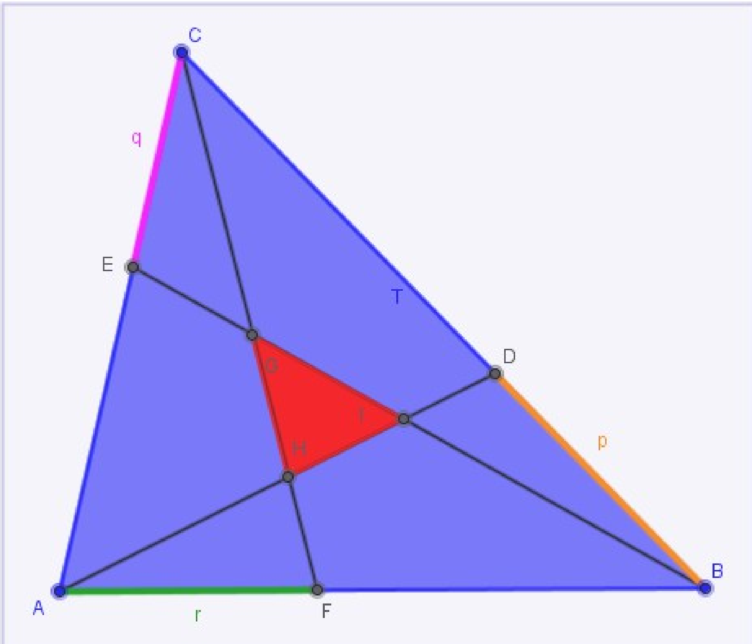
Ignacio Larrosa Cañestro

Algunos polígonos delimitados por cevianas

Sea un triángulo ***T*** cualquiera, de vértices ***A***, ***B*** y ***C***, y lados opuestos ***a***, ***b*** y ***c***. Una ceviana es un segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto. Vamos a comparar el área de algunos polígonos determinados por cevianas con el área del triángulo ***T***. Empecemos considerando el caso de un triángulo delimitado por tres cevianas.

Triángulo delimitado por tres cevianas cualesquiera

Consideremos los puntos ***D*** situado en el lado ***a***, de manera que ***BD***/***BC*** = ***p***, ***E*** situado en el lado ***b***, de manera que ***CE***/***CA*** = ***q***, y ***F*** situado en el lado ***c***, de manera que ***AF***/***AB*** = ***r***, con 0 < ***p***, ***q***, *r* < 1.



Los puntos en que se cortan estas cevianas son ***G***, ***H*** e ***I***. Estamos pues interesados en comparar el área del triángulo ***T' = GHI***, con la de ***T***. En adelante, para designar el área de un polígono se encerrará entre paréntesis.

Para determinar (T') podríamos restar a (T) las áreas (ABD), (BCE) y (CAF). Pero así restamos dos veces las áreas (AFH), (BDI) y (CEG), por lo que tendremos que volver a sumarlas una vez. En definitiva:

(T') = (T) – (ABD) – (BCE) – (CAF) + (AFH) + (BDI) + (CEG)

Tenemos que (ABD) = p*(T), puesto que ambos triángulos comparten la misma altura y sus bases BD y BC están en la proporción p. otro tanto ocurre con los otros dos: (BCE) = q*(T) y (CAF) = r*(T).

Calculemos (BDI). Para (CEG) y (AFH) bastará permutar los segmentos p, q y r. El triángulo BDI comparte base con el ABD, mientras que sus alturas son proporcionales a los lados DA y DI.

Para hallar el cociente DI/DA vamos a situar pesas de magnitud conveniente en A, B y C para que el centro de gravedad se encuentre en I, intersección de los segmentos AD y BE. Para ello el centro de gravedad de B y C debe encontrarse en D, por lo que la relación de masas en B y C deberá ser inversamente proporcional a p y (1 - p). Igualmente, el centro de gravedad de A y C debe encontrarse en E, por lo que la relación de masas en A y E debe ser inversamente proporcional a (1 - q) y q. Podemos poner entonces en C una masa de p(1 - q), en A de qp y en B de (1 - p)(1 - q).

La masa conjunta de B y C, que puede considerare situada en D, es entonces:

$$p(1-q)+(1-p)(1-q) = 1-q$$

El centro I de masas de D y A es tal que:

$$DI*(1-q)=AI*qp \;\Rightarrow\; \frac{DI}{DI+AI} = \frac{1}{1+\dfrac{AI}{DI}} = \frac{1}{1+\dfrac{1-q}{qp}} = \frac{pq}{1-q(1-p)}$$

Por tanto,

$$(BDI) = \frac{pq}{1-q(1-p)}(ABD) = \frac{p^2 q}{1-q(1-p)}(T)$$

Para el triángulo CEG debemos cambiar p con q y q con r, y para el triángulo AFH, p con r y q con p. Nos queda entonces:

$$S(p,q,r) = \frac{(T')}{(T)} = 1-p-q-r+\frac{p^2 q}{1-q(1-p)}+\frac{q^2 r}{1-r(1-q)}+\frac{r^2 p}{1-p(1-r)}$$

Simplificando y factorizando, se llega a la expresión:

$$S(p,q,r) = \frac{\left((1-p)(1-q)(1-r)-pqr\right)^2}{\left(1-q(1-p)\right)\left(1-r(1-q)\right)\left(1-p(1-r)\right)} \quad \textbf{(\#1)}$$

más sencilla de calcular. Está fórmula no es totalmente simétrica en las variables p, q y r. Si que es invariante bajo una permutación circular de las variables. También si se cambia p por p' = 1 – p, q por q' = 1 – q y r por r' = 1 – r.

En ella vemos que (T') = 0 si y solo si (1- p)(1-q)(1-r) = pqr, o

$$\frac{p}{1-p}\frac{q}{1-q}\frac{r}{1-r} = 1$$

con lo que hemos obtenido, de una forma indirecta y algo más complicada, el teorema de Ceva y su recíproco, que nos dicen que las cevianas de tres puntos situados en los lados son concurrentes si y solo si el producto de los cocientes de los segmentos que determinan los puntos en cada lado es igual a 1.

Cevianas a una fracción unitaria del vértice

Si se toman p, q y r iguales a inversos de enteros, k, m y n, queda:

$$F(k,m,n)=\frac{(ABC)}{(GHI)}=\frac{1}{S\left(\frac{1}{k},\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)\left(1-\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{k}\frac{1}{m}\frac{1}{n}\right)^2} \qquad \textbf{(\#2)}$$

$$=\frac{\left(k(m-1)+1\right)\left(m(n-1)+1\right)\left(n(k-1)+1\right)}{\left((k-1)(m-1)(n-1)-1\right)^2}$$

Solo hay seis casos en los que ***(T)*** es un múltiplo de ***(GHI)***. Para hacer una búsqueda exhaustiva podemos tomar 2 <= k <= m <= n y n >= 3, y tener en cuenta que el límite cuando k, m o n tienden a infinito es 1, que en ese rango de valores la función es decreciente y que estamos interesados en valores enteros de F(k, m, n) mayores que 1. Los seis casos son:

#	*k*	*m*	*n*	F(k,*m*,*n*)
1	2	2	3	60
2	2	2	5	18
3	2	3	4	10
4	2	5	8	4
5	3	3	3	7
6	4	7	8	2

(Problem 2401, Journal of Recreational Mathematics)

Lados divididos en 2n+1 partes iguales y cevianas próximas a la mediana

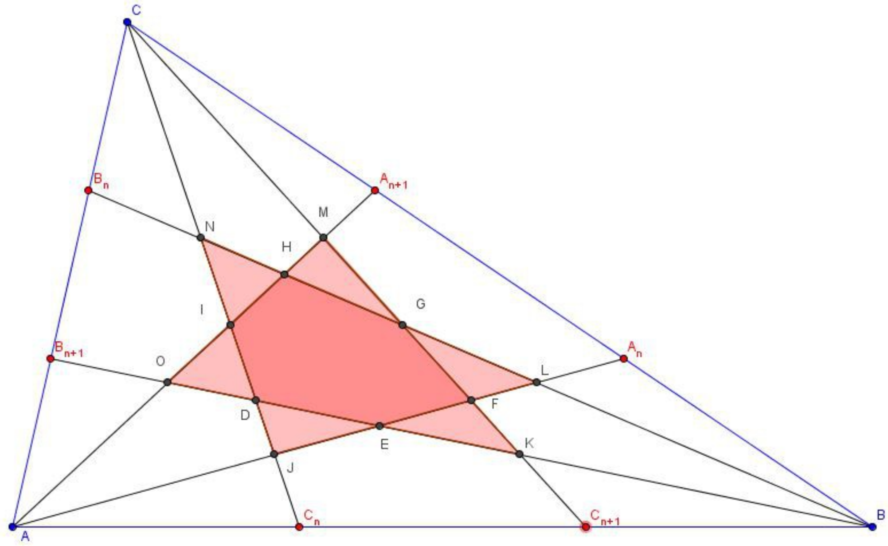
Dividamos ahora los tres lados en 2n+1 partes iguales mediante 2n puntos y tracemos las cevianas de los puntos que ocupan el lugar n desde el vértice, siempre en el mismo sentido, para determinar un triángulo ***Tg***. Hacemos por tanto p = q = r = n/(2n + 1) en **#1**, y tras simplificar, queda:

$$\frac{(Tg)}{(T)}=\frac{1}{3n^2+3n+1}$$

Por tanto, para todo n ***(T)*** es múltiplo de ***(Tg)***: **7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, …** para n = 1..10. Se trata de los números hexágonales centrados. Para el caso n = 1 hay una sencilla demostración visual.

Hexágono y estrella limitados por los pares de cevianas más próximas a la mediana

Se trazan ahora las medianas correspondientes a los puntos n y n +1 de cada lado:



Los triángulos ***JLN*** y ***KMO*** tienen la misma área, pues ambos corresponden a **p = q = r = n/(2n+1)**, medidos en un sentido u otro. Los seis triángulos pequeños (Tp), como el ***FLG***, que constituyen las puntas de la estrella tienen todos la misma área:

$$\frac{(Tp)}{(T)} = S\left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{n(n+1)}{\left((3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1)\right)}$$

Para n = 1..10, … esta fracción es:

$$\frac{1}{70}, \frac{3}{532}, \frac{6}{2035}, \frac{10}{5551}, \frac{15}{12376}, \frac{21}{24130}, \frac{28}{42757}, \frac{36}{70525}, \frac{45}{110026}, \frac{55}{164176}, \ldots$$

Para **n = 1**, como en la figura superior, se tiene ***(T) = 70 (Tp)***. Para ningún otro valor de n el área de ***T*** es múltiplo de la de ***Tp,*** como puede verse separando la parte entera de la fracción inversa:

$$\frac{(T)}{(Tp)} = \frac{\left((3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1)\right)}{n(n+1)} = 27n^2 + 27n + 15 + \frac{2}{n(n+1)}$$

Aunque para valores grandes de n se diferencia muy poco de un entero.

El área del hexágono ***(Hex)*** y de la estrella ***(Estr)*** será igual entonces a la de uno de los triángulos grandes ***(Tg)*** menos o más, respectivamente, la de tres pequeños. Se tiene entonces:

(Hex) = (Tg) – 3*(Tp)

$$\frac{(Hex)}{(T)} = \frac{1}{3n^2+3n+1} - \frac{3n(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1)} = \frac{2}{(3n+1)(3n+2)}$$

Como siempre es par uno de los dos factores del denominador, esta es siempre una fracción unitaria. El área de T es un múltiplo de la del hexágono: **10, 28, 55, 91, 136, 190, 253, 325, 406, 496, …** para n = 1..10, … Se trata de los números eneagonales centrados.

(Estr) = (Tg) + 3*(Tp)

$$\frac{(Estr)}{(T)} = \frac{1}{3n^2+3n+1} + \frac{3n(n+1)}{((3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1))} = \frac{2(6n^2+6n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1)}$$

Para n = 1..10, … esta fracción es:

$$\frac{13}{70}, \frac{37}{532}, \frac{73}{2035}, \frac{121}{5551}, \frac{181}{12376}, \frac{253}{24130}, \frac{337}{42757}, \frac{433}{70525}, \frac{541}{110026}, \frac{661}{164176}, \ldots$$

Si se observan los valores numéricos de los inversos de estas fracciones, destaca inmediatamente una pauta: dos valores consecutivos tienen como parte decimal 0.375... y los dos siguientes 0.875..., cada vez con mayor aproximación. No es difícil justificar este hecho, tomando la fracción inversa y descomponiéndola:

$$\frac{(T)}{(Estr)} = \frac{(3n+1)(3n+2)(3n^2+3n+1)}{2(6n^2+6n+1)} = \frac{1}{8(6n^2+6n+1)} + \frac{9(n^2+n)}{4} + \frac{7}{8}$$

La primera fracción siempre es menor que 1 y tiende rápidamente a cero. La segunda es entera para n = 3 y 4 (mod 4) y semientera para n = 1 y 2 (mod 4), mientras que la última toma el valor numérico 0.875. Se ve así, por otra parte, que este cociente nunca es entero.

Nota: Al tratarse de números enteros, es sencillo hallar experimentalmente con ayuda de GeoGebra los primeros valores de los cocientes ***(T)/(Tg)*** y ***(T)/(Hex)***, y encontrar la expresión para cualquier ***n*** por un ajuste polinómico. A partir de ellos se pueden obtener las fórmulas, utilizando por ejemplo la vista **CAS** de GeoGebra, para la estrella central y sus puntas, teniendo en cuenta que:

(Estr) = 2*(Tg) – (Hex) *(el área de la unión es la suma de las áreas menos la de la intersección)*

(Tp) = ⅓((Tg) - (Hex))