יחסות כללית

30 בספטמבר 2024

תוכן העניינים

חלק I
טנזורים וכאלה

1 טרנספורמציות, אינווריאנטיות והמטריקה

צריך להגדיר כמה דברים מחדש...

1.1 וקטור

נתחיל מלהגדיר את הוקטור מחדש.

הגדרת הוקטור (קונטרה וריאנטי): אובייקט מתמטי שרכיביו עוברים טרנספורמציה באופן *הפוך* מוקטורי הבסיס. על כן הוא נקרא קונטרה וריאנטי.

לדוגמה: במעבר בסיס ב$\mathbb{R}^2$ מ-$B_1 = \{\hat{x}, \hat{y}\}$ ל-$B_2 = \left\{\frac{\hat{x}}{2}, \frac{\hat{y}}{2}\right\}$ וקטור כלשהו $\vec{v} = (x, y)_{B_1}$ הופך להיות $\vec{v} = (2x, 2y)_{B_2}$. קל לראות שהוקטור עבר טרנספורמציה הפוכה מזו של וקטורי הבסיס.

הערה: הוקטור עצמו הוא אינווריאנטי, כלומר אינו משתנה תחת טרנספורמציה. אך על מנת לתאר אותו מתמטית אנו משתמשים במערכת קורדינטות, ורכיבי הוקטור אכן משתנים (ווריאנטים) בין מערכות קורדינטות שונות.

1.2 המטריקה

נשים לב שהמכפלה הסקלרית היא למעשה פונקציה $f : V^2 \to \mathbb{R}$ כאשר V מרחב וקטורי.
נכתוב מכפלה סקלרית בבסיס כלשהו $\vec{e_i}$.
*למיקום האינדקסים משמעות שנראה בהמשך, וע"פ הסכם הסכימה של איינשטין אין צורך לכתוב כל פעם $\sum_{i,j}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(v^i \vec{e}_i\right) \cdot \left(w^j \vec{e}_j\right) = v^i w^j \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) = v^i w^j g_{ij}$$

כאשר הגדרנו את המטריקה:

$$\boxed{g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}$$

בבסיס אורתונורמלי קל לראות שנקבל δ_{ij} רכיבי מטריצת היחידה, כלומר המכפלה הסקלרית הידועה של סכימת מכפלת האיברים המתאימים $v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3$.

המטריקה היא תכונה של המרחב/הבסיס והיא מתארת כיצד נמדדים אורכים וזוויות. לרוב איננו מתעסקים איתה כיוון שהמרחב אוקלידי (שטוח) ובקורדינטות קרטזיות $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ המטריקה היא מטריצת היחידה $g = I$.

לדוגמה בקורדינטות פולריות נקבל מטריקה שונה כיוון ש$\left|\hat{\theta}\right| = r$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

נשתמש במטריקה רבות על מנת לתאר את עקמומיות המרחב.
*מהגדרתה קל לראות שהיא מטריצה סימטרית.

1.3 וקטור דואלי

ניתן לחשוב על פעולת המכפלה הסקלרית בדרך אחרת. נגדיר אובייקט מתמטי "חדש" (אבל בתכלס הוא פשוט פונקציה).
שמו וקטור דואלי, והוא שייך למרחב הוקטורי הדואלי V^*.
כל $v^* \in V^*$ הוא פונקציה הלוקחת וקטור ומחזירה סקלר $v^* : V \to \mathbb{R}$.
לכל $v \in V$ קיים $v^* \in V^*$ מתאים. כלומר קיימת העתקה הפיכה $g : V \to V^*$.
בעצם מה שתיארנו כעת הוא המכפלה הסקלרית $v^* = v \cdot \_\_$. כך $v^*(u) = v \cdot u \in \mathbb{R}$.

אך סקלרים (כמו $v^*(v)$) הם גדלים אינוואריאנטים.
לכן בעוד ש-v עובר טרנספורמציה $v \to Av$, v^* עובר את הטרנספורמציה ההפוכה $v^* \to \left(A^{-1}\right)^T v^*$.
כלומר וקטורים דואלים הם קו-ווריאנטים, רכיביהם עוברים טרנספורמציה יחד עם וקטורי הבסיס.

וכיוון ש-$v^*(v) = v \cdot v = v^i v^j g_{ij}$, מתקבל ש-$v_i^* = v^j g_{ij}$. (אם כבר שמתם לב - מיקום האינדקס מסמל קו/קונטרה ווריאנטיות).

2 נגזרות חלקיות כוקטורי בסיס

3 דיפרנציאלים כוקטורי בסיס דואלי

4 סמלי כריסטופל וגאודזים

4.1 משמעות וחשיבות הגאודז

ביחסות כללית מרחב הזמן הוא עקום והמטריקה כבר אינה מטריקת מינקובסקי $\eta_{\mu\nu}$ בכל מקום במרחב.
אך ידוע שאור נע בקו ישר - יש להגדיר קו ישר במרחב עקום - "גאודז".
ניתן להגדיר קו כללי בתור מסלול פרמטרי $\vec{R}(\lambda)$ במרחב.
ניתן להגדיר תאוצה לאורך מסלול זה, $\frac{d^2R}{d\lambda^2}$, ולה רכיב אנכי ומשיקי (למרחב):

$$\frac{d^2R}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2R}{d\lambda^2}\right)_{normal} + \left(\frac{d^2R}{d\lambda^2}\right)_{tangential}$$

נאמר כי מסלול הוא גאודז אם תאוצתו אנכית למרחב לחלוטין, או באופן שקול אין לו תאוצה משיקית.

דוגמה: מסלול על כדה"א (מרחב דו מימדי עקום שניתן לתאר בתור עקמומיות אקסטרינזית ב3 מימדים) הוא גאודז אם התאוצה לאורכו היא רדיאלית לחלוטין, כלומר כלפי מעלה/מטה לחלוטין עבור צופה על כדה"א שהולך את המסלול.

4.2 פיתוח משוואת הגאודז

4.2.1 תאוצת המסלול

משוואת הגאודז הינה:

$$\left(\frac{d^2R}{d\lambda^2}\right)_{tangential} = 0$$

נמצא את $\frac{d^2R}{d\lambda^2}$, כאשר קורדינטות (פנימיות/אינטרנזיות, לדוגמה על כדה"א קווי רוחב ואורך) המרחב הן u^i.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2R}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{du_i}{d\lambda}\frac{\partial R}{\partial u^i}\right) \\
=& \frac{d^2u^i}{d\lambda^2}\frac{\partial R}{\partial u^i} + \frac{du^i}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial R}{\partial u^i}\right) \\
=& \frac{d^2u^i}{d\lambda^2}\frac{\partial R}{\partial u^i} + \frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i}\right)
\end{aligned}
$$

4.2.2 נגזרת שנייה וכריסטופל

אנו רוצים לבטא את התאוצה לחלוטין כצירוף לינארי (צ"ל) של בסיס המרחב בנקודה ($\frac{\partial R}{\partial u^i}$) והוקטור המאונך למרחב $\hat{n}$ (האם לא יתכן שיהיה יותר מאחד?). על כן נבטא את $\frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i}$ כצ"ל שכזה. ביטוי זה הוא למעשה השינוי בוקטורי הבסיס כתלות במיקום.

נגדיר את המקדם של וקטור הבסיס ה-k בצ"ל זה כ-Γ^k_{ij} (אלו הם *סמלי כריסטופל*) ומקדם הוקטור $\hat{n}$ כ-L_{ij} (נקרא second fundemental form).

$$
\frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial R}{\partial u^k} + L_{ij}\hat{n}
$$

נרצה למצוא את סמלי כריסטופל (אגב הם נקראים גם $connections$).
כדי להיפטר מ-$\hat{n}$ נבצע מכפלה סקלרית של המשוואה יחד עם וקטור הבסיס $\frac{\partial R}{\partial u^l}$ ($\hat{n}$ מוגדר להיות אורתוגונלי אליו), ונראה שמתקבלת באגף ימין המטריקה (נכפיל במטריקה ההופכית).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i}\cdot\frac{\partial R}{\partial u^l} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial R}{\partial u^k}\cdot\frac{\partial R}{\partial u^l} = \Gamma^k_{ij}g_{kl} \\
\Rightarrow \boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i}\cdot\frac{\partial R}{\partial u^l}g^{lk}}
\end{aligned}
$$

ניתן לבצע תהליך דומה כדי לקבל את L_{ij} (הפעם מכפלה סקלרית של המשוואה עם $\hat{n}$):

$$
\boxed{L_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i}\cdot\hat{n}}
$$

4.2.3 תוצאת הפיתוח

לבסוף נציב בחזרה בביטוי לתאוצה ונקבל:

$$
\frac{d^2R}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\right)\frac{\partial R}{\partial u^k} + \left(L_{ij}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\right)\hat{n}
$$

וכמובן מעניין אותנו רק הרכיב המשיקי (שמתאפס). כלומר משוואת הגאודז הינה

$$
\boxed{\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} + \frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\Gamma^k_{ij} = 0}
$$

כלומר כל מסלול פרמטרי $\vec{R}\left(u^1(\lambda), u^2(\lambda), \ldots\right)$ המקיים את המשוואה לעיל הוא גאודז, מסלול של קרן אור.

4.3 דוגמה - מישור

ניתן לכתוב מישור בתור $\vec{R}\left(u,v\right)=\vec{p}+u\vec{a}+v\vec{b}$. נרצה למצוא פתרון כללי עבור מסלול שמקיים את משוואת הגאודז במרחב המישור. מצופה שנקבל קו ישר.

1. נמצא את סימני הכריסטופל $\Gamma_{ij}^{k}=\frac{\partial^{2}R}{\partial u^{j}\partial u^{i}}\cdot\frac{\partial R}{\partial u^{l}}g^{lk}$ (יש למצוא את המטריקה ההופכית יחד עם הנגזרות הראשונות, והשניות).
2. נציב ונפתור את משוואת הגאודז. $\frac{d^{2}u^{k}}{d\lambda^{2}}+\frac{du^{i}}{d\lambda}\frac{du^{j}}{d\lambda}\Gamma_{ij}^{k}=0$.

$$\frac{\partial R}{\partial u}=\vec{a}\quad\frac{\partial R}{\partial v}=\vec{b}$$

$$\frac{\partial^{2}R}{\partial u^{2}}=0\quad\frac{\partial^{2}R}{\partial u\partial v}=0\quad\frac{\partial^{2}R}{\partial v^{2}}=0$$

כל הנגזרות השניות התאפסו, לכן התקבל שכל סימני הכריסטופל הם אפס (לא היינו צריכים אפילו לחשב את המטריקה). זה הגיוני כיוון שסימני הכריסטופל משמעותם כיצד משתנים וקטורי הבסיס מנקודה לנקודה במרחב, אך על מישור וקטורי הבסיס קבועים.

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{\partial^{2}R}{\partial u^{j}\partial u^{i}}\cdot\frac{\partial R}{\partial u^{l}}g^{lk}=0\cdot\frac{\partial R}{\partial u^{l}}g^{lk}=0$$

כעת נציב במשוואת הגאודז $\Gamma_{ij}^{k}=0$ ונקבל משוואה דיפרנציאלית על רכיבי $\vec{R}\left(\lambda\right)$ $\left(u^{k}\right)$.
במקרה זה קל לראות שהפתרון הוא כל פונקציה לינארית.

$$\frac{d^{2}u^{k}}{d\lambda^{2}}=0\Rightarrow\boxed{\begin{array}{c}u=u_{0}+k_{u}\lambda\\ v=v_{0}+k_{v}\lambda\end{array}}$$

אם נציב u,v אלה נקבל $\vec{R}\left(\lambda\right)=\left(\vec{p}+u_{0}\vec{a}+v_{0}\vec{b}\right)+\lambda\left(k_{u}\vec{a}+k_{v}\vec{b}\right)$. קו ישר!

4.4 דוגמה - כדור ברדיוס 1

כדור בעל רדיוס 1 $\vec{R}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ ניתן לתאר כך:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \sin u \cos v \\ y(u,v) &= \sin u \sin v \\ z(u,v) &= \cos u \end{aligned}$$

נחזור שנית על התהליך, בדומה לדוגמה הקודמת. הפעם יותר מלוכלך...

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial u} &= \cos u \cos v \frac{\partial R}{\partial x} + \cos u \sin v \frac{\partial R}{\partial y} - \sin u \frac{\partial R}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= -\sin u \sin v \frac{\partial R}{\partial x} + \sin u \cos v \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned}$$

נמשיך לגזור...

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} = -\sin u \cos v \frac{\partial R}{\partial x} - \sin u \sin v \frac{\partial R}{\partial y} - \cos u \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial v^2} = -\sin u \cos v \frac{\partial R}{\partial x} - \sin u \sin v \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} = -\cos u \sin v \frac{\partial R}{\partial x} + \cos u \cos v \frac{\partial R}{\partial y}$$

כעת נוכל למצוא את המטריקה ההופכית... נזכור $g_{ij} = \frac{\partial R}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial R}{\partial u^j}$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \to g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix}$$

זמן לסימני כריסטופל.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 R}{\partial u^j \partial u^i} \cdot \frac{\partial R}{\partial u^l} g^{lk}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial u^2} \tfrac{\partial R}{\partial u} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial u^2} \tfrac{\partial R}{\partial v} \tfrac{1}{\sin^2 u} = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} \tfrac{\partial R}{\partial u} = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} \tfrac{\partial R}{\partial v} \tfrac{1}{\sin^2 u} = \cot u$$

$$\Gamma_{22}^1 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial v^2} \tfrac{\partial R}{\partial u} = -\sin u \cos u$$

$$\Gamma_{22}^2 = \tfrac{\partial^2 R}{\partial v^2} \tfrac{\partial R}{\partial v} \tfrac{1}{\sin^2 u} = 0$$

וואו. רוב סימני הכרסיטופל יצאו אפס...

לבסוף צריך להציב במשוואה הגאודז $\frac{d^2u^k}{d\lambda^2}+\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\Gamma^k_{ij}=0$.

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2}-\cos(u)\sin(u)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2}+2\cot(u)\frac{dv}{d\lambda}\frac{du}{d\lambda}=0$$

קיבלנו משוואת דיפרנציאליות מצומדות. לא נפתור אותן עבור המקרה הכללי.

אך בהצבת $u=\theta_0$ ו-$v=k\lambda$ נקבל ש$\theta_0=\frac{\pi}{2}$. כלומר קו המשווה הוא גאודז! אבל כבר ידענו את זה חחח. לפי סימטריה כל מעגל גדול על הכדור הינו גאודז.

קווי גובה אחרים (שאינם קו המשווה) *אינם* גאודזים - התאוצה במסלול שכזה היא בכיוון מרכז המעגל, אך מרכז המעגל אינו מרכז הכדור במקרה זה. כלומר ישנה תאוצה משיקית.

4.5 נגזרת קו-וריאנטית

נגזרת קו-וריאנטית היא כלי המאפשר לחשב שינוי של שדות טנזורים, הלוקח בחשבון את השינוי בוקטורי הבסיס.

5 בעיית קפלר

בעיית קפלר עוסקת בשני גופים במסות m_1, m_2 תחת פוטנציאל כוח מרכזי $f(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$.

$$m_1\ddot{r}_1 = f(r)\hat{r}$$
$$m_2\ddot{r}_2 = -f(r)\hat{r}$$

נגדיר $r = r_1 - r_2$ ונחסיר בין המשוואות.

$$\ddot{r} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\hat{r}$$

נגדיר $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}} = \mu$ המסה המצומצמת. כך מתקבלת המשוואה עבור גוף אחד במסה μ תחת כוח $f(r)$.

$$\mu\ddot{r} = f(r)$$

כעת נפתור עבור המסלול באמצעות שימור אנרגיה.

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

נפתח את ביטוי המהירות בקורדינטות פולריות $v^2 = \left(\dot{r}\hat{r} + \dot{\theta}r\hat{\theta}\right)^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$.
בנוסף קיים רק כוח רדיאלי על כן $\sum\tau = 0$ ויש שימור תנע זוויתי. $L = r \times p = \mu v_\theta r = \mu\dot{\theta}r^2$.
ניתן לכתוב את האנרגיה בתור:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r)$$

מצאנו קורלציה/הקבלה למערכת חלקיק אחד כשהחלפנו למסה מצומצמת. כעת ניתן להחליף לאנרגיה פוטנציאלית "אפקטיבית" כך שהאנרגיה תראה ממש כמו זו של חלקיק לאורך מימד אחד.

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r)$$
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

זהו רק טריק מתמטי. אין כוח פיזיקלי המוביל לפוטנציאל החדש שהגדרנו.
מכך נובע:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U_{eff}(r)\right]}$$

ואז בהפרדת משתנים נקבל:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U_{eff}(r)\right]}} = t}$$

מהתנע הזוויתי בלבד ידוע לנו $\frac{d\theta}{dt}=\frac{L}{\mu r^2}$. כלומר ניתן להשתמש ב$r(t)$ שמצאנו לעיל, ואז $\theta(t)$ הינו:

$$\boxed{\theta(t)=\int_0^t \frac{dt}{r^2}}$$

לבסוף במטרה למצוא את המסלול $r(\theta)$ נשתמש בכלל השרשרת. $\frac{d\theta}{dr}=\frac{d\theta}{dt}/\frac{dr}{dt}$ ואת נגזרות אלה אנחנו כבר יודעים.

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{L}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2\left[E-U_{eff}(r)\right]}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta=L\int_0^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2\mu\left[E-U_{eff}(r)\right]}}}$$

יש לשים לב שבכל המקרים לעיל הגדרנו $r(0)=\theta(0)=0$ ולכן באינטגרציה קיבלנו רק את הרדיוס/זווית ברגע t כלשהו (בהתאם לגבול העליון של האינטגרל).

5.1 כבידה

נציב כעת $U_{eff}(r)=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}-\frac{C}{r}$ כאשר $C=Gm_1m_2$. כלומר המשוואה למסלול $r\left(\theta\right)$ הינה

$$\theta=L\int_0^r \frac{dr}{r\sqrt{2\mu Er^2+2\mu Cr-L^2}}$$

אם נגדיר $r_0\equiv\frac{L^2}{\mu C}$ ו $\epsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu C^2}}$ נקבל את הפתרון:
(דרך הפתרון היא הצבת משתנה s; $r=\frac{1}{s+\frac{\mu C}{L^2}}$, $\frac{dr}{r}=-\frac{ds}{s+\frac{\mu C}{L^2}}$)

$$r=\frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$$

אשר הם חתכים קונים! (עיגול, אליפסה, פרבולה והיפרבולה). וואו איזה יפה.