Los puntos de inflexión de la función de 4º grado

Nota: Para seguir las operaciones conviene disponer de ***Derive*** o algún otro software de cálculo simbólico.

Consideremos la función genérica de 4º grado:

$$y(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \qquad a \neq 0$$

Sus derivadas son:

$$y'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$y''(x) = 2(6ax^2 + 3bx + c)$$
$$y'''(x) = 6(4ax + b)$$

Los posibles puntos de inflexión se producen para:

$$y''(x) = 0 \Rightarrow x_{I+,I-} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a} = \frac{-b}{4a} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{3b^2 - 8ac}}{12a}$$
$$= \frac{-b}{4a} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3b^2 - 8ac}}{4a} = x_o \pm \frac{1}{\sqrt{3}} h$$

Donde se ha hecho $x_o = \frac{-b}{4a}$ y $h = \frac{\sqrt{3b^2-8ac}}{4a}$. Notemos que de acuerdo con las relaciones de *Cardano-Vieta*, $\mathbf{x_o}$ es la media de las raíces, reales y complejas, de la función. Hagamos también **D = 3b²-8ac**, que llamaremos **discriminante** de la función.

Comprobando la derivada 3ª,

$$y'''(x_I) = 6\left(-b \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{D}}{3} + b\right) = \pm \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{3}}$$

Concluimos que si $\mathbf{D < 0}$ no hay puntos de inflexión, si $\mathbf{D > 0}$ hay dos, mientras que si $\mathbf{D = 0}$, pese a anularse la derivada segunda, no hay punto de inflexión, pues se anula tercera y no la derivada cuarta, igual a $\mathbf{24\,a \neq 0}$.

El valor de la función en estos puntos de inflexión es:

$$y_{I+,I-} = y(x_{I+,I-})$$
$$= e + \frac{48ab^2c - 8a^2(9bd + 5c^2) - 9b^4}{288a^3}$$
$$\pm \frac{\sqrt{3}(8a^2d - 4abc + b^3)\sqrt{3b^2 - 8ac}}{288a^3}$$

Aunque parezca sorprendente, la ecuación de la recta r_{In} que pasa por los puntos de inflexión no resulta demasiado complicada:

$$r_{In}: y = \frac{y_{I+} - y_{I-}}{x_{I+} - x_{I-}}(x - x_{I-}) + y_{I-} = \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^2} x + \frac{3b^2c - 10ac^2}{72a^2} + e$$

¿En que puntos la tangente a la curva será paralela a esta recta de los puntos de inflexión? El teorema del valor medio nos garantiza la existencia de tres. Para encontrarlos, igualamos la derivada primera a la pendiente de r_{In}:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^2} \Rightarrow x = x_o, x_o \pm h$$

¡La media de las raíces y otros dos simétricamente dispuestos! Se trata de la abscisa del punto de inflexión de la primera derivada, y mínimo de la derivada segunda, y de los otros dos puntos en que la derivada primera vale lo mismo, lógicamente. ¿Y cuál es la pendiente de la recta que uno estos dos puntos simétricamente dispuestos, que denominaremos x_1 y x_2?

$$m = \frac{y(x_o + h) - y(x_o - h)}{2h} = 4a{x_o}^3 + 3b{x_o}^2 + 2cx_o + d + (4ax_o + b)h^2$$

Pero recordemos que $x_o = \frac{-b}{4a}$, por lo que $m = y'(x_o) = y'(x_o - h) = y'(x_o + h)$, por lo que resulta que la tangente en los puntos $\pm h$ es la misma, y esta única bitangente es paralela a r_{In}.

Veamos en que otros puntos corta la recta r_{In} a la gráfica de la función:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^2}x + \frac{3b^2c - 10ac^2}{72a^2} + e$$

Esta ecuación de cuarto grado se resuelve fácilmente porque sabemos que los puntos de inflexión $x = x_o \pm \frac{1}{\sqrt{3}}h$ están en r_{In}. Si a los otros dos los llamamos x_3 y x_4, se tiene que:

$$x_{3,4} = x_o \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}h$$

Se tienen entonces que:

$$\frac{x_{I+} - x_{I-}}{x_{I-} - x_3} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}h}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{\sqrt{3}}h} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

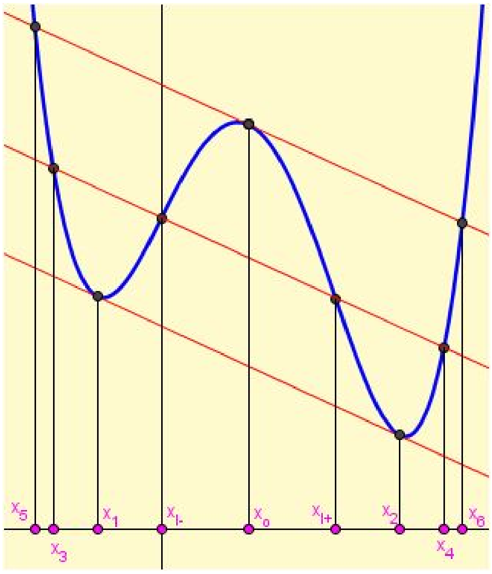
¡El número áureo escondido en los puntos de inflexión de la cuártica! Evidentemente, el cociente de las distancias entre estos puntos, es el mismo que entre sus abscisas, ya que se encuentran en la misma recta.

Nos podemos preguntar también en que otros puntos corta a la gráfica la tangente en el punto de abscisa x_o. Procediendo como antes, esta tangente es:

$$y = m(x - x_o) + y(x_o) = mx + \frac{5b^4 - 16ab^2c}{256a^3} + e$$

E igualando el segundo miembro con $y(x)$, obtenemos x_o como solución doble y además:

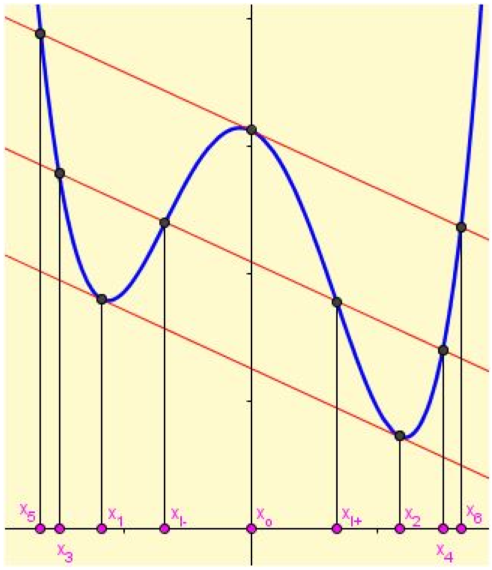
$$x_{5,6} = x_o \pm \sqrt{2}h$$



Resumiendo, tenemos que si $\boldsymbol{3b^2\text{-}8ac > 0}$, la cuártica tiene dos puntos de inflexión y:

1. La recta $\boldsymbol{r_{In}}$ que pasa por los puntos de inflexión es paralela a la única bitangente y a la tangente en el punto de abscisa $\boldsymbol{x_o = \frac{-b}{4a}}$, con pendiente $\boldsymbol{m = d + \frac{b^3-4abc}{8a^2}}$.
2. $\boldsymbol{x_o - x_{I-} = x_{I+} - x_o = \frac{1}{\sqrt{3}}h}$
3. $\boldsymbol{x_o - x_1 = x_2 - x_o = h}$
4. $\boldsymbol{x_o - x_3 = x_4 - x_o = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}h}$
5. $\boldsymbol{x_o - x_5 = x_6 - x_o = \sqrt{2}h}$
6. $\boldsymbol{\frac{x_{I+}-x_{I-}}{x_{I-}-x_3} = \varphi}$

No debe sorprendernos mucho en realidad, pues mediante transformaciones afines, que respetan la incidencia, el paralelismo y la razón simple de tres puntos, podemos transformar cualquier cuártica con dos puntos de inflexión en cualquier otra, por ejemplo en $y = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$. Para ellos vamos a aplicar sucesivamente transformaciones afines elementales.



1. Centramos la gráfica mediante una traslación paralela al eje OX, de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \mapsto x - \dfrac{b}{4a}} \\ \boldsymbol{y \mapsto y} \end{cases}$$

que anula el término de tercer grado y

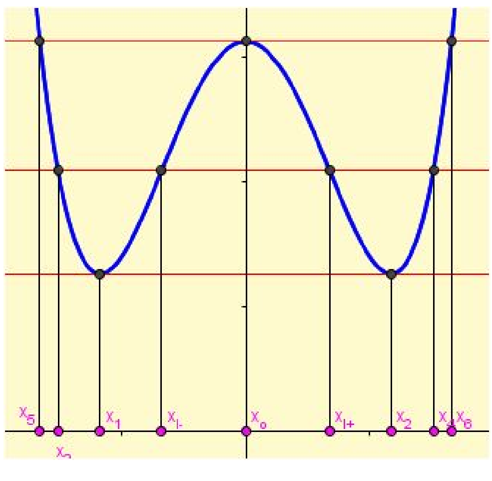
$$\boldsymbol{y = ax^4 + \frac{8ac - 3b^2}{8a}\mathrm{x}^2 + \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^2}x + e + \frac{16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4}{256a^3}}$$

El coeficiente del término lineal es $\boldsymbol{m}$, la pendiente de la recta de los puntos de inflexión. Podemos poner entonces:

2. Para transformarla en paralela al eje OX, aplicamos un deslizamiento paralelo al eje OY de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \mapsto x} \\ \boldsymbol{y \mapsto y + mx} \end{cases}$$

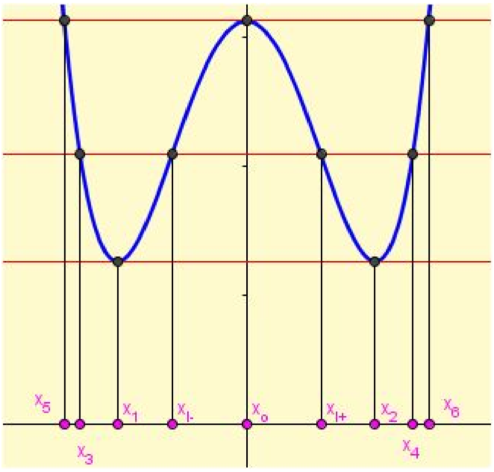
Obteniendo ya una función par:



$$y = ax^4 - \frac{3b^2 - 8ac}{8a}x^2 + e + \frac{16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4}{256a^3}$$

Que haciendo, como antes $h = \frac{\sqrt{3b^2 - 8ac}}{4a}$, podemos escribir:

$$y = ax^4 - 2ah^2x^2 + e + \frac{16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4}{256a^3}$$

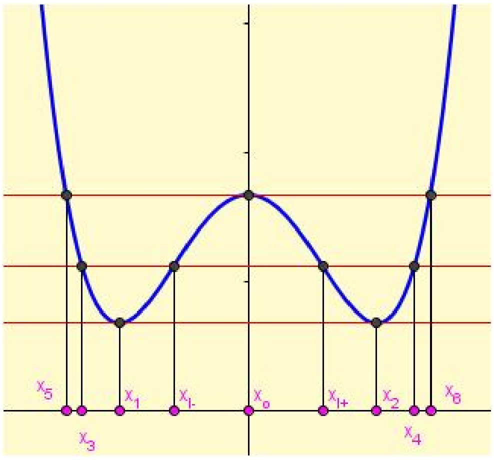


Las tres rectas consideradas son ahora horizontales y los puntos x_1 y x_2 se corresponden con mínimos relativos si $a > 0$, y máximos relativos si $a < 0$.

3. Para llevar estos extremos a los puntos de abscisas ± 1, aplicamos una contracción perpendicular al eje OY de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \mapsto hx \\ y \mapsto y \end{cases}$$

$$y = ah^4x^4 - 2ah^4x^2 + e + \frac{16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4}{256a^3}$$



4. Para reducir el coeficiente de cuarto grado a 1, efectuamos una contracción perpendicular al eje OX, de ecuaciones:

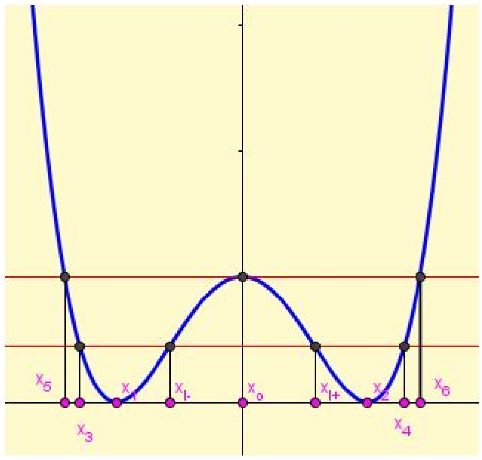
$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto ah^4y \end{cases}$$

$$y = x^4 - 2x^2 + \frac{256a^3e + 16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4}{256a^4h^4}$$
$$= x^4 - 2x^2 + K$$

5. Finalmente, una traslación paralela al eje OY de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y + K - 1 \end{cases}$$

Nos deja $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



Basta por tanto establecer en la gráfica de esta función todas las características señaladas, que son invariantes bajo transformaciones afines, para poderlo asegurar en la gráfica de cualquier función de cuarto grado que tenga puntos de inflexión.

Por ejemplo, las áreas delimitadas entre la recta r_{In} y la gráfica de la función son iguales, y el área entre la bitangente y la gráfica es $\sqrt{2}$ veces menor que la situada entra la gráfica y la tangente paralela.