הסרת חלודה – חזקות ושורשים

תלמידים יקרים,
בקובץ זה מובאים מושגים וחוקים בסיסיים בנושא חזקות ושורשים. מטרת הקובץ היא לרענן את זיכרונכם ולעזור לכם להסיר חלודה שנצברה מאז הפעם האחרונה שתרגלתם חשבון.

קריאה מעמיקה של קובץ זה תסייע לכם במהלך התרגול בערכה.

בהצלחה!

חזקות

חזקה היא צורת כתיבה מקוצרת למכפלה של מספר בעצמו כמה פעמים. החזקה מורכבת משני מספרים, הבסיס והמעריך. הבסיס הוא המספר שיש לכפול בעצמו והמעריך הוא מספר הפעמים שיש לכפול את המספר בעצמו.

נגדיר:
בסיס = a
מעריך = n

מעריך

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots}_{n\ \text{פעמים}}$$

בסיס

לדוגמה:

$$2^4 = ?$$

בשאלה זו עלינו לכפול את הבסיס (2) בעצמו 4 פעמים, לפי המספר שבמעריך:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

חוקי חזקות

מכפלת חזקות בעלות בסיס שווה

כאשר כופלים חזקות בעלות בסיס שווה מחברים את המעריכים שלהן, למשל:

$$3^3 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^5 = 3^{3+2}$$

חוק זה בא לידי ביטוי בנוסחה הבאה:

$$\boxed{a^n \cdot a^k = a^{n+k}}$$

חילוק חזקות בעלות בסיס שווה

כאשר מחלקים חזקות בעלות בסיס שווה מחסרים בין המעריכים שלהן, למשל:

$$\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$$

ההסבר לכך הוא שהכפולות מצטמצמות בין המונה למכנה:

$$\frac{4^7}{4^2}=\frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}}=\frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}{1}=4^{7-2}=4^5$$

חוק זה בא לידי ביטוי בנוסחה הבאה:

$$\boxed{\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}}$$

חזקות בעלות מעריכים זהים

חזקה של מכפלה שווה למכפלת החזקות של שני הבסיסים.

לדוגמה:

$$(2\cdot3)^7=2^7\cdot3^7$$

נכתוב זאת כך:

$$\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$$

שימו לב, חוק זה עובד גם בחילוק שנמצא בתוך סוגריים:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

חזקה של חזקה

חזקה של חזקה שווה למכפלת המעריכים, הבסיס נשאר זהה, למשל:

$$(8^2)^3=8^2\cdot8^2\cdot8^2=8^{2+2+2}=8^{2\cdot3}=8^6$$

חוק זה בא לידי ביטוי בנוסחה הבאה:

$$\boxed{(a^n)^k=a^{n\cdot k}}$$

חזקה בעלת מעריך שלילי

חזקה בעלת מעריך שלילי שווה לחזקה בעלת מעריך חיובי, כאשר הבסיס הוא המספר ההופכי למספר שבבסיס המקורי:
למשל:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}$$

או

$$3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

כלומר כדי להפוך מעריך שלילי לחיובי, יש לעשות "הופכי" לבסיס. נכתוב זאת כך:

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} = \frac{1}{a^{n}}}$$

מקרים מיוחדים:

א. כל מספר בחזקת 0 שווה ל-1: $n^0 = 1$

ב. כל מספר בחזקת 1 שווה לעצמו: $n^1 = n$

ג. אפס בחזקת כל מספר שווה אפס: $0^n = 0$

ד. 1 בחזקת כל מספר שווה ל-1: $1^n = 1$

דוגמאות:

$$57^0 = 1$$

$$57^1 = 57$$

$$1^{732} = 1$$

$$0^{437} = 0$$

שורשים

פעולת השורש היא הפעולה ההפוכה לפעולת החזקה.

שורש נראה כך: $\sqrt[n]{a}$, כאשר המספר שנמצא מתחת לשורש (a) נקרא בסיס השורש, והמספר שנמצא מחוץ לשורש (n) נקרא מעריך השורש. $\sqrt[n]{a}$ הוא המספר שאם כופלים אותו בעצמו n פעמים מקבלים את המספר a.

הערה: כאשר השורש מופיע ללא מעריך, המעריך הוא 2. כלומר $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

דוגמה להמחשה – מהו השורש הריבועי של 9? $(\sqrt{9} = ?)$

כדי לענות על השאלה עלינו לשאול את עצמנו "מהו המספר שאם נכפול אותו בעצמו פעמיים, נקבל 9?"

אם נעלה את המספר 3 בריבוע נקבל את המספר 9. לכן, השורש הריבועי של 9 הוא 3 –

$$\sqrt{9} = 3$$

שאלה נוספת לדוגמה –

$$\sqrt[4]{16} = ?$$

עלינו למצוא את המספר שאם נכפול אותו בעצמו 4 פעמים (כלומר נעלה בחזקה רביעית), נקבל 16.

התשובה היא 2, שכן -

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

המרה משורש לחזקה ומחזקה לשורש

ההמרה משורש לחזקה מתבצעת באופן הבא:

עובר למונה

$$\sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$$

עובר למכנה

לדוגמה:

$$\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}$$

מחוק זה נובע שדרך נוספת לכתוב שורש ריבועי היא באמצעות חזקת $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{X} = \sqrt[2]{X} = \sqrt[2]{X^1} = X^{\frac{1}{2}}$$

כל חוקי החזקות חלים גם כשהמעריכים של החזקות הם שברים. לכן כדי לפשט ביטוי שמכיל שורשים, אפשר להמיר את השורשים לחזקות ולהשתמש בחוקי חזקות.

סיכום

	חזקות	שורשים
בסיסים זהים:	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} =$ להמיר לחזקות
	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} =$ להמיר לחזקות
מעריכים זהים:	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
חזקה על חזקה:	$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$
מעריך שלילי:	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$	לא קיים

<u>הערה חשובה</u>: לא קיים חוק חזקות שאומר לנו מה לעשות במקרה של **חיבור** או **חיסור** בין חזקות (או שורשים).
במקרה כזה הדבר היחיד שאפשר לעשות הוא להוציא גורם משותף (אם יש), למשל: $5^2 + 5^3 = 5^2(1+5)$.