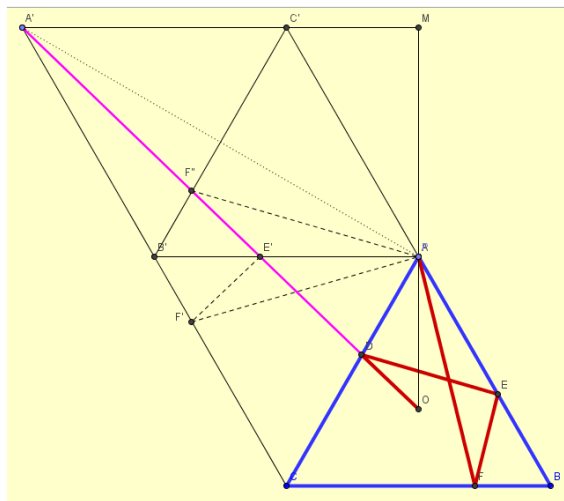


Reflexiones triangulares

“Un rayo luminoso parte del centro O del triángulo ABC , y se refleja sucesivamente en los lados CA , AB y BC , para acabar llegando al punto A . Teniendo en cuenta la ley de la reflexión (los ángulos que forman el rayo incidente y el reflejado con la perpendicular al espejo son iguales), calcula la longitud del trayecto total, suponiendo que el lado del triángulo es igual a 1.”

(4º problema de las Olimpiadas Matemáticas Galegas 2010)



Basta con reflejar el triángulo sucesivamente en los lados CA , AB y BC para transformar la trayectoria del rayo en un segmento rectilíneo, teniendo en cuenta las leyes de la reflexión mencionada. El segmento que tiene la longitud del rayo es entonces la hipotenusa OA' de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $OM = OA + AM = 2/3 h + h = 5/3 h$, y $MA' = MC' + C'A' = 3/2$, donde h es la altura del triángulo, $h = \sqrt{3}/2$. Por tanto, la longitud es

$$s = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{156}}{6} = \frac{\sqrt{39}}{3} \cong 2.081666$$

Hallemos también las longitudes de los cuatro segmentos, en términos de s . Sean $a = OD$, $b = DE = DE'$, $c = EF = E'F'$, $d = FA = F'A'$. Tenemos que

$$a + b + c + d = s$$

$$b + c = d \quad (\text{Teorema de Thales, pues } CB' = B'A' = 1)$$

$$a + b = 2/5 s \quad (\text{Semejanza de triángulos } OMA' \text{ y } OAE', OA/OM = (2/3 h)/(h + (2/3)h) = 2/5)$$

$$a = 1/7 s \quad (OD = 1/3 DF'' = 1/3 F''A')$$

$$\Rightarrow b = (2/5 - 1/7) s = 9/35 s$$

$$a + d + d = a + 2d = s, \quad d = (1 - 1/7)/2 s = 3/7 s$$

$$c = d - b = (3/7 - 9/35) s = 6/35 s$$

[Reflexiones Triangulares.html](http://Reflexiones_Triangulares.html)