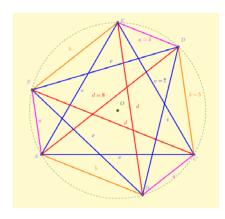
Ignacio Larrosa Cañestro 14/01/2024

Familia infinita de hexágonos convexos con lados y diagonales enteros



Comenzamos con un triángulo de lados \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} y \boldsymbol{c} , de manera que $c^2=a^2+b^2+ab$, con lo que el ángulo opuesto al lado \boldsymbol{c} será de 120° (teorema del coseno), como el \boldsymbol{CDE} de la figura. Un ejemplo de tal triángulo con lados enteros es (a,b,c)=(3,5,7). Veremos más adelante que hay infinitos y parametrizaremos una familia. En lo que sigue, se supondrá siempre que $\{a,b,c\}\subset \mathbb{N}^*\equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Para evitar duplicidades, supondremos además que a < b (a = b es imposible, pues $\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$).

Sobre el lado c se construye un triángulo equilátero CEA hacia el exterior. El cuadrilátero resultante tiene un par de ángulos opuestos suplementarios, de 120° y 60°, por lo que es circunscriptible y por el Teorema de Ptolomeo sabemos que su otra diagonal d verifica:

$$d \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow d = a + b$$

y por tanto es entera.

Giramos ahora 120° en sentido positivo el triángulo *CDE* en torno al centro *O* del triángulo equilátero *ACE*. El nuevo vértice *F* pertenece obviamente a la circunferencia Ω circunscrita al cuadrilátero *ACDE*. Se tiene entonces que *FD=c* y que *CF=d*, con lo que ya tenemos un pentágono convexo con lados y diagonales enteras $\{a, b, c, d\}$. Rotando F otros 120° , tenemos un hexágono circunscrito, con simetría rotacional de orden 3, con sus lados y diagonales enteros.

Para buscar una familia infinita debemos estudiar las soluciones de la ecuación diofántica homogénea

$$c^2 = a^2 + b^2 + a \cdot b \quad (\#1)$$

Dividiendo por c^2 y haciendo $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ nos queda la ecuación

$$x^2 + y^2 + x \cdot y = 1 \quad (\#2)$$

cuyas soluciones racionales nos proporcionan soluciones enteras de #1 al multiplicarlas por el máximo común múltiplo de sus denominadores.

La ecuación #2 representa una elipse que pasa por los 6 puntos racionales $(\pm 1,0), (0,\pm 1), (\mp 1,\pm 1)$. Estamos interesados en soluciones racionales con 0 < x < y < 1. Como (-1, 0) es un punto racional, la otra intersección de la elipse con la recta $y=t(x+1), t\in \mathbb{Q}$, también será racional. Pero $x=y>0 \Rightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}$, luego para obtener valores de \mathbf{x} e \mathbf{y} que cumplan las condiciones, debemos tomar \mathbf{t} de forma que:

Ignacio Larrosa Cañestro 14/01/2024

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < t < 1 \quad (\cong 0.36 < t < 1)$$

Busquemos esta otra intersección,

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t + t^2}$$
$$y = \frac{2t + t^2}{1 + t + t^2}$$

Haciendo $t=1-\frac{1}{n+1}$, nos queda $n>\frac{\sqrt{3}}{3} \,\Rightarrow\, n\geq 1$

Tenemos entonces,

$$a = 2n + 1
b = 3n^{2} + 2n
c = 3n^{2} + 3n + 1
d = 3n^{2} + 4n + 1$$

n	а	b	С	d
1	3	5	7	8
2	5	16	19	21
3	7	33	37	40
4	9	56	61	65
5	11	85	91	96
6	13	120	127	133
7	15	161	169	176
8	17	208	217	225
9	19	261	271	280
10	21	320	331	341