Cuadrados inscritos en una cúbica

En lo que sigue designaremos, algo incorrectamente y en aras de la brevedad, como 'cúbica' a la gráfica de un polinomio de 3er grado: $y = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sin pérdida de generalidad, podemos trasladar su punto de inflexión al origen, de manera que $a_2 = a_0 = 0$. Nos queda entonces el polinomio en la forma reducida $y = x^3 – ax$, donde se ha hecho $a = - a_1$ por conveniencia, pues evidentemente es necesario para poder inscribir un cuadrado en la cúbica, que sea $a_1 < 0$ en la forma reducida. Por tanto, en lo sucesivo será siempre $a > 0$.

Si una de las diagonales tiene por ecuación $y = mx$, la otra será $y = -\frac{1}{m}x$. Tomaremos entonces $m > 0$. Debe ser $m \neq 0$, pues de lo contrario tendríamos dos vértices del cuadrado con la misma abscisa. En cada cuadrante debe hallarse un vértice del cuadrado. Sea A(p, q) el del primer cuadrante. El del segundo cuadrante será entonces B(-q, p).

Se tiene entonces para A y B:

A: $q = p^3 – ap = mp \Rightarrow p^2 = m + a$ (#1)

B: $p = -q^3 + aq = \frac{-1}{m}(-q) = \frac{q}{m} \Rightarrow q^2 = a - \frac{1}{m}$ (#2)

Reemplazando en #2 $q = mp$

$m^2p^2 = a - \frac{1}{m}$ (#3)

Multiplicando #1 por m^2 e igualando con #3,

$m^3 + am^2 = a - \frac{1}{m} \Leftrightarrow m^4 + am^3 - am + 1 = 0$ (#4)

Esta es una ecuación *opuesto-recíproca*, en la que si m es una solución, $-\frac{1}{m}$ también lo es, lo que se corresponde con que las diagonales del cuadrado son perpendiculares. Tendremos por tanto 0, 2 o 4 soluciones, correspondiendo a 0, 1 o 2 cuadrados inscritos. Dividiendo por m^2,

$$m^2 + \frac{1}{m^2} + a\left(m - \frac{1}{m}\right) = 0$$

y haciendo el cambio:

$$t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow t^2 = m^2 + \frac{1}{m^2} - 2$$

$$t^2 + at + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$$

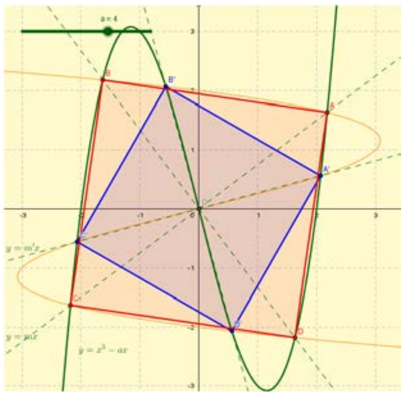
Vemos entonces que si $a < 2\sqrt{2}$ no hay soluciones, para este valor hay una, y para valores mayores dos. Deshaciendo el cambio,

$$t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 - tm - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

Como estamos interesados en las pendientes positivas, consideramos solo el signo '+'. Nos quedan entonces,

$$m = \frac{\frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2+8 \mp 2a\sqrt{a^2-8}} \pm \sqrt{a^2-8} - a}{4}$$

Para $a = 2\sqrt{2}$, tenemos la solución única $m = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, mientras que para $a > 2\sqrt{2}$ hay dos soluciones:



$$m = \frac{\sqrt{2a^2+8-2a\sqrt{a^2-8}} + \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < m < 1$$

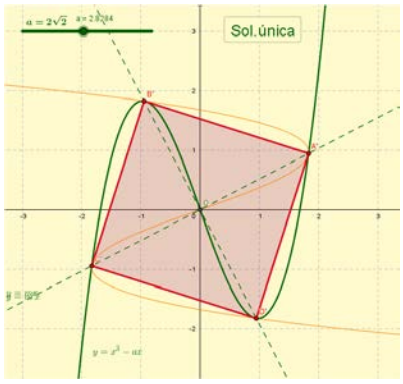
$$m' = \frac{\sqrt{2a^2+8+2a\sqrt{a^2-8}} - \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad 0 < m < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Cuando $a \to \infty,\ m \to 1$ y $m' \to 0$.

Los vértices son los puntos:

$$A = \left(\sqrt{a+m}, \sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), B = \left(-\sqrt{a-\frac{1}{m}}, \sqrt{a+m}\right)$$

$$C = \left(-\sqrt{a+m}, -\sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), D = \left(\sqrt{a-\frac{1}{m}}, -\sqrt{a+m}\right)$$



Y el área del cuadrado,

$$S = 2\left(2a + m - \frac{1}{m}\right)$$

Donde pueden colocarse $'$ a la pendiente y nombres de los vértices.

Para $a = 2\sqrt{2}$, se tiene $A = \left(\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3+\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)$ y $S = 6\sqrt{2}$.