יחסות פרטית

מחברת - אילאי וישנבסקי שלוש

30 בספטמבר 2024

תוכן העניינים

1 מבוא למבוא

1.1 יחסות פרטית

יחסות פרטית היא תורה שמתארת תנועה במהירויות יחסותיות : $v \to c$

1. טרנספורמציה בין מערכות יחס אינריאליות בעלות מהירות יחסית קבועה (שמחליפה טרנס' גלילי)
2. הנחות היסוד שלה נחשבות כאקסיומות של הפיזיקה
3. מאחדת את המרחב והזמן
4. כל צופה מסכים על אותה הפיזיקה

בקורס זה - מכניקה יחסותית (קינמטיקה ודינמיקה).

1.2 גלים בקטנה

משוואת הגל הינה:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\psi = 0$$

במימד אחד ניתן למצוא אותה באמצעות ניתוח (של קלאסית 1) של מיתר המתואר ע"י המשוואה $y(x,t)$ (לוקחים מקטע אינפי' ומסתכלים על הכוחות שפועלים עליו).

פתרון גל מישורי למשוואה דיפרנציאלית זו הינו:

$$\psi(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

כאשר ω תדירות זוויתית, k מספר הגל, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ זמן מחזור, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ אורך גל.
בהצבת הגל המישורי במשוואת הגל מתקבל הקשר

$$c = \lambda f \iff \lambda = cT$$

2 מבוא

2.1 יחסות גליליי

על פי גליליי, טרנספורמציית המעבר בין מערכות יחוס הנעות במהירות יחסית $u\hat{x}$ היא כזו:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

או באופן כללי כאשר המהירות היא $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

והטרנס' ההפוכה כמובן היא $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t$.

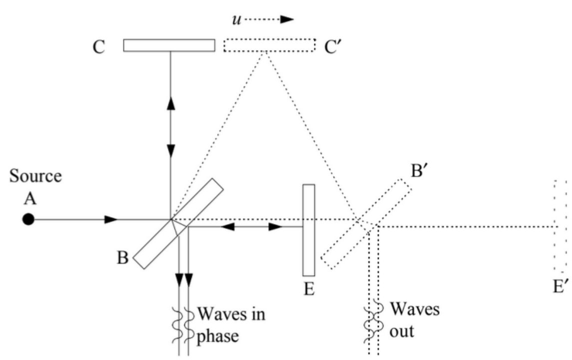
2.2 אלקטרומגנטיות והאתר

הבעיה הייתה שמשוואות מאקסוול **אינן** אינווריאנטיות תחת טרנספורמציית גליליי (ראו נספח - 12.2).
משוואות מקסוול נותנות כפתרון את משוואת גל (נראה זאת לקראת סוף קלאסית 2), מכאן נסיק שאור הוא גל. ע"פ מקסוול מהירות האור קבועה, ללא תלות במהירות מקור האור - כמו קול.
מדמיון זה בין הקול והאור הגיעו למסקנה כי קיים תווך בלתי נראה בו נע האור (גל אלקטרומגנטי), הנקרא "האתר".

2.3 ניסוי מייקלסון מורלי

אם קיים תווך כזה שביחס אליו מהירות האור קבועה, נצפה שמהירות קרן אור (על כדה"א) שכיוונה בכיוון תנועת כדה"א תמדד בתור נמוכה יותר מאשר מהירות קרן אור בכיוון המאונך לכיוון תנועת כדה"א.

במטרה למדוד בדיוק את אפקט זה, בוצע ניסוי מייקלסון מורלי. בניסוי זה אינטרפרומטר הנע במהירות u כבאיור.



המערכת: קרני האור יוצאות מA, מתפצלות בB לכיוון C, E וממראות אלה חוזרות ומתאחדות בB כבאיור.
מרחק B מכל אחת מהמראות E, B הוא L.
כל המערכת נעה במהירות u כבאיור. נבצע ניתוח של המערכת.

זרוע E
נסמן את הזמן שלוקח לאור לנוע מ$E \rightarrow B$ בתור t_1 :

$$L + ut_1 = ct_1$$

נסמן את הזמן שלוקח לאור לנוע *בחזרה* $B \to E$ בתור t_2 :

$$L - ut_2 = ct_2$$

ניתן לבודד $t_{1,}t_2$ מהמשוואות ולקבל :

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2} = \frac{2L/c}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

זרוע C
נסמן את הזמן שלוקח לאור לנוע מ $B \to C$ בתור t_3 ולפי פיתגורס:

$$(ut_3)^2 + L^2 = (ct_3)^2$$

ניתן לבודד את t_3 וכיוון שהזמן אל C והחזרה ממנו זהה נקבל

$$T_2 = 2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

כלומר התקבל זמן ההחזרה מ2 הזרועות שונה $\Delta T = T_2 - T_1 \neq 0$. על כן אמור להימדד הפרש פאזה.

השוואה ותוצאת הניסוי
מביצוע ניסוי זה עם u בכיוונים שונים ומדידת הפרש הזמנים באמצעות האינטרפורמטר (בגלל ההבדל בין הזמנים נוצרת התאבכות בין הגלים) לכאורה ניתן למדוד את u מהירות כדה"א ביחס לאתר.
אבל! התקבל שבכל כיוון ההתאבכות הייתה זהה, כלומר $\Delta T = 0$ ללא תלות באוריינטציית המערכת .
לא היה ניתן למצוא את מהירות כדה"א באתר.
מסקנות הניסוי הן ש

1. **c קבוע בכל מערכת ייחוס**
2. **האתר אינו קיים**
3. **אין מערכת ייחוס אבסולוטית (בניגוד להצעת האתר)**
4. **גלים אלקטרומגנטים (אור) יכול לנוע גם בריק.**

הערה: למעשה

2.4 אברצייה

.....

2.5 אפקט דופלר

.....

3 טרנספורמציית לורנץ והנחות היסוד של היחסות

3.1 הנחות היסוד

הנחות היסוד של תורת היחסות הן:

1. עקרון היחסות - חוקי הפיזיקה זהים בכל מערכת אינרציאלית.
באופן שקול, אין ניסוי שניתן לבצע כדי לגלות אם מערכת ייחוס נמצאת במנוחה.

2. אינרוויאנטיות מהירות האור - מהירות האור זהה בכל מערכת ייחוס.
או באופן יותר מדויק, קיימת מהירות סופית שהינה זהה בכל מערכת ייחוס.

3.2 הטרנספורמצייה

מתוך 2 הנחות יסוד אלה ניתן לפתח טרנספורמציה חדשה בין מערכות יחוס, המחליפה את טרנספורמציית גלילי - טרנספורמציית לורנץ.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - vx/c^2\right) \end{aligned}$$

כאשר

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

(אגב, $c = 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$)
יש לשים לב גם שγ הוא היחס בין הזמן שלקח לאור לנוע בכל אחת מהזרועות בניסוי מייקלסון מורלי.

ניתן לכתוב את טרנס' לורנץ כמטריצה

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

כאשר פה $x_0 \equiv ct$.

תחת טרנספורמציית לורנץ משוואות מקסוול הן אינווריאנטיות כנדרש!
כאשר $c >> v$ מתקבל $\beta \to 0$ ו-$\gamma \to 1$, כלומר מתקבלת טרנס' גליליי $x' = x - vt$ ו$t' = t$.

3.3 הטרנספורמצייה ההופכית

ניתן לקבל את הטרנס' ההופכית באמצעות $v \to -v$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

כאשר $x_0 \equiv ct$, $x_1 \equiv x$.

4 עוד על טרנספורמציית לורנץ

4.1 פיתוח

ניקח מקור אור מסוים ונקבע בו את ראשית מערכת S. האור יוצא מהמקור רדיאלית החוצה. כלומר- $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$.
תהי מערכת S' הנעה במהירות $v\hat{x}$. ברגע $t=t'=0$ מתקיים $x=x'$, $y=y'$ ו-$z=z'$.
כיוון שמהירות האור זהה מכל מערכת יחוס, מתקיים גם: $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$.
מתקיים $y'=y$ ו $z'=z$ בכל זמן, ועל כן (בגלל שהמרחב-זמן הומוגני ואיזוטרופי?)

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$$

נניח שהטרנספורמציה לינארית:

$$\begin{aligned} x' &= k\left(x-vt\right) \\ t' &= a\left(t-bx\right) \end{aligned}$$

נציב זאת בשוויון $x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$ ולאחר אלגברה נקבל את טרנס' לורנץ.

4.2 הכללה לתנועה בכיוון כללי

נניח כעת שהצירים בS ו-S' עדיין מקבילים אך כעת כיוון התנועה $\hat{v}$ שרירותי.
הרכיב של $\vec{x}$ (מיקום האירוע במערכת S) המקביל והמאונך לכיוון התנועה הינו

$$\vec{x}_{\parallel}=x_{\parallel}\hat{v}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v^2}\vec{v}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\beta^2}\vec{\beta}$$

$$\vec{x}_{\perp}=\vec{x}-\vec{x}_{\parallel}$$

טרנספורמציית לורנץ עבור רכיב זה היא בדומה למקודם.

$$\begin{aligned} x'_{\parallel} &= \gamma\left(x_{\parallel}-\beta x_0\right) \\ x'_{\perp} &= x_{\perp} \end{aligned}$$

כך נקבל:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x}'_{\parallel}+\vec{x}'_{\perp} \\ &=\gamma\left(x_{\parallel}-\beta x_0\right)\hat{v}+\left(\vec{x}-x_{\parallel}\hat{v}\right) \\ &=\gamma\left(\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\beta^2}-x_0\right)\vec{\beta}+\vec{x}-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\beta^2}\vec{\beta} \\ &=\vec{x}+\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}-\gamma x_0\vec{\beta} \end{aligned}$$

ובאופן דומה עבור רכיב הזמן $x_0=ct$.

$$x_0' = \gamma\left(x_0 - \beta x_{\parallel}\right) = \gamma\left(x_0 - \beta\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\beta}\right)$$
$$=\gamma\left(x_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)$$

כלומר התוצאה:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{x}' = \vec{x} + \tfrac{(\gamma-1)}{\beta^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta} - \gamma x_0\vec{\beta}\\ x_0' = \gamma\left(x_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}\right)\end{gathered}}$$

4.3 הניסוח ההיפרבולי

ניתן לבצע פרמטריזציה לטרנספורמצייה.

$$\beta = \tanh\zeta$$
$$\gamma = \cosh\zeta$$

כאשר ζ נקרא $boost\ parameter$.
תחת פרמטריזציה זו ניתן לכתוב:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

מאוד מזכיר סיבוב במישור, רק עם פונקציות היפרבוליות.
אין זה מקרי, אלא תוצאה של הגודל האינווריאנטי "האינטרוול":

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

יש פה קשר מתמטי עמוק לגיאומטריה היפרבולית (כאשר משמיטים את אקסיומת הקווים המקבילים האוקלידית מקבלים 2 סוגי גאומטריה - היפרבולית וכדורית).

מאוד שימושי לכתוב $\beta = \tanh\theta$ ($\theta = \zeta$, רק סימון שונה) בעיקר במקרים שבהם אנו משתמשים בטרנס' לורנץ באופן חוזר. בהמשך נראה שחוק חיבור המהירויות החדש (פעם אם היו לנו מערכות O, O' במהירות יחסית v, וגוף שנע לעומתן במהירות u, u' היינו מקבלים את הקשר $u' = u - v$. ביחסות נקבל חוק חדש שמחליף את חוק זה) מתנהג בדיוק לפי הזהות של סכום זוויות:

$$\tanh(\theta+\phi) = \frac{\tanh\theta + \tanh\phi}{1 + \tanh\theta\cdot\tanh\phi}$$

4.4 הסבר ניסוי מייקלסון מורלי

נסביר את תוצאת ניסוי מייקלסון מורלי באמצעות טרנס' לורנץ.
בניסוי, במערכת O' (מערכת מנוחת מערכת הניסוי, שנעה ביחס לכדה"א):

4.4.1 התקצרות אורך וסימולטניות

נגדיר $x_1'=0$ ו-$x_2'=L'$. בזמן $t'=0$ אורך זרוע האינטרפרומטר היא $x_2'-x_1'=L'$.
יש לשים לב שהמדידות סימולטניות בO' כלומר $t_1'=t_2'=0$.

נציב זאת בטרנס' ההפוכה ונקבל:

$$x_1=\gamma\left(x_1'+vt_1'\right)=\gamma\left(0+0\right)=0$$
$$t_1=\gamma\left(t_1'+vx_1'/c^2\right)=\gamma\left(0+0\right)=0$$

$$x_2=\gamma\left(x_2'+vt_2'\right)=\gamma L'$$
$$t_2=\gamma\left(t_2'+vx_2'/c^2\right)=\frac{\gamma\beta}{c}L'$$

המסקנה: אירועים סימולטנים בO' *אינם* סימולטנים בO.

כעת צופה O יכול לחשב את אורך המוט. אך כיוון שהמדידה אינה סימולטנית במערכת O עליו להחסיר את המרחק שעברה מערכת O' בין 2 מדידות אלה.

$$L=x_2-x_1-v\left(t_2-t_1\right)=\gamma L'\left(1-\beta^2\right)$$

$$\boxed{L=\frac{L'}{\gamma}}$$

במערכת O , מוט שנע עם O' נמדד כקצר יותר. זוהי התקצרות אורך.

4.4.2 הזמן בהלוך

ב$t_1'=0$ קרן אור עוברת בנקודה B (ראשית הצירים, נק פיצול האור).
נסמן $t_3'=t_2'=L'/c$ הזמן שבו פוגעת קרן האור בE או בC (זמן זה זהה במערכת O').

בנקודה B:

$$x_1=\gamma\left(x_1'+vt_1'\right)=\gamma\left(0+0\right)=0$$
$$y_1=y_1'=0$$
$$t_1=\gamma\left(t_1'+vx_1'/c^2\right)=\gamma\left(0+0\right)=0$$

בנקודה C (הזרוע האנכית):

$$x_2=\gamma\left(x_2'+vt_2'\right)=\gamma\left(0+v\frac{L'}{c}\right)=\gamma\beta L'$$
$$y_2=y_2'=L'$$
$$t_2=\gamma\left(t_2'+vx_2'/c^2\right)=\gamma\left(\frac{L'}{c}+0\right)=\gamma L'/c$$

בנקודה E (הזרוע האופקית, מקבילה לכיוון תנועת O'):

$$
\begin{gathered}
x_3=\gamma\left(x_3'+vt_3'\right)=\gamma\left(L'+v\frac{L'}{c}\right)=\gamma L'\left(1+\beta\right)\\
y_3=y_3'=0\\
t_3=\gamma\left(t_3'+vx_3'/c^2\right)=\gamma\left(\frac{L'}{c}+vL'/c^2\right)=\frac{\gamma L'}{c}\left(1+\beta\right)
\end{gathered}
$$

כפי שניתן לראות $t_2\neq t_3$ כלומר האירועים אינם סימולטנים ב-O.

4.4.3 הזמן בחזור

במערכת O' האור חוזר לB ב-$t_4'=t_5'=\frac{2L'}{c}$. לאחר שחזרו $x_4'=x_5'=0$.

$$
\begin{gathered}
t_4=\gamma\left(t_4'+vx_4'/c^2\right)=\gamma\left(\frac{2L'}{c}+0\right)=2\gamma L/c\\
t_5=\gamma\left(t_5'+vx_5'/c^2\right)=\gamma\left(\frac{2L'}{c}+0\right)=2\gamma L'/c
\end{gathered}
$$

יאי, הזמנים זהים כפי שהניסוי הראה. (בתכלס רק שלב ג' היה רלוונטי כדי להבין את הניסוי, אבל למדנו גם מהשאר..)

5 ייצוג גרפי

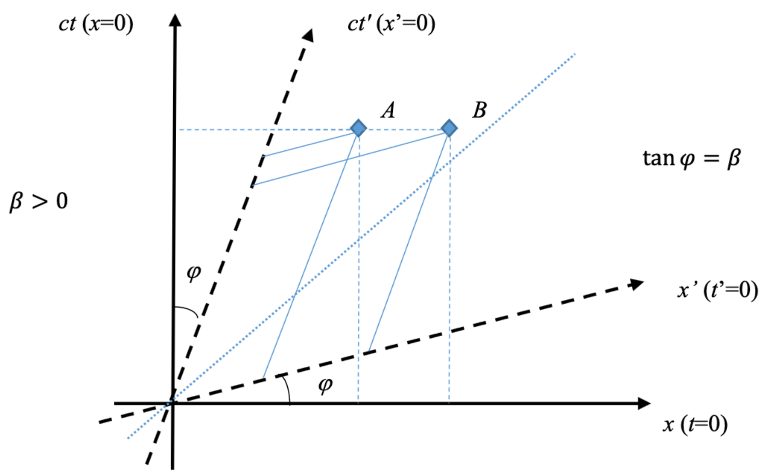
5.1 דיאגרמת מרחב זמן

ניתן לצייר דיאגרמת זמן כך שהציר האנכי הוא ct והציר האופקי x (בתנועה במימד אחד).
ואז על אותו הגרף הצירים ct' ו-x' יהיו מתוארים ע"י $x' = 0$ ו-$ct' = 0$ בהתאמה (בדומה לכך שציר x בדרך כלל מתואר ע"י $y = 0$).
אם נשתמש בטרנס לורנץ נקבל:

$$0 = x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \Rightarrow ct' \;\; axis : ct = \frac{1}{\beta} \cdot x$$
$$0 = ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \Rightarrow x' \;\; axis : ct = \beta \cdot x$$

בדיאגרמה כזו ("דיאגרמת מרחב זמן") מאורעות באותו מקום במערכת מסוימת הם מאורעות על אותו הקו המקביל לציר ct של מערכת זו (ובדומה עבור מאורעות סימולטנים).

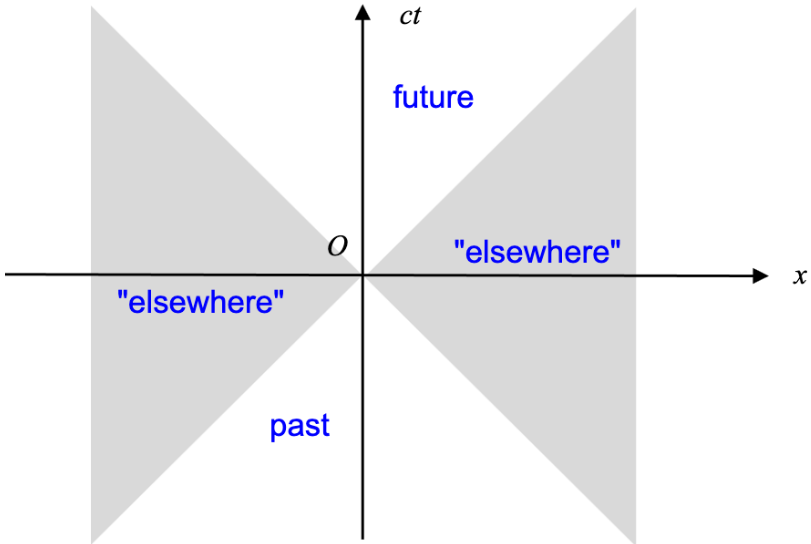
לדוגמה, אובדון הסימולטניות ניתן לייצוג כך על גרף:



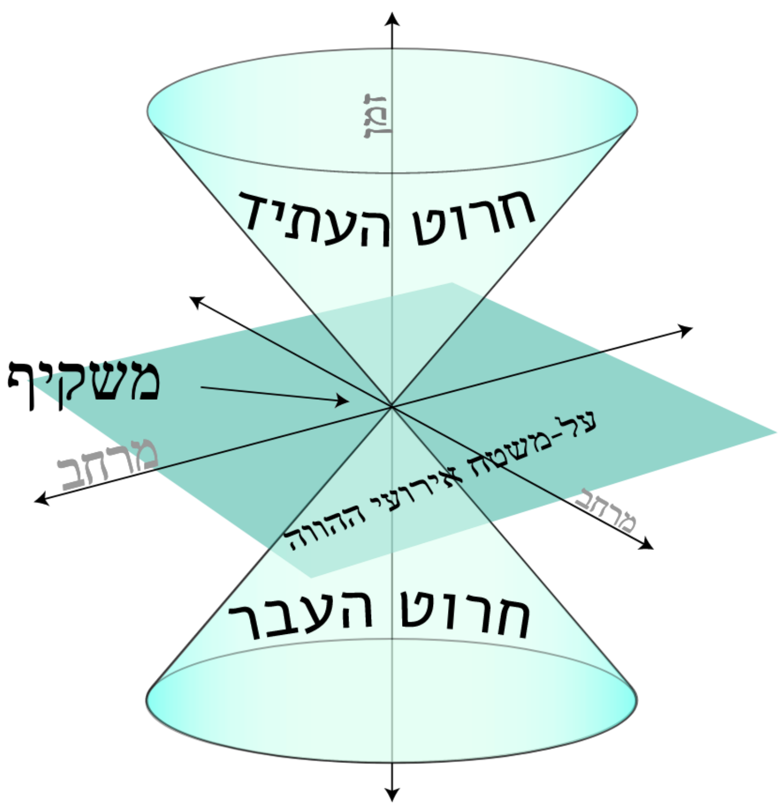
יש לשים לב שבגרף זה זווית 45 מעלות ("$y = x$") מתארת תנועה במהירות האור, $x = ct$.
בדיאגרמה זו טרנספורמציית לורנץ מתארת סיבוב כלשהו של העקומה.

5.2 חרוט אור

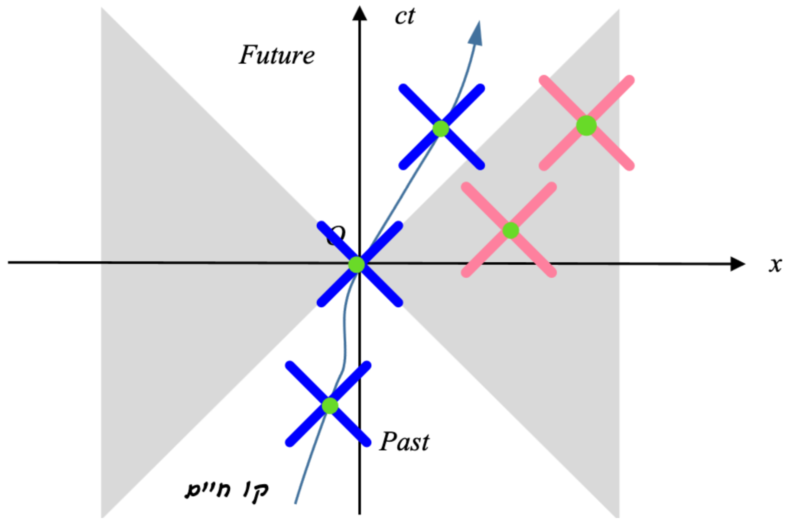
קונוס/חרוט אור הוא המשטח המתאר את תנועתה בזמן של קרן אור במרחב זמן.
עבור צופה שנמצא בראשית, האור/מידע היחיד שיכול להגיע אליו או שיכול להגיע ממנו הוא אך ורק אור/מידע בתוך החרוט.
במילים אחרות, לא ייתכן שצופה מחוץ לחרוט יתקשר עם הצופה בראשית כיוון שזה ידרוש תנועה במהירות גדולה ממהירות האור.



לא ייתכן קשר סיבתי (סיבה ותוצאה) עבור אירוע שלא נמצא בקונוס האור.
משטח הקונוס מוגדר ע"י $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$.
ב2 מימדים (כלומר x,y ומימד זמן t):



ניתן לסרטט מסלול של אובייקט ("קו חיים") כך:



ct
Future
O
x
Past
קו חיים

6 קשרים בין מאורעות (האינטרוול וקשר סיבתי)

6.1 האינטרוול

6.1.1 הגדרה

ראינו כי הגודל $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ אינווריאנטי תחת טרנס' לורנץ כיוון שמהירות האור זהה בכל מערכת ייחוס (ואף השתמשנו בתכונה זו כדי להגדיר את טרנס' לורנץ).
על כן גם הגודל הבא, אשר נקרא האינטרוול, הינו אינווריאנטי:

$$s_{12}^2 \equiv c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right|^2$$

נראה זאת מפורשות.
* גודל זה אינווריאנטי רק ביחסות פרטית במרחב-זמן שטוח (לא מעוקם) הנקרא מרחב מינקובסקי. ביחסות כללית האינטרוול מוגדל באופן יותר כללי (מפתיע נכון?).

6.1.2 הוכחת אינווריאנטיות האינטרוול

$${s_{12}^2}' = c^2\left(t_1' - t_2'\right)^2 - \left(x_1' - x_2'\right)^2 - \left(y_1' - y_2'\right)^2 - \left(z_1' - z_2'\right)^2$$

וע"פ טרנס' לורנץ:

$$\begin{gathered} c\left(t_1' - t_2'\right) = \gamma\left[c\left(t_1 - t_2\right) - \beta\left(x_1 - x_2\right)\right] \\ x_1' - x_2' = \gamma\left[\left(t_1 - t_2\right) - v\left(x_1 - x_2\right)\right] \\ y_1' - y_2' = y_1 - y_2 \\ z_1' - z_2' = z_1 - z_2 \end{gathered}$$

לאחר הצבה נקבל ${s_{12}^2}' = s_{12}^2$.

6.2 הפרדת מאורעות וסיבתיות

6.2.1 סוגי הפרדה

כפי שראינו האינטרוול מוגדר עבור 2 מאורעות.

1. אם $s_{12}^2 > 0$ נאמר כי המאורעות מופרדים זמנית. (כל 2 מאורעות בתוך אותו קונוס אור הם מופרדים זמנית).
2. אם $s_{12}^2 < 0$ נאמר כי המאורעות מופרדים מרחבית. (אם לא קיים קונוס אור המכיל את 2 המאורעות הם מופרדים מרחבית).
3. אם $s_{12}^2 = 0$ נאמר כי המאורעות מופרדים אורית. (מאורעות אלו מקושרים אך ורק באמצעות אותות אור, והקו ביניהם בעל שיפוע 45^o - מהירות האור).

6.2.2 לכל הפרדה זמנית - מערכת בה $x_1' = x_2'$

טענה: נראה שלכל 2 אירועים מופרדים זמנית קיימת מערכת K' שעבורה האירועים מתקיימים באותו המקום.

מסקנה: כיוון שקיימת מערכת בה האירועים מתרחשים באותו המקום, ייתכן קשר סיבתי ביניהם. קשר זה יהיה אפשרי בכל מערכות ייחוס אחרת.

הוכחה: ללא הגבלת הכלליות נבחר מערכת K כך שהאירועים על ציר הx ($y = z = 0$).
נבחר K' בעלת צירים מקבילים לK וכיוון תנועתה מקביל ל$\hat{x}$.
נדרוש שיתקיים:

$$x_1' - x_2' = \gamma \left[(x_1 - x_2) - v\,(t_1 - t_2) \right] = 0$$

ומכך מתקבל התנאי

$$v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} \iff \beta = \frac{x_1 - x_2}{ct_1 - ct_2}$$

וכיוון שהמאורעות מופרדים זמנית מתקיים

$$c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x_1 - x_2}{ct_1 - ct_2} \right)^2 < 1$$

כלומר התקבל $|\beta| < 1$. אז קיימת כזו מערכת יחוס. ■

6.2.3 לכל הפרדה מרחבית - מערכת בה $t_1' = t_2'$

באופן דומה מתקיים עבור מאורעות מופרדים מרחבים מערכת, הפעם עם $|\beta| > 1$, המקיימת את הנדרש.

במערכת הייחוס שמצאנו המאורעות מתרחשים סימולטנית במקומות שונית, ולכן בוודאי לא יתכן ביניהם קשר סיבתי.

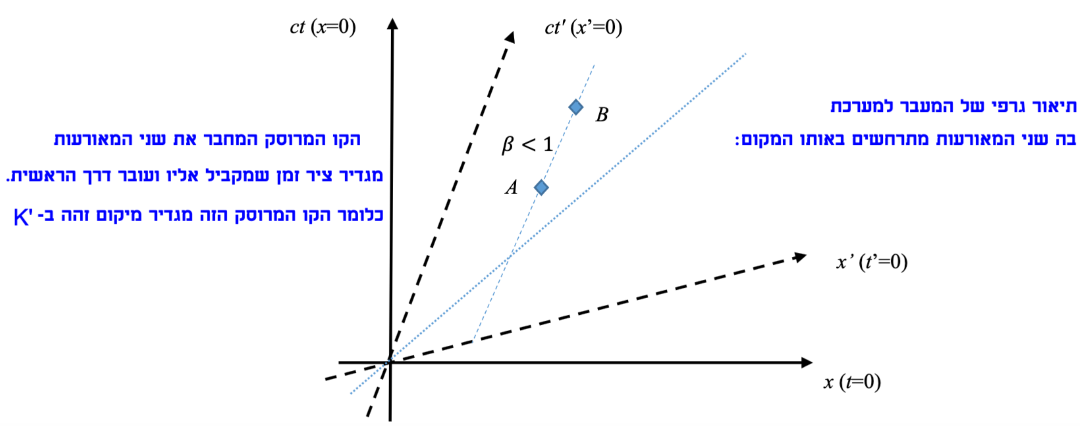
6.2.4 מסקנות - הפרדת אירועים וקשר סיבתי

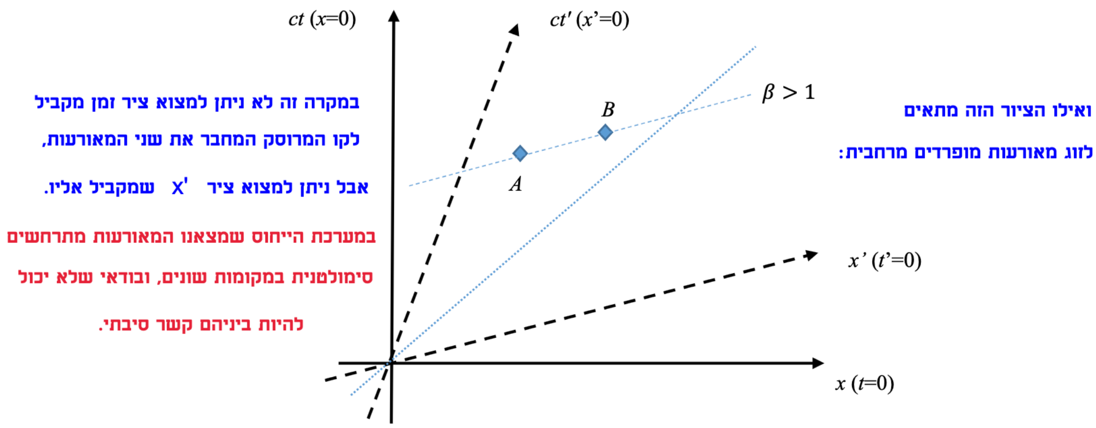
עבור אירועים מופרדים זמנית מתקיים $|\beta| < 1$ וייתכן ביניהם קשר סיבתי.
עבור אירועים מופרדים מרחבים מתקיים $|\beta| > 1$ ולכן לא ייתכן ביניהם קשר סיבתי.

סוג ההפרדה נקבע ע"י האינטרוול שהינו אינווריאנטי, וסוג ההפרדה קובעת אם ייתכן קשר סיבתי.

$$interval \to seperation \to causality$$

על כן האפשרות לקשר סיבתי וגם סוג הפרדה בעצמן תכונות אינוריאנטיות.
במילים אחרות, לא ניתן לעבור בין מערכות שהקשר הסיבתי בין מאורעות בהן הוא שונה.





סיכום:

האינוריאנטיות של האינטרוול שהגדרנו מבטיחה שהסיבתיות נשמרת בכל מערכת ייחוס.
כאשר יש קשר סיבתי סדר המאורעות נשמר אבל כל צופה מודד הפרש זמנים שונה.
אם לא קיים קשר סיבתי (הפרדה מרחבית) סדר המאורעות לא חייב להישמר!

7 זמן מנוחה והתארכות זמן

7.1 פיתוח והגדרה

נדמיין חלקיק בעל מהירות $\vec{u}(t)$ ביחס למערכת אינרציאלית K.
במהלך זמן dt החלקיק זז מרחק $d\vec{x}$ ומתקיים $d\vec{x} = \vec{u}dt$.
האינטרוול המתאים לזמן זה הוא

$$ds^2 = c^2dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2dt^2 - u^2dt^2 = c^2dt^2\left(1-\beta^2\right)$$

עבור dt קטן מספיק מהירות החלקיק קבועה. נגדיר מערכת K' עם מהירות זו - כלומר, מערכת אינרציאלית שביחס אליה, רגעית, החלקיק במנוחה (לאחר מכן יתכן כי החלקיק משנה את מהירותו).
במערכת זו מתקיים $d\vec{x} = 0$ ולכן (נסמן $dt' \equiv d\tau$):

$$ds = cd\tau$$

מאינווריאנטיות האינטרוול מתקיים:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

τ נקרא הזמן העצמי או זמן המנוחה של החלקיק.
זהו הזמן שנמדד במערכת המנוחה של החלקיק.
נסכום על הפרשי הזמן האינפיניטסימלים כדי לקבל את הזמן במערכת K:

$$\Delta t = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

7.2 דוגמאות

+מואונים באטמוספרה

7.2.1 אפקט דופלר יחסותי

אפקט דופלר יחסותי הוא אפקט דופלר עבור גל אור.
נניח יש מקור אור ב$x=0$. זמן המחזור של הגל τ (הזמן בין מקסימום למקסימום).
ויש צופה הנע במהירות v ביחס למקור, שבזמן $t=0$ נמצא במיקום x_0.

נדמיין 2 פולסי אור (שנשלחים בהפרש זמן τ) ממקור האור. נסמן את זמן ומיקום מפגש כל פולס עם הצופה בתור x_1, t_1, x_2, t_2.

$$x_1 = ct_1 = x_0 + vt_1$$
$$x_2 = c\left(t_2 - \tau\right) = x_0 + vt_2$$

נפתור עבור $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ ו$\Delta t \equiv t_2 - t_1$, הפרשי הזמן והמרחק בין שני המאורעות. נגדיר $f = \frac{1}{\tau}$ ו-$\beta = \frac{v}{c}$.

$$\Delta t = \tfrac{c\tau}{c-v} = \tfrac{1}{f}\tfrac{1}{1-\beta}$$
$$\Delta x = v\tfrac{c\tau}{c-v}$$

Δt הוא הזמן בין הגעת פולסי אור אל הצופה, במערכת המקור. לכן $\Delta t'$ יהיה זמן המחזור במערכת הצופה.
במקרה הקלאסי, של אפקט דופלר, פשוט היינו מקבלים $f' = \frac{1}{\Delta t'} = \frac{1}{\Delta t} = f\left(1-\beta\right)$.
במקרה היחסותי, יש להתחשב גם בהתארכות הזמן. לפי טרנס' לורנץ:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)\\ &= \gamma\left(\frac{\tau}{1-\beta} - \frac{v}{c^2}\frac{v\tau}{1-\beta}\right)\\ &= \gamma\frac{\tau}{1-\beta}\left(1-\beta^2\right)\\ &= \tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\end{aligned}$$

ואז השינוי בתדירות הינו

$$\boxed{f' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f}$$

* עוד דרך: הזמן העצמי הוא במערכת הצופה, שם 2 האירועים מתרחשים באותו המקום ($x_1' = x_2' = 0$).
לכן יכולנו גם לומר מיד שמתקיים $\frac{1}{f'} = \underbrace{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}}_{\text{התארכות זמן}} = \frac{1}{f}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

8 גאומטריה היפרבולית

האינטרוול בין שני מאורעות $(t_1, \vec{x}_1)$ ו-$(t_2, \vec{x}_2)$ הוא:

$$s_{12}^2 = c^2 \left(t_1 - t_2\right)^2 - \left|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right|^2 \equiv c^2 t_{12}^2 - \left|\vec{x}_{12}\right|^2$$

כבר ראינו:

1. עבור הפרדה זמנית תמיד ניתן למצוא טרנס' לורנץ אל מערכת שבה האירועים מתרחשים באותו המקום. במערכת זו:

$$s_{12}^2 = c^2 \tau^2 > 0$$

2. עבור הפרדה מרחבית תמיד ניתן למצוא טרנס' לורנץ אל מערכת שבה האירועים מתרחשים באותו הזמן. במערכת זו:

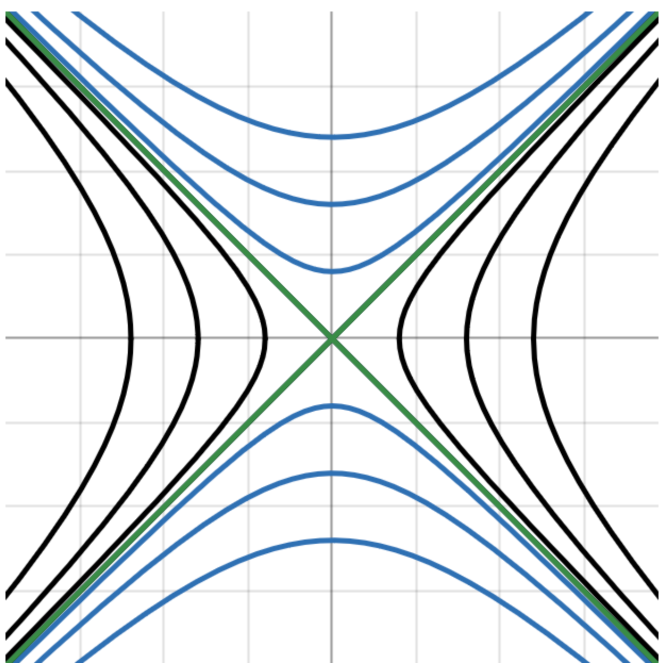
$$s_{12}^2 = -\left|\vec{x}'_{12}\right|^2 < 0$$

3. עבור הפרדה אורית מתקיים:

$$s_{12}^2 = 0$$

כעת נשים לב שביטוי האינטרוול מתאר סט היפרבולות, כאשר כל היפרבולה מוגדרת ע"י הפרמטר s^2:

$$s^2 = y^2 - x^2$$



* יש לשים לב, *זו אינה דיאגרמת מרחב זמן*. הציר האנכי הוא ct_{12} והאופקי x_{12}.

תובנות

1. + ניתן לראות שעבור ההיפרבולות השחורות ct_{12} אינו שומר סימן (סדר האירועים יכול להתחלף) - אלו מתארות $0 > s^2$, הפרדה מרחבית.
   + לעומת זאת עבור הקווים הכחולים ct_{12} אכן שומר סימן - אלו מתארות $s^2 > 0$ כלומר הפרדה זמנית.

2. כל היפרבולה מוגדרת ע"י ערך s^2 - כלומר היא מוגדרת ע"י 2 האירועים של האינטרוול.

3. כל נקודה על היפרבולה מסוימת שייכת למערכת ייחוס אחרת, ומתארת את ct_{12} ו-x_{12}, הפרש זמן ומיקום האירועים.
   לדוגמה -
   + ניתן לראות שעבור מאורעות מופרדים זמנית קיימת נקודה (מערכת) עבורה $x_{12} = 0$.
   + ולכל היפרבולה המתארת מאורעות מופרדים מרחבית קיימת נקודה עבורה $t_{12} = 0$.

4. הענפים השונים של כל היפרבולה המתארת מאורעות מופרדים זמנית נבדלים בסדר האירועים.

9 פרדוקסים

9.1 פרדוקס החניה

9.1.1 הפרדוקס

אליס ובוב קבעו להיפגש במסעדה. אליס מצאה חנייה ברוחב $6m$. היא מתקשרת לומר לבוב. בוב מגיע במהירות $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\gamma=2$) במכונית שאורכה $4m$. לאחר מכן במסעדה:

בוב טוען שהחנייה הייתה קטנה מדי, בעוד אליס טוענת שבחניה היה מקום ל3 מכונית מהסוג של בוב.

9.1.2 פתרון

נסמן את המערכות A,B עבור אליס ובוב. מדידת אורך במערכת B מוגדרת ע"י $t_1'=t_2'$ (קצוות המכונית נמדדות סימולטני).

נרצה למצוא את $L'=x_2'-x_1'$. ע"פ טרנס' לורנץ הפוכה:

$$6m=\gamma\left[\left(x_2'-x_1'\right)-v\left(t_2'-t_1'\right)\right]=\gamma\left(x_2'-x_1'\right)\Rightarrow L'=\frac{6m}{\gamma}=3m$$

אין פלא שבוב חשב שהחניה קטנה מדי.

באופן דומה, מדידה של אורך המכונית של בוב במערכת A תהיה מוגדרת ע"י $t_1=t_2$. ונרצה למצוא $\ell=x_2-x_1$ אורך המכונית (השתמשנו שנית באותם הסימנים אך אין קשר לחישוב הקודם).

ע"פ טרנס' לורנץ הפוכה:

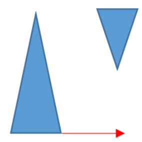
$$4m=\gamma\ell\Rightarrow\ell=2m$$

כלומר **אין פרדוקס**. **שני הצופים צודקים**.

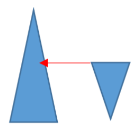
9.2 פרדוקס סטאר וורז

9.2.1 הפרדוקס

אליס O ובוב O' על חלליות זהות באורך L, נעים אחד ביחס לשני במהירות $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\gamma=2)$.
כאשר ראש החללית של אליס מגיע לזנב החללית של בוב, אליס יורה מזנב החללית שלה (ראו איור).
אך היא שכחה להתחשב בהתקצרות החללית של בוב. מהפרספקטיבה שלה היא פספסה (נזניח את זמן תנועת הירייה ונניח שהיא מיידית).



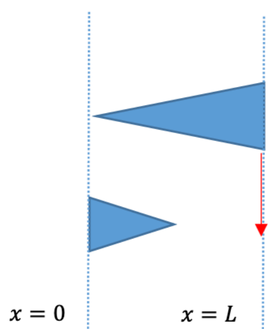
לעומת זאת, מהפרספקטיבה של בוב, הוא חושב שהוא ייפגע, כי בגלל שבמערכת הייחוס שלו החללית של אליס קצרה יותר, כשראש אליס יגיע לזנב בוב, זנב אליס יהיה באמצע החללית של בוב:



אז האם אליס פגעה בבוב או לא?

9.2.2 פתרון

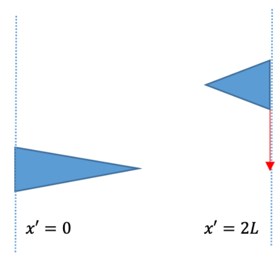
הבעיה היא בחישוב של בוב. בעוד שתי המאורעות -
1) ראש אליס מגיע לזנב בוב
2) אליס יורה מזנבה
הינם סימולטנים במערכת O של אליס, הם אינם סימולטנים במערכת O' של בוב.
נקבע מערכת צירים כך (ציר חיובי בכיוון תנועת O', ימינה):



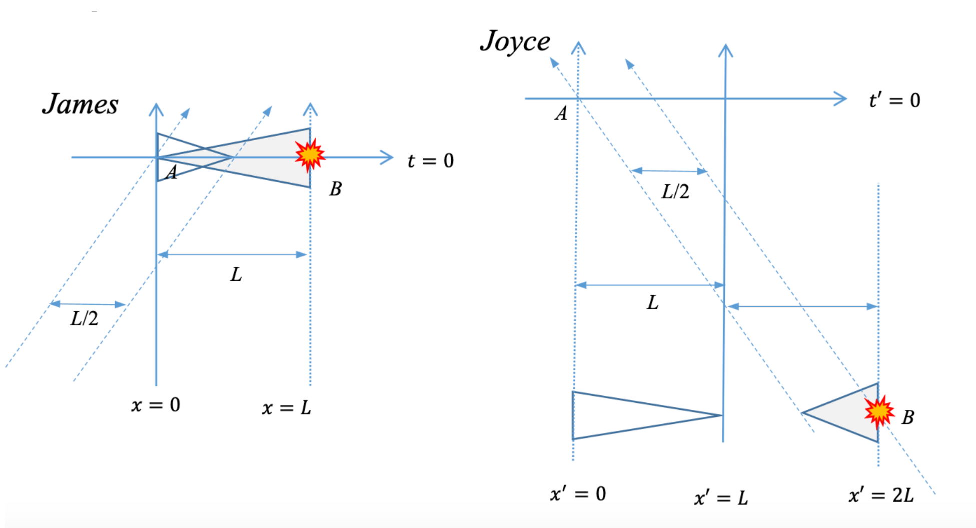
מאורע 1: $x_1=x_1'=0$ ו-$t_1=t_1'=0$.
מאורע 2: $x_2=L$ ו-$t_2=0$.
נמצא את x_2',t_2':

$$x_2'=\gamma\left(x_2-\beta ct_2\right)=\gamma L=2L$$
$$t_2'=\gamma\left(t_2-\beta x_2/c\right)=-\gamma\beta L/c=-\frac{L\sqrt{3}}{c}$$

כלומר זנב אליס נמצא ב-$x'=2L$ בזמן $t'=-\frac{L\sqrt{3}}{c}$, הזמן שבו היא יורה על בוב (כל זה במערכת בוב O').
כלומר בפועל מה שקורה במערכת של בוב:



קיבלנו שבO' אליס בכלל יורה לפני שהגיעה. זה הגיוני בגלל שהמאורעות שהגדרנו מופרדים מרחבית.
(אבל מה עם סיבתיות המאורעות?)
פה $James$ זה אליס ו$Joyce$ זה בוב



9.3 פרדוקס התאומים

9.3.1 הפרדוקס

אחד מהתאומים נוסע ב$\gamma = 2$ במשך 5 שנים, וחוזר במהלך 5 שנים נוספות.

ע"פ התארכות זמן במערכת כדה"א, שעון החללית נע לאט יותר ועל כן האסטרונאוט יחזור צעיר יותר.

במערכת החללית, שעון כדה"א נע לאט יותר ועל כן התאום שנשאר בכדה"א יהיה צעיר יותר.

9.3.2 פתרון

על התאום בחללית (האסטרונאוט) להאיץ כדי לחזור. כלומר הוא אינו במערכת אינרציאלית ולא ניתן להפעיל עליו טרנס' לורנץ - ניתוח הבעיה באמצעות התארכות זמן לא היה לגיטימי.

9.4 מעבר מהירויות

נניח 2 מערכות O ו-O'. בנוסף ישנו גוף במהירות u במערכת O. נרצה למצוא את u', מהירותו במערכת הייחוס O'.

$$u' \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dx - vdt\right)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{dx}{dt}\frac{v}{c^2}}$$

כלומר קיבלנו את המשוואה:

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

ובאופן דומה הטרנספורמציה ההפוכה הינה:

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

10 דינמיקה יחסותית

10.1 מסה ותנע יחסותיים

10.1.1 קצת 4 וקטורים

תנע ואנרגיה לא יחסותיים תלויים במסה האינרציאלית הקבועה m. זה לא בהכרח נכון עבור מהירויות יחסותיות.
נגדיר $m = m(u)$ מסה יחסית ו$m(0) \equiv m_0$ מסת מנוחה.

4 וקטור המקום הינו $X = (ct, \vec{x})$. נניח שמייצג מיקום חלקיק במרחב זמן.
כדי לקבל את 4 וקטור הזמן נגזור לפי זמן המנוחה τ - ראינו כבר ש$\frac{dt}{d\tau} = \gamma c$, $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma u_x$.
נקבל $U = \gamma\left(c, \vec{u}\right)$.
ואז 4 וקטור התנע הינו $P = m_0 U = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u})$.

עבור $\beta << 1$ ניתן לבצע קירוב טיילור ונקבל $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$. כלומר,

$$P^0 = \gamma m_0 c \approx m_0 c + \frac{1}{2} m_0 c \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2}{c}$$

נשים לב שמה שקיבלנו היא האנרגיה הקינטית הניוטונית, עם איבר נוסף שנשאר כאשר $v = 0$, וכל זה חלקי c.
נסמן את האיבר הנוסף E_0 "אנרגיית המנוחה" (ביטוי נורא מוכר..... $E_0 = m_0 c^2$).
אז האנרגיה הכוללת היא אנרגיית המנוחה פלוס האנרגיה הקינטית $E = E_0 + E_k$.

$$\gamma m_0 c = P_0 = \frac{E}{c}$$

10.1.2 מלא הגדרות

זה מאפשר לנו להגדיר את האנרגיה היחסותית:

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2}$$

ולפי איך שהגדרנו את האנרגיה, האנרגיה הקינטית ואנרגיית המנוחה הינן:

$$\boxed{\begin{array}{c} E_0 = m_0 c^2 \\ E_k = \left(\gamma - 1\right) m_0 c^2 \end{array}}$$

והמסה היחסותית:

$$\boxed{m = \gamma m_0}$$

ואת התנע היחסותי

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}}$$

כאשר 4 וקטור התנע הוא

$$\boxed{P=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)=\gamma m_0\left(c,\vec{u}\right)=\left(mc,m\vec{u}\right)}$$

נשים לב שכאשר $\beta\rightarrow 1$ מתקיים $E\rightarrow\infty$. כלומר נדרשת כמות אינסופית של אנרגיה כדי להאיץ חלקיק עם מסה למהירות האור.
דרך נוספת לחשוב על זה היא - המסה היחסותית שואפת לאינסוף ככל ש$\beta\rightarrow 1$ וכך נדרש כוח אינסופי כדי להמשיך לדחוף את החלקיק (אף על פי שלא ראינו עוד התנהגות כוחות ביחסות).

10.1.3 קשרי תנע אנרגיה

במערכת החלקיק, $\gamma=1$ ו-$\vec{u}=0$, ולכן ה4 תנע שלו הינו $P=m_0\left(c,0\right)$. ואז הנורמה שלו היא $||P||^2=m_0^2c^2$.
במערכת כללית, נורמת וקטור ה4 תנע היא $||P||^2=\left(\frac{E}{c}\right)^2-m^2u^2$.
מאינווריאנטיות הנורמה, 2 הביטויים שרשמנו לעיל שווים, ומתקבל הקשר הבא:

$$\boxed{E^2=m_0^2c^4+p^2c^2}$$

מעין משפט פיתגורס משונה... $E^2=E_0^2+\left(pc\right)^2$.
בנוסף ראינו שניתן לכתוב את מסת המנוחה של החלקיק בתור:

$$\boxed{m_0=\frac{||P||}{c}}$$

10.2 דינמיקת מערכת חלקיקים

4 וקטור התנע של מערכת חלקיקים מוגדר בתור סכום ה4 וקטורי תנע של כל חלקיק.

$$P_{sys} = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

דוגמה: נבחן מערכת 2 חלקיקים זהים בעלי תנע שווה בגודלו בכיוונים הפוכים (כלומר אנו במערכת מרכז המסה).

$$P_{sys} = (mc, \vec{p}) + (mc, -\vec{p}) = (2mc, 0)$$

$$M_{sys} = \frac{2mc}{c} = 2m > 2m_0$$

מסקנה: קיבלנו שמסת המנוחה של המערכת כולה, גדולה מסכום מסות המנוחה של מרכיביה.
(דבר זה נכון בכל מערכת ייחוס כיוון שמסת המנוחה אינווריאנטית).

הערה: בניגוד לבגאומטריה אוקלידית שעבור מתקיים $\left|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right| \leq ||\vec{a}|| + \left|\left|\vec{b}\right|\right|$, בגאומטריה היפרבולית $\left|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right|$ יכול להיות קטן, גדול, או שווה ל-$||\vec{a}|| + \left|\left|\vec{b}\right|\right|$ (במקרה זה קיבלנו גדול יותר).

10.3 שימור תנע ואנרגיה

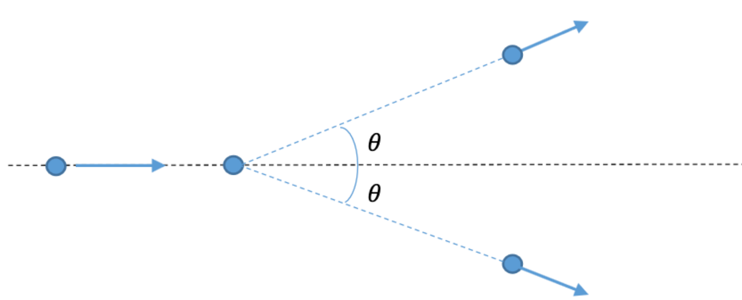
10.3.1 שימור

כאשר אין כוחות חיצוניים 4-וקטור התנע-אנרגיה של המערכת נשמר.

* אפילו אם ישנן התנגשויות פלסטיות בין חלקיקי המערכת , האנרגיה היחסותית נשמרת. (למה?)
(כל עוד אין מעבר אנרגיה או תנע בין המערכת לשאר היקום, "סביבתה").

10.3.2 דוגמה - פיזור

נדגים את שימור התנע-אנרגיה באמצעות מערכת 2 חלקיקים זהים.
בהתחלה: חלקיק a נע ימינה בכיוון חלקיק b שנמצא במנוחה.
בסוף: לאחר ההתנגשות, החלקיקים נעים במהירות זהה בזווית θ כבאיור:



ו:

נרצה: למצוא את θ.

לפני ההתנגשות:

$$p_{a,0}^{(4)} = \left(\frac{E_a}{c}, p_a, 0, 0\right) \quad p_{b,0}^{(4)} = (m_0 c, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow p_{sys,0}^{(4)} = \left(\frac{E_a + E_b}{c}, p_a, 0, 0\right)$$

לאחר ההתנגשות:

$$p_{a,f}^{(4)} = \left(\frac{E}{c}, p\cos\theta, p\sin\theta, 0\right) \quad p_{b,f}^{(4)} = \left(\frac{E}{c}, p\cos\theta, -p\sin\theta, 0\right)$$

$$\Rightarrow p_{sys,f}^{(4)} = \left(\frac{2E}{c}, 2p\cos\theta, 0, 0\right)$$

משימור התנע-אנרגיה:

$$\begin{gathered}2E = E_a + m_0 c^2 \\ 2p\cos\theta = p_a\end{gathered}$$

$*$ את החלק הראשון של התרגיל היה ניתן לקצר. כתבנו את כל הוקטורים סתם שיהיה ברור מה קורה מאחורי הקלעים - להגיע ל2 המשוואות הרלוונטיות נו ביג דיל.

מקשר התנע-אנרגיה ניתן להציב $p = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{c}$ ובדומה עבור p_a.

וכך נקבל 2 משוואות עם 2 נעלמים θ, E.

קל לבודד $E = \frac{1}{2}\left(E_a + m_0 c^2\right)$. נשאר רק להציב ולבודד את θ.

$$2\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}\cos\theta = \sqrt{E_a^2 - m_0^2 c^4}$$

פירוק לגורמים:

$$2\sqrt{\left(E + m_0 c^2\right)\left(E - m_0 c^2\right)}\cos\theta = \sqrt{\left(E_a + m_0 c^2\right)\left(E_a - m_0 c^2\right)}$$

נציב את E

$$\sqrt{\left(E_a + 3m_0 c^2\right)\left(E_a - m_0 c^2\right)}\cos\theta = \sqrt{\left(E_a + m_0 c^2\right)\left(E_a - m_0 c^2\right)}$$

$$\boxed{\cos\theta = \sqrt{\frac{E_a + m_0 c^2}{E_a + 3m_0 c^2}}}$$

נבחן את הגבול הקלאסי, כלומר $\beta << 1$ ו-$E_a \to m_0 c^2$. מתקבל $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ כלומר $\theta = 45^o$.

10.4 $Binding\ \ Energy$

10.4.1 אנרגיה חיובית

ננתח מערכת 2 חלקיקים זהים הקשורים בקפיץ המתנהגת כך:
ב$t=0$ הקפיץ מכווץ.
ב$t>0$ הקפיץ חוזר לאורכו הרפוי והמסות מתנתקות וממשיכות לנוע.

לאחר שהמסות מתנתקות מהקפיץ מתקיים:

$$p_{sys}^{(4)}=(mc,\vec{p})+(mc,-\vec{p})=(2mc,0)$$

ומתקיים שימור תנע-אנרגיה, לכן בכל t זהו וקטור התנע אנרגיה.
על כן מסת המנוחה של המערכת הינה:

$$\Rightarrow M_{sys}=\frac{\left|\left|p_{sys}^{(4)}\right|\right|}{c}=2m=2m_{0}\gamma>2m_{0}$$

כאשר γ מחושב לפי המהירות הסופית של כל חלקיק.
כיוון שאנרגיית המערכת בסוף היא $2\gamma m_{0}c^{2}$ ובהתחלה הייתה אנרגיית הקפיץ + אנרגיית המנוחה, $(2E_{spring}+2m_{0}c^{2}=E_{final})$
מתקבל שאנרגיית הקפיץ עבור כל חלקיק הינה:

$$E_{spring}=m_{0}c^{2}\left(\gamma-1\right)>0$$

*דרך הפתרון דומה לבפיזיקה קלאסית - ההבדל העיקרי הינו שביחסות המסה תלויה באנרגיה הקינטית (מסה=אנרגיה לפי $E=\gamma m_{0}c^{2}$).
בפתרון הקלאסי מסת המערכת $2m_{0}$ וביחסותי $2\gamma m_{0}$.

***מה שראינו בעצם זה שמסת מערכת החלקיקים גדולה מסכום המסות הנפרדות של מרכיביה. זאת בגלל שמסה=אנרגיה, ובנוסף ל$2m_{0}$ ישנה גם המסה שנובעת מה-$positive\ binding\ energy$:

$$\Delta m\equiv\underbrace{M_{sys}}_{2\gamma m_{0}}-\underbrace{\sum_{i}m_{i}}_{2m_{0}}=\frac{E_{spring}}{c^{2}}=2m_{0}\left(\gamma-1\right)$$

.

הtakeaway החשוב פה הוא באמת הקשר $E=mc^{2}$, במקרה זה $\Delta m=\frac{E_{spring}}{c^{2}}$ כאשר E_{spring} היא ה-$binding\ energy$.

$***$**ובנוסף, שמסה אינה נשמרת**. מערכת 2 החלקיקים כאשר הם נפרדים ובמנוחה היא בעלת מסה$2m_{0}$. אך כשהבאנו אותם ביחד, כתוצאה מאנרגיית הקישור החיובית שלהם קיבלנו מסה גדולה יותר (ללא מעבר בין מערכות ייחוס, כלומר, באמת הגדלנו את מסת המנוחה של המערכת).

10.4.2 אנרגיה שלילית - אטום מימן

אטום המימן מורכב מפרוטון אחד ואלקטרון אחד.
במערכת פרוטון ואלקטרון הנמצאים רחוקים אחד מהשני ובמנוחה (מופרדים כך שאין אנרגיית קישור ביניהם) האנרגיה היא פשוט אנרגיית המנוחה ומסת המערכת כמו כן היא פשוט סכום מסות המנוחה.

$$M^{(i)} = m_p + m_e$$

אך באטום המימן, יש אנרגיית קישור בין האלקטרון והפרוטון - והיא שלילית.
לכן:

$$M^{(f)} = M_H < M^{(i)} = m_p + m_e$$

שנית קיבלנו שמסה אינה נשמרת. בחיבור האלקטרון והפרוטון איבדנו אנרגיה, כיוון שמסת מערכת החלקיקים בנפרד גדולה ממסת מערכת החלקיקים כשקשורים באטום המימן. האנרגיה העודפת משתחררת בתור פוטון.

בתהליכים גרעיניים המסה יכולה אף להשתנות בסדר גודל של כ-1% ! כך עובד היתוך גרעיני. כיוון שהמסה קטנה בתהליך ההיתוך (כלומר מתקבלת מערכת עם אנרגיית קישור אף שלילית יותר) האקסטרה אנרגיה משתחררת בתור פוטונים.

10.5 מערכת מרכז מסה

10.5.1 תאוריה

נניח במערכת K נמדד התנע $p^{(4)}=(E/c,\vec{p})$. נעבר למערכת K' הנעה ב-$\beta=\frac{\vec{p}c}{E}$.

$$\begin{pmatrix}E'/c\\p'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta\\-\gamma\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E/c\\p\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}E/c-\beta p\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\frac{E}{c}\left(1-\beta^2\right)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{E}{c}\sqrt{1-\beta^2}\\0\end{pmatrix}$$

כלומר התקבל

$$p'^{(4)}=\left(\frac{E}{c}\sqrt{1-\beta^2},\vec{0}\right)=\left(M_{sys}c,\vec{0}\right)$$

K' היא מערכת מרכז המסה, עבורה תנע המערכת הוא אפס.

10.5.2 דוגמה

נניח פרוטון שנע ומתנגש בפרוטון שבמנוחה. כתוצאה נוצרים פרוטון ואנטי פרוטון. כלומר $p+p\to p+p+\tilde{p}+p$.
מה האנרגיה המינימלית שנדרשת עבור הפרוטון שנע בשביל תהליך זה?
תנע אנרגיה לפני: $\left(\frac{E^2-m_0^2c^4}{c^2}=p^2\right)$

$$p_i^{(4)}=\left(\frac{E_a}{c}+m_pc,\vec{p}_a\right)$$

או במערכת מרכז המסה:

$$M_{sys}=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{E_a}{c}+m_pc\right)^2-\left(\frac{E_a^2}{c^2}-m_0^2c^2\right)}=\frac{1}{c}\sqrt{2m_p\left(E_a+m_pc^2\right)}$$

$$\Rightarrow p_{CM,i}^{(4)}=\left(M_{sys}c,\vec{0}\right)$$

ותנע אנרגיה המינימלי אחרי (כאשר החלקיקים שנוצרו נמצאים במנוחה במערכת מרכז המסה):

$$p_{CM,f}^{(4)}=\left(4m_pc,\vec{0}\right)$$

ואז נדרוש שימור תנע-אנרגיה.

$$M_{sys}=4m_p$$

$$\tfrac{1}{c}\sqrt{2m_p\left(E_a+m_pc^2\right)}=4m_p$$

$$2m_p\left(E_a+m_pc^2\right)=16m_p^2c^2$$

$$E_a+m_pc^2=8m_pc^2$$

$$E_a=7m_pc^2$$

בנוסף לפרוטון יש אנרגיית מנוחה כמובן, אז קיבלנו שנדרשת אנרגיה קינטית מינימלי של $5.63GeV \approx 6m_pc^2$.

$*$יש 2 דרכים להשתמש בשימור אנרגיה.

1) להשוות ישירות בין 4 וקטורים. אך אז חובה להשוות בין 4 וקטורים באותה מערכת ייחוס.

2) להשוות בין גדלים אינווריאנטים כגון הנורמה $||p^{(4)}||$.

10.6 פוטונים

10.6.1 חלקיק במהירות האור

ראינו שהתנע היחסותי הינו $\vec{p}=\gamma m_0\vec{v}$ והאנרגיה היחסותית $E=\gamma m_0c^2$.
! (מפריע לי שאנחנו משתמשים בהגדרות אלה אף על פי שהן לא מוגדרות עבור $v=c$).
לכן ניתן לכתוב את התנע (נבודד אותו) בתור $\vec{p}=\frac{E}{c^2}\vec{v}$.

ואז אם נציב את מהירות האור $v=c$, נקבל $\boxed{E=pc}$.
כעת נמצא את מסת גוף שנע במהירות כזו:

$$m_0=\frac{\left|\left|p^{(4)}\right|\right|}{c}=\frac{\frac{E^2}{c^2}-p^2}{c}=0$$

כלומר מסת המנוחה של גוף הנע במהירות האור היא בהכרח אפס.

פוטונים הם חלקיקי אור חסרי מסה שכמובן נעים במהירות האור. לכל פוטון אנרגיה הניתנת ע"פ $E=pc$.
לפוטונים יש אנרגיה קינטית, אך אין להם אנרגיית מנוחה (אין מערכת ייחוס שבה הם במנוחה!).

10.6.2 אנרגיית פוטון על פי פלאנק

כדי לבדוק כיצד האנרגיה של הפוטון משתנה בין מערכות ייחוס.

נניח פוטון בעל אנרגיה E שנע ימינה במערכת K:

$$p^{(4)}=\frac{1}{c}\left(E,E\right)$$

ומערכת K' עם מהירות β ביחס ל K.

$$p'^{(4)}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta\\ -\gamma\beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ E\end{pmatrix}=\frac{\gamma\left(1-\beta\right)}{c}\begin{pmatrix}E\\ E\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\begin{pmatrix}E\\ E\end{pmatrix}$$

כלומר התקבל

$$\boxed{E'=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}E}$$

ומאפקט דופלר ידוע

$$\boxed{\nu'=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu}$$

כלומר הם קשורים בקבוע פרופורציה. קבוע זה הוא קבוע פלאנק h.

$$\boxed{E=h\nu}$$

∗**אפקט דופלר:** כעת כשידוע לנו $E=h\nu$, כדי למצוא את אפקט דופלר לכל מערכת כל מה שנדרש עלינו זה למצוא קבוע את הטרנס' $E'=\alpha E$ (כאשר α תינתן ע"פ טרנס' לורנץ) ונקבל את הקשר $\nu'=\alpha\nu$.

∗קבוע פלאנק הינו $h=6.63\cdot10^{-34}J$.

∗**מערכת פוטונים:** לפוטון אחד אין מסה. אבל למערכת של 2 פוטונים תיתכן מסה - אם הם נעים בכיוון הפוכים מתקיים $p^{(4)}=(E/c,E/c)+(E/c,-E/c)=(2E/c)$. ואז $M_{sys}=\frac{2E/c}{c}=\frac{2E}{c^2}$.

∗ 2 הפוטונים שלעיל נותחו במערכת מרכז המסה. בכל מערכת ייחוס אחרת בנוסף לאנרגיה יהיה להם תנע, אף על פי שמהירות האור זהה בכל מערכת ייחוס - אך אפקט הדופלר שונה עבור 2 הפוטונים.

∗מסת מערכת 2 הפוטונים קריטית עבור תהליך איון חלקיקים ($annihilation$), לדוגמה אלקטרון+פוזיטרון.

∗גם התהליך ההפוך (2 פוטונים ← אלקטרון ופוזיטרון) אפשרי.

10.6.3 איון עם פוטון יחיד

אלקטרון ופוזיטרון לא יכול לעבור איון ולהפוך לפוטון יחיד, כיוון שדבר זה יפר את שימור האנרגיה. נראה זאת.

4 תנע הפוטון: $p_\gamma^{(4)}=\frac{1}{c}(E,E)$.

4 תנע 2 החלקיקים (באותה המערכת) $p_1^{(4)},p_2^{(4)}$.

משימור תנע-אנרגיה:

$$p_\gamma^{(4)}=p_1^{(4)}+p_2^{(4)}$$

ניתן לקחת את הנורמה של 2 האגפים, כך המשוואה בלתי תלויה ממערכת ייחוס. ניתן לבחור את מערכת מרכז המסה של 2 החלקיקים, כך שיתקיים:

$$\underbrace{0}_{||p_\gamma||}=\underbrace{2m_ec}_{||p_1+p_2||}$$

אך כמובן שלא יתכן שיתקיים.

∗**האינטואיציה** היא שלא תתכן מערכת יחוס שבה תנע הפוטון הוא אפס.

לכן בחרנו בדיוק מערכת שבה תנע החלקיקים אפס כדי להראות שלא ייתכן המעבר, אשר מפר שימור תנע אנרגיה

10.6.4 אפקט קומפטון

פוטון הפוגעים במתכת חוזרים עם שינוי תדר.
נשתמש במערכת יחידות $c = 1$.

פוטון עם אנרגיה $E = p$ נע לאורך ציר x, מתנגש עם אלקטרון שנמצא במנוחה ופונה זווית θ לאחר ההתנגשות.
נסמן לאחר ההתנגשות - $\tilde{p}^{(4)}$ תנע אנרגיה הפוטון וב-$p_e^{(4)}$ תנע אנרגיה האלקטרון.
לפי שימור אנרגיה:

$$\begin{aligned} E + m_e &= \tilde{E} + E_e \\ &= \tilde{E} + \sqrt{m_e^2 + p_e^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(E + m_e - \tilde{E}\right)^2 = m_e^2 + p_e^2$$

לפי שימור תנע:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{\tilde{p}} + \vec{p}_e \\ \Rightarrow & p^2 + \tilde{p}^2 - 2p\tilde{p}\cos\theta = p_e^2 \end{aligned}$$

נציב ונשתמש ב$E = p$, $\tilde{E} = \tilde{p}$:

$$\left(E + m_e - \tilde{E}\right)^2 = m_e^2 + E^2 + \tilde{E}^2 - 2E\tilde{E}\cos\theta$$

$$-2\tilde{E}E - 2m_e\tilde{E} + 2m_eE = -2E\tilde{E}\cos\theta$$

$$m_e\left(E - \tilde{E}\right) = \tilde{E}E\left(1 - \cos\theta\right)$$

נציב $E = h\nu = \frac{h}{\lambda}$. נרצה למצוא את $\Delta\lambda = \tilde{\lambda} - \lambda$:

$$m_eh\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) = \frac{h^2}{\lambda\tilde{\lambda}}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{m_ec}\left(1 - \cos\theta\right)}$$

כאשר בביטוי האחרון החזרנו ליחידות רגילות.
ואז "אורך גל קומפטון" של האלקטרון מוגדר בתור $\boxed{\lambda_e = \frac{h}{m_ec}}$. פוטון בעל אורך גל קומפטון של אלקטרון הוא בעל אנרגיה $E = m_ec^2$.
*כלומר ניתן להגדיר את אורך גל קומפטון של חלקיק, בתור אורך הגל של פוטון בעל אנרגיית המנוחה של אותו החלקיק.

10.7 כוחות

נוכל להגדיר כוח בדומה לאיך שהגדרנו את שאר 4 הוקטורים, ע"י הגדלים הקלאסיים המקבילים.

$$F^{(4)} \equiv \frac{dP^{(4)}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \vec{f}\right)$$

כאשר $\vec{f} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$ הכוח כמו במכניקה קלאסית.
מצד שני, נגדיר את התאוצה היחסותית $A^{(4)} = \frac{dU^{(4)}}{d\tau}$ (ראו נספח לחישוב).

$$\frac{dP^{(4)}}{d\tau} = m\frac{dU^{(4)}}{d\tau} = mA^{(4)} = \gamma m\left(\frac{\gamma^3 \vec{u}\cdot\vec{a}}{c}, \frac{\gamma^3 \vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u} + \gamma\vec{a}\right)$$

ומהשוויון $F^{(4)} = mA^{(4)}$ נקבל

$$\vec{f} = \frac{\gamma^3 \vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u} + \gamma\vec{a}$$

אם נגביל את התנועה למימד אחד, נקבל

$$\boxed{f = ma\gamma^3}$$

(וכמובן לתוצאה זו יכולנו להגיע ישירות מ$f = \frac{dp}{dt} = m\frac{d(\gamma v)}{dt} = ... = ma\gamma^3$).

דוגמה: תנועה בכוח קבוע
לדוגמה, עבור חלקיק במסה m אשר עליו פועל כוח f קבוע, תתקבל משוואה הדיפרנציאלית (נגדיר $a_0 = \frac{f}{m}$). נניח שהחלקיק מתחיל במנוחה ובהפרדת משתנים נוכל לפתור:

$$\int_0^t a_0 dt = \int_0^u \gamma^3 du$$

ובאינטרציה (יש לפתוח את הביטוי של γ. אפשר להציב $u = c\sin v$ ולהשתמש בזהות $\tan\left(\arcsin(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. בכל אופן מתקבל $\int \gamma du = u\gamma$):

$$a_0 t = u\gamma$$

ובפתרון נקבל:

$$v(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}$$

ניתן לראות שכמצופה, לעומת מכניקה קלאסית בה תחת כוח קבוע $v \to \infty$, ביחסות מתקבל $v \to c$.
ובחישוב $x = \int v dt$ מתקבל

$$x(t) = \frac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2} - 1\right)$$

11 תכונות מתמטיות של מרחב הזמן

ראינו שטרנספורמציית לורנץ נובעת מאינווריאנטיות הביטוי:

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

∗ למעשה - החבורה של כל הטרנספורמציות שתחתן גודל זה אינווריאנטי נקראת חבורת לורנץ ההומוגנית.
∗ מעקרון היחסות נובע שעל חוקי היקום להיות בלתי תלויים ממערכת צירים/ייחוס. לכן אנו צריכים אובייקטים מתמטים שאינם תלויים במערכת צירים - טנזורים. (וקטור וסקלר הינם מקרים פרטיים של טנזורים).
∗אך כדי לתאר וקטורים (או כל טנזור) עלינו להשתמש במערכת צירים. טנזור עצמו אינו תלוי במערכת הצירים - אך בתיאורו אנו משתמשים ברכיבים התלויים במערכת צירים, ורכיבים אלה עוברים טרנספורמציה בצורות שונות כתלות בסוג הטנזור.

11.1 כללי טרנספורמציה פשוטים

מעכשיו נסמן את הקורדינטות של 4 וקטור המיקום שלנו $x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$.
נניח טרנספורמציה כלשהי שנותנת קורדינטות חדשות כתלות בישנות $x^\alpha \to x'^\alpha\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$.

טנזור כלשהו בנקודה x מוגדר באמצעות סוג הטרנספורמציה שעוברים רכיביו (הקורדינטות שלו) תחת הטרנספורמצייה $x \to x'$:

1. סקלר (טנזור מדרגה 0) הוא בעל דרגת חופש אחת שאינו משתנה בטרנספורמציה. לדוגמה s^2.
2. וקטור (טנזור מדרגה 1) הוא בעל n דרגות חופש (n הוא מימד המרחב).

רכיבי וקטור יכולים לעבור טרנספורמציה באחת מ2 דרכים, כתלות בסוג הוקטור.
וקטור קונטרה-וואריאנטי: $A^\alpha \equiv \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$.

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta$$

∗ הופעת β פעמיים מרמזת על סכימה $\sum_{\beta=0}^{3}$ אך לא חייבים לכתוב אותה. זהו "הסכם הסכימה של איינשטיין".
∗ יש לשים לב ש $J_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$ הם רכיבי מטריצת היעקוביאן.

וקטור קו-ווריאנטי: $B_\alpha = (B_0, B_1, B_2, B_3)$. ("דואלי")

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta$$

∗כעת הרכיבים $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}$ הם רכיבי מטריצת היעקוביאן בכיוון ההפוך מהקודם, ומחושבים מהטרנספורמציה ההופכית $x^\beta\left(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}\right)$.
∗ מיקום האינדקס משמעותו סוג הטרנספורמציה שעוברים רכיבי הטנזור.

קו או קונטרה ווריאנטיות מתארים איך רכיבי הטנזור עוברים טרנספורמציה ביחס לרכיבי וקטורי הבסיס.

בפרקטיקה -
וקטור המקום x^α הוא וקטור קונטרה-ווריאנטי.
וקטור הנגזרות $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $(\nabla^{(4)})$ הוא קו-ווארינאטי. קל לראות זאת מכלל השרשרת: $\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$.

11.2 המטריקה

המכפלה הפנימית מוגדרת בין וקטור ו-וקטור דואלי ותוצאתה סקלר (גודל אינוואריאנטי).

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha$$

עד עכשיו כשביצענו מכפלה סקלרית ביצענו אותה כך: (נחליף את סדר האיברים מסיבה שאחכ תהיה ברורה)

$$B \cdot A = \left(B^{\beta}\vec{e}_{\beta}\right) \cdot \left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right) = B^{\beta}\left(\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}\right) A^{\alpha}$$

מכפלת וקטורי הבסיס $\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}$ מגדירה את גאומטריית המרחב.
לדוגמה, עבור מרחב אוקלידי ובסיס אורתונורמלי $\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.
לכן נורמת וקטור היא $||V|| = \sqrt{V \cdot V} = \sqrt{\left(V^0\right)^2 + \left(V^1\right)^2}$ - משפט פיתגורס.

נגדיר את המטריקה g כך שרכיביה הינם:

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}}$$

קל לראות מאיך שהחלפנו את סדר האיברים מקודם, שמתקיים:

$$\boxed{B_{\alpha} = g_{\alpha\beta}B^{\beta}}$$

כפי שראינו ביחסות פרטית נורמת וקטור מוגדרת ע"פ $s = \sqrt{\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2}$.
כלומר המטריקה ביחסות פרטית, "מטריקת מינקובסקי", הינה:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

המטריקה היא קו-ואריאנטית "פעמיים". יש לה 2 אינדקסים תחתונים. זה הגיוני כיוון שכל רכיב מורכב ממכפלת 2 אובייקטים קו-וריאנטים (וקטורי בסיס) שכל אחד מהם עובר טרנס' קו וריאנטית. לכן רכיבי המטריקה עוברים טרנס' ככה:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}g_{\alpha\beta}$$

באמצעות היעקוביאן J ניתן לכתוב זאת כך (בכתיב מטריצות):

$$g' = J^T g J$$

למעשה ניתן היה למצוא את חבורת לורנץ באמצעות הדרישה שכל איבריה Λ ישאירו את המטריקה זהה - $g = \Lambda^T g \Lambda$.
או בהינתן טרנס' לורנץ היה ניתן למצוא את המטריקה כך.

קיימת גם מטריקה קונטרה וריאנטית $g^{\alpha\beta}$, שהינה הופכית המטריקה הקו וריאנטית $g_{\alpha\beta}$.

11.3 כללי טרנספורמציה

טנזור מדרגה d הוא בעל n^d דרגות חופש, כאשר n מימד המרחב (ביחסות $n = 4$).
לטנזור יש סוג (k, l) כאשר k מספר האינדקסים הקונטרה וריאנטים ו-l מספר האינדקסים הקו וריאנטים.
לדוגמה- סקלר הוא טנזור מסוג $(0, 0)$.
וקטור הוא טנזור מסוג $(1, 0)$.
וקטור דואלי (קו וריאנטי) הוא טנזור מסוג $(0, 1)$.

המטריקה היא טנזור מסוג $(0,2)$ והמטריקה ההופכית מסוג $(2,0)$.

סוג הטנזור קובע את טרנספורמציית רכיביו. למשל טנזור מסוג $(2,1)$ 2 טרנס' קונטרה וריאנטיות ואחת קו וריאנטית:

$$T_{\sigma'}^{\mu'\nu'}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma'}}T_{\sigma}^{\mu\nu}$$

וכו וכו, כך ניתן להכליל לכל טנזור מסוג (k,l). דרגת הטנזור היא כמובן $d=k+l$.

ניתן לחשוב על טנזור מסוג (k,l) בתור אובייקט מתמטי שעובר טרנספורמציה כפי שהגדרנו.
אך דרך נוספת היא בתור פונקציה הלוקחת k וקטורים דואלים ו-l וקטורים ומחזירה סקלר.
כך לדוגמה המטריקה $(0,2)$ לוקחת 2 וקטורים ומחזירה סקלר (המכפלה הסקלרית של המרחב).
אך המטריקה $(0,2)$ יכולה גם לקחת וקטור 1 ולהחזיר וקטור דואלי $(0,1)$ - למעשה כבר ידענו את זה, זהו הקשר $x_\alpha=g_{\alpha\beta}x^\beta$.

11.4 נגזרות

ראינו כבר ש-$\nabla^{(4)}$ וקטור קו-ווריאנטי שרכיביו $\partial_\alpha\equiv\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.
כלומר גזירה לפי רכיב של וקטור קונטרה וריאנטי עוברת טרנספורמציה כרכיב וקטור קו וריאנטי.
נשתמש במטריקה ההופכית ונמצא נגזרת שעוברת טרנספורמציה קונטרה וריאנטית:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\equiv\partial^\alpha=g^{\alpha\beta}\partial_\beta$$

כלומר ניתן לכתוב:

$$\partial_\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},-\vec{\nabla}\right)$$

ואז ניתן לכתוב:

$$\partial_\alpha A^\alpha=\partial^\alpha A_\alpha=\frac{\partial A}{\partial x^0}+\vec{\nabla}\cdot A$$

די מגניב, כי לדוגמה אפשר לכתוב משוואת רצף בתור $\partial^\alpha A_\alpha=0$.
גם אפשר לכתוב את ה-4לפלסיאן כך:

$$\left[\nabla^{(4)}\right]^2=\partial_\alpha\partial^\alpha=\frac{\partial}{\partial x^{0^2}}-\nabla^2$$

גם מאוד מגניב, כי אז אפשר לכתוב את משוואת הגל כך

$$\partial_\alpha\partial^\alpha\psi^\beta=0$$

12 נספחים

12.1 אינווריאנטיות האינטרוול

נראה שהאינטרוול $s^2 = c^2t^2 - x^2$ אינווריאנטי תחת טרנס' לורנץ.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c^2t'^2 - x'^2 &= (\gamma ct - \beta\gamma x)^2 - (-\beta\gamma ct + \gamma x)^2 \\ &= \gamma^2c^2t^2 \cancel{-2\gamma^2 ct\beta x} + \beta^2\gamma^2x^2 - \beta^2\gamma^2c^2t^2 + \cancel{2\gamma^2 ct\beta x} - \gamma^2x^2 \\ &= c^2t^2\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) - x^2\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) \\ &= c^2t^2\gamma^2\left(1-\beta^2\right) - x^2\gamma^2\left(1-\beta^2\right) \\ &= c^2t^2 - x^2 \end{aligned}$$

12.2 טרנס' גליליי על משוואת הגל

נראה שמשוואת הגל *אינה* אינווריאנטית תחת טרנספורמציית לורנץ.
נתונה טרנס' גליליי $t'=t$ ו-$\vec{x}'=\vec{x}-\vec{v}t$ (הטרנס' ההפוכה: $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{v}t'$).
במערכת O' מתקיים משוואת הגלים:

$$\left(\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi=0$$

נעביר את האופרטור $\Box'\equiv\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$ (אופרטור הגל, נקרא דלאמברטיאן) למערכת O.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}&=\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\end{aligned}$$

ואז הפעלת אופרטור הגזירה פעמיים נותן

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)$$

ועבור ∇' נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'}&=\cancelto{0}{\frac{\partial t}{\partial x'}}\frac{\partial}{\partial t}+\cancelto{1}{\frac{\partial x}{\partial x'}}\frac{\partial}{\partial x}+\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial x'}}\frac{\partial}{\partial y}+\cancelto{1}{\frac{\partial z}{\partial x'}}\frac{\partial}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

ובדומה עבור ∂_y,∂_z. כלומר $\nabla'=\nabla$.
נציב ונקבל:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\right)\psi=0$$

לא אינווריאנטי בעליל.

12.3 טרנס' לורנץ על משוואת הגל

נראה שמשוואת הגל אינווריאנטית תחת טרנספורמציית לורנץ.
נתונה טרנס' לורנץ בציר x

$$\begin{gathered} x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{gathered}$$

משוואת הגל בO:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0$$

נראה שהיא מתקיימת גם בO'.
כמובן מתקיים $\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$ ו$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$ ולכן גם גם הנגזרות השניות שוות.
עבור גזירה לפי x,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \cancelto{0}{\frac{\partial y'}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y'} + \cancelto{0}{\frac{\partial z'}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ &= \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 = \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

ועבור t,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \cancelto{0}{\frac{\partial y'}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial y'} + \cancelto{0}{\frac{\partial z'}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \\ &= -\gamma v\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left(-\gamma v\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 = \gamma^2\beta^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

וכך מתקבל לבסוף:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \cancel{-2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}} + \gamma^2\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \gamma^2\beta^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \cancel{+2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}} - \gamma^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

(כאשר בשלב זה השתמשנו פעמיים ב$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$).
אכן מתקבל:

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

12.4 תאוצה יחסותית

בהינתן 4 וקטור מקום זמן X^{μ} הגדרנו את 4 וקטור המהירות $U^{\mu} \equiv \frac{dX^{\mu}}{d\tau}$.

$$\boxed{X^{(4)} = (ct, \vec{x})}$$

והנורמה:

$$\left|\left|X^{(4)}\right|\right| = \sqrt{c^2t^2 - x^2} = c\tau$$

וקטור המהירות הקלאסי מוגדר $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$. לכן נקבל:

$$U^{(4)} \equiv \frac{dX^{(4)}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dX^{(4)}}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}(ct, \vec{x}) \Rightarrow \boxed{U^{(4)} = \gamma(c, \vec{u})}$$

והנורמה:

$$\left|\left|U^{(4)}\right|\right| = \gamma\sqrt{c^2 - u^2} = c\gamma\sqrt{1 - \beta^2} = c$$

נמשיך ונגדיר את 4 וקטור התאוצה $A^{\mu} \equiv \frac{dU^{\mu}}{d\tau}$.
וקטור התאוצה הקלאסי מוגדר $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt}$.

$$A^{(4)} \equiv \frac{dU^{(4)}}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma\vec{u}) = \gamma(\dot{\gamma}c, \dot{\gamma}\vec{u} + \gamma\vec{a})$$

נחשב את הנגזרות הנדרשות. ראשית, כשגוזרים 4 וקטור בריבוע מקבלים

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\right) = \frac{\gamma^3\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

ונציב כדי לקבל ביטוי בומבסטי.

$$\boxed{A^{(4)} = \left(\frac{\gamma_u^4\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}, \frac{\gamma_u^4\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u} + \gamma_u^2\vec{a}\right)}$$

12.5 טרנספורמציית מהירות

נניח יש 2 מערכות O, O' עם מהירות יחסית $\vec{v}$, ונרצה לבטא את הקשר בין $\vec{u}, \vec{u}'$.
כבר ראינו איך הרכיב המקביל למהירות עובר טרנס' (כמו $\tanh\left(\theta_1 + \theta_2\right)$).
נראה שוב פה עבור השלמות.
(בהנחה ש$\vec{v}$ בכיוון $\hat{x}$ אז מסמנים $u_\perp = \frac{dy}{dt}$ ו-$u_\parallel = \frac{dx}{dt}$).
עבור רכיב מקביל ל$\vec{v}$:

$$u'_\parallel = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dx - vdt\right)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_\parallel - v}{1 - \frac{vu_\parallel}{c^2}}$$

נחשב עבור רכיב מאונך:

$$u'_\perp \equiv \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_\perp}{\gamma\left(1 - \frac{vu_\parallel}{c^2}\right)}$$

12.6 טרנספורמציית תאוצה

כעת נניח חלקיק נע במהירות $\vec{u}$ במערכת O, ומערכת O' נעה במהירות $\vec{v}$ ביחס ל-O.
מהקשרים של טרנס' המהירות (בעמוד הקודם), נוכל לגזור למצוא:

$$du'_{\parallel} = \left(\frac{\partial u'_{\parallel}}{\partial u_{\parallel}}\right) du_{\parallel} + \left(\frac{\partial u'_{\parallel}}{\partial u_{\perp}}\right) du_{\perp} = \frac{du_{\parallel}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}\right)}$$

ובאופן דומה,

$$du'_{\perp} = \left(\frac{\partial u'_{\perp}}{\partial u_{\parallel}}\right) du_{\parallel} + \left(\frac{\partial u'_{\perp}}{\partial u_{\perp}}\right) du_{\perp} = \frac{u_{\perp} \left(v/c^2\right) du_{\parallel}}{\gamma_v \left(1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}\right)^2} + \frac{du_{\perp}}{\gamma_v \left(1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}\right)}$$

כך שנוכל לחשב את $a'_{\parallel}, a'_{\perp}$:

$$\boxed{a'_{\parallel} = \frac{du'_{\parallel}}{dt} = \frac{a_{\parallel}}{\gamma_v^3 \left(1 - \frac{v u_{\parallel}}{c^2}\right)^3}}$$

$$\boxed{a'_{\perp} = \frac{a_{\perp}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}\right)^2} + \frac{v u_{\perp} a_{\parallel}}{c^2 \gamma_v^2 \left(1 - \frac{v u_{\parallel}}{c^2}\right)^3}}$$