חדו״א לפיזיקאים

אילאי וישנבסקי שלוש

6 במאי 2024

alexanderp@mail.tau.ac.il
TA: alonchayet@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

0.1 סימונים

$P \Rightarrow Q$: "P גורר את Q" או "אם P פסוק אמת אז Q פסוק אמת".
$P \iff Q$: "P מתקיים אם ורק אם (אמ"מ) Q". שקול ל-$P \Rightarrow Q$ וגם $Q \Rightarrow P$.

כמתים:
$\forall$ "לכל"
$\exists$ "קיים"

בנוסף, לעיתים נקודותיים מסמנות "כך ש..."

לדוגמה,

1. $\forall\,(\text{course})\,\exists\,(\text{student}) : \text{grade}(\text{student}) \geq 60$ "לכל קורס קיים סטודנט שציונו 60 ומעלה".
2. $\exists\,(\text{course})\,\forall\,(\text{student}) : \text{grade}(\text{student}) < 60$ "קיים קורס כך שכל סטונדט בעל ציון קטן מ60". זוהי הטענה הנגדית.

כנראה לעיל על מנת לשלול טענה מחליפים בין 2 הכמתים.

חלק I
קבוצות וקומבינטוריקה

1 קבוצות (Sets)

1.1 הגדרה

קבוצה היא אוסף איברים ללא חשיבות לסדר או לכפילויות (בדרך כלל מסומנות באות גדולה).
לדוגמה,

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{\text{cat}, \text{calculus}, 4, \triangle\}$$

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 1, 2\}$$

$x \in A$ מסמן ש-x שייך לקבוצה A.
$x \notin A$ מסמן ש-x לא שייך לקבוצה A (x אינו מופיע בה).
הקבוצה הריקה היא הקבוצה ללא אף איבר. הקבוצה הריקה מסומנת ב-$\emptyset$ או $\{\}$.

קבוצות לעיתים מוגדרות באמצעות תכונה משותפת. על מנת לסמן "הקבוצה עם כל a שמקיים את התנאי b" נרשום $\{a \mid b\}$ או $\{a : b\}$.
לדוגמה, קבוצת הזוגיים מסומנת $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ כאשר $\mathbb{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

1.2 תת קבוצה (Subset)

1. <u>תת קבוצה:</u> A היא תת קבוצה של B אם כל איבר השייך ל-A שייך גם ל-B. נסמן זאת $A \subseteq B$.
2. <u>שוויון קבוצות:</u> שתי קבוצות הן שוות אם ורק אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. נסמן זאת $A = B$.
3. אם $A \subseteq B$ אך $A \neq B$, נסמן זאת $A \subset B$ (A מוכלת ב-B אך הן אינו שוות).

1.3 פעולות

נגדיר מספר פעולות אשר ניתן לבצע בין קבוצות.

1. <u>חיתוך:</u> $A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$.
2. <u>איחוד:</u> $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$.
3. <u>הפרש:</u> $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$.

לדוגמה,

$$\{1, 2\} \cup \{1, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$$
$$\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$
$$\{1, 2\} \cap \emptyset = \emptyset$$
$$\{1, 2, 3\} \backslash \{1, 4, 5, 6\} = \{2, 3\}$$

1.4 קבוצות חשובות

נציין מספר קבוצות חשובות ועבור כל קבוצה איזה פעולות בין איבריה נותנות איבר אשר *גם* שייך לקבוצה.

1. מספרים טבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3...\}$ (חיבור).
2. מספרים שלמים: $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ (חיבור, חיסור וכפל).
3. מספרים רציונאלים: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq0\right\}$ (חיבור, חיסור, כפל וחילוק).
4. מספרים ממשיים: מסומנים $\mathbb{R}$. לא נגדיר את קבוצת הממשיים, אך אינטואיטיבית ניתן לחשוב עליה בתור $\{x\mid-\infty\leq x\leq\infty\}$ (חיבור, חיסור, כפל, חילוק).

1.5 קטעים

סוגריים מרובעים [] מסמנים קטע סגור, וסוגריים עגולים () קטע פתוח.

1. קטע סגור: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x\leq b\}$
2. קטע פתוח: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$
3. קטע חצי פתוח/סגור:
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x<b\}$
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\leq b\}$
4. קרן אינסופית:
$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq a\}$
$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$
$(\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}|x\leq a\}$
$(\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}|x<a\}$

1.6 אקסיומות הממשיים

$x,y,z\in\mathbb{R}$

1. קומוטטיביות/חילופיות (+): $x+y=y+x$
2. אסוציאטיביות/קיבוציות (+): $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. קיום איבר יחידה (+): $x+0=x$
4. כל האיברים הפיכים (+): $x+(-x)=0$

5. קומוטטיביות/חילופיות (*): $xy=yx$
6. אסוציאטיביות/קיבוציות (*): $(xy)\,z=x\,(yz)$
7. קיום איבר יחידה (*): $x\cdot1=x$
8. כל האיברים הפיכים (*): $x\cdot x^{-1}=1$

9. דיסטריובטיביות/פילוג: $z\cdot(x+y)=zx+zy$

1.7 סדר הממשיים

למספרים הממשיים יש סדר. על כן מתקיימות התכונות הבאות:

1. $x \leq x$
2. אם $x \leq y$ ו-$y \leq x$ אז $x = y$.
3. אם $x \leq y$ ו-$y \leq z$ אז $x \leq z$.
4. אם $x \leq y$ אז $x + z \leq y + z$.
5. אם $x, y \geq 0$ אז $xy \geq 0$.

1.8 תכונות חסימה

1.8.1 קבוצה חסומה (Bounded)

$A \subseteq \mathbb{R}$. נאמר כי A חסומה מלעיל/מלמעלה אם

$$\exists \left(M \in \mathbb{R}\right) \forall \left(x \in A\right) \left[x \leq M\right]$$

נאמר כי A חסומה מלרע/מלמטה אם

$$\exists \left(m \in \mathbb{R}\right) \forall \left(x \in A\right) \left[x \geq m\right]$$

אם A חסומה מלעיל וגם מלרע אז היא נקראת קבוצה חסומה.

לדוגמה,

1. (a, b) וגם $[a, b]$ כל $b \leq M$ הוא חסם מלעיל וכל $m \leq a$ הוא חסם מלרע.
2. $A = (0, \infty)$ חסומה מלרע ע״י כל $m \leq 0$ ואינה חסומה מלעיל.
הוכחה: נניח $M > 0$ חסם מלעיל. אבל $M < M + 1 \in A$, אז לא קיים חסם מלעיל.
3. $\mathbb{N}$ חסומה מלרע ע״י כל $m \leq 1$, ואינה חסומה מלעיל.

1.8.2 מקסימום ומינימום

מקסימום של קבוצה A $\max$ הוא חסם מלעיל אשר שייך לקבוצה. מינימום של קבוצה A $\min$ הוא חסם מלרע אשר שייך לקבוצה.

לדוגמה,

1. $[a, b]$ - a הוא מינימום, b הוא מקסימום.
2. (a, b) - אין מקסימום ואין מינימום.
הוכחה: נניח קיים מקסימום $c \in (a, b)$. אבל $a < c < c + \frac{b-c}{2} < c + (b - c) = b$. התקבל האיבר $c + \frac{b-c}{2}$ הגדול מ-c ושייך לקבוצה. על כן c אינו חסם מלעיל, ולא קיים מקסימום.
3. כל קבוצה סופית לא ריקה בעלת מקסימום ומינימום.
הוכחה: ניתן להוכיח ע״פ אינדוקציה.
4. לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מינימום (או באופן יותר כללי, אם לקבוצה יש מינימום אז גם לכל תת קבוצותיה).

1.8.3 סופרמום ואינפימום

הסופרמום (חסם עליון) $\sup A$ ואינפימום (חסם תחתון) $\inf A$ של קבוצה הם החסם מלעיל הקטן ביותר והחסם מלרע הגדול ביותר של הקבוצה (או במילים אחרות, מינימום קבוצת החסמים מלמעלה ומקסימום קבוצת החסמים מלמטה).

הגדרה אחרת אך שקולה היא

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (a \in A) \, (a > \sup A - \varepsilon)$$

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (a \in A) \, (a < \inf A + \varepsilon)$$

כלומר, אם נבצע כל צעד קטן מרצוננו מטה מהסופרמום, נקבל שיש בקבוצה איברים הגדולים מהמספר שהגענו אליו (ובאופן דומה אך הפוך עבור האינפימום).

לדוגמה,

1. $[a, b]$ - b הוא מקסימום ועל כן סופרמום.
2. $\sup (a, b) = b$. כדי להוכיח, ניתן להראות כי לא קיים חסם מלעיל הקטן מ-b ($a < c < c + \frac{b-c}{2} < b$).

1.8.4 אקסיומת השלמות

אקסיומת השלמות (מכונה גם אקסיומת החסם העליון) קובעת:
לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל יש חסם עליון.

1.9 משפטים נוספים

1.9.1 אם m^2 זוגי m זוגי

<u>טענה:</u> לכל $m \in \mathbb{N}$, אם m^2 זוגי אז m זוגי.
<u>הוכחה:</u> $m \in \mathbb{N}$, m^2 זוגי. נניח בשלילה כי m אי זוגי. כלומר $k \in \mathbb{Z}$ $m = 2k + 1,$.
$m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, אז m^2 אי זוגי. סתירה - על כן m זוגי. ■

1.9.2 שורש 2 אי רציונאלי

<u>טענה:</u> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה כי $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ שבר מצומצם כאשר $m, n \in \mathbb{Z}$. על כן $m^2 = 2n^2$. כלומר m^2 זוגי ולכן m זוגי.
נסמן $m = 2k$. $n^2 = \frac{m^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$. כלומר n^2 זוגי ולכן n זוגי.
m, n זוגיים אז השבר אינו מצומצם. סתירה - על כן $\sqrt{2}$ אי רציונאלי. ■

1.9.3 x+z>y+z

<u>טענה:</u> לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x > y$ מתקיים $x + z > y + z$.
<u>הוכחה:</u> $x, y \in \mathbb{R}$ ו-$x > y$. ידוע כי $x + z \geq y + z$. נניח בשלילה כי $x + z = y + z$. אבל אז $x = y$. סתירה - על כן מתקבל $x + z > y + z$. ■

1.9.4 x*0=0

<u>טענה:</u> $0 \cdot x = 0$
<u>הוכחה:</u> $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. נוסיף לשני אגפי המשוואה את הופכי החיבור $-(0 \cdot x)$.
מתקבל $0 = 0 \cdot x$. ■

1.9.5 מכפלה שווה אפס

טענה: אם $xy = 0$ אז $x = 0$ או $y = 0$.
הוכחה: אם $x = 0$ הטענה מתקיימת.
אם $x \neq 0$, $y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0$. ■

1.9.6 חסם עליון יחיד

טענה: אם לקבוצה יש חסם עליון, אז הוא יחיד.
הוכחה: נניח s_1, s_2 חסמים עליונים.
$s_1 \geq s_2$ כי s_2 החסם מלעיל הקטן ביותר.
$s_2 \geq s_1$ כי s_1 החסם מלעיל הקטן ביותר.
אז $s_1 = s_2$. ■

1.9.7 מקסימום הוא חסם עליון

טענה: אם לקבוצה יש מקסימום אז הוא גם חסם עליון.
הוכחה: A קבוצה בעלת מקסימום $\max A$.
כל חסם מלעיל M מקיים $M \geq a \in A$.
$\max A \in A$ ולכן מתקיים $M \geq \max A$
על כן m חסם עליון (ע"פ הגדרת החסם העליון). ■

1.9.8 אקסיומת השלמות עבור חסם תחתון

טענה: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע יש חסם תחתון.
הוכחה: תהי קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע A.
נסמן B היא קבוצת החסמים מלמטה של A. כל $a \in A$ חסם מלעיל של B כיוון ש-$b \in B$ מקיימים $a \leq b$ (b חסם מלרע של A). ע"פ אקסיומת השלמות ל-B חסם עליון. נסמנו $s = \sup B$.
ע"פ הגדרת החסם העליון, לכל $b \in B$ מתקיים $s \leq b$. אז s חסם תחתון של A (החסם מלרע הגדול ביותר). ■

1.9.9 b^n-a^n

טענה: בהינתן $0 < a < b$, לכל $n \in \mathbb{N}$: $b^n - a^n < (b-a)\,nb^{n-1}$
הוכחה:
$$\begin{aligned} b^n - a^n &= (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &< (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}b + b^{n-3}b^2 + \cdots + bb^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (b-a)nb^{n-1} \end{aligned}$$
■

1.9.10 קיום שורש n-י

טענה: $n \in \mathbb{N},\ x > 0$. קיים $y > 0$ כך $y^n = x$ (מסומן $y = \sqrt[n]{x}$).
הוכחה: אם $n = 1$ אז $y = x$. עבור $n \geq 2$:
נגדיר את הקבוצה $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0, t^n < x\}$. S לא ריקה בגלל ש-$0 \in S$.
נגדיר $r = x + 1$. $r > 1$. אז $n-1$ נעלה ב-1 ונכפיל ב-r: $x < r < r^n$.
אז לכל $t \in S$ מתקבל $t^n < x < r^n$. כלומר $t < r$ ($t^n \geq r^n > x$ סותר את הגדרת S).
לפי אקסיומת השלמות ל-S סופרמום. נסמן $y = \sup S$.
(כעת נוכיח בשלילה כי y מקיים $y^n = x$)

נניח בשלילה כי $y^n < x$. נבחר $h < 1$ כך ש-$0 < h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$.
$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}n(y+1)^{n-1} = x - y^n$.
התקבל $(y+h)^n < x$ כלומר $y + h \in S$. אך y חסם עליון. סתירה.

נניח בשלילה כי $y^n > x$. נגדיר $k = \frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$. אז ידוע כי $y - k > 0$ כיוון ש-$y > \frac{y}{n} = \frac{y^n}{ny^{n-1}} > \frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$.
$y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = \frac{y^n-x}{ny^{n-1}}ny^{n-1} = y^n - x$.
התקבל $(y-k)^n > x$ כלומר $y - k$ חסם מלעיל של S. אך $y - k < y$ ו-y הוא החסם מלעיל הקטן ביותר. סתירה. ■

1.9.11 הטבעיים אינם חסומים מלעיל

טענה: $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל.
הוכחה: נניח בשלילה כי $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל. אז ע"פ אקסיומת השלמות קיים $s = \sup \mathbb{N}$.
$s - \frac{1}{2} < s$. נגדיר $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n > s - \frac{1}{2}$.
$n + 1 > \left(s - \frac{1}{2}\right) + 1 = s + \frac{1}{2} > s$.
אז קיים $n + 1 \in \mathbb{N}$ אשר גודל מהחסם העליון. סתירה - על כן קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל. $\blacksquare$
(ניתן להוכיח גם באמצעות הערך השלם התחתון)

1.9.12 תכונת ארכימדס

טענה: לכל $x, y > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$nx > y$.
הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים כזה n. אז $nx \leq y$ ו-$n \leq \frac{y}{x}$.
התקבל ש-$\mathbb{N}$ חסומה מלעיל. סתירה - על כן הטענה נכונה. $\blacksquare$

1.9.13 1/n<e

טענה: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon > \frac{1}{n}$.
הוכחה: נשתמש בתכונת ארכימדס עבור $x = 1, y = \frac{1}{\varepsilon}$. מתקבל $n > \frac{1}{\varepsilon}$ אשר מקיים $\varepsilon > \frac{1}{n}$ (אי שוויונות שקולים). $\blacksquare$

1.9.14 m<x<m+1

טענה: לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m \leq x < m + 1$.
הוכחה: כיוון ש-$\mathbb{Z}$ אינה חסומה, קיימים $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n_1 \leq x < n_2$.
נגדיר את הקבוצה $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leq n \leq x\}$. A אינה ריקה כיוון ש-$n_1 \in A$.
נסמן $m = \max A$. אז $m \leq x < n_2$.
נניח בשלילה כי $m + 1 \leq x$. אבל אז $m + 1 \in A$ ו-$m + 1 > m$, למרות ש-m מקסימום. סתירה - על כן $m + 1 > x$. $\blacksquare$

1.9.15 רציפות הרציונאלים

טענה: יהי $x < y$. קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < q < y$.
הוכחה: יהי $\varepsilon = y - x$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon > \frac{1}{n}$.
נגדיר $m = \lfloor nx \rfloor$. אז מתקיים $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$.
$y = \varepsilon + x > \frac{1}{n} + x \geq \frac{1}{n} + \frac{m}{n} = \frac{m+1}{n} \equiv q$.
$x < \frac{m+1}{n} < y$. $\blacksquare$

1.9.16 רציפות האי רציונאלים

טענה: יהי $x < y$. קיים $z \notin \mathbb{Q}$ כך ש-$x < z < y$.
הוכחה: קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$.
נסמן $z = q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (לא ניתן לקבל אי רציונאלי מחיבור רציונאלים $\sqrt{2} = \left(q + \sqrt{2}\right) + (-q)$).
אז מתקיים $x < z < y$. $\blacksquare$

2 אי שוויונות וקומבינטוריקה

מושגים בסיסיים בקומבינטוריקה, הבינום של ניוטון. אינדוקציה. אי שוויונות שימושיים.

2.1 אינדוקציה

שיטת להוכחת מספר אינסופי של משפטים $p_1, p_2...$.

1. בסיס - להוכיח ש-p_1 מתקיים.
2. צעד - להוכיח ש-p_{n+1} מתקיים בהינתן ש-p_n מתקיים.

לדוגמה,

א) לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. בסיס - נוכיח את הטענה עבור $n = 1$: $\frac{n(n+1)}{2}|_{n=1} = \frac{1(1+1)}{2} = 1\checkmark$.
2. צעד - נניח שהטענה מתקיימת עבור k. נוכיח $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = k+1+\sum_{i=1}^{k} i = k+1+\frac{k(k+1)}{2} = \frac{2k+2+k^2+k}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ב) לכל n אי זוגי, $12^n + 1$ מתחלק ב13.

1. בסיס - $12^1 + 1 = 13\checkmark$
2. צעד - נניח שמתקיים $12^a + 1 = 13k$.

$$12^{a+2} + 1 = 12^2 \left(12^a + 1\right) - \left(12^2 - 1\right) = 144 \cdot 13k - 11 \cdot 13 = 13 \left(144k - 11\right)$$

ג) אי שוויון ברנולי. לכל $x \geq -1$ ו-$n \in \mathbb{N}$,

$$\left(x+1\right)^n \geq 1 + nx$$

1. בסיס - $\left(x+1\right)^1 = x + 1 \geq 1 + x\checkmark$
2. צעד - נניח שמתקיים $\left(x+1\right)^k \geq 1 + kx$.

$$\begin{aligned}\left(x+1\right)^{k+1} &\geq \left(x+1\right)\left(1+kx\right) = x + kx^2 + 1 + kx \\ &= 1 + \left(k+1\right)x + kx^2 \geq 1 + \left(k+1\right)x\end{aligned}$$

2.2 אי שוויונות שימושיים

אי שוויון המשולש הוא $\boxed{|x+y| \le |x| + |y|}$. (ניתן להוכיחו בחלוקה למקרים בהם x, y חיוביים/שליליים).

אי שוויון המשולש הכללי הוא $\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$.

אי שוויון המשולש ההפוך הוא $||x|-|y|| \le |x-y|$. (ניתן להוכיחו $|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y|$ וכו)

ע״פ הגדרת הערך המוחלט $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, מתקיים $\boxed{-|x| \le x \le x}$.

אי שוויון ברנולי, לכל $x \ge -1$: $(x+1)^n \ge 1 + nx$.
אי שוויון ברנולי הכללי הוא $\prod_{i=1}^{n} (x_i+1) \ge \sum_{i=1}^{n} 1 + x_i$.

אי שוויון הממוצעים $\boxed{\frac{n}{\Sigma_i^n \frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_i^n x_i} \le \frac{1}{n} \sum_i^n x_i}$. כלומר ממוצע הרמוני קטן מ-ממוצע הנדסי קטן מ-ממוצע חשבוני.

2.3 קומבינטוריקה

המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ נותן את מספר הקבוצות בנות k איברים שניתן לבחור מתוך קבוצה בת n איברים.

$$\boxed{\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

ניתן להשתמש במקדם הבינומי על מנת לרשום את הבינום של ניוטון. כלומר, פתיחת הסוגריים לביטוי $(a+b)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

חלק II
סדרות

3 פונקציות

3.1 הגדרה

A, B קבוצות. פונקציה (או העתקה) $f : A \to B$ היא התאמה. כלומר, לכל $a \in A$ יש איבר מתאים *יחיד* $b \in B$ המסומן $b = f(a)$.
Aהיא תחום ההגדרה ו-B היא הטווח/התמונה.

לדוגמה,

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$ היא פונקציה.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 1/x$ אינה פונקציה, כיוון שאין איבר מתאים ב-B עבור $x = 0$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ היא פונקציה.

3.2 תמונה

תמונה של פונקציה $f : A \to B$ היא $\mathrm{im} f = \{f(a) : a \in A\}$ ומקיימת $\mathrm{im} f \subseteq B$.

לדוגמה,
עבור הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$ התמונה היא $\mathrm{im} f = [0, \infty)$.

3.3 חסומה

פונקציה f היא חסומה אם התמונה שלה $\mathrm{im} f$ חסומה. הסופרמום של f מוגדר בתור הסופרמום של $\mathrm{im} f$, ובדומה האינפימום המקסימום והמינימום מוגדרים.

לדוגמה,
לפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = sin(x)$ תמונה $\mathrm{im} f = [-1, 1]$. כלומר $\min f = \inf f = -1$, ו-$\max f = \sup f = 1$.

4 סדרות

4.1 הגדרה

סדרת מספרים ממשיים היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ המסומנת $f(n)=a_n$.

לדוגמה,

1. הסדרה ההרמונית $a_n=\frac{1}{n}$
2. $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$
3. סדרה קבועה $a_n=3$
4. סדרה חשבונית $a_{n+1}=a_n+d$
5. סדרה הנדסית $a_{n+1}=qa_n$

4.2 תמונה

התמונה של סדרה היא $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{a_1,a_2,a_3...\}$.

4.3 חסומה

סדרה היא חסומה עם התמונה שלה חסומה. הסופרמום של סדרה מוגדר בתור הסופרמום של התמונה שלה, ובדומה האינפימום המקסימום והמינימום מוגדרים.

לדוגמה,

1. $a_n=\frac{1}{n}$ חסומה. 1 הוא סופרמום ומקסימום, 0 הוא אינפימום.
2. $a_n=7-2^n$ אינה חסומה מלרע.
<u>הוכחה:</u> נניח m חסם מלרע. $m\le 7-2^n\le 7-n$, אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\le 7-m$. סתירה - על כן אין חסם מלעיל.

4.4 מונוטונית

(עבור תת פרק זה נדרש קודם ללמוד על הגבול, פרק 6)
נאמר כי a_n היא סדרה מונוטונית עולה אם מתקיים $a_n\le a_{n+1}$, ועולה *ממש* אם מתקיים $a_n<a_{n+1}$.
נאמר כי a_n היא סדרה מונוטונית יורדת אם מתקיים $b_n\le b_{n+1}$, ויורדת *ממש* אם מתקיים $b_n<b_{n+1}$.

תהי a_n סדרה. אז:

1. אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה, אז היא מתכנסת. יתר על כן, מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup a_n$.
2. אם a_n עולה ולא חסומה מלמעלה אז $a_n\to\infty$.
3. אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, אז היא מתכנסת. יתר על כן, מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf a_n$.
4. אם a_n יורדת ולא חסומה מלמטה אז $a_n\to-\infty$.

<u>מסקנה:</u> אם a_n מונוטונית החל מאינדקס מסוים אז יש לה גבול במובן הרחב.

<u>הוכחה:</u>
1. נסמן $s=\sup a_n$ (הסופרמום קיים ע״פ אקסיומת השלמות). נראה כי $a_n\to s$. יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש-s הוא סופרמום, קיים n_0 עבורו $a_{n_0}>s-\varepsilon$. בגלל שהסדרה עולה, לכל $n\ge n_0$ מתקיים $s-\varepsilon<a_{n_0}\le a_n\le s<s+\varepsilon$. מכאן, לכל $n\ge n_0$ מתקיים $|a_n-s|<\varepsilon$. אז $\lim_{n\to\infty}a_n=s$. ■
2. יהי $M>0$. M לא חסם מלעיל (כיוון ש-a_n לא חסומה מלעיל) ועל כן ישנו n_0 כך ש-$a_{n_0}>M$. בגלל ש-a_n עולה, לכל $n\ge n_0$ מתקיים $M<a_{n_0}\le a_n$. אז $a_n\to\infty$. ■

(בדומה עבור הטענות 3,4).

לדוגמה,

1. $a_n = \frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת, ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \inf \frac{1}{n}$.
2. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה.
<u>הוכחה:</u> עולה - $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + a_n > a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
חסומה מלמעלה 3 $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אז a_n מתכנסת לגבול $L < 3$.
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה. !!!

4.5 צפופה

(עבור תת פרק זה נדרש קודם ללמוד על הגבול, פרק 6)
קבוצה $A \in \mathbb{R}$ נקראת צפופה אם בין כל שני מספריים ממשים יש איבר ב-A. במילים אחרות, אם $x < y$ אז קיים $a \in A$ כך ש-$x < a < y$.

לדוגמה, $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ צפופות.

<u>טענה:</u> תהי $A \in \mathbb{R}$ אז התנאים הבאים שקולים:

1. A צפופה
2. $\forall (x \in \mathbb{R}) \forall (\varepsilon > 0) \exists (a \in A) [|x - a| < \varepsilon]$
3. לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של איברים בA אשר שואפת ל-x.

<u>הוכחה:</u>
i. נניח ש-Aצפופה ונוכיח את תנאי 2. יהיו $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. בגלל ש-A צפופה, קיים $a \in A$ המקיים $x < a < x+\varepsilon$. ואז אכן $|x - a| < \varepsilon$.

ii. יהי $x \in \mathbb{R}$ ונמצא סדרה של איברים ב-A השואפת אליו. לפי תנאי 2 (נבחר $\varepsilon = \frac{1}{n}$).

$$\forall (n \in \mathbb{N}) \exists (a_n \in A) \left[|x - a_n| < \frac{1}{n}\right]$$

כך קיבלנו סדרה של איברים ב-Aולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x - \frac{1}{n} < a_n < x + \frac{1}{n}$. לפי משפט הסנדוויץ' $a_n \to x$.

iii. נניח את תנאי 3 ונראה כי A צפופה. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. יהי z ממשי כלשהו המקיים $x < z < y$ (למשל $z = \frac{x+y}{2}$).
לפי תנאי 3 קיימת סדרה a_n של איברים ב-A השואפת ל-z. ע"פ טענה שהוכחנו בשיעור:

$$\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [x < a_n < y]$$

ואז למשל $a_{n_0} \in A$ המקיים $x < a_{n_0} < y$, ועל כן A צפופה. ■

5 גבולות

5.1 הגדרה

תהי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. הגבול $L \in \mathbb{R}$ של הסדרה, המסומן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, הינו

$$\boxed{\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(n_0 \in \mathbb{N})\,\forall(n \geq n_0)\,[|a_n - L| < \varepsilon]}$$

"לכל ε קטן כרצוננו, קיים אינדקס כך שכל אינדקס אחריו יתן איברים בסדרה בטווח $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$". אם קיים L ממשי המקיים את הגדרת הגבול, נאמר כי הסדרה מתכנסת. אחרת, היא מתבדרת.

לדוגמה,

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ אמ"מ $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
נגדיר $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ניתן גם לבחור $n_0 = \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 1$, לדוגמה). עבור כל $n \geq n_0$ מתקיים $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-1} = \frac{1}{2}$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{n+2}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{5}{2(2n-1)}\right| = \frac{5}{2(2n-1)} < \varepsilon$ אמ"מ $n > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2\varepsilon}\right)$.
נגדיר $n_0 = \lfloor\frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2\varepsilon}\right)\rfloor + 1$. לכל $n \geq n_0$ מתקיים $\left|\frac{n+2}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.
3. $\lim_{n\to\infty} c = c$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. $|c - c| = 0 < \varepsilon$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
נגדיר $n_0 = 1$. לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|c - c| < \varepsilon$.
4. $a_n = (-1)^n$ מתבדרת.
הוכחה: נבחר ε שרירותי המקיים $-1 + \varepsilon < 1 - \varepsilon$, לדוגמה $\varepsilon = 0.5$.
נניח שקיים n_0 כלשהו שאחריו איברי הסדרה מקיימים את אי השוויון:
$|L - 1| = |1 - L| = |a_{2n_0} - L| < \varepsilon$
$|L - (-1)| = |-1 - L| = |a_{2n_0+1} - L| < \varepsilon$
אך אז מתקבל $L < -1 + \varepsilon < 1 - \varepsilon < L$. סתירה - על כן לא קיים כזה n_0 והגבול אינו קיים.
5. $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ כאשר $c = (0,1)$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $d = \frac{1}{c} - 1$. אז $c = \frac{1}{1+d}$.
$|c^n - 0| = c^n = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} < \varepsilon$ אמ"מ $n > \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.
נגדיר $n_0 = \max\left\{1, \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right\}$. לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|c^n - 0| \leq \frac{1}{1+nd} < \varepsilon$.

5.2 משפטים נוספים

5.2.1 גבול יחיד

טענה: אם לסדרה יש גבול אז הוא יחיד.
הוכחה: תהי סדרה a_n. נניח בשלילה כי קיימים שני גבולות, L, K. אז מתקיים

$$\exists(n_0 \in \mathbb{N})\,\forall(n \geq n_0)\,[|a_n - K| < \varepsilon]$$
$$\exists(n_1 \in \mathbb{N})\,\forall(n \geq n_1)\,[|a_n - L| < \varepsilon]$$

נסמן $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. נניח לה"כ כי $K > L$ ונבחר $\varepsilon < \frac{K-L}{2}$. אז לכל $n \geq n_2$ מתקיים: $a_n < L + \varepsilon < K - \varepsilon < a_n$.
סתירה. על כן $L = K$. ■

5.2.2 סדרה מתכנסת היא חסומה

טענה: כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.
הוכחה: אם סדרה a_n מתכנסת אז קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש-$\exists(n_0 \in \mathbb{N})\,\forall(n \geq n_0)\,[|a_n - L| < \varepsilon]$.
לכל ε קיים n_0 המקיים את התנאי. עבור n_0 זה, נסמן $c = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0-1}|, L + \varepsilon\}$.
אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| < c$. ■

5.2.3 הזזה

טענה: תהיינה שתי סדרות a_n ו-b_n המקיימות $b_n = a_{n+k}$ כאשר $k \in \mathbb{N}$, ו-a_n מתכנסת במובן הרחב. אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.
הוכחה: אם a_n מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$, מתקיים $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[|a_n-L|<\varepsilon]$.
לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|b_n - L| = |a_{n+k} - L| < \varepsilon$ כיוון ש- $n+k > n \geq n_0$.

אם $a_n \to \infty$, $\forall(M>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[a_n>M]$.
לכל $n \geq n_0$ מתקיים $b_n = a_{n+k} > M$ כיוון ש-$n+k > n \geq n_0$. ■

5.2.4 סכום גבולות

טענה: תהיינה שתי סדרות a_n ו-b_n. אם $a_n \to a$ ו-$b_n \to b$ אז $(a_n+b_n) \to a+b$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול, מתקיימים:

$$\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\left[|a_n-a|<\tfrac{\varepsilon}{2}\right]$$
$$\exists(n_1\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_1)\left[|b_n-b|<\tfrac{\varepsilon}{2}\right]$$

מכאן שמתקיים: $|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

5.2.5 מכפלת גבולות

טענה: תהיינה שתי סדרות a_n ו-b_n. אם $a_n \to a$ ו-$b_n \to b$ אז $(a_nb_n) \to ab$.
הוכחה: כיוון שהסדרות מתכנסות, הן חסומות. על כן קיימים A, B כך ש-$\forall(n\in\mathbb{N})\,[|a_n|<A]$ ו-$\forall(n\in\mathbb{N})\,[|b_n|<B]$. נסמן $C = \max\{A,B\}$.
יהי $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול, מתקיימים:

$$\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\left[|a_n-a|<\tfrac{\varepsilon}{2a}\right]$$
$$\exists(n_1\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_1)\left[|b_n-b|<\tfrac{\varepsilon}{2C}\right]$$

מכאן שמתקיים: $|a_nb_n-ab| = |a_nb_n-ab_n+ab_n-ab| \leq b_n|a_n-a|+a|b_n-b| < C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+a\cdot\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon$. ■

5.2.6 מנת גבולות

טענה: תהיינה שתי סדרות a_n ו-b_n. אם $a_n \to a$ ו-$b_n \to b$ אז $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$.
הוכחה: נוכיח שמתקיים $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ ומשם מיד מתקבל כי $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$.
ע"פ הגדרת הגבול מתקיים $\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[|b_n-b|<\varepsilon]$.
נבחר $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. אז לכל $n \geq n_0$: $|b| = |b-b_n+b_n| \leq |b_n-b|+|b_n| < \frac{|b|}{2}+|b_n|$. או באופן שקול $\frac{1}{|b_nB|} < \frac{2}{|B|^2}$.
נבחן את הביטוי הבא: $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right| < \frac{2\varepsilon}{|B|^2}$. יהי $\varepsilon' > 0$, ניתן לבחור $\varepsilon = \frac{|B|^2}{2}\varepsilon'$ להה"כ ונקבל $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| < \varepsilon'$. כלומר $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. ■

5.2.7 c^n

טענה: תהי סדרה $a_n = c^n$, $c \in (0,1)$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
הוכחה: קיים $d > 0$ כך ש-$c = \frac{1}{1+d}$ $(d = \frac{1-c}{c})$. ע"פ אי שוויון ברנולי, $c^n = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd}$.
יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $n_0 = \lfloor\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon d}\rfloor + 1$. אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $c^n \leq \frac{1}{1+nd} < \varepsilon$. ■

5.2.8 משפט הסנדוויץ'

טענה: תהיינה סדרות a_n, b_n, c_n. אם מתקיים $a_n \leq c_n \leq b_n$ ו-$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, אז גם c_n מתכנסת ובפרט $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.
הוכחה: נחסר מאי השוויון a_n. מתקבל $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$.
מתקיים $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = L - L = 0$.
על כן $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[b_n-a_n<\varepsilon]$.
אז לכל $n \geq n_0$: $|c_n-a_n| \leq |b_n-a_n| = \varepsilon$. אז התקבל $c_n - a_n \to \lim_{n\to\infty} c_n - L = 0$ ומכאן ש-$\lim_{n\to\infty} c_n = L$. ■

5.2.9 כפולות של אפסילון

טענה: תהי a_n סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. נניח קיים $M > 0$ כך ש-

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [|a_n - L| < \varepsilon M]$$

מזה נובע כי $a_n \to L$.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$. נשתמש בנתון עבור ε':

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [|a_n - L| < \varepsilon' \cdot M]$$

ואז לכל $n \geq n_0$:

$$|a_n - L| < \varepsilon' \cdot M = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

■

5.3 גבול לאינסוף

ההגדרה עבור סדרה בעלת גבול באינסוף או מינוס אינסוף הינה:

$$a_n \to +\infty \iff \forall (M > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [a_n > M]$$

$$a_n \to -\infty \iff \forall (M < 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [a_n < M]$$

"לכל M גדול כרצוננו, קיים אינדקס כך שכל אינדקס אחריו יתן איברים בסדרה הגדולים מ-M" (ובדומה עבור גבול למינוס אינסוף).
נאמר כי יש לסדרה גבול במובן הרחב.

5.4 משפטים נוספים

5.4.1 למה של קנטור

טענה: תהיינה שתי סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < b_n$. אם עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ ובנוסף $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, אז חיתוך כל הקטעים $[a_n, b_n]$ מכיל נקודה יחידה: $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$. יתר על כן מתקיים $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, ובפרט $a_{n+1}, b_{n+1} \in [a_n, b_n]$. על כן $a_n \leq a_{n+1}$ ו-$b_{n+1} \leq b_n$.
קיבלנו a_n סדרה עולה ו-b_n סדרה יורדת.
- נראה כי a_n חסומה מלעיל. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_n < b_n \leq b_1$. אז b_1 חסם מלעיל של a_n.
- באופן דומה b_n חסומה מלרע, כיוון ש-$a_1 \leq a_n < b_n$. a_1 חסם מלרע של b_n.

מכאן ששתי הסדרות מתכנסות. נסמן $c = \lim_{n\to\infty} a_n$. ע"פ חשבון גבולות $b_n = a_n + (b_n - a_n) \to c + 0 = c$.
- מתקיים $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$ ומכאן $c \geq a_n$.
- באופן דומה מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$, ולכן $c \leq b_n$.

לכן $c \in [a_n, b_n]$. כעת נותר להראות כי c יחיד. נניח כי d נקודה השייכת לכל הקטעים $[a_n, b_n]$. אז $a_n \leq d \leq b_n$ ועל פי משפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} a_n = d$. מתקבל $c = d$. ■

6 תתי סדרות

6.1 הגדרה

תהי סדרה a_n. תהי n_k סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אז $b_k = a_{(n_k)}$ היא תת סדרה של a_n.

לדוגמה,

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n_k = 2k$. אז מתקיים $a_{n_k} = a_{2k} = \frac{1}{2k}$, תת סדרה.
2. לעומת זאת $n_k = 14k + 1$ אז תת הסדרה היא $a_{n_k} = \frac{1}{15}, \frac{1}{29}, \frac{1}{43} \ldots$.
3. $a_n = (-1)^n$, $n_k = 2k + 1$. אז $a_{n_k} = -1$ תת סדרה.
4. כל סדרה a_n היא תת סדרה של עצמה, עם סדרת האינדקסים $n_k = k$.
5. $a_n = n^2, n_k = 2^k$. אז $a_{2_k} = \left(2^k\right)^2 = 4^k$ תת סדרה.

6.2 תכונות חשובות

6.2.1 סדרת אינדקסים שואפת לאינסוף

טענה: תהי n_k סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. אז $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$.
הוכחה: נראה באינדוקציה כי $n_k \geq k$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
בסיס- עבור $k = 1$, $n_1 \geq 1$ כיוון ש-$n_1 \in \mathbb{N}$.
צעד- נניח כי מתקיים $n_k \geq k$ עבור k מסויים. בגלל שהסדרה טבעית ומונוטונית עולה ממש, מתקיים $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$.
k שואפת לאינסוף, על כן n_k שואפת לאינסוף. ■

6.2.2 אם סדרה חסומה גם תת הסדרה

טענה: אם a_n חסומה, כל תת סדרה שלה חסומה.
הוכחה: מתקיים $\exists (M > 0) \forall (n \in \mathbb{N}) [|a_n| \leq M]$. אם a_{n_k} תת סדרה של a_n אז בפרט מתקיים $|a_{n_k}| \leq M$ ועל כן a_{n_k} חסומה. ■

6.2.3 גבול סדרה הוא גבול תת הסדרה

טענה: נניח כי $a_n \to L$ במובן רחב. תהי a_{n_k} תת סדרה של a_n. אז $a_{n_k} \to L$.
הוכחה: במקרה $L \in \mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$. $a_n \to L$ ולכן ע"פ הגדרת הגבול $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) [|a_n - L| < \varepsilon]$. כיוון ש-$n_k \to \infty$,
$\exists (k_0 \in \mathbb{N}) \forall (k \geq k_0) [n_k > n_0]$.
ואז לכל $k \geq k_0$ מתקיים $n_k > n_0$ ולכן $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. ■

6.3 גבולות חלקיים

אם לסדרה (a_n) תת סדרה (a_{n_k}) המתכנסת *במובן רחב* (סופי או $\pm\infty$) לגבול L, אז L הוא גבול חלקי של (a_n).
קבוצת הגבולות החלקיים של a_n היא הקבוצה המכילה את כל הגבולות החלקיים של a_n ומסומנת ב-$p(a_n)$.

הערה: לראשונה $\pm\infty$ יכולים להיות איברים בקבוצה.

לדוגמה,

1. $a_n = (-1)^n$ מתבדרת, אך יש לה גבולות חלקיים $p(a_n) = \{-1, 1\}$. תתי הסדרות בעלות גבולות אלו הן a_{2k} ו-a_{2k+1}.
2. $a_n = \frac{1}{n}$ מקיימת $p(a_n) = \{0\}$. הסדרה מתכנסת ועל כן כל תת סדרה מתכנסת לאותו הגבול.
3. אם $L \to a_n$ במובן רחב אז $p(a_n) = \{L\}$. בהמשך נראה שגם הכיוון ההפוך מתקיים (אם לסדרה גבול חלקי יחיד אז הוא גבול הסדרה עצמה).

תנאי הכרחי לכך ש-L גבול חלקי של a_n הוא

$$\forall (\varepsilon > 0) \forall (n_0 \in \mathbb{N}) \exists (n \geq n_0) [|a_n - L| < \varepsilon]$$

נוכיח זאת.

6.3.1 תנאי הכרחי לגבול חלקי

טענה: L גבול של חלקי של (a_n) אם ורק אם מתקיים $\boxed{\forall\left(\varepsilon>0\right)\forall\left(n_0\in\mathbb{N}\right)\exists\left(n\geq n_0\right)\left[\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right]}$. כלומר, קיימים אינסוף איברים ב-a_n שנמצאים בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

הוכחה: (עבור גבול סופי)

i. תהי סדרה a_n בעלת גבול חלקי L. ע״פ הגדרת הגבול החלקי קיימת תת סדרה a_{n_k} השואפת ל-L.
כלומר $\forall\left(\varepsilon>0\right)\exists\left(k_0\in\mathbb{N}\right)\forall\left(k\geq k_0\right)\left[\left|a_{n_k}-L\right|<\varepsilon\right]$.
לכל n_0 נוכל לבחור $k\geq k_0$ כך ש-$n_k\geq n_0$ (כיוון שהסדרה n_k אינה חסומה) שעבורו $\left|a_{n_k}-L\right|<\varepsilon$.

ii. תהי סדרה a_n המקיימת את התנאי: $\forall\left(\varepsilon>0\right)\forall\left(n_0\in\mathbb{N}\right)\exists\left(n\geq n_0\right)\left[\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right]$.
עבור $n_0=1$, נסמן את ה-n הראשון שמקיים את התנאי בתור n_1 (ישנם אינסוף כאלה).
כעת עבור $n\geq n_1+1$, נסמן את ה-n הראשון שמקיים את התנאי בתור n_2.
כעת עבור $n\geq n_2+1$, נסמן את ה-n הראשון שמקיים את התנאי בתור n_3.
כך ניתן להמשיך לסמן n_k שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|a_{n_k}-L\right|<\varepsilon$. אז הראינו $\forall\left(\varepsilon>0\right)\exists\left(k_0\in\mathbb{N}\right)\forall\left(k\geq k_0\right)\left[\left|a_{n_k}-L\right|<\varepsilon\right]$ עם $k_0=1$.
כלומר a_{n_k} תת סדרה השואפת ל-L. ■

6.3.2 משפט בולצאנו-ויירשטראס

טענה: לכל סדרה חסומה תת סדרה מתכנסת.
הוכחה: תהי סדרה חסומה x_n. אז ע״פ אקסיומת השלמות יש לה אינפימום וסופרמום. נסמנם $a_1=\inf x_n$ ו-$b_1=\sup x_n$.

בתחום (a_1,b_1) אינסוף מאיברי הקבוצה (למעשה כולם). על כן לפחות באחד מ2 התחומים $\left(a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ או $\left(\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right)$ יש אינסוף מאיברי הקבוצה (אם בשני התחומים מספר סופי אז גם באיחוד שלהם (a_1,b_1) מספר סופי, סתירה).

אם ב-$\left(a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ אינסוף איברים: נגדיר $a_2=a_1,\ b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.
אם ב-$\left(\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right)$ אינסוף איברים: נגדיר $a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=b_1$.

כך נמשיך ונגדיר את הסדרות a_n,b_n:
אם ב-$\left(a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ אינסוף איברים: נגדיר $a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$.
אם ב-$\left(\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right)$ אינסוף איברים: נגדיר $a_n=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=b_n$.
כך ב-(a_n,b_n) תמיד יש אינסוף מאיברי הקבוצה.

כיוון ש-$(a_{n+1},b_{n+1})\subseteq(a_n,b_n)$, מתקיימים $b_{n+1}\leq b_n$ ו-$a_{n+1}\geq a_n$.
בנוסף $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1-b_1\right)\to 0$, מכאן ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

נגדיר את תת הסדרה: $a_k\leq x_{n_k}\leq b_k$ (ניתן להגדירה כיוון שבכל מקטע (a_k,b_k) אינסוף מאיברי הקבוצה).
ע״פ משפט הסנדוויץ׳ יש לתת סדרה זו גבול. ■

הערה: ניתן להוכיח את המשפט גם בדרך אחרת: הוכיחו כי לכל סדרה חסומה תת סדרה מונוטונית (רמז: הוכיחו תחילה שאם לסדרה אין תת סדרה מונוטונית עולה אזי יש לסדרה מקסימום).

6.3.3 לכל סדרה תת סדרה מתכנסת במובן רחב

טענה: לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במובן הרחב.
הוכחה: אם הסדרה חסומה יש לה תת סדרה מתכנסת ע״פ משפט בולצאנו ויירשטראס.
נניח כעת כי a_n סדרה לא חסומה, למשל לא חסומה מלמעלה - נראה כי במקרה זה יש לה תת סדרה השואפת ל-∞ (ובאופן דומה מלמטה תתקבל תת סדרה השואפת ל-$-\infty$).
a_n לא חסומה מלמעלה ולכן קיים $n_1\in\mathbb{N}$ עבורו $a_{n_1}>1$.
שוב, a_n לא חסומה מלמעלה ולכן יש $n_2>n_1$ עבורו $a_{n_2}>2$.
כי אם נניח בשלילה כי לכל $n_2>n_1$ מתקיים $a_{n_2}<2$ נקבל $a_{n_2}\leq\max\left\{a_1,...,a_{n_1},2\right\}$ וזו סתירה לכך ש-a_n חסומה מלמעלה.
ניתן להמשיך כך ולקבל סדרת אינדקסים n_k שעבורה מתקיים $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\infty$.

7 אפילו עוד סדרות

7.1 limsup ו-liminf

7.1.1 הגדרה

נניח a_n סדרה חסומה מלמעלה. נגדיר סדרות חדשות $\bar{a}_n$ ו-$\underline{a}_n$:

$$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\}$$
$$\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}$$

$\bar{a}_n$ זו סדרה מונוטונית יורדת, כיוון ש-$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\} \geq \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} = \bar{a}_{n+1}$. על כן יש לה גבול במובן הרחב, מספר סופי או $-\infty$.

$\underline{a}_n$ זו סדרה מונוטונית עולה, כיוון ש-$\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\} \leq \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} = \underline{a}_{n+1}$. על כן יש לה גבול במובן הרחב, מספר סופי או ∞.

נגדיר את הגבולות הבאים:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n$$

7.1.2 תנאים שקולים ל limsup

טענה: תהי a_n סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$. אז $L=\limsup_{n\to\infty} a_n$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $\boxed{\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[a_n<L+\varepsilon]}$ (תנאי חזק יותר - לכל $n\geq n_0$ מתקיים $a_n<L+\varepsilon$).
2. $\boxed{\forall(\varepsilon>0)\,\forall(n_0\in\mathbb{N})\,\exists(n\geq n_0)\,[a_n>L-\varepsilon]}$ (תנאי חלש יותר - "קיימים אינסוף איברים בתחום $a_n>L-\varepsilon$").

הוכחה:
נניח כי $L=\limsup_{n\to\infty} a_n$, כלומר $L=\lim_{n\to\infty}\bar{a_n}$, ונראה ששני התנאים מתקיימים.
יהי $\varepsilon>0$. $\bar{a}_n\to L$ ולכן $\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[L-\varepsilon<\bar{a}_n<L+\varepsilon]$. ואז לכל $n\geq n_0$: $a_n\leq\bar{a}_n<L+\varepsilon$ בהתאם לתנאי הראשון.
נוכיח את התנאי השני. יהיו $\varepsilon>0, n_0\in\mathbb{N}$. נניח בשלילה כי לכל $n\geq n_0$ מתקיים $a_n\leq L-\varepsilon$. מתקבל מכך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $\bar{a}_n\leq L-\varepsilon$, בסתירה לכך ש-$\bar{a}_n\to L$.

ראינו שאם $L=\limsup_{n\to\infty} a_n$ שני התנאים מתקיימים. נניח ששני התנאים מתקיים ונראה את הכיוון ההפוך.
יהי $\varepsilon>0$. לפי התנאי הראשון: $\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\left[a_n<L+\frac{\varepsilon}{2}\right]$.
נראה שאם $n\geq n_0$ אז $|\bar{a}_n-L|<\varepsilon$. קודם כל לכל $n\geq n_0$ מתקיים: $\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},...\}\leq L+\frac{\varepsilon}{2}<L+\varepsilon$.
בנוסף, ניקח $n\geq n_0$. לפי תנאי 2, יש $n_1\geq n$ עבורו $a_{n_1}>L-\varepsilon$. אז מתקיים $\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},...\}\geq a_{n_1}>L-\varepsilon$.
התקבל שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|\bar{a}_n-L|<\varepsilon$. ■

7.1.3 תנאים שקולים ל liminf

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$. אז $L=\liminf_{n\to\infty} a_n$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

1. $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,[a_n>L-\varepsilon]$
2. $\forall(\varepsilon>0)\,\forall(n_0\in\mathbb{N})\,\exists(n\geq n_0)\,[a_n<L+\varepsilon]$

הוכחה: בדומה למשפט הקודם. ■

7.1.4 limsup מינוס אינסוף

טענה: $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם ורק אם $a_n \to -\infty$.
הוכחה:
i. נניח כי $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, כלומר $\bar{a}_n \to -\infty$. לכל $n \in \mathbb{N}$: $a_n \le \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\} = \bar{a}_n$.
$\bar{a}_n \to -\infty$ ולכן גם $a_n \to -\infty$.

ii. בכיוון השני, נניח כי $a_n \to -\infty$ ונראה כי $\bar{a}_n \to -\infty$. יהי $K < 0$. $a_n \to -\infty$ ולכן, $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \ge n_0) [a_n < K - 1]$.
ואז לכל $n \ge n_0$ מתקיים $\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\} \le K - 1 < K$, ולכן $\bar{a}_n \to -\infty$. ■

7.1.5 liminf אינסוף

טענה: $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם ורק אם $a_n \to \infty$.
הוכחה: בדומה למשפט הקודם. ■

7.1.6 גבול חלקי קטן/גדול ביותר

טענה: תהי a_n סדרה. אז:

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n$ זה גבול חלקי של a_n, ויתר על כן זהו הגבול החלקי הגדול ביותר.
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n$ זה גבול חלקי של a_n, ויתר על כן זהו הגבול החלקי הקטן ביותר (לא נוכיח, בדומה ל1).

תזכורת: $L \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של a_n אם ורק אם: $\forall (\varepsilon > 0) \forall (n_0 \in \mathbb{N}) \exists (n \ge n_0) [|a_n - L| < \varepsilon]$.
הוכחה: 1. i. אם $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ אז הסדרה a_n לא חסומה מלמעלה. ראינו שבמקרה זה ∞ הוא אכן גבול חלקי של a_n, וברור שהוא הגדול ביותר.

ii. אם $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אז לפי הטענה הקודמת $a_n \to -\infty$, ומתקבל ש-$-\infty$ הוא הגבול החלקי היחיד, ובפרט הגדול ביותר.

iii. אם $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L \in \mathbb{R}$, נראה כי L גבול חלקי של a_n. נשתמש בתזכורת. יהיו $\varepsilon > 0$ ו-$n_0 \in \mathbb{N}$. יש להראות שקיים $n \ge n_0$ המקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. לפי התנאי הראשון עבור lim sup: $\forall (\varepsilon > 0) \exists (n_1 \in \mathbb{N}) \forall (n \ge n_1) [a_n < L + \varepsilon]$.
נסמן $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. לפי התנאי השני, קיים $n_3 \ge n_2$ שעבורו $a_{n_3} > L - \varepsilon$.
אז האינדקס n_3 מקיים $n_3 \ge n_2 \ge n_0$ והוא מקיים גם: $L + \varepsilon \overset{n_3 \ge n_2 \ge n_1}{>} a_{n_3} \overset{\text{תנאי } 2}{>} L - \varepsilon$. כלומר $|a_{n_3} - L| < \varepsilon$.

כעת נותר להראות כי L הוא הגבול החלקי הגדול ביותר. נניח בשלילה כי קיים גבול חלקי $L' > L$. ניקח ε מספיק קטן כך ש-$L + \varepsilon < L'$.
לפי התנאי הראשון: $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \ge n_0) [a_n < L + \varepsilon]$.
תהי a_{n_k} תת סדרה של a_n השואפת ל-L'. החל ממקום מסוים כל איברי תת הסדרה מקיימים $a_{n_k} < L + \varepsilon$ (ע"פ התנאי ראשון). בגלל שאי שוויון חלש נשמר בגבול, נסיק: $L' = \limsup_{k\to\infty} a_{n_k} \le L + \varepsilon < L'$. התקבל $L' < L'$ סתירה. לכן לא קיים גבול חלקי $L' > L$, ו-L הוא הגבול החלקי הגדול ביותר. ■

מסקנה: מתקיים $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

7.1.7 גבול חלקי יחיד

טענה: תהי a_n סדרה. אז התנאים הבאים שקולים:

1. a_n מתכנסת במובן הרחב.
2. ל-a_n יש גבול חלקי יחיד.
3. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

הוכחה:
$1 \Leftarrow 2$: אם $a_n \to L$ במובן הרחב אז ראינו ש-L הוא הגבול החלקי היחיד של a_n.
$2 \Leftarrow 3$: נתון כי ל-a_n יש גבול חלקי יחיד. $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ו-$\liminf_{n\to\infty} a_n$ הם גבולות חלקיים, ועל כן הם שווים.
$3 \Leftarrow 1$: נסמן $L = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
i. אם $L = -\infty$, אז $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ וראינו כי $a_n \to -\infty$.

ii. אם $L=\infty$, אז $\liminf_{n\to\infty} a_n=\infty$ וראינו כי $a_n\to\infty$.
iii. אם $L\in\mathbb{R}$, לפי התנאי הראשון עבור lim sup: $\exists\left(n_0\in\mathbb{N}\right)\forall\left(n\geq n_0\right)\left[a_n>L-\varepsilon\right]$.
בדומה לפי התנאי הראשון עבור lim inf: $\exists\left(n_1\in\mathbb{N}\right)\forall\left(n\geq n_1\right)\left[a_n<L+\varepsilon\right]$.
נסמן $n_2=\max\left\{n_0,n_1\right\}$ ונקבל לכל $n\geq n_2$: $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$. לכן $a_n\to L$. ■

7.2 סדרות קושי

תהי (a_n) סדרה. נאמר שהיא סדרת קושי אם מתקיים

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(m,n\geq n_0)\,[|a_m-a_n|<\varepsilon]$$

או באופן שקול בסימון $p=m-n$,

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,\forall(p\in\mathbb{N})\,[|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon]$$

סדרה היא *לא* סדרת קושי אם ורק אם:

$$\exists(\varepsilon>0)\,\forall(n_0\in\mathbb{N})\,\exists(n\geq n_0)\,\exists(p\in\mathbb{N})\,[|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon]$$

*a_n מתכנסת (לגבול סופי) אם ורק אם היא סדרת קושי (נוכיח זאת בהמשך).

לדוגמה,

1. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. נראה שזו סדרת קושי.
<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon>0$. לכל $p\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n(n+1)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+...+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

נבחר $n_0=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+1>\frac{1}{\varepsilon}$. אז לכל $n\geq n_0$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ מתקבל $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$. ■

אין ביכולתנו בקורס חדוא 1 למצוא את הגבול לסדרה (ניתן עם טור פורייה בחדוא 2, התשובה הינה $\frac{\pi^2}{6}$).
ניתן היה להוכיח גם שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.

2. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. נראה שזו לא סדרת קושי.
<u>הוכחה:</u> לכל n,p מתקיים $|a_{n+p}-a_n|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\geq\frac{p}{n+p}$. ניקח $\varepsilon=0.5$. לכל $n_0\in\mathbb{N}$ נבחר $n=p=n_0$. אז מתקבל

$$|a_{n+p}-a_n|\geq\frac{p}{n+p}=\frac{n_0}{n_0+n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

ועל כן a_n אינה סדרת קושי. נשים לב כי a_n מונוטונית עולה, ולכן בהכרח $a_n\to\infty$.

7.2.1 כל סדרת קושי היא חסומה

<u>טענה:</u> תהי (a_n) סדרה. אם (a_n) סדרת קושי אז היא חסומה.
<u>הוכחה:</u> תהי a_n סדרת קושי. ניקח $\varepsilon=1$. מתקיים: $\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(m,n\geq n_0)\,[|a_m-a_n|<1]$.
בפרט, לכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-a_{n_0}|<1$, כלומר: $a_{n_0}-1<a_n<a_{n_0}+1$.
ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקבל: $a_n\leq\max\{a_1,a_2,...,a_{n_0-1},a_{n_0}+1\}$, ו-$a_n\geq\min\{a_1,a_2,...,a_{n_0-1},a_{n_0}-1\}$.

7.2.2 התכנסות סדרת קושי

<u>טענה:</u> a_n מתכנסת (לגבול סופי) אם ורק אם היא סדרת קושי.
<u>הוכחה:</u>
i. נניח כי $a_n\to L$ ונראה שהיא סדרת קושי. יהי $\varepsilon>0$. אז: $\exists(n_0\in\mathbb{N})\,\forall(n\geq n_0)\,\left[|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$.
ואז לכל $m,n\geq n_0$ מתקיים: $|a_m-a_n|=|(a_m-L)-(a_n-L)|\leq|a_m-L|+|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

ii. להפך, נניח כי a_n סדרת קושי ונראה שהיא מתכנסת. כיוון שa_n סדרת קושי אז ידוע שהיא חסומה, ולכן לפי משפט בולצנו-ויירשטראס, יש

ל-a_n תת סדרה מתכנסת a_{n_k}. נסמן $L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. ונראה כי $a_n \to L$.
יהי $\varepsilon > 0$. a_n סדרת קושי ועל כן קיים $\exists\left(n_0 \in \mathbb{N}\right)\forall\left(m,n \geq n_0\right)\left[\left|a_m - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$.
בנוסף, $a_{n_k} \to L$ ולכן $\exists\left(k_0 \in \mathbb{N}\right)\forall\left(k \geq k_0\right)\left[\left|a_{n_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$.
יהי $n \geq n_0$. סדרת האינדקסים מקיימת $n_k \to \infty$, ולכן קיים $k \geq k_0$ כך ש-$n_k \geq n_0$. ואז עבור k זה:

$$\left|a_n - L\right| = \left|\left(a_n - a_{n_k}\right) - \left(a_{n_k} - L\right)\right| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כאשר באי שוויון האחרון השתמשנו ב-$n, n_k \geq n_0$ עבור הגדרת סדרת קושי, וב-$k \geq k_0$ עבור גבול תת הסדרה. ■

חלק III
טורים

8 טורים

8.1 הגדרה

תהי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נגדיר סדרה חדשה סדרה $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. s_n נקראת סדרת הסכומים החלקיים של a_n.

8.1.1 טור מתכנס אם סדרה שואפת לאפס

טענה: נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אז $a_n \to 0$.
הוכחה: נסמן את את סדרת הסכומים החלקיים ב-S_n. ע״פ ההנחה, קיים הגבול הסופי $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. נשים לב כי מתקיים $S_{n+1} = S_n + a_n$. אז מתקיים $a_n = S_{n+1} - S_n \to S - S = 0$. ■

הערה: אם טור מתכנס אז הסדרה מתכנסת ל0, אך ההפך לא מתקיים (אם הסדרה מתכנסת ל0 הטור לא בהכרח מתכנס). אבל אם הסדרה לא מתכנסת ל0 אז הטור בהכרח לא מתכנס.

8.1.2 טור גיאומטרי

טור גאומטרי הוא סדרת הסכומים החלקיים של סדרה הנדסית.
סכום סופי: ניתן להוכיחה ע״פ אינדוקציה.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^n = \boxed{\frac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}}$$

סכום אינסופי:
נניח $|q| < 1$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a_1\left(1-0\right)}{1-q} = \boxed{\frac{a_1}{1-q}}$$

נניח $|q| > 1$. מתקיים $|a_n| = |a_1 q^n| = |a_1|\,|q|^n > |a_1|$. כלומר האיבר הכללי לא שואף ל-0 (נבחר $\varepsilon < |a_1|$) ולכן הטור מתבדר.

8.1.3 קריטריון קושי

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נסמן ב-S_n את סדרת הסכומים החלקיים.
a_n מתכנסת אם סדרות הטורים החלקיים מתכנסת, וזה קורה אם ורק אם S_n סדרת קושי. נשים לב שמתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |S_{n+p} - S_n|$.
כלומר אם ורק:

$$\forall\left(\varepsilon>0\right)\exists\left(n_0\in\mathbb{N}\right)\forall\left(n\geq n_0\right)\forall\left(p\in\mathbb{N}\right)\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\right]$$

8.1.4 התכנסות טורי סדרות שוות

טענה: נתונות סדרות a_n, b_n כך שמתקיים $\exists\left(n_0\in\mathbb{N}\right)\forall\left(n\geq n_0\right)\left[a_n=b_n\right]$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
(אך לא בהכרח מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

ה כי b_n מתכנס. נשתמש בקריטריון קושי. יהי $\varepsilon > 0$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ולכן: $\forall\left(\varepsilon > 0\right)\exists\left(n_1 \in \mathbb{N}\right)\forall\left(n \geq n_1\right)\forall\left(p \in \mathbb{N}\right)\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\right]$.
ואז לכל $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ וכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מקיים את קריטריון קושי ועל כן הוא מתכנס. ■

8.1.5 זנב מתכנס לאפס

טענה: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס. נגדיר סדרה חדשה $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ זנב הטור. אז $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$.
הוכחה: נסמן בS_n את סדרת הסכומים החלקיים. אז לפי הנתון, קיים וסופי הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + r_k$. לכן $r_k = S - S_k \to S - S = 0$.

8.1.6 סכום טורים

טענה: נניח שני טורים מתכנסים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. אז סכום הטורים מתכנס לסכום הגבולות: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
הוכחה: $\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.■

8.1.7 כפל טור בקבוע

טענה: נניח שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אז כפל הטור בקבוע מתכנס ומקיים: $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
הוכחה: $\sum_{n=1}^{N}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{N} a_n \to c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■
הערה: אין משפט מקביל עבור כפל טורים: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

8.2 טורים חיוביים

8.2.1 הגדרה

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חיובי אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$. במקרה זה, אם נסמן את סדרת הסכומים החלקיים ב-S_n נראה כי היא מונוטונית עולה: $S_{n+1} = a_{n+1} + S_n \geq S_n$, ועל כן יש לה גבול במובן הרחב. הגבול סופי אם ורק אם S_n חסומה מלמעלה.
*נסמן (אך ורק לטורים חיוביים) שאם הטור מתכנס לגבול סופי אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
*טור מקיים כל תכונות הגבול של טור חיובי גם אם הוא טור חיובי רק החל ממקום מסוים.

8.2.2 מבחן ההשוואה הראשון

נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. נניח כי $\exists\left(n_0 \in \mathbb{N}\right)\forall\left(n \geq n_0\right)\left[a_n \leq b_n\right]$. אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

הוכחה: מספיק להראות כי סדרת הסכומים החלקיים של a_n חסומה מלמעלה. זריקה של מספר איברים סופים לא משפיעה על התכנסות הטור, על כן נניח כי $n_0 = 1$ להה״כ. ע״פ הנתון, סדרת הסכומים החלקיים של b_n חסומה מלמעלה. כלומר, $\exists\left(M > 0\right)\forall\left(N \in \mathbb{N}\right)\left[\sum_{n=1}^{N} b_n \leq M\right]$.
אז מתקיים $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \leq M$. 2 מתקבל מיידית מ-1. ■

לדוגמה,
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. $\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{2}{n^2}$. וידוע $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ (כפל בקבוע). אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. וידוע $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (הזזה). אז הטור מתבדר.

8.2.3 מבחן השוואה גבולי

נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. נניח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ כך ש- $0 < L < \infty$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

<u>הוכחה:</u>
כיוון ראשון: נבחר $\varepsilon > 0$ עבורו $L - \varepsilon > 0$. לפי הגדרת הגבול: $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \right]$. אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $0 < a_n < b_n (L + \varepsilon)$.
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon) b_n < \infty$ (כפל טור בקבוע). אז ע"פ מבחן ההשוואה הראשון מתקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

כיוון שני: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $b_n (L - \varepsilon) < a_n$ וממבחן ההשוואה הראשון מתקבל $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

לדוגמה,
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^4+5n+2}$. נעשה מבחן השוואה גבולי עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\frac{\frac{n^2+1}{3n^4+5n+2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4+n^2}{3n^4+5n+2} \to \frac{1}{3} \in (0,\infty)$.
ידוע $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 0$, ולכן הטור המקורי מתכנס.

8.2.4 מבחן השורש

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי . נסמן $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. אז:

1. אם $L < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $L > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $L = 1$, המבחן אינו נותן לנו מידע (לא ידוע).

<u>הוכחה:</u>
1. נבחר $\varepsilon > 0$ כך ש-$L + \varepsilon < 1$.
$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, על כן: $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon \right]$.
ואז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n < (L+\varepsilon)^n$. $\sum_{n=1}^{\infty} (L+\varepsilon)^n$טור גיאומטרי מתכנס, וממבחן ההשוואה הראשון מתקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. יהי $\varepsilon > 0$ כך ש-$L - \varepsilon > 1$.
נסמן $b_n = \sqrt[n]{a_n}$. אז $L = \limsup_{n\to\infty} b_n$ הוא גבול חלקי ולכן יש תת סדרה b_{n_k} המקיימת $b_{n_k} \to L$. ולכן: $\exists (k_0 \in \mathbb{N}) \forall (k \geq k_0) \left[\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > L - \varepsilon \right]$.
ואז לכל $k \geq k_0$ מתקיים $a_{n_k} > (L-\varepsilon)^{n_k} \geq 1$. לכן a_{n_k} לא שואפת ל-0 וגם a_n לא שואפת ל-0. לכן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות הטור. הטור מתבדר.

לדוגמה,
עבור $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq q < 1$ נבחן את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$.
$\sqrt[n]{n^k q^n} = q \left(\sqrt[n]{n} \right)^k \to q \cdot 1^k = q < 1$ (אבל זה לא $\limsup$?). לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ מתכנס, ו-$n^k q^n \to 0$.

8.2.5 מבחן המנה

<u>טענה:</u> נתון טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. נניח כי קיים $0 < q < 1$ עבורו: $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \right]$. אז הטור מתכנס.
2. נניח כי $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \right]$. אז הטור מתבדר.

<u>הוכחה:</u> 1. נניח לה"כ כי $n_0 = 1$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} q^n$. הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ מתכנס, לכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{q} q^n$ מתכנס (מכפלה בקבוע). ממבחן ההשוואה הראשון נסיק כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. שוב נניח $n_0 = 1$. לכל n מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, ולכן $a_{n+1} \geq a_n$ סדרה עולה ובפרט $a_n \geq a_1$ לכל n. אם כך a_n לא שואפת ל0, ולכון הטור מתבדר. ■

<u>הערה:</u> בסעיף הראשון לא מספיק לדרוש $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. לדוגמה $a_n = \frac{1}{n}$ מתבדר למרות ש$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$.

8.2.6 מבחן המנה גבולי

טענה: יהי טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נסמן $K = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. אם $L < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $K > 1$ הטור מתבדר.

הוכחה: 1. נבחר $\varepsilon > 0$ עבורו $L + \varepsilon < 1$. אז מתקיים $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon < 1\right]$. ואז במבחן המנה ניקח $q = L + \varepsilon < 1$. כלומר הטור מתכנס.

2. נבחר $\varepsilon > 0$ עבורו $K - \varepsilon > 1$. אז מתקיים $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} > K - \varepsilon > 1\right]$. ואז ע״פ מבחן המנה הטור מתבדר. ■

מסקנה: נתון טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נניח קיים הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. אז

1. אם $L < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $L > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $L = 1$ עניין פתוח.

לדוגמה,

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{4^n}$ טור חיובי. נסמן $a_n = \frac{2-(-1)^n}{4^n}$. אז: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2-(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{2-(-1)^n} = \frac{2-(-1)^{n+1}}{4(2-(-1)^n)} \leq \frac{3}{4} < 1$. הטור מתכנס ע״פ מבחן המנה עבור $q = \frac{3}{4}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$ כאשר $a > 0$ לכל n. נסמן $a_n = \frac{n!a^n}{n^n}$. הטור חיובי.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!a^n} = \frac{(n+1)an^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \to \frac{a}{e}$
כלומר אם $a < e$ הטור מתכנס. אם $a > e$ הטור מתבדר. כאשר $a = e$, נשים לב שמתקיים
$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e} \cdot e = 1$ ולכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ והטור מתבדר כאשר $a = e$.

8.2.7 מבחן העיבוי

טענה: נניח a_n סדרה אי שלילית ומונוטונית יורדת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$.

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$. בגלל שהסדרה מונוטונית יורדת, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}$ (כיוון ש $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq 2^{\log_2 n} = n$).

לכן מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ וע״פ מבחן ההשוואה וכיוון שנתו.7....

שיטטט צריך להשלים צילמת תסתכל בגלריה

לדוגמה, טוב צריך להעתיק בבית

חלק IV
פונקציות

9 פונקציות

הגדרה (פונקציה): פונקציה $f:A\to B$ מתאימה לכל $a\in A$ איבר יחיד $b\in B$. במקרה זה נסמן $b=f(a)$. הקבוצה A היא התחום, הקבוצה B היא הטווח. התמונה היא $\mathrm{Im}f=\{f(a):a\in A\}$, תת קבוצה של הטווח.

לדוגמה,

1. פונקציית הזהות $\mathrm{id}:A\to A$, $\mathrm{id}(a)=a$.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

הגדרה (תמונה): תהי $f:A\to B$ פונקציה. תמונתה מוגדרת בתור $\mathrm{Im}(f)=\{f(a):a\in A\}\subseteq B$.

הגדרה (חסומה): תהי $A\subseteq\mathbb{R}$. $f:A\to\mathbb{R}$ נקראת חסומה אם התמונה שלה חסומה.

לדוגמה,
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ לא חסומה, אבל היא כן חסומה ב$x\in(0,1)$. בפרט $f(x)\in(0,1)$.

הגדרה (חח"ע): פונקציה $f:A\to B$ נקראת חד חד ערכית (חח"ע) אם $a_1\neq a_2$ גורר $f(a_1)\neq f(a_2)$, או באופן שקול $f(a_1)=f(a_2)\Leftarrow a_1=a_2$. כלומר, אין 2 ערכים בתחומים המובילים לאותו ערך בטווח B.

הגדרה (על): פונקציה $f:A\to B$ נקראת על אם $\forall(b\in B)\exists(a\in A)[f(a)=b]$. כלומר תמונת הפונקציה היא הטווח כולו, $\mathrm{Im}(f)=B$.

לדוגמה,
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ אינה חח"ע כי למשל $f(-1)=f(1)$. היא גם לא על, כי $\mathrm{Im}f=[0,\infty]\neq\mathbb{R}$.

הגדרה (הרכבה): יהיו $f:A\to B$ ו-$g:B\to C$ פונקציות. נגדיר את ההרכבה $g\circ f:A\to C$ על ידי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

*הרכבה לא תמיד מוגדרת בשני הצדדים, ואפילו אם כן *לא בהכרח מתקיים* $f\circ g=g\circ f$.

לדוגמה,
$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=x+1$. אזי לכל $x\in\mathbb{R}$:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=x^2+2x+1$.
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+1$.

הגדרה (הפיכה): תהי $f:A\to B$. נאמר כי f הפיכה אם קיימת $g:B\to A$ אשר מקיימת

1. $g\circ f=id_A$
2. $f\circ g=id_B$

משפט: פונקציה $f:A\to B$ היא הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.

לדוגמה,
$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=x^2$ חח"ע ועל ולכן הפיכה.
ההופכית היא $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=\sqrt{x}$.
אכן, $f\circ g=g\circ f=id_{[0,\infty)}$.

10 גבול של פונקציה

הגדרה: יהיו $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. הקטע $(a-\delta, a+\delta)$ נקרא הסביבה של הנקודה a.
הקבוצה $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ נקראת הסביבה המנוקבת של הנקודה a.

10.1 הגדרת הגבול לפי קושי

תהי f פונקציה אשר מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה a. נאמר כי $L \in \mathbb{R}$ הוא הגבול של f בנקודה a ונסמן $L = \lim_{x\to a} f(x)$ אם מתקיים:

$$\boxed{\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x : 0 < |x-a| < \delta)\,[|f(x) - L| < \varepsilon]}$$

נאמר כי $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ אם

$$\boxed{\forall\,(M > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x : 0 < |x-a| < \delta)\,[f(x) > M]}$$

נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם

$$\boxed{\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(M > 0)\,\forall\,(x \geq M)\,[|f(x) - L| < \varepsilon]}$$

ובאופן דומה מוגדרים $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

10.2 הגדרת הגבול לפי היינה

תהי f פונקציה אשר מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה a. נאמר כי $L = \lim_{x\to a} f(x)$ אם מתקיים:
לכל סדרה x_n המקיימת $x_n \to a$ שאיבריה שונים מ-a ($x_n \neq a$) מתקיים $f(x_n) \to L$.

10.3 שקילות ההגדרות

<u>טענה:</u> שתי הגדרות הגבולות שקולות זו לזו (היינה וקושי).
<u>הוכחה:</u> נוכיח במקרה שa, L סופיים, שאר המקרים דומים.

i. נניח כי L הוא הגבול לפי קושי ונראה שהוא הגבול לפי היינה.
תהי x_n סדרה המקיימת $x_n \to a$ $x_n \neq a$. נראה כי $f(x_n) \to L$.
יהי $\varepsilon > 0$. לפי הגדרת הגבול של קושי: $\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x : 0 < |x-a| < \delta)\,[|f(x) - L| < \varepsilon]$.
בנוסף כיוון ש$x_n \to a$: $\exists\,(n_0 \in \mathbb{N})\,\forall\,(n \geq n_0)\,[|x_n - a| < \delta]$.
אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $0 < |x_n - a| < \delta$ ולכן $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

ii. נניח כי $L = \lim_{x\to a} f(x)$לפי היינה ונראה כי L הוא הגבול לפי קושי.
יהי $\varepsilon > 0$, נניח בשלילה כי לא קיים δ מתאים.
כלומר $\exists\,(\varepsilon > 0)\,\forall\,(\delta > 0)\,\exists\,(x : 0 < |x-a| < \delta)\,[|f(x) - L| \geq \varepsilon]$.
בפרט נובע כי $\forall\,(n \in \mathbb{N})\,\exists\left(x_n : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}\right)[|f(x_n) - L| \geq \varepsilon]$.
התקבלה סדרה $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$. ע"פ סנדוויץ' $x_n \to a$. לפי הגדרת הגבול של היינה $f(x_n) \to L$. זו סתירה משום שלכל n מתקיים $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. ■

10.4 משפטים נוספים

10.4.1 יחידות הגבול

<u>טענה:</u> נניח f מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה a. אם קיים גבול בנקודה a אז הוא יחיד.

10.4.2 סכום גבולות ממשיים

משפט: יהיו f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של a. אזי נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ו-$\lim_{x\to a} g(x) = B$. אזי $f(x) + g(x) \overset{x\to a}{\to} A + B$.

10.4.3 מכפלת גבולות ממשיים

משפט: יהיו f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של a. אזי נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ו-$\lim_{x\to a} g(x) = B$. אזי $f(x)g(x) \overset{x\to a}{\to} AB$.

10.4.4 מנת גבולות ממשיים

משפט: יהיו f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של a. אזי נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ו-$\lim_{x\to a} g(x) = B$. אם $B \neq 0$, אזי $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\to} \frac{A}{B}$.

10.4.5 אי שוויון חלש נשמר בגבול

משפט: נניח כי קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
נניח כי $\exists (\delta > 0) \forall (x : 0 < |x-a| < \delta) \, [c \leq f(x) \leq d]$. אז $c \leq L \leq d$.

10.4.6 משפט הסנדוויץ'

קציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של a. אזי נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, ו-$\exists (\delta > 0) \forall (x : 0 < |x-a| < \delta) \, [f(x) \leq g(x) \leq h(x)]$.
אז $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

10.4.7 מכפלת חסומה ואפס

משפט: נניח f פקציהb חסומה בסביבה מנוקבת של הנקודה a, ונניח כי $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. אזי $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

לדוגמה, פונקציית דירכלה $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על פי $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. ל-$D$ אין גבול באף נקודה, כיוון שלכל $a \in \mathbb{R}$ ניתן להגדיר x_n סדרת רציונאלים השואפת ל-a וגם y_n סדרת אי רציונאלים השואפת ל-a. ואז $f(x_n) \to 1$ ו-$f(y_n) \to 0$, אז הגבול אינו קיים.

10.4.8 ערך מוחלט

משפט: נניח כי כי $f(x) \overset{x\to a}{\to} L$. אז $|f(x)| \overset{x\to a}{\to} |L|$.
משפט: $f(x) \overset{x\to a}{\to} 0$ אמ"מ $|f(x)| \overset{x\to a}{\to} 0$.

10.4.9 למות טריגונומטרית

טענה: לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $\sin x < x < \tan x$.

טענה: לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $|sinx| < |x| < |tanx|$.

טענה: $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

*הגדרה והוכחה פורמלית של הפונקציות הטריגונומטריות נמצאת בספר $Calculus\ Spivak$.

10.4.10 sinx/x

טענה: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

10.4.11 חסומה בסביבת גבול

טענה: נניח הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$ קיים וסופי. אזי יש סביבה מנוקבת של הנקודה a בה $f(x)$ חסומה.

10.4.12 c<f)x(<d

טענה: נניח קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to a} f(x)=L$, ו-$c<L<d$.
אזי $\exists(\delta>0)\,\forall(x:0<|x-a|<\delta)\,[c<f(x)<d]$.

10.5 גבול מימין/משמאל

10.6 משפטים נוספים

10.6.1 משפט ויירשטראס

טענה: אם פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
הוכחה 2: נוכיח שקיים מקסימום ועבור מינימום ההוכחה דומה.
ע"פ סעיף 1, f חסומה מלמעלה ולכן יש לה סופרמום. נסמן $M=\sup f=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$.
נרצה להוכיח ש-M הוא מקסימום, כלומר שM שייך לתמונה.
לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $x_n\in[a,b]$ כך ש-$f(x_n)>M-\frac{1}{n}$ (ע"פ הגדרת הסופרמום עם $\varepsilon=\frac{1}{n}$).
כלומר, $M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M$, וע"פ משפט הסנדוויץ' מתקבל $f(x_n)\to M$.

מצד שני לכל n מתקיים $x_n\in[a,b]$ וע"פ משפט בולצנו ויירשטראס יש תת סדרה מתכנסת x_{n_k}.
נסמן $c=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$. אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $a\le c\le b$, כלומר c בתחום הגדרה של f. f רציפה ולכן מתקבל $f(x_{n_k})\to f(c)$. אבל x_{n_k} תת סדרה של x_n ולכן $x_{n_k}\to M$. מיחידות הגבול מתקבל $M=f(c)$ ובפרט M שייך תמונה של f ועל כן הוא מקסימום.■

10.6.2 משפט ערך הביניים (עבור אפס)

טענה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)f(b)<0$. אז קיים $c\in(a,b)$ המקיימת $f(c)=0$.
הערה: אם $f(c)=0$ אז c נקרא שורש של f.
הוכחה: (דומה להוכחת משפט בולצאנו ויירשטראס בתוספת הלמה של קנטור).
לה"כ נניח $f(b)>0$ ו-$f(a)<0$. נסמן $a_1=a,b_1=b$.
אם $\bar{f}\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, סיימנו.
אם $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$ נסמן $a_2=a_1,b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.
אם $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$ נסמן $a_2=\frac{a_1+b_1}{2},b_2=b_1$.

נמשיך לסמן כך,
אם $\bar{f}\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, סיימנו.
אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$ נסמן $a_{n+1}=a_n,b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$.
אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$ נסמן $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=b_n$.

התקבלו הסדרות a_n,b_n. לכל n $b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0$, ולכל n מתקיים $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$.
אז ע"פ הלמה של קנטור קיים c כך ש$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$ חיתוך כל הקטעים.
אי שוויון חלש נשמר בגבול והפונקציה רציפה. על כן מתקבל $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0\leftarrow f(c)$ ו-$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$.
כלומר $0\le f(c)\le 0$. אז $f(c)=0$. ■

10.6.3 קיום שורש פולינום אי זוגי

הערה: פולינום זו פונקציה מהצורה $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ כאשר $a_i\in\mathbb{R}$ ו-n נקראת המעלה של הפולינום.
טענה: לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש ממשי.
הוכחה: נניח לה"כ שהמקדם של החזקה הכי גבוהה הוא 1, אחרת נחלק בו.
n אי זוגי: $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
f פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה. מתקיים:

$$f(x)=x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

אז $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ו-$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. לכן יש בהכרח $b>a$ עבורם $f(a)<0$ ו-$f(b)>0$.
ע"פ משפט הביניים מתקבל כי קיים שורש בקטע (a,b).■

10.6.4 משפט ערך הביניים

טענה: נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. יהי y_0 מספר ממשי בין $f(a)$ ו-$f(b)$. אז יש נקודה $c\in[a,b]$ עבורה $f(c)=y_0$.
הוכחה: נניח לה"כ $f(a)\le y_0\le f(b)$. אם $f(a)=y_0$ סיימנו. נגדיר פונקציה $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש$g(x)=f(x)-y_0$.
אז מתקיים $g(b)=f(b)-y_0>0$ ו-$g(a)=f(a)-y_0<0$. אז הוכחנו עבר עבור מקרה זה שקיים $c\in[a,b]$ כך ש $g(c)=0$.
ואז מיד מתקבל $f(c)=y_0$. ∎

10.6.5 פונקציה חסומה בעלת תמונה קטע סגור

טענה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה אז התמונה היא קטע סגור.
הוכחה: לפי משפט ויירשטראס, ל-f יש לה מקסימום ומינימום. נסמן $m=\min f$, $M=\max f$.
נראה כי $\mathrm{Im}f=[m,M]$: לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $m\le f(x)\le M$ ולכן $f(x)\in[m,M]$. לכן $\mathrm{Im}f\subseteq[m,M]$.
להפך, תהי $c\in[m,M]$. קיימות נקודות $c_1,c_2\in[a,b]$ עבורן $f(c_1)=m, f(c_2)=M$. (לה"כ $c_1\le c_2$) אז ע"פ משפט ערך הביניים קיים $d\in[c_1,c_2]$ עבורו $f(d)=c$. ולכן $c\in\mathrm{Im}f$.

10.6.6 מקרה פרטי

טענה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית עולה אז $\mathrm{Im}f=[f(a),f(b)]$ (ולהפך עבור מונוטונית יורדת).

10.6.7 הופכית היא רציפה

טענה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. נסמן $B=\mathrm{Im}f$. קטע סגור.
אז $f:[a,b]\to B$ חח"ע ועל ולכן הפיכה. אז ההופכית $g:B\to[a,b]$ רציפה.
הוכחה: תהי $y\in B$ נקודה ונראה רציפות בנקודה y. נניח y_n סדרה של נקודות ב-B השואפת ל-y. נראה כי $g(y_n)\to g(y)$.
$\mathrm{Im}f=B$ ולכן לכל n קיים $x_n\in[a,b]$ עבורו $y_n=f(x_n)$. בנוסף יש x עבורו $y=f(x)$. אז מתקיים:

$$g(y)=g(f(x))=x,\quad g(y_n)=g(f(x_n))=x_n$$

אז צריך להוכיח $x_n\to x$. מספיק להראות כי x הוא הגבול החלקי היחיד של x_n. אכן יהי c גבול חלקי, כלומר יש תת סדרה x_{n_k} שגבולה הוא c. אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $c\in[a,b]$. f רציפה בנקודה c ולכן $f(x_{n_k})\to f(c)$.
מצד שני, y_{n_k} תת סדרה של y_n ולכן שואפת ל-y. מיחידות הגבול $f(c)=y=f(x)$. f חח"ע ולכן $c=x$. ∎

10.7 רציפות במידה שווה

הגדרה (רציפות בקטע)**:** יהי I קטע. פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה אם:

$$\forall(x\in I)\,\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(y\in I:|x-y|<\delta)\,[|f(x)-f(y)|=\varepsilon]$$

כמובן זוהי פשוט הגדרת רציפות ב-x, אך עבור כל $x\in I$.

הגדרה: יהי I קטע. פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה במידה שווה (במ"ש) אם:

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x\in I)\,\forall(y\in I:|x-y|<\delta)\,[|f(x)-f(y)|<\varepsilon]$$

או באופן שקול

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x,y\in I:|x-y|<\delta)\,[|f(x)-f(y)|<\varepsilon]$$

הערות: אין משמעות לרציפות במ"ש בנקודה. זו תכונה של פונקציה *בקטע*.
רציפות במידה שווה גוררת רציפות.

לדוגמה,

1. עבור $f(x)=x$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$. מתקבל $\forall x,y$ עבורם $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|=|x-y|=d<\varepsilon$.
2. עבור $f(x)=x^2$ בקטע $[0,a]$ $a>0$. נבחן את הביטוי: $|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=|x-y|\,|x+y|\le|x-y|\,2a$. אז נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2a}$ ונקבל $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2a}\cdot 2a=\varepsilon$.
3. עבור $f(x)=x^2$ בקטע $[0,\infty)$ נראה שלא. ניקח $\varepsilon=1$. לכל $\delta>0$ ניקח $x=\frac{1}{\delta}$ ו-$y=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$. אז $|y-x|=\frac{\delta}{2}$ ואז $|f(x)-f(y)|=|x+y|\,|x-y|=\frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)=1+\frac{\delta^2}{4}\ge 1=\varepsilon$

10.7.1 משפט קנטור

טענה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז f רציפה במ"ש ב-$[a,b]$.
הוכחה: יהי $\varepsilon>0$.נניח בשלילה כי לא קיים $\delta>0$ מתאים. אז

$$\forall\,(\delta>0)\,\exists\,(x,y\in[a,b]:|x-y|<\delta)\,[|f(x)-f(y)|\le\delta]$$

אז בפרט $\forall\,(n\in\mathbb{N})\,\exists\left(x_n,y_n\in[a,b]:|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\right)[|f(x_n)-f(y_n)|\le\varepsilon]$.
לכל n תקיים $x_n\in[a,b]$ ולכן x_n סדרה חסומה, וע"פ משפט בולצאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת x_{n_k}. נסמן $c=\lim_{n\to\infty}x_{n_k}$.
ולכל kמתקיים: $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$ ולכן $x_{n_k}-\frac{1}{n_k}<y_{n_k}<x_{n_k}+\frac{1}{n_k}$. ע"פ משפט הסנדוויץ' מתקבל כי $y_{n_k}\to c$.
אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $c\in[a,b]$. f רציפה ולכן $f(x_{n_k})\to f(c)$ ו-$f(y_{n_k})\to f(c)$. מחשבון גבולות נסיק:

$$f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to f(c)-f(c)=0$$

אבל זו סתירה כי לכל k מתקיים $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\ge\varepsilon$ (ע"פ הנחת השלילה). ■

10.7.2 עבור קטע פתוח

תרגיל: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה המנוקבת של הנקודה a. נניח שלכל סדרה x_n השואפת לa ואיבריה שונים מ-a הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$קיים וסופי. אז הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים וסופי. (קל. היינה).

טענה: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $a,b\in\mathbb{R}$. אז fרציפה במ"ש ב-(a,b) אמ"מ הגבולות $\lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to b^-}f(x)$ קיימים וסופיים. (טענה מאוד אינטואיטיבית).

לדוגמה,
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$. אכן: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ ו-$\lim_{x\to1^-}\frac{\sin x}{x}=\sin 1$.

הוכחה:
i. נניח הגבולות החד צדדים בקצוות קיימים וסופיים ונראה כי f רציפה במ"ש.
נרחיב את f לקטע הסגור $[a,b]$ כאשר $f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x),\ f(b)=\lim_{x\to b^-}f(x)$.
אז f רציפה גם בקטע הסגור $[a,b]$ (כך הגדרנו את הקצוות).
לפי משפט קנטור : f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ועל רציפה במ"ש בקטע הסגור $[a,b]$, ובפרט גם בקטע (a,b).

ii. בכיוון השני, נניח f רציפה במ"ש בקטע הפתוח (a,b) ונראה כי $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים וסופי (שאר באופן דומה). נשתמש בתרגיל לעיל. מספיק להראות שאם x_n סדרה של איברים בקטע השואפת ל-a אז $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ קיים וסופי.

תהי x_n סדרה של איברים $x_n\in(a,b)$ המקיימת $x_n\to a$. נראה כי $f(x_n)$ סדרות קושי ולכן מתכנס.
יהי $\varepsilon>0$. fרציפה במ"ש ו-(a,b) ולכן:
$\exists\,(\delta>0)\,\forall\,(x,y\in(a,b):|x-y|<\delta)\,[|f(x)-f(y)|<\varepsilon]$
x_n סדרה מתכנסת (כי שואפת ל-a) ולכן היא סדרות קושי. לכן:
$\exists\,(n_0\in\mathbb{N})\,\forall\,(m,n\ge n_0)\,[|x_m-x_n|<\delta]$
ואז לכל $m,n\ge n_0$ מתקיים $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. ולכן $f(x_n)$ סדרות קושי. ■

הערה: באופן דומה אם f רציפה ב-$(a,b]$ אז היא רציפה במ"ש בקטע אמ"מ $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים וסופי.

10.7.3 שדגשדג

טענה: נניח $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה. אם $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים וסופי אז f רציפה במ״ש ב-$[a,\infty)$.
הערה: ההפך לא נכון. לדוגמה $f(x)=x$ רציפה במ״ש אבל הגבול לא סופי.
הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים וסופי. נסמנו L. לפי הגדרת הגבול:
$\exists\left(M>0\right)\forall\left(x\geq M\right)\left[\left|f(x)-L\right|<\frac{\varepsilon}{4}\right]$.
בפרט אם $x,y\geq M$ אז:
$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-L)-(f(y)-L)|\leq|f(x)-L|+|f(y)-L|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon$.
בקטע $[a,M]$ רציפה במ״ש לפי משפט קנטור. לכן: $\exists\left(\delta>0\right)\forall\left(x,y\in[a,M]:|x-y|<\delta\right)\left[\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$.
נראה כי δ עובד בכל הקטע $[a,\infty)$. יהיו $x,y\in[a,\infty)$ המקיימים $|x-y|<\delta$. נפריד למקרים.
-מקרה 1. $x,y\in[a,M]$. ראינו כבר שמתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
-מקרה 2. $x,y\in[M,\infty)$. ראינו כבר שמתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
-מקרה 3. $a\leq x<M<y$.נשים לב כי

$$|x-M|=M-x<y-x=|y-x|<\delta$$
$$|M-y|=y-M<y-x=|y-x|<\delta$$

ואז

$$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-f(M))-(f(y)-f(M))|\leq|f(x)-f(M)|+|f(y)-f(M)|$$

ע״פ מקרים 1 ו-2 מתקבל לבסוף $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(M)|+|f(y)-f(M)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. ■

10.7.4 פונקציית ליפשיץ

הגדרה: יהי I קטע. נאמר כי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציית ליפשיץ אם:

$$\exists\left(M>0\right)\forall\left(x,y\in I\right)\left[\left|f(x)-f(y)\right|\leq M\left|x-y\right|\right]$$

טענה: אם f פונקציית ליפשיץ ב-I אז היא רציפה במ״ש ב-I.
הוכחה: יהי M כמו בהגדרה. לכל $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ ואז לכל $|x-y|<\delta$ מתקבל $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|<M\delta<\varepsilon$. ■

הערה: ההפך לא נכון. למשל נגדיר $f(x)=\sqrt{|x|}$ בתחום $[-1,1]$. f רציפה במ״ש לפי משפט קנטור. נראה כי f אינה פונקציית ליפשיץ בקטע. נניח בשלילה שקיים M המקיים את ההגדרה.
אז לכל $x>0$: $\sqrt{|x|}=\sqrt{x}=|f(x)-f(0)|\leq M|x-0|=Mx$.
כלומר לכל $x\in(0,1]$ מתקיים $\frac{1}{\sqrt{x}}\leq M$ בניגוד לכך ש$\frac{1}{\sqrt{x}}$ לא חסומה בתחום זה. סתירה.

11 נגזרת

הגדרה: תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה x_0. אז נאמר כי f גזירה בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

הנגזרת מסומנת $f'(x_0)$ ונקרא "הנגזרת של f בנקודה x_0".
קל לראות ש2 ההגדרות שקולות ע"פ היינה עם $x_n = x_0 + h_n$.

לדוגמה,

1. $f(x) = c$. פונקציה קבועה. נראה כי לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ f גזירה ב-x_0 ומתקיים $f'(x_0) = 0$.
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \to 0$
2. $f(x) = x^2$. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0$
3. $f(x) = |x|$. נראה כי f לא גזירה באפס. $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h>0 \\ -1 & h<0 \end{cases}$ הגבול לא קיים.

<u>הערה:</u> פונקציות אלמנטריות *אינן בהכרח גזירות*.

הגדרה: נאמר כי f גזירה מימין בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ובדומה עבור הנגזרת מצד שמאל.

<u>משפט:</u> f גזירה ב-x_0 אמ"מ היא גזירה מימין ומשמאל ב-x_0 והנגזרות החד צדדיות שוות.

הגדרה: תהי $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. נאמר כי f גזירה ב-(a,b) אם היא גזירה בכל נקודה $x_0 \in (a,b)$. במקרה זה מקבלים פונקציית נגזרת $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$.

הגדרה: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נאמר כי f גזירה ב-$[a,b]$ אם היא גזירה בקטע (a,b), גזירה מימין ב-a וגזירה משמאל ב-b.

11.0.1 נגזרת כקירוב לינארי

<u>משפט:</u> נניח f מוגדרת בסביבה של x_0. אז f גזירה ב-x_0 אמ"מ קיימים מספר $A \in \mathbb{R}$ ופונקציה α המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, המקיימים $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, ובנוסף

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)$$

<u>הוכחה:</u>
i. נניח קיימים A ו-α כאלה. אז לכל $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \alpha(x) \to A + 0 = A$$

אז הנגזרת קיימת וערכה A.

ii. כיוון שני. נניח שהנגזרת קיימת ונסמנה ב-A. אז נגדיר $\alpha(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A$. אז כמובן מתקיים $\alpha(x) \to A - A = 0$ וגם באמצעות אלגברה מתקבל $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)$.
—— צריך להעתיק

11.0.2 נגזרת סכום

טענה: תהיינה פונקציות f, g גזירות בx_0. אז נגזרת הסכום היא סכום הנגזרות: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

11.0.3 נגזרת מכפלה

טענה: תהיינה פונקציות f, g גזירות בx_0. אז נגזרת המכפלה היא: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

11.0.4 נגזרת הופכי

טענה: תהא פונקציה f גזירה בx_0.

11.0.5 נגזרת מנה

11.0.6 כלל השרשרת

11.0.7 נגזרות נפוצות

סינוס קוסינוס טנגנס לוגריתם.
לדוגמה,

$f(x) = \ln|x|$ גזירה לכל $x \neq 0$. מתקיים $f'(x) = \frac{1}{x}$. $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$. וע״פ כלל השרשרת $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\left(\frac{1}{-x}\right) & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$.

11.0.8 נגזרת פונקציה הופכית

טענה: תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה x_0, הפיכה בסביבת x_0 וגזירה בx_0. תהי $g = f^{-1}$ ההופכית של f. אז g גזירה בנקודה x_0 ובתנאי ש$f'(x_0) \neq 0$ מתקיים $g(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
הוכחה: נסמן $y_0 = f(x_0)$. יהי $[a, b]$ קטע סגור המכיל את הנקודה x_0 בו f רציפה. ראינו ש-g רציפה בתמונה של הקטע $[a, b]$ ובפרט רציפה בנקודה $f(x_0) = y_0$. נראה כי g גזירה בy_0.
לכל $y \neq y_0$ מתקיים (נשתמש ב$y \neq y_0 \Rightarrow g(y) \neq g(y_0)$ ועל כן המכנה לא אפס):

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\left(\frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{f(g(y)) - f(x_0)}{g(y) - x_0}\right)}$$

נראה בעזרת ההגדרה של היינה כי המכנה שואף ל$f'(x_0)$ כאשר $y \to y_0$. תהי y_n סדרה השואפת ל-y_0, $y_n \neq y_0$. g רציפה בנקודה y_0 ולכן $g(y_n) \to g(y_0) = x_0$. נסמן $h_n = g(y_n)$. אז $h_n \to x_0$, ובגלל שמתקיים $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ מתקיים:

$$\frac{f(g(y_n)) - f(x_0)}{g(y_n) - x_0} = \frac{f(h_n) - f(x_0)}{h_n - x_0} \to f'(x_0)$$

ולבסוף מחשבון גבולות (הנחנו $f'(x_0) \neq 0$)

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

11.0.9 דוגמאות

לדוגמה,

1. $f(y)=a^y$ כאשר $1\neq a>0$. נשים לב שהיא ההופכית של $\log_a(x)$. אז $f'(y)=\frac{1}{(\log_a x)'}=\frac{1}{\frac{1}{x\ln a}}=x\ln a=a^y\ln a$.
2. $f(x)=x^\alpha$ כאשר $0<\alpha\in\mathbb{R}$. מתקיים $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. ואז $f'(x)=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$ (וואלה).
3. $f(x)=\sqrt{x}$ לפי הדוגמה הקודמת עם $\alpha=\frac{1}{2}$: $f'(x)=\frac{x^{-1/2}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $f(y)=\arcsin y$ מוגדרת בקטע $[-1,1]$. נראה כי היא גזירה ב-$(-1,1)$. יהי $y\in(-1,1)$ - קיים $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ עבורו $y=\sin x$. $\sin$ גזירה בנקודה x, ונהגזרת היא $\cos x\neq 0$. לכן $\arcsin' y=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
5. $f(x)=x^x$ בנקודה $x>0$. $x^x=e^{x\ln x}$ ולכן $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$.
6. נגדיר $f(x)=x^2D(x)$. נראה כי f גזירה בנקודה 0. $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2D(h)}{h}=hD(h)\to 0$.

11.1 מקסימום ומינימום

הגדרה: נניח f גזירה בקטע (a,b). אם f' גזירה בנקודה $x_0\in(a,b)$ אז נאמר כי f גזירה פעמיים בנקודה x_0 ונסמן את הנגזרת השנייה ב-$f''(x_0)$. באופן כללי נסמן ב-$f^{(n)}(x_0)$ את הנגזרת מסדר n בנקודה x_0.

משפט: אם f,g גזירות n פעמים בנקודה x_0 אז גם fg גזירה n פעמים ב-x_0 ומתקיים $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$. (ניתן להוכיח באמצעות אינדוקציה).

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0. נאמר כי x_0 נקודת מקסימום מקומית של f אם קיים $\delta>0$ כך ש-x_0 מקסימום של f בסביבה $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. באופן דומה מגדירים מינימום מקומי.

11.1.1 משפט פרמה

<u>טענה:</u> תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 ונניח כי x_0 נקודת קיצון מקומית של f. אז $f'(x_0)=0$.
<u>הערה:</u> יכול להיות שפונקציה לא גזירה בנקודת קיצון מקומית. למשל $|x|$ ב-0.
<u>הוכחה:</u> נניח בה"כ כי x_0 מקסימום מקומי. $\exists(\delta>0)\,\forall(x:|x-x_0|<\delta)\,[f(x)\leq f(x_0)]$.
נתון שf גזירה בx_0 ולכן בפרט $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
לכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $f(x)\leq f(x_0)$ ואי שוויון חלש נשמר בגבול. אז $f'(x_0)\leq 0$.
ובדומה עבור הנגזרת מצד שמאל, נראה $f'(x_0)\geq 0$.
ולכן $f'(x_0)=0$. ■

<u>הערה:</u> יתכן כי $f'(x_0)=0$ אך x_0 אינה נקודת קיצון מקומית. למשל $f(x)=x^3$. $f'(0)=0$ אך אין מקסימום או מינימום בנקודה זו (נק פיתול).

<u>הערה:</u> נקודת קיצון גלובלית היא לא בהכרח נקודת קיצון מקומית (נדרשת סביבה דו צדדית).

11.1.2 משפט רול

<u>טענה:</u> נניח f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ גזירה ב-(a,b) ומתקיים $f(a)=f(b)$. אז יש נקודה $c\in(a,b)$ המקיימת $f'(c)=0$.
<u>הוכחה:</u> f רציפה בקטע $[a,b]$ ולכן ע"פ משפט ויירשטראס יש לה מקסימום ומינימום בקטע. נסמן $M=\max f$ ו-$m=\min f$. נפריד למקרים.

1. נניח $m=M$: אז f פונקציה קבועה ולכל $c\in(a,b)$ מתקיים $f'(c)=0$.
2. נניח $m<M$: ישנן נקודות $c,d\in[a,b]$ המקיימות $f(c)=m$, $f(d)=M$. נראה כי לפחות אחת מהן שייכת גם לקטע (a,b).

ואז נקבל שנקודה זו היא נקודת קיצון מקומית בה הפונקציה גזירה וע"פ משפט פרמה הנגזרת מתאפסת בנקודה זו.
אם $c\in(a,b)$ אז סיימנו.
אם לא, נניח בה"כ $c=a$. אז בפרט $f(a)=m$. מהנתון $f(a)=f(b)$ אז גם $f(b)=m$. ולכן $d\in(a,b)$ כי $f(d)=M\neq m=f(a)=f(b)$. ■

11.1.3 משפט לגרנז'

<u>טענה:</u> נניח f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
<u>הערה:</u> הטענה כי אם הנגזרת אי שלילית הפונקציה מונוטונית עולה נובעת ממשפט לגרנז'. באנגלית משפט זה מכונה mean value theorem.
<u>הוכחה:</u> נגדיר פונקציה $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
F רציפה וגזירה באותם התחומים כמו f, כהפרש פונקציות רציפות.
נשים לב - $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ובנוסף $F(a)=F(b)=0$.
ע"פ משפט רול יש $c\in(a,b)$ בו $F'(c)=0$ - בנקודה זו $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

<u>דוגמה:</u> נראה כי לפולינום $f(x)=x^7+4x+1$ יש שורש ממשי יחיד. f פולינום ממעלה אי זוגית ולכן יש לו לפחות שורש אחד. נניח בשלילה כי יש לו 2 שורשים שונים $x_1<x_2$. אז בפרט $f(x_1)=f(x_2)=0$. f גזירה ב-$[x_1,x_2]$ ולכן לפי משפט רול יש $c\in(x_1,x_2)$ בה $f'(c)=0$ אבל זו סתירה כי $f'(x)=7x^6+4$ ביטוי שלא מתאפס באף נקודה.

נראה כי לכל $x>0$ מתקיים $e^x>1+x$ או באופן שקול $\frac{e^x-e^0}{x-0}>1$. e^x גזירה ב$[0,x_0]$ ולכן לפי משפט לגרנז' יש נקודה $c\in(0,x_0)$ כך ש$\frac{e^{x_0}-1}{x_0}=f'(c)=e^c>1$.

11.1.4 קצת ליפשיץ למזל טוב

<u>טענה:</u> נניח f גזירה בקטע I. אז f פונקציית ליפשיץ ב-I אם ורק אם f' חסומה ב-I.
<u>הוכחה:</u> נניח כי f פונקציית ליפשיץ ב-I ויהי $M>0$ הקבוע מההגדרה. נראה כי לכל $x_0\in I$ מתקיים $|f'(x_0)|\le M$. וכך נקבל שf' חסומה. יהי $x_0\in I$ אז לכל $x\in I$ $x\neq x_0$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|\le M\cdot|x-x_0|$ ולכן $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le M$. אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $|f'(x)|\le M$.

כיוון שני. f' חסומה בI. כלומר $\exists\,(M>0)\,\forall\,(x\in I)\,[|f(x)|\le M]$. נראה כי f פונקציית ליפשיץ עם הקבוע M. אכן יהיו $x,y\in I$ נקודות שונות לה"כ $x<y$. אז f גזירה ב$[x,y]$ ולכן לפי משפט לגרנז' יש נקודה $x<c<y$ שמקיימת $f(y)-f(x)=f'(c)\,(y-x)$.
ניקח ערך מוחלט ונקבל $|f(y)-f(x)|=|f'(x)|\,|y-x|\le M\,|y-x|$.

<u>מסקנה:</u> f גזירה בקטע I ונהגזרת f' חסומה - אז f רציפה במ"ש ב-I.
<u>הערה:</u> זה שפונקציה רציפה במ"ש ב-I לא גורר שהנגזרת חסומה ב-I אפילו אם f' קיימת.

11.1.5 משפט קושי

<u>טענה:</u> נניח f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$. גזירות ב-(a,b) ובנוסף $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
<u>הערה:</u> נשים לב כי משפט לגרנז' הוא המקרה הפרטי עם $g(x)=x$.
<u>הוכחה:</u> נשים לב כי $g(b)-g(a)\neq 0$ כי אחרת לפי משפט רול הייתה נקודה $c\in(a,b)$ בה $g'(c)=0$.
נגדיר פונקציה $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b).
נשים לב - מתקיים $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ ובנוסף $F(a)=F(b)=0$.
לפי משפט רול יש $c\in(a,b)$ המקיימת $F'(c)=0$ ועבורה $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. ■

11.1.6 למה - נגזרת חד צדדית

<u>טענה:</u> נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע וגזירה בקטע $(a,b]$ ובנוסף הגבול $L=\lim_{x\to a^+}f'(x)$ קיים וסופי. אז f גזירה מימין בנקודה a ומתקיים $f'_+(a)=L$.
<u>הסבר:</u> אם הגבול מימין של הנגזרת קיים וסופי אז מתקיים $L=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
<u>הוכחה:</u> נוכיח בעזרת הגדרת הגבול של היינה. תהי x_n השואפת ל-a ואיבריה גדולים מ-a. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים שf רציפה ב$[a,x_n]$ וגזירה ב(a,x_n). ולכן לפי משפט לגרנז' יש נקודה $a<c_n<x_n$ שעבורה $f'(c_n)=\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$.
ע"פ משפט הסנדוויץ' $c_n\to a$. ובגלל שמתקיים $\lim_{x\to a^+}f'(x)=L$ נסיק כי $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=f'(c_n)\to L$. ■
באופן דומה מוכיחים עבור גבול משמאל.

11.1.7 נק אי רציפות של נגזרת

מסקנה: נניח f גזירה בקטע $[a,b)$ ותהי $x_0 \in (a,b)$. אז x_0 לא יכולה להיות נקודת אי רציפות סליקה של f' ולא נקודת אי רציפות מהסוג הראשון.
הוכחה: נניח בשלילה כי x_0 נקודת אי רציפות סליקה. אז בפרט הגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f'(x), \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ סופיים ושווים זה לזה. לפי, הלמה בהכרח: $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, וגם $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.התקבל $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ בסתירה לכך שהנקודה נק אי רציפות סליקה.

נניח בשלילה כי x_0 נק אי רציפות מהסוג ראשון. אז הגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f'(x), \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ קיימים סופיים אך שונים זה מזה. אבל זו סתירה כי לפי הלמה אם הגבולות קיימים וסופיים אז הם שניהם בהכרח שווים ל$f'(x_0)$. $\blacksquare$

מסקנה: לנגזרת יכולות להיות רק נקודות אי רציפות מסוג שני.
דוגמה: לא קיימת אף פונקציה גזירה f בקטע $(0,2)$ עם נגזרת $f'(x) = \lfloor x \rfloor$ כי ל$f'(x)$ זו נק אי רציפות מסוג ראשון.

11.1.8 משפט דרבו

טענה: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח y_0 מספר בין $f'_+(a)$ ו$f'_-(b)$. אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$ המקיימת $f'(c) = y_0$.
הוכחה: ראשית נוכיח מקרה פרטי (בדומה להוכחת משפט ערך הביניים): אם $f'(a) > 0$ ו$f'(b) < 0$ או להפך אז יש נקודה $c \in (a,b)$ המקיימת $f'(c) = 0$. נניח לה"כ כי $f'(a) > 0$ ו$f'(b) < 0$.
f רציפה (כי היא גזירה) ב$[a,b]$ ולכן יש לה מקסימום ב$[a,b]$ ע"פ ויירשטראס. תהי $c \in [a,b]$ נקודה המקיימת $f(c) = \max f$. נראה כי $c \in (a,b)$. אם נראה זאת אז נקבל שזו נקודת קיצון מקומית ולכן לפי משפט פרמה $f'(c) = 0$.
נניח בשלילה כי $c = a$. אז a מקסימום בקטע כלומר לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \le f(a)$.
ומכאן ש$0 \ge \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (שלילי חלקי חיובי). אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $f'(a) \le 0$ בסתירה להנחה.
נניח בשלילה $c = b$ ונקבל בדומה $0 \le \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ ולכן $f'(b) \ge 0$ בסתירה להנחה. $\blacksquare$

11.1.9 נגזרת פונקציה קבועה

טענה: יהי Iקטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. אז f קבועה אמ"מ f גזירה ו-$f'(x) = 0$ לכל $x \in I$.
הוכחה: אם f קבועה אז ראינו כי f גזירה ו$f' = 0$ בכל נקודה בI.
בכיוון השני, נניח f גזירה בI, $f' = 0$ בכל נקודה ונראה כי f קבועה. יהיו $x, y \in I$ כאשר $x < y$. f גזירה ב$[x,y]$ ולכן לפי משפט לגרנז' יש נקודה $c \in (x,y)$ המקיימת:
$0 = f(y) - f(x) = f'(x)\,(y-x) = 0\,(y-x) = 0$ ולכן $f(y) = f(x)$. $\blacksquare$

הערה: הטענה לא נכונה אם I לא קטע. למשל $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ ו-$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 2 & x \in (2,3) \end{cases}$ - הנגזרת 0 בכל נקודה אך הפונקציה אינה קבועה.

11.1.10 קשר פונקציות עם נגזרת זהה

מסקנה: יהי I קטע. נניח f, g שתי פונקציות גזירות $I \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f' = g'$. אז יש קבוע $c \in \mathbb{R}$ המקיימם $f(x) = g(x) + c$ לכל $x \in I$.
הוכחה: נגדיר $h : I \to \mathbb{R}$ ע"י $h = f - g$. אז h גזירה בI בתור הפרש פונקציות גזירות ומתקיים $h' = f' - g' = 0$. מהטענה הקודמת h קבועה, כלומר קיים $c \in \mathbb{R}$ המקיים $h(x) = c$ לכל $x \in I$. ואז מתקבל $f(x) = g(x) + c$ לכל $x \in I$. $\blacksquare$

11.1.11 נגזרת פונקציה מונוטונית

טענה: תהי $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. אז מתקיים:

1. f מונוטונית עולה ב-(a,b) אם ורק אם $f' \ge 0$ בקטע.
2. f מונוטונית יורדת ב-(a,b) אם ורק אם $f' \le 0$ בקטע.

הוכחה: 1. נניח כי f מונוטונית ונראה כי הנגזרת אי שלילית.
תהי $x_0 \in (a,b)$ ונראה כי $f'(x_0) \ge 0$.
ממונוטוניות לכל $x_0 < x < b$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$ ולכן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$.

אי שוויון חלש נשמר בגבול ולכן $f'(x_0) \geq 0$.

בכיוון השני, נניח $f' \geq 0$ בקטע. יהיו $x, y \in (a,b)$ ו-$x < y$ ונראה כי $f(x) \leq f(y)$.
f גזירה בקטע ולכן לפי משפט לגרנז' יש $c \in (x,y)$ המקיימת $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y-x) \geq 0$ ולכן $f(y) \geq f(x)$. ■

טענה: נניח $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה. $f' > 0$ בקטע. אז f עולה ממש בקטע.
הוכחה: זהה להוכחה הקודמת. ■
הערה: הכיוון ההפוך אינו נכון. f עולה ממש $\not\Rightarrow f' > 0$.
לדוגמה $f(x) = x^3$ מונוטונית עולה ממש אך $f'(0) = 0$.

11.1.12 נקודה קריטית

הגדרה: נאמר כי x_o נקודה קריטית (או חשודה לקיצון) של f אם f לא גזירה בx_0 או גזירה בx_0 ומתקיים $f'(x_0) = 0$.
* לפי משפט פרמה, כל נקודת קיצון מקומית היא נקודה קריטית.

לדוגמה,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{5/3} + 5x^{2/3}$. f גזירה בכל נקודה שונה מ0, ומתקיים $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3}$. נשווה לאפס ונקבל $x = -2$ נקודה קריטית.

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה המנוקבת של הנקודה x_0. נאמר כי f מחליפה סימן ממינוס לפלוס בנקודה x_0 אם קיים $\delta > 0$ כך ש

$$\begin{aligned} &\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) < 0 \\ &\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) > 0 \end{aligned}$$

ובדומה מגדירים f מחליפה מפלוס למינוס.

11.1.13 מבחן הנגזרת הראשונה

תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה x_0 וגזירה בסביבה המנוקבת. נניח כי x_0 קריטית. אז:

1. אם f' מחליפה סימן ממינוס לפלוס בx_0 אז x_0 מינימום מקומי של f.
2. אם f' מחליפה סימן מפלוס למינוס בx_0 אז x_0 מקסימום מקומי של f.
3. אם f' שומרת סימן בx_0 אז הסביבה המנוקבת של x_0 חיובית או שלילית בכל הקטע אז x_0 אינה נקודת קיצון מקומית של f.

הוכחה: 1. נניח f' מחליפה סימן ממינוס לפלוס בx_0 . אז קיים $\delta > 0$ כך ש

$$\begin{aligned} &\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0 \\ &\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0 \end{aligned}$$

תהי $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. f רציפה $[x, x_0]$ וגזירה ב(x, x_0).
לכן לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (x, x_0)$ המקיים $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) < 0$. ואז $f(x) > f(x_0)$.
ובאופן דומה, תהי $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.
לכן לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (x_0, x)$ המקיים $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0$. ואז $f(x) > f(x_0)$.
קיבלנו $f(x) \geq f(x_0)$ לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ולכן x_0 נקודת מינימום מקומי. ■

11.1.14 מבחן הנגזרת השנייה

תהי x_0 נקודה קריטית של f ונניח כי f גזירה פעמיים בנקודה.

1. אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 נקודת מקסימום מקומית של f.
2. אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 נקודת מינימום מקומית של f.
3. אם $f''(x_0)$ עניין פתוח ($x_0 = 0$ מינימום של x^4 מקסימום של $-x^4$ ואינה קיצון של x^3).

הוכחה: נוכיח את 2. נניח ש $f''(x_0) > 0$ ונוכיח ש x_0 מינימום מקומי של f.
הנחנו $f'(x_0) = 0$. לכן:

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

כלומר קיים תחום $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ כך ש $\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$.
ואז לכל $x_0 < x < x_0 + \delta$ מתקיים $f'(x) = \frac{f'(x)}{x-x_0}(x - x_0) > 0$
ולכל $x_0 - \delta < x < x_0$ מתקיים $f'(x) = \frac{f'(x)}{x-x_0}(x - x_0) < 0$
אז f' מחליפה סימן ממינוס לפלוס בx_0 ולכן x_0 נקודת מינימום מקומית של f. ■

11.2 כלל להופיטל

11.2.1 גבול לנקודה

טענה: נניח f, g פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה a. נניח כי מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. יש סביבה מנוקבת של הנקודה a שבה g' לא מתאפסת
3. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ במובן רחב

אז $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה L.

הוכחה: נניח f, g גזירות בסביבה המנוקבת $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$.
ונניח כי g' לא מתאפסת בסביבה זו. נגדיר פונקציות חדשות $F, G : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

מתקיים $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ולכן F, G רציפות בנקודה a.
נראה כי $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ובאופן דומה מוכיחים עבור גבול משמאל.
נשתמש בהגדרת הגבול של היינה. תהי x_n השואפת ל-a שאיבריה גדולים מ-a.
מתקיים:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{F(x_n)}{G(x_n)} = \frac{F(x_n) - F(a)}{G(x_n) - F(a)}$$

F, G רציפות בקטע הסגור $[a, x_n]$ וגזירות ב(a, x_n) ובנוסף $G'(x) = g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, x_n)$.
לכן לפי משפט קושי קיימת נקודה $c \in (a, x_n)$ עבורה:

$$\frac{F(x_n) - F(a)}{G(x_n) - F(a)} = \frac{F'(c_n)}{G'(c_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$c_n \to a$ ע"פ משפט הסנדוויץ'. מתקיים $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, ולכן:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to L$$

11.2.2 גבול לאינסוף

מסקנה: f,g גזירות בקטע (M,∞) כאשר $M\in\mathbb{R}$. נניח:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$
2. g' לא מתאפסת בקטע (M,∞)
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ במובן רחב

אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה L.

הוכחה: ע"פ החלפת משתנים $t=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\text{,,}\frac{0}{0}\text{''}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

11.2.3 אינסוף חלקי אינסוף

1. $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$
2. יש סביבה מנוקבת של הנקודה a שבה g' לא מתאפסת
3. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ במובן רחב

אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל-L.

חלק V
תרגול

12 שאלה 1

א. נתונה פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). בנוסף נתון כי $0<a<b$ וכי $\frac{a^2}{b^2}=\frac{f(b)}{f(a)}$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-$f(c)=-\frac{c}{2}f'(c)$.

הוכחה:

נגדיר פונקציית עזר $g(x)=x^2f(x)$. ע"פ הנתון מתקיים $g(a)=a^2f(a)=b^2f(b)=g(b)$.
$g(x)$ רציפה ב$[a,b]$ כמכפלת רציפות וגזירה ב(a,b) כמכפלת גזירות.
ע"פ משפט רול קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-$g'(c)=2cf(c)+c^2f'(c)=0$. כלומר מיד מתקבל $(x\neq 0)$ $f(c)=-\frac{2}{c}f'(c)$.

ב. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה, גזירה פעמיים ובעלת מינימום גלובלי. הוכיחו כי יש נקודה $b\in\mathbb{R}$ עבורה $f''(b)=0$.

הוכחה:

נסמן ב-$f(a)=m$ את המינימום הגלובלי. בפרט, m מינימום מקומי (עם כל סביבת δ).
f רציפה ב-$[a,x]$ וגזירה ב-(a,x) ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c\in(a,x)$ כך ש$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$.
אם $f'(c)=0$, לפי פרמה $f'(a)=0$ (f' רציפה כיוון שגזירה) ואז לפי רול קיימת $b\in(a,x)$ כך ש$f''(b)=0$.
אם $f'(c)>0$, נניח בשלילה כי לכל $x\geq c$ מתקיים $f'(x)\geq f'(c)$.
אבל אז $L=\lim_{x\to\infty}f'(x)\geq f'(c)>0$. כלומר, $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(M>0)\,\forall(x\geq M)\,(|f(x)-L|<\varepsilon)$.
לפי לגרנז' קיימת $d\in(M,x)$ כך ש$f'(d)=\frac{f(x)-f(M)}{x-M}$.
ניתן לבחור ε כך ש-$L-\varepsilon>0$, ואז:

$$f(x)=f'(d)(x-M)+f(M)\geq(L-\varepsilon)(x-M)+f(M)\to\infty$$

בסתירה לכך שהפונקציה חסומה.
כלומר אכן מתקיים עבור x כלשהו $f'(x)<f'(c)$. $0<f''(c)$ ובין x ו-c $f''>0$ אז לפי דרבו קיים b כך ש$f''(b)=0$.