Progresiones aritméticas en las filas del triangulo de Tartaglia-Pascal

Ignacio Larrosa Cañestro

12 de enero de 2026

Para buscar las progresiones aritméticas de términos consecutivos en las filas del Triángulo de Tartaglia, también conocido como de Pascal, buscaremos aquellas que tengan al menos tres elementos. En una progresión aritmética con tres elementos, el intermedio es la media aritmética de los otros dos. Por tanto, hemos de buscar soluciones a la ecuación diofántica

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+2} = 2\binom{n}{k+1}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} = \frac{2n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Multiplicando toda la igualdad por $\frac{(k+2)!(n-k)!}{n!}$,

$$(k+2)(k+1) + (n-k)(n-k-1) = 2(k+2)(n-k)$$

Esta es una ecuación de 2º grado en n y k. Resolviendo para k,

$$k = \frac{n-2 \pm \sqrt{n+2}}{2}$$

Observamos que siempre que $\sqrt{n+2}$ sea entero, también lo son ambos valores de k, pues el numerador será par tanto si n es par como si es impar. Los dos valores corresponden a la parte izquierda y derecha de la fila del triángulo, que es simétrico. Por tanto, hay una progresión aritmética para cada $n = m^2 - 2$, contando solo la correspondiente a la parte izquierda, con $k < \frac{n}{2}$. Deducimos a la vez que no hay progresiones aritméticas con cuatro o más términos, pues nos aparece como máximo una creciente de tres términos por línea

$$\binom{m^2-2}{\frac{m^2-m-4}{2}}, \ \binom{m^2-2}{\frac{m^2-m-2}{2}}, \ \binom{m^2-2}{\frac{m^2-m}{2}} \qquad m \geq 2$$

$m=2,$	$n=4,$	$k=-1,$	0	1	2
$m=3,$	$n=7,$	$k=1,$	7	21	35
$m=4,$	$n=14,$	$k=4,$	1001	2002	3003
$m=5,$	$n=23,$	$k=8,$	490314	817190	1144066
$m=6,$	$n=34,$	$k=13,$	972983760	1391975640	1855967520
$m=7,$	$n=47,$	$k=19,$	6973199770790	9762479679106	12551759587422

Para m = 2 se ha considerado que $\binom{n}{k}$ = 0 si n <0, k <0 o k >n.

La progresión obtenida para $m=4$ es llamativa: $\{1001,\ 2002,\ 3003\}$. Es la única cuyos elementos están en la proporción $1:2:3$, pues

$$\binom{m^2-2}{\frac{m^2-m-2}{2}} = 2\binom{m^2-2}{\frac{m^2-m-4}{2}} \implies \frac{m}{m-2} = 2 \implies m=4$$

Da lugar a la curiosa configuración presente, así como a su simétrica, en las filas 14 a 16:

$$\begin{array}{ccccc} 1001 & & 2002 & & 3003 \\ & 3003 & & 5005 & \\ & & 8008 & & \end{array}$$

Se da aquí la igualdad

$$\binom{14}{6} = \binom{15}{5} = 3003$$

En general, la igualdad

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+2}$$

se produce siempre que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k+2} \tag{1}$$

Pero como queda dicho, estos números combinatorios solo están en la proporción $1:2:3$ para $n=14,\ k=4$.

La igualdad (1) da lugar a una sucesión infinita, pero de términos que crecen muy rápidamente, de repeticiones de números combinatorios, como se trata en *Repeticiones no triviales en el Triángulo de Tartaglia*. Estos números se repiten 6 veces en el triángulo (dos más por simetría y otras dos en su propia fila). El hecho de que también $3003=\binom{78}{2}$ lo hace excepcional, siendo el único número conocido, aparte del 1, que aparece más de 6 veces, en realidad 8 veces, en el Triángulo de Tartaglia.

Veamos que en el triángulo solo aparece a lo sumo una terna de números consecutivos en una fila en la proporción $a:b:c$, siendo a, b y c enteros positivos cualesquiera. Sea

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{b}{a} \implies \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = p \implies p = \frac{n-k}{k+1} \\ q=\frac{c}{b} \implies \frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = q \implies q = \frac{n-k-1}{k+2} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} n = \frac{pq+2q+1}{p-q} = \frac{ab+2ac+bc}{b^2-ac} \\ k = \frac{p-2q-1}{q-p} = \frac{ab+2ac-b^2}{b^2-ac} \end{array}\right.$$

Es decir, podemos definir una función que asigne a cada terna $a : b : c$ la fila y columna en la que comienza

$$TRT(a,\ b,\ c) = \left[\frac{ab + 2ac + bc}{b^2 - ac},\ \frac{ab + 2ac - b^2}{b^2 - ac}\right] = [n,\ k]$$

a condición de que los valores de n y k sean enteros y $0 \leq k \leq n$. En particular, vemos que debe ser $b^2 - ac > 0$, lo que impide que existan progresiones geométricas.

Lo que si hay siempre son ternas proporcionales a tres enteros consecutivos $a : a{+}1 : a{+}2$, puesto que $(a + 1)^2 - a(a + 2) = 1$. Explícitamente,

$$TRT(a,\ a + 1,\ a + 2) = \left[4a^2 + 8a + 2,\ 2a^2 + 3a - 1\right]$$

Esto nos garantiza la existencia de una terna pitágorica, tomando $a = 3$

$$TRT(3,\ 4,\ 5) = [62,\ 26]$$

$$\binom{62}{26}^2 + \binom{62}{27}^2 = \binom{62}{28}^2$$

$$209769429934732479^2 + 279692573246309972^2 = 349615716557887465^2$$

$$\left[\binom{62}{26},\ \binom{62}{27},\ \binom{62}{28}\right] = 69923143311577493\,[3,\ 4,\ 5]$$

Esta es la única terna pitagórica presente en el Triángulo de Tartaglia. Vease esta entrada del blog de Gaussiannos o directamente el artículo de Florian Luca.