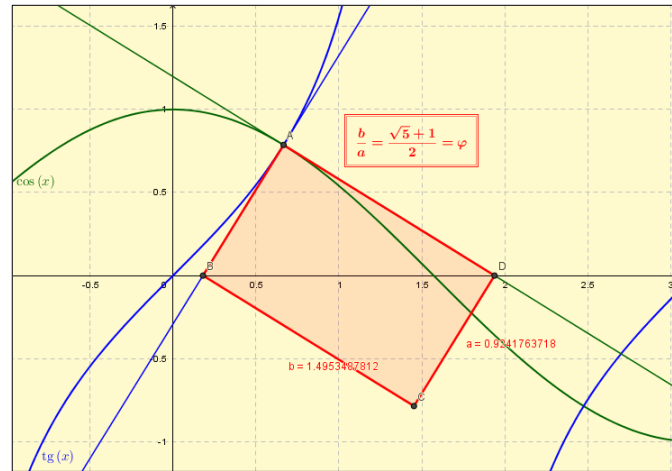


φ en la gráfica de $y = \cos(x)$ e $y = \operatorname{tg}(x)$



El número φ es la razón áurea o número de oro, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Es la solución positiva de la ecuación $t^2 - t - 1 = 0$, por lo que $\varphi^2 = \varphi + 1$ y, dividiendo por φ , $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

El punto de corte de las gráficas de $y = \cos(x)$ e $y = \operatorname{tg}(x)$ en el primer cuadrante es:

$$\cos x = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\begin{aligned} A &= (\arcsen(\varphi - 1), \cos(\arcsen(\varphi - 1))) = (\arcsen(\varphi - 1), \sqrt{1 - (\varphi - 1)^2}) \\ &= (\arcsen(\varphi - 1), \sqrt{2\varphi - \varphi^2}) = (\arcsen(\varphi - 1), \sqrt{\varphi - 1}) \end{aligned}$$

La derivada de $y = \cos x$ es $y' = -\operatorname{sen} x$, que en A vale $\varphi - 1$. La ecuación de la tangente es entonces:

$$t_{\cos}: y = \sqrt{\varphi - 1} - (\varphi - 1)(x - \arcsen(\varphi - 1))$$

Y corta al eje Ox en el punto de abscisa $\frac{1}{\sqrt{\varphi - 1}} + \arcsen(\varphi - 1)$. Por tanto,

$$b = \sqrt{\left(\arcsen(\varphi - 1) - \frac{1}{\sqrt{\varphi - 1}} - \arcsen(\varphi - 1)\right)^2 + (\sqrt{\varphi - 1})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\varphi - 1} + \varphi - 1} = \sqrt{\varphi + \frac{1}{\varphi}} = \sqrt[4]{5} \cong 1.495348781$$

La derivada de $y = \operatorname{tg} x$ es $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, que en A es $1 + (\sqrt{\varphi - 1})^2 = \varphi$, opuesta e inversa a la de $\cos(x)$, por lo que las tangentes en ese punto a las gráficas de estas funciones son perpendiculares. La ecuación de la tangente a la gráfica de $\operatorname{tg}(x)$ es:

$$t_{tg}: y = \sqrt{\varphi - 1} + \varphi(x - \arcsen(\varphi - 1))$$

Corta al eje Ox en el punto de abscisa $\arcsen(\varphi - 1) - \frac{\sqrt{\varphi - 1}}{\varphi} = \arcsen(\varphi - 1) - \frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}}$.

Por tanto,

$$a = \sqrt{\left(\arcsen(\varphi - 1) - \arcsen(\varphi - 1) + \frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}}\right)^2 + (\sqrt{\varphi - 1})^2} = \sqrt{\frac{1}{\varphi^3} + \varphi - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\varphi^3} + \frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{1}{\varphi} + \varphi} = \frac{1}{\varphi} \sqrt[4]{5} \cong 0.9241763718$$

Por tanto

$$\boxed{\frac{b}{a} = \varphi}$$

El área del rectángulo es $S = \frac{1}{\varphi} \sqrt[4]{5} \sqrt[4]{5} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \cong 1.381966011$