Cuadrados inscritos en una cúbica

En lo que sigue designaremos, algo incorrectamente y en aras de la brevedad, como «cúbica» a la gráfica de un polinomio de 3er grado: $y = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sin pérdida de generalidad, podemos trasladar su punto de inflexión al origen, de manera que $a_2 = a_0 = 0$. Nos queda entonces el polinomio en la forma reducida $y = x^3 - ax$, donde se ha hecho $a = - a_1$ por conveniencia, pues evidentemente es necesario para poder inscribir un cuadrado en la cúbica, que sea $a_1 < 0$ en la forma reducida. Por tanto, en lo sucesivo será siempre $a > 0$.

Si una de las diagonales tiene por ecuación $y = mx$, la otra será $y = -\frac{1}{m}x$. Tomaremos entonces $m > 0$. Debe ser $m \neq 0$, pues de lo contrario tendríamos dos vértices del cuadrado con la misma abscisa. En cada cuadrante debe hallarse un vértice del cuadrado. Sea $A(p, q)$ el del primer cuadrante. El del segundo cuadrante será entonces $B(-q, p)$.

Se tiene entonces para A y B:

A: $q = p^3 - ap = mp \Rightarrow p^2 = m + a$ (#1)

B: $p = -q^3 + aq = \frac{-1}{m}(-q) = \frac{q}{m} \Rightarrow q^2 = a - \frac{1}{m}$ (#2)

Reemplazando en #2 $q = mp$

$m^2p^2 = a - \frac{1}{m}$ (#3)

Multiplicando #1 por m^2 e igualando con #3,

$m^3 + am^2 = a - \frac{1}{m} \Leftrightarrow m^4 + am^3 - am + 1 = 0$ (#4)

Esta es una ecuación *opuesto-recíproca*, en la que si m es una solución, $-\frac{1}{m}$ también lo es, lo que se corresponde con que las diagonales del cuadrado son perpendiculares. Tendremos por tanto 0, 2 o 4 soluciones, correspondiendo a 0, 1 o 2 cuadrados inscritos. Dividiendo por m^2,

$$m^2 + \frac{1}{m^2} + a\left(m - \frac{1}{m}\right) = 0$$

y haciendo el cambio:

$$t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow t^2 = m^2 + \frac{1}{m^2} - 2$$

$$t^2 + at + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$$

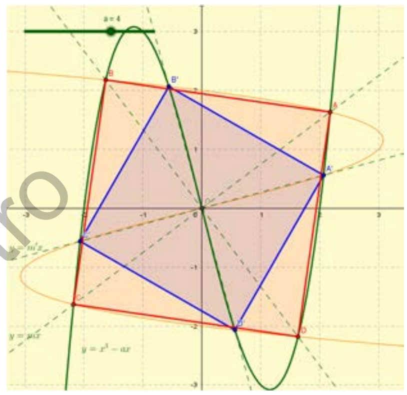
Vemos entonces que si $a < 2\sqrt{2}$ no hay soluciones, para este valor hay una, y para valores mayores dos. Deshaciendo el cambio,

$$t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 - tm - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

Como estamos interesados en las pendientes positivas, consideramos solo el signo '+'. Nos quedan entonces,

$$m = \frac{\frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2+8 \mp 2a\sqrt{a^2-8}} \pm \sqrt{a^2-8} - a}{4}$$

Para $a = 2\sqrt{2}$, tenemos la solución única $m = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, mientras que para $a > 2\sqrt{2}$ hay dos soluciones:



$$m = \frac{\sqrt{2a^2+8-2a\sqrt{a^2-8}} + \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < m < 1$$

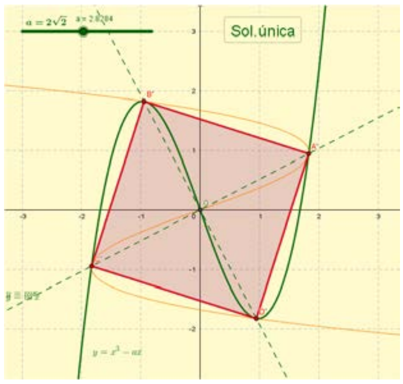
$$m' = \frac{\sqrt{2a^2+8+2a\sqrt{a^2-8}} - \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad 0 < m < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Cuando $a \to \infty,\ m \to 1$ y $m' \to 0$.

Los vértices son los puntos:

$$A = \left(\sqrt{a+m}, \sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), B = \left(-\sqrt{a-\frac{1}{m}}, \sqrt{a+m}\right)$$

$$C = \left(-\sqrt{a+m}, -\sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), D = \left(\sqrt{a-\frac{1}{m}}, -\sqrt{a+m}\right)$$



Y el área del cuadrado,

$$S = 2\left(2a + m - \frac{1}{m}\right)$$

Donde pueden colocarse ′ a la pendiente y nombres de los vértices.

Para $a = 2\sqrt{2}$, se tiene $A = \left(\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3+\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)$ y $S = 6\sqrt{2}$.