

## Senos y cosenos de los ángulos múltiplos de 3°

A partir de los polígonos regulares de 3, 4 y 5 lados, pueden calcularse las razones de 30°, 45° y 36° respectivamente, considerando la altura en el caso de 30°, y las diagonales en los de 45° y 36°. A partir de ellas y empleando únicamente los teoremas de adición:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\text{sen}(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

pueden calcularse las de todos los otros ángulos múltiplos de 3°, dado que  $\text{mcd}(30, 36, 45) = 3$ . Los programas de cálculo simbólico, como **DERIVE**, no simplifican todas ellas a estas formas simbólicas.

Solo se dan los comprendidos entre 0 y 45°, pues para ángulos entre 45° y 90° se reduce al complementario, y de forma similar, con las relaciones adecuadas, para ángulos mayores que 90°.

El seno y coseno del ángulo de 15° se obtienen a partir de 45°–30°.

A partir del pentágono regular, se puede determinar el  $\cos(36^\circ)$ , igual a la mitad del número áureo  $\phi$ . A partir de este valor se determina  $\text{sen}(36^\circ)$ . Las razones de 18° pueden calcularse por diferencia entre 36° y su complementario, 54° (o como las de  $\frac{1}{2}36^\circ$ ).

Los de 9° se obtienen por diferencia de 45° y 36°, y los de 27° a partir de  $18^\circ + 9^\circ$  ó  $36^\circ - 9^\circ$ .

Los de 6° a partir de  $36^\circ - 30^\circ$ , y duplicando, obtenemos los de 12° y 24°. Los de 3°, 21°, 33°, 39° y 42° se obtienen igualmente por suma o diferencia de los calculados previamente. Muchos de ellos también pueden determinarse como la mitad de otros previamente calculados, o de sus complementarios.

Ningún otro ángulo en el intervalo  $0^\circ - 45^\circ$  cuyo valor se exprese con un número entero de grados puede obtenerse a partir de estos. Empleando las fórmulas del ángulo mitad, pueden obtenerse las de ángulos múltiplos de 1°30', de 45', ..., que son progresivamente más complejas.

Se pueden obtener otras expresiones equivalentes en muchos casos. Se ha preferido la forma de fracción con denominador racional y menor número de raíces posible. En ocasiones, se sacrifica este criterio para adoptar formas tan similares como sea posible para el seno y el coseno.

# Senos y cosenos de los ángulos de 0 a 45°, múltiplos de 3°

Áng.	Senos	Cosenos
0	0	1
3°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$
6°	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{8}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$
9°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$
12°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)}{8}$
15°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$
18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\varphi}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
21°	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)}{16}$
24°	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$
27°	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
33°	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$
36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\varphi}{2}$
39°	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$
42°	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

## En Formato *DERIVE* (y otros programas de cálculo simbólico)

$$\text{sen}(0^\circ) = 0$$

$$\text{cos}(0^\circ) = 1$$

$$\text{sen}(3^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{3} + 1) * (\sqrt{5} - 1) - 2 * (\sqrt{3} - 1) * \sqrt{5 + \sqrt{5}}) / 16$$

$$\text{cos}(3^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{3} - 1) * (\sqrt{5} - 1) + 2 * (\sqrt{3} + 1) * \sqrt{5 + \sqrt{5}}) / 16$$

$$\text{sen}(6^\circ) = (\sqrt{3} * \sqrt{10 - 2 * \sqrt{5}} - (\sqrt{5} + 1)) / 8$$

$$\text{cos}(6^\circ) = (\sqrt{10 - 2 * \sqrt{5}} + \sqrt{3} * (\sqrt{5} + 1)) / 8$$

$$\text{sen}(9^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{5} + 1) - 2 * \sqrt{5 - \sqrt{5}}) / 8$$

$$\text{cos}(9^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{5} + 1) + 2 * \sqrt{5 - \sqrt{5}}) / 8$$

$$\text{sen}(12^\circ) = (\sqrt{10 + 2 * \sqrt{5}} - \sqrt{3} * (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{cos}(12^\circ) = (\sqrt{3} * \sqrt{10 + 2 * \sqrt{5}} + (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{sen}(15^\circ) = \sqrt{2} * (\sqrt{3} - 1) / 4$$

$$\text{cos}(15^\circ) = \sqrt{2} * (\sqrt{3} + 1) / 4$$

$$\text{sen}(18^\circ) = (\sqrt{5} - 1) / 4$$

$$\text{cos}(18^\circ) = \sqrt{2} * \sqrt{5 + \sqrt{5}} / 4$$

$$\text{sen}(21^\circ) = (2 * (\sqrt{3} + 1) * \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \sqrt{2} * (\sqrt{3} - 1) * (\sqrt{5} + 1)) / 16$$

$$\text{cos}(21^\circ) = (2 * (\sqrt{3} - 1) * \sqrt{5 - \sqrt{5}} + \sqrt{2} * (\sqrt{3} + 1) * (\sqrt{5} + 1)) / 16$$

$$\text{sen}(24^\circ) = (\sqrt{3} * (\sqrt{5} + 1) - \sqrt{10 - 2 * \sqrt{5}}) / 8$$

$$\text{cos}(24^\circ) = ((\sqrt{5} + 1) + \sqrt{3} * \sqrt{10 - 2 * \sqrt{5}}) / 8$$

$$\text{sen}(27^\circ) = (2 * \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{2} * (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{cos}(27^\circ) = (2 * \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{2} * (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{sen}(30^\circ) = 1/2$$

$$\text{cos}(30^\circ) = \sqrt{3}/2$$

$$\text{sen}(33^\circ) = (2 * (\sqrt{3} - 1) * \sqrt{\sqrt{5} + 5} + \sqrt{2} * (\sqrt{3} + 1) * (\sqrt{5} - 1)) / 16$$

$$\text{cos}(33^\circ) = (2 * (\sqrt{3} + 1) * \sqrt{\sqrt{5} + 5} - \sqrt{2} * (\sqrt{3} - 1) * (\sqrt{5} - 1)) / 16$$

$$\text{sen}(36^\circ) = \sqrt{10 - 2 * \sqrt{5}} / 4$$

$$\text{cos}(36^\circ) = (\sqrt{5} + 1) / 4$$

$$\text{sen}(39^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{3} + 1) * (\sqrt{5} + 1) - 2 * (\sqrt{3} - 1) * \sqrt{5 - \sqrt{5}}) / 16$$

$$\text{cos}(39^\circ) = (\sqrt{2} * (\sqrt{3} - 1) * (\sqrt{5} + 1) + 2 * (\sqrt{3} + 1) * \sqrt{5 - \sqrt{5}}) / 16$$

$$\text{sen}(42^\circ) = (\sqrt{3} * \sqrt{10 + 2 * \sqrt{5}} - (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{cos}(42^\circ) = (\sqrt{10 + 2 * \sqrt{5}} + \sqrt{3} * (\sqrt{5} - 1)) / 8$$

$$\text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$$

$$\text{cos}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$$