Sonsuz Diziler ve Seriler

İki veya birden çok sonlu sayıdaki sayının nasıl toplanacağını herkes bilir.

Peki sonsuz tane sayıyı nasıl toplarız?

Bu sorunun cevabını bu bölümde vermeye çalışacağız.

Diziler

Bir **dizi** dediğimiz zaman ($a_1, a_2, a_3, \ldots$ birer sayıyı temsil etmek üzere)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

gibi belli bir düzende verilmiş sayıları kastediyoruz.

Örneğin

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots$$

dizisinde ilk terim $a_1 = 2$, ikinci terim $a_2 = 4$ ve genel terim olarak n 'inci terim $a_n = 2n$ dir.

Biz genellikle sonsuz dizilerle(sonsuz elemanı olan) ilgileneceğiz.

Dolayısıyla her a_n teriminden sonra gelen bir a_{n+1} terimi olacaktır.

Buradaki n tamsayısına a_n'in **indisi** denir.

Dizilerde sıralama önemlidir. Örneğin $2, 4, 6, 8, \ldots$ dizisi ile $4, 2, 6, 8, \ldots$ dizileri aynı değildir.

Her pozitif n doğal sayısı için dizide bir a_n terimi vardır. Bu şekilde, bir diziyi tanım kümesi doğal sayılar($\mathbb{N}$) olan bir fonksiyon olarak tanımlayabiliriz.

Ancak, fonksiyonun n de aldığı değeri göstermek için $f(n)$ yerine a_n yazacağız.

Diziler aşağıdaki gibi terimleri belirleyen

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{b_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{c_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{d_n\} = \{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

yazım kurallarıyla ifade edilebileceği gibi

Not: n'in 1 den başlama zorunluluğu yoktur.

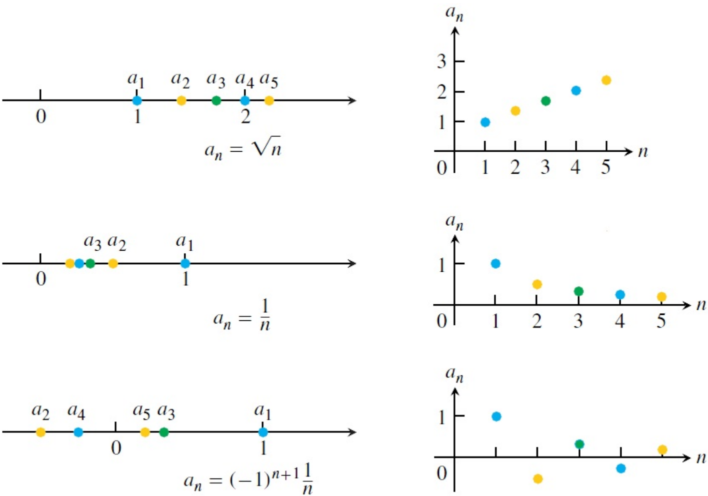
terimlerini listlemek şeklinde de gösterilebilir,

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \ldots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

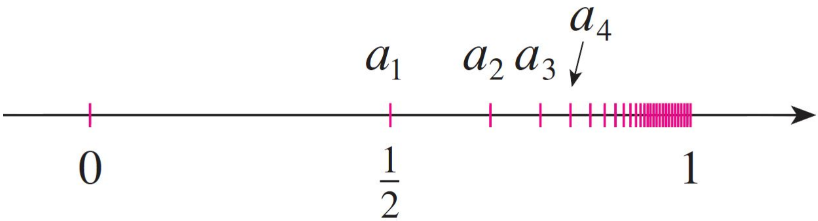
$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$$



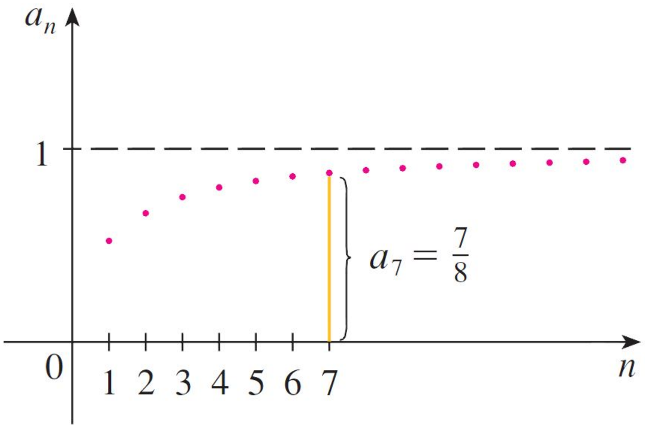
Diziler reel eksende noktalar olarak temsil edilebileceği gibi, düzlemde noktalar olarak da temsil edilebilir. İkinci gösterimde yatay eksen n, terimin insisi ve dikey eksen ise a_n onun değeridir.

Yakınsama ve Iraksama

$\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini ele alalım. Bu dizinin elemanlarını reel eksende gösterelim



ve ya koordinat düzleminde işaretliyelim



Şekillerden anlaşılabileceği gibi, n sayısı büyüdükçe

$\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri 1 e yaklaşır.

Biz bunu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$
yazarak ifade ediyoruz.

Genel olarak
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$
gösterimi, n sayısı büyüdükçe $\{a_n\}$ dizisinin terimlerinin L ye yaklaştığını ifade etmek için kullanılır.

Tanım $\boxed{1}$:

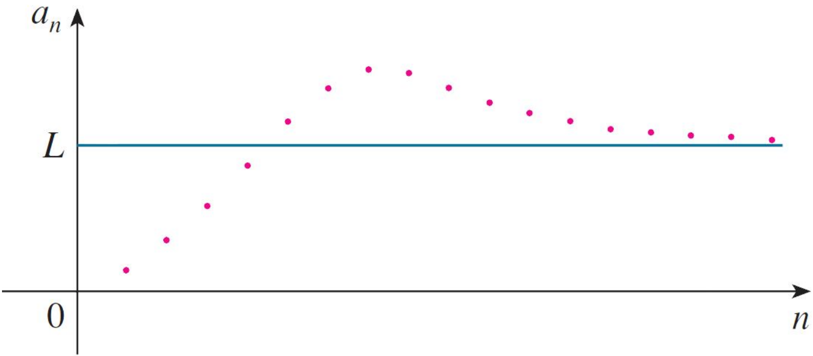
n sayısı yeteri kadar büyük seçilerek, a_n terimleri L ye istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, $\{a_n\}$ dizisinin **limiti** L dir ve

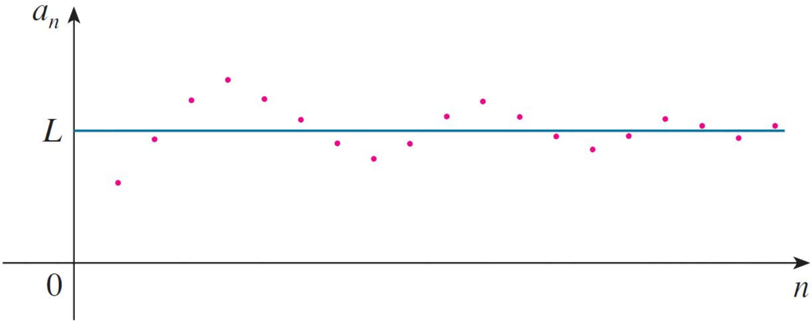
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ya da} \quad n \to \infty \text{ iken } a_n \to L$$

yazılır.

Eğer $\lim a_n$ limiti varsa, a_n dizisi **yakınsaktır** denir. Aksi durumda dizi **ıraksaktır** denir.

Limiti L olan iki dizinin grafiklerini görelim.





a_n
L
0
n

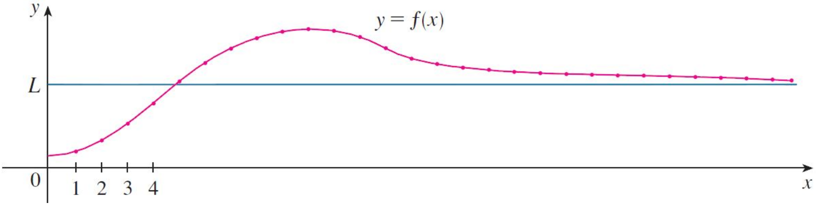
Fonksiyonlarda işlenen sonsuzdaki limit ($\lim_{x\to\infty} f(x)$) ile şimdi verdiğimiz tanım ($\lim_{n\to\infty} a_n$)arasındaki tek fark n in doğal sayı olmasıdır.

Teorem $\boxed{1}$:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ve her n doğal sayısı için $f(n) = a_n$ ise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

olur.



Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi a_n dizisinin her elemanı $f(x)$ in grafiğinin üzerine denk geliyorsa $f(x)$ in sonsuzdaki limitiyle a_n dizisinin limiti aynıdır.

Özel olarak, $r > 0$ için $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ olduğu bilindiğinden, $r > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \tag{1}$$

bulunur.

Büyük n değerleri için a_n de büyük değerler alıyorsa,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

yazılır.

Bu durumda $\{a_n\}$ dizisi ıraksaktır.

Ancak bu özel ıraksak olma durumunbu diğer ıraksaklıklardan ayırarak, $\{a_n\}$ dizisi *sonsuza ıraksar* diyeceğiz.

Yakınsak Dizilerde Limit Kuralları :

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ yakınsak dizi ve c bir sabit ise

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ eğer $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right]^p$ eğer $p > 0$ ve $a_n > 0$

Sıkıştırma Teoremi dizilere aşağıdaki gibi uygulanabilir.

Teorem $\boxed{2}$:

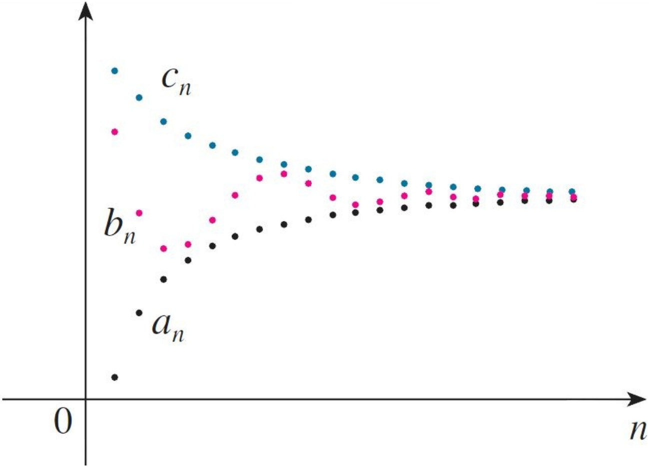
$n \geq n_0$ için

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

olur.



$\{b_n\}$ dizisi, $\{a_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri ile sıkıştırılmış.

Diziler hakkındaki diğer yararlı bir sonuç olan aşağıdaki teorem Sıkıştırma Teoreminden elde edilir.

Teorem $\boxed{3}$:

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Örnek : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$ limitini bulunuz.

Çözüm : Kesrin pay ve paydasını, n in paydada görülen en büyük kuvvetinin parantezine alırız

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^{\,1}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Örnek : $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{n}$ limitini bulunuz.

Çözüm : Burada, $n \to \infty$ iken hem pay hemde payda sonsuza gitmektedir.

L'Hospital kuralını doğrudan uygulayamayız, çünkü bu kural dizilere değil gerçel değerli fonksiyonlara uygulanabilmektedir.

Ancak, L'Hospital kuralını bu dizi ile çok yakından ilgili olan $f(x) = \ln x/x$ fonksiyonuna uygulabilir ve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

buluruz. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

elde ederiz.

Örnek : $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ dizisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : Bu dizinin terimlerini tek tek yazarsak

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

elde ederiz. Terimler -1 ile 1 arasında devamlı gidip geldiği için a_n hiç bir sayıya yaklaşmaz. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ limiti yoktur. Başka bir deyişle $\{(-1)^n\}$ dizisi ıraksaktır.

Örnek : $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ dizisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Dolayısıyla teorem 3 den

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$

dır.

Örnek : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ olmak üzere $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n!}{n^n} \right\}$ dizisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : $n \to \infty$ iken hem pay hemde payda sonsuza gitmektedir.

Fakat L'Hospital kuralını uygulayabilmek için bu diziye karşılık gelen uygun bir fonksiyon yoktur(x tamsayı olmadığında $x!$ tanımlı değildir).

n büyüdükçe a_n sayısının nasıl değiştiği hakkında bilgi sahibi olmak için a_n in genel terimini açarak yazalım:

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{3}{n}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

Dolayısıyla

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n}$$

elde edillir.

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n}$$

$n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty} 1/n \to 0$ olduğunu biliyoruz. Sıkıştırma teoreminden

$$n \to \infty \quad \text{için} \quad a_n \to 0$$

Kural

$\{r^n\}$ dizisi $-1 < r \leq 1$ için yakınsak, diğer r değerleri için ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \text{ ise} \\ 1 & r = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Tanım $\boxed{2}$:

Her $n \geq 1$ için $a_n < a_{n+1}$, başka bir deyişle

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

ise, $\{a_n\}$ dizisine **artan** denir.

Her $n \geq 1$ için $a_n > a_{n+1}$ ise, $\{a_n\}$ dizisine **azalan** denir.

Artan veya azalan bir diziye **monoton** dizi denir.

Örnek : $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ dizisi artan mıdır azalan mı?

Çözüm : a_n ve a_{n+1} terimlerine bakalım

$$a_n = \frac{3}{n+5} \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

bu iki ardışık terime baktığımızda $a_{n+1} < a_n$ olduğunu görürüz.

Dolayısıyla *azalan* bir dizidir.

Örnek : $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$ dizisi artan mıdır azalan mı?

Çözüm : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunu inceliyelim.(Dizimizin her terimi bu fonksiyonun üzerindedir.)

Bir fonksiyonun artan/azalanlığını incelemek için birinci türevi kullanabiliriz.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$x \geq 1$ iken $f'(x) < 0$ dır. dolayısıyla azalandır. Dizimizde bu fonksiyonun üzerinde olduğuna göre dizimiz azalandır.

Tanım $\boxed{3}$:

Her $n \geq 1$ için

$$a_n \leq M$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisine **üstten sınırlı**,

her $n \geq 1$ için

$$a_n \geq m$$

olacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisine **alttan sınırlı** dizi denir.

Hem alttan hem üstten sınırlı olan diziye **sınırlı dizi** denir.

Örnek : $\{a_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alttan sınırlıdır.

$\forall n \geq 1; \quad a_n = n \geq 1$

Örnek : $\{a_n\} = \{\dfrac{n}{n+1}\}$ dizisi sınırlıdır, çünkü her n için $0 < n < 1$ dir.

Teorem $\boxed{4}$:

Sınırlı ve monoton her dizi yakınsaktır.

Örnek : $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ dizisinin yakınsaklığını monoton dizi teoremini kullanarak gösteriniz.

Çözüm : Dizinin ilk bir kaç terimini yazalım:

$$\{\frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \frac{16}{243}, \frac{32}{729}, \ldots\}$$

Görüldüğü gibi dizinin terimleri $\frac{2}{9}$ ve 0 aralığında değerler almaktadır. Yani a_n dizisi alttan 0 ve üstten $\frac{2}{9}$ ile sınırlıdır. Şimdi de artan veya azalan olup olmadığını kontrol edeceğiz.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3^{n+1}}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{1}{3}\frac{2^n}{3^{n+1}} < 0$$

Bu durumda dizi azalandır (monoton). Sonuç olarak monoton dizi teoremine göre $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ dizisi yakınsaktır.

Seriler

Verilen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimlerini toplamaya çalışırsak

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

ifadesini elde ederiz. Bu sonsuz toplama bir **sonsuz seri** (ya da yalnızca **seri**) denir ve kısaca

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{veya} \qquad \sum a_n$$

ile gösterilir.

Ancak, sonsuz tane terimin toplamından bahsetmek anlamlı mıdır?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + \ldots$$

serisinin toplamı için sonlu bir sayı bulmak olanaklı değildir.

Çünkü, eğer terimleri sırayla toplarsak 1, 3, 6, 10, 15, 21,$\ldots$ sayılarını elde ederiz, ve n inci terimden sonra toplam

$$n(n + 1)/2$$

olur ve n büyüdükçe bu toplam çok büyük olur.

Ancak,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

serisinin terimlerini sırasıyla toplarsak

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \frac{63}{64}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^n}, \ldots$$

elde ederiz.

n	ilk n terimin toplamı
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

Yandaki tablodan da görüleceği gibi, daha fazla terim ekledikçe elde edilen kısmi toplamlar 1 sayısına dahada yaklaşmaktadır.

Gerçekten, yeteri kadar fazla terim ekleyerek kısmi toplamları 1 sayısına istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz.

O halde, bu serinin toplamının 1 olduğunu söyleyebilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

yazabiliriz.

Benzer fikirler kullanarak (2) deki gibi verilen her hangi bir serinin toplamının var olup olmadığını bulabiliriz. Şimdi,

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4
\end{aligned}
$$

kısmi toplamlarını ve genelde

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

toplamını ele alalım.

Bu kısmi toplamlar yeni bir $\{s_n\}$ dizisi oluşturur ve bu dizinin bir limitinin olup olmadığı araştırılabilir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ limiti (sonlu bir sayı olarak) varsa o zaman, önceki örnekte olduğu gibi, bu limite $\sum a_n$ serisinin toplamı diyoruz.

Tanım $\boxed{4}$:

Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ serisi verildiğinde, bu serinin n inci kısmi toplamı $\{s_n\}$ ile gösterilsin:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Eğer $\{s_n\}$ dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} s_n$ bir gerçel sayı olarak var ise, $\sum a_n$ serisi **yakınsaktır** denir ve

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s \qquad \text{veya} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

yazılır.

s sayısına **serinin toplamı** denir. $\{s_n\}$ dizisi ıraksak ise, seri **ıraksaktır** denir.

Böylece, bir serinin toplamı o serinin kısmi toplamlar dizisinin limitidir.

Bu nedenle, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ yazmak serinin yeteri kadar terimi toplandığında s sayısına istenildiği kadar yaklaşılabilindiği anlamına gelmektedir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

olduğuna dikkat ediniz.

Örnek : Önemli serilerden bir de **geometrik** seridir:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + a^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

her terim, kendisinden bir önceki terimin, r ortak oran sayısı ile çarpılmasıyla elde edilir. ($a = \frac{1}{2}$ ve $r = \frac{1}{2}$ durumunu biraz önce görmüştük.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots \qquad (3)$$

geometrik serisi $|r| < 1$ olduğu zaman yakınsaktır ve serinin toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1 \text{ dir.}$$

Eğer $|r| \geq 1$ ise, geometrik seri ıraksaktır.

Örnek : Verilen geometrik serinin toplamını bulunuz:

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\dots$$

Çözüm :

$$5\left(1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\dots\right)=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{5}_{a}\left(\underbrace{-\frac{2}{3}}_{r}\right)^{n-1}$$

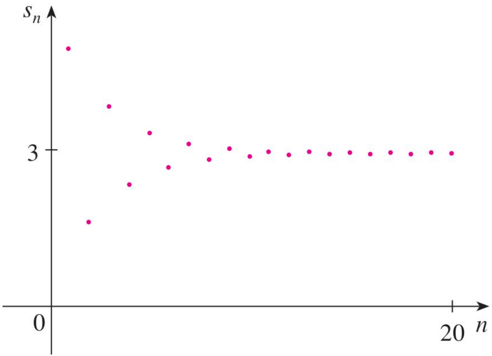
$|r|=\frac{2}{3}<1$ olduğu için (3) den bu seri yakınsaktır ve serinin toplamı

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\dots=\frac{5}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=3$$

olarak bulunur.

Serinin toplamının 3 olduğunu söylediğimiz zaman ne demek istiyoruz? Yeterine fazla sayıda terim toplayarak, 3 sayısına istediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Tabloda ilk 10 s_n kısmi toplamı ve Şekil 1 deki grafikte kısmi toplamlar dizisinin 3 sayısına nasıl yaklaştığı görülmektedir.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975



Şekil 1:

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ serisi yakınsak mı yaksa ıraksak mıdır?

Çözüm : Serinin n inci terimini ar^{n-1} şeklinde yeniden yazalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Böylece, bu seri $a = 4$ ve $r = \frac{4}{3}$ olan bir geometrik seridir. $r > 1$ olduğu için (3) e göre seri ıraksaktır.

Örnek : $2.3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ sayısını tamsayıların oranı olarak yazınız.

Çözüm :

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \ldots$$

Birinci terimden sonraki terimler, $a = 17/10^3$ ve $r = 1/10^2$ olan bir geometrik seri oluşturur. Buradan,

$$\begin{aligned} 2.3\overline{17} &= 2.3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} \\ &= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495} \end{aligned}$$

Örnek : $|x| < 1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm : Bu seri $n = 0$ ile başlamaktadır ve dolayısıyla ilk terim $x^0 = 1$ dir. (Seriler için, $x = 0$ olsa bile $x^0 = 1$ olarak alacağız.) Bu nedenle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

olur. Bu, $a = 1$ ve $r = x$ olan bir geometrik seridir. $|r| = |x| < 1$ olduğu için seri yakınsaktır ve (3) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

bulunur.

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve toplamını bulunuz.

Çözüm : Bu seri geometrik değildir, bu nedenle yakınsak serinin tanımına geri dönerek serinin kısmi toplarını hesaplayalım:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Bu ifade

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

eşitliği kullanılarak sadeleştirilebilir.

Böylece

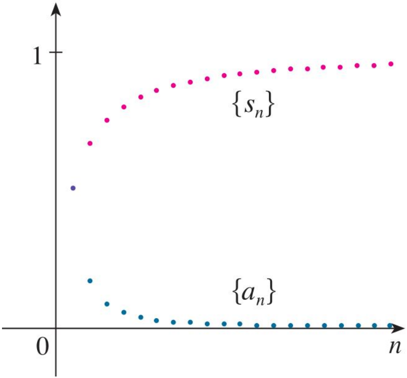
$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

bulunur ve buradan $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{n+1}}\right) = 1 - 0 = 1$ elde edilir. Dolayısıyla verilen seri yakınsaktır ve toplamı da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olarak bulunur.

Terimler ikişer ikişer sadeleşmektedir. Bu *teleskopik* toplama bir örnektir. Tüm sadeleştirmelerden sonra, (eski moda katlanabilir teleskop gibi) yalnızca iki terim kalır. Şekil 2 deki $a_n = 1/[n(n+1)]$ dizisinin ve $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisinin grafikleri örneği açıklamaktadır.



Şekil 2:

Teorem $\boxed{5}$:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Not : Theorem 5 in tersi genelde doğru değildir.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olması $\sum a_n$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez.

Iraksaklık Testi

$\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Dolayısıyla, Iraksaklık Testi'nden bu seri ıraksaktır.

Teorem $\boxed{6}$:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri yakınsak ise, $\sum ca_n$ (burada c bir sabit sayıdır), $\sum(a_n + b_n)$, ve $\sum(a_n - b_n)$ serileri de yakınsaktır, ve

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ serisi, $a=\frac{1}{2}$ ve $r=\frac{1}{2}$ olan geometrik seridir ve dolayısıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

dir.

Daha önce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olduğunu bulmuştuk. Dolayısıyla, yukarıdaki teoremden, verilen seri yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

bulunur.

Not: Bir seride sonlu sayıda terim serinin yakınsaklık durumunu değiştirmez. Örneğin,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

serisinin yakınsak olduğunu bildiğimizi varsayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

olduğu için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ serisinin yakınsak olduğunu elde ederiz.

İntegral ve Karşılaştırma Testleri: Toplamların Yaklaşık Hesabı

Genel olarak, $\lim_{n\to\infty} s_n$ limitini hesaplamak kolay değildir. Dolayısıyla, bu ve bundan sonraki bölümde toplamını açık olarak bulmadan serinin yakınsak veya ıraksak olduğunu belirlemeye olanak sağlayacak testler geliştireceğiz. Bazı durumlarda yöntemlerimiz, serinin toplamına çok yakın değerler verecektir.

Bu bölümde sadece pozitif terimli seriler ile ilgilenceğiz, bu nedenle kısmi toplamlar dizisi artan bir dizi olacaktır. Monoton Dizi Teoremi'nden, serinin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu anlamak için, kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olup olmadığını incelemek yeterli olacaktır.

Integral Testi

$[1, \infty)$ aralığında sürekli, pozitif, azalan bir f fonksiyonu verilsin ve $a_n = f(n)$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ancak ve ancak $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak ise yakınsaktır. Başka bir deyişle;

(a) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

(b) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Not: İntegral Testi'ni kullanmak için serinin veya integralin $n = 1$ den başlaması gerekli değildir. Örneğin,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \text{ serisi için } \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

integralini kullanırız.

f fonksiyonunun her yerde azalan olması da gerekli değildir. Önemli olan, f fonksiyonunun belli bir yerden sonra, bir N sayısından büyük tüm x değerleri için azalan olmasıdır. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve bir önceki bölümde verilen notdan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm : $f(x) = \ln x/x$ fonksiyonu, $x > 1$ için pozitif ve süreklidir, çünkü logaritma fonksiyonu süreklidir. Ancak, bu fonksiyonun azalan olup olmadığı o kadar açık değildir. Bunu için f fonksiyonunun türevini hesaplayalım:

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Böylece $\ln x > 1$ olduğunda, yani $x > e$ için $f'(x) < 0$ buluruz.

Buradan, $x > e$ için f fonksiyonu azalandır ve İntegral Testi'ni uygulayabiliriz:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Bu integral ıraksak olduğu için, İntegral Testi'nden $\sum (\ln n)/n$ serisi de ıraksaktır.

Örnek : p nin hangi değerleri için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi yakınsaktır?

Çözüm Eğer $p < 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ olur,

ve eğer $p = 0$ ise, $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$ olur.

Her iki durumda da $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$ olduğu için Iraksaklık Testi'nden verilen seri ıraksaktır.

Eğer $p > 0$ ise, $f(x) = 1/x^p$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında sürekli, pozitif ve azalandır.
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ integralinin $p > 1$ için yakınsak ve $p \leq 1$ için ıraksak olduğunu bulmuştuk.

İntegral Testi'ne göre, $\sum 1/n^p$ serisi $p > 1$ için yakınsak ve $0 < p \leq 1$ için ıraksaktır.

Bu örnekteki seriye p-**serisi** denir. p-serisi bu ünitenin bundan sonraki kısımlarında sıkça kullanılacağı için örnekteki sonucu şöyle özetleyebiliriz.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, p-serisi, $p > 1$ için yakınsak ve $p \leq 1$ için ıraksaktır.

Not olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

dizisine **harmonik seri** denir. p-serisine bakarsak, $p = 1$ olduğundan, harmonik seri ıraksaktır.

Örneğin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

serisi yakınsaktır, çünkü bu seri bir p-serisidir ve $p = 3 > 1$ dir.

Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin terimlerinin pozitif olduğunu varsayalım.

(a) $\sum b_n$ yakınsak ve her n için $a_n \leqslant b_n$ ise, $\sum a_n$ seriside yakınsaktır.

(b) $\sum b_n$ ıraksak ve her n için $a_n \geqslant b_n$ ise, $\sum a_n$ seriside ıraksaktır.

Karşılaştırma Testi'ni kullanırken karşılaştırma yapmak amacıyla bildiğimiz $\sum b_n$ serilerinin olması gereklidir. Çoğu zaman ya bir p-serisini ya da bir geometrik seriyi kullanacağız.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ serisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: Büyük n değerleri için paydadaki baskın terim $2n^2$ dir. Dolayısıyla verilen seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$ serisi ile karşılaştırabiliriz.

Şimdi,

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

eşitsizliği doğrudur, çünkü sol tarafın paydası daha büyüktür. (Karşılaştırma testindeki a_n burada sol taraf, b_n ise sağ taraftır.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz ($p = 2 > 1$ olan p-serisi). Bu nedenle, Karşılaştırma Testi'nin (a) şıkkından

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

serisi de yakınsaktır.

Karşılaştırma Testi'ndeki $a_n \leqslant b_n$ veya $a_n \geqslant b_n$ koşulunun her n için sağlanması gerektiği verildiği halde, bu eşitsizliğin belli bir sabit N tamsayısından büyük tüm n ler için doğru olması testi uygulayabilmek için yeterlidir. Çünkü sonlu tane terim serinin yakınsaklık-ıraksaklık durumunu etkilemez.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Bu seri için daha önce İntegral Testi'ni kullandık. Fakat, bu seriyi harmonik seri ile karşılaştırarak da inceleyebiliriz.

Her $n \geqslant 3$ için $\ln n > 1$ olduğundan

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

bulunur. $\sum 1/n$ serisinin ıraksak olduğunu biliyoruz ($p = 1$ olan p-serisi).

Dolayısıyla, Karşılaştırma Testi'nden, verilen seri de ıraksaktır.

Not: Test edilecek olan serinin terimleri, ya yakınsak olan bir serinin terimlerinden daha küçük olmalı veya ıraksak olan bir serinin terimlerinden daha büyük olmalıdır.

Verilen serinin terimlerinin, yakınsak bir serinin terimlerinden daha büyük veya ıraksak bir serinin terimlerinden daha küçük olması durumunda Karşılaştırma Testi uygulanamaz.

Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

serisini ele alalım.

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

eşitsizliği Karşılaştırma Testi için hiç bir değer taşımaz. Çünkü $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serisi yakınsak ve $a_n > b_n$ dir. Buna karşın, $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serisine çok benzeyen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ serisinin yakınsak olması gerektiği akla gelmektedir.

Bu gibi durumlarda aşağıdaki test uygulanabilir.

Limit Karşılaştırma Testi: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli seriler olsun. Eğer $c > 0$ sonlu bir sayı ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

ise, ya serilerin her ikisi de yakınsaktır veya her ikisi de ıraksaktır.

Örnek: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Limit Karşılaştırma Testi'ni uygulamak için

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2n}$$

alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

elde ederiz. Limit var ve $\sum 1/2^n$ geometrik serisi yakınsak olduğu için, Limit Karşılaştırma Testi'nden, verilen seride yakınsaktır.

Diğer Yakınsama Testleri

Şimdiye kadar gördüğümüz yakınsaklık testlerinin tamamı pozitif terimli seriler içindi. Bu bölümde terimleri pozitif olmak zorunda olmayan serilerin yakınsaklığına nasıl bakılacağını öğreneceğiz.

Tanım $\boxed{5}$: Alterne Seriler

Ardışık her iki terimden biri pozitif ve diğeri negatif olan seriye **alterne seri** denir.

Şimdi buna iki örnek verelim:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

Alterne Seri Testi

Verilen bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

alterne serisi

(a) her n için $b_{n+1} \leq b_n$

(b) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

koşullarını sağlıyorsa, seri yakınsaktır.

Örnek :

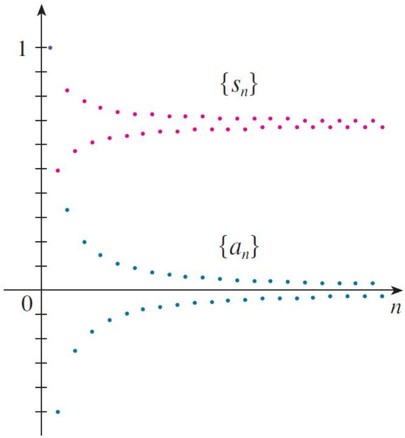
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

alterne harmonik serisi

(a) $b_{n+1} < b_n$ $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right.$ olduğundan$\left.\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

koşullarını sağladığı için Alterne Seri Testi'nden yakınsaktır.



Şekildeki $a_n = (-1)^{n-1}/n$ dizisinin ve $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisinin grafikleri, örneği açıklamaktadır.

Örnek : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ serisinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ serisi alterne bir seridir, ancak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4-\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

ve dolayısıyla (b) koşulu sağlanmaz.

Bunun yerine, serinin n inci teriminin limitine bakalım:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Bu limit yoktur.

Dolayısıyla, Iraksaklık Testi'nden seri ıraksaktır.

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm : Verilen seri alterne bir seridir ve dolayısıyla Alterne Seri Testi'deki (a) ve (b) koşullarını sağlayıp sağlamadığına bakarız.

İlk örnekten farklı olarak, $b_n = n^2/(n^3+1)$ dizisinin azalan olduğu açık değildir. Ancak, buna benzeyen $f(x) = x^2/(x^3+1)$ fonksiyonunu alırsak,

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

buluruz.

Sadece pozitif x değerlerini hesaba kattığımız için $2 - x^3 < 0$, bir başka deyişle $x > \sqrt[3]{2}$ ise, $f'(x) < 0$ olduğunu görürüz.

Dolayısıyla, f fonksiyonu $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ aralığında azalmaktadır. Bu da, $n \geq 2$ için $f(n+1) < f(n)$ ve dolayısıyla $b_{n+1} < b_n$ olduğunu verir. ($b_2 < b_1$ eşitsizliği doğrudan gösterilebilir, ancak burada önemli olan, $\{b_n\}$ dizisinin belli bir terimden sonra azalan olmasıdır.)

(b) koşulunun sağlandığını göstermek oldukça kolaydır:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\,\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}}{\cancel{n^3}\left(1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n^3}}}\right)} = 0$$

Dolayısıyla, Alterne Seri Testi'nden verilen seri yakınsaktır.

Mutlak Yakınsaklık

Elimizde pozitif terimli seriler ve alterne seriler için yakınsaklık testleri var, ama terimlerin işaretleri düzensiz olarak değişirse ne olacak?

Bir $\sum a_n$ serisi verildiğinde, terimleri bu serinin terimlerinin mutlak değerleri olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

serisini ele alalım.

Tanım $\boxed{6}$:

Terimleri $\sum a_n$ serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden oluşan $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise, $\sum a_n$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir.

Eğer $\sum a_n$ serisinin terimleri pozitif ise, $|a_n| = a_n$ olur ve bu nedenle, bu seri için yakınsaklık ile mutlak yakınsaklık aynı kavramlardır.

Örnek :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

serisi mutlak yakınsaktır, çünkü

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

serisi yakınsak bir p-serisidir $(p = 2)$.

Örnek :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

alterne harmonik serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz.

Ancak bu seri mutlak yakınsak değildir, çünkü buna karşılık gelen mutlak değerler serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

harmonik seridir ($p = 1$ olan p-serisi) ve dolayısıyla ıraksaktır.

Örnek göstermektedir ki yakınsak olan bir seri mutlak yakınsak olmak zorunda değildir. Bunun yanında, aşağıdaki teorem mutlak yakınsak olmanın yakınsak olmayı gerektirdiğini göstermektedir.

Teorem $\boxed{8}$:

Verilen bir $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsak ise, aynı zamanda yakınsaktır.

Örnek :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \dots$$

serisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : Bu serinin hem pozitif hem de negatif terimleri vardır, ancak alterne seri değildir. (İlk terim pozitif, sonraki üç terim negatif ve daha sonraki üç terim pozitiftir. Terimlerin işareti düzensiz bir şekilde değişmektedir.)

Karşılaştırma testini, mutlak değerlerden elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \cos n \right|}{n^2}$$

serisine uygulayabiliriz. Her n için $\cos n \leq 1$ olduğundan

$$\frac{\left| \cos n \right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

buluruz.

Şimdi, $\sum \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğu için ($p = 2$ olan p-serisi) Karşılaştırma testinden $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ serisi de yakınsaktır.

Dolayısıyla, verilen $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ serisi mutlak yakınsak ve buradan da Teorem 8 den yakınsaktır.

Oran Testi

- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsaktır (ve dolayısıyla yakınsaktır.)
- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ veya $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Not : Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right| = 1$ ise, o zaman Oran Testi hiç bir bilgi vermez.

Örneğin, yakınsak olan $\sum 1/n^2$ serisi için

$$n \to \infty \text{ iken } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \to 1$$

ve ıraksak olan $\sum 1/n$ serisi için

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

buluruz.

Dolayısıyla, eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a_{n+1}/a_n\right| = 1$ ise, $\sum a_n$ serisi yakınsak da olabilir ıraksak da. Bu durumda Oran testi çalışmaz ve başka bir test kullanmak gereklidir.

Örnek : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm : $a_n = (-1)^n n^3/3^n$ alarak Oran testini uygulayalım:

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{(n+1)}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{(n+1)}}\frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testinden verilen seri mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.

Örnek : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm : $a_n = n^n/n!$ terimleri pozitif olduğundan mutlak değer işaretleri gereksizdir.

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!}\frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

bulunur. $e > 1$ olduğundan Oran Testinden verilen seri ıraksaktır.

Not : Bir önceki örnekte Oran Testi sonuç vermiştir. Uygulanabilecek başka test de Iraksaklık Testi'dir.

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n.n.n.\ldots.n}{1.2.3.\ldots.n} \geq n$$

olduğundan $n \to \infty$ iken a_n sıfıra yaklaşmaz. Dolayısıyla, Iraksaklık Testinden verilen seri ıraksaktır.

Sonsuz sayıda toplam içeren serilerin yakınsaklığını artık test edebildiğimize göre şimdi **"sonsuz polinomlar"** benzeri ifadeleri inceleyebiliriz.

Biz bunlara *kuvvet serileri* diyeceğiz, çünkü bu ifadeler bir değişkenin kuvvetlerinin oluşturduğu sonsuz seriler olarak tanımlanmaktadır; bizim durumumuzda x'in kuvvetlerinin serileridir.

Tıpkı polinomlarda olduğu gibi, kuvvet serilerini de toplayıp, çıkarıp, çarparak, türev ve integral alarak yeni kuvvet serileri elde edebiliriz.

Tanım

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{4}$$

biçiminde olan bir seriye **kuvvet serisi** denir.

Burada x değişken, c_n ler sabittir ve bu sabitlere **serinin katsayıları** adı verilir.

Sabit bir x değeri için (4) serisi, terimleri sayı olan bir seridir ve yakınsaklık için test edilebilir.

Bir kuvvet serisi, bazı x değerleri için yakınsak ve diğer x değerleri için ıraksak olabilir.

Serinin toplamı, tanım kümesi serinin yakınsak olduğu tüm x ler olan bir

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

fonksiyonudur.

$f$nin bir polinomu andırdığına dikkat ediniz. Tek fark, f de sonsuz tane terim olmasıdır.

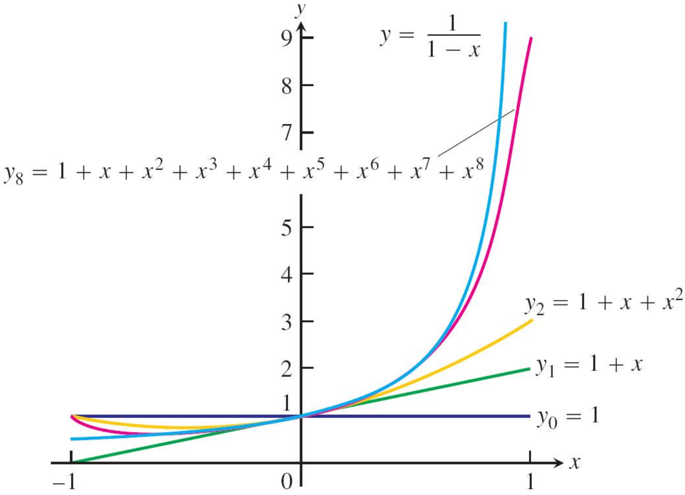
Örnek

Denklem (4)'de bütün katsayıları 1 alırsak bir geometrik kuvvet serisi elde ederiz;

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Bu serinin ilk terimi(a) 1 ve ortak oran(r) x'tir. $|x| < 1$ için $\dfrac{1}{1-x}$'e yakınsar. Bunu aşağıdaki gibi ifade ederiz;

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \qquad (5)$$



Şekil 3: $y_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ olmak üzere $(-1, 1)$ aralığında terim sayısını arttırarak $y = 1/(1-x)$ fonksiyonuna istediğimiz kadar yaklaşabiliriz.

Daha genel olarak,

Tanım

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (6)$$

biçimindeki bir seriye $(\mathbf{x} = \mathbf{a})$ **cinsinden kuvvet serisi** veya $\mathbf{a}$ **merkezli kuvvet serisi** veya $\mathbf{a}$ **çevresinde bir kuvvet serisi** denir.

Not 1: Denklem (4), denklem (6)'nin $a = 0$ ile verilen özel bir durumudur.

Not 2: Denklem (4) ve (6) de, $n = 0$ a karşılık gelen terimi $x = a$ olsa bile $(x-a)^0 = 1$ aldığımızı unutmayınız. Seride $x = a$ alındığında, $n \geq 1$ için tüm terimlerin 0 olduğuna ve dolayısıyla da serinin yakınsak olduğuna dikkat ediniz.

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır.

Çözüm : Oran testini kullanalım. Her zaman olduğu gibi serinin n inci terimine a_n dersek, $a_n = n!\,x^n$ olur. Eğer $x \neq 0$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty$$

buluruz. Oran testinden, $x \neq 0$ olduğu zaman seri ıraksaktır.. Dolayısıyla da verilen seri yalnızca $x = 0$ için yakınsar. □

Örnek

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır.

Çözüm : $a_n = (x-3)^n/n$ olsun. O zaman, $n \to \infty$ iken

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3|$$

bulunur.

Oran testinden verilen seri $|x-3|<1$ için mutlak yakınsak, dolayısıyla da yakınsak, ve $|x-3|>1$ içinde ıraksaktır.

$$|x-3|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x-3<1 \quad \Leftrightarrow \quad 2<x<4$$

Böylece seri $2<x<4$ için yakınsak, $x<2$ veya $x>4$ için ıraksaktır.

Oran testi, $|x-3|=1$ olduğunda hiçbir bilgi vermediği için $x=2$ ve $x=4$ durumlarını ayrıca incelememiz gerekir.

- $x=4$ için seri $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ harmonik serisi olur ki bu da ıraksaktır.
- $x=2$ için ise seri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ olur ve bu seri Alterne Seri Testinden yakınsaktır.

Sonuç olarak, verilen kuvvet serisi $2 \leq x < 4$ için yakınsaktır. $\square$

Örnek

$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ ile tanımlanan sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm : $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ olsun. Her x için, $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| \\ &= \left|\frac{x^{2n+2)}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre Oran Testinden, verilen seri x in her değeri için yakınsaktır. Başka bir deyişle, Bessel fonksiyonu J_0 ın tanım kümesi $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ olur.

□

Bir serinin toplamının, serinin kısmi toplamlar dizisinin limitine eşit olduğunu anımsayınız. Dolayısıyla, Örnek 1.4 de Bessel fonksiyonunu bir serinin toplamı olarak tanımladığımız zaman, bundan anlaşılan;

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \, x^{2i}}{2^{2i} \, (i!)^2}$$

olmak üzere, her x gerçel sayısı için

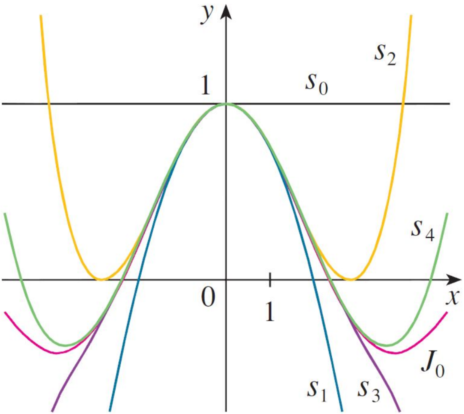
$$J_0(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

olduğudur.

Bu serinin ilk birkaç kısmi toplamı:

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= 1 \\
s_1(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} \\
s_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \\
s_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \\
s_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147476}
\end{aligned}
$$

dır.



Şekil 4:

Şekil 4 de birer polinom olan bu kısmi toplamların grafikleri görülmektedir. Bu kısmi toplamların her biri, J_0 fonksiyonuna birer yaklaştırımdır, ancak daha fazla terim ekledikçe daha iyi bir yaklaştırım elde edilmektedir.

Teorem

Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *kuvvet serisi için yalnızca üç olasılık vardır:*

(i) *Seri yalnızca* $x = a$ *için yakınsar.*

(ii) *Seri her* x *için yakınsar.*

(iii) *Serinin* $|x-a| < R$ *için yakınsak ve* $|x-a| > R$ *için ıraksak olduğu bir* R *sayısı vardır.*

(iii) şıkkındaki R sayısına kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı** denir. Kullanım kolaylığı açısından, serinin yakınsaklık yarıçapını (i) durumunda $R = 0$ ve (ii) durumunda $R = \infty$ alacağız.

Kuvvet serisinin **yakınsaklık aralığı** serinin yakınsadığı tüm x değerlerinden oluşan aralıktır.

Bu aralık, (i) durumunda yalnızca a noktasından oluşur. (ii) durumunda yakınsaklık aralığı $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. (iii) durumunda ise $|x - a| < R$ eşitsizliği $a - R < x < a + R$ şeklinde yazılabilir. x aralığın uç noktalarından biri olduğu zaman ($x = a \mp R$) herşey olabilir: seri uç noktaların ikisinde de yakınsayabilir veya ıraksayabilir, ya da birinde yakısar diğerinde ıraksar. Dolayısıyla, (iii) durumunda yakınsaklık aralığı için dört olasılık vardır.

$(a-R, a+R)$ $\qquad$ $(a-R, a+R]$ $\qquad$ $[a-R, a+R)$ $\qquad$ $[a-R, a+R]$

Daha önceki örneklerde gördüğümüz serilerin yakınsaklık yarıçapını ve yakısaklık aralıklarını bir tabloda özetleyelim.

	Seri	Yakınsaklık Yarıçapı	Yakınsaklık Aralığı
Örnek 1.1	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R=1$	$(-1, 1)$
Örnek 1.2	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R=0$	$\{0\}$
Örnek 1.3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R=1$	$[2, 4)$
Örnek 1.4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R=\infty$	$(-\infty, \infty)$

Yakınsaklık yarıçapını belirlemek için çoğu zaman Oran Testi kullanılabilir. x yakınsaklık aralığının bir uç noktası oluduğu zaman Oran Testi hiç bir zaman bilgi vermez; uç noktalar başka bir test ile ayrıca kontrol edilmelidir.

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\, x^n}{\sqrt{n+1}}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : $a_n = \frac{(-3)^n\, x^n}{\sqrt{n+1}}$ olsun. Dolayısıyla, $n \to \infty$ iken

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}\, x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n\, x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}\,|x| \to 3|x|$$

olur.

Oran Testinden, seri, $3|x| < 1$ için yakınsak ve $3|x| > 1$ için ıraksaktır.

Dolayısıyla, seri $|x| < \frac{1}{3}$ için yakınsak, $|x| > \frac{1}{3}$ için ıraksaktır. Bu da yakınsaklık yarıçapının $R = \frac{1}{3}$ olması demektir.

Bu serinin $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ aralığında yakınsak olduğunu biliyoruz. Ancak, uç noktalardaki yakınsaklık durumunu ayrıca araştırmalıyız.

Eğer $x = -\frac{1}{3}$ ise, seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \, (-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

$p = 1/2 < 1$ olan $p-$serisidir, dolayısıyla ıraksaktır.

Eğer $x = \frac{1}{3}$ ise, seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \, (\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

olur ve bu seri Alterne Seri Testinden yakınsaktır.

Böylece, veilen kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$ olur.

□

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : Eğer $a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ dersek, $n \to \infty$ iken

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3}$$

elde ederiz.

Oran Testini kullanarak, serinin $\dfrac{|x+2|}{3} < 1$ için yakınsak ve $\dfrac{|x+2|}{3} > 1$ için ıraksak olduğunu görürüz.

Buradan seri $|x+2| < 3$ için yakınsar. Dolayısıyla, verilen serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 3$ tür.

$|x+2| < 3$ eşitsizliği $-5 < x < 1$ olarak da yazılabilir. Şimdi seriyi uç noktalarda test edelim.

$x = -5$ için seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,n$$

olur ve Iraksaklık Testinden bu seri ıraksaktır.

$x = 1$ için ise seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

olur ve Iraksaklık tesitinden bu seri de ıraksaktır.

Böylece seri yalnızca $-5 < x < 1$ için yakısar. Dolayısıyla, yakınsaklık aralığı $(-5, 1)$ dir. $\square$

Bu bölümde, belirli fonksiyon tiplerinin kuvvet serilerinin toplamı olarak nasıl gösterilebileceğini göreceğiz.

Bunu yaparken geometrik seriler veya onların türevleri veya integrallerinden yararlanacağız.

Daha sonra göreceğimiz gibi, bu yöntem basit ilkeli bulunamayan fonksiyonların integrallerini bulmak, diferansiyel denklemleri çözmek ve fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşmak için kullanılmaktadır.

Daha önce gördüğümüz bir eşitlik ile başlayalım:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1 \tag{7}$$

Bu eşitliği, ilk olarak Örnek 1.1 de görmüştük ve eşitliği göstermek için $a = 1$ ve $r = x$ olan bir geometrik seri olduğunu kullanmıştık.

Ancak buradaki bakış açımız biraz farklı olacak. Şimdi, Denklem 7 e, $f(x) = 1/(1-x)$ fonksiyonunun bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade edilmesi olarak bakacağız.

Örnek

$\dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunu bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade ediniz ve serinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : Denklem 7 de x yerine $-x^2$ yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu seri bir geometrik seri olduğu için, $|x^2| < 1$ olunca, başka bir deyişle $x^1 < 1$ yada $|x| < 1$ olunca seri yakınsar. Dolayısıyla, serinin yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ olarak bulunur. $\square$

Örnek

$\dfrac{1}{x+2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi gösterimi bulunuz.

Çözüm : Bu fonksiyonu Denklem 7 in sol yanına benzetmek için, önce paydayı 2 parantezine alalım.

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Bu seri, $|-\frac{x}{2}| < 1$ için, başka bir deyişle $|x| < 2$ olduğunda yakınsaktır. Buradan yakınsaklık aralığı $(-2, 2)$ olarak bulunuz.

Örnek

$\dfrac{x^3}{x+2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi gösterimi bulunuz.

Çözüm : Bu fonksiyon Örnek 1.8 deki fonksiyonun x^3 ile çarpımı olduğundan, yapmamız gereken tek şey seriyi x^3 ile çarpmaktır:

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Bu seriyi yazmanın bir diğer yolu:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{2^{n-2}} x^n$$

dir. Örnek 1.8 de olduğu gibi, bu serinin yakınsaklık aralığı $(-2, 2)$ olur. $\square$

Bir kuvvet serisinin toplamı, tanım kümesi serinin yakınsaklık aralığı olan bir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ fonksiyonudur.

Böyle tanımlanmış fonksiyonların türevini ve integralini alabilmek istiyoruz.

Şimdi yazacağımız teorem, polinomlarda olduğu gibi, serideki her terimin ayrı ayrı türevini veya integralini alarak bunu yapabileceğimizi söylemektedir. Buna **terim-terim türev** ve **integral alma** diyoruz.

Teorem

$\sum c_n\,(x-a)^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı* $R>0$ *ise,*

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$$

olarak tanımlanan f *fonksiyonu* $(a-R,a+R)$ *aralığında türevlenebilirdir (ve dolayısıyla süreklidir) ve*

(i) $f'(x)=c_1+2c_s(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx=\mathbf{C}+c_0(x-a)+c_1\frac{(x-a)^2}{2}+c_2\frac{(x-a)^3}{3}+\cdots$

$$=\mathbf{C}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

dir. Denklem (i) ve (ii) deki kuvvet serilerinin her ikisinin de yakınsaklık yarıçapı R *dir.*

Not 1: Teorem 1.2 nin bir kuvvet serisinin türevi veya integrali alındığında yakınsaklık yarıçapının değişmediğinin söylemesi, yakınsaklık aralığının değişmediği anlamına gelmez. Seri, yakınsaklık aralığının uç noktalarının birinde yakınsak olduğu halde, türevi alındığında o noktada ıraksak olabilir.

Not 2: Bir kuvvet serisinin terim terim türevinin alınabilmesi, diferansiyel denklemlerin çözümü için çok güçlü bir yöntemin temelini oluşturmaktadır.

Örnek

Denklem 7 in türevini alarak $1/(1-x)^2$ fonksiyonunu bir kuvvet serisi olarak yazınız. Bulduğunuz serinin yakınsaklık yarıçapı nedir?

Çözüm : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

elde edilir. Eğer istenirse n yerine $n+1$ alarak, yanıt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$$

biçiminde yazılabilir. Teorem 1.2 den, türev alınınca elde edilen serinin yakınsaklık yarıçapı, ilk serinin yarıçapı ile aynı, $R = 1$ dir. $\square$

Örnek

$\ln(1-x)$ fonksiyonunun kuvvetserisi açılımını ve bu serinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm : $\ln(1-x)$ fonksiyonunun türevi, -1 çarpanı dışında $1/(1-x)$ fonksiyonudur. Dolayısıyla, Denklem 7 in her iki yanının integrali alalım:

$$
\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= \int \frac{1}{1-x}\,dx = \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$-\ln(1-x) = \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\mathbf{C}$ nin değerini belirlemek için denklemde $x = 0$ yazarsak $-\ln(0-1) = \mathbf{C}$ elde ederiz. Böylece $\mathbf{C} = 0$ ve

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

olur. Bu serinin yakınsaklık yarıçapıda ilk serinin yakınsaklık yarıçapıyla aynıdır: $R = 1$. $\square$

Örnek

$f(x) = \tan^{-1} x$ fonksiyonunun bir kuvvetr serisi açılımını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oluduğu için, istenilen seri, Örnek 1.7 de bulunan $\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun kuvvet serisinin integrali alınarak bulunur.

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots)\,dx \\ &= \mathbf{C} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\tan^{-1} x = \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\mathbf{C}$ yi bulmak için, $x = 0$ alınır ve $\mathbf{C} = \tan^{-1} 0 = 0$ bulunur. Böylece,

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

elde ederiz. $\dfrac{1}{1+x^2}$ nin kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olduğu için $\tan^{-1} x$ fonksiyonunun kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı da 1 olur. $\square$

Örnek

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^7}\,dx$ integralini bir kuvvet serisi olarak hesaplayınız.

(b) (a) yı kullanarak $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx$ integralini 10^{-7} dek küçük bir hata ile hesaplayınız.

Çözüm : (a) Önce, $\dfrac{1}{1+x^7}$ fonksiyonunu bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade edelim.

Örnek 1.7 deki gibi, Denklem 7 de x yerine $-x^7$ yazalım:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{7n}$$

Şimdi terim-terim integral alalım:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^7}\,dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{7n}\right)\,dx \\
&= \mathbf{C} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{7n+1}}{7n+1} \\
&= \mathbf{C} + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots
\end{aligned}$$

Bu seri, $|-x^7| < 1$, ya da $|x| < 1$ için yakınsaktır.

(b) Değer Bulma Teoreminin uygularken hangi ilkel fonksiyonun kullanıldığı önemli olmadığı için, (a) şıkkında bulduğumuz ilkeli $\mathbf{C}$ alarak kullanabiliriz.

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots\right]_0^{0.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Bu sonsuz seri, verilen belirli integralin kesin değeridir, ancak seri seri alterne seri olduğu için, Alterne Seri Hata Teoremini kullanarak bu toplamın yaklaşık değerinin bulabiliriz.

Toplama işlemini $n = 3$ e karşılık gelen terimden sonra durdurursak, yapılan hata $n = 4$ e karşılık gelen terimden daha küçüktür.

$$\text{5.terim}(n = 4) \; = \frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11} < 10^{-7}$$

Dolayısıyla da

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\, dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$

bulunur. $\square$

Bir önceki bölümde sınırlı sayıda fonksiyon sınıfının kuvvet serisi gösterimini bulabilmiştik. Şimdi daha genel problemlerle ilgileneceğiz. Hangi fonksiyonların kuvvet serisi gösterimi vardır? Bu gösterimleri nasıl bulabiliriz?

Teorem

f nin a noktasında bir kuvvet serisi gösterimi varsa, bir başka deyişle

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

ise, serinin terimlerinin katsayıları

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

formülü ile verilir.

c_n nin bu formülü serideki yerine yazıldığında, f nin a noktasında bir kuvvet serisi göstermi varsa, bu serinin

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

olması gerektiği görülür.

Denklem 8 deki seriye f **fonksiyonunun** a **noktasındaki**(veya a **çevresindeki** veya a **merkezli**) **Taylor Serisi** denir.

$a = 0$ özel durumunda Taylor serisi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots \qquad (9)$$

serisine dönüşür. Bu seri ile sıkça karşılaşıldığından, ona özel bir ad verilerek, **Maclaurin serisi** denir.

Örnek

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini ve bu serinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm : $f(x) = e^x$ ise, her n için $f^{(n)}(x) = e^x$ ve buradan da $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ olur. Dolayısıyla f nin 0 çevresindeki Taylor serisi (yada Maclaurin serisi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

olur.

Bu serinin yakınsaklık yarıçapını bulmak için $a_n = \frac{x^n}{n!}$ diyelim. Buradan $n \to \infty$ iken

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

bulunur, ve oran testinden, seri her x için yakınsaktır ve yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$ olur. □

Teorem 1.3 ve Örnek 1.14 den e^x fonksiyonunun 0 çevresinde bir kuvvet açılımı varsa,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{10}$$

olması gerektiği sonucunu çıkarırız.

Özel olarak, Denklem 10 de $x = 1$ alırsak, e sayısını sonsuz bir serinin toplamı olarak yazmış oluruz:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Örnek

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun $a = 2$ deki Taylor serisini bulunuz.

Çözüm : $f^{(n)}(2) = e^2$ olduğundan Taylor serisinin tanımında $a = 2$ yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

elde ederiz. Bu serinin yakınsaklık yarıçapının da $R = \infty$ olduğu Örnek 1.14 deki gibi gösterilebilir.

Örnek

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm : Hesaplamalarımızı iki sütun halinde yazalım:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

Türevler her dört derecede bir aynı olacağı için Maclaurin serisini

$$\begin{aligned} f(0) &+ \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Bazı önemli Maclaurin serileri:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad [-1, 1]$$