**ABAU 2024 Junio Galicia**

**Pregunta 1. Números y Álgebra. (2 puntos)**

Sean $A$ y $B$ dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2$.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$ , siendo *I* la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

**Respuesta.**

a) $A = 2(A+B) - (A+2B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A^2 + 2I)X = 3I + (A+B)^T$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

**Pregunta 2. Números y Álgebra. (2 puntos)**

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$

**Respuesta.**

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 = m^2(m-4)$$

$m \neq 0, 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3 \Rightarrow s.c.d.$

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \end{cases} \Rightarrow s.i.$$

$$m = 4 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3 \end{cases} \Rightarrow s.i.$$

(Se han utilizado las dos/tres últimas columnas y filas de la matriz ampliada en cada caso)

Para *m = 4* basta ver que la 1ª y 2ª ecuaciones son incompatibles, pues 2*1ª - 2ª $\Longrightarrow$ *0 = 1*.

**Pregunta 3. Análisis. (2 puntos)**

a) Enuncie los teoremas de Rolle y Bolzano.
b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

**Respuesta:**

a) Teorema de Rolle: «Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), y f(a) = f(b) $\Longrightarrow \exists$ c ∈ (a, b) tal que f'(c)=0».
Teorema de Bolzano: «Si f es una función continua en [a, b] y f(a)·f(b) < 0 $\Longrightarrow \exists$ c ∈ (a, b) tal que f(c)=0».

b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\left(2xe^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C$
$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$
$dv = 2xe^{x^2}dx \Rightarrow v = e^{x^2}$

**Pregunta 4. Análisis. (2 puntos)**

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\sin x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$

**Respuesta:**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x}}{\sin x+x\cos x} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\,x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2\cos x-x\,sin\,x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos x-e^x}{2x} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)-e^x}{2} = \frac{0}{2} = 0$
Nota: Antes de aplicar la regla de L'Hôpital debe comprobarse que numerador y denominador tienden ambos a 0 o ambos a ∞ (a 0 en todos los casos de este problema).

**Pregunta 5. Geometría. (2 puntos)**

a) Considérese el plano $\pi$: $4x+2y+bz=2$ y la recta $r$: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, donde $b$ y $c$ son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar $b$ y $c$ para que a recta $r$ esté contenida en $\pi$.
b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi'$: $4x+2y-4z=2$.

**Respuesta:**

a) El vector director de la recta y el vector normal al plano deben ser perpendiculares: $(4,2,b)\cdot(3,2,4) = 16+4b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-4} \Rightarrow \pi: 4x+2y-4z=2$

El punto (2, c, 3) por el que pasa la recta, debe estar en el plano:

$4\cdot 2+2\cdot c-4\cdot 3 = 2 \Rightarrow \boxed{c=3}$

b) $D(P,\pi') = \frac{|4\cdot 1+2(-1)-4(-1)-2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**Pregunta 6. Geometría. (2 puntos)**

a) Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano $\pi$ que contiene a *Q*, *R* y *S*.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x+23y+6z-35=0$.

**Respuesta:**

a) Si $P(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano, los vectores $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QS}$ deben ser coplanarios, por lo que su ecuación será:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -4(x+1)-23(y-3)-6(z+5) = -4x-23y-6z+35=0$$

O, cambiándole el signo, $\pi: 4x+23y+6z-35=0$

b) El vector director de la recta es $\vec{v}=(4,23,6)$ y ha de pasar por P, luego:

$$r: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+23t \\ z = -1+6t \end{cases}, \quad r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$$

**Pregunta 7. Estadística y probabilidad. (2 puntos)**

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$,

a) Suponiendo que $A$ y $B$ son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)$.

b) Suponiendo que $A$ y $B$ son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios de $A$ y $B$ respectivamente)

**Respuesta:**

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Si se trata de sucesos independientes, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ y:

$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\right)}{P(\bar{A}\cup\bar{B})}=\frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A\cap B})}=\frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{4}{5}$$

b) Si se trata de sucesos incompatibles, $P(A\cap B)=0$ y:

$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

$$P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\right)}{P(\bar{A}\cup\bar{B})}=\frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A\cap B})}=\frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1-0}=\frac{2}{3}$$

**Pregunta 8. Estadística y probabilidad. (2 puntos)**

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

**Respuesta:**

Se trata de una normal $N(500, 4)$. Sea $p(Z)$ la probabilidad de que una variable con distribución $N(0, 1)$ sea menor o igual que Z.

a) $P(499 \leq X \leq 502) = p\left(\frac{502-500}{4}\right) - p\left(\frac{499-500}{4}\right) = p(0.5) - p(-0.25)$
$= 0.6915 - \big(1 - p(0.25)\big) = \ 0.6915 + 0.5987 - 1 = 0.2902$

b) Sea $X_0$ tal cantidad. Claramente es $X_0 < 500$ , la media.
$P(X > X_0) = 1 - P(X \leq X_0) = 0.975 \ \Rightarrow P(X \leq X_0) = p\left(\dfrac{X_0 - 500}{4}\right)$
$= 1 - p\left(\dfrac{500 - X_0}{4}\right) = 0.025 \Rightarrow p\left(\dfrac{500 - X_0}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \dfrac{500 - X_0}{4}$
$= 1.96 \Rightarrow X_0 = 500 - 4 \cdot 1.96 = 492.16\, ml$