α le propone matrimonio a B.

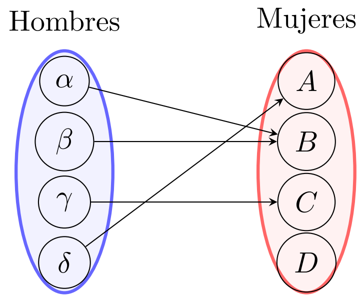


Figura 3.5: Quinta iteración.

En la sexta iteración, B acepta la propuesta de α y β le propone matrimonio a C.

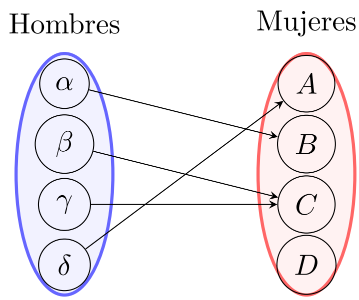


Figura 3.6: Sexta iteración.

En la séptima iteración, C acepta la propuesta de β y γ le propone matrimonio a A.

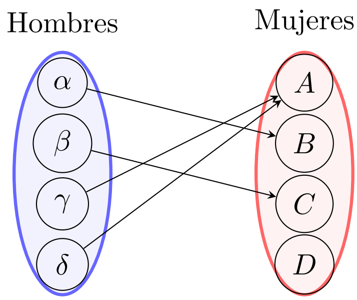


Figura 3.7: Séptima iteración.

En la octava iteración, A acepta la propuesta de γ y δ le propone matrimonio a B.

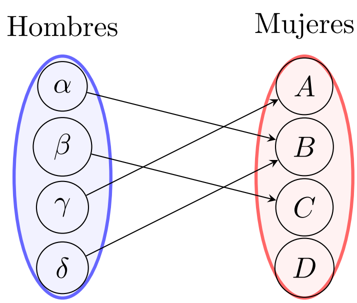


Figura 3.8: Octava iteración.

En la novena iteración, B acepta la propuesta de δ y α le propone matrimonio a C.

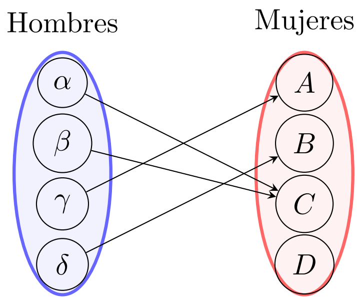


Figura 3.9: Novena iteración.

En la décima iteración, C acepta la propuesta de α, β le propone matrimonio a D y D acepta la propuesta de β. Después de 10 pasos en el algoritmo, todos los hombres ya están emparejados, es decir, el algoritmo convergió en un emparejamiento. Cabe mencionar que el número total de propuestas fue 13.

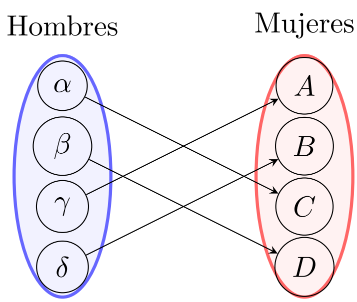


Figura 3.10: Décima iteración.

$\triangle$

Lo importante de este algoritmo no es solo que produce un emparejamiento, adicional a esto como lo muestra el siguiente teorema, el emparejamiento resultante es estable.

Teorema 3.1 (Teorema de Gale Shaley)**.** *Gale y Shapley (1962)*
El algoritmo de Gale Shapley termina en un emparejamiento estable.

Demostración. Supongamos que el emparejamiento producido por el algoritmo no es estable. Esto es, un hombre α y una mujer A se prefieren entre ellos que a sus respectivas parejas.

Como α prefiere a A más que a su esposa entonces, α le propuso matrimonio primero a A que a su propia esposa. Además, como A prefiere a α que a su esposo entonces, A hubiera rechazado a su esposo y se hubiera quedado casada con α lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, el algoritmo de Gale Shapley termina siempre en un emparejamiento estable. □

Un resultado inmediato de esto es que siempre, sin importar como sean las preferencias, existe un emparejamiento estable.

Corolario 3.2. *Dada una matriz de preferencias arbitraria existe un emparejamiento estable.*

Demostración. Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley, sabemos por el teorema 3.1 que este siempre acaba en un emparejamiento estable. Por lo tanto, siempre existe un emparejamiento estable. □

Una vez que sabemos que el algoritmo siempre converge, nos interesa conocer que tan rápido lo hace y si tiene algunas ventajas el emparejamiento resultante. El lema 3.3 nos ayuda a llegar a estos resultados y los corolarios 3.4 y 3.5 nos dan una idea de que tan bueno es el algoritmo.

Lema 3.3. *Knuth (1997)*
Bajo el emparejamiento obtenido por Gale Shapley, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja.

Demostración. Supongamos que en el emparejamiento de Gale Shapley m ($m \geq 2$) hombres terminan con la última mujer de su lista como pareja, eso significa que cada uno de esos m hombres invitó a salir a todas las mujeres. Entonces cada mujer fue invita a salir por lo menos m veces, lo cual es una contradicción porque el algoritmo acaba cuando invitan a salir a la última mujer y a ésta solo la invitan a salir una vez. Por lo tanto, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja. □

Dos consecuencias casi inmediatas de esto son que bajo el algoritmo la gran mayoría de los hombres no terminan con su última opción y que el algoritmo converge relativamente rápido.

Corolario 3.4. *Si en un emparejamiento estable por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas, entonces existe dos o más emparejamientos estables en el problema.*

Demostración. Llamemos M al emparejamiento estable donde por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas y llamemos M' al emparejamiento de Gale Shapley. Por el teorema 3.1 sabemos que el algoritmo de Gale Shapley siempre acaba en un emparejamiento estable y además en ese emparejamiento estable solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja por el lema 3.3. Por lo tanto m y m' son diferentes y como ambos son emparejamientos estables entonces el número de emparejamientos estables en el problema es mayor o igual a dos. □

Corolario 3.5. *El número máximo de propuestas en el algoritmo es* $n^2 - n + 1$

Demostración. Por el lema 3.3 sabemos que a lo más un hombre acaba emparejado con la última mujer de su lista, por lo tanto, el peor emparejamiento posible para el algoritmo es uno donde $n-1$ hombres terminan con la penúltima mujer de sus respectivas listas y un hombre termina con la última. Para llegar a esta situación de acuerdo con el algoritmo, los $n-1$ hombres deben de realizar $n-1$ propuestas cada uno y el otro hombre debe de realizar n propuestas. Esto es $(n-1)(n-1)+n$ propuestas que es igual a $n^2 - n + 1$ propuestas. □

Observación 3.6. La complejidad del algoritmo de Gale Shapley es del orden de n^2.

Ejemplo 3.2. Si retomamos el ejemplo 3.1 podemos ver que para 4 personas hubo $4^2 - 4 + 1 = 13$ propuestas que es el máximo número posible de éstas de acuerdo con el corolario 3.5. △

A partir de esto ya podemos resolver el problema en el que la cantidad de hombres y de mujeres es distinta. El siguiente resultado muestra que sin importar el número de hombres o de mujeres, el algoritmo también converge.

Teorema 3.7. *Gale y Shapley (1962)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria con n hombres y m mujeres, el algoritmo de Gale Shapley converge a un emparejamiento estable

Demostración. Supongamos que la cantidad de hombres es más chica que la cantidad de mujeres ($n < m$), en este caso el algoritmo acaba cuando n de las m mujeres reciben una propuesta. Si suponemos que la cantidad de hombres es mayor a la cantidad de mujeres ($n > m$), en este caso el algoritmo acaba después de que $n - m$ hombres son rechazados por todas las mujeres y las propuestas de m de los hombres son aceptadas.

Además de forma análoga al teorema 3.1 se puede ver que el emparejamiento producido es estable. □

A partir de esto podemos generalizar el algoritmo de Gale Shapley para que permita un número distinto de hombres y de mujeres.

Algoritmo 2: Gale Shapley para un número distinto de hombres y mujeres

---

input : Una matriz de preferencias para n hombres y m mujeres
output: Un emparejamiento.

Cada hombre le propone a la primera mujer de su lista;
Cada mujer que recibe más de una propuesta acepta la que este más arriba en su lista y rechaza al resto ;
repeat
  Los hombres no emparejados le proponen a la siguiente mujer en su lista;
  Cada mujer que recibe una propuesta escoge la que está más arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su pareja actual;
  Las mujeres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until *hasta que todos los hombres tengan pareja o hasta que sean rechazados por todas las mujeres*;

El algoritmo de Gale Shapley no es el único algoritmo que existe para producir un emparejamiento estable, y si se cambia el algoritmo el emparejamiento producido podría ser totalmente diferente al producido por el primero. De forma inmediata se puede crear un algoritmo igual al de Gale Shapley con la única diferencia de que las mujeres les proponen a los hombres, esto está representado por el siguiente código.

Algoritmo 3: Gale Shapley para las mujeres

---

input : Una matriz de preferencias para n hombres y m mujeres
output: Un emparejamiento.

Cada mujer le propone al primer hombre de su lista;
Cada hombre que recibe más de una propuesta acepta la que este más arriba en su lista y rechaza al resto;
repeat
  Las mujeres no emparejadas le proponen al siguiente hombre en su lista;
  Cada hombre que recibe una propuesta escoge la que está más arriba en su lista entre las propuestas que recibió y su pareja actual;
  Los hombres rechazan las propuestas que no aceptaron;
until *hasta que todas las mujeres tengan pareja o o hasta que sean rechazadas por todas los hombres*;

El siguiente ejemplo ilustra que el emparejamiento obtenido es distinto en ciertas situaciones y que por lo tanto los emparejamientos estables no son únicos.

Ejemplo 3.3. Retomando el ejemplo 1.1.
Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley para los hombres obtenemos en primera estancia el siguiente emparejamiento estable.

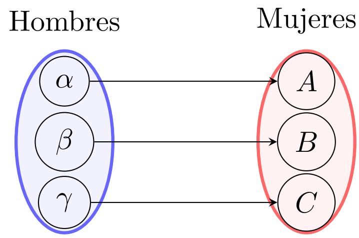


Figura 3.11: Resultado del algoritmo si los hombres proponen.

Si aplicamos el algoritmo de Gale Shapley para las mujeres obtenemos en primera estancia el siguiente emparejamiento estable.

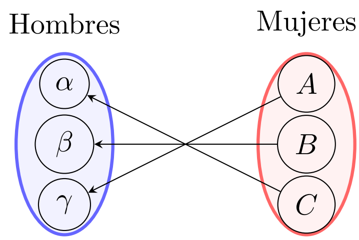


Figura 3.12: Resultado del algoritmo si las mujeres proponen.

Es fácil ver que los dos emparejamientos estables son distintos. $\triangle$

Corolario 3.8. *Dada una matriz de preferencias arbitraria, la cantidad de emparejamientos estables es mayor o igual a 1.*

Demostración. Con el corolario 3.2 podemos garantizar la existencia y con el ejemplo 3.3 mostramos que no podemos garantizar la unicidad de éste. $\square$

Para continuar, podemos generalizar el problema del matrimonio estable a uno que permite a los hombres casarse con varias mujeres cambiando su cota superior de uno a cualquier otro número. Este es conocido como el problema de admisión a universidades.

Capítulo 4

El problema de admisión a universidades

Supongamos que en una ciudad hay n personas que desean entrar a m universidades, los solicitantes tienen una lista de preferencias en donde reflejan a qué universidades prefieren entrar y de forma análoga las universidades tienen una lista preferencias con la información de a quién prefieren admitir. Adicional a esto para cada universidad existe un número máximo de alumnos que pueden admitir, esta restricción es natural porque la cantidad de personal y de espacio en las universidades es limitado. En términos matemáticos, supongamos que tenemos n solicitantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y m universidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con las restricciones:

1.
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ entra a estudiar a } j. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.1}$$

2.
$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq 1 \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Cada solicitante entra solo a una universidad.

3.
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq M_j \quad \text{para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.3}$$

Cada universidad tiene un límite de alumnos que puede admitir.

Es claro que esto es una generalización del problema del matrimonio estable y un caso particular del problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes. Podemos retomar las definiciones de matriz de preferencias, emparejamiento estable y emparejamiento óptimo como análogas a las definiciones 1.1, 1.2 y 1.3.

En el siguiente código exhibimos un análogo al algoritmo de Gale-Shapley para este problema, el cual encuentra un emparejamiento estable y que además lo hace relativamente rápido. Para el caso general este algoritmo es conocido como el de "aceptación diferida".

Algoritmo 4: Gale Shapley para admisión a universidades

---

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j.

output: Un emparejamiento.

Cada solicitante aplica a la primera universidad de su lista;
Cada universidad que recibe más de solicitudes a su cota superior acepta las que solicitudes que están más arriba en su lista y rechaza al resto;
repeat
    Los solicitantes no emparejados solicitan entrar a la siguiente universidad en su lista;
    Cada universidad que recibe alguna solicitud acepta hasta M_j solicitantes de los primeros de su lista entre los que aplicaron a ella y sus admitidos actuales;
    Las universidades rechazan a los alumnos no aceptados;
until *hasta que cada uno de los solicitantes sea admitido por alguna universidad o rechazado por todas*;

Este algoritmo al igual que su análogo en el matrimonio estable encuentra siempre un emparejamiento estable.

Corolario 4.1. *Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector M de cotas superiores arbitrario, el algoritmo de Gale Shapley siempre encuentra un emparejamiento estable.*

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema 3.1, supongamos que el emparejamiento producido por el algoritmo no es estable. Esto es, un solicitante α que esta admitido en una universidad B (o en ninguna) prefiere estar en una universidad A y simultáneamente una universidad A tiene admitido a un alumno β y preferiría tener a α que a β como estudiante.

Como α prefiere a A más que a su universidad entonces, α solicitó entrar primero a A que a su propia universidad. Además, como A prefiere a α que a β entonces de acuerdo con el algoritmo, A hubiera rechazado a β y se hubiera quedado con α como alumno lo cual es una contradicción (el argumento para cuando α no fue aceptado en ninguna universidad es el mismo).

Por lo tanto, el algoritmo de Gale Shapley termina siempre en un emparejamiento estable. □

Este algoritmo además de ser producir un emparejamiento estable también cada solicitante está mejor o igual en este emparejamiento que en cualquier otro emparejamiento estable. Para hacer la demostración primero introducimos una definición y un lema.

Definición 4.2. Gale y Shapley (1962) Decimos que una universidad es **posible** para un aplicante si existe una asignación estable en la que esta persona asiste a esa universidad.

Lema 4.3. *Gale y Shapley (1962)*
Supongamos que en un paso arbitrario del algoritmo ningún estudiante ha sido rechazado por una universidad posible para él, además supongamos que una universidad A después de llenarse recibiendo a los estudiantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ rechaza a α, entonces A no es posible para α.

Demostración. Sabemos por hipótesis que para toda $i = 1, \ldots, q$, β_i prefiere a A que a todas las universidades que no lo han rechazado y además que cualquier universidad que lo rechazó previamente no es posible para él. Supongamos que existe un emparejamiento estable en el que α asiste a A, entonces alguna β_i no asiste a A porque α tomo su lugar. Este emparejamiento es inestable porque β_i prefiere a A que a su asignación actual porque A es su mejor asignación posible y A prefiere tener a β_i que a α, lo cual es claramente una contradicción y por lo tanto A no es posible para α. □

Teorema 4.4. *Gale y Shapley (1962)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario, el emparejamiento producido por el algoritmo es óptimo para los solicitantes.

Demostración. La prueba es por inducción. Primero que nada, sabemos que si en el primer paso del algoritmo una universidad rechaza a un alumno es porque esta universidad no es posible para el aplicante, si suponemos que esta universidad es posible para él llegamos rápidamente a una contradicción porque esto quisiera decir que la universidad rechazó a un mejor estudiante que la tenía como primera opción para meterlo a él y por lo tanto el emparejamiento no sería estable. Luego por el lema 4.3 sabemos que en los siguientes pasos del algoritmo ningún estudiante es rechazado por una universidad posible para él y por lo tanto el emparejamiento obtenido es óptimo. □

El algoritmo mencionado anteriormente no es único, de cambiarlo el emparejamiento obtenido podría cambiar significativamente. En primera instancia el algoritmo puede ser modificado para que sea óptimo para las universidades en lugar de para los solicitantes. El siguiente algoritmo produce este resultado y las demostraciones se hacen de forma análoga a las mencionadas anteriormente, como propiedades importantes vale la pena mencionar que produce un emparejamiento estable y que cada universidad está mejor en este emparejamiento que en cualquier otro emparejamiento.

Algoritmo 5: Gale Shapley para admisión a universidades modificado

---

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j.

output: Un emparejamiento.

Cada universidad invita a los primeros j_i solicitantes en su lista a estudiar ahí ;
Cada alumno que recibe más de una solicitud acepta las más alta en su lista y rechaza el resto;
repeat
    Las universidades que no alcanzaron su cota superior invitan a los siguientes alumnos de su lista de acuerdo con cuántos lugares tienen;
    Cada solicitante que recibe una solicitud acepta la más alta entre su actual universidad y las que lo invitaron;
    El alumno rechaza el resto de las invitaciones;
until *hasta que cada universidad esté llena o cuando todos los estudiantes sean admitidos en una universidad.*;

4.1. El teorema de los hospitales rurales

Existe una extensión de este problema llamada el problema de hospitales y residentes médicos que es básicamente lo mismo a este problema con la excepción de que en vez de tener universidades tenemos hospitales y en vez de que existan estudiantes queriendo estudiar en ésta tenemos estudiantes médicos que quieren hacer su residencia en éste. Una pregunta interesante que se hizo fue ¿qué pasa con los hospitales no populares? Algunos hospitales por su naturaleza no llamaban la atención de los estudiantes de medicina, un ejemplo de esto eran los que estaban en una zona rural, los residentes preferían ir a hospitales en zonas urbanas más pobladas porque contaban con fama de ser mejores hospitales y además tenían más pacientes. La pregunta original puede ser modificada en ¿existe una modificación al algoritmo que produzca un emparejamiento estable y además asigne más residentes en los hospitales poco populares que el resultado del algoritmo Gale Shapley? A raíz de esto David Gale y Marilda Sotomayor en 1985 demostraron que la cantidad de gente que asiste a la universidad es la misma en cualquier emparejamiento estable. Este resultado se puede poner en términos de nuestro problema original, para llegar a éste es necesario primero demostrar un lema.

Lema 4.5. *Gusfield y Irving (1989)*
Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario, sea M el emparejamiento obtenido por el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades y sea M' un emparejamiento estable arbitrario. Si una universidad A no se llena en M' entonces todo solicitante que entró a A en M también fue asignado a A en M'.

Demostración. Supongamos que α fue admitido en A en la asignación M pero no en M', por hipótesis A no está llena en M' entonces tenemos una contradicción porque significaría que α en M' está en una mejor universidad posible que A, lo cual no es posible porque la asignación en M por el teorema 4.4 es óptima. Por lo tanto, si una universidad A no se llena en M' entonces todo solicitante que entró a A en M también fue asignado a A en M'. □

Teorema 4.6. *Teorema de los hospitales rurales*
Gale y Sotomayor (1985)
Dada una matriz de preferencias arbitraria y un vector de cotas superiores arbitrario:

1. *Cada universidad recibe el mismo número de solicitantes en cada asignación estable.*

2. *Exactamente el mismo número de solicitantes quedan como no asignados en cada emparejamiento estable.*

3. *Si una universidad no se llena en un emparejamiento estable recibe exactamente el mismo número de solicitantes en cualquier asignación estable.*

Demostración. Sea M el emparejamiento obtenido por Gale Shapley y sea M' un emparejamiento estable arbitrario. Primero notamos que si una persona no fue asignada a ninguna universidad en M entonces tampoco en M', esto es por el lema 4.3 porque ninguna universidad es posible para él. Por lo tanto, el número de personas asignadas en M' no puede exceder el de M.

Ahora por el lema 4.5, si una universidad se llena en M entonces también está llena en M'. Simultáneamente por el lema 4.5, si a una universidad le sobran lugares en M' entonces en M tiene mínimo la misma cantidad de lugares. Por lo tanto, el número de personas asignadas en M no puede exceder el de M'. Luego, podemos concluir que para toda universidad tiene el mismo número de estudiantes asignados en M y en M' que es lo mismo a cada universidad recibe el mismo número de solicitantes en cada asignación estable.

A partir de esto concluimos que exactamente el mismo número de solicitantes quedan como no asignados en cada emparejamiento estable dado que ningún estudiante que es no asignado en M puede ser admitido en M'. También vemos (4.5) que si una universidad no se llena en un emparejamiento estable recibe exactamente el mismo número de solicitantes en cualquier asignación estable.

Por lo tanto, concluimos que se cumplen 1, 2 y 3. $\square$

Para seguir avanzando, plantearemos algunas variantes de este problema y veremos si su comportamiento es similar al antes visto.

Capítulo 5

Listas con empates

Retomemos el problema planteado en el capítulo 3, recordemos que se planteó el problema del matrimonio estable y se demostró que sin importar si las listas de preferencia son completas o incompletas, existe un algoritmo polinomial que siempre encuentra un emparejamiento estable óptimo (en el sentido de los hombres o de las mujeres dependendiendo de qué algoritmo se use).

Ahora, consideremos el caso en el que la lista de preferencias es completa, es decir cada hombre y cada mujer tiene catalogado en su orden de preferencia a cada persona del género opuesto. Incluiremos la variante de que en la lista se pueden introducir empates, esto es muy común dada que en muchas ocasiones la diferencia entre escoger a dos personas puede ser no significativa.

Ejemplo 5.1. Gusfield y Irving (1989) Supongamos que para 2 hombres y 2 mujeres tenemos la matriz de preferencias

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,2 & 2,2 \\ \beta & 1,1 & 1,1 \end{pmatrix}.$$

En este caso el orden de preferencias A y B es (β, α), el orden de preferencia de α es (A, B) y el orden de preferencia de β es $([A, B])$[1].

[1] Los corchetes denotan que la lista contiene empates

Para este caso es necesario cambiar un poco la definición de estabilidad y de inestabilidad.

Definición 5.1. Gusfield y Irving (1989) Decimos que un emparejamiento es inestable si existen un hombre α y una mujer β, donde cada uno de ellos **estrictamente** prefiere al otro que a su respectiva pareja. Alternativamente un emparejamiento es estable si no es inestable.

La única diferencia con la definición 1.2 es la palabra estrictamente, este tipo de emparejamientos en muchas ocasiones se conoce como **estabilidad débil**[2]. En el caso de que no existan empates en las listas de preferencias las dos defunciones son idénticas. El siguiente resultado muestra que el algoritmo de Gale Shapley también sirve para encontrar un emparejamiento estable dadas estas condiciones.

Corolario 5.2. *Dada una matriz de preferencias arbitraria completa en la que se permiten empates con n hombres y m mujeres, el algoritmo de Gale Shapley converge a un emparejamiento estable.*

Demostración. De la definición 5.1 podemos ver que si convertimos los empates en órdenes estrictos de forma arbitraria llegamos a una instancia del problema planteado en el capítulo 3. Si aplicamos el resultado del teorema 3.1 podemos ver que el algoritmo converge a un emparejamiento estable.

□

Una nota importante de la demostración de arriba es que si cambiamos los empates en ordenes distintos podríamos llegar a emparejamientos estables diferentes.

Ejemplo 5.2. Consideremos la lista de preferencias del ejemplo 5.1, la modificamos para que permita un orden estricto obteniendo la siguiente matriz de preferencias

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,2 & 2,2 \\ 1,1 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

[2]Si no se pide la preferencia estricta es posible ver que en muchas ocasiones no existe un emparejamiento estable para el problema (ver Gusfield y Irving (1989)).

En la primera iteración, α y β le proponen a A.

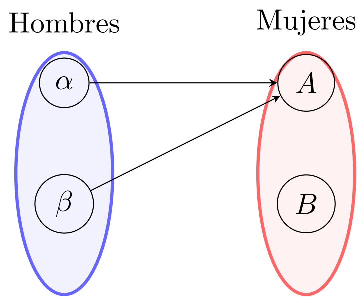


Figura 5.1: Primera iteración.

En la segunda iteración, A acepta la propuesta de β y α le propone matrimonio a B.

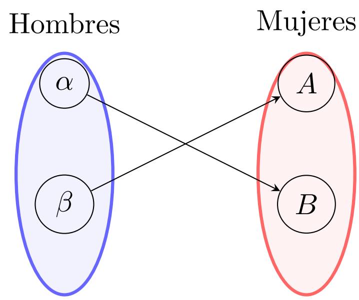


Figura 5.2: Segunda iteración.

Es claro que el emparejamiento obtenido después de dos iteraciones es estable.

Otro resultado importante de este problema es que sigue cumpliendo el teorema 4.6, es decir dados dos emparejamientos estables la cantidad de hombres emparejados es la misma.

Corolario 5.3. *Dada una matriz de preferencias completa en la que se permiten empates con n hombres y m mujeres. Si tenemos dos emparejamientos estables M_1 y M_2, la cantidad de hombres emparejados es la misma.*

Demostración. Dada que la lista de preferencias es completa, todos los hombres prefieren tener a una pareja (sin importar que mujer les toque) a quedarse solos, lo mismo es cierto para las mujeres. Por lo tanto, el número de hombres emparejados es el mínimo entre el número de hombres y el número de mujeres. □

5.1. Listas incompletas con empates

Ahora, consideremos el problema del matrimonio estable considerando dos variantes para el problema; la lista de preferencias es incompleta, o sea para alguna persona en el problema existe otra persona del género opuesto de la cual prefiere quedarse no emparejado a terminar emparejado con ella y además se permiten empates en la lista del mismo modo que se planteó al principio del capítulo.

Ejemplo 5.3. Irving y cols. (2002) Supongamos que para 2 hombres y 2 mujeres tenemos la matriz de preferencias

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,1 & , \\ \beta & 1,1 & 2,1 \end{pmatrix}.$$

En este caso el orden de preferencias de α es (A), el orden de preferencias de β es (A, B), el orden de preferencias de A es $([\alpha, \beta])$ y el orden de preferencias de B es (α).
Para este problema existen dos emparejamientos estables:

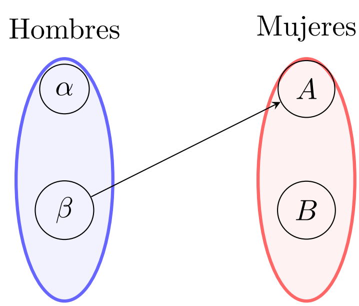


Figura 5.3: Primer emparejamiento estable.

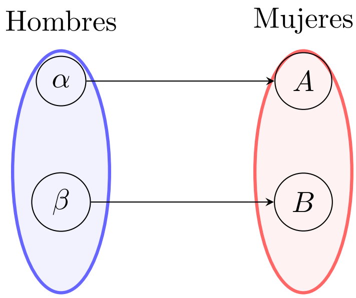


Figura 5.4: Segundo emparejamiento estable.

Un resultado directo mostrado en el ejemplo de arriba es el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *Dada una matriz de preferencias incompleta en la que se permiten empates para n hombres y m mujeres. Si tenemos dos emparejamientos estables M_1 y M_2, la cantidad de hombres emparejados no necesariamente es la misma.*

Un problema interesante aquí es encontrar **un emparejamiento estable de máxima cardinalidad**, o sea encontrar algún emparejamiento estable M_1 con la propiedad de que no existe ningún otro emparejamiento M_2 estable en el problema en el cual exista una mayor cantidad de hombres emparejados que en M_1. El siguiente resultado muestra que encontrar una solución para este problema no es nada trivial.

Teorema 5.5. *Irving y cols. (2002) Dada una matriz de preferencias incompleta en la que se permiten empates para n hombres y n mujeres. El problema de encontrar un emparejamiento estable de máxima cardinalidad es NP-duro. Este resultado es correcto inclusive si solo existen empates en las listas de las mujeres (o de forma análoga en las listas de los hombres).*

Demostración. La demostración supera el alcance de esta tesis, pero se puede encontrar en Irving y cols. (2002). □

Capítulo 6

Cotas inferiores

Retomamos el problema de admisión a universidades igual que como se plantea en el capítulo 4, a cada universidad se le agrega la restricción de que necesita un número mínimo de alumnos asignados que necesitan para abrir. En particular se le agregan las siguientes tres ecuaciones al problema:

1. $$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ abre.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{6.1}$$

2. $$x_{i,j} \leq y_j \quad \text{para toda } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y para toda } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.2}$$

   Los solicitantes únicamente pueden asistir a universidades abiertas.

3. $$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geq \; m_j \times y_j \tag{6.3}$$

   Cada universidad necesita admitir a una cantidad considerable de alumnos para abrir.

Una pregunta inicial que surge es si todos los resultados obtenidos para el problema sin cotas inferiores o comunes se siguen cumpliendo, una vez que agregamos las cotas inferiores ¿el emparejamiento estable siempre existe? ¿De existir esté es óptimo? ¿Se obtiene con facilidad? Para comenzar es posible mostrar que el emparejamiento estable no siempre existe.

Ejemplo 6.1. Biró y cols. (2010)
Supongamos que tenemos dos universidades A y B, A solo puede admitir a dos alumnos y necesita admitir a dos alumnos para entrar y B solo puede admitir a un alumno y necesita a un alumno para abrir. Además, contamos con dos solicitantes α y β, la matriz de preferencias del problema está dada por

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,1 & 2,1 \\ \beta & 2,2 & 1,2 \end{pmatrix}.$$

Lo primero que notamos es que A o B tienen que estar cerradas porque la suma de las cotas inferiores es tres y solo contamos con dos estudiantes. Si A cierra entonces tenemos dos emparejamientos posibles, en el primero α es admitido en B y no es estable porque α prefiere estar en A, β prefiere estar en A a no estar en ningún lado y A prefiere tener a los dos estudiantes que cerrar.

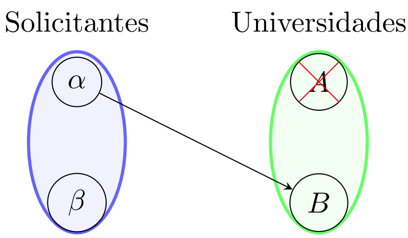


Figura 6.1: Primer caso.

En el segundo caso β es admitido en B y este emparejamiento no es estable porque B prefiere tener a α que a β y α prefiere estudiar que no estudiar.

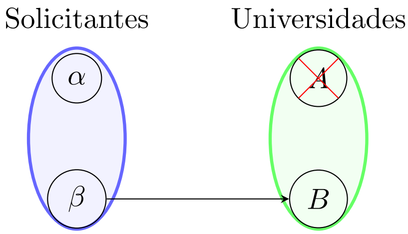


Figura 6.2: Segundo caso.

Si B cierra entonces solo tenemos un emparejamiento posible en el que α y β son admitidos en A, este no es estable porque B prefiere tener a β que cerrar y β prefiere estar en A que en B.

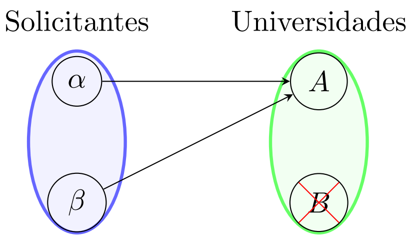


Figura 6.3: Tercer caso.

$\triangle$

A partir de este ejemplo queda claro que si extendemos el problema agregando cotas inferiores perdemos la garantía de existencia de un emparejamiento estable en nuestro problema. La pregunta clave aquí es si existe alguna condición que garantice la existencia de un emparejamiento estable para cualquier problema de este tipo o si existe algún algoritmo para llegar a uno de forma eficiente, el siguiente resultado muestra que esta pregunta es mucho más complicada de lo que parece.

Teorema 6.1. *Biró y cols. (2010) El problema de ver si una instancia del problema de admisión a universidades con cotas inferiores admite un emparejamiento estable es NP-completo.*

Demostración. Dado que el problema claramente es de decisión y además dada una solución es fácil ver si está es correcta o no, este pertenece a la clase NP.

Para ver que el problema es NP-completo reduciremos el problema del matrimonio estable con listas incompletas con empates a esté[1] (sabemos que este problema es NP-completo por el teorema 5.5). Para este caso supondremos que sólo existen empates en las listas de las mujeres, estos son de a lo más longitud 2 y en caso de existir un empate para una mujer arbitraria w_j, esté ocupa toda la lista de w_j y al menos uno de los dos hombres pertenecientes a este tiene a w_j hasta arriba de su lista [2].

Sea I una instancia del problema del emparejamiento estable con listas incompletas con empates, sean $U = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ la lista de hombres en el problema y sean $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ las mujeres en el problema. Sea W_0 un subconjunto de W que contiene a todas las mujeres con un empate de tamaño dos en su lista. Construiremos una instancia I' del problema de admisión a universidades con cotas inferiores a partir de I.

Cada hombre en I corresponde a un aplicante en I' y sus listas de preferencia son idénticas en ambas instancias. Si las mujeres pertenecen a $W \setminus W_0$ entonces representan a una universidad en I' y cuentan como cota superior e inferior al número 1, sus listas de preferencia son idénticas en I y en I'.

El truco está con las mujeres en W_0, supongamos que tenemos a una mujer w_j en W_0 y supongamos que $m_{j,1}$ y $m_{j,2}$ son los dos hombres que conforman este empate. En I' construimos dos universidades w_j^1, w_j^2 y dos aplicantes nuevos a_j^1, a_j^2. Para w_j^1, w_j^2 asignamos al número 3 como sus cotas inferiores y simultáneamente también como sus cotas superiores. Las listas de prefencia para las dos universidades y para los dos aplicantes quedan definidos por la siguiente regla:

1. La lista de a_j^1 tiene a dos universidades, en primer lugar, prefiere a w_j^2 y en segundo a w_j^1.

[1] Recordemos que el problema aquí es ver si existe un emparejamiento estable con todos los hombres y todas las mujeres emparejadas.

[2] Dadas estas condiciones el problema sigue siendo NP-completo Irving y cols. (2002)

2. La lista de a_j^2 tiene a dos universidades, en primer lugar, prefiere a w_j^1 y en segundo a w_j^2.

3. La lista de w_j^1 tiene a tres aplicantes, en primer lugar, prefieren a a_j^1, en segundo a $m_{j,1}$ y en tercero a a_j^2.

4. La lista de w_j^2 tiene a tres aplicantes, en primer lugar, prefieren a a_j^2, en segundo a $m_{j,2}$ y en tercero a a_j^1.

Reemplazamos a w_j por w_j^1 en la lista de $m_{j,1}$ y reemplazamos a w_j por w_j^2 en la lista de $m_{j,2}$. Afirmamos que existe un emparejamiento estable completo en I si y solo si I' cuenta con un emparejamiento estable.

Supongamos que existe un emparejamiento estable completo M en I, queremos construir un emparejamiento estable M' en I' a partir de este. Supongamos que $M' = M$, para toda pareja (m_i, w_j) con w_j en $W \setminus W_0$ no existe ningún cambio y para toda pareja (m_i, w_j) con w_j en W_0 y $m_i = m_{j,r}$ con r igual a 1 o a dos, reemplazamos a (m_i, w_j) en M' por $(a_j^1, w_j^r), (a_j^2, w_j^r), (m_{j,r}, w_j^r)$. Es claro que para toda universidad se cumplen las cotas superiores e inferiores y además por la igualdad entre las listas concluimos que M' es un emparejamiento estable.

Supongamos que existe un emparejamiento estable M' en I', queremos construir un emparejamiento estable M en I a partir de este. Supongamos que $M = M'$, para toda pareja (m_i, w_j) con w_j en $W \setminus W_0$ no existe ningún cambio. Supongamos entonces que $(m_{j,r}, w_j^r)$ pertenece a M' con r igual a 1 o a dos, donde $m_{j,r}$ es igual a m_k para algún hombre en U. Como la cota inferior de w_j^r es igual a 3, es claro que (a_j^1, w_j^r) y (a_j^2, w_j^r) pertenecen a M', sustituimos a $(m_{j,r}, w_j^r)$, a (a_j^1, w_j^r) y a (a_j^2, w_j^r) en M por (m_i, w_j).

Por construcción de w_j^1 y de w_j^2, únicamente una de esas dos universidades puede estar abiertas, lo que garantiza que w_j en M sólo este emparejada con un hombre (esto se cumple para cada mujer en W_0). Además, como al menos uno de los dos hombres pertenecientes a la lista de w_j tienen a está hasta arriba de su lista, tenemos garantía de que w_j^1 o w_j^2 estén abiertas en I. Es claro que todos los hombres y todas las mujeres en I están emparejadas en M por lo tanto el emparejamiento es completo, por la similitud entre las listas de I y I' es también claro que M es un emparejamiento estable y por lo tanto la afirmación mencionada arriba es verdadera y concluimos que el problema de ver si una instancia del problema de admisión a universidades con cotas inferiores admite un emparejamiento estable es NP-completo (inclusive si cada cota inferior no excede a 3). $\square$

A partir de este resultado vemos que el problema es extremadamente difícil de resolver. Biró y cols. (2010) propone una heurística para resolver este problema de forma rápida. En general hay que tener cuidado al usarla porque el algoritmo ignora la existencia de universidades bloqueadoras y podría no llegar a una solución a pesar de que para ese problema en particular si exista una asignación estable. La heurística es la siguiente:

Algoritmo 6: Heurística para admisión a universidades con cotas inferiores.

input : Una matriz de preferencias para n solicitantes y m universidades, un vector M en donde la entrada j representa la cota superior de la universidad j y un vector N en donde la entrada j representa la cota inferior de la universidad j.

output: Un emparejamiento o un mensaje.

$U \leftarrow$ *un vector de tamaño m con los nombres de todas las universidades;*

repeat

  Se aplica el algoritmo de Gale Shapley para admisión a universidades considerando que las escuelas que aparecen en U están abiertas y las que no están cerradas obteniendo un emparejamiento M;

  if M *es factible* **then**

    El algoritmo acaba y saca como output el emparejamiento;

  else

    Sea A la universidad con el cociente entre el número asignado de estudiantes y su cota inferior mínimo ;

    $U \leftarrow U \setminus A$ *(Al vector U le quitamos la universidad A) ;*

until *Hasta encontrar un emparejamiento estable factible o mientras U sea no vacío*;

Si U este vacío, saca un mensaje diciendo que no se encontró el emparejamiento;

Como afirmamos arriba la heurística podría no llegar a una solución a pesar de que para ese problema en particular si exista una asignación estable, demostramos esto a partir del siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2. Biró y cols. (2010) Supongamos que tenemos a 3 solicitantes α, β, γ y a dos universidades A, B. A tiene como cota inferior y superior al número 2; B tiene como cota inferior y superior al número

3. Sus preferencias son las siguientes:

$$\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,1 & ,1 \\ 1,2 & 2,1 \\ , & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicamos el algoritmo de Gale Shapley para las dos universidades abiertas obteniendo la asignación:

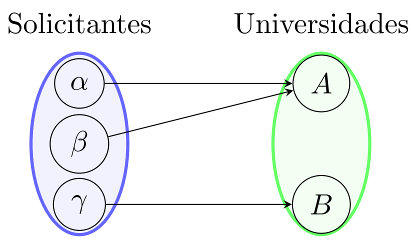


Figura 6.4: Primera iteración.

La asignación es estable pero claramente no es factible porque A y B no respetan sus cotas. En un segundo paso cerramos A porque es la universidad con el cociente entre el número asignado de estudiantes y su cota inferior mínimo (su cociente es $\frac{1}{2}$ y el de B es $\frac{2}{3}$). Aplicamos el algoritmo de Gale Shapley considerando únicamente B abierto obteniendo la asignación:

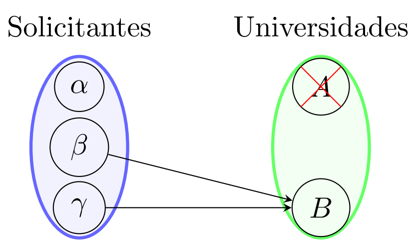


Figura 6.5: Segunda iteración.

La asignación es estable pero claramente no es factible porque B no respeta sus cotas. El algoritmo saca un mensaje diciendo que no se encontró un emparejamiento estable. Uno a partir de esto podría concluir que este no existe para el problema, pero si abrimos A y cerramos B obteniendo la asignación:

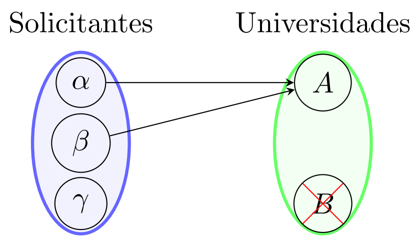


Figura 6.6: Asignación estable.

Esta asignación es estable y factible lo que muestra que la heurística podría no llegar a una solución a pesar de que para ese problema en particular si exista una asignación estable. $\triangle$

Concluimos que el problema de admisión a universidades con cotas inferiores es extremadamente difícil de resolver, en lo que resta de la tesis hablaremos del problema de admisión a universidades considerando cotas superiores comunes.

Capítulo 7

Cotas comunes

Retomamos el problema de admisión a universidades igual que como se plantea en el capítulo 4, se agrega la restricción de que varias universidades en conjunto pueden compartir cotas superiores, estas restricciones son de carácter natural porque las universidades pueden tener recursos compartidos como es el caso, por ejemplo, de becas gubernamentales . En particular se le agregan la siguiente restricción al problema:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{j,k} \cdot x_{i,j} \leq N_p \tag{7.1}$$

donde

$$w_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si la universidad } j \text{ es parte de la restricción } k. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{7.2}$$

para toda $k = 1, 2, \ldots, p$ [1].
Las universidades tienen cotas superiores comunes.

Para simplificar la notación del problema, en lugar de usar la matriz de preferencias definida por 1.1 utilizaremos una lista de preferencias que tiene la ventaja de ser un poco más simple para expresar las cotas comunes.

[1] Donde p es el número de restricciones comunes.

Definición 7.1. Definimos la **lista de preferencias** para un problema con n estudiantes, con m universidades y p restricciones como una función P de tal forma que si α es un estudiante $P(\alpha)$ es el orden de preferencia que le asigna a las universidades, si A es una universidad $P(A)$ es el orden de preferencia que le asigna a los estudiantes, salvo que el primer lugar denota la cota superior de A. Además, si denotamos a $\mathcal{C}$ como el **sistema de conjuntos de universidades** que está conformado por los conjuntos de universidades que forman cada restricción y denotamos a C_k como el conjunto de universidades que forman parte de la restricción común k para todo $k = 1, 2, \ldots, p$. Entonces $P(C_k)$ representa el orden de preferencias de la cota C_k para todo $k = 1, 2, \ldots, p$.

Es un poco contraintuitivo definir las preferencias en términos de conjuntos de universidades, esto es necesario, por ejemplo, en situaciones cuando se alcanza la cota común entre dos universidades, pero ninguna alcanza su cota superior. Si sólo nos basamos en las listas de preferencia de las dos universidades no es claro bajo qué criterio se aceptan o se rechazan nuevos estudiantes. Además, para que exista consistencia en los órdenes de preferencias hacemos los siguientes supuestos:

1. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe una universidad A que pertenece a C_k y además existe un estudiante α que pertenece a $P(A)$. Entonces, α pertenece a $P(C_k)$.

2. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe un estudiante α que pertenece a $P(C_k)$. Entonces, existe una universidad A que pertenece a C_k tal que α pertenece a $P(A)$.

3. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existe una universidad A que pertenece a C_K y además existen dos estudiantes α y β de tal forma que A prefiere a α que a β. Entonces, α aparece antes que β en $P(C_K)$.

4. Si para alguna $k = 1, 2, \ldots, p$ fija, existen dos estudiantes α y β, de tal forma que α aparece antes que β en $P(C_k)$. Entonces, toda universidad A que pertenece a C_k prefiere tener a α que a β en caso de que aparezcan en $P(A)$.

Damos un ejemplo de una lista de preferencias para dejar todo un poco más claro, en general la idea es la misma que las matrices de preferencias.

Ejemplo 7.1. Biró y cols. (2010) Supongamos que tenemos tres solicitantes α, β, γ, cuatro universidades A, B, C, D y dos conjuntos de universidades $\{A, B\}, \{A, C\}$ que forman cotas comunes. La lista de preferencias sigue la siguiente regla:

$$P(A) = 1 : \alpha$$

$$P(\alpha) = A, D$$

$$P(B) = 1 : \beta \qquad P(\{A, B\}) = 1 : \beta, \alpha$$

$$P(\beta) = B$$

$$P(C) = 1 : \gamma \qquad P(\{A, C\}) = 1 : \gamma, \beta$$

$$P(\gamma) = D, C$$

$$P(D) = 1 : \alpha, \gamma$$

Aquí (solo para dar algunos ejemplos) podemos ver que α tiene en su lista primero a A y luego a D. C únicamente quiere a γ como su alumno y además tiene como cota superior al número uno. Las cotas comunes son consistentes de acuerdo con lo planteado anteriormente.

La primera pregunta que uno podría hacerse es si siempre existe una asignación estable. Recordemos que en el caso de cotas inferiores no siempre existe y por lo tanto podría aquí suceder lo mismo. El siguiente resultado muestra que de hecho no siempre existe una asignación estable para el problema.

Teorema 7.2. *Biró y cols. (2010) Dada una instancia del problema de admisión a universidades con cotas comunes podría no existir solución al problema de encontrar una asignación estable.*

Demostración. Supongamos que para lista 7.1 existe una asignación estable M. Si α no está emparejada llegamos a una contradicción porque D tiene a α primero en su lista y no está bloqueada por ninguna restricción común. es decir, no existe razón para que α no esté asignada.

Si α esta asignada a A tenemos que entonces γ esta asignada a D y además por la restricción común de $\{A, B\}$, β queda sin estar asignado lo cual contradice la hipótesis de estabilidad porque $\{A, B\}$ prefiere tener a β que a α.

Si α este asignado a D entonces γ está asignado a C lo que implica que β queda sin estar asignado. $\{A, B\}$ y A no cumplen con su cota superior (tienen espacio para más alumnos) y α prefiere estar en A que en D, por lo tanto, esta asignación no es estable y de hecho concluimos que no existen asignaciones estables para este problema.

Notamos que si β no fuera parte del problema entonces si asignamos a α a A y asignamos a γ a D tenemos una asignación estable, por lo tanto, concluimos que a veces sí existe una asignación estable. □

A partir de este ejemplo queda claro que si extendemos el problema agregando cotas comunes perdemos la garantía de existencia de un emparejamiento estable en nuestro problema. La pregunta clave aquí es si existe alguna condición que garantice la existencia de un emparejamiento estable para cualquier problema de este tipo o si existe algún algoritmo para llegar a uno de forma eficiente, el siguiente resultado muestra que esta pregunta es mucho más complicada de lo que parece.

Teorema 7.3. *Biró y cols. (2010) El problema de ver si una instancia del problema de admisión a universidades con cotas comunes admite un emparejamiento estable es NP-completo.*

Demostración. [2] Dado que el problema claramente es de decisión y además dada una solución es fácil ver si está es correcta o no, este pertenece a la clase NP.

Para ver que el problema es NP-completo reduciremos el problema del matrimonio estable con listas incompletas con empates a esté[3] (sabemos que este problema es NP-completo por el teorema 5.5). Para este caso supondremos que sólo existen empates en las listas de las mujeres, estos son de a lo más longitud 2 y en caso de existir un empate para una mujer arbitraria w_j, esté ocupa toda la lista de w_j y al menos uno

[2] La demostración se parece bastante a la del teorema 6.1.

[3] Recordemos que el problema aquí es ver si existe un emparejamiento estable con todos los hombres y todas las mujeres emparejadas.

de los dos hombres pertenecientes a esté tiene a w_j hasta arriba de su lista[4].

Sea I una instancia del problema del emparejamiento estable con listas incompletas con empates, sean $U = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ la lista de hombres en el problema y sean $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ las mujeres en el problema. Sea W_0 un subconjunto de W que contiene a todas las mujeres con un empate de tamaño dos en su lista. Construiremos una instancia I' del problema de admisión a universidades con cotas comunes a partir de I.

Cada hombre en I corresponde a un solicitante en I' y sus listas de preferencia son idénticas en ambas instancias. Si las mujeres pertenecen a $W \backslash W_0$ entonces representan a una universidad en I' y cuentan con una cota superior igual al número 1, sus listas de preferencia son idénticas en I y en I'.

El truco está con las mujeres en W_0, supongamos que tenemos una mujer w_j en W_0 y supongamos que $m_{j,1}$ y $m_{j,2}$ son los dos hombres que conforman este empate. Creamos entonces dos solicitantes adicionales b_j^1, b_j^2, seis universidades $c_j^1, c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6$ y cuatro conjuntos de universidades $\{c_j^1, c_j^2\}, \{c_j^2, c_j^3\}, \{c_j^4, c_j^5\}, \{c_j^5, c_j^6\}$ con cotas comunes y las siguientes preferencias:

---

[4] Dadas estas condiciones el problema sigue siendo NP-completo Irving y cols. (2002)

$$P(c_j^1) = 1 : m_{j,1}$$

$$P(c_j^2) = 1 : b_j^1 \qquad P(\{c_j^1, c_j^2\}) = 1 : b_j^1, m_{j,1}$$

$$P(b_j^1) = c_j^5, c_j^2 \qquad P(c_j^3) = 1 : b_j^2 \qquad P(\{c_j^2, c_j^3\}) = 1 : b_j^1, b_j^2$$

$$P(b_j^2) = c_j^3, c_j^6 \qquad P(c_j^4) = 1 : m_{j,2} \qquad P(\{c_j^4, c_j^5\}) = 1 : b_j^1, m_{j,2}$$

$$P(c_j^5) = 1 : b_j^1 \qquad P(\{c_j^5, c_j^6\}) = 1 : b_j^2, b_j^1$$

$$P(c_j^6) = 1 : b_j^2$$

Para simplificar notación, sea A_1 los aplicantes de la forma $m_{j,k}$ y sea A_2 los aplicantes de la forma b_j^k. Finalmente, sustituimos a w_j en la lista de $m_{j,1}$ por $c_{j,1}$ y sustituimos a w_j en la lista de $m_{j,2}$ por $c_{j,4}$. Afirmamos que I tiene un emparejamiento estable completo M si y sólo si I' tiene una asignación estable M' en la que cada solicitante en A_1 está asignado a alguna universidad. Suponiendo que en M tenemos que m_i y w_j están emparejados, la relación entre las dos instancias sigue las siguientes reglas:

- Si w_j pertenece a $W \setminus W_0$, entonces m_i está asignado a w_j en M'.
- Si w_j pertenece a W_0, entonces $m_{j,1}$ está emparejado con w_j si y sólo si en M' tenemos que $m_{j,1}$ está asignado a c_j^1, b_j^2 está asignado a c_j^3 y b_j^1 está asignado a c_j^5.
- Si w_j pertenece a W_0, entonces $m_{j,2}$ está emparejado con w_j si y sólo si en M' tenemos que $m_{j,2}$ está asignado a c_j^4, b_j^2 está asignado a c_j^6 y b_j^1 está asignado a c_j^2.

Supongamos que existe un emparejamiento estable M en I, es claro por construcción que la asignación M' resultante es también estable y que además cada solicitante en A_1 es asignado a alguna universidad.

Supongamos que existe una asignación estable M' en I' en el que todos los solicitantes en A_1 están emparejados.

Para completar la reducción, es necesario construir una parte adicional de I' como sigue: Para cada solicitante a_i en A_1 construimos dos solicitantes adicionales z_i^1, z_i^2, cuatro universidades $d_i^1, d_i^2, d_i^3, d_i^4$ con cotas comunes $\{d_i^1, d_i^2\}$ y $\{d_i^2, d_i^3\}$. Las listas de preferencias y cotas son como siguen:

$$P(d_i^1) = 1 : z_i^1$$

$$P(z_i^1) = d_i^1, d_i^4 \qquad P(d_i^2) = 1 : a_i \qquad P(\{d_i^1, d_i^2\}) = 1 : a_1, z_i^1$$

$$P(z_i^2) = d_i^4, d_i^3 \qquad P(d_i^3) = 1 : z_i^2 \qquad P(\{d_i^2, d_i^3\}) = 1 : z_i^2, a_i$$

$$P(d_i^4) = 1 : z_i^1, z_i^2$$

Finalmente añadimos a d_i^2 al final de la lista de preferencias de a_i y afirmamos que I tiene un emparejamiento estable completo si y solo si I' tiene emparejamiento estable. Lo primero que notamos es que la construcción es casi idéntica a la usada en la demostración de 7.2 entonces podemos usar argumentos similares. Notamos que en I' cada solicitante en A_i está emparejado a la parte no adicional de I' porque si no la parte adicional bloquearía la estabilidad (ejemplo teorema) y además para garantizar estabilidad si cada universidad está emparejada con la parte no adicional de I' agregamos las parejas (z_i^1, d_i^1) y (z_i^2, d_i^4) al emparejamiento (al igual que en 7.2).

Por lo tanto, podemos concluir que el problema de ver si una instancia del problema de admisión a universidades con cotas comunes admite un emparejamiento estable es NP-completo.

□

Además de no siempre existir una asignación estable sucede algo bastante problemático, para un mismo problema podrían existir dos emparejamientos estables en los que el conjunto de alumnos admitidos sea distinto en cada asignación. Esto tal vez quiere decir que es necesario introducir algún otro criterio para resolver el problema. El siguiente ejemplo demuestra esta afirmación.

Ejemplo 7.2. Biró y cols. (2010) Supongamos que tenemos 4 estudiantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 6 universidades A, B, C, D, E, F y cuatro conjuntos de universidades $\{A, B\}, \{B, C\}, \{D, E\}, \{E, F\}$ con las siguientes listas de preferencias:

$$P(A) = 1 : \alpha$$

$$P(\alpha) = A$$

$$P(B) = 1 : \beta \qquad P(\{A, B\}) = 1 : \beta, \alpha$$

$$P(\beta) = E, B$$

$$P(C) = 1 : \gamma \qquad P(\{B, C\}) = 1 : \beta, \gamma$$

$$P(\gamma) = C, F$$

$$P(D) = 1 : \delta \qquad P(\{D, E\}) = 1 : \beta, \delta$$

$$P(\delta) = D$$

$$P(E) = 1 : \beta \qquad P(\{E, F\}) = 1 : \gamma, \beta$$

$$P(F) = 1 : \gamma$$

Es fácil ver que las siguientes dos asignaciones son estables.

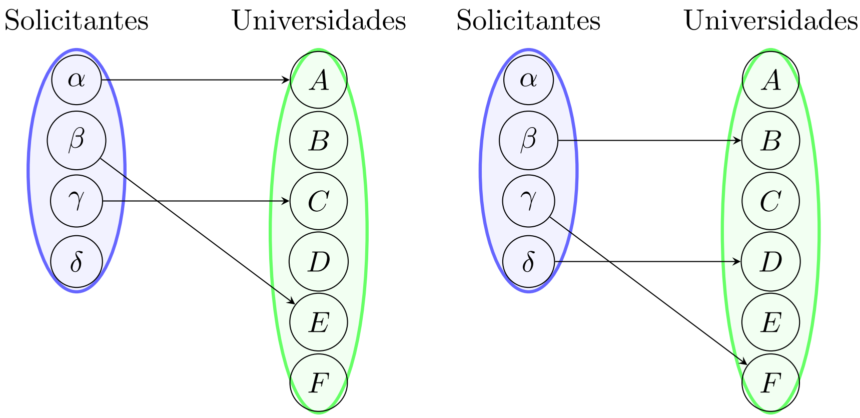


Figura 7.1: Asignaciones estables.

△

En lo que sigue de la tesis analizaremos una variante del problema con cotas comunes en el que las restricciones tienen la propiedad de ser anidadas. Veremos que este problema resulta mucho más sencillo de resolver y que además tiene propiedades bastante interesantes.

Capítulo 8

Cotas comunes anidadas

Retomamos el problema de admisión a universidades con cotas comunes igual que como se plantea en el capítulo 7, se agrega la restricción de que los conjuntos de universidades que forman una restricción deben de ser anidados, en términos matemáticos decimos que:

Definición 8.1. Un sistema de conjuntos de universidades $\mathcal{C}$ es **anidado** si para todo par de conjuntos S, S' en $\mathcal{C}$ se tiene que la intersección de ellos es vacía o que alguno de los dos conjuntos contiene al otro.

En términos simples, es cuando las restricciones comunes tienen una naturaleza jerárquica, este tipo de esquema suele suceder cuando los presupuestos se dividen por departamento, facultad y tipo de universidad. En particular podemos ver que las restricciones (aprovechando que son jerárquicas) pueden ser representadas por medio de un árbol o un bosque (dependiendo de si el universo de universidades es parte de C) como el siguiente ejemplo muestra.

Ejemplo 8.1. Supongamos que tenemos cinco universidades $c_1, \ldots, c_5$, diez solicitantes $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ y 3 conjuntos de universidades con restricciónes comunes $\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{c_4, c_5\}$ (es claro que son anidados los conjuntos). Definimos las cotas de cada universidad usando la función q[1] dada por la regla:

[1] Para simplificar notación en lo que resta de este trabajo usaremos una función para decir cuál es la cota superior de cada conjunto o universidad; en particular, si la cota superior de A es b entonces $q(A) = b$.

$$q(c_1) = 3 \qquad q(c_2) = 3 \qquad q(c_3) = 3 \qquad q(c_4) = 2$$

$$q(c_5) = 2 \qquad q(\{c_1, c_2\}) = 5 \quad q(\{c_1, c_2, c_3\}) = 7 \quad q(\{c_4, c_5\}) = 3$$

Entonces la representación como bosque de las restricciones queda así:

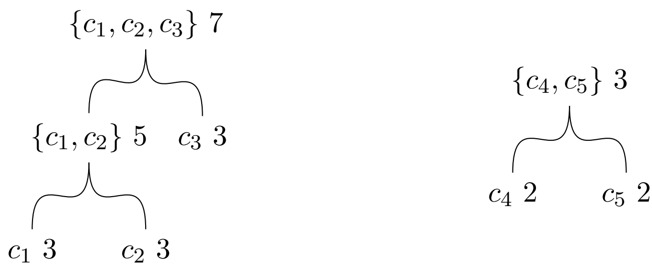


Figura 8.1: Bosque representando las restricciones del ejemplo 8.1

Falta mencionar que en cada nodo aparece el conjunto de universidades junto con su cota superior. El nodo padre de cada árbol es el **grupo** de las universidades pertenecientes a ese árbol. $\triangle$

Existen varias definiciones nuevas que nos gustaría agregar al problema, para verlo en términos más simples.

Definición 8.2. Algunos terminos que utilizaremos son los siguientes:

1. Decimos que M es la **función de emparejamiento** si dado una asignación M[2] tenemos que para un aspirante a arbitrario, $M(a)$ es la universidad a la que es asignado en M y además para cada conjunto de universidades c, $M(c)$ es el conjunto de solicitantes asignados a c en M.

2. Decimos un conjunto de universidades c está **lleno** si la cardinalidad de $M(c)$ es igual a $q(c)$.

[2] El abuso de notación es para confundir al lector lo menos posible.

3. Decimos que un conjunto de universidades esta **subsuscrito** si no esta lleno.

4. Una universidad está **libre** si ningún conjunto que la contiene está lleno, es lo mismo a que su grupo está libre. Si no está libre decimos que está **restringida**. Las universidades libres pueden admitir a uno o más aplicantes sin violar ninguna restricción.

5. Dada una universidad c restringida dada un emparejamiento M, decimos que $Cs_M(c)$ es el **conjunto crítico** de c dado M si es el conjunto de universidades lleno minimal que contiene a c. Esto quiere decir que dado el árbol de restricciones donde aparece c, $Cs_M(c)$ es el nodo padre de c más abajo (no existen nodos llenos entre él y c) con la propiedad de que está lleno.

Este problema difiere con el del capítulo 7 en el sentido de que sí es fácil de resolver.A continuación veremos un algoritmo para obtener una asignación estable,, mostraremos su convergencia y veremos cuál es su complejidad. Al igual que en el capítulo 3 veremos que hay algoritmos óptimos para los solicitantes y algoritmos óptimos para las universidades, se muestra primero el de los solicitantes.

8.1. Algoritmo orientado a los solicitantes

Algoritmo 7: Algoritmo orientado a los solicitantes

input : Lista de restricciones y preferencias de las universidades y los aspirantes

output: Un emparejamiento.

```
while Existe un aspirante a que no esta emparejado y que
  no haya sido rechazado por todas las universidades. do
    c es la primera universidad de la lista de a a la que no ha
      solicitado;
    if c está libre then
        asignamos a a c;
    else
        Sea S el conjunto crítico de C;
        if Si a es preferido en la lista del grupo de c al peor
          aspirante b que está asignado en alguna universidad
          en S then
            Sea d la universidad a la que está asignado b;
            Eliminamos (b, d) del emparejamiento;
            Agregamos (a, c) al emparejamiento;
        else
            a es rechazado por c;
```

Los siguientes resultados hablan sobre la convergencia y complejidad del algoritmo.

Lema 8.3. *Si alguna universidad c en el algún punto del algoritmo orientado a los aspirantes queda restringida, entonces no vuelve a estar libre.*

Demostración. En cualquier iteración del algoritmo si alguna universidad c con un conjunto crítico S, si el conjunto S que subsuscrito sería porque alguna universidad en S rechazó a algún solicitante actual a. Si esto sucede es porque algún conjunto S' que contiene a S estaba lleno y rechazó a a para aceptar a un mejor solicitante en su lista. De esta forma c queda restringida por S'. □

Lema 8.4. *Si M es un emparejamiento bajo el cual c está restringido y M' es el emparejamiento obtenido en el siguiente paso del algoritmo orientado a los solicitantes. Entonces, el solicitante más abajo en la lista en $Cs_{M'}(c)$ no puede ser menos preferido que el menos preferido en $Cs_M(c)$.*

Demostración. Primero notamos que si S y S' son dos conjuntos de universidades y S es un subconjunto de S' entonces el peor solicitante en S está a lo más igual de alto en la lista de preferencias que el peor solicitante en S'.

Supongamos que en el siguiente paso de algoritmo, el solicitante b solicita a la universidad d y es rechazado, como M' queda idéntico a M el lema queda como verdadero para este caso.

En el otro caso, supongamos que d acepta a b para ser parte de su universidad. Sea S el conjunto crítico de c en el emparejamiento M, sea S' el conjunto crítico en S', sea T el conjunto crítico de d en M'. Consideramos cinco casos:

1. Supongamos d estaba libre en M, esto implica directamente que $S = S'$ y el resultado sigue de esto.

2. Supongamos que la intersección entre S y T es igual al vacío, de aquí sale directo que en la iteración S no cambia y por lo tanto $S = S'$ y el resultado sigue de esto.

3. Supongamos que T es un subconjunto propio de S, entonces c no pertenece a T (porque esto contradecería la hipótesis de que S es el conjunto crítico de c). De aquí sigue que $S = S'$ y como los cambios de M a M' solo suceden en T los solicitantes emparejados en $S \setminus T$ son los mismos a los asignados en $S' \setminus T$ y en T por como funciona el algoritmo el peor alumno asignado en M' debe de ser mejor al peor alumno asignado en M. De aquí se sigue que esto es cierto para S y S'.

4. Supongamos que T es igual a S. Aquí tenemos que la cantidad de alumnos asignados bajo M en S son iguales a la cantidad de alumnos asignados bajo M' a S y simultáneamente son iguales a la cota superior de S. En este caso existe la posibilidad de que

S' sea un subconjunto de S pero por la observación realizada al principio de la demostración concluimos que para este caso el lema es verdadero.

5. Por último, supongamos que S es un subconjunto propio de T. Si el solicitante rechazado no se encontraba asignado en S entonces el resultado se sigue directo de que los asignados en S bajo M y en S' bajo M' no cambian. En otro caso, debe de suceder que la cantidad de alumnos asignados en S bajo M' son estrictamente menores a la cantidad de alumnos asignados a S bajo M y que esto además sucede para toda S^* con la propiedad de que S es un subconjunto de S^*, S^* es un subconjunto de T y d no pertenece a S^*. Además sabemos que la cantidad de alumnos asignados bajo M son iguales a la cantidad de alumnos asignados bajo M' a toda S^* que cumple que S es un subconjunto de S^*, S^* es un subconjunto de T y d pertenece a S^*, pero la cantidad de alumnos asignados es estrictamente menor a su cota superior. Esto implica que el nuevo conjunto crítico de c (S') es igual a T, como S' es el conjunto crítico de d y en la iteración del algoritmo rechazó a su peor aplicante, se sigue que el lema es correcto para este caso.

Por lo tanto, si M es un emparejamiento bajo el cual c está restringido y M' es el emparejamiento obtenido en el siguiente paso del algoritmo orientado a los solicitantes, entonces el solicitante más abajo en la lista en $Cs_{M'}(c)$ no puede ser menos preferido que el menos preferido en $Cs_M(c)$. □

El siguiente teorema habla de la convergencia de este algoritmo y muestra un resultado en términos de optimalidad.

Teorema 8.5. *Dado un problema de admisión a universidades con cotas comunes anidadas, el emparejamiento M encontrado por el algoritmo orientado a los solicitantes es estable y además cumple que cada solicitante se encuentra en la mejor asignación posible que en cualquier otra asignación estable.*

Demostración. Supongamos que M no es estable y por lo tanto existe un aspirante a y una universidad c que se prefieren a su asignación

actual. Como a prefiere a c, podemos ver que c rechazó a a en algún paso del algoritmo. En esa iteración del algoritmo c estaba restringida y prefirió a algún solicitante b (b aquí siendo el menos preferido entre los asignados) sobre a (de acuerdo a la lista de su grupo). Por los lemas 8.3 y 8.3 c se mantiene restringida en las iteraciones posteriores y el peor solicitante de su conjunto crítico no puede ser menos preferido que b. Por lo tanto, llegamos a una contradicción y concluimos que M es estable.
Ahora, supongamos que el algoritmo no es óptimo para los solicitantes eso es existen un solicitante a y una universidad c emparejados en M, además existe otra asignación estable M' en donde a está asignado a c' y a prefiere a c' sobre c (adicional a esto supongamos que en el algoritmo es la primera asignación estable que es rechazada). Como a prefiere a c' podemos concluir que c' rechazó a a en algún punto del algoritmo.
Sea X el emparejamiento obtenido antes de que un solicitante a^* solicita a alguna universidad c^* resultando en que c' rechazara a a. Sea $S = Cs_X(c^*)$ el conjunto crítico de c^* en X y sea $X^* = X \cup \{(a^*, c^*)\}$. Mostraremos que existe un aplicante d y una unversidad d tales que:

1. d está asignado a b en X^*.
2. b no está asignado a d en M'.
3. d está libre en M' o S es un subconjunto de $Cs_{M'}(d)$.

Primero, notamos que la cantidad de alumnos asignados a S en M' es menor o igual que la cota de S y que está a su vez igual a la cantidad de alumnos asignados a S en X. Además podemos ver que la cantidad de alumnos asignados a S en X^* excede a la cota superior de S por 1, como la cota se excede a partir de agregar un nuevo par podemos ver que para cualquier subconjunto propio S_i de S se cumple que la cantidad de personadas asignadas a S_i en X^* es menor o igual a la cota de S_i (porque $S = Cs_X(c^*)$), por lo tanto S es es el conjunto minimal que no cumple la cota. Esto implica que alguno de sus hijos (en el sentido de las restricciones) S_2 satisface que la cantidad de personas emparejadas en M' es menor estricto a la cantidad de personas emparejadas en X^* que es menor igual a su cota. Por la misma razón, podemos construir una sucesión en donde $S = S_1$, S_{i+1} es un subconjunto propio de S_i, S_k

es igual a $\{d\}$ y cada S_i satisface la propiedad anterior. Finalmente sea b el solicitante que se encuentra asignado en X^* a d pero en M'.

Ahora, notamos que b está en mejor posición que a, de otra forma en la siguiente iteración del algoritmo hubieran rechazado a b y no a a. Entonces, como b no está asignado en M' o prefiere a d que a su respectiva universidad en M', como S es un subconjunto de $Cs_{M'}(d)$ se sigue que la pareja (b, d) ocasiona que M' no sea estable. Por lo tanto llegamos a una contradicción y concluimos que el algoritmo es óptimo para los aplicantes. $\square$

Además a esto podemos ver que el algoritmo siempre es consistente sin importar en qué orden se itere.

Corolario 8.6. *Cualquier ejecución del algoritmo orientado a los solicitantes llega a la misma asignación estable.*

Demostración. Como el algoritmo es óptimo sin importar el orden sobre el que se itera, podemos concluir que siempre se llega a la misma asignación estable. $\square$

A partir de esto podemos estudiar cuál es la diferencia principal entre pedir que las cotas comunes sean anidadas y no tener ninguna restricción sobre éstas. El siguiente resultado muestra como el comportamiento de éste problema es mucho más amigable en terminos algorítmicos.

Teorema 8.7. *La complejidad del algoritmo orientado a los aplicantes es del orden de $kL + pn$ donde L es la cantidad de parejas aceptables, k es la longitud máxima de algún árbol en el bosque de restricciones, n es el número de solicitantes y p e el número de conjuntos acotados.*

Demostración. El primer término viene de que el primer ciclo del algoritmo es realizado en un orden de L veces y con la excepción de actualizar el peor solicitante cada paso en el ciclo es realizado en un orden de k veces.

Ahora, supongamos que el número de universidades es en el orden de n y que la estructura del bosque de restricción puede ser acomodada en un orden de pn. En cada parte del bosque guardamos las siguientes cosas:

- Quién es el padre del nodo.
- La cota común del nodo.
- El número de solicitantes asignados al nodo.
- La lista de preferencias del nodo y su actual peor solicitante.

Notamos que esta información solo es necesaria en el caso de que los nodos estén llenos.

Para determinar si una universidad esté llena, lo único que es necesario es recorrer ese nodo hacia arriba y ver si algún nodo cumple su cota superior, esto se puede realizar en un orden k de operaciones.

Cuando un nuevo par es agregado o eliminado de la asignación se debe de agregar/eliminar en todos los nodos que estén por arriba de la asignación, esto se puede realizar en un orden k de operaciones.

Por el lema 8.4 el peor asignado en cualquier nodo debe de ser mejor o igual que el peor asignado en la última iteración. Entonces, el actualizar un nodo después de que está lleno puede ser realizado revisando la lista de solicitantes hacia arriba en la lista de preferencias a partir del peor solicitante asignado. Cada vez que sucede esto, cada nodo en el bosque es visitado al menos una vez y por lo tanto se realiza en un orden de pn veces.

Por lo tanto, concluimos que el orden del algoritmo orientado a los solicitantes es de $kL + pn$.

□

8.2. Algoritmo orientado a las universidades

Igual que en el caso del matrimonio estable la idea de optimalidad para los solicitantes se puede reorientar a optimalidad para las universidades, usualmente las que escojen con qué alumnos quedarse son las universidades y resulta más natural este tipo de optimalidad. En lo que sigue del capítulo se muestra un algoritmo y se muestran algunos resultados sobre el mismo. Para empezar es necesario explicar las siguientes definiciones:

1. Decimos que un solicitante es **no tratado** para un conjunto S si ninguna universidad en S le ha ofrecido un puesto.

2. Sea a algún solicitante que es no tratado por alguna universidad libre c en G. Decimos que la pareja (c, a) constituye una **oferta líder**.

A continuación mostramos el algoritmo orientado a las universidades, la diferencia importante entre este algoritmo y el otro es que aquí las universidades le ofrecen los puestos a los alumnos y no al revés.

Algoritmo 8: Algoritmo orientado a las universidades

input : Lista de restricciones y preferencias de las universidades y los aplicantes
output: Un emparejamiento.

while *Existe un grupo de universidades G que esté subsuscrito y existe una universidad libre con un solicitante no tratado.* **do**
    Sea (c, a) la oferta líder en ese punto; Marcamos a a como tratado por c; **if** *a no está asignado* **then**
        Agregamos (a, c) a la asignación;
    else
        if *a prefiere a c que a su universidad actual d* **then**
            Quitamos a (a, d) del emparejamiento; Agregamos (a, c) a la asignación;
        else
            a rechaza a c;

El siguiente lema y teorema nos ayudan a entender qué tan bueno es este algoritmo y cuál es la diferencia central con el algoritmo orientado a los solicitantes.

Lema 8.8. *Si en algún punto del algoritmo, una universidad d en un grupo G le ofrece un puesto a un solicitante b entonces si se cumple alguna de las siguientes dos cosas:*

1. *Si a algún otro solicitante a (superior a b en la lista de G) no se*

le ofrece un puesto en alguna universidad c en G, donde a es no es marcado como tratado por c.

2. *Si a b no le ofrecen un puesto en c (superior a d en la lista de b), donde b no es marcado como tratado por c.*

Entonces, c está restringido y su conjunto crítico no se encuentra en el camino entre d y la parte de arriba del árbol.

Demostración. Por la definición de la oferta líder podemos directamente concluir que c está restringido. Como d está libre (por hipótesis) sabemos que no es parte de ningún conjunto restringido y por lo tanto tampoco de algun conjunto crítico. □

Teorema 8.9. *El emparejamiento M obtenido por el algoritmo orientado a las universidades es estable. Si algún solicitante a queda asignado a alguna universidad c en M, entonces no existe otra asignación estable en la que a no quede emparejado o en la que quede asignado a una peor universidad en su lista. Si alguna universidad c tiene asignados a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en M, entonces no existe ningún solicitante a mejor que ellos en ningún otro emparejamiento estable.*

Demostración. Supongamos que M es no estable y que es bloqueado por un solicitante a y una universidad c, esto es que ambos se prefieren a sus respectivas asignaciones. Sabemos que c no le ofreció un lugar a a durante el algoritmo porque los solicitantes solo pueden mejorar mientras progresa el algorítmo (no haría sentido que empeoren). De aquí sigue que c debe tener un conjunto crítico S al finalizar el algoritmo.

Como (a, c) bloquean la estabilidad entonces deben de existir una universidad d en S y un solicitante b que es asignado a d en M tal que a es preferido a b y a prefiere a c que a su asignación actual. Aquí la contradicción es clara porque c debió de haber ofrecido un puesto primero a a que a b y como a prefiere a c entonces podemos concluir que M es estable.

Supongamos que existe un emparejamiento estable M' en donde existe un solicitante a que no está asignado o donde está asignado a una peor universidad que en M (supongamos que en M está asignado a c). Supongamos que cuando a c le ofreció un puesto a a ésta fue la primera vez que un solicitante recibió una oferta que era mejor a su estatus en otra asignación estable. Llamaremos a esta oferta **superior**. Para evitar que (a, c) bloquee la estabilidad de M' es necesario suponer que el conjunto crítico de c en M' está lleno con solicitantes superiores a a.

Sea M^* el emparejamiento obtenido por el algoritmo antes de ofrecerle un puesto a a en c. Como c estaba libre en ese momento sabemos que la cantidad de alumnos asignados a S en M^* en ese momento era estrictamente menor que la cantidad de personas asignadas a S en M' y que está a su vez es igual a la cota superior de S. Esto implica que algún hijo S_2 de S cumple que la cantidad de personas asignadas a S_2 en M^* es menor a la cantidad de personas asignadas en M' que ésta a su vez es menor o igual a la cota de S_2. Con el mismo razonamiento podemos construir una sucesión en donde $S = S_1$, S_{i+1} es un subconjunto propio de S_i, S_k es igual a $\{d\}$ y cada S_i satisface la propiedad anterior. Finalmente sea b algún solicitante asignado a d en M' pero no en M^*. Se sigue de la construcción que d es libre en M^* y que b está mejor calificada que a. Por lo tanto, b debe de estar emparejada en M^* con una universidad e a la que prefiere sobre d. Por lo tanto, d recibió una oferta de e antes que a de c, lo que contradice el supuesto de que fue el primer solicitante que recibió una oferta que era mejor a su estatus en otra asignación estable. Podemos concluir que a no está asignado a una peor universidad que c en ningún otro emparejamiento estable y que no existe algún emparejamiento estable en el que a no esté asignado.

Finalmente, supongamos ahora que a está asignado a c en M y que b no esta asignado a c en M pero si en otro emparejamiento estable M' y que b está más arriba en la lista de preferencias que a. Entonces por el argumento de arriba b debe de preferir a c sobre su asignación en M o no está asignada, de aquí sigue que (b, c) bloquea la estabilidad de M y por lo tanto llegamos a una contradicción. □

La complejidad del algoritmo se entiende a partir del siguiente resultado, al igual que en el caso del algoritmo orientado a los solicitantes podemos ver que en este caso nos encontramos en una mejor situación que cuando las cotas no eran anidadas.

Teorema 8.10. *El orden del algoritmo orientado a las universidades es de mL donde L es el número de posibles pares y m es la longitud* *máxima de algún árbol en el bosque de restricciones.*

Demostración. Los ciclos del algoritmo se realizan a lo más L veces. En cada iteración se debe de escoger que universidad realiza la solicitud a un solicitante, para hacer esto es necesario escanear un árbol, esto a lo más se realiza en m pasos. Como las universidades nunca están llenas y cada universidad le propone a su siguiente solicitante en su lista (esta operación tiene un paso). El orden del algoritmo es de mL. □

Para dejar más clara la diferencia entre los dos algoritmos mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2. Retomamos las restricciones mostradas en el ejemplo 8.1 y agregamos las siguientes listas de preferencias:

$$P(a_1) = c_1c_2 \qquad P(a_2) = c_1c_4$$

$$P(a_3) = c_2c_1 \qquad P(a_4) = c_2c_4$$

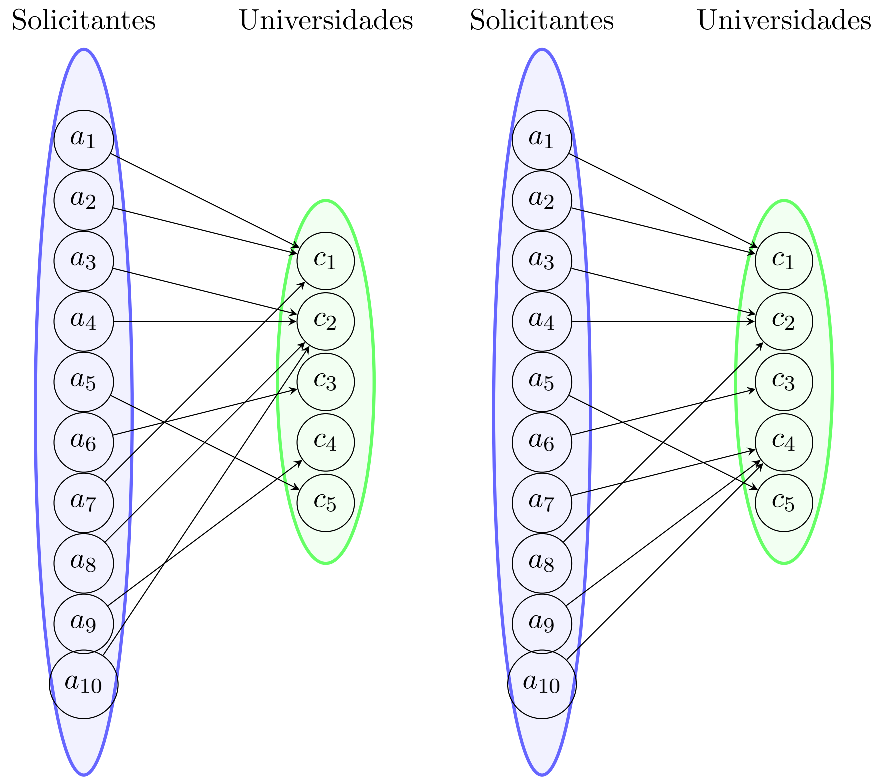
$$P(a_5) = c_5c_3 \qquad P(a_6) = c_3c_4$$

$$P(a_7) = c_1c_4c_5 \qquad P(a_8) = c_2c_1$$

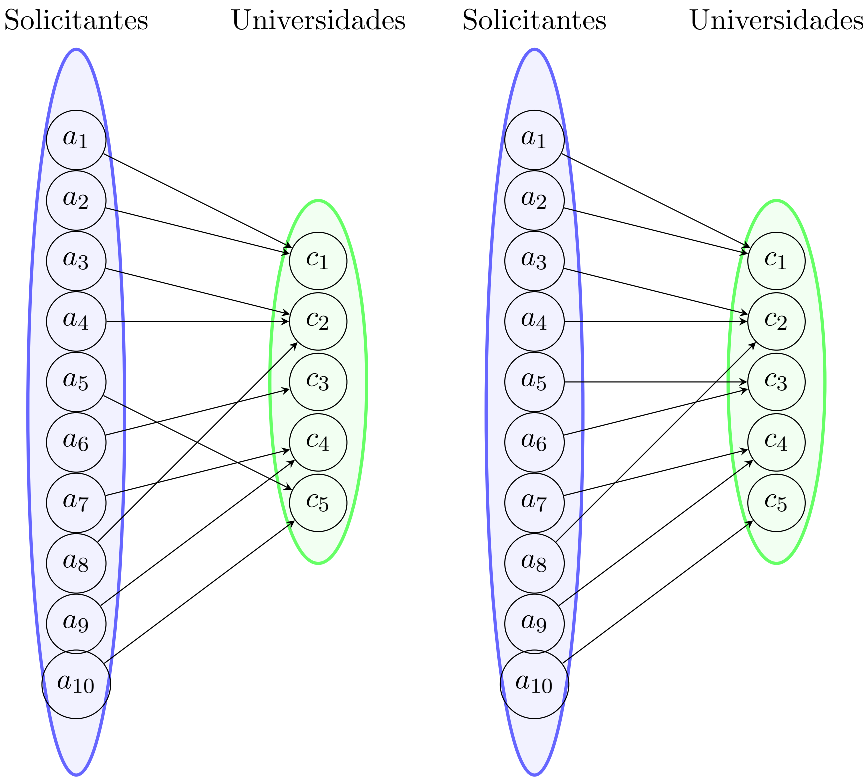
$$P(a_9) = c_4c_1 \qquad P(a_{10}) = c_2c_4c_5$$

El algoritmo orientado a los aplicantes sigue de acuerdo a los siguientes pasos [3].

[3]Se modifico un poco el orden con respecto al código para efectos de la explicación



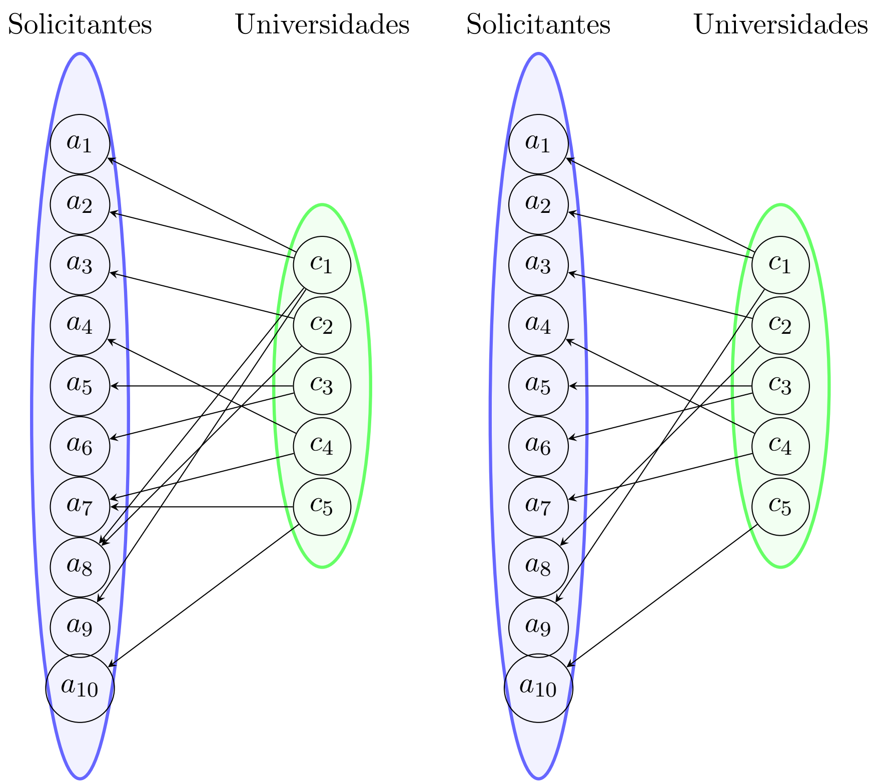
Los 10 aspirantes solicitan a su mejor universidad, a_7 y a_{10} son rechazados porque $\{c_1, c_2\}$ está lleno en el primer caso y en el segundo porque c_2 queda restringida. a_7 solicita a c_4 y a_{10} solicita a c_4, a_{10} es rechazado porque c_4 queda restringida.



$a_1 0$ solicita a c_5, c_5 acepta a a_{10} y rechaza a a_5 porque $\{c_4, c_5\}$ queda lleno. a_5 solicita a c_3 y es aceptada. El algoritmo finaliza.

El algoritmo orientado a las universidades sigue de acuerdo a los siguientes pasos [4].

[4] se modifico un poco el orden con respecto al codigo para efectos de la explicación



Las 5 universidades invitan a los alumnos, a_8 rechaza a c_1 porque prefiere estar en c_2 y a_7 rechaza a c_5 porque prefiere a c_4. El algoritmo finaliza después de esos pasos.

$\triangle$

Una nota importante es que en los emparejamientos c_1 y c_2 tienen un número distinto de alumnos y por lo tanto en este caso no se cumple de la misma manera el teorema de los hospitales rurales.

En lo que sigue de la tesis se introduce una estructura algebraica llamada matroide y se muestran resultados estructurales de este problema.

Capítulo 9

Matroides

El objetivo de este capítulo es dar una breve introducción a qué una matroide, así como mostrar varios resultados interesantes sobre esta estructura y útiles para lo que resta de esta tesis [1].

Un poco de independencia lineal

Sea V un espacio vectorial finito y sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de V con la propiedad que si A pertenece a $\mathcal{F}$ es porque A es linealmente independiente. Cualquier persona que ha tomado un curso en álgebra lineal puede ver que se cumplen las siguientes tres cosas:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{F}$.
2. Si X pertenece a $\mathcal{F}$ y Y es un subconjunto de X, entonces Y pertenece a $\mathcal{F}$.
3. Si X y Y pertenecen a $\mathcal{F}$ y la cardinalidad de X es uno más la cardinalidad de Y, entonces existe un elemento v en $X \setminus Y$ tal que $Y \cup \{v\}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

A partir de esto definimos una matroide de la siguiente forma:

[1] La gran mayoría de los resultados presentados en este capítulo fueron sacados de Welsh (2010), otros resultados fueron sacados de Cook y cols. (s.f.), Lawler (2015) y Papadimitriou y Steiglitz (2016)

Definición 9.1. Una matroide $M = (S, \mathcal{F})$ es un conjunto S de cardinalidad finita y una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S (llamada **conjuntos independientes**) que cumplen los puntos 1, 2 y 3 mencionados arriba.

Todo subconjunto de S que no pertenece a $\mathcal{F}$ es llamado **conjunto dependendiente**.

Un primer resultado es el teorema del aumento, en términos simples es una forma de generalizar el punto 3 para conjuntos independientes que difieren en tamaño más de una unidad.

Teorema 9.2. *Teorema del aumento Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y sean X, Y en $\mathcal{F}$ con la propiedad que la cardinalidad de Y es estrictamente mayor a la cardinalidad de X. Entonces, existe Z subconjunto de $Y \setminus X$ de tal forma que la cardinalidad de $X \cup Z$ es igual a la cardinalidad de Y y donde además $X \cup Z$ es independiente.*

Demostración. Sea Z subconjunto de $Y \setminus X$ tal que $X \cup Z$ es independiente y tal que Z es máximal [2].

Supongamos que la cardinalidad $X \cup Z$ es menor a la cardinalidad de Y, entonces existe $\{y_0\}$ subconjunto de Y tal que la cardinalidad de y_0 es uno más la cardinalidad de $X \cup Z$, entonces por la propiedad 3 de las matroides existe y en $\{y_0\} \setminus (Y \setminus X)$ con la propiedad de que $X \cup Z \cup \{y\}$ es independiente. Esto contradice la elección de Z porque se pedía que ésta sea máxima, por lo tanto, la cardinalidad de $X \cup Z$ es igual a la cardinalidad de Y y el teorema se cumple. $\square$

Mostraremos un ejemplo sencillo de una matroide, se recomienda al lector tratar de entender los resultados que siguen a partir de este ejemplo. En muchas ocasiones hacer esto ayuda a mantener claridad.

Ejemplo 9.1. Sea S un conjunto de cardinalidad n y sea $\mathcal{F}$ todos los subconjuntos de S de cardinalidad menor o igual que k. Entonces, $M = (S, \mathcal{F})$ es una matroide.

En este caso se le conoce como **Matroide uniforme** de orden n, k. $\triangle$

[2] En este contexto máximal se refiere a que Z es el conjunto en S con respecto a una propiedad que satisface la propiedad y no es subconjunto propio de otro conjunto que satisface la propiedad.

A continuación, aprovecharemos la similitud que existe entre el álgebra lineal y la teoría de matroides para mostrar algunas definiciones y resultados interesantes.

9.1. Bases

Las bases son una de las propiedades más importantes del álgebra lineal, aprovechando la intersección que existe entre independencia e independencia lineal decimos que para una matroide una base es:

Definición 9.3. Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, decimos que B es una **base** si:

1. B es independiente.
2. B es máximal, es decir, no existe ningún elemento v en $S \setminus B$ tal que $B \cup \{v\}$ sea independiente.

Al conjunto de todas las bases en M se le denota como $\mathcal{B}(M)$.

Es claro que esta definición es equivalente para espacios vectoriales a la de una base. El primer resultado que veremos es que todas las bases son del mismo tamaño, esto sale directo del teorema 9.2.

Corolario 9.4. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, entonces todas las bases en M tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean B_1 y B_2 dos bases en M y supongamos que la cardinalidad de B_1 es estrictamente menor a la cardinalidad de B_2, entonces por el teorema 9.2 existe Z subconjunto de $B_2 \setminus B_1$ con la propiedad que $B_1 \cup Z$ es independiente, lo cual contradice la definición de qué es una base. Por lo tanto, la cardinalidad de B_1 es igual a la cardinalidad de B_2 y podemos concluir que todas las bases tienen el mismo número de elementos. $\square$

Una propiedad interesante de las bases es que es posible definir a una matroide de una forma alternativa haciendo uso de ellas, esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 9.5. *Axiomatización por bases*

Sea S un conjunto finito, decimos que $\mathcal{B}$ es el conjunto de bases de una matroide si y solo si para cualquier par de conjuntos B_1 y B_2 en $\mathcal{B}$ se cumple que para toda x en $B_1 \setminus B_2$ existe una y con la propiedad que $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ pertenece a $\mathcal{B}$.

Demostración. Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, como el conjunto vacío es independiente es claro que $\mathcal{B}(M)$ es diferente del vacío (existe por lo menos un elemento que es base en M). Al mismo tiempo, si tomamos 2 bases B_1, B_2 en $B(M)$ y consideramos una x arbitraria en $B_1 \setminus B_2$ entonces por el teorema 9.2 existe y en $B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ de tal forma que la cardinalidad de $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ es igual a la cardinalidad de B_2 y donde $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ es independiente. Además, por el corolario 9.4 podemos concluir que $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ es base.

Por lo tanto para cualquier par de conjuntos B_1 y B_2 en $\mathcal{B}(M)$ se cumple que para toda x en $B_1 \setminus B_2$ existe una y con la propiedad que $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ pertenece a $\mathcal{B}(M)$.

Ahora por el otro lado, supongamos que existe $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de S con la propiedad que para cualquier par de conjuntos B_1 y B_2 en $\mathcal{B}$ se cumple que para toda x en $B_1 \setminus B_2$ existe una y con la propiedad que $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ pertenece a $\mathcal{B}$. Decimos que un conjunto es independiente si es un subconjunto de cualquier elemento en $\mathcal{B}$.

Claramente, el conjunto vacío es independiente y además se cumple que si X es independiente y Y es un subconjunto de X entonces Y también es independiente. Por lo tanto, las propiedades 1 y 2 de la definición de matroides se cumplen.

Ahora, sean X y Y dos subconjuntos independientes de S en donde la cardinalidad de X es igual a k y la cardinalidad de Y es igual a $k+1$. Como X es independiente entonces existe B_1 en $\mathcal{B}$ de tal forma que X es un subconjunto de B_1 y de forma análoga como Y es independiente entonces existe B_2 en $\mathcal{B}$ de tal forma que Y es un subconjunto de B_2.

Para facilitar la notación sean

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$$

$$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_q\}$$

$$B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}, c_1, \ldots, c_{q-1}\}.$$

Sea $W = B_1 \setminus \{b_1\}$, entonces existe z en B_2 tal que $W \cup \{z\}$ está en $\mathcal{B}$. Si z está en Y entonces $X \cup \{z\}$ es independiente y se cumple la propiedad 3.

Si z no es un elemento de Y, sea $W_1 = (W \cup \{z\}) \setminus \{b_2\}$. De nuevo, existe z_1 en B_2 tal que $W_1 \cup \{z_1\}$ está en $\mathcal{B}$. Si z_1 está en Y entonces $X \cup \{z_1\}$ es independiente y se cumple la propiedad 3.

Si z_1 no es un elemento de Y entonces se repite el mismo procedimiento para $b_3, b_4, \ldots b_q$, como la cardinalidad de $\{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$ es mayor a la cardinalidad de $\{c_1, c_2, \ldots, c_{q-1}\}$ eventualmente existe z_j en Y, lo que implica que $X \cup \{z_j\}$ es independiente y se cumple la propiedad 3 y por lo tanto $\mathcal{B}$ es el conjunto de bases de una matroide y el teorema se cumple. □

9.2. Función rango

El rango de un conjunto es una propiedad clave del álgebra lineal, aprovechando la intersección que existe entre independencia e independencia lineal decimos que para una matroide la función rango queda definida como:

Definición 9.6. Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, la **función rango** ρ se define como una función que va del conjunto potencia de S a los enteros no negativos, de tal forma que si A es un subconjunto arbitrario de S entonces $\rho(A)$ es igual a la cardinalidad del subconjunto independiente más grande de A.

Es claro que esta definición es equivalente para espacios vectoriales a la del rango de un conjunto de vectores. Algunas propiedades de la función rango que salen casi directo de la definición son:

Corolario 9.7. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y ρ su función rango entonces el rango del conjunto vacío es igual a cero.*

Demostración. Como el conjunto vacío es el único subconjunto de sí mismo, como éste es independiente y no contiene ningún elemento, entonces $\rho(\emptyset) = 0$. □

Corolario 9.8. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, ρ su función rango y A, B dos subconjuntos de S tales que A es un subconjunto de B entonces $\rho(B) \geq \rho(A)$.*

Demostración. Como todos los subconjuntos de A son subconjuntos de B no puede existir un subconjunto de A independiente que sea más grande que todos los subconjuntos independientes de B. Por lo tanto $\rho(B) \geq \rho(A)$. □

Corolario 9.9. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y ρ su función rango, entonces para todo subconjunto A de S se cumple que $\rho(A)$ es no negativo y que $\rho(A)$ es menor o igual a la cardinalidad de A.*

Demostración. Sea A un subconjunto de S arbitrario. Como la cardinalidad de un conjunto es siempre no negativa eso implica que $\rho(A)$ es siempre no negativa. El subconjunto de A de mayor cardinalidad es el mismo por lo tanto $\rho(A)$ es menor o igual a la cardinalidad de A □

Corolario 9.10. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y ρ su función rango, entonces para todo subconjunto X de S y para todo elemento y de S se cumple que*

$$\rho(X) \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X) + 1.$$

Demostración. La desigualdad sale directo de que para todo conjunto X se cumple que el agregar un elemento y a éste puede incrementar la cardinalidad de su subconjunto independiente más grande en a lo más una unidad. □

Corolario 9.11. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y ρ su función rango, supongamos que para X subconjunto de S y para x, y elementos de S se cumple que*

$$\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\})$$

entonces

$$\rho(X) = \rho(X \cup \{x\} \cup \{y\}).$$

Demostración. Supongamos que para X subconjunto de S y para x, y elementos de S se cumple que

$$\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\}).$$

Sea $A = X \cup \{x\} \cup \{y\}$, es claro por el corolario 9.9 que $\rho(A) \geq \rho(X)$. Supongamos que $\rho(A) > \rho(X)$, sea Y un subconjunto independiente de X máximal. Como $\rho(A) > \rho(X)$ eso implica que $Y \cup \{x\}$ es independiente o que $Y \cup \{y\}$ es independiente, ambas afirmaciones son falsas porque claramente contradicen que $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\})$. Por lo tanto, $\rho(A) = \rho(X)$ y el corolario se cumple. □

Corolario 9.12. *Desigualdad submodular*

Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y ρ su función rango, supongamos que A, B son dos subconjuntos arbitrarios de S entonces

$$\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

Demostración. Para facilitar la notación sea $\rho(A \cup B) = p$ y sea $\rho(A \cap B) = q$. Sea X un subconjunto independiente de $A \cap B$ de cardinalidad q entonces existe un conjunto Y con las siguientes propiedades:

1. Y es independiente.
2. X es un subconjunto de Y.
3. Y es un subconjunto de $A \cup B$.
4. La cardinalidad de Y es p.

A Y lo podemos escribir como $Y = X \cup V \cup W$, donde V es un subconjunto independiente de $B \setminus A$ y W es un subconjunto independiente de $A \setminus B$. Además se cumple que $X \cup V$ es un subconjunto independiente de B y $X \cup W$ es un subconjunto independiente de A. Vale la pena mencionar que X, V, W son tres conjuntos ajenos y por lo tanto la cardinalidad de $X \cup V$ más la cardinalidad de $X \cup W$ es igual a dos veces la cardinalidad de X más la cardinalidad de V más la cardinalidad de W que ésta a su vez es igual a la cardinalidad de X más la cardinalidad de Y y por construcción esto es igual a $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B)$.

Como $\rho(B)$ es mayor igual que la cardinalidad de $X \cup V$ y $\rho(A)$ es mayor igual que la cardinalidad de $X \cup W$ esto implica que

$$\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

□

De igual forma que con las bases existe una forma de definir las matroides a través de su función rango, en particular si una función cumple 9.7, 9.10 y 9.11 entonces es una función rango. El resultado se ve formalmente en el siguiente teorema:

Teorema 9.13. *Axiomas de rango 1*
Una función ρ que va del conjunto potencia de S a los enteros no negativos es la función rango de una matroide en S si y solo si para todo X subconjunto de S y para todos x, y elementos de S se cumple que:

1. $\rho(\emptyset) = 0$.
2. $\rho(X) \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X) + 1$.
3. *Si* $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\})$ *entonces* $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\} \cup \{y\})$.

Demostración. Si ρ es la función rango de M por los corolarios 9.7, 9.10 y 9.11, claramente se cumplen los puntos 1,2 y 3 del teorema.

Supongamos que tenemos una función ρ que va del conjunto potencia de S a los enteros no negativos y que además para ρ se cumplen los puntos 1,2 y 3 del teorema.

Decimos que X es un subconjunto independiente de S si y solo si $\rho(X)$ es igual a la cardinalidad de X. Es claro a partir de esta definición que el conjunto vacío es independiente.

Supongamos que A subconjunto de S es independiente y sea B un subconjunto arbitrario de A, supongamos también que B no es independiente. Como B no es independiente eso implica que $\rho(B)$ es estrictamente menor a la cardinalidad de B, sea

$$A \setminus B = \{c_1, c_2, \ldots c_k\},$$

por el punto 2 del teorema tenemos que $\rho(B) \leq \rho(B \cup \{c_1\}) \leq \rho(B) + 1$, si aplicamos esta propiedad k veces obtenemos que $\rho(B) \leq \rho(B \cup \{c_1, c_2, \ldots c_k\}) = \rho(A) \leq \rho(B) + k$. Por el otro lado, la cardinalidad de A es igual a la cardinalidad de B más k y como $\rho(B)$ es estrictamente menor a la cardinalidad de B, entonces $\rho(A)$ es estrictamente menor que su cardinalidad lo cual claramente es una contradicción porque A es independiente y por lo tanto B es independiente.

Ahora, sean X, Y dos conjuntos independientes con la propiedad de que la cardinalidad de Y es mayor a la cardinalidad de X por una unidad, para facilitar la notación sean

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_q, y_{q+1}, \ldots y_k\}$$

$$Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_q, z_{q+1}, \ldots z_{k+1}\}$$

donde y_i es distinto a z_j para toda i y para toda j.

Supongamos que para toda j se tiene que $X \cup \{z_j\}$ no es independiente, esto implica que $\rho(X) = \rho(X \cup \{z_j\})$ para toda j. Si aplicamos la propiedad 3 $k+1-q$ veces obtenemos que $\rho(X \cup \{z_{q+1}, \ldots z_{k+1}\}) = \rho(X)$. Además sabemos que $X \cup \{z_{q+1}, \ldots z_{k+1}\} = X \cup Y$, lo cual implicaría que $\rho(Y) = \rho(X)$, esto es claramente una contradicción porque esto implicaría que Y no es independiente por lo tanto existe z_j tal que $X \cup \{z_j\}$ es independiente y podemos concluir que el teorema se cumple. □

Además de esta forma de definir a las matroides usando la función rango existe otra, en particular si una función cumple 9.9, 9.8 y 9.12 entonces es una función rango para alguna matroide. El siguiente teorema muestra formalmente como sucede esto:

Teorema 9.14. *Axiomas de rango 2*

Una función ρ que va del conjunto potencia de S a los enteros no negativos es la función rango de una matroide en S si y solo si para todo par X, Y de subconjuntos de S se cumple que:

1. *$\rho(X)$ toma un valor que se encuentra entre cero y la cardinalidad de X.*

2. *Si X es un subconjunto de Y esto implica que $\rho(X) \leq \rho(Y)$.*

3. *$\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.*

Demostración. Si ρ es la función rango de M por los corolarios 9.9, 9.8 y 9.12, claramente se cumplen los puntos 1,2 y 3 del teorema.

Supongamos que tenemos una función ρ que va del conjunto potencia de S a los enteros no negativos y que además para ρ se cumplen los puntos 1,2 y 3 del teorema.

Al igual que en la última demostración, decimos que X es un subconjunto independiente de S si y solo si $\rho(X)$ es igual a la cardinalidad de X. Es claro a partir de esta definición que el conjunto vacío es independiente.

Claramente, por el punto 1 se cumple que $\rho(\emptyset) = 0$.

Sea X un subconjunto arbitrario de S y y un elemento arbitrario de S, como la cardinalidad de $\{y\}$ es igual a uno es claro por el punto 1 que $\rho(\{y\}) \leq 1$. Además, sabemos que

$$\rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X \cup \{y\}) + \rho(X \cap \{y\}) \leq \rho(X) + \rho(\{y\}) \leq \rho(X) + 1.$$

Si le agregamos la propiedad 2 del teorema obtenemos que $\rho(X) \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X) + 1$.

Sea A un subconjunto de S y sean x, y dos elementos de S tales que $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\})$. Por el punto 3 del teorema tenemos que

$$\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) + \rho(A) \leq \rho(X \cup \{x\} + \rho(X \cup \{y\} = 2\rho(A),$$

por lo tanto $\rho(A \cup \{x\} \cup \{y\}) = \rho(A)$.

Como ρ cumple que

1. $\rho(\emptyset) = 0$.
2. $\rho(X) \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X) + 1$.
3. Si $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X \cup \{y\})$ entonces $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\} \cup \{y\})$.

Por el teorema 9.13 podemos concluir que ρ es la función rango de una matroide en S y por lo tanto se cumple el teorema. □

Las matroides además de tener análogos con el álgebra lineal también tienen análogos con la teoría de gráficas, la siguiente sección muestra como es qué esto sucede.

9.3. Circuitos

En teoría de gráficas los circuitos son de vital importancia, en particular sería imposible definir qué es un árbol sin el concepto de circuito. La siguiente definición viene de la intersección que existe entre la teoría de gráficas y las matroides [3], decimos que para una matroide los circuitos quedan definidos como:

Definición 9.15. Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, decimos que C es un **circuito** si

- C es un conjunto dependiente.
- C es mínimo, es decir, no existe ningún subconjunto D de C tal que D es dependiente.

Al conjunto de todos los circuitos en M se le denota como $\mathcal{C}(M)$.

Algunas propiedades de los circuitos que salen casi directo de la definición son:

Corolario 9.16. *9.3 Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, C un circuito en M y ρ su función rango entonces, $\rho(C)$ es igual a su cardinalidad menos uno.*

Demostración. Por definición la cardinalidad del subconjunto independiente más grande de C es igual a la cardinalidad de C menos 1, por lo tanto $\rho(C)$ es igual a su cardinalidad menos uno. $\square$

Corolario 9.17. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y C un circuito en M. Entonces la cardinalidad de C es menor igual que $\rho(S) + 1$.*

Demostración. Si $\rho(S) = k$ esto implica que el subconjunto independiente de S más grande es de cardinalidad k si a este conjunto le agregamos un elemento obtenemos un circuito de cardinalidad $k+1$, es claro que este circuito es el de mayor cardinalidad de todos los elementos de $\mathcal{C}(M)$ y por lo tanto la cardinalidad de C es menor igual que $\rho(S) + 1$ para todo circuito C. $\square$

---

[3] Si el lector no tiene familiaridad con la existencia de esta intersección, al finalizar esta sección tendrá claro cuál es la naturaleza de ésta.

Corolario 9.18. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, si $\mathcal{C}(M) = \emptyset$ entonces $\mathcal{B}(M) = \{S\}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}(M) = \emptyset$, esto implicaría que no existe ningún subconjunto dependiente de S y por lo tanto S es un subconjunto independiente de S máximal. Por lo tanto, $\mathcal{B}(M) = \{S\}$. $\square$

Corolario 9.19. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, C un circuito en M y A un subconjunto propio de C. Entonces A es un subconjunto independiente de S.*

Demostración. Si A fuera dependiente esto implicaría que C no es mínimo como se pide en la definición, por lo tanto A es un subconjunto independiente de S. $\square$

Corolario 9.20. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y sean C_1, C_2 dos circuitos distintos en M. Entonces, C_1 no es un subconjunto de C_2.*

Demostración. Supongamos que C_1 es un subconjunto de C_2, entonces $C_2 = C_1 \cup (C_2 \setminus C_1)$. Como $(C_2 \setminus C_1)$ no es vacío entonces C_1 es un subconjunto propio de C_2 lo que implica que C_1 es un subconjunto independiente en S. Esto es claramente una contradicción porque C_1 es un circuito, por lo tanto C_1 no es un subconjunto de C_2. $\square$

Corolario 9.21. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, sean C_1, C_2 dos circuitos distintos en M y sea z un elemento en $C_1 \cap C_2$. Entonces, existe un circuito C_3 subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$.*

Demostración. Supongamos que no existe un circuito C_3 subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$. Esto implica directamente que $(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$ es un subconjunto independiente de S, lo cual implica que $\rho((C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}) = \rho((C_1 \setminus \{z\}) + (C_2 \setminus \{z\}))$ es igual a la cardinalidad de $C_1 \cap C_2$ menos uno.

Además, por el corolario tenemos que $\rho(C_1)$ es igual a la cardinalidad de C_1 menos uno y que $\rho(C_2)$ es igual a la cardinalidad de C_2 menos uno. Si aplicamos la desigualdad de submodularidad obtenemos que $\rho(C_1 \cup C_2) + \rho(C_1 \cap C_2)$ es menor o igual que la cardinalidad de C_1 más la cardinalidad de C_2 menos dos lo cual es igual a la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ más la cardinalidad de $C_1 \cap C_2$ menos dos.

Ahora, sabemos que $C_1 \cap C_2$ es un subconjunto independiente de S y por lo tanto $\rho(C_1 \cap C_2)$ es igual a la cardinalidad de $C_1 \cap C_2$. Por lo tanto, $\rho(C_1 \cup C_2)$ es menor o igual que la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ menos dos.

Además, $\rho(C_1 \cup C_2) \geq \rho((C_1 \cup C_2) \setminus \{z\})$, donde $\rho((C_1 \cup C_2) \setminus \{z\})$ es igual a la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ menos uno.

Por lo tanto, la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ menos uno es menor o igual a la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ menos dos, esto implicaría que $1 > 2$, lo cual claramente es una contradicción y podemos concluir que existe un circuito C_3 subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$. $\square$

De igual forma que con las bases y con la función rango existe una forma de definir las matroides a través de sus circuitos, en particular si una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de S cumple 9.20 y 9.21 entonces son los circuitos de una matroide. Antes de enunciar y demostrar esto se requiere de un lema y dos teoremas.

Lema 9.22. *Sea $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, A un subconjunto independiente de S y x un elemento de x. Entonces $A \cup \{x\}$ contiene a lo más un circuito.*

Demostración. Supongamos que existen dos circuitos C_1, C_2 subconjuntos de $A \cup \{x\}$. Como A es un subconjunto independiente de S, tenemos que x está contenida en $C_1 \cap C_2$. Por 9.21 existe un circuito C_3 subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, lo que directamente implica que C_3 está contenido en A, lo cual es claramente una contradicción porque A es un subconjunto independiente de S. Por lo tanto $A \cup \{x\}$ contiene a lo más un circuito. $\square$

Un corolario directo de este resultado que vale la pena mencionar el siguiente:

Corolario 9.23. *Sean $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, B una base en M y x un elemento en $S \setminus B$. Entonces, existe un único circuito C tal que C es un subconjunto de $B \cup \{x\}$.*

Demostración. La demostración es directa del lema 9.22, del hecho de que todas las bases en M son subconjuntos independientes de S y que éstas son subconjuntos independientes máximales (al unirles un elemento se vuelven dependientes). □

A este circuito $C = C(x, B)$ se le llama el **circuito fundamental** de x en la base B. Un resultado importante de esta definición es el siguiente:

Teorema 9.24. *Sean $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide y B una base en M, entonces para toda x en $S \setminus B$ $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es una base en M si y solo si y pertenece a $C(x, B)$ o si $y = x$.*

Demostración. Si $y = x$ el resultado es directo porque por hipótesis $B =(B \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ es una base.

Supongamos que $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es una base en M, supongamos además que y no pertenece a $C(x, B)$. Como y no pertenece a $C(x, B)$, tenemos que $C(x, B)$ es un subconjunto de la base $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ y por lo tanto que $C(x, B)$ es un subconjunto independiente de S, lo cual es claramente una contradicción porque $C(x, B)$ es un subconjunto dependiente de S y podemos entonces concluir que y pertenece a $C(x, B)$.

Por el otro lado, supongamos que y pertenece a $C(x, B)$ y además supongamos que $(B\setminus\{y\})\cup\{x\}$ no es una base. Como $(B\setminus\{y\})\cup\{x\}$ tiene la misma cardinalidad que B y no es base, como todas las bases tienen el mismo tamaño podemos ver que $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es un subconjunto dependiente de S. Ahora, como$(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es dependiente entonces existe un circuito C' (distinto de $C(x, B)$ subconjunto de $(B\setminus\{y\})\cup\{x\}$, lo que implica que $B \cup \{x\}$ contiene dos circuitos distintos, lo cual es una contradicción al lema 9.22 y por lo tanto $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es una base y el teorema es cierto. □

Antes de mostrar la equivalencia entre circuitos y matroides es necesario mostrar el siguiente resultado, este teorema puede ser interpretado como un resultado más fuerte que el corolario 9.21.

Teorema 9.25. *Sean $M = (S, \mathcal{F})$ una matroide, C_1, C_2 dos circuitos en M y x un elemento en $C_1 \cap C_2$, entonces para todo elemento y en $C_1 \setminus C_2$ existe un circuito C tal que*

1. *y pertenece a C.*

2. C es un subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Demostración. Supongamos que existen dos circuitos C_1, C_2, un elemento x en $C_1 \cap C_2$ y un elemento y en $C_1 \setminus C_2$ que muestran que el teorema es falso, además supongamos la cardinalidad de $C_1 \cup C_2$ es mínima con esta propiedad, es decir no existen otros dos circuitos con la cardinalidad de su unión menor a la de C_1 y C_2 que no cumplen esta propiedad.

Por el corolario 9.21, existe un circuito C_3 subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ (no tenemos garantía alguna de que y pertenezca a C_3).

Como C_3 no es un subconjunto de C_1 (corolario 9.20), tenemos que $C_3 \cap (C_2 \setminus C_1)$ no es vacío. Sea z en $C_3 \cap (C_2 \setminus C_1)$ arbitraria, podemos ver que z pertenece a $C_3 \cap C_2$ y que x pertenece a $C_2 \setminus C_3$. Como y no pertenece a $C_2 \cup C_3$ podemos ver que $C_2 \cup C_3$ es un subconjunto propio de $C_1 \cup C_2$. Por la minimalidad de $C_1 \cup C_2$ existe C_4 tal que x pertenece a C_4 y C_4 es un subconjunto de $(C_2 \cup C_3) \setminus \{z\}$.

Ahora, tenemos que x pertenece a $C_1 \cap C_4$ y que y no pertenece a $C_2 \cup C_3$. Como y no pertenece a $C_2 \cup C_3$ tenemos que y pertenece a $C_1 \setminus C_4$. Además tenemos que $C_1 \cup C_4$ es un subconjunto de $C_1 \cup C_2$[4], de nuevo por la minimalidad de $C_1 \cup C_2$ tenemos que existe un circuito C_5 tal que y pertenece a C_5 y donde C_5 es un subconjunto de $(C_1 \cup C_4) \setminus \{x\}$. Como $C_1 \cup C_4$ es un subconjunto de $C_1 \cup C_2$ tenemos que C_5 es un subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, lo cual claramente es una contradicción porque viola directamente la hipótesis de que para C_1, C_2, x y y el teorema es falso y por lo tanto el teorema es cierto. □

Ahora sí, podemos ver la equivalencia que existen entre circuitos y matroides. Una nota importante es que en la última demostración únicamente se utilizan los corolarios 9.20 y 9.21, entonces el siguiente teorema en vez de pedir las propiedades C_1 y C_2 podría haber pedido en su lugar las propiedades 9.20 y 9.25.

Teorema 9.26. *Axiomatización por circuitos*

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de S es el conjunto de circuitos de una matroide si y solo si se cumple que

1. *Si dos conjuntos distintos X, Y pertenecen a $\mathcal{C}$, entonces X no es un subconjunto de Y.*

[4] Es un subconjunto propio porque $C_1 \cup C_4$ no contiene a z y $C_1 \cup C_2$ si la contiene.

2. *Si C_1, C_2 son dos subconjuntos distintos de $\mathcal{C}$ y z es un elemento en $C_1 \cap C_2$, entonces existe C_3 en $\mathcal{C}$ tal que C_3 es un subconjunto de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es la colección de circuitos de una matroide sabemos por los corolarios 9.20 y 9.21 que las propiedades 1 y 2 se cumplen. Ahora, sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ una familia ordenada arbitraria de objetos en S y sea θ de la siguiente manera

$$\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \text{ contiene a un elemento } C \text{ de } \mathcal{C} \\ & \text{tal que } x_i \text{ pertenece a } C \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea t una función que va de subconjuntos ordenados de S a los enteros no negativos definida como

$$t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i, \tag{9.1}$$

Afirmamos [5] que para toda permutación π se cumple que

$$t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}) = t(\{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(q)}\}). \tag{9.2}$$

A partir de esto definimos r como una función que va de los subconjuntos de S a los enteros no negativos y que sigue la regla de correspondencia $r(A) = t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q\})$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ es una representación ordenada de los elementos de A. Por la afirmación mencionada en la ecuación 9.2 sabemos que r está bien definida.

Ahora, es claro que $r(\emptyset) = 0$ porque la suma sobre ningún elemento siempre es cero. Además, podemos ver que para cualquier subconjunto X de S y para cualquier elemento y de S claramente se cumple que $r(X) \leq r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1$ porque al agregar un elemento al conjunto la función no puede decrecer por propiedades de la suma y ésta a lo más puede crecer en una unidad.

[5] La demostración de la afirmación se muestra más adelante.

Por el otro lado, sea A un subconjunto de S y sean x, y dos elementos de S y supongamos que

$$r(A) = r(X \cup \{x\}) = r(A \cup \{y\}),$$

entonces por definición se cumple que existen C_1, C_2 en $\mathcal{C}$ tales que x pertenece a C_1, con C_1 subconjunto de $X \cup \{x\}$ y de forma análoga y pertenece a C_2, con C_2 subconjunto de $X \cup \{y\}$. Por lo tanto, podemos concluir que $r(A) = r(X \cup \{x\} \cup \{y\})$ y por el teorema 9.13 r es la función rango de una matroide y podemos concluir que $\mathcal{C}$ es la familia de circuitos de esa matroide. □

La demostración de arriba no está completa, hace falta la demostración de la afirmación mencionada en 9.2. Esta se muestra a continuación.

Lema 9.27. *Para la función t definida 9.1 se cumple que para cualquier familia ordenada $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ de objetos de S y para cualquier permutación π que*

$$t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}) = t(\{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(q)}\}).$$

Demostración. Para demostrar el lema solo es necesario mostrar que

$$t(\{x_1, x_2, \ldots x_{q-1}, x_q\}) = t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q-1}\}),$$

esto es porque toda permutación puede ser representada como un producto de ciclos de orden dos (ver Fraleigh (1976)). Para facilitar la notación sean

$$Y = t(\{x_1, x_2, \ldots x_{q-1}, x_{q-2}\}),$$
$$t(Y) = a,$$
$$t(Y, x_{q-1}) = a_1,$$
$$t(Y, x_q) = a_2,$$
$$t(Y, x_{q-1}) = a_1,$$
$$t(Y, x_{q-1}, x_q) = a_{1,2},$$
$$t(Y, x_q, x_{q-1}) = a_{2,1}.$$

Para demostrar lo deseado es necesario suponer cuatro casos distintos:

1. Supongamos que no existe C en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup x_{q-1}$ tal que x_{q-1} es un elemento de C y supongamos que no existe C en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup x_q$ tal que x_q es un elemento de C. Entonces podemos ver que $a_1 = a_2 = a$, entonces existen dos escenarios posibles:

   a) Existe C en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_{q-1}\} \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_{q-1} y a x_q lo que implicaría que
   $$a_{1,2} = a_1 = a_2 = a_{2,1}.$$

   b) No existe C en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_{q-1}\} \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_{q-1} y a x_q lo que implicaría que
   $$a_{1,2} = a_1 + 1 = a_2 + 1 = a_{2,1}.$$

   En los dos escenarios se cumple que $a_{1,2} = a_{2,1}$ como deseamos.

2. Supongamos que existe C_2 en $\mathcal{C}$ contenido en $Y \cup \{x_{q-1}\}$ tal que contiene a x_{q-1} y además supongamos que existe C_1 en $\mathcal{C}$ contenido en $Y \cup \{x_{q-1}\} \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_{q-1} y a x_q. Entonces por hipótesis sabemos que existe C_3 en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_q y podemos concluir que
   $$a_{1,2} = a_1 = a = a_2 = a_{2,1}.$$

3. Supongamos que existe C_2 en $\mathcal{C}$ contenido en $Y \cup \{x_{q-1}\}$ tal que contiene a x_{q-1} y además supongamos que no existe C_1 en $\mathcal{C}$ contenido en $Y \cup \{x_{q-1}\} \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_{q-1} y a x_q. A partir de esto podemos ver que existen dos escenarios posibles:

   a) Existe C_3 en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_q y podemos concluir que
   $$a_{1,2} = a_1 = a = a_2 = a_{2,1}.$$

   b) No existe C_3 en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_q y podemos concluir que
   $$a_{1,2} = a_1 + 1 = a + 1 = a_2 = a_{2,1}.$$

En los dos escenarios se cumple que $a_{1,2} = a_{2,1}$ como deseamos.

4. Existe C en $\mathcal{C}$ subconjunto de $Y \cup \{x_q\}$ tal que contiene a x_q. Este caso es análogo a los casos 2 y 3, podemos concluir que $a_{1,2} = a_{2,1}$.

Después de plantear todos los casos podemos concluir que

$$t(\{x_1, x_2, \ldots x_{q-1}, x_q\}) = t(\{x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q-1}\})$$

y que por lo tanto el lema es cierto. □

El siguiente resultado muestra de donde viene la conexión entre las matroides y las gráficas, además muestra de donde viene la definición de circuitos.

Teorema 9.28. *Sea $G = (V.E)$ una gráfica entonces los ciclos en G forman los circuitos de una matroide.*

Demostración. Claramente ningún ciclo contiene a otro ciclo porque se pide minimalidad en la definición de estos. Sean C_1 y C_2 dos ciclos en G y sea e una arista en $C_1 \cap C_2$ [6]. Para facilitar la notación sean

$$C_1 = \{e, a_1, \ldots, a_p\}$$

$$C_2 = \{e, b_1, \ldots, b_q\},$$

Es claro que el conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} = \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\}$ contiene un ciclo porque a_1 y b_q inciden en el mismo vértice.

Por lo tanto, por el teorema 9.26, los ciclos en G forman los circuitos de una matroide. □

La siguiente sección muestra cómo toda esta teoría se aplica en particular a los problemas de optimización y mostraremos un algoritmo basado en esta teoría muy usado en la investigación de operaciones.

[6] En este caso representamos a un ciclo por el conjunto de aristas que lo forman

9.4. El algoritmo glotón

Esta sección muestra el resultado más importante sobre matroides para este trabajo y ejemplifica por qué éstas son muy importantes en la investigación de operaciones. Para definir el algoritmo glotón es necesario antes definir qué es una matroide ponderada y cuál es el problema de optimización asociada a este.

Definición 9.29. Decimos que (M, ω) es una **matroide ponderada** si $M = (S, \mathcal{F})$ es una matroide y ω es una función que va del conjunto potencia de S a los reales positivos, con la propiedad de que si $A = \{e_1, e_2, \dots e_p\}$ es un subconjunto de S entonces se cumple que

$$\omega(A) = \sum_{k=0}^{p} \omega(e_k).$$

De forma casi directa se define el algoritmo de optimización de la siguiente manera:

Definición 9.30. Sea (M, ω) una matroide, si $M = (S, \mathcal{F})$ definimos el problema de optimización $(\mathcal{F}, \omega)$ como encontrar el conjunto A en $\mathcal{F}$ con la propiedad de que $\omega(A)$ sea máximal, es decir no existe B en $\mathcal{F}$ tal que $\omega(B) > \omega(A)$.

Ahora sí ya encaminados podemos definir el algoritmo glotón, más adelante veremos que este además de ser sencillo y fácil de entender, converge para el problema $(\mathcal{F}, \omega)$. El seudocódigo del algoritmo es el siguiente:

Algoritmo 9: Glotón

input : Una matroide ponderada (M, ω).
output: Un conjunto A en $\mathcal{F}$.

```
Sea J = ∅ ;
repeat
    Escogemos e* en S tal que ω(J ∪ {e*}) ≥ ω(J ∪ {e}) para
      toda e tal que J ∪ {e} pertenece a F (con J ∪ {e*}
      también en F) y con ω(J ∪ {e*}) > ω(J) ;
    Actualizamos J = J ∪ {e*};
until hasta que no existe e no en J con la propiedad de que
  J ∪ {e} pertenece a F;
```

El siguiente resultado muestra que el algoritmo converge a pesar de ser relativamente sencillo.

Teorema 9.31. *Sean $M = (S, \mathcal{F})$ y ω una función de pesos para M, entonces el algoritmo glotón converge para el problema de optimización $(\mathcal{F}, \omega)$.*

Demostración. Sea B la base en M elegida por el algoritmo glotón [7], supongamos que existe otra base T tal que $\omega(T) > \omega(B)$ y con la propiedad de que la cardinalidad de $T \cap B$ es máxima en el sentido de que no existe T' tal que $\omega(T') > \omega(B)$ y la cardinalidad de $T' \cap B$ es estrictamente mayor a la cardinalidad de $T \cap B$.

Sea x_k el primer elemento que el glotón escogió en $B \setminus T$, por el corolario 9.23 existe un circuito $C(x_k, T)$ tal que x_k pertenece a $C(x_k, T)$ y que $C(x_k, T)$ es un subconjunto de $T \cup \{x_k\}$.

Sea y en $C(x_k, T) \setminus B$ de tal forma que $(T \cup \{x_k\}) \setminus \{y\}$ es una base (teorema 9.5).

Ahora, sabemos que $\omega(y) \leq \omega(x_k)$ (porque el glotón lo escogió), como T tiene peso máximo eso implica que $\omega(y) = \omega(x_k)$ lo que también implica que $\omega(T) = \omega((T \cup \{x_k\}) \setminus \{y\})$, lo cual es claramente una contradicción porque la cardinalidad de $T \cap B$ es máxima. Por lo tanto, el algoritmo glotón converge para el problema de optimización $(\mathcal{F}, \omega)$. $\square$

[7] El algoritmo glotón siempre converge a una base porque frena cuando encuentra un subconjunto independiente de S máximal.

Algo muy interesante sobre el algoritmo es que al igual que en las secciones anteriores es posible definir a las matroides por medio del algoritmo glotón.

Teorema 9.32. *Sea S un conjunto finito y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos (no vacía) de S con las siguientes propiedades:*

1. *Si A pertenece a $\mathcal{F}$ y B es un subconjunto de A, entonces B pertenece a $\mathcal{F}$.*

2. *El algoritmo glotón converge para el problema de optimización $(\mathcal{F}, \omega)$ para toda función que va del conjunto potencia de S a los reales positivos.*

Entonces, $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos independientes de una matroide.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos independientes de una matroide solo es necesario ver que si X y Y pertenecen a $\mathcal{F}$ y la cardinalidad de X es uno más la cardinalidad de Y, entonces existe un elemento v en $X \setminus Y$ tal que $Y \cup \{v\}$ pertenece a $\mathcal{F}$ (ver 3). Para facilitar la notación sean

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}.$$

Definimos ω una función que va del conjunto potencia de S a los reales positivos según la siguiente regla:

$$\omega(x_i) = u \text{ para toda } i \text{ entre } 0 \text{ y } n,$$

$$\omega(y_j) = v \text{ para toda } y_j \text{ en } X \setminus Y,$$

$$\omega(e) = 0 \text{ para toda } e \text{ en } S \setminus (X \cup Y).$$

Supongamos que $u > v$ y que queremos resolver el problema de optimización $(\mathcal{F}, \omega)$, por hipótesis sabemos que el algoritmo glotón converge para este problema. El algoritmo en sus primeras n iteraciones escoge a $J = x_1, x_2, \ldots, x_n = X$ (sabemos esto porque X está en $\mathcal{F}$ y porque todo subconjunto de X está en $\mathcal{F}$). Ahora tenemos dos escenarios posibles, el algoritmo ya convergió después de n pasos o todavía no converge y realiza por lo menos otra iteración. Supongamos que el algoritmo convergió. Sea t igual a la cardinalidad de $X \cap Y$, notamos que se cumple lo siguiente:

$$\omega(X) = n \cdot u$$

$$\omega(Y) = t \cdot u + (n + 1 - t)v.$$

Si u es igual a $\left(1 + \dfrac{1}{2(n-t)}\right) v$[8], tenemos que $\omega(Y) > \omega(X)$. Por lo tanto, podemos concluir que el algoritmo no convergió porque claramente no encontró al óptimo. Como el algoritmo no convergió, este realiza por lo menos un paso más en el que selecciona y_j en $X \setminus Y$ de tal forma que $X \cup \{y_j\}$ pertenece a $\mathcal{F}$. Concluimos que se cumple 3 y por lo tanto $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos independientes de una matroide. □

Este teorema se puede reescribir de la siguiente forma para encontrar una forma de definir las matroides:

Corolario 9.33. *Axiomatización por algoritmo glotón.*

Una colección $\mathcal{F}$ no vacía de subconjuntos de S es la familia de conjuntos independientes de S si y solo si

1. *Si A pertenece a $\mathcal{F}$ y B es un subconjunto de A, entonces B pertenece a $\mathcal{F}$.*

2. *Para toda función ω que va de S a los reales el algoritmo glotón escoge al conjunto A en $\mathcal{F}$ que maximiza la función*

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \omega(a_k) \ \textit{con} \ A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

es decir, no existe B en $\mathcal{F}$ tal que $f(B) > f(A)$.

Demostración. El corolario es un caso particular del teorema 9.32. □

[8]Con este supuesto se sigue cumpliendo que $u > v$.

Capítulo 10

Funciones de elección y matroides

En este capítulo redefiniremos el problema de admisión a universidades con cotas comunes anidadas por completo, vamos a suponer que tenemos una gráfica bipartita $G = (A \cup C, E)$ donde los vértices en A representan los aspirantes, C representa las universidades y las aristas de la gráfica E representan las asignaciones aceptables entre los dos. Para definir el problema de esta manera es necesario definir dos funciones de elección.

Definición 10.1. Decimos que Q es una **función de elección** para un conjunto E si para todo subconjunto X de E tenemos que $Q(X)$ es un subconjunto de X. En particular, decimos que un conjunto X es **Q-independiente** si $Q(X) = X$.

Definimos dos funciones de elección una para los solicitantes denotado como Q_A y otra para las universidades denotada como Q_C. Si un conjunto es Q_A-independiente decimos que es **aspirante independiente** y si un conjunto es Q_C-independiente decimos que es **universidad independiente**. Las dos funciones se definen de la siguiente manera:

Definición 10.2. Definimos la **función de elección para los aspirantes** Q_A como una función de elección sobre las aristas que cumple que para todo aspirante a, $Q_A(X)$ contiene a las aristas en X que el solicitante escogería si pudiera elegir libremente sin importar las restricciones. En particular, si X contiene varias aristas que inciden sobre a éste elige la que incide en la universidad más alta en su lista.

Definición 10.3. Definimos la **función de elección para las universidades** Q_C como una función de elección sobre las aristas que cumple que para toda universidad c, $Q_C(X)$ contiene a las aristas X que inciden en los solicitantes que c elegiría si pudiera elegir libremente. En particular se sigue el siguiente algoritmo, supongamos que la familia de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ son los conjuntos de universidades que son parte de una restricción y supongamos que si C_i es un subconjunto de C_j es porque i es menor igual que j:

Algoritmo 10: Algoritmo para calcular la función de elección para las universidades

input : Un conjunto X de aristas en E, la familia de conjuntos con restricciones $\mathcal{C}$ con sus cotas y las listas de preferencias para las universidades y los aspirantes

output: $Q(X)$

1 *Sea* $X_0 = X$;
2 **for** $i = 1, \ldots, m$ **do**
3   X_i *es el conjunto obtenido por aplicarle la cota superior de* C_i *a* X_{i-1};
4   *Sea* $X_{i-1}(C_i)$ *las aristas en* X_{i-1} *que inciden en* C_i;
5   *Sean* X_i' *las aristas en* $X_{i-1}(C_i)$ *que no se encuentran entre las* $q(C_i)$ *mejores*;
6     $X_i = X_{i-1} \setminus X_i'$;
7 $Q_C(X) = X_m$;

Para la línea 5 del algoritmo es necesario explicar cuál es el orden de preferencias de $X_{i-1}(C_i)$, este depende de dos casos:

1. Dadas dos aristas que inciden en dos solicitantes distintos escogemos de acuerdo con el orden de preferencias de C_i.

2. Dadas dos aristas que inciden en el mismo aspirante a escogemos de acuerdo con el orden de preferencias de a.

A partir de esto realizamos las siguientes observaciones sobre el comportamiento de estas funciones:

Observación 10.4. $Q_A(X) = X$ si y solo si cada aspirante tiene a lo más una arista incidente en X.

Observación 10.5. $Q_C(X) = X$ si y solo si X no viola ninguna cota de $\mathcal{C}$.

Usando esas dos observaciones concluimos que:

Observación 10.6. M es un emparejamiento si y solo si M es aspirante independiente y universidad independiente.

A partir de estos resultados podemos demostrar el siguiente teorema que habla de la relación entre nuestro problema y las matroides.

Teorema 10.7. *Sea I_C el subconjunto del conjunto potencia de E que contiene a todos los conjuntos universidad independiente, entonces $M_C = (E, I_C)$ es una matroide.*

Demostración. Usamos inducción sobre el número m de conjuntos acotados (la cardinalidad de $\mathcal{C}$). Si $m = 1$ entonces solo tenemos una universidad y M_C es una matroide uniforme de rango $q(C_i)$. Supongamos que el resultado es válido si la cantidad de conjuntos es estrictamente menor que m y supongamos que tenemos m conjuntos acotados. Sean $C^1, C^2, \ldots, C^k$ los grupos en $\mathcal{C}$, entonces tenemos dos casos:

1. Si k es mayor estricto que 1 entonces cada I_{C^i} forma una matroide y como I_C es la suma directa de los I_{C^i} entonces es una matroide.

2. Si $k = 1$ entonces I' es el conjunto de conjuntos universidad independientes de acuerdo con $C_1, \ldots, C_{m-1}$ es parte de una matroide. Podemos ver que al aplicar la restricción de C_m tenemos un truncamiento sobre la misma y no se pierde el hecho de que es una matroide.

Por lo tanto, si I_C el subconjunto del conjunto potencia de E que contiene a todos los conjuntos universidad independiente, entonces $M_C = (E, I_C)$ es una matroide. □

Un resultado inmediato del teorema es que lo mismo sucede para los aplicantes.

Corolario 10.8. *Sea I_A el subconjunto del conjunto potencia de E que contiene a todos los conjuntos universidad independiente, entonces $M_A = (E, I_A)$ es una matroide.*

Demostración. Como los aspirantes pueden ser vistos como universidades en donde cada cota superior es 1 y no existen cotas comunes, de acuerdo con el teorema 10.7 $M_A = (E, I_A)$ es una matroide. □

A partir de esto, podemos encontrar varios resultados bastante interesantes sobre el problema.

Corolario 10.9. *La función de elección para las universidades para X encuentra el subconjunto maximal universidad independiente de X.*

Demostración. Para cada elemento x en $X \setminus Q_c(X)$ tenemos que el conjunto $\{x\} \cup Q_c(X)$ es no universidad independiente, por definición existe un conjunto acotado C_i tal que $Q_c(X)$ contiene $q(C_i)$ aristas incidentes en C_i que todas son preferidas a x. □

A partir de esto podemos ver dos observaciones.

Observación 10.10. La cardinalidad de $Q_c(X)$ es igual al rango de X respecto a la matroide de las universidades M_c.

Observación 10.11. La función Q_c es creciente. Es decir, si X es un subconjunto de Y entonces la cardinalidad de $Q_c(X)$ es menor o igual que la cardinalidad de $Q_c(Y)$. [1]

Estas dos observaciones implican que la función Q_c puede ser cons-

[1] La demostración es directo del 9.8

truida a partir del algoritmo glotón de la siguiente manera:

Algoritmo 11: Algoritmo alternativo para calcular la función de elección para las universidades

---

input : Un conjunto X de aristas en E, la familia de conjuntos con restricciones $\mathcal{C}$ con sus cotas y las listas de preferencias para las universidades y los solicitantes

output: $Q(X)$

Acomodamos las aristas de $E = e_1, e_2, \ldots, e_n$ de cierta forma que si dos aristas e_i y e_j pertenecen al mismo conjunto acotado entonces si i es menor que j implica que e_i es preferido a e_j;
Sea E_i las aristas e_j con j menor o igual que i;
Sea $X_i = X \cap E_i$;
Sea $X_0 = \emptyset$;
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    if $Q_c(X_i) \cup \{e_{i+1}\}$ *es universidad independiente* **then**
        $Q_c(X_i + 1) = Q_c(X_i) \cup \{e_{i+1}\}$
        else
            $Q_c(X_{i+1}) = Q_c(X_i)$;

El algoritmo es igual porque por el teorema (9.31) sabemos que el algoritmo glotón siempre converge al subconjunto maximal universidad independiente de X y por lo tanto aplicar uno u otro algoritmo debe de llevar al mismo resultado. Además de esto si agregamos la siguiente definición podemos ver que la función es comonotona, es decir:

Definición 10.12. Decimos que una función Q en E es **comonotona** si para cualquier par de subconjuntos X, Y de E con X siendo un subconjunto de Y tenemos que $X \setminus Q(X)$ es un subconjunto de $Y \setminus Q(Y)$.

Corolario 10.13. *La función Q_c es comonotona sobre E*

Demostración. Para probar comonotonicidad tenemos que ver que si x en X no pertenece a $Q_c(X)$ entonces esta no pertenece a $Q_c(Y)$ cuando X es un subconjunto de Y. Esto sale directo del algoritmo glotón porque si durante la construcción de $Q_c(X)$ no se eligió x entonces es claro que durante la construcción de $Q_c(Y)$ tampoco se eligió a x por las mismas razones. $\square$

Para relacionar todo esto con la idea de estabilidad igual que en los demás capítulos es necesario enunciar algunas definiciones.

Definición 10.14. Para un conjunto X en E y una arista e en E, decimos que X **domina** a e en el lado del aspirante si e no pertenece a $Q_A(X \cup \{e\})$ y decimos que X domina a e en el lado de las universidades si e no pertenece a $Q_C(X \cup \{e\})$.

En particular, para los dos tipos de dominancia si tenemos dos subconjuntos X, Y de E. Decimos que X domina a Y si X domina a todos los elementos $Y \setminus X$.

A partir de esta definición podemos realizar la siguiente observación:

Observación 10.15. Un subconjunto M de E es estable si y solo si domina a $E \setminus M$ (bajo cualquiera de los dos esquemas).

10.1. Resultados estructurales

A partir de todos los resultados anteriores, en lo que sigue del capítulo mostraremos varios resultados importantes sobre el problema que se relacionan de forma general con el resto de la tesis.

Teorema 10.16. *Si $M_1, M_2, \ldots, M_k$ son asignaciones estables entonces $Q_C(\cup_{i=1}^k M_i)$ y $Q_A(\cup_{i=1}^k M_i)$ son también asignaciones estables.*

Demostración. Dado un conjunto X en E sabemos que $Q_C(X)$ es el subconjunto maximal universidad independiente de X, como X es la unión de varias asignaciones podemos ver qué $Q_C(X)$ es también una asignación y además podemos ver por propiedades del algoritmo glotón que este domina a las demás asignaciones en el sentido de las universidades, por lo tanto $Q_C(\cup_{i=1}^k M_i)$ es una asignación estable. En particular, el argumento es idéntico para demostrar que $Q_A(\cup_{i=1}^k M_i)$ es una asignación estable. $\square$

Lema 10.17. *Si tenemos dos asignaciones estables M_1, M_2 si M_1 domina a M_2 en el lado de las universidades esto se cumple si y solo si M_2 domina a M_1 en el lado de los solicitantes.*

Demostración. Si M_1 y M_2 son emparejamientos estables entonces cada uno de ellos domina al otro. Si M_1 domina a cada elemento de $M_2 \backslash M_1$ en el lado de la universidad entonces M_2 debe de dominar a cada elemento de $M_1 \setminus M_2$ en el lado de los aspirantes. A partir de esta observación podemos ver que el lema es verdadero. $\square$

Teorema 10.18. *Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son asignaciones estables y k es un entero arbitrario entre 1 y n. Si cada aspirante escoge su k mejor opción entre todas las asignaciones entonces el conjunto M con esas asignaciones es estable.*

Demostración. Sea a un solicitante arbitrario y sean $M_a^1, M_a^2, \ldots, M_a^n$ los n emparejamientos respecto al orden de preferencias de a. Además, para facilitar la notación sean $M_a = Q_C(\cup_{i=1}^k M_a^i)$ y $M = Q_A(\cup_{a \in A} M_a)$.

Por el teorema 10.16 sabemos que todos los M_a y que M son asignaciones estables. Observamos que para todo aspirante a tenemos que M_a domina por las universidades a $M_1, M_2, \ldots, M_k$ y por lo tanto $M_1, M_2, \ldots, M_k$ dominan a M_a por los aspirantes (lema 10.17). Esto implica que en M_a cada solicitante a' en A recibe su peor asignación dentro de $M_a^1, M_a^1, \ldots, M_a^k$ y por lo tanto a recibe su k mejor opción en M_a y los demás aspirantes reciben una asignación que no es más preferida que su mejor k opción. Ahora, al construir M cada aspirante escoge su mejor opción entre todos los M_a lo que implicaría que cada aspirante escoge su mejor k opción entre $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Como M es estable por el teorema 10.16 entonces podemos concluir que si cada solicitante escoge su k mejor opción entre todas las asignaciones entonces el conjunto M con esas asignaciones es estable. $\square$

Para la siguiente parte necesitamos agregar una definición sobre las matroides que nos va a ayudar a generar muchos resultados sobre este problema.

Definición 10.19. Si $M = (\mathcal{F}, S)$ es una matroide, decimos que un elemento e en S es **abarcado** por un subconjunto E de S si e pertenece a E o si existe un subconjunto independiente E' de E con la propiedad de que todo subconjunto propio de $E' \cup \{e\}$ es independiente. Esto es equivalente a decir que existe E' tal que el rango de E' independiente es igual al rango de $E' \cup \{e\}$.

En nuestra matroide sobre las universidades esta definición es equivalente a decir que si un emparejamiento estable M domina a e entonces e es abarcado por M. El siguiente resultado está altamente relacionado con los mencionados anteriormente.

Teorema 10.20. *Para todo par de asignaciones estables M, M' se tiene que los elementos abarcados por M y M' en la matroide de las universidades son exactamente los mismos. El resultado además es análogo en la matroide de los aspirantes.*

A partir de este resultado podemos ver varios resultados bastante interesantes, primero necesitamos definir qué significa que una universidad este débilmente libre.

Definición 10.21. Decimos que un conjunto acotado C_i es **débilmente libre** relativo a un conjunto de aristas E' si ningún conjunto acotado que contiene propiamente a C_i está lleno relativo a E' (no existe ningún emparejamiento en E' con la propiedad de que acote a C_i). Además, decimos que C_i está **esencialmente libre** relativo a E' si C_i está débilmente libre relativo a E' y ningún subconjunto de C_i está lleno relativo a E'.

Con esta definición podemos generalizar el teorema de los hospitales rurales.

Teorema 10.22. *Generalización del teorema de los hospitales rurales*

Sea M un emparejamiento. Si un conjunto acotado C_i está débilmente libre relativo a M para todo emparejamiento estable M'. Entonces, tenemos que la cantidad de personas asignadas a C_i es idéntica en M' y en M. Además, si C_i es esencialmente libre relativo a M entonces las personas asignadas a C_i en M y M' son las mismas.

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre i el número de conjuntos acotados. Supongamos que la familia de conjuntos $\mathcal{C} =$

$\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ son los conjuntos de universidades que son parte de una restricción y supongamos que si C_i es un subconjunto de C_j es porque i es menor igual que j.

Supongamos que $i = 1$ entonces hay tres opciones:

1. C_1 no es débilmente libre entonces por vacuidad el teorema es verdadero.

2. C_1 es libre y por lo tanto es débilmente libre. Además, como C_1 no contiene ningún conjunto acotado entonces también es relativamente libre. Esto quiere decir que si A son los elementos abarcados por M y B son las aristas que inciden en C_1 entonces la intersección entre Ay B es igual a los elementos asignados a C_1 en M. Por el teorema 10.20 tenemos que los elementos abarcados por M intersectados con las aristas incidentes en C_1 son iguales a los elementos abarcados por M' intersectados con las aristas incidentes en C_1 y, por lo tanto, las personas asignadas a C_i en M y M' son las mismas. Por lo tanto, el teorema es cierto.

3. Supongamos que C_1 está lleno relativo a M y supongamos que la cantidad de personas asignadas a C_1 en M es distinta a las asignadas en M'. Como C_1 está llena en M tenemos que la cantidad de personas asignadas en M' es estrictamente menor que su cota superior y por lo tanto C_1 esta subsuscrito en M', lo que implica que C_1 no puede estar lleno en ningún emparejamiento estable y llegamos a una contradicción porque C_1 está llena en M. Por lo tanto, el teorema en este caso es cierto.

Ahora, tomamos una i fija y supongamos que el teorema es cierto para cada C_j con j estrictamente menor que i.

Si C_i no contiene a ningún otra C_k entonces la demostración es idéntica al caso de $i = 1$. De otra forma, sea $C_i = C^1 \cup C^2 \cup \cdots \cup C^k$, donde $C^1, C^2, \ldots, C^k$ son los conjuntos acotados más grandes con la propiedad de que son ajenos. Podemos suponer que C_i es débilmente libre porque esa es una de las hipótesis del teorema.

Supongamos que C_i está subsuscrito relativo a M, entonces tenemos que cada uno de los $C^1, C^2, \ldots, C^k$ son débilmente libres. Por hipótesis de inducción el teorema es cierto para cada C^j entonces tenemos que para C^j se cumple que la cantidad de personas asignadas a M es idéntica a la cantidad de personas asignadas al conjunto en M'. Si sumamos sobre todos los conjuntos obtenemos que la cantidad de personas asignadas a C_i en M es igual a la cantidad de personas asignadas a C_i en M'.

Simultáneamente si suponemos que C_i es relativamente libre respecto a M tenemos que $C^1, C^2, \ldots, C^k$ también son relativamente libres respecto a M. Para cada C^j tenemos que las personas asignadas a ella son igual en los dos emparejamientos. Si unimos todos los conjuntos tenemos que las personas asignadas a C_i son las mismas en M y en M'.

Si C_i está lleno se puede usar el mismo argumento que en el caso de $i = 1$ para mostrar que está lleno en los emparejamientos y por lo tanto en este caso el teorema es cierto.

Por lo tanto, si un conjunto acotado C_i está débilmente libre relativo a M para todo emparejamiento estable M'. Entonces, tenemos que la cantidad de personas asignadas a C_i es idéntica en M' y en M. Además, si C_i es esencialmente libre relativo a M entonces las personas asignadas a C_i en M y M' son las mismas.

□

Esta demostración sirve para demostrar también el caso planteado en el capítulo 4. Un resultado directo de este teorema y de vital importancia es el siguiente que muestra como los grupos en el caso de cotas anidadas se comportan igual al caso sin cotas comunes como si fueran universidades por sí solos.

Corolario 10.23. *Si C_i es un grupo entonces cada emparejamiento estable asigna la misma cantidad de personas a C_i.*

Demostración. Un grupo por definición es débilmente libre y por lo tanto cada emparejamiento estable asigna la misma cantidad de personas a C_i. □

Notamos que la gran mayoría de estos resultados se cumplen para varios de los subproblemas que planteamos en la tesis y que problemas como el del matrimonio estable cumplen la misma estructura de matroide y por lo tanto todos los resultados de este capítulo.

Capítulo 11

Conclusiones

En esta tesis se construyó el camino para explicar los problemas de admisión a universidades con cotas inferiores o con cotas comunes. Estos a pesar de su facilidad al momento de explicarlos tienen la propiedad de ser NP-Completos y por lo tanto no son fáciles de resolver. Al mismo tiempo se vio que si se hace una reducción al problema de cotas comunes, esté es fácil de resolver y simultáneamente notamos que cuenta con una estructura algebraica muy poderosa.

Al principio de la tesis se habló de como estos problemas se pueden plantear usando restricciones enteras, esto fue con el fin de plantear todo en el mundo de investigación de operaciones en el que estamos todos acostumbrados. Además, se aprovechó para dar una muy breve introducción a las clases de complejidad por si el lector no se encontraba familiarizado con el tema.

Posteriormente, se dio una introducción a dos problemas realmente simples: el del matrimonio estable y el de admisión de universidades. Estos a pesar de su simplicidad son el primer paso para entender la situación completa de la tesis y nos dieron herramientas para estudiar el resto de los resultados.

Aprovechando los resultados anteriores se plantearon tres problemas y se demostró que dos de ellos son NP-Completos (el tercero también cumple esta propiedad, pero se decidió que la demostración no iba con los objetivos de la tesis). Estos problemas resultan interesantes porque con solo incluir una restricción a los problemas originales estos pasan de ser muy fáciles de resolver a muy difíciles.

Al final se vio que uno de los tres problemas de los planteados (el de cotas comunes) si le agregamos la propiedad de que estas son anidadas, el problema pasa de regreso a ser muy simple de resolver. Además, usando una estructura algebraica llamada matroides tuvimos la oportunidad de reevaluar muchos de los resultados de la tesis en un contexto diferente.

Apéndice A

Teoría de Gráficas

Definición A.1. Espinosa y cols. (2016)
Una **gráfica** es una pareja $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **vértices** y E es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de cardinalidad 2 de V y estos son llamados **aristas**.

Definición A.2. Espinosa y cols. (2016)
El **grado** de un vértice v es el número de aristas que inciden en v, se denota $d(v)$.

Definición A.3. Espinosa (2017) Se dice que una gráfica es **bipartita**, si su conjunto de vértices puede ser partido en dos subconjuntos ajenos X y Y, de tal forma que cada arista tiene un extremo en X y otro en Y. Esta partición tiene el nombre de **bipartición** de la gráfica.

Referencias

Biró, P., Fleiner, T., Irving, R. W., y Manlove, D. F. (2010). The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, *411*(34), 3136 - 3153.

Cook, W., Cunningham, W., Pulleyblank, W., y Schrijver, A. (s.f.). *Combinatorial optimization.* Wiley.

Espinosa, R. (2017). *Matemáticas discretas* (2.ª ed.). Alfaomega Grupo Editor.

Espinosa, R., Jinich, I., y Tame, A. (2016). Gráficas químicas. *Laberintos e Infinitos*(41), 31–36.

Fraleigh, J. (1976). *A first course in abstract algebra.* Addison Wesley.

Gale, D., y Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, *69*(1), 9–15.

Gale, D., y Sotomayor, M. (1985). Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, *11*(3), 223 - 232.

Gusfield, D., y Irving, R. W. (1989). *The stable marriage problem: Structure and algorithms.* Cambridge, MA, USA: MIT Press.

Irving, R. W., Manlove, D. F., Iwama, K., Miyazaki, S., y Morita, Y. (2002). Hard variants of stable marriage. *Theoretical Computer Science*, *276*(1-2), 261 - 279.

Knuth, D. E. (1997). *Stable marriage and it's relation to other combinatorial problems: An introduction to the mathematical analysis of algorithms* (Vol. 10). American Mathematical Society.

Lawler, E. (2015). *Combinatorial optimization, networks and matroids.* Dover.

Lipschutz, S. (1998). *Shaums's outline of theory and problems of set theory and related topics.* McGraw-Hill.

Papadimitriou, C., y Steiglitz, K. (2016). *Combinatorial optimization.* Dover.

Roth, A. E. (2014). *Who gets what–and why.* Eamon Dolan/Houghton Mifflin Harcourt.

Roth, A. E., y Sotomayor, M. A. O. (1990). *Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis.* Cambridge University Press.

Welsh, D. (2010). *Matroid theory.* Dover.