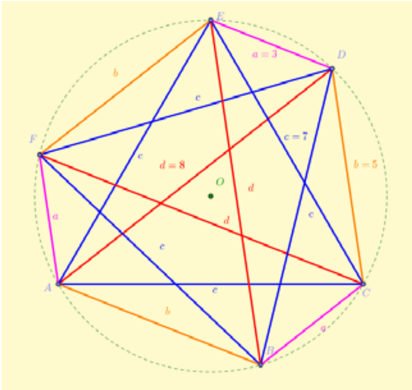
Familia infinita de hexágonos convexos con lados y diagonales enteros



Comenzamos con un triángulo de lados ***a***, ***b*** y ***c***, de manera que $c^2=a^2+b^2+ab$, con lo que el ángulo opuesto al lado ***c*** será de 120º (teorema del coseno), como el ***CDE*** de la figura. Un ejemplo de tal triángulo con lados enteros es (a, b, c) = (3, 5, 7). Veremos más adelante que hay infinitos y parametrizaremos una familia. En lo que sigue, se supondrá siempre que $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para evitar duplicidades, supondremos además que a < b (a = b es imposible, pues $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$).

Sobre el lado ***c*** se construye un triángulo equilátero ***CEA*** hacia el exterior. El cuadrilátero resultante tiene un par de ángulos opuestos suplementarios, de 120º y 60º, por lo que es circunscriptible y por el Teorema de Ptolomeo sabemos que su otra diagonal $\underline{d}$ verifica:

$$d \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow d = a + b$$

y por tanto es entera.

Giramos ahora 120º en sentido positivo el triángulo ***CDE*** en torno al centro ***O*** del triángulo equilátero ***ACE***. El nuevo vértice ***F*** pertenece obviamente a la circunferencia ***Ω*** circunscrita al cuadrilátero ***ACDE***. Se tiene entonces que ***FD=c*** y que ***CF=d***, con lo que ya tenemos un pentágono convexo con lados y diagonales enteras ***{a, b, c, d}***. Rotando F otros 120º, tenemos un hexágono circunscrito, con simetría rotacional de orden 3, con sus lados y diagonales enteros.

Para buscar una familia infinita debemos estudiar las soluciones de la ecuación diofántica homogénea

$$c^2 = a^2 + b^2 + a \cdot b \quad (\#1)$$

Dividiendo por c^2 y haciendo $x = \frac{a}{c},\ y = \frac{b}{c}$ nos queda la ecuación

$$x^2 + y^2 + x \cdot y = 1 \quad (\#2)$$

cuyas soluciones racionales nos proporcionan soluciones enteras de #1 al multiplicarlas por el máximo común múltiplo de sus denominadores.

La ecuación #2 representa una elipse que pasa por los 6 puntos racionales $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\mp 1, \pm 1)$. Estamos interesados en soluciones racionales con $0 < x < y < 1$. Como (-1, 0) es un punto racional, la otra intersección de la elipse con la recta $y = t(x + 1), t \in \mathbb{Q}$, también será racional. Pero $x = y > 0 \ \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego para obtener valores de ***x*** e ***y*** que cumplan las condiciones, debemos tomar **t** de forma que:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < t < 1 \quad (\cong 0.366 < t < 1)$$

Busquemos esta otra intersección,

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + x \cdot y = 1 \\ y = t \cdot x + t \end{array}\right\} \Rightarrow (t^2+t+1)x^2 + (2t^2+t)x + t^2 - 1$$
$$= (x+1)\big((t^2+t+1)x + (t^2-1)\big) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1-t^2}{1+t+t^2} \\ y = \dfrac{2t+t^2}{1+t+t^2} \end{array}\right\}$$

Haciendo $t = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, nos queda $n > \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; n \geq 1$

Tenemos entonces,

$$\left.\begin{array}{l} a = 2n+1 \\ b = 3n^2 + 2n \\ c = 3n^2 + 3n + 1 \\ d = 3n^2 + 4n + 1 \end{array}\right\}$$

n	a	b	c	d
1	3	5	7	8
2	5	16	19	21
3	7	33	37	40
4	9	56	61	65
5	11	85	91	96
6	13	120	127	133
7	15	161	169	176
8	17	208	217	225
9	19	261	271	280
10	21	320	331	341

Estas no son las únicas soluciones, el parámetro t puede sustituirse por cualquier otro valor racional en el intervalo indicado para obtener otras soluciones. Por ejemplo, para $t = \frac{2}{5}$, se obtiene:

$$a = 7, b = 8, c = 13, d = 15$$