חלקיקים

30 בספטמבר 2024

תוכן העניינים

1 משוואת קליין גורדון

נרצה למצוא משוואת גל קוונטית עבור חלקיק חופשי ($U=0$).
נבצע הנחה בהשראת דה-ברולי, שפונקציית הגל ψ היא פתרון למשוואה שאנו מחפשים:

$$\psi\left(\mathbf{x},t\right)=Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)/\hbar}$$

מכאן מתקבלים האופרטורים הקוונטים $\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ו-$\hat{p}=-i\hbar\nabla$.
במקרה הקלאסי, $H=\frac{p^2}{2m}$, נקבל את משוואת שרודינגר (נציב $E\psi=H\psi$):

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$$

במקרה היחסותי, נציב את האופרטורים בקשר $H^2=mc^4+p^2c^2$ במקום, ונקבל את המשוואה (שנית, $E\psi=H\psi$):

$$\boxed{\left(\Box+\mu^2\right)\psi=0}$$

זוהי משוואת קליין גורדון, כאשר $\mu=\frac{mc}{\hbar}$ ו-$\Box\equiv\partial^\mu\partial_\mu=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$.
משוואה זו נובעת גם מהלגרנז'יאן $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial\psi\right)^2-\frac{1}{2}\kappa\psi^2$.

היא מתאימה לבוזון עם ספין 0, אך לא לפרמיונים - ישנן מספר **בעיות** עם משוואה זו:

1. לכל פתרון עם אנרגיה חיובית $E_p>0$ ניתן למצוא פתרון מקביל עם אנרגיה שלילית $-E_p$.
2. צפיפות ההסתברות אינה חיובית בהכרח

2 משוואת דיראק

2.1 פיתוח המשוואה

משוואת דיראק דומה למשוואת קליין גורדון בכך שגם היא קוונטית יחסותית, אך מטרתה לפתור את בעיות משוואת קליין גורדון עבור פרמיונים (ספין $1/2$).

ההבדל - דיראק חיפש משוואה עם נגזרות מסדר ראשון בלבד (לעומת KG בעלת נגזרות מסדר שני).

קליין גורדון משתמשת בקשר הריבועי $||p||^2 = m^2c^2$.

במטרה למצוא קשר מסדר ראשון, ניקח שורש. כלומר פתרון המשוואה (צריך למצוא A, B, C, D):

$$A\left(\frac{E}{c}\right) + Bp_x + Cp_y + Dp_z = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2}$$

כך נקבל אופרטור לינארי עבור משוואת הגל שלנו.

ניקח ריבוע 2 האגפים ונקבל:

$$\begin{array}{ccc} A^2 = 1 & AB - BA = 0 & BC - CB = 0 \\ B^2 = -1 & AC - CA = 0 & BD - DB = 0 \\ C^2 = -1 & AD - DA = 0 & CD - CD = 0 \\ D^2 = -1 & & \end{array}$$

דיראק שם לב שמטריצות גמה $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ מקיימות את קשר זה. כלומר מצאנו את A, B, C, D להיות *מטריצות*.

אז המשוואה שמצאנו הינה:

$$\gamma^\mu p_\mu = \sqrt{p^\mu p_\mu} = ||p|| = mc$$

ואופרטור 4 תנע קוונטי הינו $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$. לכן משוואת דיראק היא:

$$\boxed{\left(\gamma^\mu \partial_\mu + i\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

2.2 מסקנות

1. צפיפות ההסתברות כעת חיובית. יאי!
2. כיוון שמצאנו את A, B, C, D בתור מטריצות 4×4, כעת ψ בעל 4 רכיבים. "בי-ספינור".

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

3. אך גם משוואת דיראק נותנת *אנרגיות שליליות*.

2.3 אנטי חומר

כדי ליישב את האנרגיות השליליות דיראק הציע את התאוריה הבאה.

כל רמות האנרגיה השליליות "תפוסות" כבר. לדוגמה עבור אלקטרונים, ישנו ים אלקטרונים (מטען שלילי) שתופסים את רמות האנרגיה השליליות.

ואז אם ישנו "חור" בים הזה, אפקטיבית לא ניתן להבדילו מאלקטרון עם אנרגיה חיובית ומטען חיובי. נקרא לאלקטרון "חור" שכזה *פוזיטרון*.

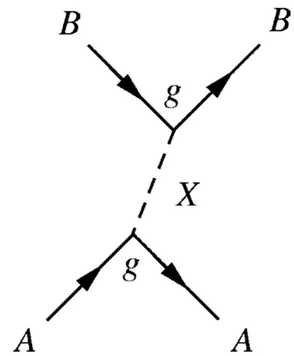
או באופן כללי לכל חלקיק חור שכזה נקרא אנטי חלקיק.

ולאחר מכן באמת מצאו בניסוי את קיום הפוזיטרון, ושאכן קיים אנטי חומר.

3 דיאגרמות פיינמן

3.1 טווח של כוח

טווח כוח כללי:



נניח כוח כלשהו שמועבר באמצעות חלקיק X, בין שני חלקיקים A, B עם עוצמת אינטרקציה g (הסתברות).
הקודקוד התחתון מייצג את התהליך הוירטואלי (במערכת המנוחה של A):

$$A\left(M_Ac^2,0\right) \rightarrow A\left(E_A,p\right)+X\left(E_X,-p\right)$$

והאנרגיות נתונות על פי:

$$E_A=\left(M_A^2c^4+p^2c^2\right)^{1/2} \quad E_X=\left(M_X^2c^4+p^2c^2\right)^{1/2}$$

לכן השינוי באנרגיה הינו:

$$\Delta E=E_A+E_X-M_Ac^2=\begin{cases}2pc & p\rightarrow\infty\\ M_xc^2 & p\rightarrow 0\end{cases}$$

ובפרט מתקיים $\Delta E>M_Xc^2$ לכל p.
לפי עקרון אי הוודאות, הפרה כזו של שימור האנרגיה מותרת רק לזמן $\tau\approx\frac{\hbar}{\Delta E}<\frac{\hbar}{M_Xc^2}$.
המרחק המקסימלי R ש-X יוכל לעבור בזמן זה הוא הטווח המקסימלי של הכוח ($R=c\tau$):

$$R=\frac{\hbar}{M_Xc}$$

טווח פוטון (כוח א"מ): לכן הטווח של פוטון (פעוולה א"מ) אינסופי - אין לו מסה.
נבחן את התהליך הוירטואלי $A\rightarrow A+\gamma$ כדי לוודא:

$$A\left(M_Ac^2,0\right)\rightarrow A\left(E_A,p\right)+\gamma\left(pc,-p\right)$$

$$\Delta E=\left(M_A^2c^4+p^2c^2\right)^{1/2}+pc-M_Ac^2=\begin{cases}2pc & p\rightarrow\infty\\ 0 & p\rightarrow 0\end{cases}$$

ואז $\frac{\hbar c}{\Delta E} \approx R = c\tau$ אך ייתכן $\Delta E = 0$ כלומר הטווח האפשרי הינו ∞ $R \to \infty$.
(מה יקרה אם p לא אפס? האם זה ייתכן? האם במקרה זה טווח הפוטון סופי?)

טווח גלואון: גם כן אינסופי, גלואונים הם חסרי מסה.

טווח כוח חלש: לבוזונים W, Z מסה, כך שמתקבל $R_{W,Z} = \frac{\hbar}{M_W c} \approx 2 \times 10^{-18} m$. אפקטיבית הכוח החלש נקודתי (חסר טווח $R \to 0$. אפקטיבית $M_X \to \infty$).

3.2 פוטנציאל יוקאווה

ניתן להתייחס לחלקיק B כחלקיק שעובר פיזור תחת פוטנציאל קבוע (סטטי).

באופן כללי הפוטנציאל תלוי הספין של X.
אך ניתן למצוא תיאור כללי אם X בוזון בעל ספין-0.
במקרה זה, X מקיים את משוואת קליין גורדון:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t^2}=-\hbar^2c^2\nabla^2\phi\left(\mathbf{x},t\right)+M_x^2c^4\phi\left(\mathbf{x},t\right)$$

אינטרפרטציית $\phi\left(\mathbf{x}\right)$ היא הפוטנציאל סטטי. (אבל למה?)
עבור פתרון סטטי (כפי שדרשנו), המשוואה הופכת ל:

$$\nabla^2\phi\left(\mathbf{x}\right)=\frac{M_X^2c^2}{\hbar^2}\phi\left(\mathbf{x}\right)$$

ניתן לחלק ל2 מקרים: חלקיק X בעל מסה וחלקיק חסר מסה.

עבור $M_X^2=0$:
המשוואה $\nabla^2\phi=0$ (משוואת לפלאס) היא משוואה מתארת פוטנציאל אלקטרוסטטי. האנרגיה הפוטנציאלית באלקטרוסטטיקה הינה:

$$V(r)=-e\phi\left(r\right)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

לכן באנלוגיה, הפוטנציאל שפותר את משוואתנו הינו (״פוטנציאל יוקאווה״):

$$\boxed{V(r)=-\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-r/R}}{r},\quad R=\hbar/M_Xc}$$

כאשר R הטווח של X, והנחנו שקבוע הצימוד g זהה עבור שני החלקיקים A ו-B.
ואז קיים פרמטר הקובע את הסתברות התהליך באנלוגיה לfine structure constant:

$$\boxed{\alpha_X=\frac{g^2}{4\pi\hbar c}}$$

3.2.1 אמפליטודת הפיזור

בתורת ההפרעות מסדר הנמוך ביותר, אמפליטודת ההסתברות עבור חלקיק לעבור פיזור מתנע $\mathbf{q_i}$ לתנע $\mathbf{q_f}$ תחת פוטנציאל $V\left(\mathbf{x}\right)$ ע״פ קירוב בורן:

$$\mathcal{M}\left(\mathbf{q}\right)=\int V(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})/\hbar}d^3\mathbf{x}$$

כאשר $\mathbf{q}=\mathbf{q_f}-\mathbf{q_i}$.
נציב $\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}=qr\cos\theta$, $d^3\mathbf{x}=r^2\sin\theta drd\theta\phi$, ואת פוטנציאל יוקאווה $V(r)$.

$$\mathcal{M}\left(\mathbf{q}\right)=\int\int\int-\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-rM_Xc/\hbar}}{r}e^{iqr\cos\theta/\hbar}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

ולסוף מתקבל

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2\hbar^2}{q^2 + M_X^2 c^2}$$

אך יש לשים לב שהעובדה שהשתמשנו בתורת הפרעות מסדר *ראשון* בלבד, אומרת שהתוצאה נכונה רק עבור טווח R קטן לעומת אורכי גל דה ברולי של שאר החלקיקים במערכת, כך ש-$q^2 << M_X^2 c^2$. ואז

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = -G = \frac{-g^2\hbar^2}{M_X^2 c^2}$$

4 קווארקים ולפטונים