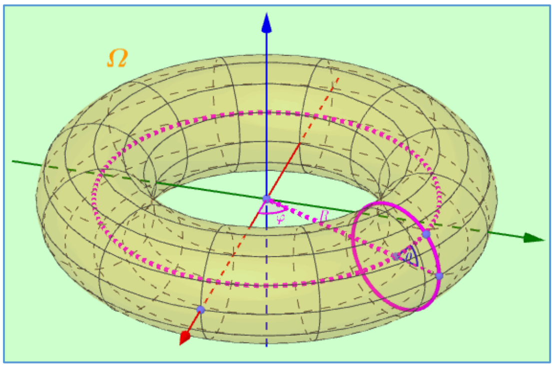
Círculos de Villarceau

Los **círculos de Villarceau** son las secciones de una superficie tórica (‘*toro*’) por un plano con una adecuada inclinación. Un toro es la superficie generada por una circunferencia de radio **r** que rota en torno a un eje contenido en su plano, a una distancia **R > r** de su centro. Este eje va a ser el *eje del toro*, el plano perpendicular al eje que pasa por el centro de la circunferencia es el *plano ecuatorial*, y los planos que contienen al eje serán *planos meridionales* del toro.

Cualquier plano paralelo al ecuatorial corta al toro en dos, uno o ningún círculo, según que su distancia a tal plano sea menor igual o mayor que **r**. Si son dos, uno está in la parte exterior del toro y el otro en la interior. Y cualquier plano meridional corta al toro en dos círculos de radio r, simétricos respecto del eje. Por tanto, por cualquier punto de la superficie pasan dos círculos contenidos en ella como los que se han descrito, un *paralelo* y un *meridiano*. Veremos que también pasan otros dos, contenidos en sendos planos oblicuos simétricos respecto del meridional que pasa por el punto.



Para obtener su ecuación cartesiana supondremos que la circunferencia generadora está inicialmente en el plano **OXZ** con centro en el punto **(R, 0, 0)**, girando **360º** en torno al eje **OZ**. Las ecuaciones paramétricas de esta circunferencia en su posición inicial son:

$$\begin{cases} x = R + r\cos\theta \\ y = 0 \\ z = \text{r sen}\,\theta \end{cases}$$

Al hacer girar esta circunferencia alrededor de OZ, variando el ángulo φ, obtenemos las ecuaciones paramétricas del toro:

$$\Omega: \begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (R + r\cos\theta)\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \text{r sen}\,\theta \end{cases}$$

Elevándolas al cuadrado y sumando:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + r\cos\theta)^2 + r^2\,\text{sen}^2\,\theta = R^2 + 2rR\cos\theta + r^2 \implies$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2}{2R} = r\cos\theta$$

Elevando esta ecuación al cuadrado y sumando z^2,

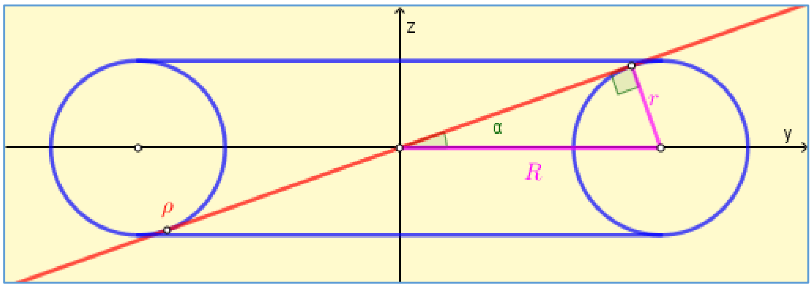
$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2}{2R}\right)^2 + z^2 = r^2$$

Con lo que podemos escribir la ecuación implícita de 4º grado:

$$\Omega: (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$$

Sus secciones planas serán entonces curvas de 4º grado, como por ejemplo los pares de círculos que hemos visto anteriormente.

Consideremos ahora una sección por un plano tangente interiormente a dos círculos meridianos opuestos, que dada la simetría rotacional del toro en torno a su eje podemos suponer situados en cualquier posición, y en concreto en el plano **OYZ**, de manera que el plano sección sea paralelo, y contenga, al eje **OX**.



La ecuación de este plano será:

$\rho: z = \tan\alpha\ y$

Pero $\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{R}$, por lo que $\tan\alpha = \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$, y nos queda:

$$\rho: z = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, y$$

Reemplazando **z** en la ecuación implícita de Ω, obtenemos la proyección ortogonal en el plano **OXY** de la intersección:

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}y^2 - R^2 - r^2\right)^2 = 4R^2\left(r^2 - \frac{r^2}{R^2 - r^2}y^2\right)$$

$$\left(x^2(R^2 - r^2) + R^2y^2 - (R^2 + r^2)(R^2 - r^2)\right)^2 = 4R^2r^2(R^2 - r^2)(R^2 - r^2 - y^2)$$

$$x^4(R^2 - r^2)^2 + 2R^2x^2y^2(R^2 - r^2) - 2x^2(R^2 + r^2)(R^2 - r^2)^2 + R^4y^4 - 2R^2y^2(R^2 - r^2)^2 + (R^2 - r^2)^4 = 0$$

$$(x^2(R^2 - r^2) - 2rx(R^2 - r^2) + R^2y^2 - (R^2 - r^2)^2) \cdot (x^2(R^2 - r^2) + 2rx(R^2 - r^2) + R^2y^2 - (R^2 - r^2)^2) = 0$$

$$\left(x^2 - 2rx + \frac{R^2y^2}{R^2 - r^2} - (R^2 - r^2)\right) \cdot \left(x^2 + 2rx + \frac{R^2y^2}{R^2 - r^2} - (R^2 - r^2)\right) = 0$$

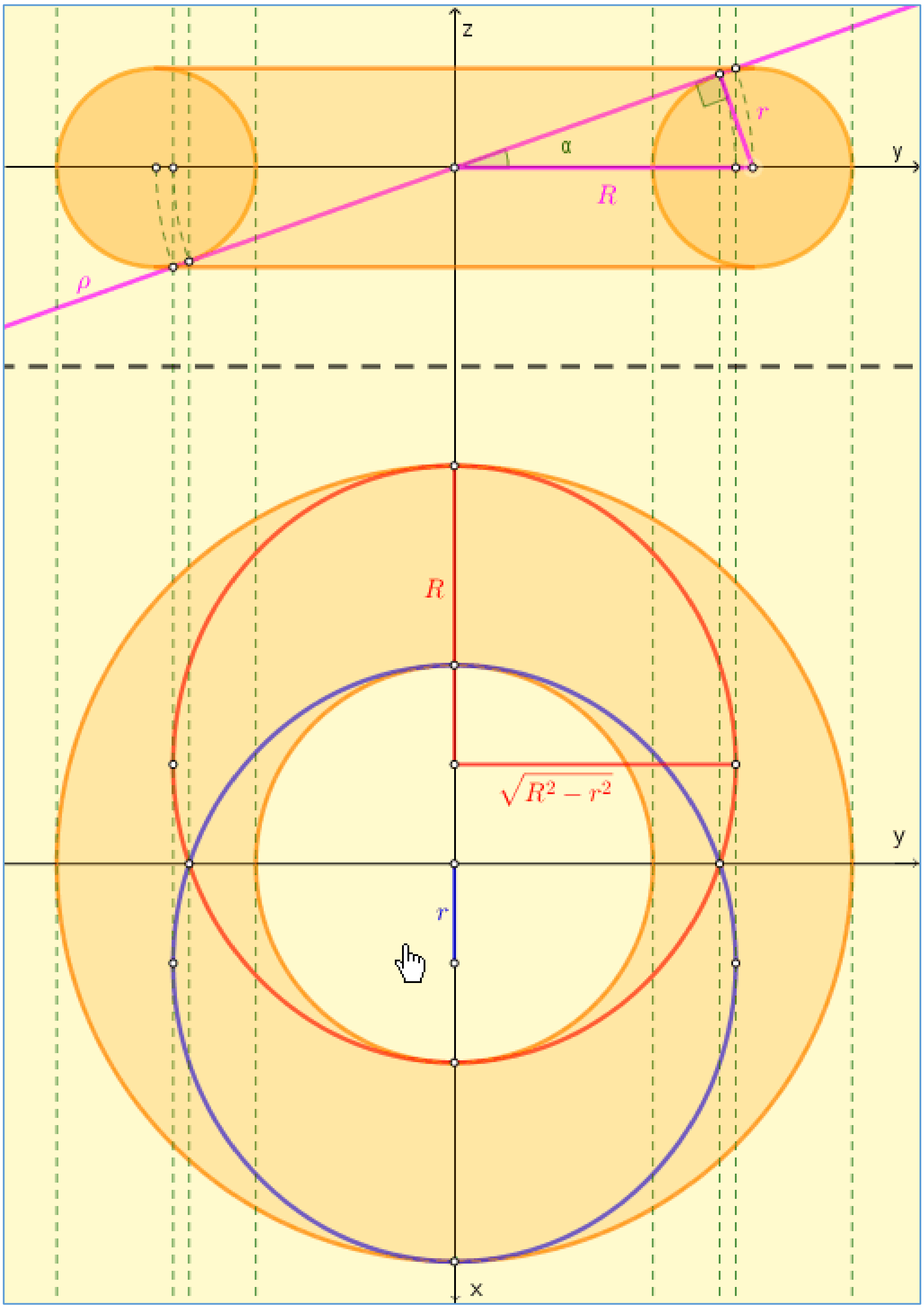
$$\left((x - r)^2 + \frac{R^2y^2}{R^2 - r^2} - R^2\right) \cdot \left((x + r)^2 + \frac{R^2y^2}{R^2 - r^2} - R^2\right) = 0$$

$$\left(\frac{(x - r)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - r^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{(x + r)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - r^2} - 1\right) = 0$$

$$\frac{(x - r)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - r^2} = 1 \quad \cup \quad \frac{(x + r)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - r^2} = 1$$

Se trata de un par de elipses gemelas con centros en $(r, 0)$ y $(-r, 0)$, y semiejes $a = R$, principal a lo largo del eje **OX**, y secundario $b = \sqrt{R^2 - r^2}$ a lo largo del eje **OY**.

Pero ésta es la proyección ortogonal sobre el plano **OXY** de la intersección, que se encuentra en el plano ρ, que contiene al eje **OX**. Los semiejes principales a son los mismos, mientras que los b debemos dividirlos por $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R^2}$, con los que nos queda $b = R$, y se trata en realidad de dos círculos de radio R.



Pueden verse en https://ilarrosa.github.io/GeoGebra/SeccionesToricas.html y [https://www.geogebra.org/m/V6EuSFsM,](https://www.geogebra.org/m/V6EuSFsM) en un applet de GeoGebra en 3D manipulable.