Juegos matemáticos

Ian Stewart

La razón de Steiner

Paco estaba exasperado. "El camino más corto entre dos puntos es la línea recta", gritó.

"Y yo estoy de acuerdo", respondió sin alterarse Horacio Steiner. "Sólo quiero hacer notar que los puntos no tienen que ser por fuerza ciudades reales."

"¿Dónde quieres entonces que situemos los puntos adicionales?"

"¡Ah! Esa es la cuestión."

Cables Astinos de España era una sociedad subsidiaria de Mercados y Fundiciones que tenía un contrato público para enlazar por cable tres ciudades, Porculé, Sardañal y Turís, y formar una red informática. Sus dos jefazos estaban encontrando dificultades para acordar una estrategia. A juicio de Paco, lo que convenía era elegir una ciudad base y conectarla a las otras dos mediante tendidos rectilíneos.

"¿Qué ciudad elegiremos como base?", quiso saber Horacio.

"Nada más sencillo. Se toma el triángulo cuyos vértices son las tres ciudades y se elimina el lado mayor. Será suficiente tender los dos lados restantes."

"Parece razonable, sí. Pero..."

Horacio pensaba que añadiendo a la red una ciudad más se podría reducir la longitud de la red. Puede que eso parezca inverosímil: al ser más las ciudades, mayor habría de ser el tendido. Sin embargo, a veces resulta ser así. ¿Dónde debemos, pues, situar la ciudad adicional para economizar el máximo de cable, y cuánto es el cable que se ahorra en ese caso?

Resulta que Porculé, Sardañal y Turís están todas, tomadas dos a dos, a la misma distancia: 75 kilómetros. La red propuesta por Paco tendría, por consiguiente, 150 kilómetros. ¿Y la sugerida por Horacio? Vamos a crear una nueva localidad en el seno de esta región, coincidiendo sensiblemente con el centro del triángulo equilátero definido por las tres ciudades. Esta, a la que llamaremos Villamedia, se encontraría a unos 44 kilómetros de cada una de las tres iniciales.

"Fíjate, Paco. Si ubicamos un nudo de la red en Villamedia y desde allí llevamos una línea hasta cada una de las tres ciudades, estoy seguro de que ahorraremos cable."

"¡Bobadas!"

"Te digo que no. Para tender las líneas desde Villamedia hasta las tres ciudades nos harían falta 3 × 44 kilómetros = 132 kilómetros, en lugar de 150, con lo que ahorraríamos 18 kilómetros, o sea, alrededor de un 12 por ciento."

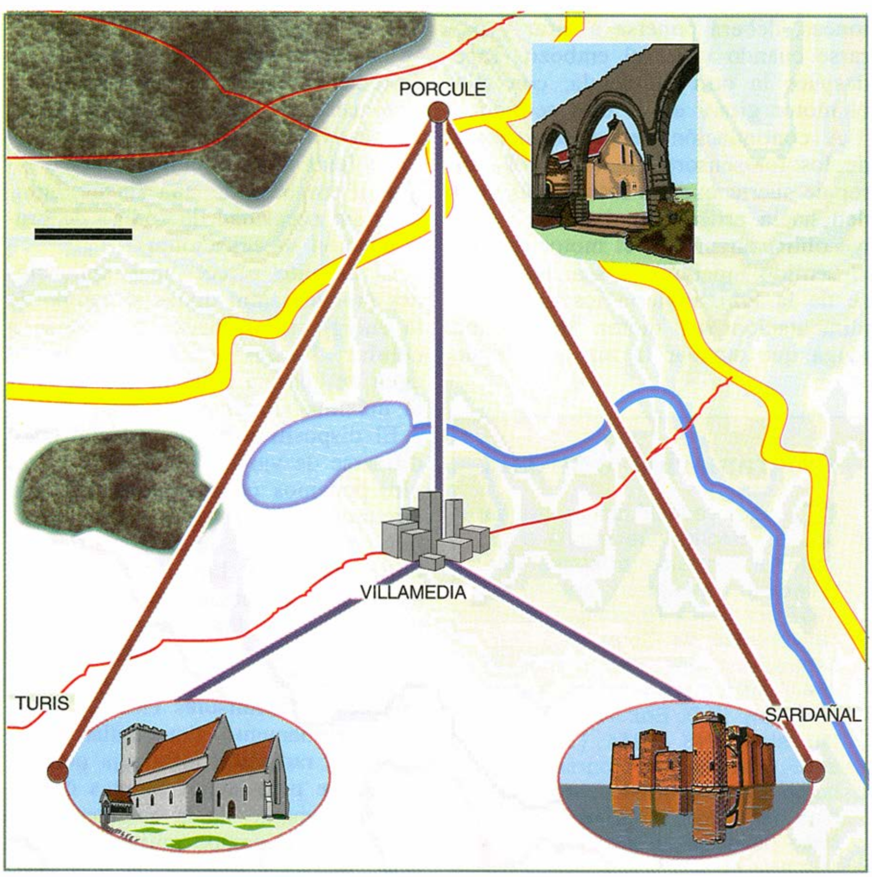
"Tienes razón, así se ahorra cable."

"Desde luego", prosiguió Horacio, "podríamos plantearnos idénticas cuestiones para un conjunto arbitrario de ciudades. ¿Cuál es la red más corta que las conecta todas, con la condición de que los nudos se encuentren precisamente en ellas? ¿Y cuál será la red mínima si es lícito añadir nudos suplementarios donde nos convenga?"

"Sí. Y sobre todo, ¿cuánta es la ganancia que se consigue en la red con nudos adicionales? Porque ése es el quid", añadió Paco.

"Vamos a consultar la base de datos", dijo Horacio.

Regresó algunas horas después. "Paco, no somos los primeros en plantearse estas cuestiones. Edgar Gilbert y Henry Pollack, de los Laboratorios AT&T Bell, conjeturaron ya en 1968 que cualquiera que sea la disposición de las ciudades iniciales, la economía máxima alcanzable por adjunción de nudos es del 13,4 por ciento.



1. Forma de economizar línea añadiendo una ciudad. El tendido rojo tiene una longitud de 150 kilómetros; el azul, de 132

Se la conoce por conjetura de la razón de Steiner."

"¿Por qué no conjetura de Gilbert-Pollack?"

"A causa de las reglas habituales de atribución en matemáticas."

"¿O sea...?"

"Verás, Paco, la idea es bautizada en recuerdo del personaje histórico que fue el primero en enunciar más o menos vagamente el problema, aunque no haya sido el autor del resultado. Por otra parte, ahora resulta necesario referirse al teorema de la razón de Steiner."

"Del teorema de Gilbert-Pollack", insistió Paco.

"En realidad, del teorema de Du-Hwang, porque en 1991, después de 23 años de esfuerzos tan tenaces cuan infructuosos, el resultado fue demostrado por Ding Zhu Du, de la Universidad de Princeton, y por Frank Hwang, de los Laboratorios Bell."

"Representaremos las ciudades a enlazar mediante puntos de un plano, y las líneas a tender, por segmentos rectilíneos. Tanto si añadimos nuevas ciudades como si no, es evidente que las líneas deberán formar un árbol, esto es, un grafo abierto, sin mallas. En una malla cerrada se malgasta cable, pues conecta ciudades que ya estaban enlazadas por otra ruta. Se dice que un árbol es directo si no participa en él ninguna ciudad suplementaria. Aunque puede haber muchos árboles directos que enlacen las ciudades dadas, sería posible confeccionar la lista completa y mirar cuál es el más corto.

"Supongamos que las ciudades sean cuatro, Lugones, Santervás, Bentón y Docal. En la figura 2 podemos ver algunos árboles directos y sus longitudes correspondientes. El árbol más corto posee una raíz, o nodo radical, Bentón, del cual arrancan las líneas a las otras tres ciudades.

"El problema se complica si las líneas pueden también conectarse fuera de las ciudades consideradas. Tomemos de nuevo el ejemplo inicial, en el cual tres ciudades definían un triángulo equilátero (Porculé, Sardañal y Turís). Resulta que el árbol ramificado de longitud mínima es el que las conecta al centro del triángulo (Villamedia). El grafo mínimo tiene que ser un árbol; los árboles ramificados de este tipo se denominan árboles de Steiner."

"¿Quién fue Steiner, y qué tuvo que ver con este problema?", quiso saber Paco.

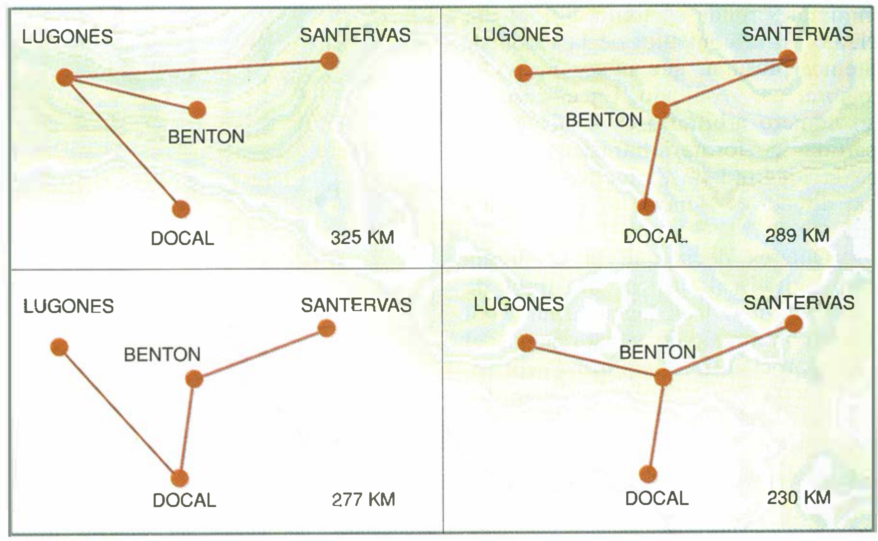
"No gran cosa", respondió Horacio. "Steiner fue un matemático suizo del siglo XIX, que resolvió en 1837 el problema de las tres ciudades. Fueron Richard Courant y Herbert Robbins quienes asociaron su nombre al problema, en 1941. Al parecer, ignoraban que todos ellos habían sido precedidos por Torricelli y Cavalieri, hacia 1640."

"¿Torricelli? ¿El inventor del barómetro?"

"El mismo. Cavalieri fue un precursor del cálculo diferencial. Torricelli y Cavalieri descompusieron el problema en varios casos. Si alguno de los ángulos del triángulo mide más de 120 grados, el grafo minimal consta de dos segmentos, a saber, los dos lados de ese ángulo. En caso contrario, estará formado por los tres segmentos que enlazan las tres ciudades con el punto de Steiner (también llamado punto de Torricelli), que es el único punto desde el cual los tres lados del triángulo se ven todos bajo un ángulo de 120 grados.

"Steiner demostró también que, en el caso de mayor número de ciudades, las ramas de todo árbol de Steiner tendrían que formar ángulos de 120 grados en cada una de las ciudades añadidas, como se deduce de la solución para el caso de tres ciudades. La determinación de tales árboles es problema más arduo. El problema de establecer un árbol de Steiner minimal para conectar más de tres ciudades no fue atacado hasta 1934, por Milos Kössler y Vojtech Jarnik. Como puedes ver, no es sencillo hallar un árbol de Steiner minimal en todos los casos", concluyó Horacio.

"Tienes razón. El cálculo es mucho más complicado que en la determinación de un árbol directo minimal; hay que considerar una infinidad de posibles puntos de Steiner", convino Paco.



2. Cuatro de los 16 árboles directos posibles correspondientes a cuatro ciudades. El árbol del recuadro inferior derecho es el más corto de los 16

"Exactamente. Veamos un caso sencillo: el de seis ciudades situadas en los vértices de dos cuadrados adyacentes (*figura 4*). En la figura *4a* se muestra un árbol de Steiner de poca longitud; se ha obtenido resolviendo primero el problema para el cuadrado de cuatro ciudades, que se enlazan después a las dos que faltan a través del punto de Steiner de estas dos con una de las ya conectadas."

"Entonces, ¿es ésa la solución?"

"No. El árbol de Steiner minimal es el grafo mostrado en la figura *4b*. Y además, esto demuestra que no podemos construir árboles de Steiner por reducción de mallas."

"Ya veo, ya", suspiró Paco. "¿Y en qué ha consistido la aportación de E. Gilbert y H. Pollack?"

"Se propusieron averiguar si sería posible relacionar las dos versiones del problema. Llamemos longitud directa de un sistema de ciudades a la de un árbol directo minimal, y longitud de Steiner, a la de un árbol de Steiner minimal. Habida cuenta de que todo árbol directo es un árbol de Steiner de tipo particular (un árbol que carece de nodos nuevos), se sigue que la longitud directa es mayor o igual que la longitud de Steiner. La pregunta es ¿cuánto mayor puede ser?"

"Bueno", dijo Paco. "En el caso de un triángulo equilátero de lado unidad, la longitud directa es 2, y la de Steiner, $\sqrt{3}$."

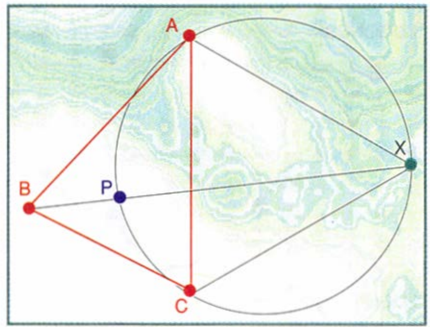
"Exactamente", repuso Horacio. "Por tanto, en ese caso, la razón de la longitud de Steiner a la directa es $\sqrt{3} : 2 = 0{,}866...$ Lo que significa que la economía de longitud correspondiente a un árbol de Steiner minimal con respecto a los árboles directos minimales ronda en torno al 13,4 por ciento. Y la conjetura de la razón de Steiner presume que nunca se podrá mejorar ese resultado. En el caso de un número arbitrario de ciudades repartidas de forma arbitraria, la razón de la longitud de Steiner a la longitud directa es siempre mayor o igual que $\sqrt{3}/2$."

"¿Quieres decir que la economía de longitud, al utilizar un árbol de Steiner minimal en lugar de un árbol directo minimal, no supera jamás el 13,4 por ciento?", inquirió Paco.

"Exactamente. O sea, aunque lográsemos calcular una solución optimal, no podríamos ahorrarnos más del 13,4 por ciento del costo total de la línea correspondiente a un árbol directo minimal."

Problemas similares, aunque mucho más complejos, se presentan en la práctica cada vez que una compañía proyecta tendidos de líneas telefónicas, de distribución de gas, de televisión por cable, de líneas de autobús, de ferrocarriles o de líneas aéreas. Uno de los métodos de estudio de la evolución de los organismos vivos ha suscitado una cuestión estrechamente relacionada con los problemas anteriores. El material genético es el ADN, en el que está codificada la información necesaria para la vida, según una secuencia de bases de cuatro tipos (adenina, timina, citosina, guanina). En esta descripción simplificada, la información genética está descrita por una larga sucesión de bases, del tipo AATTCGCTCA... En la aplicación de los árboles de Steiner, las "ciudades" son las secuencias de ADN en los diversos organismos, y su "distancia" consiste en una cierta medida de su diferencia, como la proporción de diferentes bases de igual rango. Los puntos de Steiner corresponden a "antepasados comunes más plausibles". No existe, desde luego, ninguna garantía de que tal antepasado común haya existido, pero el método proporciona indicios interesantes acerca de la forma en que podría haber cambiado la molécula de ADN y sobre el parentesco genético entre organismos.

Hay muchos otros problemas análogos a estos de los árboles de Steiner. El más importante, desde el punto de vista práctico, se plantea en la concepción de los circuitos electrónicos. En ellos, por lo general, las conexiones siguen los lados de una red de cuadrículas, pero las cuestiones que se plantean y los métodos que se aplican son similares. La conjetura de la razón de Steiner tiene importancia en la "economía" de toda red de conexiones, porque —como



3. Construcción del punto de Steiner correspondiente al triángulo ABC: se dibuja un triángulo equilátero ACX; su circunferencia circunscrita corta a BX en el punto de Steiner, P

acabamos de ver— es mucho más fácil encontrar un árbol directo minimal que un árbol de Steiner minimal. Por esta razón, muy bien pudiera resultar prudente aceptar el 13,4 por ciento de error para economizar costos de cálculo.

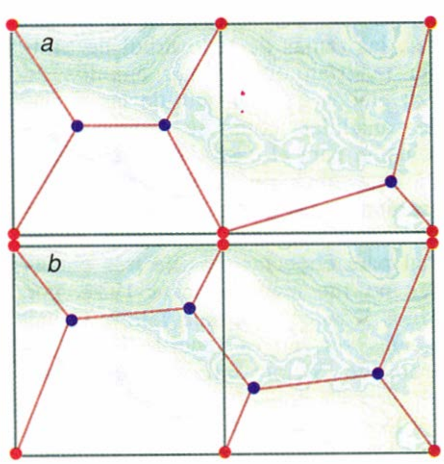
"¿Sabías —dijo Horacio— que hasta ahora, AT&T aplicaba la longitud directa para facturar a los clientes que deseaban conectar el conjunto de sus oficinas? ¡En consecuencia, éstos podrían haber conseguido ahorros sustanciales en sus facturas inventando oficinas imaginarias en puntos de Steiner apropiados! La conjetura limita tales ganancias al 13,4 por ciento, lo que no es catastrófico."

"¿Por qué no se evitó AT&T esta preocupación calculando la longitud de Steiner?", preguntó Paco.

"¡Porque no podía!"

"¿Y por qué no?"

Horacio dejó escapar un suspiro. "El cálculo de la longitud directa es sencillo, incluso aunque el número de ciudades sea muy grande. Se puede



4. Un árbol de Steiner para un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles (a). Arbol de Steiner más corto para el mismo conjunto de ciudades (b)

utilizar el 'algoritmo glotón': se busca la conexión más corta entre dos ciudades y después se va construyendo el árbol mediante la adición, en cada etapa, de la conexión restante más corta que no forma una malla cerrada; y así hasta que el árbol contiene a todas las ciudades."

"Horacio... ¿qué es un algoritmo?"

"Es un proceso específico utilizable en ordenador y que conduce a la solución."

"¿Por qué se le llama 'algoritmo glotón', si en cada etapa se conforma con la distancia mínima?"

"Porque, según creo, se parece a otros que operan seleccionando siempre la mayor de las 'cosas' accesibles, y a estos algoritmos se les llama 'glotones'."

"¿Existe algún algoritmo para encontrar un árbol de Steiner minimal?", insistió Paco.

"¡Ah! ¡Ahí está el busilis!", contestó Horacio.

"¿Por qué no tomar todas las posibles ternas de ciudades, determinar sus puntos de Steiner y buscar después el árbol directo más corto que conecta las ciudades y cuyos nodos se encuentran, ora en las ciudades, ora en puntos de Steiner?"

"Difícil. La generalización correcta de 'punto de Steiner' para un conjunto de gran número de ciudades es todo punto en el cual concurre un sistema de segmentos formando ángulos de 120 grados. Para un caso tan sencillo como el de cuatro ciudades situadas en los vértices de un cuadrado, tales puntos no son puntos de Steiner de una terna (*figura 6*)."

"Ya veo. Y en el plano hay infinitos puntos..."

"Así es. A pesar incluso de que la mayoría son inadecuados, ¡no es nada seguro que existan algoritmos finitos!"

"¿Y existe alguno?", preguntó Paco.

"Pues sí. El primero fue inventado por Z. Melzak. Pero en realidad su método no es utilizable; es ineficaz aun cuando el número de ciudades sea pequeño. Se mejoró luego, pero sólo mediocremente."

"¿Por qué habrá de ser todo tan difícil?", se lamentó.

Horacio se retrepó en su asiento e hizo un gesto ampuloso. "Paco, existen poderosas razones para que estas soluciones resulten ineficaces. El uso creciente de ordenadores ha provocado el desarrollo de una nueva rama de las matemáticas, la teoría de la complejidad. Esta teoría no se limita a estudiar los algoritmos —o sea, los métodos de resolución de problemas—, sino también su rendimiento."

"Creo que no te entiendo."

"Verás. Sea un problema concerniente a un conjunto de n objetos —ciudades en nuestro caso. ¿A qué velocidad crece el tiempo de ejecución del algoritmo que lo resuelve, conforme crece n? Cuando ese tiempo no excede de un múltiplo constante de una potencia fija de n, como en $5n^2$ o en $1066\ n^4$, se dice que el algoritmo es ejecutable 'en tiempo polinómico' y el problema se considera 'fácil'. En general, eso significa que el algoritmo es utilizable. Si el tiempo de ejecución no es función polinómica del tamaño del problema, sino que —sea por caso— crece exponencialmente, como 2^n o 10^n, el problema no es 'de tiempo polinómico' (o de clase P), y se considera 'difícil'. En general, el algoritmo resulta imposible de llevar a la práctica."

"¿No puedes darme algún ejemplo?"

"Bueno. La suma de dos números de n cifras exige a lo sumo $2n$ sumas de una cifra (contados los posibles arrastres), por lo que el tiempo consumido en efectuarla está acotado superiormente por un múltiplo de la primera potencia de n (el doble del tiempo requerido para hacer una suma de tres números de una cifra). Una multiplicación de dos números de n cifras entraña alrededor de n^2 multiplicaciones por una cifra y no más de $2\ n^2$ sumas, por ejemplo $3\ n^2$ operaciones con las cifras; de modo que en este caso la acotación contiene sólo la segunda potencia de n. Estos problemas, pues, se consideran 'fáciles'."

"¡Entendido!"

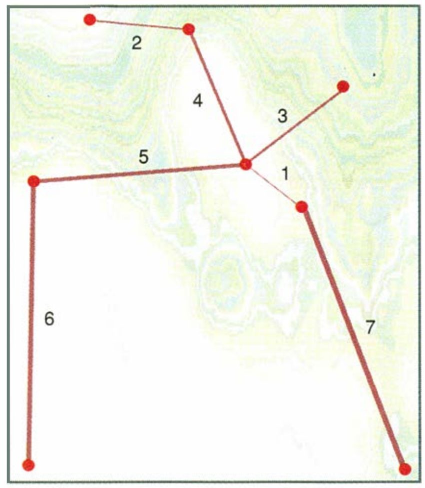
"Bien. Fijémonos ahora en el llamado 'problema del viajante'. Consiste en hallar el trayecto más corto que puede tomar un representante de comercio para visitar todo un conjunto dado de ciudades. Si el número de éstas es n, el número de itinerarios a considerar, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$, crece más deprisa que todas las potencias de n, por lo cual una enumeración exhaustiva, caso por caso, es desesperadamente ineficaz."

"Ya veo", dijo Paco. "Y entre los tiempos polinómicos y los exponenciales, ¿qué pasa?"

"Es territorio virgen, que comprende desde problemas 'cuasi-triviales' a 'moderamente difíciles', cuya aplicabilidad es sobre todo cuestión empírica."

"Comprendo."

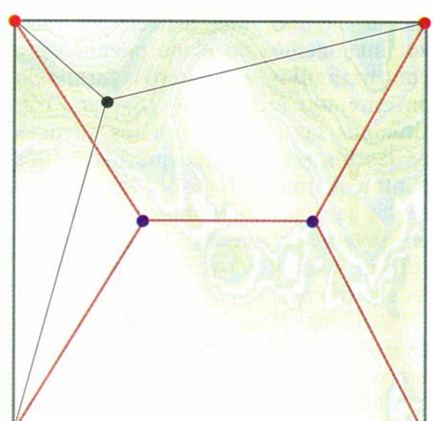
"El gran problema de la teoría de complejidad", prosiguió Horacio, "consiste en demostrar que la teoría no está vacía de contenido; esto es, la existencia de un problema 'interesante' que sea verdaderamente difícil. Y ¡la dificultad estriba en que es fácil demostrar que un problema es fácil, mientras que es difícil demostrar que es difícil! Para demostrar que un problema es fácil basta con hallar un algoritmo que lo resuelva en tiempo polinómico. No tiene por qué ser el mejor ni el más sagaz. En cambio, para demostrar que un problema es difícil, no basta con hallar algoritmos que lo resuelvan en tiempos no polinómicos. Será necesario encontrar un método matemático para considerar todos los algoritmos posibles que resuelven el problema y demostrar que ninguno de ellos lo hace en tiempo polinómico."



5. En el algoritmo "glotón" las ciudades se conectan de dos en dos por orden de distancias crecientes, sin formar mallas

"¡Ay! Me imagino perfectamente que eso puede resultar difícil. ¿No sabes de ninguna conjetura bien encarrilada?"

"Hay muchos candidatos que plausiblemente constituyen problemas difíciles. El problema del viajante, el problema del embalado de cajas (que consiste en disponer de forma óptima un conjunto de ejemplares de tamaños dados en un conjunto de bolsas de cierto tamaño), el problema del relleno (dado un saco fijo de cierto tamaño y una multitud de objetos, ¿existe una colección de objetos que rellenen exactamente el saco?). Aunque nadie ha demostrado que ninguno de ellos es difícil, en 1971 Stephen Cook adelantó que, si uno cualquiera de los problemas de este grupo es efectivamente difícil, todos los demás lo son también. La idea de la demostración es que podemos 'codificar' cada uno de ellos convirtiéndolo en caso particular de cualquiera de los demás: o todos flotan, o todos se hunden juntos. Los problemas de este tipo se denominan NP-completos, donde NP es abreviatura de 'no polinómico'. Todo el mundo está convencido de que se trata de problemas verdaderamente difíciles."



6. Los puntos de Steiner (blanco) *correspondientes a cuatro ciudades que definen un cuadrado* (negro) *difieren de los correspondientes a un subconjunto de tres ciudades* (gris)

"¿Por qué?"

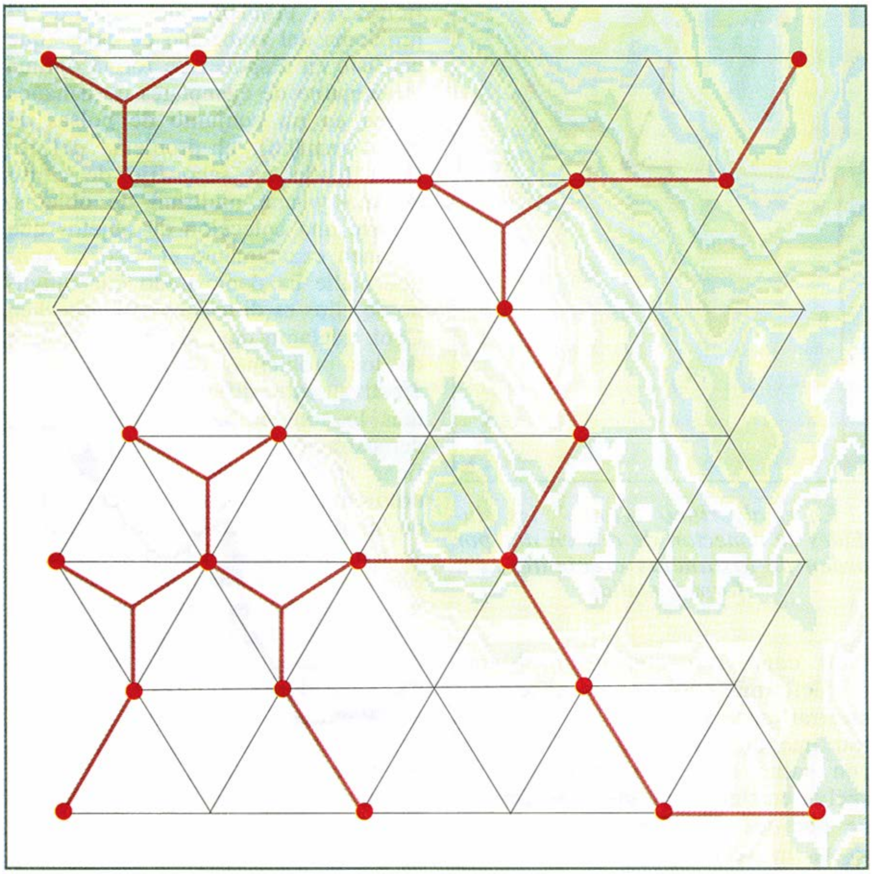
"Por compulsión psicológica, que nos hace sentir que es imposible conseguir de un golpe todo lo bueno. Ron Graham, Michael Garey y David Johnson han demostrado que el problema de la longitud de Steiner es NP-completo. Un algoritmo eficiente para calcular la longitud de Steiner de todo conjunto de ciudades conduciría automáticamente a soluciones eficientes de toda suerte de problemas computacionales, que presuntamente no las poseen."

"Así pues, ¿todo cuanto nos gustaría saber sobre los algoritmos se reduce a un problema específico concerniente a redes de comunicaciones?", se asombró Paco.

"En efecto. O a uno cualquiera de un millar de otros problemas concretos. Resolver uno es resolverlos todos. La conjetura de la razón de Steiner es importante por otro motivo, pues demuestra que se puede reemplazar un problema difícil por otro fácil sin perder demasiado. Lo cual entraña que los métodos utilizados para demostrar que así es son igualmente importantes."

"¿Y qué métodos son ésos?"

"Pues verás. El ejemplo del triángulo equilátero, que ha dado pie a todo este asunto, es muy natural. Sugiere que debe existir una demostración sencilla de la conjetura. Sin embargo, su simplicidad puede resultar engañosa; si existe una demostración sencilla, nadie la ha encontrado jamás. La propia demostración de Du-Hwang es harto complicada. Y, dejando de lado su demostración, los ataques directos para un pequeño nú-



7. Un árbol de Steiner para ciudades situadas sobre un enrejado triangular posee una estructura mucho más rígida y regular que en el caso general. Ding Zhu Du y Frank Hwang consiguieron reducir la conjetura de la razón de Steiner al mismo problema para el caso de estas redes de mallas triangulares

mero de ciudades conducen a cálculos largos y no generalizables. E. Gilbert y H. Pollack dispusieron de gran número de indicios en favor de su conjetura, y, en particular, pudieron demostrar que en todos estos cálculos había una cosa cierta: la razón es siempre mayor que 0,5. Hacia 1990, diversas personas habían llevado a término cálculos heroicos para verificar la conjetura en las redes de cuatro, cinco y seis ciudades. En el caso general, el de número arbitrario de ciudades, fueron empujando las cotas de la razón de Steiner de 0,5 a 0,57, a 0,74 y 0,8. Hace algunos años, Ron Graham y Fang Chung la elevaron a 0,824, con cálculos que ellos describen como 'verdaderamente horribles'. Estaba claro que el método no era bueno."

"Si ellos lo dicen..."

"Sus trabajos son más útiles de lo que te pueda parecer, pues enfocan la atención sobre métodos más abstractos y más conceptuales. Para lograr una progresión ulterior era preciso simplificar esos horribles cálculos. D. Z. Du y F. Hwang encontraron un método tan superior que los elimina por completo. La cuestión de base es ¿cómo introducir triángulos equiláteros? Entre el ejemplo del triángulo que proporciona la acotación inferior de la razón y un conjunto cualquiera de ciudades que presuntamente ha de obedecer a la misma acotación media un abismo. ¿Cómo atravesar esta tierra de nadie?

"Estamos llegando a un punto extraordinariamente interesante. Hay, a medio camino, una especie de relevo. Imaginemos un plano pavimentado con triángulos equiláteros formando un enrejado rectangular (*figura 7*), y situemos las ciudades en los vértices de las losetas. Resulta que los únicos puntos a considerar son los centros de las teselas. En resumen, se obtiene un potente elemento de control no sólo de los cálculos, sino de los análisis teóricos."

"Brillante. Pero los sistemas de ciudades no pertenecen todos a retículos triangulares."

"Desde luego que no. La idea de D. Z. Du y de F. Hwang es que éstos son los únicos casos importantes. Supongamos que la conjetura sea falsa. En tal caso, ha de existir un contraejemplo, esto es, cierto sistema de ciudades para el cual la razón de Steiner es menor que $\sqrt{3}/2$. Ahora bien, dichos autores demostraron que de existir tal contraejemplo, habría también otro contenido en un enrejado triangular. Se introduce así en el problema un elemento de regularidad y resulta relativamente sencillo llegar a término."

"Pero, ¿cómo demostraron ellos esta propiedad?"

"Se trata de un maravilloso ejercicio de pensamiento lateral. Para empezar, formularon la conjetura como un problema de tipo minimax. Tales problemas aparecen en teoría de juegos, cuando los litigantes tratan de limitar las ganancias de sus oponentes (*minimizar el máximo*). La teoría de juegos fue inventada por John von Neumann y Oskar Morgenstern. En la versión de la conjetura de la razón de Steiner un jugador selecciona la 'forma' general del árbol de Steiner y el otro selecciona el camino más corto. D. Z. Du y F. Hwang deducen la existencia de un contraejemplo en retículo triangular partiendo del hecho de que, en su juego, la ganancia posee una propiedad de 'convexidad' especial. Este método, nuevo y elegante, elimina una cuestión aparentemente intratable, corta el nudo gordiano de una masa de cálculos inextricables que afrontan la investigación caso por caso, y propone una solución sencilla. El método de Du-Hwang representa una mejora tan espectacular que torna caducas todas las tentativas anteriores.

"Y lo que es aún más fundamental, tal método proporciona un paradigma para estudiar cuestiones análogas. Se formula el problema en términos de teoría de juegos y se demuestra una propiedad de convexidad adecuada; se reduce el problema a una cuestión combinatoria 'rígida' con muchas menos posibilidades que es, por fin, resuelta por el procedimiento que se prefiera. La máxima 'Pensar primero, calcular después' debería estar grabada en el corazón de todos los matemáticos."

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

STEINER MINIMAL TREES. E. N. Gilbert y H. O. Pollack, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 16, págs. 1-29, 1968.

COMPANION TO CONCRETE MATHEMATICS. Z. A. Melzak, Wiley, New York, 1973.

STEINER PROBLEMS IN NETWORKS: A SURVEY, Pawel Winter, en *Networks*, vol. 17, págs. 129-167, 1987

EUCLIDEAN GEOMETRY ALIVE AND WELL IN THE COMPUTER AGE. B. Cipra, *SIAM News*, vol. 24, n.º 1, págs. 16-19, enero de 1991.