אלגברה לינארית 1 - המשך

אילאי וישנבסקי שלוש

6 באפריל 2024

תוכן העניינים

שבוע 1-3	קבוצות, וקטורים ומטריצות, פתרון מערכת משוואות לינאריות, פעולות על מטריצות, מטריצות מיוחדות, כפל מטריצות
שבוע 4	העתקות, שדה, מרחבים וקטורים
שבוע 5	בסיס, העתקות לינאריות
שבוע 6	גרעין ותמונה של העתקה, משפט המימדים, הקשר בין מטריצות להעתקות
שבוע 7	טרנספורמצית דמיון, מרחבי מכפלה פנימית, בסיסים אורתונורמלים ותהליך גרהם שמידט
שבוע 8	הדטרמיננטה, מציאת מטריצה הופכית
שבוע 9-10	וקטורים עצמיים וערכים עצמיים, לכסון מטריצות, מטריצות מיוחדות

alonron@tauex.tau.ac.il
Teacher: Alon Ron
Office: Shenkar 406
TA: Alon Beck

1 חדואת העניין

1.1 קבוצות

קבוצה היא אוסף איברים ללא חשיבות לסדר או כפילויות. שתי קבוצות שוות אמ"מ

$$A = B \iff \forall a : (a \in A) \iff (a \in B)$$

A מוכלת ב-B (תת קבוצה של B) אמ"מ

$$A \subseteq B \iff \forall a \, (a \in A) \Rightarrow (a \in B)$$

אמ"מ $A \subseteq B$ ו-$B \subseteq A$ אז $A = B$.

1.1.1 פעולות

נגדיר מספר פעולות אשר ניתן לבצע בין קבוצות.

1. חיתוך: $A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$.
2. איחוד: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$.
3. הפרש: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$.
4. מכפלה קרטזית: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. לדוגמה, המרחב התלת מימדי הוא $\mathbb{R}^3$.

1.2 פונקציות

1.2.1 הגדרה

פונקציה/העתקה היא התאמה בין שתי קבוצות $f : A \to B$. A נקראת התחום של f ו-B הטווח.

1.2.2 הרכבת פונקציות

בהינתן שלוש קבוצות A, B, C ושתי פונקציות f, g:

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$
$$a \to f(a), \quad b \to g(b)$$

הרכבת הפונקציות היא

$$f \cdot g : A \to C$$
$$x \to g(f(a))$$

1.2.3 פונקציות הפיכות (על וחח"ע)

העתקה f נקראת *על* (onto/surgective) אמ"מ התמונה של הפונקציה היא הטווח $B = \text{im} f$.
העתקה נקראת *חד חד ערכית* (חח"ע, injective) אמ"מ לכל $a \in A$ מותאם $b \in B$ יחיד ולהפך.
העתקה היא *הפיכה* אמ"מ היא חח"ע וגם על. ההעתקה ההפוכה היא $f^{-1} : B \to A$ המקיימת $f^{-1}(f(x)) = x$.

1.2.4 קבוצות איזומורפיות

העתקה חח"ע ועל (bijection) בין שתי קבוצות נקראת איזומורפיזם (לא בדיוק), והקבוצות איזומורפיות אחת לשנייה.

1.2.5 טרנספורמציות

העתקה מקבוצה לעצמה, חח"ע ועל $f : S \to S$ נקראת טרנספורמציה.

1.3 עוצמת קבוצות

קבוצה S היא סופית אם קיים מספר טבעי n כך שניתן ליצור העתקה חח"ע בינה ובין $N = \{1, 2, \cdots, n\}$.
במקרה זה העוצמה (Cardinality) של הקבוצה היא $\text{card}\,(S) = n$.

קבוצה היא אינסופית אם היא לא סופית. ישנן דרגות שונות של אינסופיות, וביניהן הדרגה הנמוכה ביותר היא של הקבוצה $\mathbb{N}$.

קבוצה אשר ניתן ליצור עבורה התאמה חח"ע ל-$\mathbb{N}$ נקראת בת מנייה (countable).

<u>לדוגמה,</u>
המספרים השלמים הם בני מנייה

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}. \quad f\,(a) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 2a & a > 0 \\ 2(-a) + 1 & a < 0 \end{cases}$$

מכפלה קרטזית של קבוצות בנות מנייה היא בנת מנייה

$$\begin{array}{lllllllll}
(s_1, t_1) & & (s_1, t_2) & \rightarrow & (s_1, t_3) & & (s_1, t_4) & \rightarrow & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \ldots & & \\
(s_2, t_1) & & (s_2, t_2) & & (s_2, t_3) & \ldots & & & \\
& \swarrow & & \nearrow & \ldots & & & & \\
(s_3, t_1) & & (s_2, t_3) & \ldots & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & \ldots & & & & & & \\
(s_3, t_1) & \ldots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

2 שדות ומרחבים וקטורים

2.1 שדות

שדה F הוא קבוצה בעלת שתי פעולות (חיבור המסומן $+$ וכפל המסומן $\cdot$) המקיימות את התנאים:
חיבור:

1. סגירות $\forall a,b\in F: a+b\in F$
2. איבר אפס $\forall a\in F: a+0=a$
3. איבר נגדי $\forall\left(a\in F\right)\exists\left(-a\in F\right)\left[a+\left(-a\right)=0\right]$

כפל:

1. סגירות $\forall a,b\in F: a\cdot b\in F$
2. איבר יחידה $\forall a\in F: a\cdot 1=a$
3. איבר נגדי $\forall\left(a\in F\right)\exists\left(a^{-1}\in F\right)\left[a\cdot a^{-1}=1\right]$

פילוג:

$$a\cdot\left(b+c\right)=ab+ac$$

לדוגמה,

1. הרציונלים
2. הממשיים
3. המרוכבים
4. הקבוצה $S=\{0,1,2\}$.
$a+b=(a+b)\bmod 3$, $a\cdot b=(a\cdot b)\bmod 3$.

$\cdot$	**0**	**1**	**2**		**+**	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0		**0**	0	1	2
1	0	1	2		**1**	1	2	0
2	0	2	1		**2**	2	0	1

2.2 מרחבים וקטורים

יהי שדה F וקבוצה V. V תקרא מרחב וקטורי אם מתקיים:
- על V מוגדרים חיבור וכפל המקיימים ($u, v, w \in V$ ו-$\lambda, \mu \in F$):

חיבור

1. V סגור ביחס לחיבור. $u + v \in V$
2. אסוציאטיביות. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. חילופיות $u + v = v + u$
4. איבר אפס $0 + v = v$
5. קיים איבר נגדי $(-v) + v = 0$

כפל בסקלר

1. V סגור לכפל בסקלר. $\lambda v \in V$
2. אסוציאטיביות. $\lambda (\mu v) = (\lambda \mu) v$
3. פילוג $\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. פילוג ביחס לחיבור סקלרים $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
5. קיים סקלר $1 \in F$ כך ש-$1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.

<u>לדוגמה,</u>
$\mathbb{R}^3$ הוא שדה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור וקטורי וכפל בסקלר.
$\mathbb{R}^n$ הוא שדה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$ ...
$\mathbb{C}^n$ הוא שדה וקטורי מעל שדה $\mathbb{C}$ ...
$\mathbb{R}^n$ <u>אינו</u> שדה וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$. $i (1, 0, 0) = (i, 0, 0) \notin \mathbb{R}^3$. לא מקיים סגירות לכפל בסקלר.

2.3 תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. הקבוצה W היא תת מרחב וקטורי של V אם היא

1. תת קבוצה של V
2. מרחב וקטורי בעצמה מעל אותו השדה F אם אותן הפעולות.

<u>נשים לב:</u>
אילו אינן דרישות. ניתן להוכיחן.

1. וקטור האפס של W הוא וקטור האפס של V. זו אינה דרישה אך ניתן להוכיח זאת.
2. מפני שלכל וקטור יש וקטור הופכי *יחיד*, אם האחד שייך לW גם ההופכי שייך לW.

<u>לדוגמה,</u>

1. עבור $V = F^n$ מעל F. קבוצת כל הוקטורים ב-V שמקיימים $x_i = 0$ היא תת מרחב וקטורי.
2. עבור $V = F^n$ מעל F. קבוצת כל הוקטורים ב-V שמקיימים $x_i = 1$ אינה תת מרחב וקטורי (לא סגור לחיבור וכפל בסקלר).
3. עבור $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, מישור xy הוא תת מרחב וקטורי.
4. עבור $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, מישור המקביל למישור ה-xy, $z \neq 0$, אינו תת מרחב וקטורי (לא סגור, אין איבר אפס).
5. עבור $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ניקח וקטור $A \in V$. קבוצת הוקטורים המקיימים $v \cdot A = 0$ היא תת מרחב וקטורי.
6. יהי $V = F^\infty$. הקבוצה $W = \{(x_1, x_2, x_3 ...) : \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$ היא תת מרחב וקטורי.

2.4 סכום תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי מעל F ו-U ו-W תתי מרחבים של V. הסכום של תתי המרחבים הינו תת מרחב בעצמו, ומוגדר כך:

$$U + W \equiv \{v = u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

<u>לדוגמה,</u>

1. $V = \mathbb{R}^3$ ותתי המרחבים $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ ו-$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$ ציר ה-x וציר ה-y. איחודם הוא שני הצירים, אך סכומם הוא מישור xy: $U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

2.4.1 סכום ישר

אם ניתן להציג כל וקטור $v \in U + W$ באופן יחיד $v = u + w$ כאשר $u \in U$ ו-$w \in W$, אזי הסכום ייקרא סכום ישר ויסומן $U \oplus W$. $U + W$ הוא סכום ישר אמ"מ $W \bigcap U = \{0\}$.

<u>לדוגמה,</u>

1. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ו-$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\}$. $U + W$ אינו סכום ישר. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3 בסיסים

3.1 פרישת מרחב וקטורי $(span)$

3.1.1 צירוף לינארי (צ״ל)

יהי מרחב וקטורי V על שדה F. $\alpha_i \in F$, $v_i \in V$. ביטוי מהצורה

$$v = \sum_i^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ... + \alpha_n v_n$$

נקרא צירוף לינארי (Linear Combination) של הוקטורים v_i. הסקלר α_i נקרא המקדם של v_i. הסכום נקרא הפירוק של v לפי $v_1, v_2 ... v_n$.

3.1.2 משפט

יהי W אוסף כל הצירופים הלינארים של קבוצת וקטורים $v_1 ... v_n \in V$. אז W היא תת מרחב של V.
<u>הוכחה:</u> $x_i, y_i \in F$. $w_i \in W$.

$$w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i \in W$$

$$y_1 \cdot w_1 = y_1 \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n (y_1 x_i) v_i \in W$$

$$\vdots$$

למדה איי איפה הוא חי??

3.1.3 פרישה ומימד

אם תת מרחב נוצר ע״י אוסף כל הצ״ל של קבוצת וקטורים A מ-V הוא יקרא המרחב הנפרש ע״י A.

$$\boxed{Sp(A) = \left\{ \sum_i x_i v_i \ \mid \ x_i \in F, v_i \in A \right\}}$$

A נקראת קבוצת יוצרים של המרחב $Sp(A)$.

! <u>הגדרה:</u> כמות הוקטורים המינימלית שצריך על מנת לפרוש מרחב וקטורי נקראת *המימד שלו*. לדוגמה עבור $\mathbb{R}^3$ המימד הוא 3: $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.
ניתן לכתוב זאת בתור $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
<u>לדוגמה,</u>

1. את $\mathbb{R}^n$ ניתן לפרוש באמצעות n וקטורי יחידה: $\hat{e_i} \equiv (0, 0 ... 1, 0, ... 0)$, $A = \{\hat{e_1} ... \hat{e_n}\}$ (המקום ה-i 1 וכל השאר 0). כך מתקבל

$$\vec{x} = \sum_i x_i \hat{e}_i = (x_1, x_2, x_3 ... x_n)$$

3.1.4 תלות לינארית של וקטורים

תהי קבוצת וקטורים $A=\{v_1,...,v_n\}$ מתוך מרחב וקטורי V. Aנקראת תלויה לינארית (ת״ל) אם קיימים $a_1,...,a_n\in F$ שלא כולם אפס, כך ש:

$$\sum_i a_i v_i = 0$$

וקטורים שאינם תלויים לינארית נקראים בלתי תלויים לינארית (בת״ל).

<u>משפט:</u> יהיו $A_1,...,A_k$ אוסף וקטורים אורתוגונלים שאינם 0 $(A_i\cdot A_j=A^2\delta_{ij})$. אז קבוצה זו בלתי תלויה לינארית.
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה תלות לינארית: $\sum_i a_iA_i=0$. נכפיל בA_j ונקבל: $a_jA_j^2=0$. כלומר $a_j=0$ (סתירה) ולכן קבוצה זו בת״ל. ■

<u>משפט:</u> יהיו $v_1,...,v_n$ אוסף וקטורים ת״ל אמ״מ ניתן לכתוב אחד מהם כצ״ל של השאר.
<u>הוכחה:</u> i. נתון שהוקטור v_n ניתן לכתיבה כצ״ל של $v_1,...,v_n$. $v_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_iv_i$. אז ניתן להגדיר $a_n=-1$ ולהוסיף לשני אגפי המשוואה a_nv_n. מתקבל $\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=0$. אז v_i ת״ל. ■

ii. נתון כי $v_1,...,v_n$ ת״ל. אז $\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=0$ וקיים $a_i\neq 0$. בה״כ נניח שזהו $a_n\neq 0$. $a_nv_n=-\sum_{i=1}^{n-1}a_iv_i$. ניתן לחלק ב-$a_n$ ולקבל $v_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{-a_i}{a_n}v_i$ צ״ל. ■

3.1.5 בסיס מרחב וקטורי

קבוצת וקטורים תקרא בסיס של מרחב וקטורי V אם היא פורשת את V ובת״ל.

<u>לדוגמה,</u>
אוסף של n וקטורי יחידה ב$\mathbb{R}^n$. לבסיס הזה נהוג לקרוא הבסיס הסטנדרטי ל-$\mathbb{R}^n$.

<u>משפט:</u> יהי מרחב וקטורי V, ו-$A=\{v_1,...,v_n\}\subset V$. התנאים הבאים שקולים:

1. A בסיס של V.
2. A קבוצה יוצרת מינימלית, אם נשמיט מA וקטור היא לא תפרוש את V (A קבוצה יוצרת מינימלית).
3. A קבוצה בת״ל מקסימלית. כלומר, אם נוסיף לה וקטור מ-V נקבל קבוצה ת״ל.

<u>הוכחה:</u>
$1\leftarrow 2$: נתון כי A בסיס של V. נניח בשלילה כי $A\backslash\{v_j\}$ פורשת את V. אזי כל וקטור בV ניתן לכתיבה כצ״ל של $A\backslash\{v_j\}$. אם זה נכון אז $v_j\in V$ ניתן לכתיבה כצ״ל של $A\backslash\{v_j\}$, ולכן A ת״ל בניגוד לכך שהיא בסיס (סתירה). מכאן ש-$A\backslash\{v_j\}$ לא פורשת את V.

$2\leftarrow 3$: נתון כי A קבוצה יוצרת מינימלית ולכן איבריה בת״ל. נוסיף ל-A וקטור $u\in V$ כלשהו. u ניתן לכתיבה כצ״ל: $u=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$. כלומר $A\cup\{u\}$ ת״ל.

$3\leftarrow 1$: נתון כי A בת״ל ושאם מוסיפים לה וקטור $u\in V$ מקבלים קבוצה ת״ל. אז אפשר לכתוב את u כצ״ל של איברי A. ולכן A פורשת את V ועל כן הינה בסיס. (כיוון ש$V=Sp\left(A\right)$ שקול לכך שכל u צ״ל של A). ■

<u>לסיכום:</u>

1. בסיס של V קבוצה בת״ל שפורשת את V.
2. נשמיט וקטור ולא נקבל קבוצה פורשת.
3. נוסיף וקטור ונקבל קבוצה ת״ל.

3.1.6 תנאים שקולים לקיום בסיס

יהי V מרחב וקטורי בעל מימד $\dim V=n$ ו-A קבוצת וקטורים ב-V. אז התנאים הבאים שקולים (כלומר אם אחד נכון כולם נכונים):

1. A בסיס של V (בת״ל + פורשת).

2. A קבוצה בת"ל בעלת n וקטורים.
3. A קבוצה פורשת בעלת n וקטורים.

החשיבות של תנאים 2,3 היא *שמשמעותם* שלא חייבים להוכיח שקבוצה היא *גם* בת"ל ו*גם* פורשת, מספיק אחד מהם ומספר הוקטורים שבקבוצה כמימד המרחב.

3.1.7 יחידות הצירוף הלינארי

יהי $A=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V. אז כל וקטור $u\in V$ ניתן לכתיבה כצ"ל יחיד:

$$u=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$$

כלומר קיימת קבוצת סקלרים $\{a_1,...,a_n\}$ יחידה המקיימת את השוויון לעיל.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה כי קיימת קבוצה נוספת $\{b_i\}$ המקיימת את השוויון. כלומר

$$\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i,\quad a_i\neq b_i$$

נעביר אגפים ונקבל $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)v_i=0$ צ"ל שמתאפס. כיוון ש-A בסיס (בת"ל) חייב להתקיים $a_i-b_i=0$ ומכאן $a_i=b_i$ בסתירה.
■

3.1.8 דוגמה: מעברי בסיס

ל-$\mathbb{R}^2$ בסיס $E=\left\{\hat{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\hat{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ניקח וקטור כללי $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\hat{e}_1+y\hat{e}_2$.
מהו הפירוק של הוקטור $\vec{v}$ בבסיס $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$? ("מה הסקלרים בצ"ל?")

$$a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

מתקבל

$$\begin{cases}a&=\frac{2x+y}{3}\\b&=\frac{x-y}{3}\end{cases}$$

3.1.9 דוגמה: מרחב פונקציות

נתבונן במרחב הוקטורי הנפרש ע"י פונקציות חזקה $A=\left\{1,x,x^2,x^3...\right\}$, המרחב $V=Sp\left(A\right)$. נוכיח כי A בסיס ל-V.

1. A פורשת את V כי V נבחר בתור $Sp\left(A\right)$. ראינו גם שכל פונקצייה רציפה ניתנת לכתיבה בתור טור טיילור, המוגדר בתור $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}|_{x_0}\left(x-x_0\right)^n$.
2. נותר להוכיח כי A בת"ל. בשביל להראות כי A בת"ל נכתוב צ"ל לינארית שמתאפס.

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0$$

ובפרט ב$x=0$, מתקבל $b_0=0$. נגזור n פעמים (לכל $n\in\mathbb{N}$), ונקבל עבור $x=0$, $b_n=0$. אז A בת"ל.

4 העתקה לינארית

4.1 הגדרה

יהיו V ו-W שני מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F. העתקה $f:V\to W$ תקרא העתקה לינארית אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. $f\left(u+v\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right)$, $u,v\in V$
2. $f\left(cv\right)=cf\left(v\right)$, $c\in F$

משתי דרישות אלו נובע כי לכל צ״ל של וקטורים מתקיים $f\left(\sum_{k=1}^{n}c_{k}v_{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_{k}f\left(v_{k}\right)\in W$. כלומר ההעתקה הלינארית f לוקחת וקטור ב-V ומחזירה אותו כצ״ל של $f(v_k)$ עם אותו סט המקדמים.

4.2 משפטים

טענה: אם A בסיס ל-V מספיק לציין מה העתקה לינארית עושה לאיברי הבסיס בשביל לדעת מה היא עושה לכל וקטור ב-V.
הוכחה: יהי מרחב וקטורי V הנפרש ע״י בסיס $A=\{v_1,...,v_n\}$ ויהי וקטור $v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$. תחת העתקה לינארית $f:V\to W$ מתקבל $f\left(v\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_if\left(v_i\right)$. ■

טענה: פירוק של וקטור לרכיבים זו העתקה לינארית.
הוכחה: יהי מרחב וקטורי V בעל מימד $\dim V=n$ והעתקה $f:V\to F^n$. נבחר בסיס $A=\{v_1,...,v_n\}$ ל-V. וקטור כללי ב-V: $v=\sum_i x_iv_i$. אז נגדיר את ההעתקה f בתור $f(v)=f\left(\sum_i x_iv_i\right)=(x_1,x_2,...,x_n)\in F^n$.
נבחן סכום וקטורים מ-V, וכפל סקלר בוקטור מ-V:

$$f\left(u+v\right)=f\left(\sum_i x_iv_i+\sum_i y_iv_i\right)=f\left(\sum_i\left(x_i+y_i\right)v_i\right)=\left(x_1+y_1,...,x_n+y_n\right)=\left(x_1,...,x_n\right)+\left(y_1,...,y_n\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right)$$

$$f\left(cv\right)=f\left(c\sum_i x_iv_i\right)=f\left(\sum_i\left(cx_i\right)v_i\right)=\left(cx_1,...cx_n\right)=c\left(x_1,...,x_n\right)=cf\left(v\right)$$

■

טענה: הטלה היא העתקה לינארית. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\to(x,y)$
הוכחה: trust me bro. ■

טענה: העתקת הזהות היא העתקה לינארית. $f:V\to V$, $f(v)=v$.
הוכחה: נו ברור. $f(v+v)=v+v=f(v)+f(v)$ ו-$f(cv)=cv=cf(v)$. ■

טענה: נגזרת של פונקציה היא העתקה לינארית.
הוכחה: יהי V מרחב הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $D:V\to V$ מוגדרת $Df(x)=\frac{df}{dx}$.
אז יש $D\left(f(x)+g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}=Df\left(x\right)+Dg(x)$.
וגם יש $D\left(cf(x)\right)=\frac{d(cf(x))}{dx}=c\frac{df}{dx}=c\cdot Df(x)$. ■

טענה: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מאותו מימד ו$L:V\to W$ העתקה לינארית המיוצגת ע״י מטריצה A בבסיסים B_V,B_W. A הפיכה אמ״מ L הפיכה.
הוכחה: נניח כי L הפיכה $L^{-1}(w)=v$ $L(v)=w,$. שתיהן העתקות לינאריות על כן קיימות מטריצות A,B התואמות אותן. ואז מתקיים $B=A^{-1}$.
נניח כי A הפיכה אז קיימת A^{-1}. $x=Ix=AA^{-1}x=AL'(x)$

4.3 מטריצה כהעתקה לינארית

כפל וקטור במטריצה הוא העתקה לינארית.
תהי מטריצה A מסדר $m\times n$ על שדה F והמרחבים הוקטורים F^m,F^n. נגדיר העתקה לינארית $L_A:F^n\to F^m$ בתור $L_A\left(x\right)=Ax$.
הוכחה: נראה שההעתקה L_A היא העתקה לינארית. כאשר $x,y\in F^n$:

$$L_A(x+y)=A(x+y)=Ax+Ay=L_A(x)+L_A(y)$$
$$L_A(\lambda x)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda\cdot L_A(x)$$

על כן L_A היא העתקה לינארית. ■

האם ניתן למצוא מטריצה מתאימה לכל העתקה לינארית $f:F^n\to F^m$? אכן.
נסמן את עמודות המטריצה A_i. אז מתקיים $Ax=x_1A_1+...+x_nA_n$.
כלומר, אם במקום וקטור כללי x נשתמש בוקטור מהבסיס הסטנדרטי של F^n שנסמנו $\hat{e}_i$, נקבל $L(\hat{e}_i)=A\hat{e}_i=A_i$.

<u>לדוגמה,</u>

1. ההטלה $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כאשר $P(x,y,z)=(x,y)$. ידוע

$$P\hat{e}_1=P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A_1,\quad P\hat{e}_2=P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=A_2,\quad P\hat{e}_3=P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=A_3$$

כלומר, התקבל $P=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. נבדוק $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2. טרנספורמציית הזהות $I:F^n\to F^n$ אשר מקיימת $I(x)=x$ ניתנת לייצוג באמצעות מטריצת היחידה $I_{mn}=\delta_{mn}$ (דלתה של קרונקר).

3. סיבוב בדו מימד $R_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מסובב וקטור בזווית θ.

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}cos(\alpha)\\sin(\alpha)\end{pmatrix},\quad v'=R_\theta v$$

נמצא את מטריצת הסיבוב באמצעות זהויות טריגונומטריה:

$$v'=\begin{pmatrix}rcos(\alpha+\theta)\\rsin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rcos(\alpha)cos(\theta)-rsin(\alpha)sin(\theta)\\rcos(\alpha)sin(\theta)+rsin(\alpha)cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xcos(\theta)-ysin(\theta)\\xsin(\theta)+ycos(\theta)\end{pmatrix}$$

אכן, ומכאן כי מטריצת הסיבוב אכן הינה

$$R_\theta=\begin{pmatrix}cos(\theta)&-sin(\theta)\\sin(\theta)&cos(\theta)\end{pmatrix}$$

<u>לסיכום:</u> על מנת לייצג העתקה לינארית בתור מטריצה:

1. בחירת בסיס(ים)
2. ייצוג בסיס כעמודות בסיס סטנדרטי
3. להפעיל העתקה על הבסיס
4. לכתוב עמודות במטריצה

לדוגמה, יהיו מרחבים וקטורים $V=P_2=Sp\left(\{1,x,x^2\}\right)$, $W=\mathbb{R}^2$.
נגדיר העתקה לינארית $T:V\to W$. $T(P(x))=\left(2P(1)+3P'(1),\int_0^1P(x)dx\right)$.
נבחר בסיס ל-P_2 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, ובסיס ל-$W$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נפתור:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$
$$T(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \end{pmatrix}_E$$
$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1/3 \end{pmatrix}_E$$

על כן המטריצה היא

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4.4 גרעין ותמונה של העתקה לינארית

4.4.1 הגדרה

התמונה היא קבוצת הוקטורים שניתן לקבל בW בהעתקה $f : V \to W$.
הגרעין ($Kernel$) הוא קבוצת הוקטורים בV המקיימים $f(V) = 0$ כאשר 0 הוא וקטור האפס של המרחב הוקטורי W.

4.4.2 גרעין -> חח״ע

טענה: תהי $f : V \to W$. העתקה לינארית f חח״ע אם ורק אם $Ker\,(f) = \{0\}$.
הוכחה: נניח בשלילה...

4.4.3 שימור בת״ל תחת העתקה לינארית חח״ע

טענה: תהי $f : V \to W$ העתקה לינארית חח״ע ו-$A = \{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה בת״ל. אז גם $B = \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$.
הוכחה: נכתוב צ״ל מתאפס של איברי B- $\sum_i x_i f\,(v_i) = 0$. בגלל שההעתקה לינארית $\sum_i x_i f\,(v_i) = f\,(\sum_i x_i v_i) = 0$. וכיוון שהיא חח״ע אז $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ ועל כן בהכרח $x_i = 0$. מכאן ש-B בת״ל. ■

4.4.4 גרעין העתקה לינארית מרחב וקטורי

טענה: גרעין של העתקה לינארית הוא מרחב וקטורי.
הוכחה: תהי f העתקה לינארית ויהיו $u, v \in Ker\,(f)$. $f\,(xu + yv) = xf\,(u) + yf\,(v) = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$. כלומר $xu + yv \in Ker\,(f)$, סגירות לחיבור ולכפל. ■

4.4.5 תמונת העתקה לינארית מרחב וקטורי

טענה: תמונה של העתקה לינארית היא מרחב וקטורי.

הוכחה: תהי f העתקה לינארית ויהיו $w_1, w_2 \in Im\,(f)$. ע״פ הגדרת התמונה קיימים v_1, v_2 כך ש- $\begin{matrix} f(v_1) = w_1 \\ f(v_2) = w_2 \end{matrix}$.
$f\,(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f\,(v_1) + a_2 f\,(v_2) = a_1 w_1 + a_2 w_2$. $a_1 w_1 + a_2 w_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$, סגירות לחיבור ולכפל. ■

4.4.6 משפט המימדים

טענה: יהיו V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה F,
W מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה F. ותהי העתקה לינארית $f : V \to W$ אז $\boxed{\dim\,[\mathrm{Im}\,(f)] + \dim\,[\mathrm{Ker}\,(f)] = \dim V}$
הוכחה: אם התמונה מכילה רק את וקטור האפס, $\mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$, אז המימד שלה הוא אפס. אז כל וקטור $v \in V$ מקיים $f(v) = 0$ ולכן כולם שייכים לגרעין $V = \mathrm{Ker}\,(f)$. אז ל-V ולגרעין אותו המימד.
כלומר $\dim\,[\mathrm{Ker}\,(f)] + \dim\,[\mathrm{Im}\,(f)] = \dim V + 0 = \dim V$.

נבחר לתמונה (תת מרחב של W) בסיס: $B = \{w_1, ..., w_l\} \in W$.
לכל u_i מקורות ב-V. נסמנם $\{v_1, ..., v_l\} \in V$ כך ש-$f(v_i) = w_i$.
נבחר לגרעין בסיס: $\{u_1, ..., u_m\}$.

כעת נוכיח כי הקבוצה $C = \{v_1, ..., v_l\} \cup \{u_1, ..., u_m\}$ בסיס ל-V ומזה נובע כי $\dim V = m + l$.

ניקח וקטור $v \in V$. $f(v) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
נכתוב כצ״ל של וקטורי בסיס בתמונה: $f\,(v) = \sum_{i=1}^{l} x_i w_i = \sum_{i=1}^{l} x_i f\,(v_i) = \sum_{i=1}^{l} f\,(x_i v_i)$.
נעביר אגפים - $f\,(v) - \sum_{i=1}^{l} f\,(x_i v_i) = 0$. על כן מתקיים (נשתמש בלינאריות) $f\left(v - \sum_{i=1}^{l} x_i v_i\right) = 0$.
אז $v - \sum_{i=1}^{l} x_i v_i \in \mathrm{Ker}\,(f)$. נכתוב צ״ל $v - \sum_{i=1}^{l} x_i v_i = \sum_i^m y_i u_i$, ומכאן מיד מתקבל ש-$v = \sum_{i=1}^{l} x_i v_i + \sum_i^m y_i u_i$. כלומר <u>$C$ פורשת את V</u>.

נבדוק בת״ל: $\sum_{i=1}^{l} x_i v_i + \sum_i^m y_i u_i = 0$. נפעיל f ונקבל: $\sum_{i=1}^{l} x_i w_i = 0$. w_i בסיס ועל כן בת״ל, לכן $x_i = 0$.
נציב ונקבל $\sum_i^m y_i u_i = 0$. u_i בסיס ועל כן בת״ל, לכן $y_i = 0$. $\Leftarrow$ <u>C בת״ל</u>.

הראינו כי C בת"ל ופורשת ועל כן הינה בסיס ל-V. אז מספר הוקטורים בה שווה למימד של V.
$\dim V = m + l = \dim Ker\left(f\right) + \dim Im\left(f\right)$. ווהו ■

4.5 מעברי בסיס

נתחיל ממעבר בין שני בסיסים ב$\mathbb{R}^2$: $B_1 = \{w_1, w_2\}\ ,\ B_2 = \{u_1, u_2\}$.
כלומר אם נתון וקטור $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ נרצה לדעת לכתוב אותו בבסיס השני $v = c_1 u_1 + c_2 u_2$. כלומר מה ערכי c_i?
הבסיסים השונים הם וקטורים באותו המרחב, על כן ניתן לכתוב את $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ כצ"ל של u_1, u_2.
$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2) + \lambda_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2)$. נפתח את הסוגריים.
$v = (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12}) u_1 + (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22}) u_2 = c_1 u_1 + c_2 u_2$. קיבלנו מטריצה A כך ש $A [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_2}$$

4.6 טרנספורמציית דמיון

נתונה מטריצה A המתארת העתקה לינארית $L : V \to V$ הנתונה בבסיס מסוים B_1. תהי מטריצת מעבר בסיס מ-B_1 ל-B_2, מסומנת $M_{B_2}^{B_1}$.

$$\begin{gathered} w_{B_1} = A v_{B_1} \\ w_{B_1} = A I v_{B_1} \\ w_{B_1} = A M_{B_1}^{B_2} M_{B_2}^{B_1} v_{B_1} \\ M_{B_2}^{B_1} w_{B_1} = M_{B_2}^{B_1} A M_{B_1}^{B_2} M_{B_2}^{B_1} v_{B_1} \\ \boxed{w_{b_2} = \left(M_{B_2}^{B_1} A M_{B_1}^{B_2} \right) v_{B_2}} \end{gathered}$$

התקבלה המטריצה המייצגת את ההעתקה הלינארית בבסיס החדש B_2.
*לכל 2 מטריצות A, A' הקשורות בקשר $A' = PAP^{-1}$ נקראות מטריצות דומות. למטריצות דומות $trace$ ודטרמיננטה זהים.

5 מרחבי מכפלה פנימית

5.1 הגדרה

מכפלה סקלרית בV מעל $\mathbb{R}$ היא העתקה המתאימה לכל $u, v \in V$ סקלר $c \in \mathbb{R}$. נהוג לסמן $\langle u|v\rangle = c$.
המכפלה הסקלרית צריכה לקיים:

1. חילופיות: $\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_2|v_1\rangle$
2. לינאריות במשתנה הימני: $\langle u|\sum_i c_i v_i\rangle = \sum_i c_i \langle u|v_i\rangle$
3. חיוביות: $\langle u|u\rangle > 0$ לכל $u \neq 0$

למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ קוראים מרחב אוקלידי.
מ(1) ו(2) ניתן לראות כי יש גם לינאריות במשתנה השמאלי. "בי לינאריות"
נכליל את מושג הנורמה (אורך):

$$||u|| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$$

ואת הזווית בין וקטורים:

$$\cos\theta = \frac{\langle u|v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

נגדיר שאם המכפלה הפנימית היא אפס אז הוקטורים אורתוגונלים (ניצבים).
נגדיר שוקטור יחידה הוא וקטור בעל נורמה 1.

עבור *מרוכבים*, מכפלה פנימית צריכה (מעל שדה F) לקיים:

1. הרמיטיות: $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$
2. לינאריות במשתנה הימני: $\langle u|\sum_i c_i v_i\rangle = \sum_i c_i \langle u|v_i\rangle$
3. חיוביות: $\langle u|u\rangle > 0$ לכל $u \neq 0$

התקבל ע"פ ההרמיטיות $\langle v|v\rangle = \langle v|v\rangle^*$ ועל כן תוצאת המכפלה *ממשית*.
כאשר $F = \mathbb{R}$ הרמטיות הופכת לחילופיות.
לא מתקבלת לינאריות במשתנה שמאלי, אלא $\langle cu|v\rangle = \langle v|cu\rangle^* = c^* \langle v|u\rangle^* = c^* \langle u|v\rangle$.
ובנוסף כמובן $\langle u_1 + u_2|v\rangle = \langle v|u_1 + u_2\rangle^* = \langle v|u_1\rangle^* + \langle v|u_2\rangle^* = \langle u_1|v\rangle + \langle u_2|v\rangle$ בדומה למקודם.

5.2 בסיס אורתונורמלי

בבסיס אורתונורמלי מתקיים עבורי וקטורי הבסיס ε:

$$\boxed{\langle \varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}}$$

וניתן למצוא את הקואורדינטות המתאימות לבסיס כך $\langle x|y\rangle = \left\langle \sum_i x_i\varepsilon_i| \sum_j y_j\varepsilon_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i^* y_j \langle \varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle = \sum_i x_i^* y_i$.
אורתוגנלים = מאונכים, נורמלי = מנורמל (=1)
בבסיס אורתונורמלי למצוא את את הקואורדינטות של וקטור באמצעות מכפלה פנימית (הטלה):

$$x_j = \langle \varepsilon_j|x\rangle$$

דבר זה **לא מתקיים בבסיסים שאינם אורתונורמליים**

5.3 תהליך גרהם שמידט

משפט עזר

יהיו 2 וקטורי יחידה $u, v \in V$. הוקטור $u' = u - \langle v|u\rangle v$ ניצב ל-v.

נוכיח:

$$\langle v|u - \langle v|u\rangle v\rangle = \langle v|u\rangle - \langle v|u\rangle \langle v|v\rangle = 0$$

תהליך גרהם שמיט

יהי מרחב וקטורי V וקבוצה $B = \emptyset$.

1. בוחרים וקטור $V \ni v_1 \neq 0$. נוסיף את הוקטור $\varepsilon_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$ לקבוצה B.
2. בוחרים וקטור נוסף $V \ni v_2 \neq 0$ ונחסיר ממנו את ההיטל $\langle \varepsilon_1|v_2\rangle \varepsilon_1$. $v_2' = v_2 - \langle \varepsilon_1|v_2\rangle \varepsilon_1$. נוסיף את הוקטור $\varepsilon_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||}$ לקבוצה B.
3. נמשיך לבחור וקטור $V \ni v_k \neq 0$. נחסיר ממנו את ההיטלים $\langle \varepsilon_i|v_k\rangle \varepsilon_i$. $v_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i|v_k\rangle \varepsilon_i$. נוסיף את הוקטור $\varepsilon_k = \frac{v_k'}{||v_k'||}$ לקבוצה B, עד שמתקבלים $\dim V$ איברים, או ש-$v_k' = 0$(בתנאי שנבחרו v_k לא מאונכים לכל ε_k).

התקבל בסיס אורתונורמלי B למרחב V.

5.4 אופרטור הטלה

הטלה: $T_w(v) = \langle w|v\rangle w$.
הטלה על תת מרחב: הנפרש ע"י $B = \{\varepsilon_i\}$ אורתונורמלי: $\sum_i \langle \varepsilon_i|v\rangle \varepsilon_i$.

יהי U תת מרחב של V. המשלים הניצב ל-U הוא אוסף הוקטורים ב-V שניצבים לכל הוקטורים ב-U:

$$U^\perp = \{v \in V : \langle u|v\rangle = 0, u \in U\}$$

כלומר $v = u + w$ כאשר $u \in U$ ו-$w \in U^\perp$ אז ההטלה על המרחב U היא $P_U(v) = u$.

$U^\perp$ תת מרחב של V.

$U^\perp \cap U = \{0\}$.

$\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

$V = U + U^\perp$.

6 דטרמיננטות

6.1 הגדרה

דטרמיננטה היא העתקה שמתאימה לכל מטריצה ריבועית $(n \times n)$ סקלר מהשדה F. הסקלר מייצג נפח מקבליון במרחב n מימדי.

נגדיר פונקציה הלוקחת n וקטורים מ־F^n הנתונים כעמודות מטריצה $A = \left(A^1, A^2, ..., A^n\right)$ ומחזירה סקלר מ־F המציין את נפח המקבילון ה־n מימדי המוגדר ע״י העמודות A^i.

נדרוש שהפונקציה תקיים:

1. $\text{Vol}\left(A^1, ..., A^k + A^{k'}, ..., A^n\right) = \text{Vol}\left(A^1, ..., A^k, ..., A^n\right) + \text{Vol}\left(A^1, ..., A^{k'}, ..., A^n\right)$
2. $\text{Vol}\left(A^1, ..., B, ..., B, ..., A^n\right) = 0$.
3. $\text{Vol}\left(I_n\right) = \text{Vol}\left(\hat{e_1}, ..., \hat{e}_n\right) = 1$

6.2 שיטת לפלאס

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה או עמודה:
תהי $A = \left(a_{ij}\right)$ מטריצה $n \times n$ מעל שדה F. לכל איבר a_{ij} במטריצה נגדיר את המטריצה המתקבלת ע״י מחיקת השורה ועמודה בהן האיבר נמצא.

$$A_{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a_{1l}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{k1}} & \cdots & \mathbf{a_{kl}} & \cdots & \mathbf{a_{kn}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \mathbf{a_{nl}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר האיברים המסומנים נמחקו. זו מטריצה $(n-1 \times n-1)$.
הדטרמיננטה של A_{kl} נקראת המינור של a_{kl}.

תהי A מטריצה $n \times n$. נבחר שורה i. אז הדטרמיננטה $|A|$ היא:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

זוהי נוסחת לפלאס.

6.3 תכונות

$\det(A) = \det\left(A^T\right)$ - על כן ניתן להשתמש בנוסחת לפלאס גם לפי שורה וגם לפי עמודה.

$\det\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 + A^{2'} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A^1 \\ A^{2'} \end{pmatrix}$ לינאריות בעמודה/שורה

$\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \alpha A^2 \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}$.

$\det\left(\alpha \begin{pmatrix} A^1 \\ A^n \end{pmatrix}\right) = \alpha^n \det\begin{pmatrix} A^1 \\ A^n \end{pmatrix}$.

6.4 התאפסות הדטרמיננטה

דרגה של מטריצה היא כמות השורות/עמודות בת"ל של המטריצה.
(מספר השורות הבת"ל = מספר עמודות בת"ל)
$|A| = 0 \iff$ השורות/עמודות ת"ל

A מטריצה ריבועית $n \times n$. הטענות הבאות שקולות:

1. $|A| \neq 0$
2. העמודות/שורות בת"ל $(\text{rank}A = n)$
3. A מטריצה הפיכה

מטריצה כזו נקראת רגולרית.

לעומת זאת מטריצה המקיימת $\text{rank}A < n$ (ת"ל) נקראת סינגולרית, ואינה הפיכה.

אז לזכור!!! A בת"ל $\iff$ $|A| \neq 0$ $\iff$ A הפיכה $\iff$ $\text{rank}A$ שווה מספר העמודות

7 לכסון וערכים עצמיים

7.1 לכסון מטריצה

מוטביציה:
נניח שקיימת טרנספורמציית דמיון מ-A כך ש $D = PAP^{-1}$, ו-D אלכסונית.
אז בקלות נוכל למצוא את A^n, בכך ש$D^n = \left(PAP^{-1}\right)^n = PAP^{-1} \cdot ... \cdot PAP^{-1} = PA^nP^{-1}$. אז לבסוף מתקבל $A^n = P^{-1}D^nP$, ואת D^n אנו יודעים לפתור בקלות.

נגיד שהמטריצה D היא A בבסיס $B = \{v_1, ..., v_n\}$. אז המשימה היא למצוא את הבסיס בו A אלכסונית. נכפיל Dv_i (כמובן בבסיס B).

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} v_i = \lambda_i v_i$$

אנחנו רואים שבבסיס B הפעלת ההעתקה נותנת את הוקטור כפול סקלר כלשהו. וכמובן דבר זה יקרה גם בכל בסיס אחר. אז נרצה למצוא את קבוצת הוקטורים v_i שעבורם $Av_i = \lambda_i v_i$. קבוצת וקטורים זו תהיה הבסיס B.

7.2 ערכים עצמיים

7.2.1 הגדרה

הגדרה: יהי מרחב וקטורי V מעל שדה F והעתקה לינארית $L : V \to V$. הוקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי (ו״ע, eigenvector) של L אם קיים סקלר $\lambda \in F$ כך ש $\boxed{L(v) = \lambda v}$. ואז λ הערך העצמי (eigenvalue) של L השייך לוקטור v.

לדוגמה,
יהי V מרחב הפונקציות הגזירות מעל $\mathbb{R}$. לאופרטור הגזירה $D = \frac{d}{dx}$ יש וקטורים עצמיים מהצורה $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ עם ערכים עצמיים λ.
באותו מרחב ניקח העתקה לינארית $D = \frac{d^2}{dx^2}$. יהיו ו״ע : $e^{\lambda x}$ עם λ^2, $A\sin(\omega x)$, $A\cos(\omega x)$ עם $-\omega^2$.

אבל לרוב לא נדע לנחש בכזו קלות את הוקטור העצמי והערך העצמי.

7.2.2 תזכורת - משוואות הומוגניות

משוואה הומוגנית היא משוואה מהצורה $Bx = 0$.

<u>טענה:</u> אם B לא הפיכה אז קיים פתרון לא טריוויאלי.
<u>הוכחה:</u> המשפט אומר שאם B אינה הפיכה אז קיים $x \neq 0$ כך ש-$Bx = 0$. כלומר גרעין ההעתקה - $\text{Ker}(B)$ - בעל מימד גדול מאפס. באופן שקול ע״פ משפט המימדים, תמונת ההעתקה - $\text{Im}(B)$ - בעלת מימד קטן ממימד המרחב V.
נניח בשלילה ש$V = \text{Im}(B)$ (=קיים רק הפתרון הטריוויאלי), כלומר ההעתקה על. יתר על כן, מתקיים $\text{Ker}(B) = 0$ ממשפט המימדים ומכאן שההעתקה חח״ע. אם B חח״ע ועל אז היא הפיכה, בניגוד להנחה. סתירה. ■

וכמובן B לא הפיכה אמ״מ $\det B = 0$.

7.2.3 מציאת וקטור עצמי

יהי V מרחב וקטורי ממימד n. נבחר בסיס ל-V ונתאר את ההעתקה הלינארית $L : V \to V$ באמצעות מטריצה A. נרשום את משוואת הערך העצמי: $Av = \lambda v$. כעת עלינו לפתור את המשוואה.

נעביר אגפים ונקבל: $Av - \lambda v = 0$. ניתן לכתוב את זה גם בתור $(A - \lambda I)v = 0$. ראינו שלמערכת משוואות הומוגנית יש פתרון לא טריוויאלי ($v \neq 0$) אמ״מ $\det(A - \lambda I) = 0$.

הגדרה: הפולינום האופייני של A הוא $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. מהמשפט היסודי של האלגברה לכל פולינום ממעלה n (במרוכבים)

יש n שורשים מרוכבים: $f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_3)$. אם ישנן חזרות על ערכים עצמיים נוכל לכתוב $f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{p_1}\dots(\lambda-\lambda_m)^{p_m}$ כאשר כמובן $m \le n$.

הגדרה: p_i נקרא הניוון האלגברי של הערך העצמי (שורש הפולינום) λ_i.

לדוגמה,
יהי $V=\mathbb{R}^2$ והעתקה לינארית $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ סיבוב ב90 מעלות.

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1\overset{!}{=}0\ \Rightarrow\ \lambda=\pm i$$

ואז נציב כדי למצוא את הוקטורים העצמיים

$$\begin{pmatrix}i&-1\\1&i\end{pmatrix}v=0\ \to\ \begin{matrix}ix-y=0\\x+yi=0\end{matrix}\ \to\ v_1=\alpha\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-i&-1\\1&-i\end{pmatrix}v=0\ \to\ \begin{matrix}-ix-y=0\\x-yi=0\end{matrix}\ \to\ v_2=\beta\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

הגדרה: V_λ הוא תת מרחב וקטורי של V הנפרש ע"י הוקטורים העצמיים של L עם ערך עצמי λ.

הגדרה: הניוון הגאומטרי הוא המימד של V_λ.

משפט: כל $0\ne v\in V_\lambda$ הוא וקטור עצמי של L עם ערך עצמי λ.

משפט: יהי V מרחב וקטורי ו-$L:V\to V$. יהיו $v_1,\dots,v_m$ וקטורים עצמיים של L עם ערכים עצמיים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ בהתאמה. אם הערכים העצמיים כולם שונים אז $\{v_1,\dots,v_m\}$ בת"ל *(ניתן להוכיח באינדוקציה)*.

משפט: אם V מרחב וקטורי ממימד n ולV $L:V\to V$ יש n וקטורים עצמיים $\{v_1,\dots,v_n\}$ עם ערכים עצמיים $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ אז $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ מהווה בסיס לV בו L אלכסונית $[L]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$.

!!! כלומר, מטריצה היא לכסינה אמ"מ הניוון האלגברי והגאומטרי של כל ע"ע שווה, או באופן שקול סכום הניוונים הגאומטרים שווה למימד V.

שלבי תהליך הלכסון:
נתונה מטריצה $A(n\times n)$ שאינה אלכסונית.

1. נמצא ערכים עצמיים לA ע"י פתרון הפולינום האופייני: $f_A(\lambda)=|A-\lambda I|=0$
2. עבור כל λ_i נפתור את המשוואה $(A-\lambda_i I)v_i=0$ עבור v_i הוקטורים העצמיים
3. אם מצאנו n וקטורים עצמיים $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל. אז A אלכסונית בבסיס B.

למעשה בתהליך הלכסון קיבלנו את המטריצה $P^{-1}=(v_1\dots v_n)$ (שעמודותיה הוקטורים הערכים) שמעבירה מהבסיס B לבסיס הסטנדרטי. כלומר $D=PAP^{-1}$ היא המטריצה האלכסונית.

7.2.4 לכסינות במקביל

הגדרה: שתי מטריצות A,B ייקראו לכסינות במקביל/סימולטנית אם הן ניתנות ללכסון ע"י אותה מטריצה P. כלומר הן אלכסוניות באותו הבסיס.

משפט: שתי מטריצות לכסינות ומתחלפות ($AB=BA$) אמ"מ A,B לכסינות סימולטנית.
(קל להראות בשימוש בכך שמטריצות אלכסוניות תמיד מתחלפות. הכיוון ההפוך יותר מעצבן).

7.2.5 העתקה צמודה

תהי העתקה לינארית L על מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. ל-$L^\dagger$ קוראים ההעתקה הצמודה של L אם מתקיים $\langle u|Lv\rangle = \left\langle L^\dagger u|v\right\rangle$..

תהיינה L,T העתקות לינאריות $V\to V$ וסקלר $a\in F$.

1. $(T+L)^\dagger = T^\dagger + L^\dagger$
2. $(aL)^\dagger = a^* L^\dagger$
3. $(TL)^\dagger = L^\dagger T^\dagger$
4. $\left(L^\dagger\right)^\dagger = L$

נהוג לכתוב לפי סימון דיראק $\langle u|L|v\rangle$. כלומר $\langle u|L|v\rangle = \langle u|Lv\rangle = \left\langle L^\dagger u|v\right\rangle$.

הרמיטית הגדרה: העתקה לינארית L נקראת הרמיטית/צמודה לעצמה אם $L = L^\dagger$. או במילים אחרות, מתקיים השוויון $\langle Lu|v\rangle = \langle u|Lv\rangle$. לכן היא מקיימת $a^*_{ij} = a_{ji}$.

למה: יהי V מרחב אוניטרי. אם $L: V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $\langle v|Lv\rangle = 0$ לכל $v\in V$ אז $L=0$.
הוכחה: $0 = \langle iv+u|L\left(iv+u\right)\rangle = \langle iv|L(iv)\rangle + \langle iv|L(u)\rangle + \langle u|L(iv)\rangle + \langle u|L(u)\rangle = -i\langle v|L(u)\rangle + i\langle u|L(v)\rangle$.
ואז מתקבל $\langle u|L(v)\rangle - \langle v|L(u)\rangle = 0$.
$0 = \langle u+v|L\left(u+v\right)\rangle = \langle u|L(u)\rangle + \langle u|L(v)\rangle + \langle v|L(u)\rangle + \langle v|L(v)\rangle = \langle u|L(v)\rangle + \langle v|L(u)\rangle$.
מ2 השוויונים מקבלים שגם ההפרש וגם סכום המכפלות הפנימיות 0. $\langle u|Lv\rangle = 0 \Rightarrow L=0$. ■

משפט: יהי מרחב אוניטרי ו-$L: V\to V$. L הרמיטית אמ"מ $\langle v|Lv\rangle\in\mathbb{R}$ לכל v.
הוכחה: 1. נתון $L = L^\dagger$ הרמיטית. מתקיים $\langle v|Lv\rangle = \langle Lv|v\rangle = \langle v|Lv\rangle^*$ אז $\langle v|Lv\rangle\in\mathbb{R}$
2. נתון המכפלה $\langle v|Lv\rangle$ ממשית, אז היא שווה לצמוד של עצמה.
ולכן מתקיים $\left\langle v|L^\dagger v\right\rangle = \left\langle v|L^\dagger v\right\rangle^* = \left\langle L^\dagger v|v\right\rangle = \langle v|Lv\rangle$. אז $L = L^\dagger$.

העתקות אוניטריות ואורתוגונלית העתקה לינארית $L: V\to V$ נקראת אוניטרית אם היא משמרת מכפלה פנימית: $\langle Lu|Lv\rangle = \langle u|v\rangle$. מעל $\mathbb{R}$ היא נקראת אורתוגונלית.

הגדרות שקולות:

1. $\langle Lu|Lv\rangle = \langle u|v\rangle$ ("זווית" בין הוקטורים לא משתנה לאחר ההעתקה)
2. $||Lv|| = ||v||$ (גודל הוקטור לא משתנה לאחר ההעתקה)
3. $LL^\dagger = I$, כלומר $L^\dagger = L^{-1}$
4. L מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי (נובע מיד מ1 ו2)

נוכיח $1\leftarrow 3$: $\langle Iv|v\rangle = \langle v|v\rangle = \langle Lv|Lv\rangle = \left\langle L^\dagger Lv|v\right\rangle \Leftarrow L^\dagger L = I$.

לדוגמה,
קבוצת מטריצות הסיבוב בדו מימד $\{R_\theta, \forall\theta\in[0,2\pi)\}$ היא קבוצת מטריצות אוניטריות.

משפט: תהי A מטריצה $n\times n$ וA_i השורה הi שלה. A אוניטרית אמ"מ $\{A_1,...,A_n\}$ קבוצה אורתונורמלית.
הוכחה: איברי המטריצה $A = a_{ij}, A^\dagger = b_{ij}$ כאשר $b_{ij} = a^*_{ji}$.
נתחיל מA אוניטרית. $\langle A_j|A_i\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik}a^*_{jk} = \delta_{ij} \iff AA^\dagger = I$.

טרנספורמציות נורמליות **הגדרה:** העתקה לינארית $L:V\to V$ נקראת נורמלית אם $LL^\dagger=L^\dagger L$.

העתקה הרמיטית היא נורמלית (אבל לא להפך).
העתקה אוניטרית היא נורמלית (אבל לא להפך).

משפט: תהי $L:V\to V$ העתקה נורמלית. אם $\lambda\in\mathbb{C}$ הוא ערך עצמי של L עם וקטור עצמי v אז λ^* הוא ערך עצמי של $L^\dagger$ השייך לאותו וקטור עצמי.
הוכחה: נתון $Lv=\lambda v$ צ"ל שאם $L^\dagger L=LL^\dagger$ אזי $L^\dagger v=\lambda^* v$.
העתקה נורמלית N מקיימת
$||Nn||^2=\langle Nn|Nn\rangle=\langle N^\dagger Nn|n\rangle=\langle NN^\dagger n|n\rangle=\langle N^\dagger n|N^\dagger n\rangle=\left|\left|N^\dagger n\right|\right|^2$.
אם L נורמלית אז גם $(L-\lambda I)$ נורמליים:
$$(L-\lambda I)^\dagger(L-\lambda I)=L^*L-L^*\lambda I-\lambda^* IL+\lambda\lambda^* II=(L-\lambda I)(L-\lambda I)^\dagger$$
ואז
$0=||(L-\lambda I)v||=\left|\left|\left(L^\dagger-\lambda^* I\right)v\right|\right|$. ולכן $L^\dagger v=\lambda^* v$. ■

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{C}$, ו-$L:V\to V$ העתקה לינארית ונורמלית. אזי הוקטורים העצמיים של L השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים.
הוכחה: יהיו שני ערכים עצמיים $\lambda\neq\rho$ השייכים לוקטורים עצמיים u,v: $Lv=\lambda v,\ Lu=\rho u$.
$\lambda\langle u|v\rangle=\langle u|\lambda v\rangle=\langle u|Lv\rangle=\left\langle L^\dagger u|v\right\rangle=\langle\rho^* u|v\rangle=\rho\langle u|v\rangle$.
התקבל $(\lambda-\rho)\langle u|v\rangle=0$ וידוע ש$\rho\neq\lambda$. אז בהכרח $\langle u|v\rangle=0$. ■

משפט הפירוק הספקטרלי: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $L:V\to V$ העתקה לינארית נורמלית. אז קיימת לV בסיס אורתונורמלי של ו"ע של L.
הוכחה: יהיו $\{\lambda_1,...,\lambda_k\}$ כל הע"ע השונים של L ב$\mathbb{C}$.
לכל $1<i<k$ נסתכל על המרחב העצמי V_{λ_i}. נבחר לתת מרחב זה בסיס אורתונורמלית.
אחד את כל הבסיסים לכל הV_{λ_i} ונקבל קבוצה $U=\mathrm{Sp}\{v_1,...,v_m\}$.
(כל בסיס שהגדרנו של מרחב עצמי הוא אורתונורמלי, אך יש להראות מדוע הוא אורתוגונלי גם לוקטורים בבסיסים של מרחבים עצמיים אחרים).
ידוע כי ו"ע השייכים לע"ע אורתוגונלים זה לזה.
נתבונן בתת המרחב $U^\perp$ נשים לב שאם $u\in U^\perp$ אז $Lu\in U^\perp$
(נניח בשלילה ש$Lu\in U$. אבל אז Lu צ"ל של v_i ... צריך להמשיך).
נבצע מכפלה פנימית בין הו"ע של L לLu: $\langle v_i|Lu\rangle=\left\langle L^\dagger v_i|u\right\rangle=\langle\lambda^* v_i|u\rangle=\lambda\langle v_i|u\rangle=0$.
הראינו שLu היא גם העתקה $L:U^\perp\to U^\perp$. על כן ניתן למצוא לה לפחות ע"ע אחד וו"ע אחד $\tilde{\lambda},\tilde{v}$.
מצאנו ו"ע של L שלא נמצא בU קבוצת כל הו"ע של L. לא הגיוני, אז $\tilde{v}=0$,$\tilde{\lambda}=0$ ו$U^\perp=\{0\}$
כלומר $V=U\to m=\dim V$.
אז L לכסינה תמיד והבסיס בו היא אלכסונית אורתונורמלי. ■

<u>מסקנה נוספת:</u> אם הוקטורים העצמיים אורתונורמליים אז הוקטורים העצמיים שהינם העמודות של P^{-1} אורתונורמלים. ולכן P^{-1} אוניטרית. $D=UNU^\dagger$.

משפט: יהי V מרחב אוניטרי (מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית) ו$L:V\to V$:

1. L הרמיטית אמ"מ כל הע"ע שלה ממשיים
2. L אוניטרית אמ"מ כל הע"ע שלה בעלי נורמה 1

הוכחה:
1. ראשית נבצע חישובי עזר.

- $\langle v|Lv\rangle=\langle v|\lambda v\rangle=\lambda\langle v|v\rangle$
- $\left\langle v|L^\dagger v\right\rangle=\langle Lv|v\rangle=\langle\lambda v|v\rangle=\lambda^*\langle v|v\rangle$

אם הע"ע ממשיים אז $\lambda=\lambda^*$ ולכן (מחישובי העזר) $\langle v|Lv\rangle=\left\langle v|L^\dagger v\right\rangle$ ו$L=L^\dagger$ (L הרמיטית).
בכיוון ההפוך, $\langle v|Lv\rangle=\left\langle v|L^\dagger v\right\rangle$ ומחישובי העזר מתקבל $\lambda=\lambda^*$. כלומר λ ממשי. ■

2. ראשית נבצע חישובי עזר.

- $\langle Lv|Lv\rangle = \langle \lambda v|\lambda v\rangle = \lambda^*\lambda \langle v|v\rangle$

אם $\lambda^*\lambda = 1$ אז $\langle Lv|Lv\rangle = \langle v|v\rangle$ ולכן L אוניטרית.
בכיוון ההפוך, ידוע $\langle Lv|Lv\rangle = \langle v|v\rangle$ כי L אוניטרית ולכן $\lambda^*\lambda = 1$. ■