

Números que se invierten al multiplicarlos por 4 o 4-flips

1º Si $\{F_i\}$ es un conjunto cualquiera de 4-flips, cualquier concatenación **SIMÉTRICA** de ellos también lo es. Denotando la concatenación por '&', $F = F_{i1} \& F_{i2} \& \dots \& F_{in}$ es simétrica si $i_k = i_{n+1-k}$, $k=1 \dots n$. Por ejemplo:

$$F_1 \& F_2 \& F_1 \& F_3 \& F_1 \& F_2 \& F_1 \text{ ó } F_1 \& F_1$$

Llamando en general $F' = 4 \cdot F$, tendríamos $F' = 4 \cdot F = F'_{i1} \& F'_{i2} \& \dots \& F'_{in}$, puesto que al multiplicar cada 4-flip por 4 el número de cifras se mantiene. Entonces si F es una concatenación simétrica de 4-flips, se ve fácilmente que las cifras de F' son las de F en orden inverso.

2º Llamemos a estos 4-flips "**compuestos**", y "**simples**" a los que no se pueden descomponer en una concatenación simétrica de 4-flips. Veamos entonces como deben ser los 4-flips simples.

3º Sea $F = a_n \& a_{n-1} \& \dots \& a_1 \& a_0$ un 4-flip, donde los a_i son números del 0 al 9. Entonces $F' = a_0 \& a_1 \& \dots \& a_{n-1} \& a_n$. Ha de ser $a_0 = 4 \cdot a_n$, para que no aumente el número de cifras, lo que nos da tres posibilidades: $a_0 = a_n = 0$; $a_n = 1$ y $4 \leq a_0 \leq 9$; o $a_n = 2$ y $a_0 \geq 8$. De la primera posibilidad nos surge el primer 4-flip: 0. Le denominaremos por razones que luego se verán, F_{-2} .

Si por alguna extraña razón decidiéramos que un 4-flip podía empezar por 0, también terminaría en 0 y una de dos: o es simplemente 0 o es compuesto, pues las cifras intermedias también conformarían un 4-flip.

El segundo caso se descarta de inmediato, pues $a_n \equiv 4 \cdot a_1 \pmod{10}$ y por lo tanto par.

Entonces, $a_n = 2$ y $2 \equiv 4 \cdot a_0 \pmod{10} \Rightarrow a_0 = 8$ (recordemos $a_0 \geq 8$).

Por tanto, $F = 2 \& a_{n-1} \& \dots \& a_1 \& 8$.

a_{n-1} sólo puede ser 0, 1 ó 2, para no producir un acarreo sobre a_n :

$$\#1 \quad a_1 \equiv 4 \cdot a_{n-1} + c \pmod{10} \quad (c \leq 3, \text{ acarreo anterior})$$

$$\#2 \quad a_{n-1} \equiv 4 \cdot a_1 + 3 \pmod{10}$$

Por #2 a_{n-1} tiene que ser impar, así que $a_{n-1} = 1$ y $a_1 = 2$ ó 7

Pero $a_1 = 2 \Rightarrow c = 8$, por lo que debe ser $a_1 = 7$ y $c = 3$.

Un 4-flip "simple" debe ser por tanto de la forma 21..78. Con ello tenemos el segundo

4-flip simple: 2178 (llamémosle F_0), y vemos que no hay otro con menos de

cinco cifras. Vamos con a_{n-2} y a_{-2} :

$$\#3 \quad a_{-2} \equiv 4 \cdot a_{n-2} + c \pmod{10} \quad (\text{y se genera un acarreo de 3})$$

$$\#4 \quad a_{n-2} \equiv 4 \cdot a_2 + 3 \pmod{10}$$

Sustituyendo a_{n-2} en #3, se tiene $a_2 \equiv 16 \cdot a_2 + 12 + c \equiv 6 \cdot a_2 + 2 + c \pmod{10} \Rightarrow 5 \cdot a_2 + 2 + c \equiv 0 \Rightarrow c = 3 \text{ ó } 8$, pero $c \leq 3$, por lo que es $c = 3$ y a_2 impar. Por #3, debe ser $a_{n-2} \geq 7$ y por #4 es impar, luego $a_{n-2} = 7 \text{ ó } 9$.

i) $a_{n-2}=7$ y $a_2=1$. Se tiene:

$$\#5 \quad a_3 \equiv 4 \cdot a_{n-3} + c \pmod{10} \quad (\text{y se genera un acarreo de } 3)$$

$$\#6 \quad a_{n-3} \equiv 4 \cdot a_3 \pmod{10}$$

Sustituyendo a_{n-3} en #5, se tiene $a_3 \equiv 16 \cdot a_3 + c \equiv 6 \cdot a_3 + c \pmod{10} \Rightarrow c = 0 \text{ ó } 5$. Pero $c \leq 3$, por lo que es $c = 0$. Como en #5 debe producirse un acarreo de 3 y por #6 debe ser par, tiene que ser

$$a_{n-3} = 8 \text{ y } a_3 = 2$$

Si el número de cifras es 4 obtenemos $F_0=2178$. Si no debe ser al menos 8, obteniéndose 2178...2178, un 4-flip "compuesto" con F_0 como uno de sus "elementos". Exactamente $F_0 \& F$ & F_0 , con F un 4-flip cualquiera o una cadena vacía.

ii) $a_{n-2}=a_2=9$. Tenemos ya $F=219..978$.

$$\#7 \quad a_3 \equiv 4 \cdot a_{n-3} + c \pmod{10} \quad (\text{y se genera un acarreo de } 8)$$

$$\#8 \quad a_{n-3} \equiv 4 \cdot a_3 + 3 \pmod{10}$$

Este sistema es idéntico al #3 - #4, y se reproduce la misma situación:

a) $a_{n-3} = 7$ y $a_3 = 1$, lo que lleva a $a_{n-4} = 8$ y $a_4 = 2$, $F=21978$ ó $21978...21978$,

b) $a_{n-3} = a_3=9$

Por tanto, un 4-flip simple o es 0, o empieza por 21, continua con una cadena de cero o más 9 y un 78 para finalizar.

Es decir, todos los 4-flips simples son de la forma $F_n = 2100 \cdot 10^n + (10^n - 1) \cdot 100 + 78$, con $n = -2, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$$F_{-2} = 0, F_0=2178, F_1=21978, F_2=219978, \text{ etc } \dots$$

Y los demás son concatenaciones simétricas de estos. Por ejemplo:

$$2199780219978 \cdot 9 = 8799120879912$$