La suma de los cubos a veces es igual al cuadrado de la suma …

Si n es un número natural[1] cualquiera, sea $\{a = 1, b, c, \ldots, m = n\}$ la lista de sus divisores. La lista del número de divisores de estos últimos es: $\{a' = 1, b', c', \ldots, m'\}$, donde son posibles las repeticiones. Pues bien, para los números de esta lista sorprendentemente se verifica que:

$$\mathrm{a}'^3 + \mathrm{b}'^3 + \ldots + \mathrm{m}'^3 = (\mathrm{a}' + \mathrm{b}' + \ldots + \mathrm{m}')^2 \tag{1}$$

Veamos la demostración.

1. Si $n = p^k$, sus divisores son $1, p, p^2, \ldots, p^k$ con $1, 2, 3, \ldots, k+1$ divisores cada uno de ellos. Pero es bien conocido que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \big(1 + 2 + \cdots + (k+1)\big)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \tag{2}$$

La última igualdad es sencilla de ver, como ya mostró el pequeño Gauss a su maestro:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}\big((1 + 2 + \cdots + k) + (k + \cdots + 2 + 1)\big) = \frac{1}{2}\big((k+1) + \cdots (k+1)\big) = \frac{k(k+1)}{2} \tag{3}$$

Veamos la demostración de (2) por inducción. Para $k = 1$ es cierto, $1^3 = 1^2$. Supongamos que se verifica para k y veamos que entonces también lo hace para $k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + k + (k+1))^2 \quad \text{(q.e.d.)}$$

Este es un resultado clásico, conocido desde antiguo. Por tanto, para potencias de primos ya está demostrado.

2. Sea ahora $n = m \cdot p^r$, con p primo y $mcd(p, m) = 1$. Veamos que si la propiedad

se verifica para m, también lo hace para n.

Sean $a = 1, b, \ldots, m$ los divisores de m, y $a', b', \ldots, m'$ respectivamente el número de sus divisores.

Como suponemos que la igualdad propuesta se verifica para m, tendremos que

$$a'^3 + b'^3 + \ldots + m'^3 = (a' + b' + \ldots + m')^2$$

Todos los divisores de n, sin duplicidades, son:

$$a = 1, b, \ldots, m, ap, bp, \ldots, mp, ap^2, bp^2, \ldots, mp^2, \ldots, ap^r, bp^r, \ldots, mp^r = n$$

(recordemos que $mcd(p, m) = 1$)

Estos divisores tienen a su vez los siguientes números de divisores:

[1] En esta nota consideraremos números naturales exclusivamente a los enteros mayores que cero.

$a', b', \ldots, m', 2a', 2b', \ldots, 2m', 3a', 3b', \ldots, 3m', \ldots, (r+1)a', (r+1)b', \ldots, (r+1)m'$

Sumando todos estos números, tenemos

$S = (a' + b' + \ldots + m')(1 + 2 + \ldots + (r+1))$

Y el cuadrado de la suma es

$S^2 = (a' + b' + \cdots \; + m')^2 \big(1 + 2 + \cdots \; + (r+1)\big)^2$

Puesto que los números en cada paréntesis verifican la propiedad, tenemos entonces que

$S^2 = (a'^3 + b'^3 + \ldots + m'^3)(1^3 + 2^3 + \ldots + (r+1)^3)$

y desarrollando el producto, tenemos la suma de los cubos de todos los números de divisores de los divisores de n.

3. Sea ahora $n = p^a q^b \ldots r^c$ la descomposición factorial de cualquier natural n.

Como por 1. sabemos que la propiedad es cierta para $n_1 = p^a$, y $mcd(p, q) = 1$, también será cierta, por 2., para $n_2 = n_1 \cdot q^b$. Reiterando el proceso para todos los factores primos de n, queda probado para todo n. (q.e.d.)

La igualdad (2) es conocida desde antiguo, se debe al parecer a Nicómaco de Gerasa. La brillante generalización mostrada se debe al matemático francés Joseph Liouville, tal y como se ve en [1]. E

Pero éstas no son las únicas listas de números naturales con esta propiedad. Diremos que $\mathcal{L} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es una lista SCCS, ***S**uma de **C**ubos igual al **C**uadrado de la **S**uma*, si

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

Para cualquier *n*, la lista formada por *n* copias de *n* es una lista SCCS, pues obviamente $n \cdot n^3 = (n \cdot n)^2$. Pero para $n > 2$ hay más, muchas más cuanto mayor sea *n*, aunque siempre en número finito. Veamos que este es un caso límite, que una cota superior para la suma de una lista SCCS es n^2:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n^2$$

donde la igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n$.

En efecto, la desigualdad de las medias generalizadas establece que:

$$p < q \Rightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad [3]$$

dándose la igualdad si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. En particular para $p = 1$ y $q = 3$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt[3]{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^3}{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^3}{n^3} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^3}{n} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^3 \leq n^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^3$$

Utilizando ahora que se trata de una SCCS,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^3 \leq n^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \leq n^2$$

Donde la igualdad se da solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, en cuyo caso son necesariamente iguales a n (q.e.d.). El que para cada n la suma de estas listas de naturales estén acotadas, nos dice naturalmente que para cada n solo hay un número finito de ellas.

El procedimiento del punto **2.**, muestra que la lista producto de dos listas SCCS, formada por todos los productos de un elemento de la primera lista por un elemento de la segunda, también es una lista SCCS. Pero no todas las listas SCCS se obtienen por estos procedimientos.

Para n = 1 .. 17 hay

1, 2, 2, 4, 5, 18, 30, 94, 226, 715, 2024, 6546, 20622, 69459, 232406, 810943, 2828246 [4]

Pero Edward Barbeau y Samer Seraj [2] muestran que la única lista SCCS con *n* naturales **distintos** es $\{1,2, \dots, n\}$.

Bibliografia

[1] Ross Honsberger, *El Ingenio en las Matemáticas.* Colección La Tortuga de Aquiles nº 4, Editorial Euler (Madrid 1994)

[2] Edward Barbeau, Samer Seraj. University of Toronto (https://arxiv.org/pdf/1306.5257 21//06/2013, https://nntdm.net/papers/nntdm-19/NNTDM-19-1-01-13.pdf)

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_mean#Generalized_mean_inequality

[4] https://oeis.org/A158649